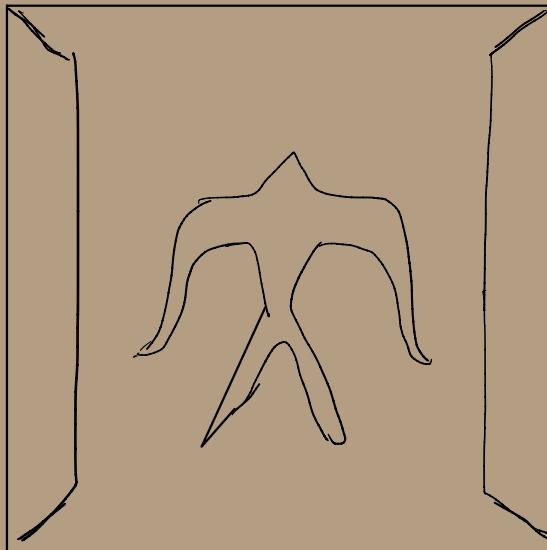


# 第1回 東工大オーバン

---

解答



---

---

---



□ (同期のKR君の解答)

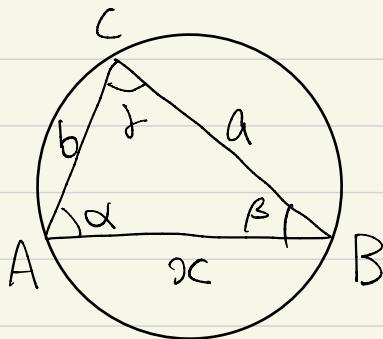
$(a, b, c)$  を満たす。問題の式を2式で表すと  
 $a + 2$  の倍数と  $b + 3$ ,  $a = 2a'$  で  $a$  と  $a'$  は2の  
倍数,  $2$  を法とする  $b + 2$  の倍数と  $b + 3$  が  $b = 2b'$   
を代入して  $a' + 2b' + 1$  が  $2$  を法とする  $c$  の  
倍数と  $b'$  が  $c$ ,  $c = 2c'$  とおこなうと  $(a, b, c) = (a', b', c')$  が  $2$   
の倍数となる。 $a' + 2b' + 1$  が  $2$  の倍数となるのは  $(a', b', c') = (0, 0, 0)$  のみ

∴  $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$  も解です。つまり、 $n$

たし算の値が  $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$  のとき、 $a=0$  以上で

解は存在しません。

2



(i)  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  のとき、

$$\begin{aligned} x &= 2r \sin(\pi - \alpha - \beta) \\ &= 2r \sin(\alpha + \beta) \\ &= 2r \sin \alpha \cos \beta + 2r \cos \beta \sin \alpha \\ &= a \cos \beta + b \cos \alpha \end{aligned}$$

$$a = 2r \sin \alpha \quad \text{if } \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$$

$$b = 2r \sin \beta \quad \text{if } \cos \beta = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$$

$$\therefore x = \underbrace{a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}}_{\text{式(1)}}$$

(ii)  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$  のとき、 $\cos \beta = -\sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}}$  だから、

$$x = \underbrace{-a \sqrt{1 - \frac{b^2}{4r^2}} + b \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}}_{\text{式(2)}}$$

別解 余弦定理を用いて、

$$\sin \gamma = \frac{ac}{2r}, \cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

以下それを消去して  $c$  を求めてもよいが、2重根号を  
外すのが  $c > 0$  です。

\*  $\alpha$  や  $\beta$  が金角にはなりません。 $\beta$  はあり得るのだが  
場合分けでまたしてもポイントです。

3

n回でも終わらなければいけない,

n回目 比率 A の確率  $a_n$

B

C

$b_n$

$c_n$

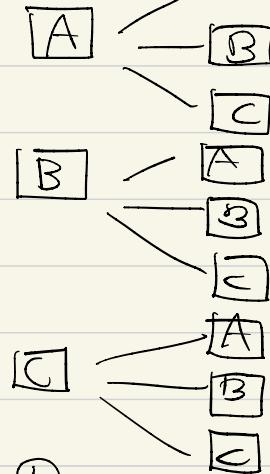


よって、 $\Sigma a_n = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. \cdots \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array} \right. \cdots \textcircled{2}$$

$$P_n = a_n + b_n + c_n \cdots \textcircled{4}$$



$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \Rightarrow c_{n+1} = \frac{1}{3}P_n \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + b_n) + \frac{2}{3}c_n \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow a_n + b_n = P_n - c_n \textcircled{6} \Rightarrow P_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}c_n$$

$$\therefore \textcircled{5} \Rightarrow P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{9}P_{n-1} \quad \therefore P_{n+2} = \frac{2}{3}P_{n+1} + \frac{1}{9}P_n$$

$$\chi^2 = \frac{2}{3}\chi + \frac{1}{9} \in \mathbb{R} \text{ は } \mathbb{Z},$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}, \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$$

よって、

$$P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^n (P_1 - \alpha P_0)$$

$$P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^n (P_1 - \alpha P_0)$$

(P) 为 没有 U' \Sigma,

$$P_n = \frac{\alpha^n (P_i - \beta P_0) - \beta^n (P_i - \alpha P_0)}{\alpha - \beta}$$

所以,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\alpha (P_i - \beta P_0) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \beta (P_i - \alpha P_0)}{P_i - \beta P_0 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n (P_i - \alpha P_0)}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha (P_i - \beta P_0)}{P_i - \beta P_0} = \alpha = \underbrace{\frac{\sqrt[1-\beta]{2}}{\beta}}$$

## Pnの解

(i)  $n+1$ 回目と  $n+2$ 回目の同じ位置で  $n+2$ 回目に  $\frac{2}{3}$  となる。  
 (ii)  $\therefore$  [図]  $\therefore$

$$(i) \rightarrow P_n \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} P_n$$

$$(ii) \rightarrow P_{n+1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} P_{n+1}$$

$$\therefore P_{n+2} = \frac{2}{3} P_{n+1} + \frac{1}{9} P_n$$

\*  $P_n = \frac{\alpha^n(P_1 - \beta P_0) - \beta^n(P_1 - \beta P_0)}{\alpha - \beta}$  となるので  $P_n$  は具体的

に求める必要はないのであるが、これは程馬鹿げたものである。

4

$$\int_0^{\pi} (\pi(x-\frac{c}{\pi})^2) |\sin x|$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} (\pi(x-\frac{c}{\pi})^2) |\sin x|$$

$$= \sum_{k=1}^n (\pi(c - \frac{c^2}{\pi})) \int_{\frac{k-1}{n}\pi}^{\frac{k}{n}\pi} |\sin x| \quad \left( \begin{array}{l} \frac{k-1}{n}\pi < c < \frac{k}{n}\pi \\ \therefore \text{采点の範囲} \end{array} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (\pi(c - \frac{c^2}{\pi})) \cdot \frac{2}{n} \quad ( \because \text{山頂} )$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum (\pi(c - \frac{c^2}{\pi})) \cdot \frac{\pi}{n}$$

$$\xrightarrow{\text{area}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi(x-\frac{c}{\pi})^2) dx = \underbrace{\frac{\pi^2}{3}}$$

X:  $\int (\pi x - x^2) \sin x$  は「計算で求められますか？」

4. ト Xシト<sup>11</sup>.  $[0, \pi]$  に  $f(x) = \pi(-x)^2$  は

非負連続で、積分の逐次化と用ひよニアリエ<sup>12</sup>。

→ これが解です。

↑  
→ 積分の第4回 資料に  
載せてます！高校の八才！

# 5 (同貫のKT君の解説)

## 問題5

条件を見て六面体は、 $\angle AOC = \theta$  で  $\theta$  を動かすと一変に違うので。

$0^\circ < \theta < 90^\circ$  のときは図1の様な六面体になる。

$\theta = 90^\circ$  のときは、図2の様に四角錐となり、六面体にならない。

$90^\circ < \theta < 120^\circ$  のときは、図3の様な六面体になる。

$\theta = 120^\circ$  のときは、B=Dとなり六面体にならない。

$120^\circ < \theta$  のときは、でもでも仮定を満たさない。

よって、 $0^\circ < \theta < 90^\circ \vee 90^\circ < \theta < 120^\circ$  となる。

次に、 $\angle AOC = \theta$  のときの六面体の体積を求める。

六面体は、平面OACにに関して対称なので、三角形OACを底面として見る。 $\angle AOC = \theta$  となり、底面積  $S$  とする。

高さは、B,Dと平面OACのヨリを引く。また、

$BO=BA=BC$ 、 $DO=DA=DC$  なので、Pythagorasの定理より

B,Dから平面OACに下ろした垂線の先端は三角形OACの外心であることをいだす。よって、外接円の半径を  $R$  とする。

正弦定理より、 $\frac{AC}{\sin \theta} = 2R$  となる。また、図4より、 $AC = 2\sin \frac{\theta}{2}$  である。

$\therefore R = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = \frac{1}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$  となる。再び Pythagoras の定理より

高さは、 $R^2 + h^2 = 1^2$  となる。 $\therefore h = \sqrt{1 - R^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}$

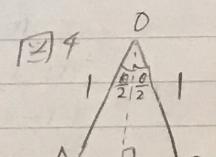
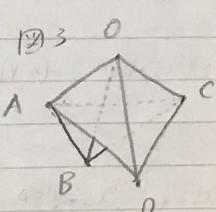
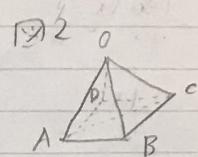
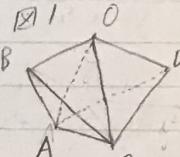
よって体積Vは、 $V = S \times h \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{1}{2} \sin \theta \frac{\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} \times \frac{1}{3} \times 2$

$= \frac{1}{3} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1} = \frac{1}{3} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$

$= \frac{1}{3} \sqrt{3 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{-4 (\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4})^2 + \frac{9}{16}}$

となる。 $0^\circ < \theta < 90^\circ \vee 90^\circ < \theta < 120^\circ$  たり、 $-\frac{3}{8} < \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} < \frac{1}{8}$   $\sqrt{\frac{1}{8}} < \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} < \frac{3}{8}$  となるため、

$V$  は  $\sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} = 0$  を  $30^\circ$  で最大となり、最大値は  $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4}$  となる。□



θの定義域に注意！

\* 垂直の線 → 垂線の定

解説

$$\angle ABC = \theta \text{ とおく。}$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{1+\cos\theta} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OB}$$

$$|BD| = \sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

次に、

$$V = \frac{1}{6} \sin\theta \sqrt{\frac{2+4\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1}{6} \sqrt{(1-\cos\theta)(2+4\cos\theta)}$$

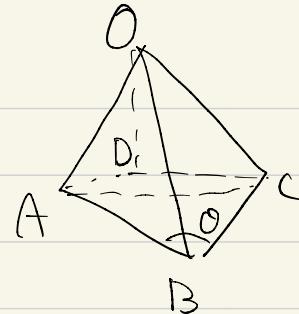
と分かります。

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } V \text{ は } f(\theta) = \frac{1}{4} (1-\cos\theta)(2+4\cos\theta)$$

で最大値を取ります。

$$\frac{1}{2} < \theta \text{ のとき, } f(\theta) = \frac{1}{4} (1-\cos\theta)(2+4\cos\theta) > 0$$

であるが、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $f(\theta) = 0$  である。したがって  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき  $V > 0$  である。



① が一番難しいです。そこで、

- ① に説明を付ける
- ② を複素平面の内側に変える
- ⑤ は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  または  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ 。

とすると東工大らしいアートになりますと思ひます。