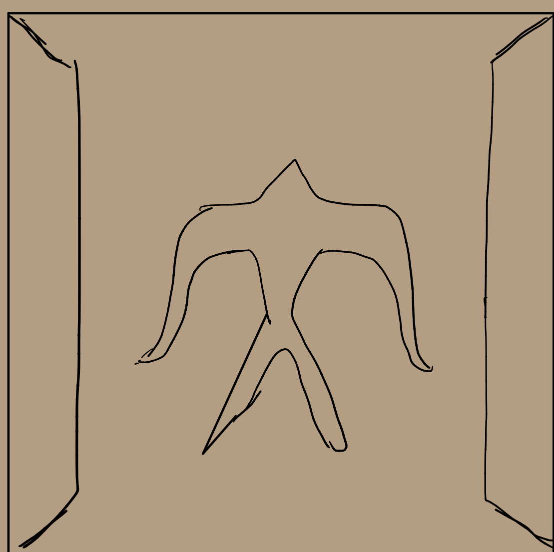
第1回 東工大オーペン

解答



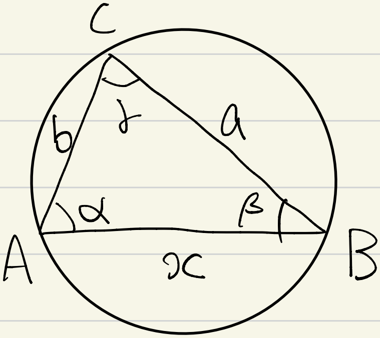
$\boxed{1}$ (同期のKR君の解答)

(a,b,c)を整数解とする。問題の式を2を法としてみると aが2の倍数と分かる。$a=2a'$を代入し式を2で割り2を法としてみると bが2の倍数と分かる。$b=2b'$を代入し式を2で割り2を法としてみると cが2の倍数と分かる。$c=2c'$とおくと (a',b',c')が解になっていると分かる。

よって解としてあり得るのは $(a,b,c)=(0,0,0)$のみ

※ $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$ も解になることが分かるので，nを十分大きくとると $\left|\frac{a}{2^n}\right| < 1$ となり，$a=0$ 以外に整数解は存在しないと分かります.

$\boxed{2}$



(i) $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ のとき,

$$x = 2r\sin(\pi-\alpha-\beta)$$
$$= 2r\sin(\alpha+\beta)$$
$$= 2r\sin\alpha\cos\beta + 2r\sin\beta\cos\alpha$$
$$= a\cos\beta + b\cos\alpha$$

$a = 2r\sin\alpha$ より $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$

$b = 2r\sin\beta$ より $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}$

$$\therefore\ x = a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$$

(ii) $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ のとき, $\cos\beta = -\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}$ より,

$$x = -a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$$

<u>別解</u>　余弦定理を用いて，

$$\sin\gamma = \frac{x}{2r}\,,\ \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$$

からγを消去してxを求めてもよいが，2重根号を外すのがメンドーです．

※ αが鈍角にはなりません．βはあり得るので場合分けできたかどうかもポイントです．

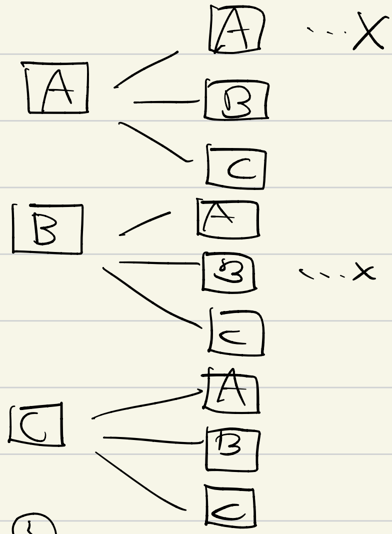
$\boxed{3}$

n回やっても終わらないなかで,

n回目が $\boxed{A}$ の確率を a_n

$\boxed{B}$ b_n

$\boxed{C}$ c_n



とおく。このとき

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ③ \\ p_n = a_n + b_n + c_n & \cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ より $c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n \quad \cdots ⑤$

①+② より $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n) + \frac{2}{3}c_n \quad \cdots ⑥$

④ より $a_n + b_n = p_n - c_n$ より ⑥ は $p_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}c_n$

∴⑤ より. $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{9}p_{n-1}$ ∴ $p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{9}p_n$

$x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ を解いて,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$$

とおくと,

$$p_{n+1} - \alpha p_n = \beta^n (p_1 - \alpha p_0)$$

$$p_{n+1} - \beta p_n = \alpha^n (p_1 - \alpha p_0)$$

①② 減じると,

$$P_n = \frac{\alpha^n (P_1 - \beta P_0) - \beta^n (P_1 - \alpha P_0)}{\alpha - \beta}$$

よって,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\alpha (P_1 - \beta P_0) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \beta (P_1 - \alpha P_0)}{P_1 - \beta P_0 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n (P_1 - \alpha P_0)}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\alpha (P_1 - \beta P_0)}{P_1 - \beta P_0} = \alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

別解

(i) $n+1$回目と$n+2$回目が同じ記号で$n+2$回目に残る(の)
(ii) 〃 違う 〃

(i) → $p_n \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} p_n$
(ii) → $p_{n+1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} p_{n+1}$

$\therefore p_{n+2} = \frac{2}{3} p_{n+1} + \frac{1}{9} p_n$.

※ $p_n = \dfrac{\alpha^n (p_1 - \beta p_0) - \beta^n (p_1 - \beta p_0)}{\alpha - \beta}$ と求まるので p_n を具体的に求める必要は全くありませんが、これは経験がないと難しいです。

$\boxed{4}$

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)|\sin nx|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k\pi}{n}} (\pi x - x^2)|\sin nx|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\pi c - c^2) \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin nx| \qquad \left(\frac{k-1}{n}\pi < {}^{\exists}c < \frac{k\pi}{n} \quad \because \text{積分の平均値} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\pi c - c^2) \cdot \frac{2}{n} \qquad (\because \text{山が1つ})$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum (\pi c - c^2) \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\,dx = \underline{\frac{\pi^2}{3}}$$

※ $\int (\pi x - x^2) \sin x$ は計算で求められますが

チョットメンドー。$[0, \pi]$ にて $f(x) = \pi x - x^2$ は

非負連続より 積分の平均値を用いることができ、

ずっと楽に解けます。

微積の第4回で資料に載ってますが高校のハンイ！

$\boxed{5}$ (同期のKT君の解答)

問題5

条件をみたす六面体は、∠AOCを決めると一意に定まるので、
∠AOC$=\theta$としてθを動かしていく。$\theta=0^\circ$のときは$A=C$となり六面体にならない。
$0^\circ<\theta<90^\circ$のときは図1の様な六面体になる。
$\theta=90^\circ$のときは、図2の様に四角錐となり、六面体にならない。
$90^\circ<\theta<120^\circ$のとき、図3の様な六面体になる。
$\theta=120^\circ$のとき、$B=D$となり六面体にならない。
$120^\circ<\theta$のとき、そもそも仮定をみたさない。
よって、考えるθのハンイは、$0^\circ<\theta<90^\circ \lor 90^\circ<\theta<120^\circ$となる。

図1

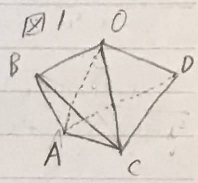


図2

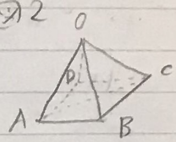
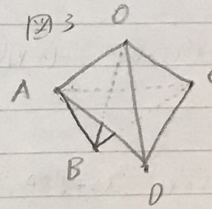
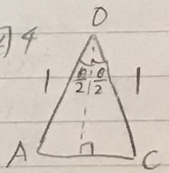


図3



次に、∠AOC$=\theta$のときの六面体の体積を求める。
六面体は、平面OACに関して対称なので、三角形OACを底面として見る。∠AOC$=\theta$より、底面積Sは、
$S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\cdot\sin\angle AOC=\frac{1}{2}\sin\theta$ となる。
高さは、B、Dと平面OACのキョリを示す。また、
$BO=BA=BC$、$DO=DA=DC$なので、Pythagorasの定理より
B、Dから平面OACに下ろした垂直の線は三角形OACの外心であることを示す。よって、外接円の半径をRとすると、
正弦定理より、$\frac{AC}{\sin\theta}=2R$となる。また、図4より、$AC=2\sin\frac{\theta}{2}$である。

図4



$\therefore R=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ となる。再びPythagorasの定理より
高さhは、$R^2+h^2=1^2$をみたす。$\therefore h=\sqrt{1-R^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

θの定義域に注意!

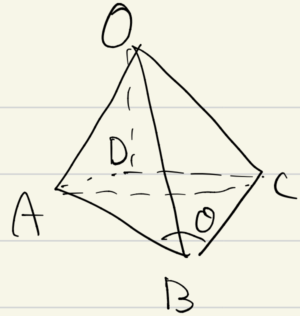
よって体積Vは、$V=S\times h\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{2}\sin\theta\frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{3}\times 2$

$$=\frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}=\frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{3\sin^2\frac{\theta}{2}-4\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{-4\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{16}}$$

となる。$0^\circ<\theta<90^\circ \lor 90^\circ<\theta<120^\circ$より、$-\frac{3}{8}<\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}<\frac{1}{8} \lor \frac{1}{8}<\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}<\frac{3}{8}$ となるため、
Vは$\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}=0$なる$\theta$で最大となり、最大値は$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{1}{4}$となる。□

別解



$\angle ABC = \theta$ とおくと,

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{1+\cos\theta}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OB}$$

$$|BD| = \sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

となり,

$$V = \frac{1}{6}\sin\theta\sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1}{6}\sqrt{(1-\cos\theta)(2+4\cos\theta)}$$

となります.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なら問題なく, $\cos\theta = \frac{1}{4}$ のとき最大をとることに変わりません.
$\frac{\pi}{2}<\theta$ のとき, どこまでが6面体のなるか正確に分からなくても問題ありません. 少なくとも $2+4\cos\theta>0$ より $\cos\theta>-\frac{1}{2}$. つまり $\theta<\frac{2\pi}{3}$ は分かります.

$\boxed{1}$ が一番難しいです。そこで、

- $\boxed{1}$ に誘導をつける
- $\boxed{2}$ を複素平面の問題に変える
- $\boxed{5}$ に $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なる条件をつける。

とすると東工大らしいセットになると思います。