Chapter3. Hilbert Spaces

問題 3.1.

(1) l^2 空間は Hilbert 空間であることを示せ.

(2) l^p 空間 $(p \neq 2)$ は内積空間でないことを示せ.

問題 3.2.

(1) $L^2(X)$ 空間は Hilbert 空間であることを示せ.

(2) $L^p(X)$ 空間 $(p \neq 2)$ は内積空間でないことを示せ.

問題 3.3. H を内積空間とする. $x, y \in H$ に対し (1)〜(3) は同値であることを示せ.

(1) $(x, y) = 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ ||x + \lambda y|| = ||x - \lambda y||$

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ ||x|| \leqslant ||x + \lambda y||$

問題 3.4. $g \in C[a, b], g > 0$ とする. $L^2[a, b]$ 上の内積で

$$||f|| = \left(\int_a^b g(t)|f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

で定まるノルムを誘導するものを求めよ.

問題 3.5. $u, v \in C([a, b])$ に対し $(u, v) = \int_a^b u\overline{v}dx$ で定めると内積になる. しかし Hilbert 空間でないことを示せ.

問題 3.6. H を Hilbert 空間 , X を Banach 空間 , $T : H \to X$ を等長同型とする. このとき X も Hilbert 空間であることを示せ.

問題 3.7. $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は $0 < \lambda_k < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$ を満たす点列とする. l^2 に内積

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k \overline{y_k}$$

を定める. このとき Hilbert 空間にならないことを示せ.

問題 3.8. $X = C[0,1], ||f|| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ と定める．また $G = \{g \in X \mid g(0) = 0, \int_0^1 g(x)dx = 0\}$ は X の閉部分空間である．

(1) $d(f, G) \geqslant 1/2$ を示せ．

(2) $\exists h_n \in G$ s.t. $||f - h_n|| \to 1/2$ が成立することを示せ．

(3) $||f - h|| = d(f, G) = 1/2$ なる $h \in G$ は存在しないことを示せ．

Remark. Hilbert 空間ではこのようなことは起こらない！

問題 3.9. Banach 空間 X と閉部分空間 Y および $x \in X$ で, $||x - y|| = d(x, Y)$ なる $y \in Y$ が複数ある例を挙げよ．

Remark. Hilbert 空間ではこのようなことは起こらない！ 部分空間でなくとも, 閉凸部分集合なら一意に定まる．

問題 3.10. H を Hilbert 空間, $0 \neq h \in H$ と閉部分空間 $M \subset H$ に対し Affine 空間 $L = h + M$ を定める．このとき, $||w|| = \inf\{||z|| \mid z \in L\}$ なる $w \in L$ が存在することを示せ．

問題 3.11. $x \in l^2(\mathbb{Z})$ に対し $y = Tx = (y_k)$ を $y_k = x_{k-1} + x_{k+1} - 2x_k$ で定める．T は $l^2(\mathbb{Z})$ から $l^2(\mathbb{Z})$ への有界線形作用素で, $||T|| \leqslant 4$ を示せ．

問題 3.12. H を Hilbert 空間とする．

(1) $X_1, X_2 \subset H$ を部分空間とする．$(X_1 + X_2)^\perp = X_1^\perp \cap X_2^\perp$ を示せ．

(2) $X_1, X_2 \subset H$ を閉部分空間とする．$(X_1 \cap X_2)^\perp = \overline{X_1^\perp + X_2^\perp}$ を示せ．

問題 3.13. X, Y を Hilbert 空間とする．$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ に対し,

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{X \times Y} := \langle x_1, x_2 \rangle_X + \langle y_1, y_2 \rangle_Y$$

と定める．この内積を $X \times Y$ に入れると Hilbert 空間になることを示せ．

問題 3.14. H を Hilbert 空間, $M \subset H$ を閉部分空間とする．H/M に商ノルムを入れると Hilbert 空間となることを示せ．

問題 3.15. H を Hilbert 空間, $M \subset H$ を閉部分空間とする．$\mathrm{codim} M = 1$ のとき, $\dim M^\perp = 1$ を示せ．

問題 3.16. $S = \{x = (x_n) \in l^2 \mid x_1 + x_2 = 0, x_n \in \mathbb{R}\}$ に対し, $S^{\perp}$ を求めよ.

問題 3.17. 実 Hilbert 空間 $H = L^2(0,1)$ に対し, $L = \{f \in H \mid \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ は H の閉部分空間である. L への正射影作用素を P_L と書くと, 与えられた $f \in H$ に対し, $P_L(f)$ を求めよ.

問題 3.18. $H = L^2(-1,1)$, $D = \{f \in H \mid f(-x) = -f(x)\text{a.e.}\}$, $P = \{f \in H \mid f(-x) = f(x)\text{a.e.}\}$ と定める. D, P は共に閉部分空間である.

(1) $H = D \oplus P, D \perp P$ を示せ.

(2) 正射影作用素 π_D, π_P を求めよ.

(3) D, P の基底を 1 組求めよ.

問題 3.19. $h : X \to [0,\infty)$ を可測関数とし,

$$K = \{u \in L^2(X) \mid |u(x)| \leqslant h(x)\text{a.e.}\}$$

と定める. K は空でなく, 閉凸であることを確かめよ. また P_K を決定せよ.

問題 3.20. $M_1 = \{x \in l^2 \mid \sum x_n = 0\}$, $M_2 = \{x \in l^2 \mid \sum x_n/n = 0\}$, $M_3 = \{x \in l^2 \mid \sum x_n/\sqrt{n}\}$ と定める. $M_1^{\perp}$, $M_2^{\perp}$, $M_3^{\perp}$ をそれぞれ求めよ. (手法がすべて異なる. M_2 が一番簡単)

問題 3.21. H を実 Hilbert 空間 , $L : H \to \mathbb{R}$ を有界線形汎関数とする. $\emptyset \neq K \subset H$ は閉集合で凸とする. $J : K \to \mathbb{R}$ を $J(x) = \frac{||x||^2}{2} + L(x)$ で定める. このとき,

$$\exists x_0 \in K \quad \text{s.t.} \quad J(x_0) = \inf_K J(x)$$

が成立することを示せ.