Chapter1. Banach Spaces

問題 1.1. $\{x_1, \cdots, x_n\}$ をノルム空間 X の一次独立な元とする. ある $C > 0$ が存在し, 任意の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ に対して,

$$||\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n|| \geqslant C(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|)$$

が成立することを示せ.

問題 1.2. X を線形空間とする. X 上の任意のノルムが同値であることと, X が有限次元であることとは同値であることを示せ.

問題 1.3. ノルム空間の有限次元部分空間は閉集合であることを示せ.

問題 1.4. X をノルム空間, Y を X の部分空間とする.

(1) $\mathrm{int}Y \neq \emptyset$ ならば $Y = X$ であることを示せ.

(2) $Y^c \neq \emptyset$ ならば Y^c は X 内で稠密であることを示せ.

問題 1.5. X を Banach 空間とする. $\{X_n\}$ を X の閉部分空間とし, 任意の n に対して $X_n \neq X$ とする. $\bigcup_n X_n \neq X$ を示せ. また X が Banach 空間でないときの反例を挙げよ.

問題 1.6. X を Banach 空間とする. $X_1, X_2 \subset X$ が閉ならば $X_1 + X_2 \subset X$ は閉か.

★ $X_1, X_2 \subset X$ が閉部分空間でも $X_1 + X_2 \subset X$ が閉部分空間になるとは限らない. これを示す.

問題 1.7. $U = \{(x_n) \in l^1 \mid x_{2n} = 0\}$, $V = \{(x_n) \in l^1 \mid x_{2n-1} = n x_{2n}\}$ とおく.

(1) U, V は $(l^1, ||\cdot||_{l^1})$ で閉であることを示せ.

(2) $U + V$ は $(l^1, ||\cdot||_{l^1})$ で閉でないことを示せ.

問題 1.8. X を Banach 空間とし, $Y \subset X$ を部分空間とする. Y が有限次元ならば, $\exists y_0 \in Y$ s.t. $d(x, Y) = ||x - y_0||$ が成立することを示せ.

★ Y が無限次元ならば, 閉集合だとしても問題 1.8. のような y_0 がとれるとは限らない. これを示す.

問題 1.9. $X = C([-1, 1])$ に sup ノルムを入れる. $Y = \{y \in X \mid \int_{-1}^0 y(t)dt = \int_0^1 y(t)dt = 0\}$

と定める．$x \in X$ が $\int_{-1}^{0} x(t)dt = -1$, $\int_{0}^{1} x(t)dt = 1$ を満たすとする．$d(x,Y) \geqslant 1$ であり，$||x-y|| = 1$ なる $y \in Y$ が存在しないことを示せ.

問題 1.10. X をノルム空間, $K \subset X$, $x \in X$ とし, $D_K(x) := \{y \in X \mid ||y-x|| = d(x,K)\}$ とおく.

(1) K が凸ならば, $D_K(x)$ は任意の $x \in X$ で凸なることを示せ.

(2) X が強凸 ($||x|| = ||y|| = 1$ ならば $||x+y|| < 2$) で K が凸ならば, $D_K(x)$ は空であるか, $D_K(x) = \{a\}$ なる $a \in X$ が存在することを示せ.

問題 1.11. X をノルム空間とする．ある $x, y \in X$ が存在して, $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ を満たすとき, $\forall \lambda, \mu \geqslant 0, ||\lambda x + \mu y|| = \lambda ||x|| + \mu ||y||$ が成立することを示せ.

問題 1.12. X をノルム空間とする．次は同値であることを示せ.

(1) $\forall x, y \in X, y \neq 0$, $||x+y|| = ||x|| + ||y||$ ならば, $x = \lambda y$ $(\exists \lambda \geqslant 0)$

(2) $\forall x, y \in X, x \neq y$, $||x|| = ||y|| = 1$ ならば, $||x+y|| < 2$

問題 1.13. $f \in C^n[0,1]$ に対し, $||f|| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x)|$ とおく．$||\cdot||$ は $C^n[0,1]$ 上のノルムで, かつ $(C^n[0,1], ||\cdot||)$ は Banach 空間であることを示せ.

問題 1.14. Banach 空間 $(X, ||\cdot||)$ と集合 M に対し, $B(M,X) := \{f : M \to X \mid \sup_{m \in M} ||f(m)|| < \infty\}$ と定め, ノルムを $||f||_B = \sup_{m \in M} ||f(m)||$ で定める．$(B(M,X), ||\cdot||_B)$ は Banach 空間であることを示せ.

問題 1.15. $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ は有界, 連続 $\}$, $||f|| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ とおく.

(1) $Y = \{f \in X \mid f$ は $\mathbb{R}$ 上で微分可能 $\}$ とおく．Y は X の閉部分空間か.

(2) $Z = \{f \in X \mid \int_{\mathbb{R}} |f| dx < \infty\}$ とおく．$||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f| dx$ とおくと, Z 上で $||\cdot||$ と $||\cdot||_1$ は同値か.

問題 1.16. $C^1(0,1)$ 上の 2 つのノルム

$$||u||_1 := \sup_{x \in [0,1]} |u(x)| \quad , \quad ||u||_2 := \max\{ \sup_{x \in [0,1]} |u(x)| \ , \ \sup_{x \in [0,1]} |u'(x)| \}$$

は同値か.

問題 1.17. $C = \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{R}, (a_n)$ は収束 $\}$, $C_0 = \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$, $C_{00} = \{(a_n) \mid a_n \in \mathbb{R}, a_i \neq 0$ なる i は有限個 $\}$ とおく.

(1) $C_{00} \subset l_p \subset C_0 \subset C \subset l_\infty$ $(1 \leqslant p < \infty)$ を示せ.

(2) $a \in C_0$, $a \notin l_p$ なる例を挙げよ.

(3) C_{00} は $||\cdot||_\infty$ ノルムを入れると C_0 内で稠密であるが, C 内で稠密でないことを示せ.

問題 1.18. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を空でない開集合とする. $1 \leqslant p \leqslant \infty$ なる任意の p に対し, $L^p(\Omega)$ は無限次元ベクトル空間であることを示せ.

問題 1.19. B_0, B_1 は Banach 空間で, Banach 空間 B に連続に埋め込まれているとする. 線形空間 $B_0 + B_1$ にノルム

$$||x||_{B_0+B_1} = \inf\{||y||_{B_0} + ||z||_{B_1} \mid x = y + z, y \in B_0, z \in B_1\}$$

を入れる.

(1) $||\cdot||_{B_0+B_1}$ は $B_0 + B_1$ 上のノルムであることを示せ.

(2) $(B_0 + B_1, ||\cdot||_{B_0+B_1})$ は Banach 空間であることを示せ.

問題 1.20. X は有限次元, U, V は X の部分空間とする.

(1) U が有限次元で V が閉集合であるとき, $U + V$ は閉部分空間であることを示せ.

(2) V は閉集合で有限余次元 $(\dim X/V < \infty)$ であるとき, $U + V$ は閉部分空間であることを示せ.

問題 1.21. $X = C[0,1]$ に sup ノルムを入れ, $U = \{f \in X \mid f(0) = f(1) = 0\}$ と定める.

(1) U は X の閉部分空間であることを示せ.

(2) X/U の次元及び基底を 1 組あげよ.

問題 1.22. $C_1 = \{x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = b_1, \lim_{n\to-\infty} x_n = b_2\}$, $C_2 = \{x = (x_n)_{n=-\infty}^{\infty} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to-\infty} x_n = 0\}$ と定める. C_1/C_2 の次元及び基底を 1 組あげよ.

問題 1.23. $V = C[-1,1]$ に sup ノルムを入れ, 閉部分空間 W を

$$W = \left\{ f \in X \mid \int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{1} f(x)dx = 0 \right\}$$

と定める.

(1) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x$ で定める. $||f + W||_{V/W} = 1/2$ を示せ.

(2) $||f + W||_{V/W}$ は inf を達成する $g \in W$ が存在しないことを示せ.