Divide et impera

Vittorio Maniezzo - Universita di Bologna

Divide et Impera

Divide et impera:

- Dividi:
  se l'istanza del problema da risolvere è troppo complicata per essere risolta direttamente, dividila in due o più parti
- Risolvi (*ricorsivamente*):
  usa la stessa tecnica divide et impera per risolvere le singole parti (sottoproblemi)
- Combina:
  combina le soluzioni trovate per i sottoproblemi in una soluzione per il problema originario.

Vittorio Maniezzo - Universita di Bologna

Merge sort

- Algoritmo di ordinamento basato sulla tecnica *Divide et Impera*.
- Ideato da *John von Neumann* nel 1945.
- Implementato come *algoritmo di ordinamento standard* (con alcune ottimizzazioni) nelle librerie di alcuni linguaggi (Perl, Java) e alcune versioni di Linux.

MergeSort: Algoritmo

Dividi: se S contiene almeno due elementi (un solo elemento è banalmente già ordinato), rimuovi tutti gli elementi da S e inseriscili in due vettori, S_1 e S_2, ognuno dei quali contiene circa la metà degli elementi di S.

(S_1 contiene i primi n/2 elementi e S_2 contiene i rimanenti n/2 elementi).

Risolvi: ordina gli elementi in S_1 e S_2 usando MergeSort (ricorsione).

Combina: metti insieme gli elementi di S_1 e S_2 ottenendo un unico vettore S ordinato (merge)

Merge Sort: Algoritmo

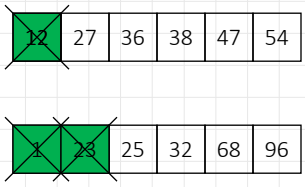
```
MergeSort(A,p,r)
    if p < r then
        q=(p+r)/2
        MergeSort(A,p,q)
        MergeSort(A,q+1,r)
        Merge(A,p,q,r)
```

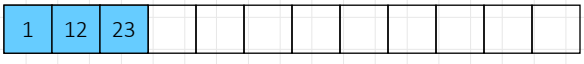
Merge(A,p,q,r)

1. *Rimuovi il più piccolo dei due elementi affioranti in A[p..q] e A[q+1..r] e inseriscilo nel vettore in costruzione.*
2. *Continua fino a che i due vettori sono svuotati.*
3. *Copia il risultato in A[p..r].*

5

Mergesort: merge

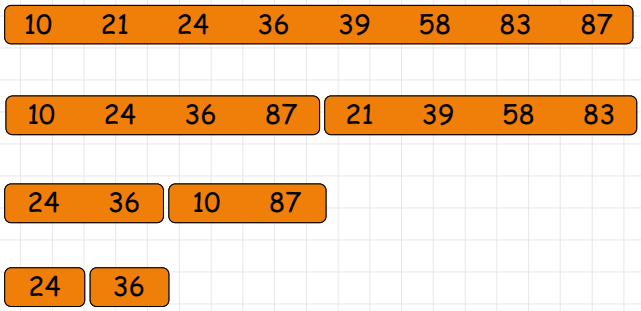




... e così via

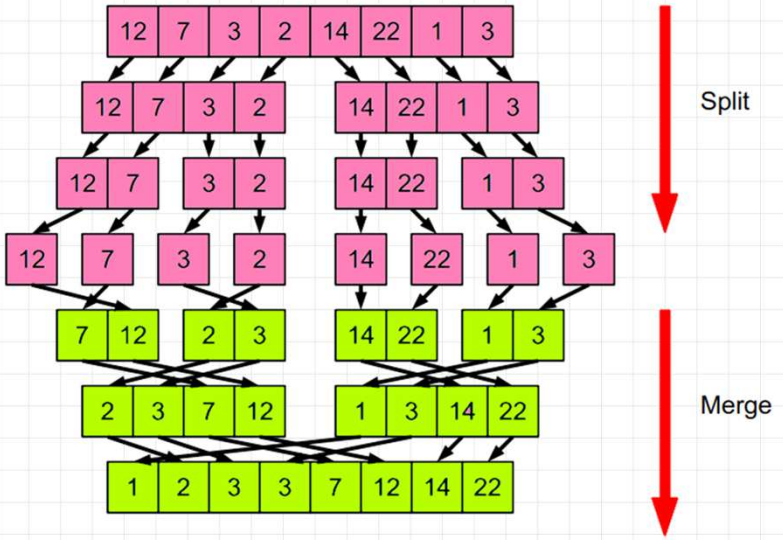
6

Mergesort: dividi



7

MergeSort, esempio



8

Merge sort, complessità

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$$

La complessità di Merge Sort non dipende dalla configurazione iniziale dell'array da ordinare:
→ la complessità è la stessa nei casi ottimo/pessimo/medio

	Insertion sort	Merge sort
Caso pessimo	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log(n))$
Caso medio	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n \log(n))$
Caso ottimo	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log(n))$

9

Merge Sort

Costo computazionale:

- Caso pessimo: $\Theta(n \log n)$
- Caso medio: $\Theta(n \log n)$
- Caso ottimo: $\Theta(n \log n)$

Di solito proposto in versione ricorsiva e non in place.

Se algoritmo non in place: richiede $O(n)$ di memoria ausiliaria.

10

Merge Sort: pseudocodice

Pseudo codice dell'algoritmo MergeSort.
Ordina l'array A dalla posizione p alla r

```
1: procedure MergeSort(A, p, r)
2:   if p < r then
3:     q ← (p + r)/2
4:     MergeSort(A, p, q)
5:     MergeSort(A, q+1, r)
6:     Merge(A, p, q, r)
7:   end if
8: end procedure
```

Pseudo codice dell'algoritmo Merge.

```
 1: procedure Merge(A, p, q, r)
 2: i ← p, j ← q+1, k ← 0
 3: while i ≤ q and j ≤ r do
 4:   if A[i] < A[j] then
 5:     B[k] ← A[i]
 6:     i ← i+1
 7:   else
 8:     B[k] ← A[j]
 9:     j ← j+1
10:   end if
11:   k ← k+1
12: end while
13: while i ≤ q do
14:   B[k] ← A[i]
15:   i ← i+1
16:   k ← k+1
17: end while
18: while j ≤ r do
19:   B[k] ← A[j]
20:   j ← j+1
21:   k ← k+1
22: end while
23: for k ← p to r do
24:   A[k] ← B[k - p]
25: end for
26: end procedure
```

Leftover sx

Leftover dx

Ricopia in A

11

Merge sort, implementazioni

```
void mergeSortIter(int a[], int n)
{  int* b;
   int linit, rinit, rend;
   int i, j, length, m;
   b = (int*) calloc(n, sizeof(int));
   for (length = 1; length < n; length *= 2)
   {  for (linit = 0; linit + length < n;
           linit += length*2)
      {  rinit = linit + length;
         rend  = rinit + length;
         if (rend > n) rend = n;
         m = linit; i = linit;
         while (i < rinit
         {  if (a[i]
            {  b[m
            else
            {  b[m]
            m++;
         }
         while (i < rinit){ b[m] = a[i]; i++; m++;}
         while (j < rend) { b[m] = a[j]; j++; m++;}
         for (m = linit; m < rend; m++)
            a[m] = b[m];
      }
   }
   free(b);
}
```

Iterativo

```
void mergeInPlace(int* a,int l,int m,int u)
{  int i, y;
   for(; l
      if
   for (i=m-1; i>l; --i) // shift
      [i-1];
}

void msortInPlace(int* a, int l, int u)
{  int m = (l+u)/2;
   if (l < u)
   {  msortInPlace(a, l, m);
      msortInPlace(a, m+1, u);
      mergeInPlace(a, l,  , u);
   }
}
```

In place

E iterativo in place?

(v. anche https://www.codeproject.com/Articles/5275988/Fastest-sort-algorithm)

Non lo chiedo

12

Quick sort

Algoritmo di ordinamento basato sulla tecnica Divide et Impera.

Ideato da *Tony Hoare* (o meglio, da *Sir Charles Anthony Richard Hoare*) nel 1960, in visita come studente presso la Moscow State University.

Oggetto della tesi si dottorato di Robert Sedgewick nel 1975.

Implementato come *algoritmo di ordinamento standard* nella libreria C di Unix (**`qsort()`**).

Quicksort: l'idea

Dividi: Dividi il vettore in due parti non vuote.

Risolvi: ordina le due parti ricorsivamente

Combina: fondi le due parti ottenendo un vettore ordinato.

A={10,5,41,3,6,9,12,26}

Dividi

mergesort → A metà
A_1={10,5,41,3} A_2={6,9,12,26}

quicksort → Intorno a un elemento pivot, es 12
A_1={10,5,3,6,9,12} A_2={41,26}

Quicksort

```
Quicksort(A,p,r)
    if p<r then
        q=partition(A,p,r)
        Quicksort(A,p,q)
        Quicksort(A,q+1,r)
```

Nota:

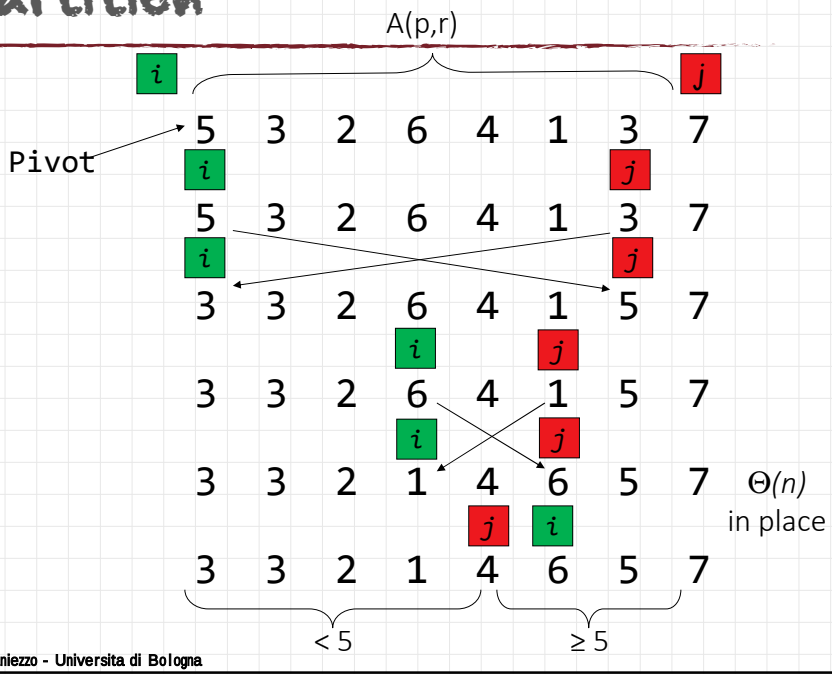
Mergesort lavora ***dopo*** la ricorsione

Quicksort lavora ***prima*** della ricorsione

Partition è cruciale !!!

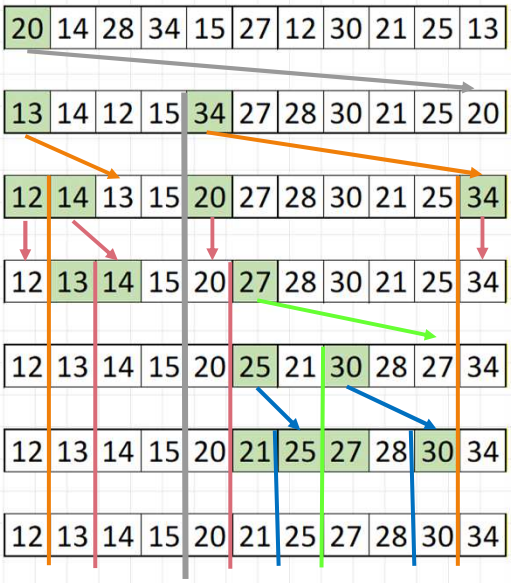
15

Partition



16

QuickSort, esempio



17

Quick Sort: pseudocodice

```
1: procedure QUICKSORT(A, p, r)
2:   if p < r then
3:     q ← PIVOT(A, p, r)
4:     j ← PARTITION(A, p, q, r)
5:     QUICKSORT(A, p, j)
6:     QUICKSORT(A, j+1, r)
7:   end if
8: end procedure
```

```
1: procedure SWAP(A, i, j)
2:   tmp  ← A[i]
3:   A[i] ← A[j]
4:   A[j] ← tmp
5: end procedure
```

```
1: function PIVOT(A, p, r)
2: return (p + rand()%(r-p+1)) //random in [p,…,r]
3: end function
```

```
1: function PARTITION(A, p, q, r)
2: i ← p
3: j ← r
4: pivot ← A[q]
5: SWAP(A,p,q)
6: while i < j do
7:   while j > p and pivot ≤ A[j] do
8:     j ← j - 1
9:   end while
10:  while i < r and pivot > A[i] do
11:    i ← i + 1
12:  end while
13:  if i < j then
14:    SWAP(A,i,j)
15:  end if
16: end while
17: SWAP(A,p,j)
18: return j
19: end function
```


18

Analisi di QS nel caso ottimo

Caso ottimo: partizioni bilanciate

$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$

quindi: $T(n) = \Theta(n\log(n))$

QS nel caso pessimo

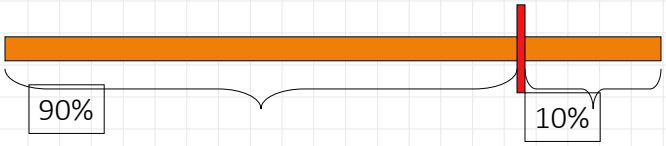
Caso pessimo: partizioni sbilanciate

$T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$

ricorsione — partition

quindi: $T(n) = \Theta(n^2)$

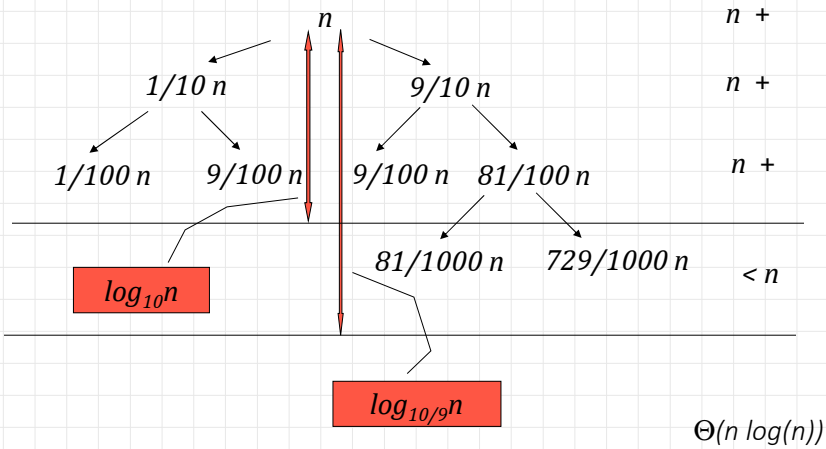
QS nel caso … non buono



T(n) ???

21

Albero di ricorsione

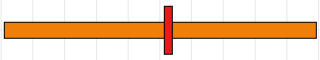


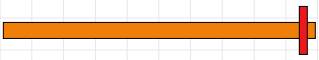
22

caso medio, una intuizione.

Caso medio: a volte facciamo una buona partition a volte no...

buona partition:

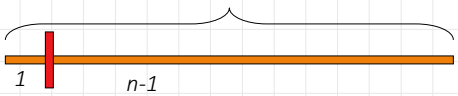




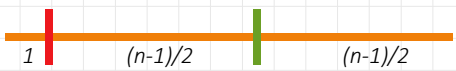
cattiva partition:

Caso medio

le buone e le cattive partition si alternano...



cattiva



buona

dopo una cattiva e una buona partizione in successione siamo più o meno nella situazione in cui la cattiva partizione non è stata fatta

QS: distribuzione degli input

Abbiamo assunto implicitamente che tutte le sequenze di numeri da ordinare fossero equiprobabili.

Se ciò non fosse vero potremmo avere costi computazionali più alti.

Possiamo "rendere gli input equiprobabili" ?

QS randomizzato

QSR usa una versione randomizzata della procedura Partition.

```
Randomized-partition(A,p,r)
      i=random(p,r)
      exchange(A[p],A[i])
      return Partition(A,p,r)
```

Un algoritmo randomizzato non ha un input pessimo, bensì ha una sequenza di scelte pessime di pivot.

Quick Sort

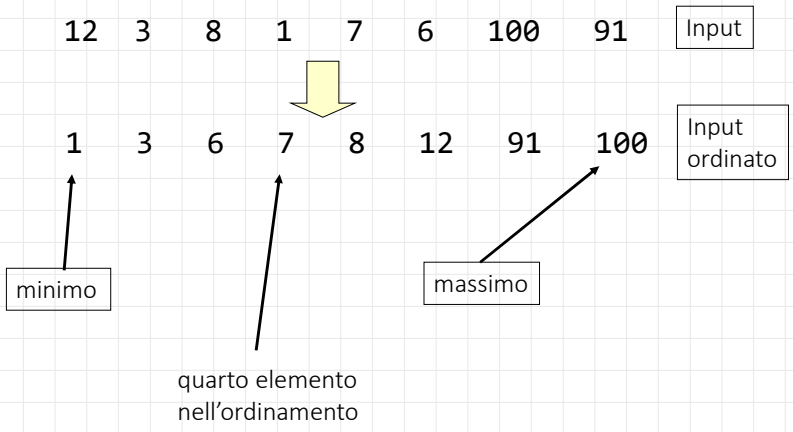
Costo computazionale:

- Costo pessimo: $\theta(n^2)$
- Caso medio: $\theta(n \log n)$
- Caso ottimo: $\theta(n \log n)$

Anche quick sort *di solito è presentato in forma ricorsiva*, ma senza utilizzare memoria ausiliaria (versione in place).

Ovviamente, se ne può fare una versione iterativa.

Selezione: esempio



Selezione

Ordinamento $\Theta(nlog(n))$

Selezione: *Calcolare l'iesimo* elemento nell'ordinamento.

Selezione del minimo/massimo $\Theta(n)$

Selezione: caso generale?

Selezione

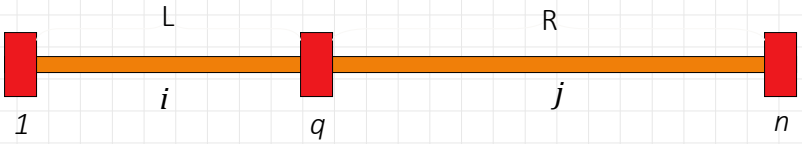
Input: un insieme *A* di *n* numeri distinti e un numero *i* tra *1* e *n*

Output: l'elemento *x* in *A* maggiore di esattamente *i-1* altri numeri in *A*

Soluzione banale: ordino gli elementi di A e prendo l'iesimo elemento nell'ordinamento.

$\Theta(n\ log(n))$ (analisi del caso pessimo)

Selezione



Supponiamo che

$A[i] \le A[j]$ per ogni $1 \le i \le q$ e per ogni $q < j \le n$

Domanda:

il k-esimo elemento nell'ordinamento sta in L o in R ?

Risposta:

Facile. Se $k \le q \rightarrow$ L, altrimenti R.

Con partition posso ricondurmi sempre in O(n) a questo caso.

Selezione in tempo medio lineare

```
RAND-SELECT(A,p,r,i)
   if (p=r) then return A[p]
   q = RAND-PARTITION(A,p,r)
   k = q-p+1
   if i≤k
      then return RAND-SELECT(A,p,q,i)
      else return RAND-SELECT(A,q+1,r,i-k)
```

caso pessimo $\Theta(n^2)$

caso medio $\Theta(n)$ (senza dimostrazione)

Selezione in tempo lineare nel caso pessimo

Bisogna evitare il caso pessimo, in cui si separa sempre un solo elemento (o un numero indipendente da n).

Necessario un buon algoritmo di partition, che garantisca di lasciare un numero sufficiente di elementi in ogni partizione

εn	$(1-\varepsilon)n$

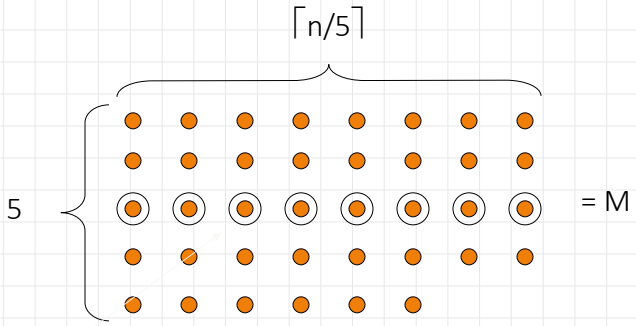
Nota: basta che ε sia maggiore di zero e indipendente da n

Select lineare

Select(*A*,*i*)

1. Dividi i numeri in input in gruppi da *5* elementi ciascuno.
2. Ordina ogni gruppo (qualsiasi metodo va bene). Trova il mediano in ciascun gruppo.
3. Usa Select ricorsivamente per trovare il mediano dei mediani. Lo chiamiamo *x*.
4. Partiziona il vettore in ingresso usando *x* ottenendo due vettori *A'* e *A''* di lunghezza *k* e *n-k*.
5. Se $i \leq k$ allora *Select*(*i*) sul vettore A' altrimenti *Select*(*i-k*) sul vettore A''.

Select lineare



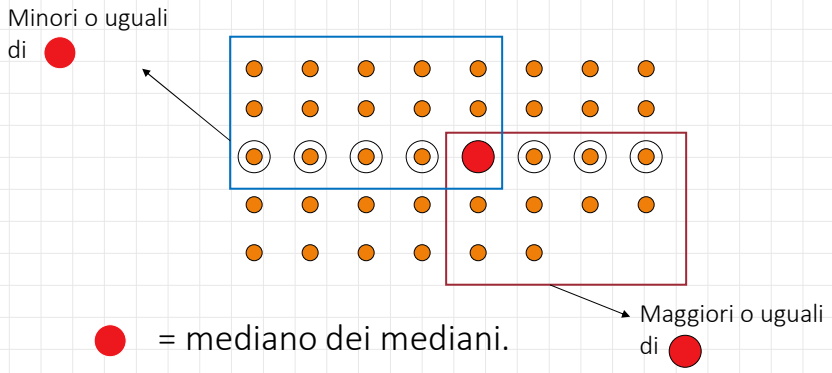
Mediano della terza colonna

Calcoliamo il mediano di M usando Select ricorsivamente

35

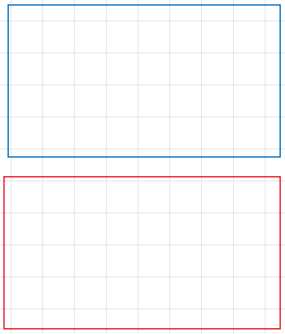
Select lineare

Supponiamo di aver riordinato le colonne a seconda del valore del loro mediano.



36

Select lineare



più o meno 3 $n/10$

più o meno 3 $n/10$

Se partizioniamo intorno a ● lasciamo almeno
(circa) $3n/10$ elementi da una parte e almeno
(circa) $3n/10$ elementi dall'altra !!! OK

37

Select: costo computazionale

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n < c \\ \Theta(n) + T(n/5) + T(7n/10) & \text{se } n \geq c \end{cases}$$

Costo per ordinare le colonne

Costo per calcolare il mediano dei mediani

Costo per la chiamata ricorsiva di select

$T(n) \leq k\, n$,
k costante opportuna
Dim: sarebbe col master theorem, noi niente

38