第2回　Lebesgue measures

問題 2.1. ルベーグ外測度 m_* は Radon measure であることを示せ.

問題 2.2. 可算集合のルベーグ外測度は 0 であることを示せ.

問題 2.3. (1) $\mathbb{R}$ の 1 次元ルベーグ測度は ∞ であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ の 2 次元ルベーグ測度は 0 であることを示せ.

問題 2.4. (1) $A \subset \mathbb{R}^d$ が有界ならば $m_*(A) < \infty$ なることを示せ.

(2) $0 < m_*(A) < \infty$ なる非有界集合 A を挙げよ.

問題 2.5. ルベーグ外測度の被覆として, 開直方体族をとっても閉直方体族をとっても開立方体族をとっても良いことを示せ. 実は球でも良いことも示せ.

問題 2.6. 測度には continuity from below なる重要な性質があった.

$$(A_k) \subset \mathcal{M}, A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

(1) なぜ continuity from below というか簡単に説明せよ.

(2) μ_* を外測度とすると, 当然

$$(A_k) \subset \mathcal{M}_{\mu_*}, A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

は成立する. しかし,

$$(A_k) \subset \mathbb{R}^n, A_k \subset A_{k+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

は一般には成立しないことを示せ.

(3) m_* ならば成立することを示せ.（Borel outer measure で OK）

問題 2.7. $A \subset \mathbb{R}^n$, $O_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(x, A) < 1/k\}$ とおく.

(1) A がコンパクト集合ならば, $m(A) = \lim_{k\to\infty} m(O_k)$ を示せ.

(2) A が閉でも非有界ならば, あるいは有界でも開ならば, (1) は成立しないことを示せ.

問題 2.8. $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $m_*(A), m_*(B) < \infty$, $m_*(A \cup B) = m_*(A) + m_*(B)$ とする.

(1) $m_*(A \cap B) = 0$ を示せ.

(2) $A \cup B$ が可測ならば, A, B もまた可測であることを示せ.

問題 2.9. $A \subset \mathbb{R}^n$ がルベーグ可測であることと, 任意の立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ に対して $m_*(Q) = m_*(Q \cap A) + m_*(Q \setminus A)$ が成立することは同値であることを示せ.

問題 2.10. $A \subset \mathbb{R}^n$, $m_*(A) < \infty$ とする. (1) と (2) は同値であることを示せ.

(1) A はルベーグ可測.

(2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \{I_k\}_{k=1}^N$: 閉直方体族 s.t. $m_* \left(A \triangle \bigcup_{k=1}^N I_k \right) < \epsilon$

! **問題 2.11.** $\mathcal{L}^n$ を n 次元ルベーグ測度 , $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を線形変換とするとき,

$$\mathcal{L}^n(TA) = |\det T| \mathcal{L}^n(A)$$

が成立することを示せ.

(したがって, 回転や平行移動などではルベーグ測度が変化しないことが分かる.)

問題 2.12. $A \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合とし, $B = -A \cup A$ とおく. B は可測で, $m(A) \leqslant m(B) \leqslant 2m(A)$ が成立することを示せ.

問題 2.13. A, B を $\mathbb{R}$ の可測集合とし, $m(A) = m(B) = 0$ とする. $m(A + B) = 0$ とは限らないことを示せ. 実は $A + B$ は可測とも限らないことを示せ.

問題 2.14. A, B を $\mathbb{R}$ の可測集合とし, $m(A), m(B) < \infty$, $A + B$ は可測とする. $m(A) + m(B) \leqslant m(A + B)$ を示せ.

(Hint まずは開区間で, 次にコンパクト集合の場合を示す.)

問題 2.15. $A \subset \mathbb{R}^n$, $m_*(A) > 0$, $0 < \eta < 1$ とする. ある立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ が存在して,

$$\frac{m_*(A \cap Q)}{m(Q)} \geqslant \eta$$

を示せ. さらに Q は十分小さい測度をもつと仮定してよいことも示せ.

問題 2.16. $A \subset \mathbb{R}^n$, $m_*(A) > 0$, $0 < \eta < 1$ とする. ある A の点を中心とする立方体 $Q \subset \mathbb{R}^n$ が存在して, $m_*(A \cap Q) > \eta m(Q)$ が成立することを示せ.

問題 2.17. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $\phi_A(x) = m\left(A \cap B(0, |x|)\right)$ とおく.

(1) $\displaystyle\lim_{|x| \to \infty} \phi_A(x)$ を求めよ.

(2) ϕ_A は $\mathbb{R}^n$ 上で一様連続であることを示せ.

問題 2.18. $E \subset [0, 1]$ を可測集合とし, $m(E) > 0$ とする. このとき, $0 \leqslant \forall \delta \leqslant m(E)$ をとると $m(F) = \delta$ なる可測集合 $F \subset E$ が存在することを示せ.

問題 2.19. $A \subset \mathbb{R}^n$, $m_*(A) > 0$ とする．このとき, $0 < \forall\delta < m_*(A)$ をとると $m(K) = \delta$ なるコンパクト集合 $K \subset A$ が存在することを示せ.

問題 2.20. $A \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合とし, $0 < m(A) < \infty$ とする.

(1) $\lim_{|x| \to 0} m(A \cap (x + A)) = m(A)$ を示せ.

(2) $\lim_{|x| \to \infty} m(A \cap (x + A)) = 0$ を示せ.

問題 2.21. $A \subset \mathbb{R}^n$ を可測集合とし, $m(A) > 0$ とする．$A - A$ は原点のある近傍を含むことを示せ.

(Hint 問題 2.20(1))

！**問題 2.22.** A, B を $\mathbb{R}^n$ の可測集合とし, $m(A), m(B) > 0$ とする．$A - B$, $A + B$ 共に空でない開区間をもつことを示せ.

(Hint 問題 2.15 問題 2.16 問題 2.21)

問題 2.23. $A \subset \mathbb{R}$ を可測集合とし, $m(A) > 0$ とする．このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ をとると, ある $a \in A$ と $h > 0$ が存在して, $a, a + h, \cdots, a + (n - 1)h \in A$ なることを示せ.

問題 2.24. $A \subset \mathbb{R}^2$ を可測集合とし, $m_2(A) > 0$ とする.

(1) A の点を頂点とする正三角形が描けることを示せ.

(2) $\exists\epsilon$ が存在し, $0 < \forall\eta < \epsilon$ に対し, A の点を頂点とする 1 辺の長さ η の正方形が描けることを示せ.

問題 2.25. A を $\mathbb{R}^n$ の有界可測集合とし, $m(A) > 0$ とする．このとき, $\lim_{|x| \to 0} m(A \triangle (x + A)) = 0$ を示せ．また, 有界という仮定を落としたときの反例を挙げよ.

問題 2.26. A, B を $\mathbb{R}^n$ の有界可測集合とし, $\phi(x) = m(A \cap (x + B))$ とおく．ϕ は $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数であることを示せ.

！**問題 2.27.** $A \subset [0, 1]$ を可測集合とする．$m(\cos A) \leqslant 0.85 m(A)$ を示せ.

(Hint　Hausdorff 測度を知っていると秒殺．次の問題も同様．自信作の 1 つ.)

問題 2.28. $A \subset [0, 1]$ を可測集合とする．$m(A^2 + A) \leqslant 3m(A)$ を示せ.

！！！**問題 2.29.** $[0,1]$ の互いに素な部分集合族 $\{B_n\}$ で, 任意の n に対して $m_*(B_n)=1$ なるものは存在するか.

問題 2.30. A を $\mathbb{R}^n$ の可測集合とする. A が $x \in \mathbb{R}^n$ で d の密度をもつとは,

$$\lim_{r\to 0+} \frac{m(A\cap B(x,r))}{m(B(x,r))} = d$$

が成立するときをいう.

(1) $x_0 \in \mathbb{R}$ と $d \in (0,1)$ を任意にとったとき, x_0 で密度 d をもつ $A \subset \mathbb{R}$ を構成せよ.

(2) $x=0$ で密度をもたない集合 $B \subset \mathbb{R}$ を構成せよ.

(3) 密度もどき D を次のように定める.

$$D(A) = \lim_{r\to\infty} \frac{m(A\cap B(0,r))}{m(B(0,r))}$$

(i) $D : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ とみたとき, well-defined でないことを示せ.

(ii) $\{A_m\}$ を互いに素で密度もどきをもつ集合族とする. $A=\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ とおくと, $D(A) = \sum D(A_m)$ は成立しないことを示せ.

(幾何学的測度論ではこの密度が重要な役割を果たすことが多々ある. しかし密度もどきは性質がそこまで良くないので, (少なくとも私の勉強した狭い範囲では) 見たことない.)