第1回　σ-algebras , Outer measures , Measures

問題 1.1. $\mathcal{F} = \{E \subset X \mid E$ または E^cは有限集合 $\}$, $\mathcal{G} = \{E \subset X \mid E$ または E^cは可算集合 $\}$ とおく.

(1) $\mathcal{F}$ は有限加法族であることを示せ.

(2) $\mathcal{F}$ が σ-加法族となる X の条件を求めよ.

(3) $\mathcal{G}$ は σ-加法族であることを示せ.

(4) $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$ を示せ.

問題 1.2. X が無限集合とする. $\mathcal{S} = \{\{x\} \mid x \in X\}$, $\mathcal{S}' = \{\{xy\} \mid x, y \in X\}$ とおく. また, $\mathcal{G}$ は問題 1.1 のものとする.

(1) $\sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{S}') = \mathcal{G}$ を示せ.

(2) X が有限集合のとき, $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{G}, \sigma(\mathcal{S}') \neq \mathcal{G}$ を示せ.

問題 1.3. $\emptyset \neq A \subset X$ に対し, $S_A = \{B \subset X \mid B \subset A$ または $B^c \subset A\}$ とおく. S_A は σ-加法族であることを示せ.

問題 1.4.

(1) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を σ-加法族とする. $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ は σ-加法族か.

(2) $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_N$ を σ-加法族 , $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ とする. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} \mathcal{A}_n$ は σ-加法族か.

(3) $(\mathcal{A}_n)$ を σ-加法族 , $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ とする. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ は σ-加法族か.

問題 1.5.

(1) $\mathcal{A}$ は σ-加法族で, 互いに素な空でない無限集合列 $\{E_\lambda\}$ を含むとする. このとき $\mathcal{A}$ は非可算集合であることを示せ.

(2) $\mathcal{A}$ が無限集合な σ-加法族とすると, $\mathcal{A}$ は非可算集合であることを示せ.

問題 1.6. $(X, \mathcal{M}, \mu)$: 測度空間とする. $\mu_E(A) = \mu(E \cap A) \quad (\forall A \in \mathcal{M})$ で μ_E を定めると, μ_E は測度であることを示せ.

問題 1.7. $\mu_1, ..., \mu_n$ を $(X, \mathcal{M})$ 上の測度, $a_1, ..., a_n \in [0, \infty)$ とする. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$ も $(X, \mathcal{M})$ 上の測度であることを示せ.

問題 1.8. $\mathcal{M}$ 上の測度 μ は, 任意の $E, F \in \mathcal{M}$ に対し, $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = \mu(E) + \mu(F)$ を満たすことを示せ.

問題 1.9. $\mathcal{M}$ 上の測度 μ および $E_n \in \mathcal{M}$ に対し, 以下を示せ.

(1) $\mu(\liminf_{n\to\infty} E_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$

(2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$ ならば $\limsup_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} E_n)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ ならば $\mu(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$ ならば $\mu(\liminf_{n\to\infty} (E_n)^c) = \mu(X)$

問題 1.10. $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{M}$ に対し, $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \backslash B_n)$ を示せ.

問題 1.11. $\mathcal{M}$ を X 上の σ-加法族とする. $\{\mu_k\} : \mathcal{M}$ 上の測度の族とし, $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A)$ で μ を定める.

(1) μ_k が単調増加であるとき, μ が測度であることを示せ.

(2) μ_k が単調減少であるとき, μ が測度になるとは限らない. 例を挙げよ.

問題 1.12. $\mathcal{M}$ を X 上の σ-加法族, $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が semifinite である, つまり

$$E \in \mathcal{M}, \mu(E) = \infty \Rightarrow \exists F \subset E \text{ s.t. } F \in \mathcal{M}, 0 < \mu(F) < \infty$$

を満たすとする.

(1) $\mu(E) = \infty$ とする. このとき任意の $c > 0$ をとると, $F \subset E$ が存在して, $c < \mu(F) < \infty$ が成立することを示せ.

(2) $\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) \mid F \subset E \text{ かつ} \mu(F) < \infty\}$ とおく. $\mu = \mu_0$ を示せ.

問題 1.13. $\mathcal{M}$ を X 上の σ-加法族, $\psi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ が additive である, つまり

$$\text{任意の互いに素な } (A_n)_{n=1}^{N} \subset \mathcal{M} \text{ に対し, } \psi\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \psi(A_n)$$

を満たすとする.

(1) ψ が測度となる必要十分条件は, 任意の単調増加列 $(A_n) \subset \mathcal{M}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \psi(A_n) = 0$ なることであることを示せ.

(2) ψ が測度となる必要十分条件は, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ なる任意の単調減少列 $(A_n) \subset \mathcal{M}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \psi(A_n) = 0$ なることであることを示せ.

(3) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ が有限測度空間, $\psi : \mathcal{M} \to [0, \infty]$: additive であるとする. $\mu(A_n) \to 0$ なる任意の $(A_n) \subset \mathcal{M}$ に対し $\phi(A_n) \to 0$ を満たすとき, ψ は測度であることを示せ.

問題 1.14.

(1) $\mathcal{C} \subset 2^X, \mu, \nu : \mathcal{M}(\mathcal{C})$ 上の測度とする．任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し $\mu(A) = \nu(A)$ であっても $\mu \neq \nu$ なる例を挙げよ．

(2) $\mathcal{A} : X$ 上の有限加法族 , $\mu, \nu : \mathcal{M}(\mathcal{A})$ 上の有限測度とする．任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し $\mu(A) = \nu(A)$ ならば $\mu = \nu$ を示せ．

問題 1.15. $\mathcal{A}$ を X の有限加法族, μ, ν を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 上の測度とする．さらに, μ, ν は $\mathcal{A}$ に関して σ-finite であるとする．このとき, $\mathcal{A}$ 上で $\mu = \nu$ ならば, $\mu = \nu$ なることを示せ．また, σ-finite でない場合はどうか．

問題 1.16. R^d の部分集合族

$$\mathcal{O} = \{\text{ 開集合全体 }\}, \mathcal{F} = \{\text{ 閉集合全体 }\}, \mathcal{K} = \{\text{ コンパクト集合全体 }\}$$

$$\mathcal{I} = \{(a_1, b_1) \times ... \times (a_d, b_d) \mid -\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty\}$$

$$\mathcal{J} = \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_d, b_d] \mid -\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty\}$$

に対し,

$$\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{J})$$

を示せ．

問題 1.17. (X, d) が可分距離空間とする．

(1) $\mathcal{A} = \{\overline{B}_r(x) \mid x \in X, r > 0\}$ とおく．$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ を示せ．

(2) 可分でないときの (1) の反例を挙げよ．

問題 1.18. $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ を測度とする．$K \subset \mathbb{R}^n, \mu(K) = \infty$ なるコンパクト集合 K が存在するならば, $\forall \eta > 0$ をとると, 各辺の長さが η 以下の開立方 $Q \subset \mathbb{R}^n$ で $\mu(Q) = \infty$ なるものが存在することを示せ．

問題 1.19. $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ を有限測度とし, $\mu(\mathbb{R}^n) = \eta$ とおく．

(1) $F = \mathrm{supp}\mu$ とおく．$\mu(F) = \eta$ を示せ．また, 任意のコンパクト集合 $K \subsetneq F$ に対して, $\mu(K) < \eta$ を示せ．

(2) $\mathbb{R}^n \setminus F$ は μ の測度 0 となる最大の開集合であることを示せ．

問題 1.20. 有限測度については確率論の方で詳しくやるので問題はあまり載っけていない．気長に待つように！