第 3 回　Measurable functions

問題 3.1. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする.

(1) $E \subset X$ が $\mathcal{M}$-可測であることと, 1_E が $\mathcal{M}$-可測関数であることは同値であることを示せ.

(2) 互いに素な $E_1, \cdots, E_m \subset X$ が $\mathcal{M}$-可測であることと, $a_1 1_{E_1} + \cdots + a_m 1_{E_m}$($a_1, \cdots, a_m$は任意の相異なる実数) が $\mathcal{M}$-可測関数であることは同値であることを示せ.

問題 3.2. f が $\mathcal{M}$-可測ならば, 任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $\{f = \alpha\} \in \mathcal{M}$ が成立することを示せ. また, この逆は成立しないことを示せ.

問題 3.3. $f : X \to \mathbb{R}$ に対し,

(1) f^2 が可測でも f は可測とは限らない. 例を挙げよ.

(2) f^2 が可測なら $|f|$ は可測であることを示せ.

問題 3.4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し,

(1) f が連続ならば, f は Lebesgue 可測であることを示せ.

(2) f が a.e. で連続ならば, f は Lebesgue 可測であることを示せ.

(3) f が下半連続ならば, f は Borel 可測であることを示せ.

問題 3.5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し,

(1) f が単調ならば, f は Borel 可測であることを示せ.

(2) f が微分可能ならば, f' は Borel 可測であることを示せ.

(3) f が右連続ならば, f は Borel 可測であることを示せ.

(おまけ) f が右連続ならば, f は a.e. で連続であることを示せ.

問題 3.6. σ-加法族 $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M} \not\subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を満たすとき, ある連続関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ で $\mathcal{M}$-可測でないものが存在することを示せ.

問題 3.7. Lebesgue 可測であるが, Borel 可測でない関数の例を一つ挙げよ.

問題 3.8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測ならば, 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ を示せ.

問題 3.9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が Lebesgue 可測, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が Borel 可測ならば, $g\circ f$ は Lebesgue 可測であることを示せ.

問題 3.10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が Lebesgue 可測, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続とする. このとき, $g\circ f$ は Lebesgue 可測とは限らない ・・・($\bigstar$) これを寄り道しながら示していこう.

(1) 任意の $x\in[0,1]$ を 3 進小数展開, つまり $x=\sum_{i=1}^{\infty}d_i(x)3^{-i}(d_i(x)\in\{0,1,2\})$ と表す. 集合 C を 3 進小数展開したときに 1 が出てこない集合とする. つまり,

$$C:=\{x\in[0,1]\mid\forall i\quad d_i(x)\in\{0,2\}\}$$

とおく. 関数 $F:C\to[0,1]$ を,

$$F\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}$$

で定める. この F を Cantor function という.

(i) $F(0)=0$, $F(1)=1$ を示せ.

(ii) F は well-defined で, C 上連続であることを示せ.

(iii) F は全射であることを示せ.

(iv) C は非可算集合であることを示せ.

(2) F を Cantor function とする. $G:[0,1]\to[0,2]$ を $G(x)=F(x)+x$ で定める.

(v) G は単調かつ同型であることを示せ.

(vi) $\mathcal{L}(G(C))=1$ を示せ.

(vii) $A\subset\mathbb{R}$ を $\mathcal{L}(A)>0$ なる集合とする. ある集合 $B\subset A$ で, Lebesgue 可測でないものが存在することを示せ.

(viii) (vii) より, 可測でない集合 $E\subset G(C)$ が取れる. $A:=G^{-1}(E)$ とおくと A は可測で, $\mathcal{L}(A)=0$ を示せ.

(ix) A は Borel 可測でないことを示せ.

(x) 以上の議論を用いて ($\bigstar$) を示せ.

問題 3.11. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測関数とする．このとき, ある Borel 可測関数 $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$g \leqslant f \leqslant h \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n) \quad , \quad g = f = h \quad \text{a.e.}$$

が成立することを示せ.

問題 3.12. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間, $\{f_n\}$ を X 上の $\mathbb{R}$-値の $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$-可測関数列とする.

(1) $A = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が $\mathbb{R}$ に存在する $\}$ は可測集合であることを示せ.

(2) $B = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty\}$ は可測集合であることを示せ.

(3) $C = \{x \in X \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が$\overline{\mathbb{R}}$に存在する $\}$ は可測集合であることを示せ.

問題 3.13. f, g が Lebesgue 可測でないとき, $f + g$, $|f|$, fg は Lebesgue 可測でないと言えるか.

問題 3.14. f を $[0, 1]$ 上の連続関数とする．$A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) > f(y) \quad \forall y \in [0, x)\}$ は Borel 可測であることを示せ.

問題 3.15. f は $\mathbb{R}$ 上の有界関数とする．$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{y\to x} f(y) = f(x)\}$ は Borel 可測であることを示せ.

問題 3.16. $f : X \to [0, \infty]$ が可測ならば,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{A_n} ((A_n) \subset \mathcal{M})$$

の形で表せることを示せ.

問題 3.17. $\mathcal{S} = \sigma(\{B(0, r) \mid r > 0\})$ とする.

(1) $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ を $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ と定める．f は可測であることを示せ.

(2) $g : (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{S})$ を $g(x) = (x, 0)$ と定める．g は可測であることを示せ.

(3) $f(a) = f(b)$ なる $a, b \in \mathbb{R}^2$ を任意にとり, $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{S} \mid a, b \in A$ または $a, b \in A^c\}$ とおく. $\mathcal{C} = \mathcal{S}$ を示せ.

(4) $h : (\mathbb{R}^2, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ が可測ならば, $h(3, 4) = h(4, 3) = h(0, 5)$ を示せ.

問題 3.18. $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とする. $X \times \mathbb{R}$ 上の関数 $f(x, y)$ が,

$$\forall y \in \mathbb{R} \text{ を固定すると}, x \mapsto f(x, y) \text{ は } \mathcal{M} \text{ 可測}$$

$$\forall x \in X \text{ を固定すると}, y \mapsto f(x, y) \text{ は連続}$$

を満たすとき, f は $\mathcal{M} \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測であることを示せ.

問題 3.19. 2 変数関数 $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が, x を固定したときに y に関する可測関数になり, y を固定したときに x に関する可測関数になるものとする. f は $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R})$-可測とは限らないことを示せ. また, これは Borel 可測の場合も同様のことが言えることを示せ.

問題 3.20. 積測度についてはまた後で扱いますが, 2 変数の可測性の判定法は, 私はこれぐらいしか知りません. 気になったら調べて私に教えよう!