問題 1. $a^3+2b^3+4c^3=2abc$ を満たす整数の組 (a,b,c) を全て求めよ.
解答. $(0,0,0)$ のみ.
証明. 整数の組 (a,b,c) が上の式を満たすとする. 式を 2 を法としてみると, $a^3\equiv 0$. よって a は偶数. 問題の式を 4 を法としてみると, $2b^3\equiv 0$. よって b^3 は偶数であり, b も偶数. 問題の式を 8 を法としてみると, $4c^3\equiv 0$. よって c^3 は偶数であり, c も偶数. 以上より $(a/2,b/2,c/2)$ も整数の組であり, 問題の式の同次性より解である. これを繰り返すと任意の非負整数 n で $(a/2^n,b/2^n,c/2^n)$ は整数解. よって解としてあり得るのは $(0,0,0)$ のみ. これは解になっている.

問題 2. 三角形の二辺が a,b で, 外接円の半径が r であるとき, もう一辺の長さを求めよ. ただし $a<b<2r$ とする.
解答. $\pm a\sqrt{1-\dfrac{b^2}{4r^2}}+b\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4r^2}}$
証明. 求める長さを x とおく. 長さが a,b の辺に対応する三角形の内角の大きさを α,β とおく. 正弦定理より

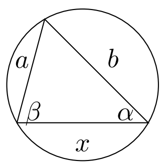
$$a=2r\sin\alpha,\quad b=2r\sin\beta,\quad x=2r\sin(\pi-\alpha-\beta)=2r\sin(\alpha+\beta)=2r(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$

$a<b$ より α は鈍角になりえないが, β はなりえるので

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}},\quad \cos\beta=\pm\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}$$

以上より

$$x=\pm a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}+b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$$



問題 3. 袋の中に A,B,C と書かれた 3 枚のカードが入っている. 1 枚取り出して袋に戻す操作を繰り返す. A が連続して出るか, B が連続して出れば終了する. 操作を n 回行って終了しない確率を p_n とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{p_n}$$

を求めよ.
解答. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$
証明. 操作を n 回行って終了しておらず n 回目が A または B となる確率を q_n, C となる確率を r_n とする.

$$p_n=q_n+r_n \tag{1}$$
$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n \tag{2}$$
$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{3}r_n \tag{3}$$

(2)+(3) と (1) より, $p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}r_n$. (1)(3) より $r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n$. これより

$$p_{n+2}=\frac{2}{3}p_{n+1}+\frac{1}{9}p_n$$

$x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ の解を $\alpha < \beta$ とする．よって

$$\begin{aligned}
p_{n+2} - \beta p_{n+1} &= \alpha(p_{n+1} - \beta p_n) \\
\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} - \beta &= \alpha \frac{p_n}{p_{n+1}} \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \beta \right) \\
\left| \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} - \beta \right| &\leq |3\alpha| \left| \frac{p_{n+1}}{p_n} - \beta \right| \quad (\because \quad \frac{1}{3}p_n = r_{n+1} \leq p_{n+1}) \\
\left| \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}} - \beta \right| &\leq (\sqrt{2}-1)^n \left| \frac{p_2}{p_1} - \beta \right| \to 0
\end{aligned}$$

よって求める極限値は

$$\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

問題 4. 極限値 $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi (\pi x - x^2)|\sin nx| \mathrm{d}x$ を求めよ．

解答. $\pi^2/3$

証明.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\pi x - x^2)|\sin nx| \mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi} (\pi x - x^2)|\sin nx| \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\pi c_k - c_k^2) \int_{\frac{k}{n}\pi}^{\frac{k+1}{n}\pi} |\sin nx| \mathrm{d}x \quad (\because \quad \text{積分の平均値より} \frac{k}{n}\pi < \exists c_k < \frac{k+1}{n}\pi) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\pi c_k - c_k^2) \frac{2}{n} = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\pi c_k - c_k^2) \quad \to \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

問題 5. 一辺の長さが 1 の正三角形 OAB, OBC, OCD, ODA と三角形 ABC, CDA を面とする六面体の体積 V の最大値を求めよ．

解答. 1/4

証明. つぶれない六面体と考えると、四面体 OABC, OADC は三角形 OAC を含む平面に関して対称．また OB の中点を M とおく．

$$V = 2 \times (\text{四面体 OABC の体積}) = 4 \times (\text{四面体 OAMC の体積})$$

また三角形 AMC と O の距離は 1/2．さらに AM, CM $= \sqrt{3}/2$．

$$V = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (\text{三角形 AMC の面積}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \sin \angle\mathrm{AMC}$$

よって $\angle\mathrm{AMC} = \pi/2$ で V は最大値 1/4 をとる．