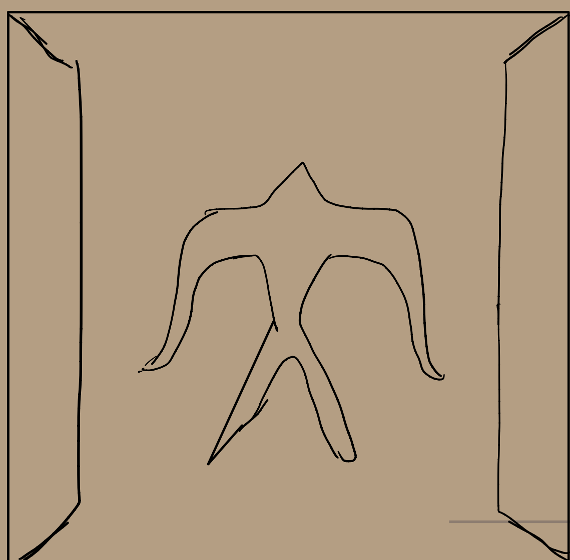
第2回 東工大オープン

解答



$\boxed{1}$

(1) $ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)\leqq 0$ //

(2) $a_1\cdots\cdots a_n=1$ のとき,

$$a_1+\cdots+a_n\geqq n$$

であることをキノーホーで示す. $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n$

として一般性を失わない.

・$n=1$ のときは $a_1=1$ より成立

・$n=k$ のとき成立すると仮定する. $a_{k+1}>0$,

$a_1\cdots\cdots a_{k+1}=1$ より $a_1\geqq 1$, $a_{k+1}\leqq 1$. よって(1)より

$$a_1+a_{k+1}\geqq a_1a_{k+1}+1 \quad \cdots ①$$

また $a_1a_{k+1}, a_2, \cdots, a_k$ の k コに仮定を用いると

$$a_1a_{k+1}+a_2+\cdots+a_k\geqq n \quad \cdots ②$$

①, ② より

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}\geqq n+1 \quad //$$

(3) $a_1\cdots\cdots a_n=m$ とおくと $\frac{a_1}{\sqrt[n]{m}}\cdots\cdots\frac{a_n}{\sqrt[n]{m}}=1$. (2) より

$\frac{a_1}{\sqrt[n]{m}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{m}}\geqq n$. ∴ $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{m}$ //

※ キリーホーの仮定を上手く使えるかがPoint.

$\underbrace{a_1 a_{k+1}} + a_2 + \cdots + a_k$ というk個のセットに用いた。

4

(1) K は $\begin{cases} 1 \leq y^2+z^2 \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ で表される立体.

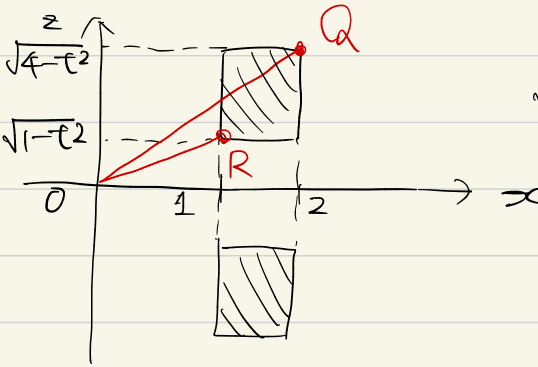
体積は $\underline{3\pi}$

(2) L を平面 $y=t$ $(|t| \leq 2)$ で切るときの切り口は

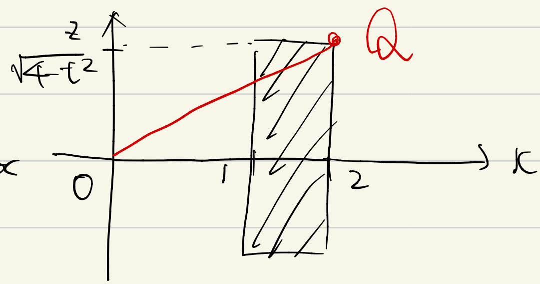
$$\begin{cases} 1-t^2 \leq z^2 \leq 4-t^2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

切り口を y 軸のまわりに回転してできる図形の面積を $S(t)$ とおく.

(I) $|t| \leq 1$ のとき



(II) $1 \leq |t| \leq 2$ のとき



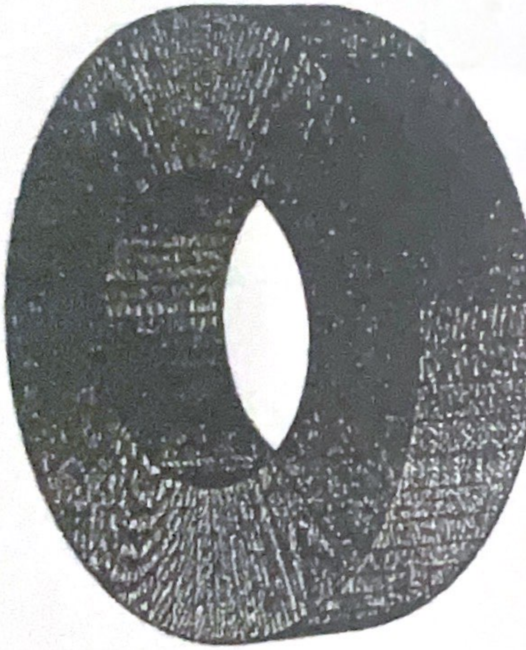
$$S(t) = \pi(OQ^2 - OR^2) = 6\pi$$

$$S(t) = \pi \cdot (OQ^2 - 1) = (7-t^2)\pi$$

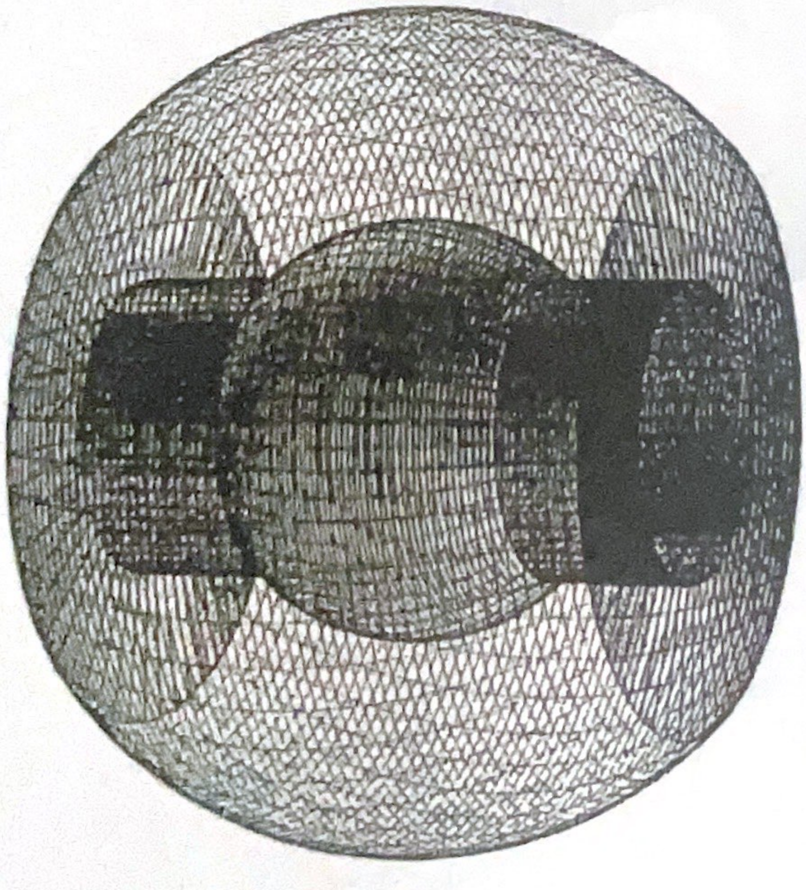
$$\therefore V = 2\int_0^1 6\pi\,dt + 2\int_1^2 \pi(7-t^2)\,dt = \underline{\frac{64}{3}\pi}$$

このような図形は
試験勉強で描かない!

K



L



$\boxed{5}$

(1) $f(x)$はn次でn次の係数をaとおくと$f(1-x)$のn次の係数は$a(-1)^n$ ∴ $f(x)=f(1-x)$ならnは偶数

(2) $h(x)=f(x)-f(0)$ とおくと $h(0)=0$, $h(1)=0$.
∴ $h(x)$は$x(x-1)$で割り切れる

(3) ・$f(x)$が2次なら(2)から

$$f(x)=cx(x-1)+f(0)$$

と表せるので$f(x)$は$x(x-1)$の多項式

・$f(x)$がn次のとき$x(x-1)$の多項式で表されると仮定する。
$f(x)$が$n+2$次のとき、(2)の$g(x)$はn次で、

$$g(1-x)=\frac{f(1-x)-f(0)}{(1-x)\left((1-x)-1\right)}=\frac{f(x)-f(0)}{x(x-1)}=g(x)$$

∴ gも$x(x-1)$の多項式で、よって$n+2$次のfも$x(x-1)$の多項式 ∴キノーホーよりOK

$\boxed{1}$ C ** $\boxed{2}$ B** $\boxed{3}$ B*

$\boxed{4}$ B ** $\boxed{5}$ C***

$\boxed{5}$ は難問です. $\boxed{1}$ も誘導にのるには工夫が必要です. そこで $\boxed{5}$ を複素平面の問題に変えると東大らしいセットになると思います.