# 第 4 回　Integral

**問題 4.1.** 区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{400} & (x \in \mathbb{Q}) \\ (\sin x)^4 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

の積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$ の値を求めよ.

**問題 4.2.** $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可積分とする.

(1) $f = g$ a.e. ならば $\displaystyle\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$ を示せ.

(2) $f < g$ a.e. , $\mu(A) > 0$ ならば $\displaystyle\int_A f d\mu < \int_A g d\mu$ を示せ.

！ (3) 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して $\displaystyle\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が成立しても, $f = g$ a.e. とは限らないことを示せ.

**問題 4.3.** $f : X \to [0, \infty]$ を可測関数とする.

(1) $\displaystyle\int_X f d\mu = 0 \iff f = 0$ $\mu-$a.e. を示せ.

(2) $\displaystyle\int_X f d\mu < \infty \implies f < \infty$ $\mu-$a.e. を示せ. またこの逆が成立しない例を挙げよ.

**問題 4.4.** $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ を可測関数とし, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f dx = 0$ とする.

(1) $f$ が恒等的に 0 とは限らないことを示せ.

(2) $f$ が連続ならば, $f$ は恒等的に 0 であることを示せ.

**問題 4.5.** $f : X \to \mathbb{R}$ は可測で, 任意の可測集合 $A$ に対し $\displaystyle\int_A f d\mu \geqslant 0 \implies f \geqslant 0$ $\mu-$a.e. を示せ.

**問題 4.6.** Fatou の補題の一般形を示せ. つまり, $\{f_n\}$ を $\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数列, $g$ を非負値可積分関数, $|f_n| \leq g$ $\mu-$a.e. ならば,

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

**問題 4.7.** 単調収束定理の非負の仮定を落としたときの反例を 1 つ挙げよ．非負でなくとも下から可積分関数で抑えられれば良かったが, そちらの仮定を落としたときの反例も挙げよ.

**問題 4.8.** $\{f_n\}, f : X$ 上の $\overline{\mathbb{R}}$ 値可測関数, $0 \leq f_n \leq f \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ とする．このとき, $\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \mu-$a.e. ならば, $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ であることを示せ.

**問題 4.9.** $\dfrac{1}{x}$ が $(0,1)$ で可積分でないことを示せ.

**問題 4.10.** $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$ のとき, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx = 0$ を示せ.

**問題 4.11.** $(0,\infty)$ 上の非負関数 $f$ が可積分でリプシッツ連続のとき, $\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n} f(n) = 0$ を示せ,

**問題 4.12.** $(f_j)$ を $X$ 上の可積分列とし, $\sum_{j=1}^{\infty} \int_X |f_j|dx < \infty$ とする．このとき $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ は収束し,

$$\int_X \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(x)dx$$

が成立することを示せ.

**問題 4.13.** $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ $(0 < a < b)$ に対し, 以下を示せ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|dx = \infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = 0$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は可積分で, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \log \dfrac{b}{a}$

**問題 4.14.** $f$ は $[a.b]$ 上の可積分関数とする．任意の $c \in [a,b]$ に対し, $\int_a^c f(x)dx = 0$ であるとき, $f = 0$ a.e. on $[a,b]$ であることを示せ.

**問題 4.15.** $f$ は $\mathbb{R}$ 上で可積分, $f \geqslant 0$ とする．$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^n dx$ が存在し, 有限値となるための必要十分条件を求めよ.

**問題 4.16.** (1) $\displaystyle\int_0^\infty \left(e^{-(2m-1)x} - e^{-2mx}\right) dx \quad (m \in \mathbb{N})$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ を求めよ.

**問題 4.17.** $(f_n), (g_n)$ を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数列 , $f, g$ を $\mathbb{R}$ 上可積分関数とし, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n = f$ , $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n = g$ を満たすとする. このとき,

$$|f_n(x)| \leqslant g_n(x),\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty g_n(x)dx = \int_{-\infty}^\infty g(x)dx$$

ならば,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f_n(x)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$

を示せ.

**問題 4.18.** $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x, y \leqslant z \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1\}$ と定める. このとき,

$$\int_X z \max\{x,y\} dxdydz$$

を求めよ.

**問題 4.19.** $f$ を $X$ 上の可測関数で $0 < \displaystyle\int_X f(x)^2 d\mu(x) < \infty$ とする. $\alpha > 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n^\alpha \left(1 - \cos\left(\frac{f(x)}{n}\right)\right) d\mu(x)$$

を求めよ.

**問題 4.20.** (1) $x > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ne^{-nx} = 0$ を示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty ne^{-nx}dx = 1$ を示せ.

(3) (2) では優収束定理が使えない理由を示せ.

(4) $f(x)$ が $x=0$ で連続かつ $x \geq 0$ で有界または可積分であるとき,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty ne^{-nx}f(x)dx$$

を求めよ.

**問題 4.21.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}dx$ を求めよ.

**問題 4.22.** 自然数 $n$ に対して

$$A_n = \int_0^\pi \frac{nx^2}{1+nx}\cos x dx, \quad B_n = \int_0^\pi \frac{nx}{1+nx}\cos x dx$$

とする. このとき数列 $\{A_n\}$ , $\{B_n\}$ の収束・発散を調べよ.

**問題 4.23.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間, $\rho : X \to [0,\infty]$ を可測関数とする. $\rho\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ を

$$\rho\mu(E) := \int_E \rho d\mu$$

と定める.

(1) $\rho\mu$ は測度であることを示せ.

(2) 任意の非負可測関数 $f : X \to [0,\infty]$ に対し,

$$\int_X f d(\rho\mu) = \int_X f\rho d\mu$$

が成立することを示せ.

**問題 4.24.** 可測関数 $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_0^\infty |\{f > t\}|dt$$

を示せ.

**問題 4.25.** 可測関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対し,

$$\int_{\mathbb{R}} |\{f=t\}|dt = 0$$

を示せ.

**問題 4.26.** $f$ を $X$ 上の可積分関数とする. 任意の $\varepsilon>0$ に対し, ある $\delta>0$ が存在し,

$$\mu(E)<\delta \implies \left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$$

が成立することを示せ.

**問題 4.27.** $f$ が $X$ 上可積分ならば,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\{|f|>\lambda\}} |f|d\mu = 0$$

が成立することを示せ. またこの逆は成立しないが, $\mu(X)<\infty$ なら成立することを示せ.

**問題 4.28.** $A\subset\mathbb{R}$ を可測集合とし, $f_n$ は $A$ 上可積分で, 関数 $f$ に $A$ 上一様収束するとする.

(1) $\mathcal{L}(A)<\infty$ ならば, $f$ も $A$ 上可積分で,

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n dx = \int_A f dx$$

を示せ.

(2) $\mathcal{L}(A)=\infty$ のときの反例を挙げよ.

**問題 4.29.** $f$ は $\mathbb{R}$ 上可積分とする. 以下の等式を示せ.

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |f(x+y)-f(x)|dx = 2\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$$

**問題 4.30.** $[0,\infty)$ 上の $[0,\infty)$ に値をもつ連続関数 $f(x)$ を考える．リーマン積分として $\displaystyle\lim_{C\to\infty}\int_0^C f(x)dx$ が存在するとき，$f$ はルベーグ積分の意味で $[0,\infty)$ 上可積分であることを示せ.

**問題 4.31.** $f$ は $(a,b)$ 上微分可能, $f'$ は $(a,b)$ 上有界とする．以下を示せ.

$$\int_c^d f'(x)dx = f(d) - f(c) \quad (a < \forall c < \forall d < b)$$

**問題 4.32.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可積分でないことを示せ.

**問題 4.33.** $f$ は $\mathbb{R}^n$ 上の可積分関数とし, $g(x,r) = \displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)dy$ と定める.

(1) $x \in \mathbb{R}^n$ を固定すると, $g$ は $r$ に関して連続であることを示せ.

(2) $r > 0$ を固定すると, $g$ は $x$ に関して一様連続で, $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} g(x,r) = 0$ を示せ.

**問題 4.34.** $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする．$f$ は $X$ 上の可積分関数とし, $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $g(r) = \displaystyle\int_{B_r} f d\mu$ と定める．$g$ が連続であることと, $\mu(\partial B_r) = 0$ なることは同値であることを示せ.

**問題 4.35.** $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とし, $X = \mathbb{R}^n$ , $f$ は $X$ 上の可積分関数とする. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{B(0,1/n)} f d\mu = 0$ か.

**問題 4.36.** (1) $n \geq 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}dx$ をガンマ関数を用いて表せ.

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ のとき, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$ を求めよ.

**問題 4.37.** $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\cos(2xy)dy$ とおく．このとき,

(1) $F'(x) + 2xF(x) = 0$ を示せ.

(2) $F(x)$ を求めよ.

**問題 4.38.** 実数 $\alpha$ に対して, $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\alpha x)dx$ とおく.

(1) $J(\alpha)$ は $\alpha$ について微分可能であることを示し, 導関数を求めよ.

(2) $J(\alpha)$ を求めよ.

**問題 4.39.** $f$ を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とする. $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y} dx$ は次の性質をもつことを示せ.

(1) $F(x)$ は $0 < x < \infty$ で連続.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty$

(3) $F(x)$ は $0 < x < \infty$ で $C^\infty$ 級.

**問題 4.40.** $f$ を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $g(t)$ を

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-t^2 x^2} dx$$

と定める.

(1) $g$ は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

(2) $g$ は $t > 0$ で微分可能であることを示せ.

(3) $\lambda > 0$ に対し, $h(\lambda) = \sqrt{\lambda} \displaystyle\int_0^\infty g(t) e^{-\lambda t^2} dt$ とおく. $\displaystyle\lim_{\lambda \to \infty} h(\lambda)$ を求めよ.

**問題 4.41.** $x \geqslant 0$ 上で定義された非負値連続関数 $f$ が $\displaystyle\int_0^\infty x f(x) dx < \infty$ を満たすとする. $\phi(t) = \displaystyle\int_0^\infty f(x) (\sin tx)^2 dx$ とおく.

(1) $\phi$ は $\mathbb{R}$ 上 $C^1$ 級であることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\phi(t)}{t^2} dt < \infty$ を示せ.

**問題 4.42.** 次を満たす関数 $f$ の例を 1 つ挙げよ.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続で可積分.

(ii) $\displaystyle\lim_{|x| \to \infty} f(x) \neq 0$.

**問題 4.43.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が一様連続で可積分の場合, $\displaystyle\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ が成立することを示せ.

**問題 4.44.** 次を満たす可測関数列 $\{f_k\}$ の例を 1 つ挙げよ.

(i) すべての $k$ に対して $0 \leqslant f_k(x) < \infty$.

(ii) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ は存在しない.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} f_k(x)dx < \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx$

**問題 4.45.** $X = [0,1]$ , 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ で, $0 \leqslant f(x) < \infty$ a.e. かつ $\int_X f dx = \infty$ なるものが任意に与えられたとする. このとき次の条件を満たす $X$ 上の可測関数列 $\{f_n\}$ が存在することを示せ.

(i) 任意の $n$ に対し, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$ a.e.

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ a.e.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)dx = \infty$.

(iv) 任意の $n$ に対し, $\displaystyle\int_X f_n(x)dx < \infty$.

**問題 4.46.** 問題 4.45. で $X = \mathbb{R}$ としても成立することを示せ.

**問題 4.47.** 次を満たす関数 $f(t,x)$ の例をそれぞれ 1 つずつ挙げよ.

(1) $\partial_t \int f(t,x)dx$ と $\int \partial_t f(t,x)dx$ は有限値だが, 値が等しくない.

(2) $\partial_t \int f(t,x)dx$ は有限値だが, $\int \partial_t f(t,x)dx$ は有限値でない.

(3) $\partial_t \int f(t,x)dx$ は有限値でないが, $\int \partial_t f(t,x)dx$ は有限値.