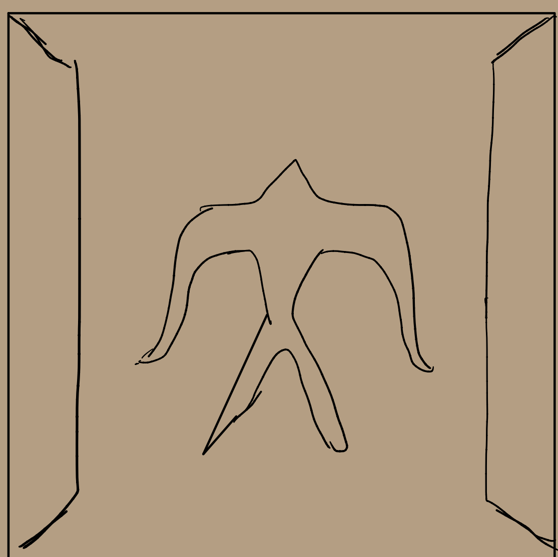
# 第1回 東工大オープン

## 解答



$\boxed{1}$ (同期のKR君の解答)

$(a, b, c)$ を整数解とする。問題の式を2を法としてみると $a$ が2の倍数と分かる。$a=2a'$ を代入し式を2で割り2を法としてみると $b$ が2の倍数と分かる。$b=2b'$ を代入し式を2で割り2を法としてみると $c$ が2の倍数と分かる。$c=2c'$ とおくと $(a', b', c')$ が解になっていると分かる。

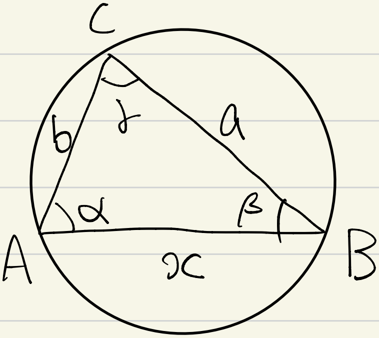
よって解としてあり得るのは $(a, b, c)=(0, 0, 0)$ のみ

※ $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$ も解になることが分かるので、$n$ を

十分大きくとると $\left|\frac{a}{2^n}\right| < 1$ となり、$a=0$ 以外に

整数解は存在しないと分かります。

$\boxed{2}$




(i) $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ のとき,

$$x = 2r\sin(\pi-\alpha-\beta)$$
$$= 2r\sin(\alpha+\beta)$$
$$= 2r\sin\alpha\cos\beta + 2r\sin\beta\cos\alpha$$
$$= a\cos\beta + b\cos\alpha$$

$a = 2r\sin\alpha$ より $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$

$b = 2r\sin\beta$ より $\cos\beta = \sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}$

$$\therefore\ x = a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$$

(ii) $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ のとき, $\cos\beta = -\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}}$ より,

$$x = -a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$$

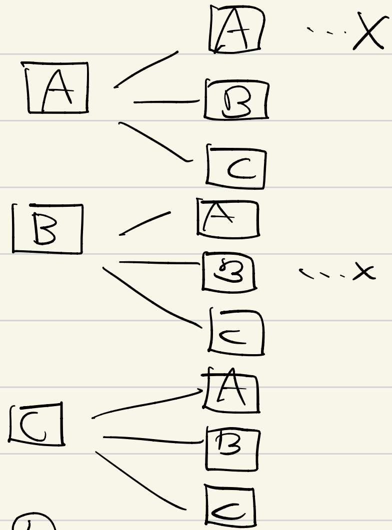
別解　余弦定理を用いて，

$$\sin\gamma = \frac{x}{2r},\ \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$$

から$\gamma$を消去して$x$を求めてもよいが，2重根号を外すのがメンドーです。

※　$\alpha$が鈍角にはなりません。$\beta$はあり得るので場合分けできたかどうかもポイントです。

$\boxed{3}$




n回やっても終わらないなかで,

n回目が $\boxed{A}$ の確率を $a_n$

$\boxed{B}$ $b_n$

$\boxed{C}$ $c_n$

とおく。このとき

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ③ \\ p_n = a_n + b_n + c_n & \cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ より $c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n$ ⋯ ⑤

①+② より $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n) + \frac{2}{3}c_n$ ⋯ ⑥

④ より $a_n + b_n = p_n - c_n$ より ⑥は $p_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}c_n$

∴⑤より. $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{9}p_{n-1}$ ∴ $p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{9}p_n$

$x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ を解いて,

$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$

とおくと,

$$p_{n+1} - \alpha p_n = \beta^n(p_1 - \alpha p_0)$$

$$p_{n+1} - \beta p_n = \alpha^n(p_1 - \alpha p_0)$$

①②を減じると，

$$p_n = \frac{\alpha^n(p_1-\beta p_0)-\beta^n(p_1-\alpha p_0)}{\alpha-\beta}$$

よって，

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\alpha(p_1-\beta p_0)-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\beta(p_1-\alpha p_0)}{p_1-\beta p_0-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n(p_1-\alpha p_0)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{\alpha(p_1-\beta p_0)}{p_1-\beta p_0} = \alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

## 別解

(i) $n+1$ 回目と $n+2$ 回目が同じ記号で $n+2$ 回目に残る時
(ii) 〃 違う 〃

(i) → $P_n \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} P_n$
(ii) → $P_{n+1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} P_{n+1}$

$\therefore P_{n+2} = \frac{2}{3} P_{n+1} + \frac{1}{9} P_n$.

※ $P_n = \dfrac{\alpha^n (P_1 - \beta P_0) - \beta^n (P_1 - \beta P_0)}{\alpha - \beta}$ と求まるので $P_n$ を具体的に求める必要は全くありませんが、これは経験がないと難しいです。

$\boxed{4}$

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)|\sin nx|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k\pi}{n}} (\pi x - x^2)|\sin nx|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\pi c - c^2) \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin nx| \qquad \left( \frac{k-1}{n}\pi < {}^{\exists}c < \frac{k\pi}{n} \quad ∵\text{積分の平均値} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\pi c - c^2) \cdot \frac{2}{n} \qquad (∵\text{山が}1/2\text{つ})$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum (\pi c - c^2) \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

※ $\int (\pi x - x^2)\sin x$ は計算で求められますが

チョット メンドー. $[0, \pi]$ にて $f(x) = \pi x - x^2$ は

非負連続より 積分の平均値を用いることができ,

ずっと楽に済みます.

微積の第4回で資料に
載ってますが高校のハンイ!

# 5 (同期のKT君の解答)

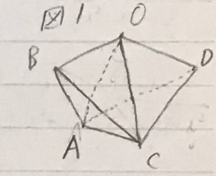
## 問題5

条件をみたす六面体は、∠AOCを決めると一意に定まるので、

$\angle AOC = \theta$として$\theta$を動かしていく。$\theta = 0^\circ$のときは$A = C$となり六面体にならない。

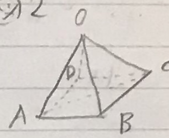
$0^\circ < \theta < 90^\circ$のときは図1の様な六面体になる。

図1



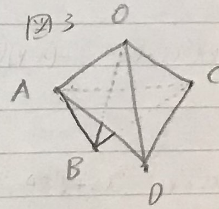

$\theta^\circ = 90^\circ$のときは、図2の様に四角錐となり、六面体にならない。

図2




$90^\circ < \theta < 120^\circ$のとき、図3の様な六面体になる。

図3




$\theta = 120^\circ$のとき、$B = D$となり六面体にならない。

$120^\circ < \theta$のとき、そもそも仮定をみたさない。

よって、考える$\theta$のハンイは、$0^\circ < \theta < 90^\circ \vee 90^\circ < \theta < 120^\circ$となる。

次に、$\angle AOC = \theta$のときの六面体の体積を求める。

六面体は、平面OACに関して対称なので、三角形OACを底面として見る。$\angle AOC = \theta$より、底面積Sは、

$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OC \cdot \sin\angle AOC = \frac{1}{2}\sin\theta$ となる。

高さは、B、Dと平面OACのキョリをイにする。また、

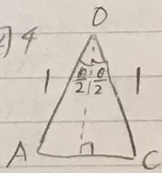
$BO = BA = BC$、$DO = DA = DC$なので、Pythagorasの定理より

B、Dから平面OACに下ろした垂直の線は三角形OACの

外心であることをイにする。よって、外接円の半径をRとすると、

正弦定理より、$\frac{AC}{\sin\theta} = 2R$となる。また、図4より、$AC = 2\sin\frac{\theta}{2}$である。

図4




$\therefore R = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ となる。再びPythagorasの定理より

高さhは、$R^2 + h^2 = 1^2$をみたす。$\therefore h = \sqrt{1 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

θの定義域に注意!

よって体積Vは、

$$V = S \times h \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{2}\sin\theta \frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1}}{2\cos\frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{3} \times 2$$

$$= \frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1} = \frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3\sin^2\frac{\theta}{2} - 4\sin^4\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{-4\left(\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{9}{16}}$$

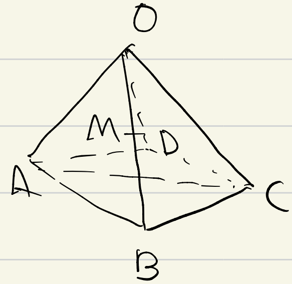
となる。$0^\circ < \theta < 90^\circ \vee 90^\circ < \theta < 120^\circ$より、$-\frac{3}{8} < \sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{8} < \frac{1}{8} \vee \frac{1}{8} < \sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{8} < \frac{3}{8}$となるため、

Vは$\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{3}{8} = 0$なる$\theta$で最大となり、最大値は$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4}$となる。□

※ 垂直の線 → 垂線の足

## 別解（同期のKR君の解答）

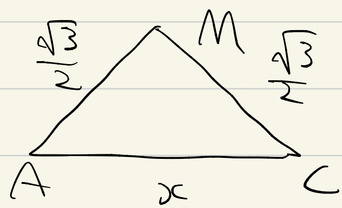
OBの中点をMとおく.




$$V=2\cdot V_{OABC}=4\cdot V_{OAMC}$$

ACの長さを$x$ $(0<x<\sqrt{3})$とおく.

$$S_{AMC}=\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}$$



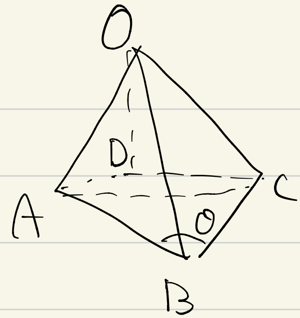

Oと△AMCとの距離は$\frac{1}{2}$なので,

$$V_{OAMC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}$$

$$\therefore V=\frac{1}{3}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{16}}$$

$\therefore$ $V$が最大となるのは$x^2=\frac{3}{2}$, つまり$x=\sqrt{\frac{3}{2}}$のときで, 最大値$\underline{\frac{1}{4}}$をとる.

## 別解




$\angle ABC = \theta$ とおくと、

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{1+\cos\theta}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)-\overrightarrow{OB}$$

$$|BD| = \sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

となり、

$$V = \frac{1}{6}\sin\theta\sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1}{6}\sqrt{(1-\cos\theta)(2+4\cos\theta)}$$

となります.

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なら問題なく, $\cos\theta=\frac{1}{4}$ のとき最大をとることに気付しません.

$\frac{\pi}{2}<\theta$ のとき, どこまでが6面体のなるか正確にわからなくても問題ありません. 少なくとも $2+4\cos\theta>0$ より $\cos\theta>-\frac{1}{2}$. つまり $\theta<\frac{2\pi}{3}$ はわかります.

$\boxed{1}$ C ** $\boxed{2}$ B** $\boxed{3}$ B***

$\boxed{4}$ B ** $\boxed{5}$ B***

$\boxed{1}$ が一番難しいです。そこで、

- $\boxed{1}$ に誘導をつける
- $\boxed{2}$ を複素平面の問題に変える
- $\boxed{5}$ に $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なる条件をつける。

とすると東工大らしいセットになると思います。