

# 第2回東工大オープン

## 数 学

180 分

### 注意事項

1. 試験開始の合図までこの冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 6 ページである。
3. 問題番号のあとのカッコ内の点数は 300 点満点中の配点である。

**1** (60 点)

(1)  $a \geq 1, b \leq 1$  のとき,  $a + b \geq ab + 1$  が成立することを示せ.

(2)  $n$  個の正の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が  $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$  を満たすとき,

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$$

が成立することを示せ.

(3)  $n$  個の正の数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に対し,

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

が成立することを示せ.

**2** (60 点)

関数列  $f_n(x) = x^{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ,  $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$  について次の各問いに答えよ.

(1)  $-F_{n+1}(1) \leq \int_0^1 \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} dt \leq F_{n+1}(1)$  が成立することを示せ.

(2) 無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  が収束することを示し, その和を求めよ.

**3** (60 点)

マグロが 8 貫 , サーモンが 6 貫載った皿がある . 木村君と駒田君は目隠しをし , まず木村君が 2 貫取って食べ , 次に駒田君が 2 貫取って食べる . 最後に木村君が 2 貫取ってから目隠しを外す . このとき , 取った 2 貫がマグロとサーモンである確率を求めよ .

**4** (60 点)

$xyz$  空間の平面  $z = 0$  上に正方形

$$S = \{(x, y, 0) \mid 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$$

がある.  $S$  を  $x$  軸の周りに 1 回転してできる立体を  $A$  とし,  $A$  を  $y$  軸の周りに 1 回転してできる立体を  $B$  とし,  $B$  を  $z$  軸の周りに 1 回転してできる立体を  $C$  とする.

(1)  $A$  の体積を求めよ.

(2)  $B$  の体積を求めよ.

(3)  $C$  の体積を求めよ.

**5** (60 点)

$f(x)$  は  $x$  の整式で,  $f(x) = f(1 - x)$  を満たすとする.

- (1)  $f(x)$  の次数は偶数であることを示せ.
- (2)  $f(x) - f(0) = x(x - 1)g(x)$  なる整式  $g(x)$  が存在することを示せ.
- (3)  $f(x)$  は  $x(x - 1)$  の整式であることを示せ.