Chapter2. Bounded Linear Operators

問題 2.1. $X = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 0\}$ に sup ノルムを入れる. $T : X \to \mathbb{R}$ を

$$T(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

で定める. $||T|| = 1$ を示せ.

問題 2.2. A 倍写像 $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; x \mapsto Ax$ に対し, 次の場合の $||f_A||$ を計算せよ.

(1) $\mathbb{R}^n$ に l^1 ノルムを, $\mathbb{R}^m$ に l^∞ ノルムを入れる.

(2) $\mathbb{R}^n$ に l^∞ ノルムを, $\mathbb{R}^m$ に l^1 ノルムを入れる.

問題 2.3. X を無限次元ノルム空間とする. $T : X \to Y$ で有界でない線形写像を構成せよ.

問題 2.4. $X = C[-1,1])$ に sup ノルムを入れる. $\varphi : X \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt$$

で定める.

(1) $\varphi \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ かつ $||\varphi|| = 2$ を示せ.

(2) $f \in X$ で $||f|| = 1$, $|\varphi(f)| = 2$ なるものは存在しないことを示せ.

問題 2.5. $C_c = \{(x_n) \in l^\infty \mid \exists N \text{s.t.} n \geqslant N \implies x_n = 0\}$, $T : C_c \to C_c$ を $T((x_n)) = (nx_n)$ で定める.

(1) T は連続でないことを示せ.

(2) 連続線形汎関数 $T_m : C_c \to C_c$ で $T_m x \to Tx$ $(\forall x \in C_c)$ なるものを構成せよ.

問題 2.6. X をノルム空間 , Y を Banach 空間とする. 線形汎関数 $T : X \to Y$ は連続で単射であるとする. このとき, $T(\overline{B_X})$ が閉集合ならば, X は完備であることを示せ. ($\overline{B_X}$ は X の閉単位球である)

問題 2.7. X, Y をノルム空間, $T : X \to Y$ を線形汎関数とする. $\widetilde{T} : X/Ker(T) \to Y$ を $\widetilde{T}([x]) = T(x)$ で定める.

(1) $\widetilde{T}$ は well-defined であり, 単射かつ線形であることを示せ. また T が全射ならば $\widetilde{T}$ も全射であることを示せ.

(2) T が連続ならば, $\widetilde{T}$ も連続で, $||\widetilde{T}|| = ||T||$ なることを示せ.

問題 2.8. $X = C[a,b]$ に sup ノルムを入れる. $k(x,y) \in C([a,b] \times [a,b])$ が与えられたとき,

$$(Ku)(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)dy$$

によって $K : X \to X$ を定めると K は有界線形作用素で, $||K|| = \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |k(x,y)|dy$ を示せ.

問題 2.9. $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ ともに可測集合とし, $\Omega_1 \times \Omega_2$ 上の可測関数 $k(x,y)$ が

$$\int_{\Omega_2} |k(x,y)|dy \leqslant M_1 \quad , \quad \int_{\Omega_1} |k(x,y)|dx \leqslant M_2$$

を満たすならば. 作用素 K を

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega_2} k(x,y)u(y)dy$$

で定めると, 任意の p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ に対し, $K \in \mathcal{L}(L^p(\Omega_2), L^p(\Omega_1))$ であり, $||K|| \leqslant M_1^{1-1/p} M_2^{1/p}$ を示せ.

問題 2.10. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は σ-有限な測度空間とする. $f \in L^\infty(X)$ が与えられたとき, $(T_f u)(x) = f(x)u(x)$ によって $T_f : L^p(X) \to L^p(X)$ を定めると T_f は有界線形作用素で, $||T_f|| = ||f||_\infty$ を示せ.

問題 2.11. $1 \leqslant p < \infty$, $T_n \in \mathcal{L}(l^p)$ を $T_n(u_1, u_2, \cdots) = (u_n, u_{n+1}, \cdots)$ と定める. T_n は 0 に強収束するがノルム収束はしないことを示せ.

問題 2.12. $h \in \mathbb{R}$ が与えられたとき, $u \in L^1(\mathbb{R})$ に対し, $(T_h u)(x) = u(x+h)$ と定める.

(1) $T_h \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$, $||T_h|| = 1$ を示せ.

(2) $h \to 0$ としたとき, T_h は 恒等写像 I に強収束するか. またノルム収束するか.

問題 2.13. $X = \{p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_dx^d \mid a_i \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{N}\}$, $||p|| = \max|a_i|$ と定めると $(X, ||\cdot||)$ は Banach 空間でないことを示せ.

問題 2.14. $C^1[0,1]$ に sup ノルムを入れても Banach 空間でないことを示せ.

問題 2.15. $f \in C[0,\infty)$ が任意の $t \in [0,\infty)$ に対し $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ なるとき, $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ を示せ.　(ヒント：ベールのカテゴリー定理)

問題 2.16. (X,d) を距離空間とし, $A, B \subset X$ とする.

(1) B が第 1 類集合で, $A \subset B$ ならば A も第 1 類であることを示せ.

(2) A が第 2 類集合で, $A \subset B$ ならば B も第 2 類であることを示せ.

(3) (A_n) が第 1 類集合族ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も第 1 類であることを示せ. 第 2 類集合ならば $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ も第 2 類であることを示せ.

(4) A が residual であることと, A が X 上のある稠密な開集合族の可算個の共通部分を含むことを示せ.

問題 2.17. $X \neq \emptyset$, (X,d) を完備距離空間とする. 以下は同値であることを示せ.

(1) 任意の residual subsets は稠密.

(2) 任意の residual subsets は第 2 類.

(2) 空でない開集合は第 2 類.

(3) $(A_n) \subset X$ を内部が空でない閉集合族とすると, $\mathrm{int}\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

(4) $(U_n) \subset X$ を稠密な開集合族とすると, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ も稠密.

問題 2.18. p, q を共役指数とし, 点列 $a = (a_1, a_2, \cdots)$ は任意の $x = (x_1, x_2.\cdots) \in l^p$ に対し, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ が収束するとする. このとき $a \in l^q$ を示せ.

問題 2.19. $(X, ||\cdot||)$ をノルム空間とし, $X = E \otimes F$ なる閉部分空間 E, F が存在するとする. $x \in X$ に対し $||x||_1 := ||u|| + ||v||$ $(x = u + v, u \in E, v \in F)$ で X 上に新しいノルムを定める. $X_1 = (X, ||\cdot||_1)$ とおき, $T : E \to X_1/F$ を $T(x) = [x]$ で定める.

(1) T は有界で同型であることを示せ.

(2) T^{-1} も有界であることを示せ.

問題 2.20. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は有界とする. f が連続であることと, $\Gamma(f)$ が閉なることは同値であることを示せ. また f が有界でないときはどうか.

問題 2.21. X, Y, Z をノルム空間とする. $X \times Y$ にノルムを $||(x, y)||_{X\times Y} = ||x||_X + ||y||_Y$ で定める. $B : X \times Y \to Z$ を bilinear とする.

(1) ある定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対し $||B(x, y)||_Z \leqslant C||x||_X||y||_Y$ が成立するとき, B は連続であることを示せ.

(2) X は完備とする. $X \to Z; x \mapsto B(x, y')$, $Y \to Z; y \mapsto B(x', y)$ が任意の $x' \in X, y' \in Y$ に対して連続ならば, B は連続であることを示せ.

問題 2.22. X, Y を Banach 空間, $T : X \to Y$ を有界線形汎関数とする. $R(T)$ が Y 上 complemented, つまりある閉部分空間 $B \subset Y$ が存在し, $Y = R(T) \oplus B$ が成立するとき, $R(T)$ は閉であることを示せ.