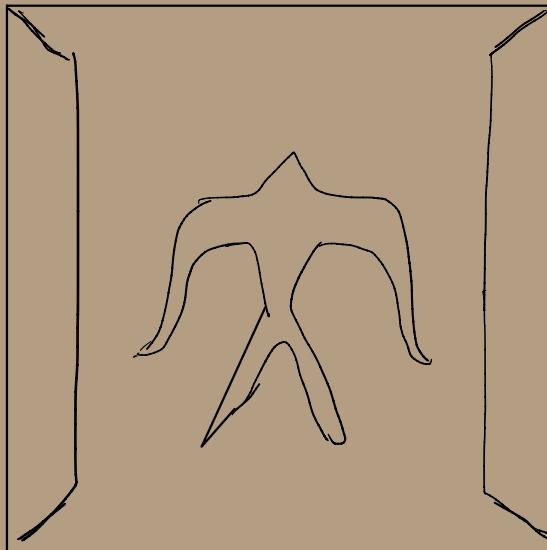


# 第1回 東工大オーバン

---

解答



---

---

---



□ (同期のKR君の解答)

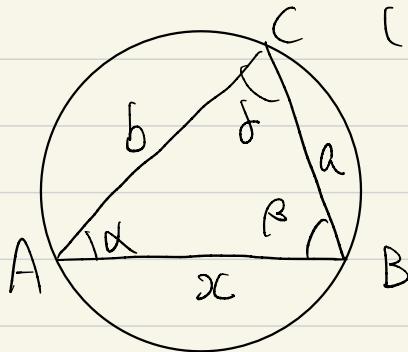
$(a, b, c)$  を満たす。問題の式を2式で表すと  
 $a + 2$  の倍数と  $b + 3$ ,  $a = 2a'$  で  $a$  と  $a'$  は2の  
倍数,  $2$  を法とする  $b + 2$  の倍数と  $b + 3$  が  $b = 2b'$   
を代入して  $a' + 2b' + 1$  が  $2$  を法とする  $c$  の  
倍数と  $b'$  が  $c$ ,  $c = 2c'$  とおこなうと  $(a, b, c) = (a', b', c')$  が  $2$   
の倍数となる。 $a' + 2b' + 1$  が  $2$  の倍数となるのは  
 $a' + 2b' + 1 \equiv 0 \pmod{2}$  である。 $a' + 2b' + 1 = 2k + 1$  である。 $a' + 2b' + 1 = 2k + 1$  である。

∴  $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$  も解です。なぜなら、 $n$

$\left|\frac{a}{2^n}\right| < |x_n|, a = 0 \text{ または } =$

等の条件は満たされています。

2



$$(i) \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ or } \text{acute},$$

$$x = 2r \sin(\pi - \alpha - \beta)$$

$$= 2r \sin(\alpha + \beta)$$

$$= 2r \sin \alpha \cos \beta + 2r \sin \beta \cos \alpha$$

$$= a \cos \beta + b \cos \alpha$$

$$a = 2r \sin \alpha \quad \text{if } \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$b = 2r \sin \beta \quad \text{if } \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$$

$$\therefore x = \underbrace{a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}}$$

$$(ii) \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \text{ or } \text{obtuse}, \quad \cos \beta = -\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$$

$$x = \underbrace{-a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}}$$

別解 余弦定理を用いて、

$$\sin \gamma = \frac{ac}{2r}, \cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

以下それを消去して  $c$  を求めてもよいが、2重根号を  
外すのが  $c > 0$  です。

\*  $\alpha$  や  $\beta$  が金角にはなりません。 $\beta$  はあり得るのだが  
場合分けでまたしてもポイントです。

3

n回でも終わらなければいけない,

n回目 比率 A の確率  $a_n$

B

C

$b_n$

$c_n$



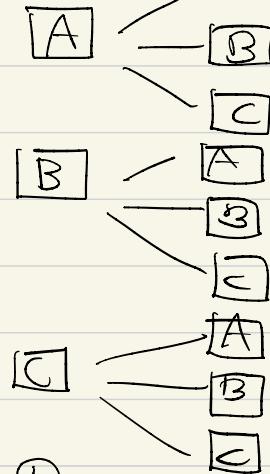
よって、 $\Sigma a_n = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. \cdots \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. \cdots \textcircled{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{n+1} = a_n + b_n + c_n \end{array} \right. \cdots \textcircled{3}$$

$$p_n = a_n + b_n + c_n \cdots \textcircled{4}$$



...x

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より } c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n) + \frac{2}{3}c_n \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4} \text{ より } a_{n+1} + b_n = p_n - c_n \text{ と } \textcircled{6} \text{ に } p_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}c_n$$

$$\therefore \textcircled{5} \text{ と } p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}p_{n-1} \quad \therefore p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{3}p_n$$

$$x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$$

よって、

$$p_{n+1} - \alpha p_n = \beta^n (p_1 - \alpha p_0)$$

$$p_{n+1} - \beta p_n = \alpha^n (p_1 - \alpha p_0)$$

(P) 为 没有 U' \Sigma,

$$P_n = \frac{\alpha^n (P_i - \beta P_0) - \beta^n (P_i - \alpha P_0)}{\alpha - \beta}$$

所以,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\alpha (P_i - \beta P_0) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \beta (P_i - \alpha P_0)}{P_i - \beta P_0 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n (P_i - \alpha P_0)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha (P_i - \beta P_0)}{P_i - \beta P_0} = \alpha = \underbrace{\frac{\sqrt[1-\beta]{2}}{\beta}}$$

卷之三

(ii)  $n+1$  目で  $n+2$  目の同じ手で  $n+2$  目に残る。

$$(ii) \rightarrow P_n \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} P_n$$

$$[ii] \rightarrow P_{n+1} \propto \frac{2}{3} = \frac{2}{3} P_{n+1}$$

$$\therefore P_{n+2} = \frac{2}{3}P_{n+1} + \frac{1}{9}P_n$$

$$P_n = \frac{\alpha^n(P_i - \beta P_o) - \beta^n(P_i - \beta P_o)}{\alpha - \beta} \text{ が成り立つ。}$$

に取扱う必要は全くありません"; これは経験的知識で  
異常に多いです。

4

$$\int_0^{\pi} (\pi(x-\frac{c}{\pi})^2) |\sin x|$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} (\pi(x-\frac{c}{\pi})^2) |\sin x|$$

$$= \sum_{k=1}^n (\pi(c - \frac{c^2}{\pi})) \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin x| \quad \left( \begin{array}{l} \frac{k-1}{n}\pi < c < \frac{k}{n}\pi \\ \therefore \text{采点の範囲} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (\pi(c - \frac{c^2}{\pi})) \cdot \frac{2}{n} \quad ( \because \text{山頂} )$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum (\pi(c - \frac{c^2}{\pi})) \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$\xrightarrow{\text{area}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi(x-\frac{c}{\pi})^2) dx = \underbrace{\frac{\pi^2}{3}}$$

×  $\int (\pi x - x^2) \sin nx$  は「計算で」求められますか？

うそ、トシントー。  $[0, \pi]$  に  $g(x) = |\sin nx|$  は

非負連続的 積分の運び方と用ひよニアリエキス、

トドケテ解けます。

↑  
級数の第4回 で、資料に  
載せてます！高校の八才！

# 5 (同貫のKT君の解説)

## 問題5

条件を見て六面体は、 $\angle AOC = \theta$  で  $\theta$  を動かすと一変に違うので。

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のときは図1の様な六面体になる。

$\theta = 90^\circ$  のときは、図2の様に四角錐となり、六面体にならない。

$90^\circ < \theta < 120^\circ$  のときは、図3の様な六面体になる。

$\theta = 120^\circ$  のときは、B=Dとなり六面体にならない。

$120^\circ < \theta$  のときは、でもでも仮定を満たさない。

よって、 $0^\circ < \theta < 90^\circ \vee 90^\circ < \theta < 120^\circ$  となる。

次に、 $\angle AOC = \theta$  のときの六面体の体積を求める。

六面体は、平面OACにに関して対称なので、三角形OACを底面として見る。 $\angle AOC = \theta$  となり、底面積  $S$  とする。

高さは、B,Dと平面OACのヨリを引く。また、

$BO=BA=BC$ 、 $DO=DA=DC$  なので、Pythagorasの定理より

B,Dから平面OACに下ろした垂線の先端は三角形OACの外心であることをいだす。よって、外接円の半径を  $R$  とする。

正弦定理より、 $\frac{AC}{\sin \theta} = 2R$  となる。また、図4より、 $AC = 2\sin \frac{\theta}{2}$  である。

$\therefore R = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = \frac{1}{2\cos \frac{\theta}{2}}$  となる。再び Pythagoras の定理より

高さは、 $R^2 + h^2 = 1^2$  となる。 $\therefore h = \sqrt{1-R^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}-1}}{2\cos \frac{\theta}{2}}$

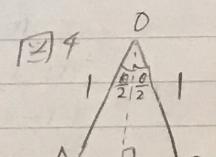
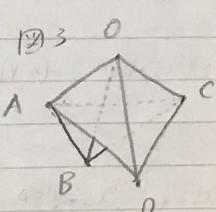
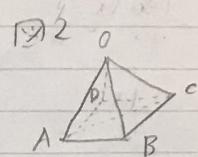
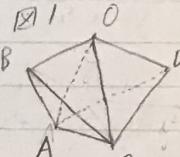
よって体積  $V$  は、 $V = S \times h \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{2} \sin \theta \frac{\sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}-1}}{2\cos \frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{3} \times 2$

$= \frac{1}{3} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}-1} = \frac{1}{3} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{3-4\sin^2 \frac{\theta}{2}}$

$= \frac{1}{3} \sqrt{3\sin^2 \frac{\theta}{2}-4\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{-4(\sin^2 \frac{\theta}{2}-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{16}}$

となる。 $0^\circ < \theta < 90^\circ \vee 90^\circ < \theta < 120^\circ$  たり、 $-\frac{3}{8} < \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} < \frac{1}{8}$   $\sqrt{\frac{1}{8}} < \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} < \frac{3}{8}$  となるため、

$V$  は  $\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} = 0$  を  $30^\circ$  で最大となり、最大値は  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4}$  となる。□



θの定義域に注意！

\* 垂直の線 → 垂線の定

# 別解 ( 同期のKR君の解答)

OBの中点E,Mとおく。

$$V = 2 \cdot V_{OABC} = 4 \cdot V_{OAMC}$$

ACの長さを  $x$  ( $0 < x < \sqrt{3}$ ) とおく。

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

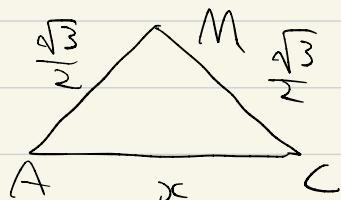
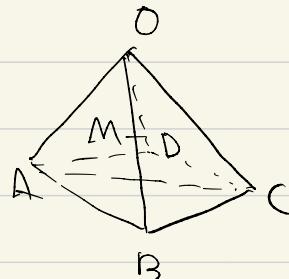
$O$ と  $\triangle AMC$ との面積は  $\frac{1}{2}tx^2$ ,

$$V_{OAMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}x\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{4}(x^2 - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{16}}$$

$$\therefore V \text{が最大となるのは } x^2 = \frac{3}{2}, \text{つまり } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ の時}$$

と見て、最大値  $\frac{1}{4}$  である。



解説

$$\angle ABC = \theta \text{ とおく。}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{1+\cos\theta} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OB}$$

$$|BD| = \sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

次に、

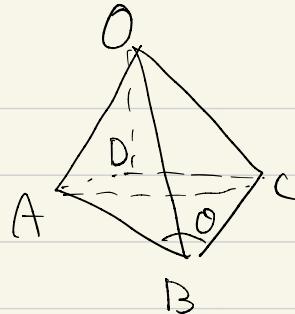
$$V = \frac{1}{6} \sin\theta \sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1}{6} \sqrt{(1-\cos\theta)(2+4\cos\theta)}$$

と分かります。

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ の範囲は } 0 < V < \frac{1}{4} \text{ の範囲で } 0 < V < \frac{1}{6}$$

となることを示す。

$\frac{\pi}{2} < \theta$  のとき、どうしてか「6面体の体積が正確にいくつ」  
「いくつでも」範囲ありません。 $1/4 < V < 2+4\cos\theta > 0$  が  
 $\cos\theta > -\frac{1}{2}$ 。つまり  $0 < \frac{2\pi}{3}$  がいいです。



- |          |           |           |
|----------|-----------|-----------|
| [1] C ** | [2] B **  | [3] B *** |
| [4] B ** | [5] B *** |           |

[1] が“一番難いです。これ”

- [1] は 誘導  $\rightarrow$  13
- [2] を複素平面の  $\text{P}(\text{P})$  に変える
- [5] に  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の条件をつける。

とすると東工大らしいセットになります。