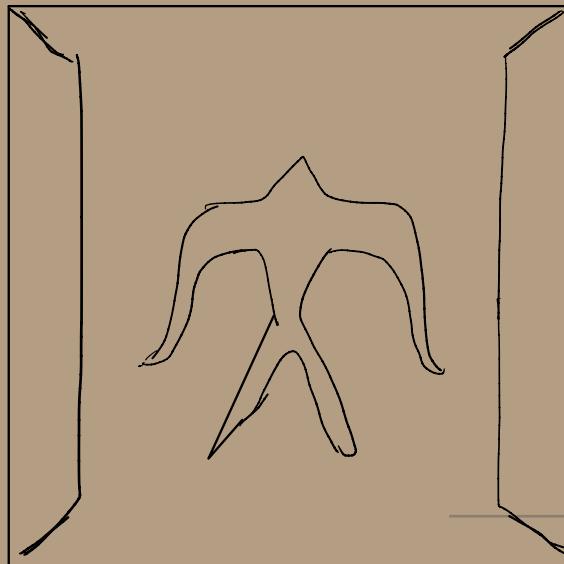


第2回 東工大オペン

解答参考



1

$$(1) \quad a \geq 1 \wedge b \leq 1 \Leftrightarrow a-1 \geq 0 \wedge b-1 \leq 0 \\ \Rightarrow (a-1)(b-1) \leq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \leq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \leq a + b$$

したがって、 $a \geq 1 \wedge b \leq 1 \Rightarrow a+b \geq ab+1$ は示された。□

(3) n に関する帰納法で示す。 $n=1$ のとき、 $\frac{a_1}{1} \geq a_1^{\frac{1}{k}}$ は明らかに成立する。

$n=k$ のときの成立を仮定し、 $n=k+1$ のときの成立を示す。

$$f(x) = \frac{1}{k+1} \sum_{\ell=1}^k a_\ell + \frac{x}{k+1} - \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k+1}} x^{\frac{1}{k+1}} \quad (x > 0) \text{ とする。}$$

$$\text{このとき, } f'(x) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k+1}} x^{-\frac{k}{k+1}} \text{ となるため。}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \left(1 - \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k+1}} x^{-\frac{k}{k+1}} \right) > 0 \Leftrightarrow x^{\frac{k}{k+1}} > \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k+1}} \Leftrightarrow x > \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}} \text{ となり。同様に}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}} \text{ となる。よって、増減表は}$$

x	$\left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}}$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	↓ ↑ の様。

$$\text{よって } \frac{1}{k+1} \sum_{\ell=1}^{k+1} a_\ell - \left(\prod_{\ell=1}^{k+1} a_\ell \right)^{\frac{1}{k+1}} = f(a_{k+1}) \geq f\left(\left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}}\right) = \frac{1}{k+1} \sum_{\ell=1}^k a_\ell + \frac{1}{k+1} \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}} - \left(\prod_{\ell=1}^{k+1} a_\ell \right)^{\frac{1}{k+1}} \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k(k+1)}} \\ = \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k a_\ell - \left(\prod_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{k}} \right) \geq 0$$

となり、 $n=k+1$ のときも成立する。よって $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}}$ は示された。□

(2) (3)の結果に $\prod_{k=1}^n a_k = 1$ を代入すれば $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \geq 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k \geq n$ となり、示された。□

$$(1) \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} \right| dt \leq \int_0^1 |f_{n+1}(t)| dt = F_{n+1}(1) \quad (\because f_{n+1}(t) = t^n \geq 0 \text{ in } [0, 1]) \quad \square$$

$$(2) \int_0^1 \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1-(-t)} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{k=1}^n (-t)^k \right) dt = \left[\log|1+t| + \sum_{k=1}^n \frac{(-t)^{k-1}}{k} \right]_0^1 = \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ なので}.$$

$$(1) \text{ よし} \left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \log 2 \right| \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty \quad \text{よし} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2 \quad \text{よし} \quad \square$$

マグロ8貫、サーモン6貫を一列に並べることにより、

最初に木村君が食べる2貫は1番目と2番目にあるすに。

次に馬渕君が食べる2貫は3番目と4番目にあるすに。

最後に木村君が取る2貫は5番目と6番目にあるすに言いえられる。

よって、求めるべき確率は、マグロ8貫、サーモン6貫を同じネタは区別せずに無作為に並べたときの5番目と6番目のすしがマグロとサーモンの1貫ずつになっている確率であるといえられる。

一列の並べ方は $\binom{14}{6}$ 通りで、等確率に起こる。このうち、条件をみたす並べ方は、

(i) 5番目マグロ、6番目サーモン、他は不問

(ii) 5番目サーモン、6番目マグロ、他は不問

の2つがあり、どちらも $\binom{14-2}{6-1} = \binom{12}{5}$ 通りである。よって、求めるべき確率は

$$\frac{\binom{12}{5} \times 2}{\binom{14}{6}} = \frac{12!}{5!7!} \times 2 \times \frac{6!8!}{14!} = \frac{6 \times 8 \times 2}{14 \times 13} = \frac{48}{91} \text{ となる。□}$$

4

- (1) $x=k$ として固定する。 S と平面 $x=k$ の共通部分は、 $k \in [1, 2]$ のとき $\{(k, y, z) | 1 \leq y \leq 2, k \in [1, 2]\}$ のとき空になる。
 $k \in [1, 2]$ のとき、共通部分の点と x 軸のヨリとして実現できる値の範囲は、 $y^2 + z^2$ のとりうる値の範囲に他ならず、 $[1, 4]$ である。
このとき、 x 軸周りに 1 回転すると、 $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ ($(k, 0, 0)$ 中心の半径 2 の円から中心 $(k, 0, 0)$ 半径 1 の円を取った形) になる。
よって、 k を動かすことにより、 $A: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ となり、体積は半径 2 の円柱から半径 1 の円柱を引けば良いので、 $(2^2 \pi - 1^2 \pi) \times 1 = 3\pi$ となる。□
- (2) $y=k$: 固定し、同様に共通部分の点と y 軸のヨリとして実現できる値の範囲を考える。 $|k| > 2$ のときは $4 - k^2 < 0$ により共通部分 $1 \leq x^2 + z^2 \leq 4 - k^2$ は空。
 $1 \leq |k| \leq 2$ のとき、 $4 - k^2 \leq 0$ なので、値の範囲は $[1, \sqrt{8 - k^2}]$ である。 $|k| < 1$ のときは、 $4 - k^2 > 0$ により値の範囲は $[\sqrt{2 - k^2}, \sqrt{8 - k^2}]$ である。
このとき y 軸周りに 1 回転すると、 $1 \leq x^2 + z^2 \leq 8 - k^2$ ($|k| \leq 2$)、 $2 - k^2 \leq x^2 + z^2 \leq 8 - k^2$ ($|k| < 1$) となり、それでおよぶ円から同じ中心の小さな円を引いた形になる。
よって、 k を動かすこと、 $B: 1 \leq x^2 + z^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ ($|k| \leq 2$)、 $2 - k^2 \leq x^2 + z^2 \leq 8$ ($|k| < 1$) と表せる。
また、体積は、微小体積が $(\text{円柱の体積}) - (\text{円柱の体積})$ に近似できるので、対称性も考慮すると、
 $2 \int_1^2 ((8 - k^2) - 1) \pi dk + 2 \int_0^1 ((8 - k^2) - (2 - k^2)) \pi dk = 2\pi \left[7k - \frac{k^3}{3} \right]_1^2 + 12\pi = \frac{64}{3}\pi$ となる。□
- (3) $z=k$: 固定し、同様に共通部分の点と z 軸のヨリとして実現できる値の範囲を考える。
共通部分は $(1 - k^2 \leq x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 8 - k^2) \wedge (1 \leq z \leq 2)$ である。
 $|k| > 2\sqrt{2}$ のときは $8 - k^2 < 0$ により空。 $\sqrt{2} \leq |k| \leq 2\sqrt{2}$ のときのヨリの範囲は $2 - k^2 \leq 0$ により $[0, \sqrt{8 - k^2}]$ となる。
 $|k| < \sqrt{2}$ のときのヨリの範囲は $[\sqrt{2 - k^2}, \sqrt{8 - k^2}]$ となる。このとき z 軸周りに 1 回転すると、
 $x^2 + y^2 \leq 8 - k^2$ ($\sqrt{2} \leq |k| \leq 2\sqrt{2}$)、 $2 - k^2 \leq x^2 + y^2 \leq 8 - k^2$ ($|k| < \sqrt{2}$) となる。
 k を動かすこと、 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ ($2 \leq z \leq 8$)、 $2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ ($z^2 \leq 2$) となり、これは、 $2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$ と同値である。
よって、C は、原点を中心、半径 2 の球から原点を中心、半径 2 の球を取ったものに他ならない。
よって、体積は、 $\frac{4}{3}((2\sqrt{2})^3 - \sqrt{2}^3)\pi = \frac{4}{3} \cdot 7 \cdot 2\sqrt{2}\pi = \frac{56\sqrt{2}}{3}\pi$ となる。□

$$(1) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{1}{2})^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(1-x) \text{ なので、上の式に代入すると } \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - \frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n (x - \frac{1}{2})^n \text{ となる。}$$

よって一致の定理より $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = (-1)^n a_n$ となり、 $a_n \neq 0 \Rightarrow 2|n$ が成立する。

$$\text{よって } f(x) = \sum_{l=0}^k b_l (x - \frac{1}{2})^{2l} \text{ の様に表せたため、 } f(x) \text{ の次数は } -\infty \text{ か偶数になる。} \square$$

$$(3) (1) \text{より } f(x) = \sum_{l=0}^k b_l (x - \frac{1}{2})^{2l} = \sum_{l=0}^k b_l (x(x-1) + \frac{1}{4})^l \text{ と表せたため、 } f(x) = \sum_{l=0}^k C_l (x(x-1))^l \text{ と表せる。}$$

よって $f(x)$ は $x(x-1)$ の多項式である。□

$$(2) f(x) - f(0) = \sum_{l=0}^k C_l (x(x-1))^l - C_0 = \sum_{l=1}^k C_l (x(x-1))^l \text{ (左3の } k \geq 1 \text{ のときはOK)}$$

$k=0$ のときは 言数項しかないのでOK。□