# 第 4 回　1 変数の積分

リーマン積分の理論面は上位互換であるルベーグ積分 (多分 3 年の実解析の授業でやる？) を学べば良いのでほとんど計算問題です. 他の計算問題や広義積分は後で追加します.

**問題 4.1.**

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$ は $[0,1]$ でリーマン積分できないことを示せ.

(2) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x = \frac{1}{2^n}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$ は $[0,1]$ でリーマン積分可能であることを示せ.

**問題 4.2.**

(1) 不定積分が微分可能でない関数の例を挙げよ.

(2) 微分可能だが, 導関数が積分不可能な関数の例を挙げよ.

**問題 4.3.** $f$ を $[a,b]$ 上で有界な可積分関数とし, $[a,b]$ 上の関数 $F$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

と定める. (1)〜(3) は正しいか.

(1) $F$ は $(a,b)$ 上連続.

(2) $F$ は $(a,b)$ 上微分可能.

(3) $F$ が $(a,b)$ 上微分可能ならば, $F$ は $f$ の原始関数である.

**問題 4.4.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $C^1$ 級であるとき, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx \right)$$

**問題 4.5.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 - 1}dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 + 1}dx$

**問題 4.6.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)(x^2+1)^2}dx$

**問題 4.7.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sin x}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x(\cos x)^3}dx$ (4) $\displaystyle\int (\tan x)^3 dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{a(\cos x)^2+b(\sin x)^2}dx$ $(a>0, b\neq 0)$ (6) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$

**問題 4.8.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin^{-1} x dx$ (2) $\displaystyle\int \cos^{-1} x dx$ (3) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx$ (4) $\displaystyle\int x\sin^{-1} x dx$

**問題 4.9.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{x}{(x-a)\sqrt{x+b}}dx$ (3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}dx$

**問題 4.10.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx$

**問題 4.11.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-2e^x}dx$ (2) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^n}{x}dx$ $(n\neq -1)$ (3) $\displaystyle\int \frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$

**問題 4.12.** 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx dx$ (2) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx dx$

**問題 4.13.** 次の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

**問題 4.14.** 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ (2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$

**問題 4.15.** 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$

**問題 4.16.** 次の定積分を求めよ.

$$\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$$

**問題 4.17.**

(1) 区間 $[0, \pi/2]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, 等式

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\pi/2 - x)dx$$

が成立することを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x} dx$ を求めよ.

**問題 4.18.**

(1) 区間 $[0, 1]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, 等式

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

が成立することを示せ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + (\cos x)^2} dx$ を求めよ.

**問題 4.19.** [2023 東工大 1]

実数 $\displaystyle\int_0^{2023} \frac{2}{x + e^x} dx$ の整数部分を求めよ.

**問題 4.20.** [2023 東工大 4]

$xyz$ 空間において，$x$ 軸を軸とする半径 2 の円柱から， $y < 1$ かつ $z < 1$ で表される角柱の内部を取り除いたものを $A$ とする．また，$A$ を $x$ 軸のまわりに $45°$ 回転してから $z$ 軸のまわりに $90°$ 回転したものを $B$ とする．$A$ と $B$ の共通部分の体積を求めよ.

**問題 4.21.** [2021 東工大 5]

$xy$ 平面上の円 $C: x^2+(y-a)^2=a^2(a>0)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 円 $C$ が $y \geqslant x^2$ で表される領域に含まれるための $a$ の範囲を求めよ.

(2) 円 $C$ が $y \geqslant x^2-x^4$ で表される領域に含まれるための $a$ の範囲を求めよ.

(3) $a$ が (2) の範囲にあるとする. $xy$ 平面において連立不等式

$$|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{4}, y \geqslant x^2-x^4, x^2+(y-a)^2 \leqslant a^2$$

で表される領域 $D$ を, $y$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

**問題 4.22.** [2020 東工大 4]

$n$ を正の奇数とする. 曲線 $y=\sin x$ $((n-1)\pi \leqslant x \leqslant n\pi)$ と $x$ 軸で囲まれた部分を $D_n$ とする. 直線 $x+y=0$ を $l$ とおき, $l$ の周りに $D_n$ を 1 回転してできる回転体を $V_n$ とする.

(1) $(n-1)\pi \leqslant x \leqslant n\pi$ に対して, 点 $(x, \sin x)$ を P とおく. また P から $l$ に下ろした垂線と $x$ 軸の交点を Q とする. 線分 PQ を $l$ の周りに 1 回転させてできる図形の面積を $x$ の式で表せ.

(2) (1) の結果を用いて, 回転体 $V_n$ の体積を $n$ の式で表せ.

**問題 4.23.** [2019 東工大 2]

次の等式が $1 \leqslant x \leqslant 2$ で成り立つような関数 $f(x)$ と定数 $A, B$ を求めよ.

$$\int_{1/x}^{2/x} |\log y| f(xy)dy = 3x(\log x-1)+A+\frac{B}{x}$$

ただし, $f(x)$ は $1 \leqslant x \leqslant 2$ に対して定義される連続関数とする.

**問題 4.24.** [2018 東工大 4]

$xyz$ 空間内において，連立不等式

$$\frac{x^2}{4}+y^2 \leqslant 1, |z| \leqslant 6$$

により定まる領域を $V$ とし, 2 点 $(2,0,2), (-2,0,-2)$ を通る直線を $l$ とする.

(1) $|t| \leqslant 2\sqrt{2}$ を満たす実数 $t$ に対し，点 $P_t(\frac{t}{\sqrt{2}}, 0, \frac{t}{\sqrt{2}})$ を通り $l$ に垂直な平面を $H_t$ とする. ま

た，実数 $\theta$ に対し，点 $(2\cos\theta, \sin\theta, 0)$ を通り $z$ 軸に平行な直線を $L_\theta$ とする．$L_\theta$ と $H_t$ との交点の $z$ 座標を $t$ と $\theta$ 用いて表せ.

(2) $l$ を回転軸に持つ回転体で $V$ に含まれるものを考える．このような回転体のうちで体積が最大となるものの体積を求めよ.

**問題 4.25.** [2017 東工大 2]

実数 $x$ の関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\pi/2} \frac{|\sin t|}{1+(\sin t)^2}dt$ の最大値と最小値を求めよ.

**問題 4.26.** [2016 東工大 5]

次のように媒介変数表示された $xy$ 平面上の曲線 $C$ とする：$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

ただし $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ である.

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し, $C$ の概形を図示せよ.

(2) $C$ と $x$ 軸と $y$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

**問題 4.27.** [2015 東工大 3]

$a > 0$ とする．曲線 $y = e^{-x^2}$ と $x$ 軸, $y$ 軸, および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を $A$ とする.

(1) $A$ の体積 $V$ を求めよ.

(2) 点 $(t, 0)$ $(-a \leqslant t \leqslant a)$ を通り, $x$ 軸と垂直な平面による $A$ の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, 不等式 $S(t) \leqslant \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}ds$ を示せ.

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqslant \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}ds$ を示せ.