第 4 回　Integral

問題 4.1. 区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & (x \in \mathbb{Q}) \\ (\sin x)^4 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

の積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$ の値を求めよ.

問題 4.2. $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可積分とする.

(1) $f = g$ a.e. ならば $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$ を示せ.

(2) $f < g$ a.e. , $\mu(A) > 0$ ならば $\displaystyle\int_A f d\mu < \int_A g d\mu$ を示せ.

問題 4.3. $f : X \to [0, \infty]$ を可測関数とする.

(1) $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0$ $\mu-$a.e. を示せ.

(2) $\displaystyle\int_X f d\mu < \infty \implies f < \infty$ $\mu-$a.e. を示せ. またこの逆が成立しない例を挙げよ.

問題 4.4. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ を可測関数とし, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f dx = 0$ とする.

(1) f が恒等的に 0 とは限らないことを示せ.

(2) f が連続ならば, f は恒等的に 0 であることを示せ.

問題 4.5. $f : X \to \mathbb{R}$ は可測で, 任意の可測集合 A に対し $\displaystyle\int_A f d\mu \geqslant 0 \implies f \geqslant 0$ $\mu-$a.e. を示せ.

問題 4.6. Fatou の補題の一般形を示せ. つまり, $\{f_n\}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数列, g を非負値可積分関数, $|f_n| \leq g$ $\mu-$a.e. ならば,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

問題 4.7. 単調収束定理の非負の仮定を落としたときの反例を 1 つ挙げよ.

問題 4.8. $\{f_n\}, f : X$ 上の $\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数, $0 \leq f_n \leq f \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ とする. このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu-$a.e. ならば, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ であることを示せ.

問題 4.9. $\dfrac{1}{x}$ が $(0, 1)$ で可積分でないことを示せ.

問題 4.10. $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ を示せ.

問題 4.11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ を求めよ.

問題 4.12. (1) $\displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-(2m-1)x} - e^{-2mx}\right) dx \quad (m \in \mathbb{N})$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ を求めよ.

問題 4.13. (1) $x > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ne^{-nx} = 0$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty ne^{-nx}dx = 1$ を示せ.

(3) (2) では優収束定理が使えない理由を示せ.

(4) $f(x)$ が $x = 0$ で連続かつ $x \geq 0$ で有界または可積分であるとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty ne^{-nx}f(x)dx$ を求めよ.

問題 4.14. f を X 上の可測関数で $0 < \displaystyle\int_X f(x)^2 d\mu(x) < \infty$ とする. $\alpha > 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n^\alpha \left(1 - \cos\left(\frac{f(x)}{n}\right)\right) d\mu(x) \text{ を求めよう.}$$

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^\alpha(1 - \cos(f/n))$ を求めよ.

(2) $\alpha > 2$ のときは Fatou の補題を用いよ.

(3) $0 < \alpha \leq 2$ のときは優収束定理を用いよ.

問題 4.15. (1) $n \geq 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx$ をガンマ関数を用いて表せ.

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$ を求めよ.

問題 4.16. $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\cos(2xy)dy$ とおく. このとき,

(1) $F'(x) + 2xF(x) = 0$ を示せ.

(2) $F(x)$ を求めよ.

問題 4.17. 実数 α に対して, $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$ とおく.

(1) $J(\alpha)$ は α について微分可能であることを示し, 導関数を求めよ.

(2) $J(\alpha)$ を求めよ.

問題 4.18. $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2-x^2/t^2}dt$ とおく.

(1) F の満たす微分方程式を作れ.

(2) F を求めよ.

問題 4.19. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty$ のとき, $F(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-2\pi ix\xi}f(x)dx$ とおく.

(1) $F(\xi)$ は有界連続であることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|dx < \infty$ ならば, $F(\xi)$ は微分可能であることを示せ.

問題 4.20.