$\boxed{1}$

$|\lambda_1|+\cdots+|\lambda_n|=0$ なら明らか. $|\lambda_1|+\cdots+|\lambda_n|=1$ と仮定してよい. 背理法で示す.

各 $k\in\mathbb{N}$ に対し,

$$^\exists \mu_k^1,\ldots,\mu_k^n \text{ s.t. } |\mu_k^1|+\cdots+|\mu_k^n|=1,\ \|\mu_k^1 x_1+\cdots+\mu_k^n x_n\| < \frac{1}{k}$$

が成立すると仮定する.

$\{\mu_k^i\}_{i=1}^n$ は compact 集合 $[-1,1]$ 内に含すので, Borzano-Waierstrass の定理より

$$^\exists\{\mu_{k_m}^i\} \text{ s.t. } \lim_{m\to\infty}\mu_{k_m}^i = {}^\exists\alpha_i \quad (1\le i\le n)$$

$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\neq(0,\ldots,0)$ に注意する. $\|\mu_{k_m}^1 x_1+\cdots+\mu_{k_m}^n x_n\|<\frac{1}{k_m}$ の両辺で $m\to\infty$ とすると

$\|\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\|=0$. ∴ $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n=0$.

$\{x_1,\ldots,x_n\}$ は1次独立より, $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$ となって矛盾する //

$\boxed{2}$

有限次元 ⇒ ノルムが同値

$\{e_1,\ldots,e_n\}$: Xの基底とする. $\forall x\in X$ をとると, $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ と表せる. $\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac12}$

と定める. X上の任意のノルム $\|\cdot\|$ をとり, $\|\cdot\|_2$ と同値なことを示せばよい.

- $^\exists C>0$ s.t. $\|x\|\le C\|x\|_2$ $(\forall x)$

  ∵ $\|x\|=\|\sum x_ie_i\|\le\sum|x_i|\|e_i\|\le(\sum\|e_i\|^2)^{\frac12}(\sum|x_i|^2)^{\frac12}=C\|x\|_2$ //

- $^\exists C>0$ s.t. $C\|x\|_2\le\|x\|$ $(\forall x)$

  ∵ $S=\{x \mid \|x\|_2=1\}$ とおく. $f:(X,\|\cdot\|_2)\to(\mathbb{R},\|\cdot\|)$ を $f(x)=\|x\|$ と定める.

  上で見たように $\|f(x)\|=\|x\|\le{}^\exists C\cdot\|x\|_2$ より f は連続.

  $\Phi:(X,\|\cdot\|_2)\to(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$ は同相で S は $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$ で compact より $(X,\|\cdot\|_2)$

  上でも compact. ∴ f は S 上で最小値をもつ.

  $^\exists x_0\in S$ s.t. $\|x_0\|\le\|x\|$ $(\forall x\in X)$ とする. $C=\|x_0\|$ とおく. $\forall x\in X$ $\frac{x}{\|x\|_2}\in S$ より

  $C\le\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|$. ∴ $C\|x\|_2\le\|x\|$ //

ノルムが同値 ⇒ 有限

対偶を示す。無限次元のとき同値でないノルムが構成できることをみる。

$\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の Hamel 基底とする。$\forall x\in X$ をとると $x=\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda e_\lambda$ と一意に表せる

（有限和であることに注意）

$\alpha=\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ $(\alpha_\lambda>0)$ をとり $\|x\|_\alpha:=\sum \alpha_\lambda|x_\lambda|$ と定めると X 上のノルムになる

$\forall\lambda$ $\alpha_\lambda=1$ で α を，$\forall\lambda$ $\beta_\lambda=\lambda$ で β を定めると $\|\cdot\|_\alpha$ と $\|\cdot\|_\beta$ は同値でない。

実際 $\exists C>0$ s.t. $\|x\|_\beta\leq C\|x\|_\alpha$ $(\forall x)$ が成立すると仮定すると，

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_\lambda\right\|_\beta=\sqrt{\lambda}\longrightarrow\infty,\quad \left\|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e_\lambda\right\|_\alpha=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\longrightarrow 0$$

より矛盾 //

$\boxed{3}$ $\dim A=n$ とする。$\Phi:(A,\|\cdot\|_2)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_2)$ は同相なので $(A,\|\cdot\|_2)$ は Banach. A の任意のノルム $\|\cdot\|$ をとると $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|_2$ は同値なので $(A,\|\cdot\|)$ は Banach. 次の Prop より A が閉なことが分かる。

「X: Banach, $M\subset X$: sub sp. M : Banach $\Longleftrightarrow$ M : 閉」.

$\boxed{4}$

(1) $\mathrm{int}\,Y\neq\phi$ とする。$\forall y\in\mathrm{int}\,Y$ をとる。$\exists r>0$ s.t. $B(y,r)\subset Y$. Y は部分空間なので $B(0,r)\subset Y$. $\forall x\in X$ をとると十分大きい $N\in\mathbb{N}$ をとれば $\frac{x}{N}\in B(0,r)$ とできるので，$x=N\cdot\frac{x}{N}\in Y$ より $Y=X$ //

(2) $Y^c\neq\phi$ とする。$\overline{Y^c}=X$ を示す。$Y\neq X$ なので (1) より $\mathrm{int}\,Y=\phi$. $\overline{Y^c}\neq X$ と仮定する。$\exists x\in X$ s.t. $\exists r>0$ s.t. $B(x,r)\cap Y^c=\phi$. $\therefore B(x,r)\subset Y$ となりこれは $\mathrm{int}\,Y=\phi$ に矛盾 //

$\boxed{5}$ $\bigcup_n X_n = X$ と仮定する. $\forall n$ X_n は閉 よりベールのカテゴリー定理より

$\exists n_0$ s.t. $\mathrm{int}\, X_{n_0} \neq \phi$. しかし $X_n \neq X$ なので $\boxed{4}$ より $\mathrm{int}\, X_n = \phi$ $(\forall n)$ と

なって矛盾 //

$(C[I], \|\cdot\|_\infty)$ は Banach でない. $X = \mathrm{span}\{1, t, \cdots, t^n, \cdots\}$, $X_n = \mathrm{span}\{1, \cdots, t^n\}$

とおく. X_n は有限次元より閉. さらに $X = \bigcup_n X_n$ //

$\boxed{6}$ 偽

反例… ℓ^p $(1 \le p < \infty)$ 上の部分集合 $X_1 = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$,

$X_2 = \{-e_2 + \frac{e_1}{2}, -e_3 + \frac{e_1}{3}, \cdots, -e_n + \frac{e_1}{n}, \cdots\}$ とおく. X_1, X_2 は集積点をもたない

ので共に閉. 0 は $X_1 + X_2$ の集積点だが $0 \notin X_1 + X_2$ より $X_1 + X_2$ は閉でない //

※ $\overline{A} = A \cup A^d$. $A^d = \phi \Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ は閉.

$\boxed{7}$

(1) <u>U が閉</u>… (x_k) は $x_k = (x_{k,n}) = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots) \in U$ の列で $x = (x_n)$ に ℓ^1 で

収束するとする. $x_{k,2n} = 0$ なので, $\forall n$ $x_{2n} = \lim_{k\to\infty} x_{k,2n} = 0$. $\therefore x \in U$ //

※ $(x_k) \to x$ in $\ell^1 \Rightarrow x_{k,n} \to x_n$ $(k \to \infty)$ V が閉も同じ //

(2) • $c_c = \{(x_n) \in \ell^\infty \mid \exists N$ s.t. $n \ge N \Rightarrow x_n = 0\}$. $c_c \subset U + V$.

• c_c は $(\ell^1, \|\cdot\|_{\ell^1})$ で稠密 • $\ell^1 \neq U + V$

を示せばよい. $\forall x \in c_c$ をとる. $u = (u_m)$, $v = (v_m)$ を

$$u_m = \begin{cases} x_m - n x_{m+1} & (m = 2n-1) \\ 0 & (m = 2n) \end{cases}, \quad v_m = \begin{cases} n x_{m+1} & (m = 2n-1) \\ x_m & (m = 2n) \end{cases}$$

で定めると $x = u + v$, $u \in U$, $v \in V$ とわかる. $\therefore x \in U + V$.

また $\forall x \in \ell^1$ をとる. $a_k = (a_{k,n}) \in c_c$ を $a_{k,n} = \begin{cases} x_n & (n < k) \\ 0 & (n \ge k) \end{cases}$ で定めると

$$\|a_k - x\|_{\ell^1} = \sum_{n=k}^{\infty} |x_n| \to 0 \quad \therefore c_c \text{ は } \ell^1 \text{ で稠密}$$

$x_m = \begin{cases} 0 & (m = 2n-1) \\ \frac{1}{n^2} & (m = 2n) \end{cases}$ とおくと $x \in \ell^1$. しかし $x \notin U + V$. $x = {}^\exists u + {}^\exists v$ $(u \in U, v \in V)$ と仮定する.

$u_{2n} = 0$ より $v_{2n} = x_{2n} = \frac{1}{n^2}$. $v_{2n-1} = n v_{2n} = \frac{1}{n}$. しかし $\sum \frac{1}{n} = \infty$ より $v \notin \ell^1$ より矛盾 //

$\boxed{8}$ $d=d(x,Y)$ とおく. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\exists x_n\in Y$ s.t. $d(x,x_n)<d+\frac{1}{n}$.

$d(x_1,x_n)\le d(x_1,x)+d(x,x_n)<d+1+d+\frac{1}{n}\le 2d+2$ であるから

$x_n\in\overline{B}(x_1,2d+2)\cap F$. F:閉 なので $\overline{B}(x_1,2d+2)\cap F$ は compact. よって

$\exists(x_{n_k})\subset(x_n)$, $\exists y$ s.t. $x_{n_k}\to y\in\overline{B}(x_1,2d+2)\cap F$ が成立する.

$$d\le d(x,y)\le d(x,x_{n_k})+d(x_{n_k},y)\le d+\frac{1}{n_k}+d(x_{n_k},y)$$

より $k\to\infty$ として $d(x,y)=d$ //

$\boxed{9}$ $y\in Y$ とする. $\int_{-1}^{0}(x(t)-y(t))dt=-1$ より $\inf_{t\in[-1,0]}((x(t)-y(t))\le -1$

等号成立は $y(t)=x(t)+1$ ($\forall t\in[-1,0]$) のとき. また $\int_0^1(x(t)-y(t))dt=1$ より

$\sup_{t\in[0,1]}(x(t)-y(t))\ge 1$ 等号成立は $y(t)=x(t)-1$ ($\forall t\in[0,1]$).

よって $d(x,Y)\ge 1$ であり, $\|x-y\|=1$ なる $y\in Y$ が存在するならば, $y(0)=x(0)+1$

$=x(0)-1$ となり矛盾//

$\boxed{10}$ (1) $\forall y,z\in D_K(x)$ をとる. $\forall\lambda\in[0,1]$ $\lambda y+(1-\lambda)z\in D_K(x)$ を示す.

$\exists(y_n),(z_n)\subset K$ s.t. $\|y_n-x\|<\|y-x\|+\frac{1}{2n}$, $\|z_n-x\|<\|z-x\|+\frac{1}{2n}$ が成立する.

$$\therefore\ \|\lambda y_n+(1-\lambda)z_n-x\|\ge d(x,K)$$

$$\begin{aligned}&\wedge\!|\\ &\lambda\|y_n-x\|+(1-\lambda)\|z_n-z\|\le\lambda d(x,K)+\frac{\lambda}{2n}+(1-\lambda)d(x,K)+\frac{1-\lambda}{2n}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad= d(x,K)+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

$\therefore$ $n\to\infty$ として $d(x,K)=\|\lambda y+(1-\lambda)z-x\|$ //

(2) $\forall y,z\in D_K(x)$ をとる. (1) より $\frac{y+z}{2}\in D_K(x)$. $\left\|\frac{x-y}{d(x,K)}\right\|=\left\|\frac{x-z}{d(x,K)}\right\|=1$

$\therefore$ $\left\|\frac{x-y}{d(x,K)}+\frac{x-z}{d(x,K)}\right\|=\frac{2}{d(x,K)}\left\|x-\frac{y+z}{2}\right\|<2$. 矛盾//

$\boxed{11}$ $\mu > \lambda$ としてよい. $\leq$ は明らか. $\geq$ を示す.

$$\|\lambda x+\mu y\| = \left\|\left(\frac{\mu+\lambda}{2} - \frac{\mu-\lambda}{2}\right)x + \left(\frac{\mu+\lambda}{2}+\frac{\mu-\lambda}{2}\right)y\right\|$$

$$= \left\|\frac{\mu+\lambda}{2}(x+y) + \frac{\mu-\lambda}{2}(y-x)\right\|$$

$$\geq \frac{\mu+\lambda}{2}\|x+y\| + \frac{\mu-\lambda}{2}\|y-x\|$$

$$\geq \frac{\mu+\lambda}{2}\left(\|x\|+\|y\|\right) + \frac{\mu-\lambda}{2}\left(\|y\|-\|x\|\right)$$

$$= \lambda\|x\|+\mu\|y\| \quad //$$

$\boxed{12}$ (1) $\Rightarrow$ (2) $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, $\|x\|=\|y\|=1$ をとる. $\|x+y\|\leq 2$. $\|x+y\|<2$ を示す.

$\|x+y\|=2$ ならば $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, $y\neq 0$ より (1) から $\exists\lambda\geq 0$ s.t. $x=\lambda y$.

$\therefore \|x\|=\lambda\|y\|=\|y\|$ より $\lambda=1$ なら $x=y$, $\lambda=0$ なら $y=0$ となり 矛盾 //

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall x,y\in X$, $y\neq 0$ をとる. $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$ が成立するとする. $\boxed{11}$ より

$\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\|+\frac{1}{\|y\|}\|y\| = 2$. 一方 $\frac{x}{\|x\|}\neq\frac{y}{\|y\|}$ ならば (2) より

$\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\| < 2$ となり矛盾. $\therefore \frac{x}{\|x\|}=\frac{y}{\|y\|}$ $\quad\therefore x=\frac{\|x\|}{\|y\|}y$ //

$\boxed{13}$ ノルムであることはすぐ分かる. Banach 空間であることを示すために,

「$\forall (f_m)\subset C^n[0,1]$, $\sum_{m=1}^{\infty}\|f_m\|<\infty \Rightarrow \sum f_m$ が収束」

を示す.

$\forall (f_m)\subset C^n[0,1]$, $\sum\|f_m\|<\infty$ をとる. この時

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_m(x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty}\|f_m\| < \infty$$

より $(C[0,1], \|\cdot\|_s)$ $(\|f\|_s=\sup|f(x)|)$ が Banach 空間ならば $\sum\|f_m\|_s<\infty$

より $\sum f_m$ が収束する. よって $(C^n[0,1], \|\cdot\|)$ が Banach だと分かる.

$(C[0,1], \|\cdot\|_s)$ が Banach 空間なのはすぐ分かる //