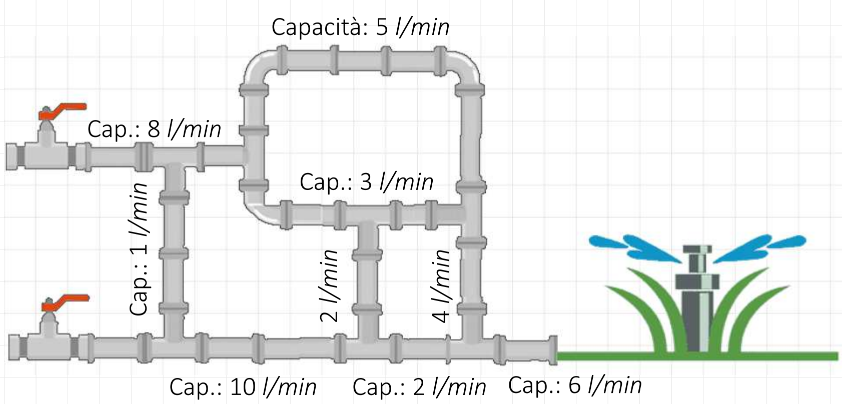
1

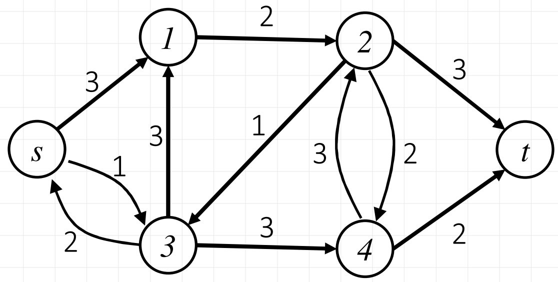
Flusso massimo

Quanta acqua si riesce a pompare al massimo dai rubinetti (sorgenti) alla destinazione (pozzo)?



2

Rete di flusso



Una *rete di flusso* (flow network) è un grafo orientato pesato G=(V,A,c), con due nodi particolari: una sorgente *s* e un pozzo *t*.

Ogni arco $(u,v) \in A$ ha associato una capacità, cioè un peso non negativo $c(u,v)$.

Flusso ammissibile

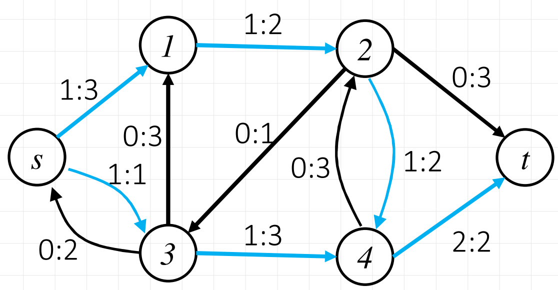
Un flusso ammissibile per G è una funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- Il vincolo di capacità è soddisfatto in ogni arco:

$$0 \leq f(u,v) \leq c(u,v) \qquad \forall (u,v) \in E$$

- Il flusso è conservato in ogni nodo interno

$$\sum_{v \in V} f(u,v) = \sum_{v \in V} f(v,u) \qquad \forall u \in V \setminus \{s,t\}$$



Flusso massimo

Il problema del flusso massimo (*max flow*) chiede di determinare il valore del massimo flusso ammissibile inviabile da s a t.

Problema importantissimo, appare direttamente o come sottoproblema in situazioni molto diverse:

- Liquidi in tubature
- Veicoli in reti stradali
- Materiali in reti logistiche
- Orari di personale
- Matrimoni stabili
- …

Flussi

Reti	Nodi	Archi	Flussi
comunicazione	Nodi di rete, computer, satelliti	cavi, fibre ottiche, relays	voce, video, pacchetti
circuiti elettrici	gates, registri, processors	cavi	corrente
meccaniche	giunti	barre, staffe, molle	calore, energia
idrauliche	serbatoi, stazioni di pompaggio, laghi	tubazioni	fluidi, olio
finanziarie	azioni, valute	transazioni	investimenti
trasporto	aeroporti, stazioni, incroci	strade, binari, rotte aeree	merci, veicoli, passeggeri
chimiche	siti	legami	energia

e ancora ...

Reti di trasporto: il modello può essere utilizzato per ottimizzare il ***flusso del traffico*** in una rete di trasporto come autostrade, ferrovie o rotte aeree.

Reti di telecomunicazioni: il modello può essere utilizzato per ottimizzare il ***flusso di informazioni*** in una rete di telecomunicazioni come Internet, reti mobili o reti satellitari.

Reti di distribuzione idrica: il modello può essere utilizzato per ottimizzare il ***flusso dell'acqua*** in una rete di distribuzione idrica come quella di una città.

Reti energetiche: il modello può essere utilizzato per ottimizzare il ***flusso di energia*** in una rete energetica come una rete elettrica o una rete di tubature.

Gestione della catena di approvvigionamento (supply chain): il modello può essere utilizzato per ottimizzare il ***flusso di beni e risorse*** in una rete di supply chain, come una rete di produzione o di distribuzione.

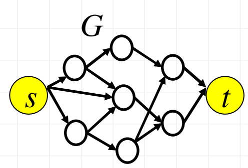
Analisi delle reti sociali: il modello può essere utilizzato per analizzare le reti sociali e identificare gli individui o i gruppi più influenti nella rete.

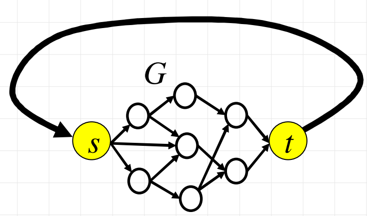
Elaborazione di immagini: il modello può essere utilizzato per eseguire la segmentazione delle immagini e il riconoscimento degli oggetti nelle applicazioni di computer vision.

Bioinformatica: il modello può essere utilizzato per analizzare dati genetici e biologici e identificare modelli o relazioni tra geni, proteine e altre molecole biologiche.

Circolazioni

Una rete di flusso può diventare una *rete di circolazione* aggiungendo un arco (t,s) con capacità infinita e richiedendo che il flusso $f(t,s)$ sia il più grande possibile.





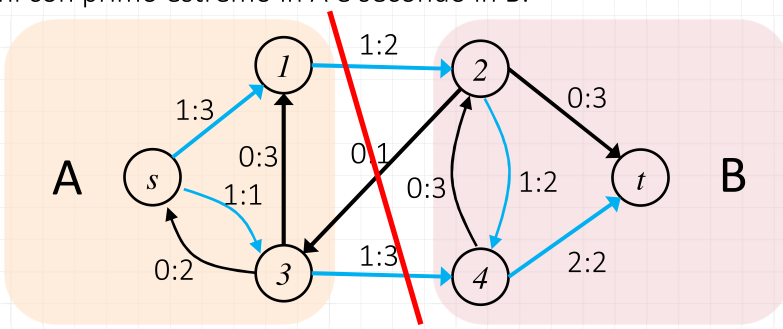
$$f(t,s) = value(f)$$

Tagli

Un taglio (A,B) di una rete di flusso G = (V, E) è una partizione di V tale per cui $s \in$ A e $t \in$ B.

La capacità di un taglio, c(A,B), è pari alla somma delle capacità degli archi con il primo estremo in A e il secondo in B (*forward arcs*).

Il flusso attraverso il taglio, f(A,B), è pari alla somma dei flussi sugli archi con primo estremo in A e secondo in B.



Max flow – min cut

Lemma: il valore di qualunque flusso $f(A,B)$ è limitato superiormente dalla capacità di un qualunque taglio di G.

Dim. $f(A,B) =$

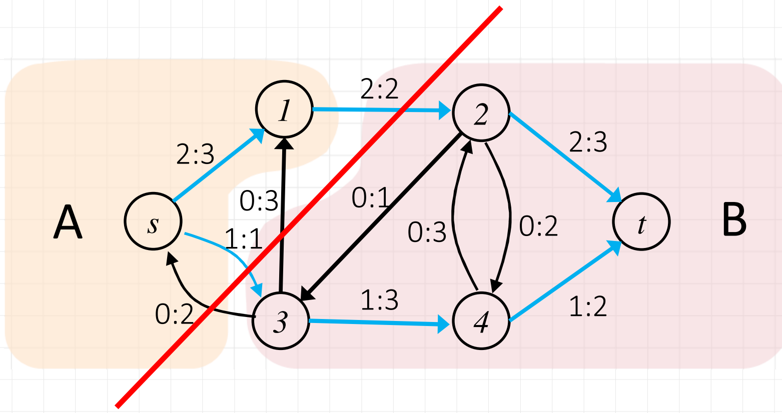
$$= \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} f(u,v)$$

$$\leq \sum_{u \in A} \sum_{v \in B} c(u,v) \qquad \forall (A,B)$$

$$= c(A,B)$$

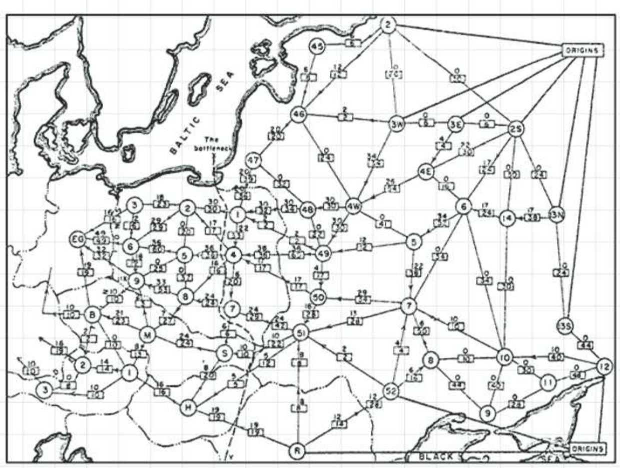
Teorema: il flusso massimo in una rete G=(V,A) è pari alla capacità del taglio di G di capacità minima.

Max flow – min cut



Rete ferroviaria russa

Harris & Ross (for Air Force): 'Interdiction' Problem, 1955

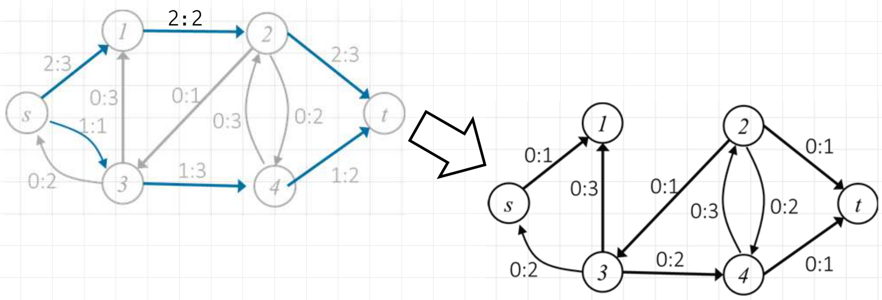


(declassified by Pentagon in 1999, on request of Lex Schrijver)

Grafo residuo

La capacità residua $c_f(u,v)$ di un arco $(u,v) \in A$ su cui circola un flusso $f(u,v)$ è pari _(ma la def verrà estesa)_ a $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$ $(c_f(u,v) > 0)$.

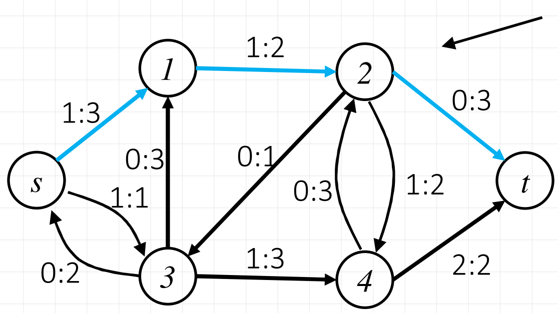
Data una rete G(V,A) su cui circola un flusso f il grafo residuo $G_f(V, A_f)$ è un sottografo di G contenente solo gli archi di A con capacità residua strettamente positiva



Cammino aumentante

Un cammino aumentante nella rete G in cui circola un flusso f (eventualmente nullo) è un cammino da s a t nel suo grafo residuo.

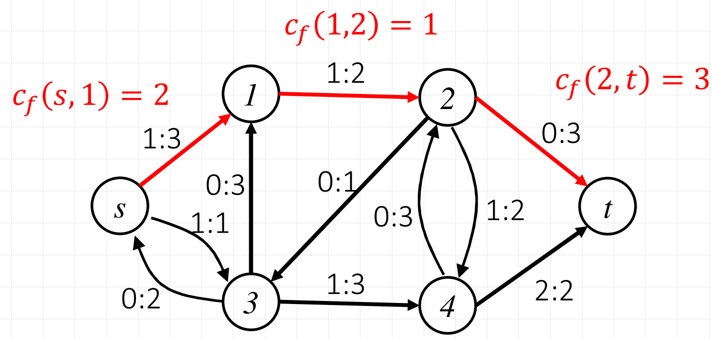
È quindi possibile aumentare il flusso negli archi del cammino aumentante.



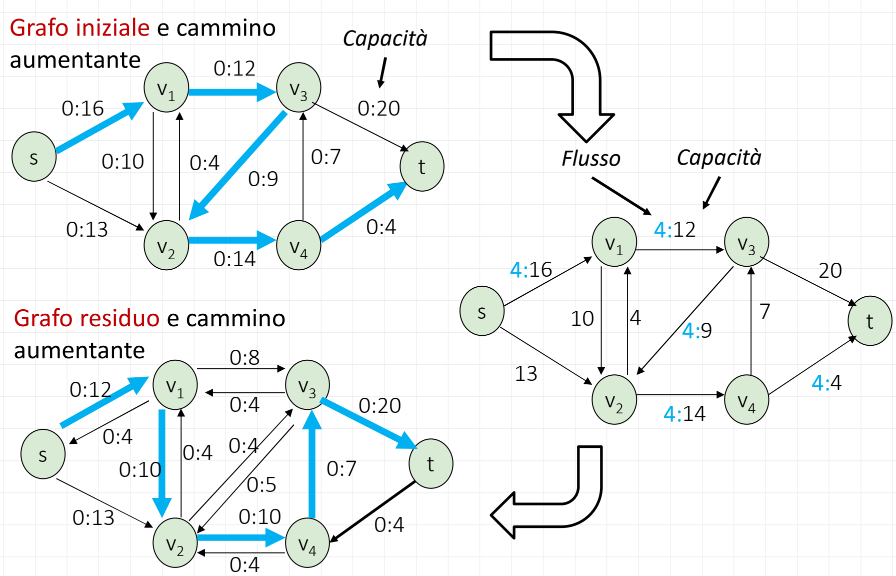
Cammino aumentante
Si può aumentare il flusso di 1 in tutti gli archi del cammino.

Incremento limite

Il flusso lungo un cammino aumentante può essere aumentato al massimo di un quantitativo pari alla minima capacità residua c_f degli archi del cammino.



Grafo residuo, esempio

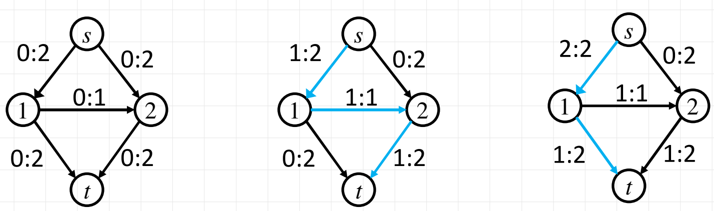


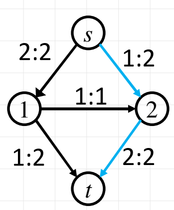
Ford-Fulkerson

Algoritmo di Ford–Fulkerson a cammini aumentanti.

1. Set $f(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in A$
2. Trova un cammino aumentante P nel grafo residuo G_f
3. Aumenta il flusso su P e aggiorna G_f
4. Ripeti 2-4 finché possibile

Problema, undo





Non esistono più cammini aumentanti.

Il flusso massimo sarebbe 4 ma qui si trova solo 3.

Sarebbe necessario disfare la scelta dell'arco (1,2) fatta all'inizio.

Capacitá residua, revisited

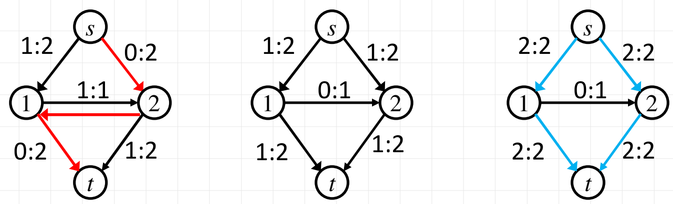
E' possibile inviare flusso lungo un cammino percorrendo archi controsenso (inizialmente con capacità nulla), se questi hanno un flusso positivo.

Si può abbassare il flusso su di essi fino ad annullarlo.

I cammini aumentanti possono contenere archi inversi, se questi hanno un flusso positivo.

La capacità residua di un arco (u, v) con flusso $f(u, v)$ è:

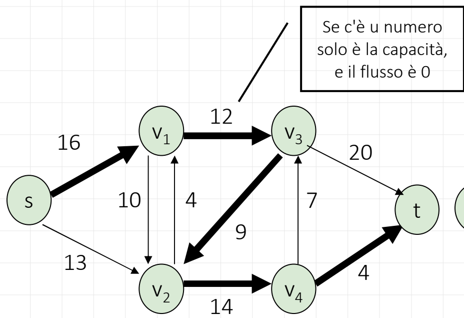
$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & dir.\, u \rightarrow v \\ c(v,u) + f(u,v) & dir.\, v \rightarrow u \end{cases}$$

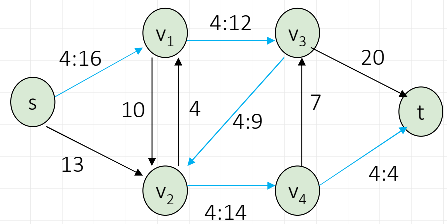


Ford-Fulkerson:

```
FORD-FULKERSON(G,s,t)
for each edge (u,v) ∈ E[G]
do  f[u,v] = 0
    f[v,u] = c[v,u] = 0
while ∃ a path p from s to t in the residual network Gf
do cf(p) = min{cf(u,v): (u,v) is in p}
   for each edge (u,v) in p
   do f[u,v] = f[u,v] + cf(p)
      c[v,u] = c[v,u] + cf(p)
```

Ford-Fulkerson, esempio:

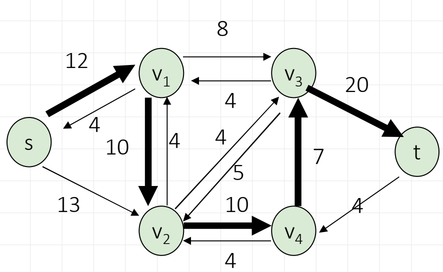


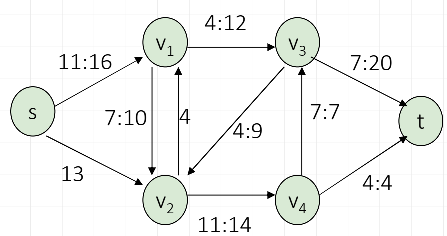


Rete iniziale e cammino aumentante.

Flusso risultante aggiungendo f_p a f

Ford-Fulkerson, esempio:

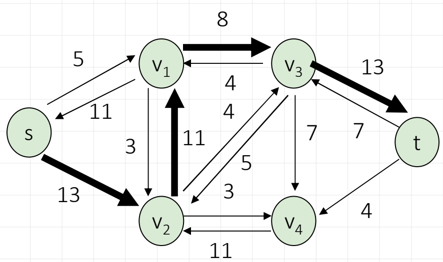


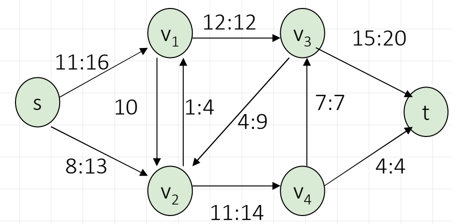


Rete residua e cammino aumentante.

Flusso risultante aggiungendo f_p a f

Ford-Fulkerson, esempio:

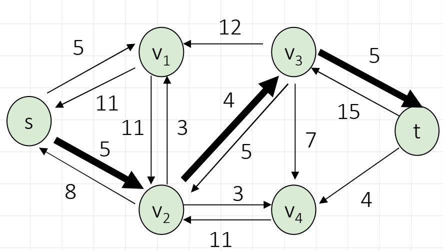


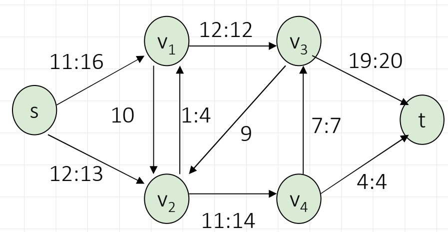


Rete residua e
cammino aumentante.

Flusso risultante
aggiungendo f_p a f

Ford-Fulkerson, esempio:

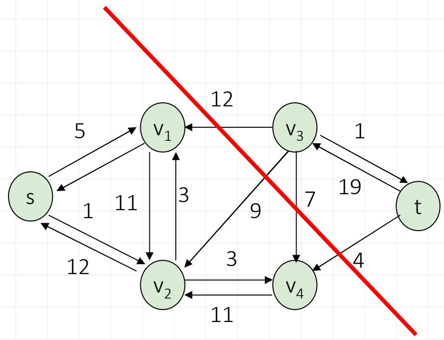




Rete residua e
cammino aumentante.

Flusso risultante
aggiungendo f_p a f

Ford-Fulkerson, esempio:



Rete residua, nessun cammino aumentante.

Flusso ottimo.

Ford Fulkerson, complessitá

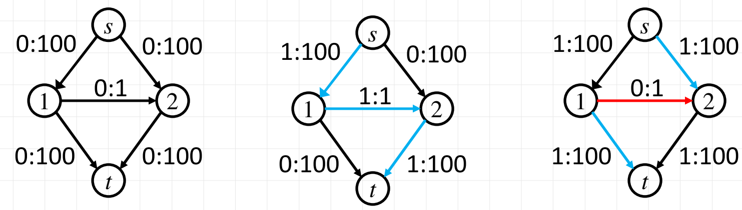
Se ogni capacità è intera, allora la complessità è $O(|E| f^*)$, dove f^* è il valore del flusso massimo.

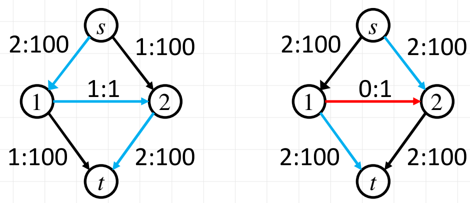
Motivo: ad ogni iterazione il flusso aumenta almeno di 1.

L'algoritmo potrebbe quindi essere non polinomiale.

Inefficienza

Ford-Fulkerson può essere molto inefficiente





Ecc.

200 iterazioni per un grafo di 4 vertici!

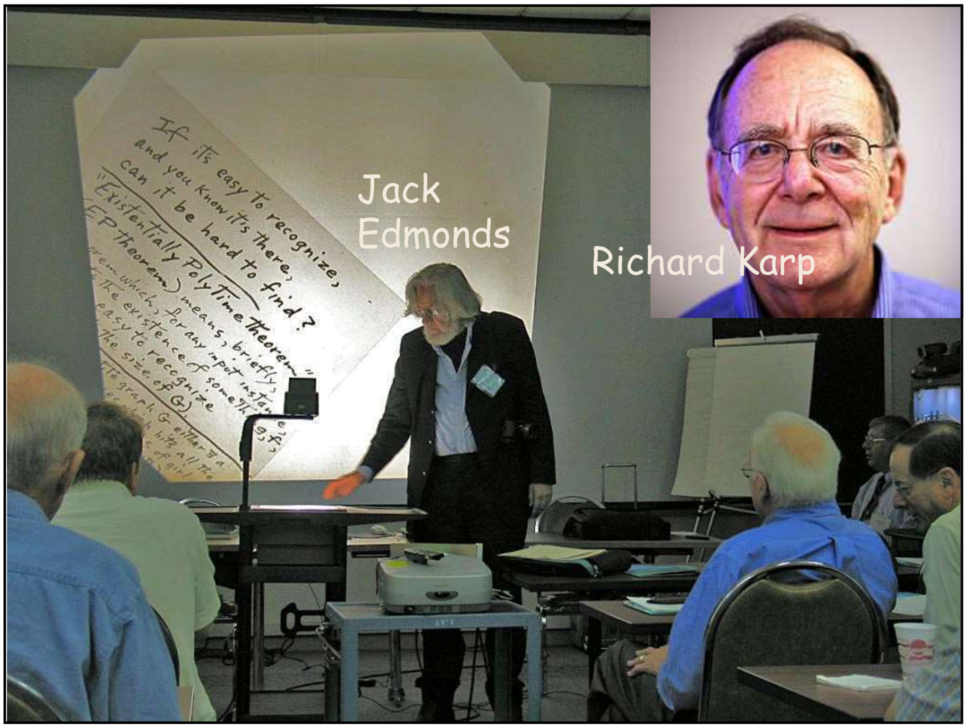
Serve un criterio per la scelta del cammino aumentante.

Edmonds - Karp

Edmonds e Karp (1972): prendi sempre un cammino aumentante con il minimo numero di archi. Lo si può trovare via BFS.

Algoritmo di Edmonds-Karp a cammini aumentanti minimi.

1. Set $f(u,v) = 0 \qquad \forall (u,v) \in A$
2. P =BFS (G_f)
3. Aumenta il flusso su P e aggiorna G_f
4. Ripeti 2-4 finché possibile



29

Edmonds-Karp, complessitá

Lemma: Se Edmonds-Karp è applicato ad una rete G = (V, E) con sorgente s e destinazione t, allora per tutti i vertici $v \in V - \{s, t\}$ la distanza minima $\delta_f(s, v)$ nel grafo residuo G_f cresce monotonicamente ad ogni aumento di flusso.

Teorema: Se Edmonds-Karp è applicato ad una rete G = (V, E) con sorgente s e destinazione t, allora il numero totale di aumenti di flusso effettuati dall'algoritmo è O(VE).

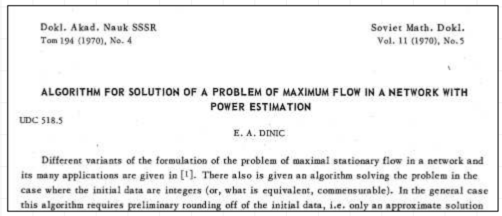
Dato che BFS può essere implementata con complessità O(E), la complessità di Edmonds-Karp è $O(VE * E) = O(VE^2)$.

30

Max flow, complessitá

La complessità di Edmonds-Karp è $O(nm^2)$

Dinic (1970) ha abbassato la complessità a $O(n^2m)$. Risolvendo un esercizio proposto in classe! (da Adel’son-Vel’skiĭ)



Dokl. Akad. Nauk SSSR
Tom 194 (1970), No. 4

Soviet Math. Dokl.
Vol. 11 (1970), No. 5

ALGORITHM FOR SOLUTION OF A PROBLEM OF MAXIMUM FLOW IN A NETWORK WITH POWER ESTIMATION

UDC 518.5

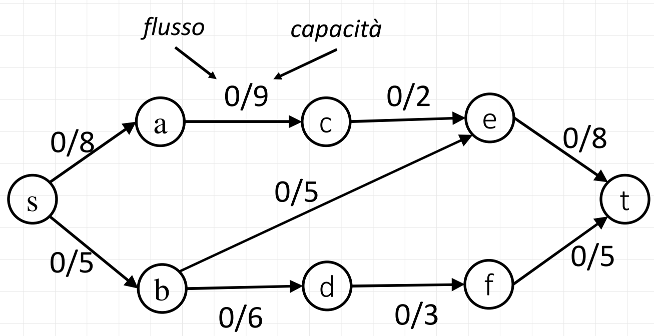
E. A. DINIC

Different variants of the formulation of the problem of maximal stationary flow in a network and its many applications are given in [1]. There also is given an algorithm solving the problem in the case where the initial data are integers (or, what is equivalent, commensurable). In the general case this algorithm requires preliminary rounding off of the initial data, i.e. only an approximate solution

Più recentemente altri algoritmi sono stati proposti, di complessità ancora minore (es. push-relabel di Goldberg-Tarjan).

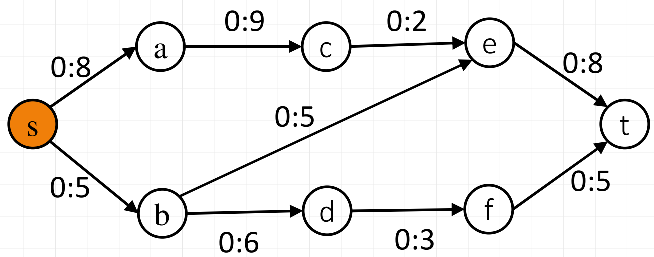
Edmonds-Karp, esempio

Utilizzare l’algoritmo di Edmonds-Karp per trovare il flusso massimo in questa rete.

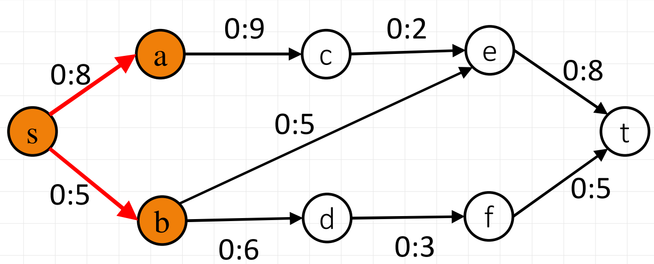


Edmonds-Karp, esempio

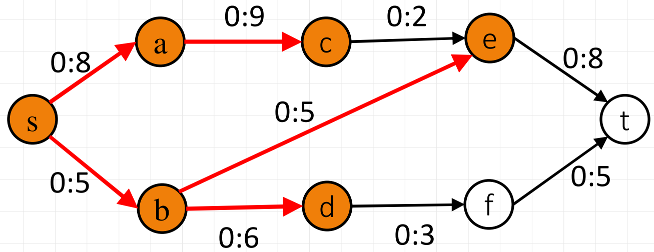
Prima fase: BFS dalla sorgente *s*



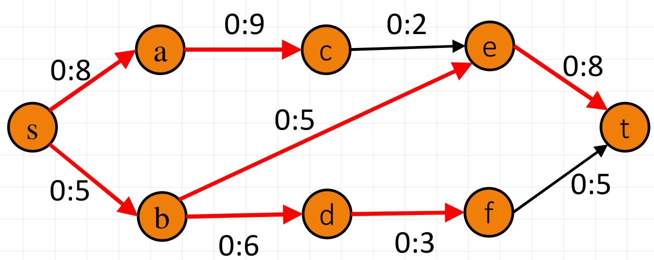
Edmonds-Karp, esempio



Edmonds-Karp, esempio



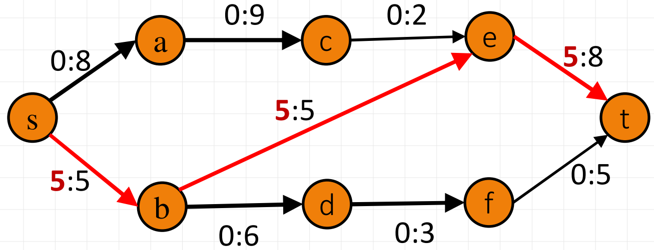
Edmonds-Karp, esempio



Cammino aumentante: (s, b, e, t)

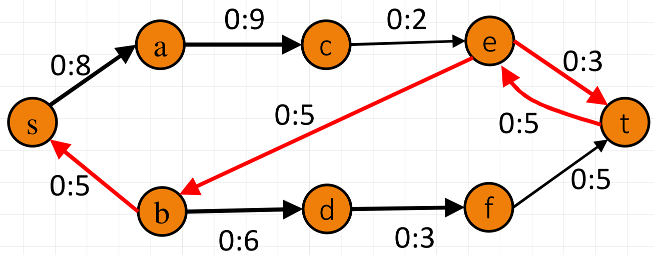
Edmonds-Karp, esempio

Invia 5 unità di flusso lungo il cammino aumentante.



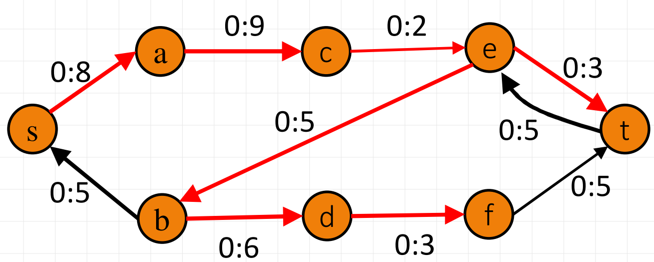
Edmonds-Karp, esempio

Grafo ridotto



Edmonds-Karp, esempio

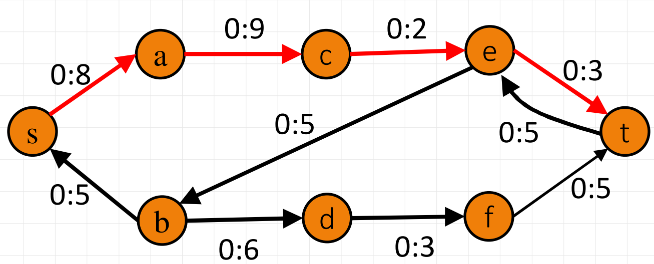
BFS da s nel grafo ridotto.



Edmonds-Karp, esempio

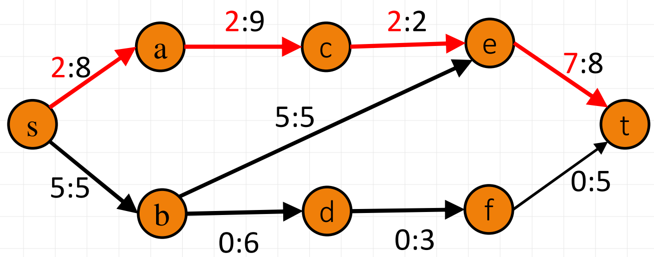
Cammino aumentante: s, a, c, e, t

Capacità del cammino: 2



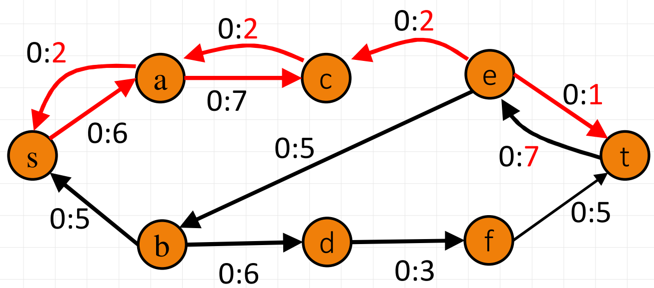
Edmonds-Karp, esempio

Nuovi flussi:



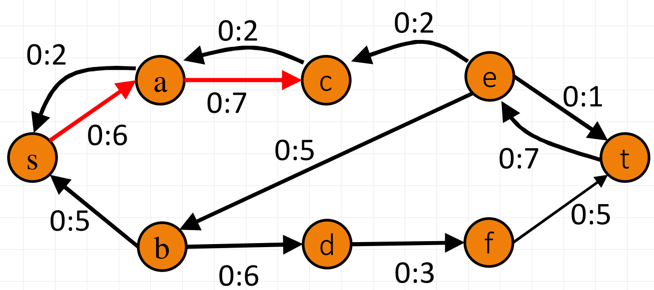
Edmonds-Karp, esempio

Grafo ridotto:



Edmonds-Karp, esempio

BFS nel grafo ridotto: t non è più raggiungibile.

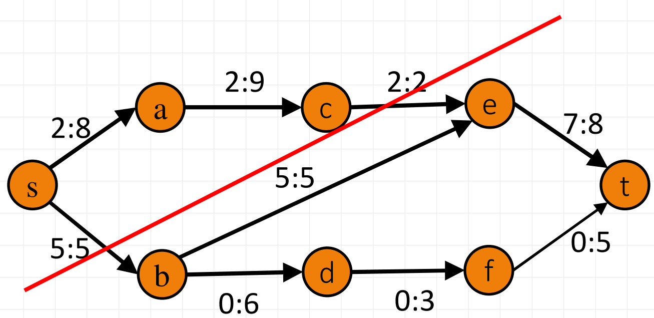


Vittorio Maniezzo - Univ. Bologna 43

43

Edmonds-Karp, esempio

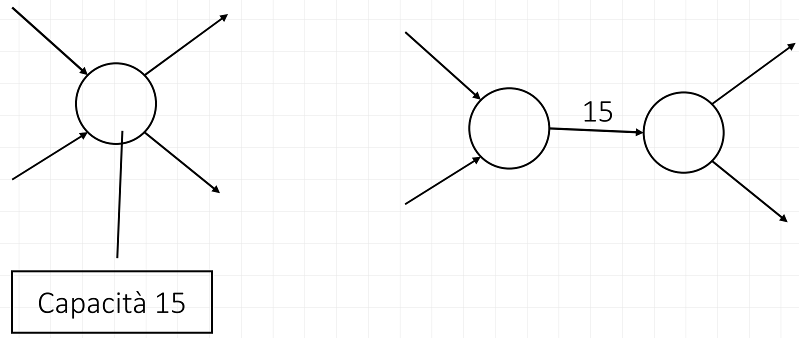
Flussi ottimi, taglio minimo, archi saturi.



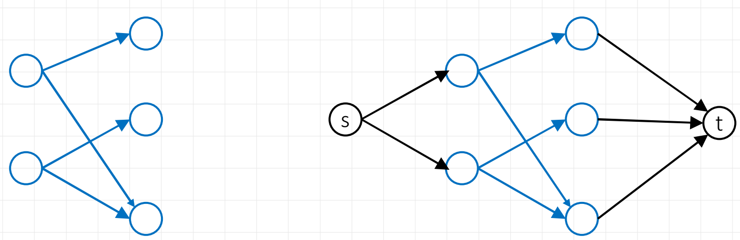
Vittorio Maniezzo - Univ. Bologna 44

44

Capacitá sui nodi



Sorgenti / pozzi multipli



example

March of the penguins

http://poj.org/problem?id=3498

Versione 1 (più facile)

I pinguini possono saltare **dall'iceberg i all'iceberg j** al massimo il numero di volte specificato per l'iceberg i.

Versione 2 (più difficile)

Come nel testo.

47

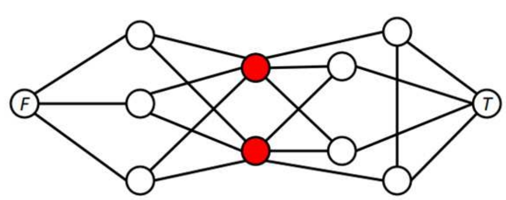
example

Contagious disease

The island of Sodor is home to a large number of towns and villages, connected by an extensive rail network. Recently, several cases of a deadly contagious disease (Covid 19) have been reported in the village of Ffarquhar. The controller of the Sodor railway plans to close down certain railway stations to prevent the disease from spreading to Tidmouth, his home town. No trains can pass through a closed station. To minimize expense (and public notice), he wants to close down as few stations as possible. However, he cannot close the Ffarquhar station, because that would expose him to the disease, and he cannot close the Tidmouth station, because then he couldn't visit his favorite pub.

Describe and analyze an algorithm to find the minimum number of stations that must be closed to block all rail travel from Ffarquhar to Tidmouth. The Sodor rail network is represented by an undirected graph, with a vertex for each station and an edge for each rail connection between two stations. Two special vertices *F* and *T* represent the stations in Ffarquhar and Tidmouth.

For example, given the following input graph, your algorithm should return the number 2.



Source: Jeff Erickson, Algorithms, UIUC, 2015.

48

example

Blood transfusion

Enthusiastic celebration of a sunny day at a prominent northeastern university has resulted in the arrival at the university's medical clinic of 169 students in need of emergency treatment. Each of the 169 students requires a transfusion of one unit of whole blood. The clinic has supplies of 170 units of whole blood. The number of units of blood available in each of the four major blood groups and the distribution of patients among the groups is summarized below.

Blood type	A	B	O	AB
Supply	46	34	45	45
Demand	39	38	42	50

Type A patients can only receive type A or O; type B patients can receive only type B or O; type O patients can receive only type O; and type AB patients can receive any of the four types.

Give a maxflow formulation that determines a distribution that satisfies the demands of a maximum number of patients.

Can we have enough blood units for all the students?

Source: Sedgewick and Wayne, Algorithms, 4th edition, 2011.