(1) $a \geqq 1 \wedge b \leqq 1 \Longleftrightarrow a-1 \geqq 0 \wedge b-1 \leqq 0 \Rightarrow (a-1)(b-1) = ab-a-b+1 \leqq 0 \Longleftrightarrow a+b \geqq ab+1$ □

(2) $(a_1, \cdots, a_n) \neq (1, \cdots, 1)$のとき、$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$より$a_j > 1$なる$j \in \{1, \cdots, n\}$と$a_k < 1$なる$k \in \{1, \cdots, n\}$が存在する。このとき、

$$a'_i := \begin{cases} 1 & (i=j) \\ a_j a_k & (i=k) \\ a_i & (\text{otherwise}) \end{cases}$$ とおくと、$\prod_{i=1}^{n} a'_i = 1$となる.

また、(1)と同じギロンで$a_j + a_k > 1 + a_j a_k = a'_j + a'_k$が成立するため、$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{i=1}^{n} a'_i$となる.

この$(a_i)_{i=1}^{n}$から$(a'_i)_{i=1}^{n}$への操作は積を1のままにして、かつ1の項を少なくとも1つ増やしているため、

有限回くりかえすと$(1, \cdots, 1)$になる. よって$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$が成立する. □

(3) $b_i := a_i \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{-\frac{1}{n}}$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおくと$\prod_{i=1}^{n} b_i = 1$であるため、(2)より$\sum_{i=1}^{n} b_i \geqq n$ すなわち

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}$が成立する. □

(1) $\left|\int_0^1 \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} dt\right| \leqq \int_0^1 \left|\frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t}\right| dt \leqq \int_0^1 |f_{n+1}(t)|\, dt = F_{n+1}(1)$ $\left(\because f_{n+1}(t) = t^n \geqq 0 \text{ in } [0,1]\right)$ □

(2) $\int_0^1 \frac{(-1)^n f_{n+1}(t)}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1-(-t)} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) dt = \left[\log|1+t| + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-t)^k}{k}\right]_0^1 = \log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ なので、

(1)より $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \log 2\right| \leqq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ as $n \to \infty$ となり、$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ となる。□

マグロ8貫、サーモン6貫を一列に並べることにより、
最初に木村君が食べる2貫は1番目と2番目にあるすしに、
次に駒田君が食べる2貫は3番目と4番目にあるすしに、
最後に木村君が取る2貫は5番目と6番目にあるすしに言いかえられる。

よって、求めるべき確率は、マグロ8貫、サーモン6貫を同じネタは区別せずに無作為に並べたときの5番目と6番目のすしがマグロとサーモンの1貫ずつになっている確率であると言いかえられる。

一列の並べ方は$\binom{14}{6}$通りで、等確率に起こる。このうち、条件をみたす並べ方は、

(i) 5番目マグロ、6番目サーモン、他は不問

(ii) 5番目サーモン、6番目マグロ、他は不問

の2つがあり、どちらも$\binom{14-2}{6-1}=\binom{12}{5}$通りである。よって、求めるべき確率は

$$\frac{\binom{12}{5}\times 2}{\binom{14}{6}}=\frac{12!}{5!7!}\times 2\times\frac{6!8!}{14!}=\frac{6\times 8\times 2}{14\times 13}=\frac{48}{91}$$

となる。□

## 4

(1) $x=k$として固定する。$S$と平面$x=k$の共通部分は、$k\in[1,2]$のとき$\{(k,y,0) \mid 1\leq y\leq 2\}$、$k\notin[1,2]$のとき空になる。

$k\in[1,2]$のとき、共通部分の点と$x$軸のキョリとして実現できる値のハンイは、$y^2+z^2$のとりうる値のハンイに他ならず、$[1,4]$である。

このとき、$x$軸周りに1回転すると、$1\leq y^2+z^2\leq 4$ ($(k,0,0)$中心の半径2の円から中心$(k,0,0)$半径1の円を取った形) になる。

よって、$k$を動かすことにより、$A: 1\leq x\leq 2 \wedge 1\leq y^2+z^2\leq 4$ となり、体積は半径2の円柱から半径1の円柱を引けば良いので、

$(2^2\cdot\pi-1^2\cdot\pi)\times 1=3\pi$ になる。□

(2) $y=k$:固定し、同様に共通部分の点と$y$軸のキョリとして実現できる値のハンイを考える。$|k|>2$のときは$4-k^2<0$より共通部分$1\leq x\leq 2\wedge 1-k^2\leq z^2\leq 4-k^2$は空。

$1\leq|k|\leq 2$のとき、$1-k^2\leq 0$なので、値のハンイは$[1, \sqrt{8-k^2}]$になる。$|k|<1$のときは、$1-k^2>0$より値のハンイは$[\sqrt{2-k^2}, \sqrt{8-k^2}]$になる。

このとき$y$軸周りに1回転すると、$1\leq x^2+z^2\leq 8-k^2$ $(1\leq|k|\leq 2)$、$2-k^2\leq x^2+z^2\leq 8-k^2$ $(|k|<1)$ となり、それぞれある円から同じ中心の小さな円を取った形になる。

よって、$k$を動かすと、$B: 1\leq x^2+z^2\wedge x^2+y^2+z^2\leq 8$ $(1\leq|y|\leq 2)$、$2\leq x^2+y^2+z^2\leq 8$ $(|y|<1)$ と表せる。

また、体積は、微小体積が(円柱の体積)−(円柱の体積)に近似できるので、対称性も考慮すると、

$2\int_1^2((8-k^2)-1)\pi\,dk+2\int_0^1((8-k^2)-(2-k^2))\pi\,dk=2\pi\left[7k-\frac{k^3}{3}\right]_1^2+12\pi=\frac{64}{3}\pi$ となる。□

(3) $z=k$:固定し、同様に共通部分の点と$z$軸のキョリとして実現できる値のハンイを考える。

共通部分は$(1-k^2\leq x^2\wedge x^2+y^2\leq 8-k^2\wedge 1\leq|y|\leq 2)\vee(2-k^2\leq x^2+y^2\leq 8-k^2\wedge|y|<1)$である。

$|k|>2\sqrt{2}$のときは$8-k^2<0$より空。$\sqrt{2}\leq|k|\leq 2\sqrt{2}$のときのキョリのハンイは$2-k^2\leq 0$より$[0, \sqrt{8-k^2}]$となる。

$|k|<\sqrt{2}$のときのキョリのハンイは$[\sqrt{2-k^2}, \sqrt{8-k^2}]$となる。このとき$z$軸周りに1回転すると、

$x^2+y^2\leq 8-k^2$ $(\sqrt{2}\leq|k|\leq 2\sqrt{2})$、$2-k^2\leq x^2+y^2\leq 8-k^2$ $(|k|<\sqrt{2})$ となる。

$k$を動かすと、$x^2+y^2+z^2\leq 8$ $(2\leq z^2\leq 8)$、$2\leq x^2+y^2+z^2\leq 8$ $(z^2<2)$ となり、これは、$2\leq x^2+y^2+z^2\leq 8$と同値である。

よって、$C$は、原点中心、半径$2\sqrt{2}$の球から原点中心、半径$\sqrt{2}$の球を取ったものに他ならない。

よって、体積は、$\frac{4}{3}((2\sqrt{2})^3-\sqrt{2}^3)\pi=\frac{4}{3}\cdot 7\cdot 2\sqrt{2}\pi=\frac{56\sqrt{2}}{3}\pi$ となる。□

(1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\frac{1}{2})^n$ とおく. ($a_n$: 有限個を除いて0)

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=f(1-x)$ なので、上の式に代入すると $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\frac{1}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n (x-\frac{1}{2})^n$ となる.

よって一致の定理より $\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n=(-1)^n a_n$ となり、$a_n\neq 0 \Rightarrow 2|n$ が成立する.

よって $f(x)=\sum_{l=0}^{k} b_l (x-\frac{1}{2})^{2l}$ の様に表せるため、$f(x)$ の次数は $-\infty$ か偶数になる. □

(3) (1) より $f(x)=\sum_{l=0}^{k} b_l (x-\frac{1}{2})^{2l}=\sum_{l=0}^{k} b_l (x(x-1)+\frac{1}{4})^l$ と表せるため、$f(x)=\sum_{l=0}^{k} C_l (x(x-1))^l$ と表せる.

よって $f(x)$ は $x(x-1)$ の多項式である. □

(2) $f(x)-f(0)=\sum_{l=0}^{k} C_l (x(x-1))^l - C_0=\sum_{l=1}^{k} C_l (x(x-1))^l$ となるので $k\geqq 1$ のときはOK.

$k=0$ のときは定数項しかないのでOK. □