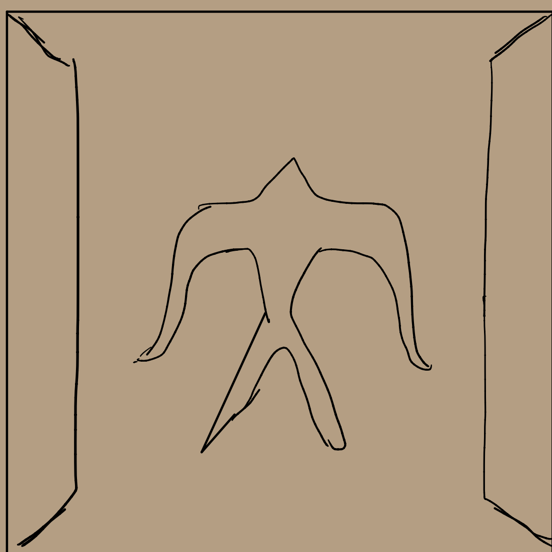
第1回 東工大オープン

解答



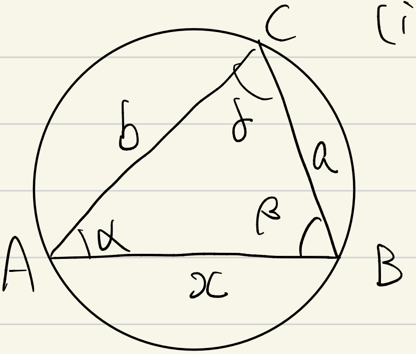
$\boxed{1}$ (同期のKR君の解答)

(a, b, c) を整数解とする。問題の式を2を法としてみると a が2の倍数と分かる。$a=2a'$ を代入し式を2で割り2を法としてみると b が2の倍数と分かる。$b=2b'$ を代入し式を2で割り2を法としてみると c が2の倍数と分かる。$c=2c'$ とおくと (a', b', c') が解になっていると分かる。

よって解としてあり得るのは $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ のみ

※ $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$ も解になることが分かるので、nを十分大きくとると $\left|\frac{a}{2^n}\right| < 1$ となり、$a=0$ 以外に整数解は存在しないと分かります。

$\boxed{2}$



(i) $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$x = 2r\sin(\pi - \alpha - \beta)$$
$$= 2r\sin(\alpha + \beta)$$
$$= 2r\sin\alpha\cos\beta + 2r\sin\beta\cos\alpha$$
$$= a\cos\beta + b\cos\alpha$$

$a = 2r\sin\alpha$ より $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$

$b = 2r\sin\beta$ より $\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$

$$\therefore \ x = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ のとき, $\cos\beta = -\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$ より,

$$x = -a\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$$

別解　余弦定理を用いて，

$$\sin\gamma = \frac{x}{2r},\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$$

から γ を消去して x を求めてもよいが，2重根号を外すのがメンドーです.

※　α が鈍角にはなりません. β はあり得るので場合わけできたかでわかるのもポイントです.

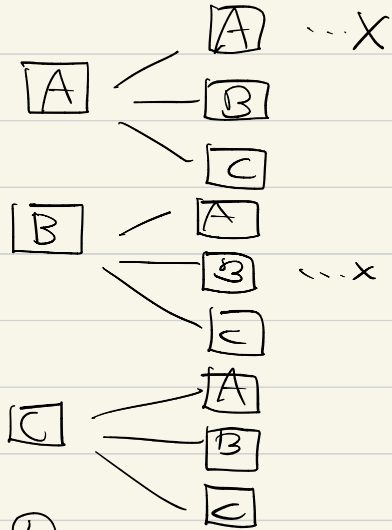
$\boxed{3}$

n回やっても終わらないなかで、

n回目が $\boxed{A}$ の確率を a_n

$\boxed{B}$ b_n

$\boxed{C}$ c_n



とおく。このとき

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n & \cdots ③ \\ p_n = a_n + b_n + c_n & \cdots ④ \end{cases}$$

③, ④ より $c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n$ $\cdots$ ⑤

①+② より $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n+b_n) + \frac{2}{3}c_n$ $\cdots$ ⑥

④ より $a_n+b_n = p_n - c_n$ より ⑥は $p_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}c_n$

∴⑤より $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{9}p_{n-1}$ ∴ $p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{1}{9}p_n$

$x^2 = \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ を解いて、

$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$

とおくと、

$$p_{n+1} - \alpha p_n = \beta^n(p_1 - \alpha p_0)$$

$$p_{n+1} - \beta p_n = \alpha^n(p_1 - \alpha p_0)$$

①②減じると,

$$P_n = \frac{\alpha^n (P_1 - \beta P_0) - \beta^n (P_1 - \alpha P_0)}{\alpha - \beta}$$

よって,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\alpha (P_1 - \beta P_0) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \beta (P_1 - \alpha P_0)}{P_1 - \beta P_0 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n (P_1 - \alpha P_0)}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\alpha (P_1 - \beta P_0)}{P_1 - \beta P_0} = \alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$$

別解

(i) $n+1$回目と$n+2$回目が同じ記号で$n+2$回目に残る(出る)

(ii) 〃 違う 〃

(i) → $P_n \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} P_n$

(ii) → $P_{n+1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} P_{n+1}$

$\therefore P_{n+2} = \frac{2}{3} P_{n+1} + \frac{1}{9} P_n$.

※ $P_n = \dfrac{\alpha^n(P_1-\beta P_0)-\beta^n(P_1-\beta P_0)}{\alpha-\beta}$ と求まるので P_nを具体的に求める必要は全くありませんが、これは経験がないと難しいです。

$\boxed{4}$

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)|\sin nx|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k\pi}{n}} (\pi x - x^2)|\sin nx|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\pi c - c^2) \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k\pi}{n}} |\sin nx| \qquad \left(\frac{k-1}{n}\pi < {}^{\exists}c < \frac{k\pi}{n} \right.$$

$\left. \because \text{積分の平均値} \right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\pi c - c^2) \cdot \frac{2}{n} \qquad (\because \text{山が1つ})$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum (\pi c - c^2) \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

※ $\int (\pi x - x^2) \sin nx$ は計算で求められますが

4ヨット メンドー。$[0, \pi]$ にて $g(x) = |\sin nx|$ は

非負連続より 積分の平均値を用いることができ、

ずっと楽に解けます。

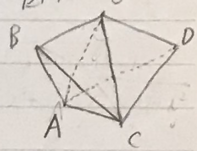
微積の第4回で資料に載ってますが高校のハイ！

$\boxed{5}$ (同期のKT君の解答)

問題5

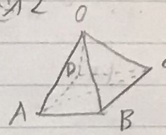
条件をみたす六面体は、∠AOCを決めると一意に定まるので、
∠AOC$=\theta$としてθを動かしていく。$\theta=0°$のときはA=Cとなり六面体にならない。
$0°<\theta<90°$のときは図1の様な六面体になる。

図1



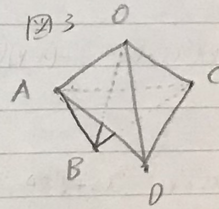
$\theta°=90°$のときは、図2の様に四角錐となり、六面体にならない。

図2



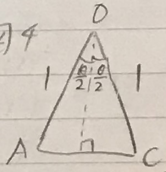
$90°<\theta<120°$のとき、図3の様な六面体になる。

図3



$\theta=120°$のとき、B=Dとなり六面体にならない。
$120°<\theta$のとき、そもそも仮定をみたさない。
よって、考えるθのハンイは、$0°<\theta<90° \vee 90°<\theta<120°$ となる。
次に、∠AOC$=\theta$のときの六面体の体積を求める。
六面体は、平面OACに関して対称なので、三角形OACを底面として見る。∠AOC$=\theta$より、底面積Sは、
$S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OC\cdot \sin\angle AOC=\frac{1}{2}\sin\theta$ となる。
高さは、B、Dと平面OACのキョリを仁する。また、
BO=BA=BC、DO=DA=DCなので、Pythagorasの定理より
B、Dから平面OACに下ろした垂直の線は三角形OACの
外心であることを仁する。よって、外接円の半径をRとすると、
正弦定理より、$\frac{AC}{\sin\theta}=2R$ となる。また、図4より、$AC=2\sin\frac{\theta}{2}$である。

図4



$\therefore R=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}=\frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ となる。再びPythagorasの定理より
高さhは、$R^2+h^2=1^2$ をみたす。$\therefore h=\sqrt{1-R^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

θの定義域に注意!

よって体積Vは、$V=S\times h\times\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{2}\sin\theta\,\frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\times\frac{1}{3}\times 2$

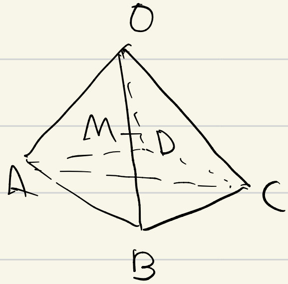
$$=\frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}-1}=\frac{1}{3}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{3\sin^2\frac{\theta}{2}-4\sin^4\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{-4\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{9}{16}}$$

となる。$0°<\theta<90° \vee 90°<\theta<120°$ より、$-\frac{3}{8}<\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}<\frac{1}{8} \vee \frac{1}{8}<\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}<\frac{3}{8}$ となるため、
Vは $\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{8}=0$ なるθで最大となり、最大値は $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{1}{4}$ となる。□

※ 垂直の線 → 垂線の足

別解（同期のKR君の解答）

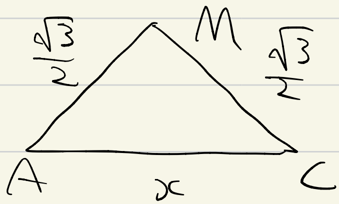
OBの中点をMとおく.



$$V=2\cdot V_{OABC}=4\cdot V_{OAMC}$$

ACの長さを x $(0<x<\sqrt{3})$ とおく.

$$S_{AMC}=\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}$$



OとΔAMCとの距離は $\frac{1}{2}$ なので,

$$V_{OAMC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}$$

∴ $V=\frac{1}{3}x\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{16}}$

∴ Vが最大となるのは $x^2=\frac{3}{2}$, つまり $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ のときで, 最大値 $\frac{1}{4}$ をとる.

$\boxed{1}$ C ** $\boxed{2}$ B** $\boxed{3}$ B***

$\boxed{4}$ B ** $\boxed{5}$ B***

$\boxed{1}$が一番難しいです。そこで、

- $\boxed{1}$に誘導をつける
- $\boxed{2}$を複素平面の問題に変える
- $\boxed{5}$に $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ なる条件をつける。

とすると東工大らしいセットになると思います。