36. Algorithmus der Woche
Turnier- und Sportligaplanung

Autor
Sigrid Knust, Universität Osnabrück

Die neu gegründete Tischtennisabteilung des TV Schmetterhausen möchte in der kommenden Saison in einer Liga am Punktspielbetrieb teilnehmen und eine Mannschaft mit 6 Spielern melden. Die Mannschaft muss nach Spielstärke aufgestellt sein, d.h. der beste Spieler spielt an Position 1, der zweitbeste an Position 2, usw. Um die Spieler nach Spielstärke ordnen zu können, beschließt der Abteilungsleiter Anton Leiter, ein Turnier durchzuführen. Die 6 ausgewählten Spieler sollen in den nächsten Wochen nach dem System "jeder gegen jeden" gegeneinander spielen, danach soll die Mannschaft gemäß der dort ermittelten Rangfolge aufgestellt werden. An jedem Trainingsabend soll jeder Spieler genau ein Spiel austragen.

Die erste Frage, die sich Anton in diesem Zusammenhang stellt, ist die Frage, wie viele Abende für das Turnier benötigt werden. Jeder der 6 Spieler muss genau einmal gegen jeden der 5 anderen Spieler antreten, d.h. es sind insgesamt $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Spiele zu absolvieren (durch 2 muss geteilt werden, da das Spiel i gegen j sowohl für Spieler i als auch für Spieler j gezählt wird). Anton rechnet: Wenn jeder der 6 Spieler an jedem Trainingsabend genau ein Spiel austrägt, finden 3 Spiele pro Abend statt, d.h. es werden somit $\frac{15}{3} = 5$ Abende benötigt, um alle Spiele durchzuführen.

Hochmotiviert legen die Spieler der Abteilung los, wobei sich an jedem Abend jeder Spieler einen Gegner sucht, gegen den er noch nicht gespielt hat. Nach drei Abenden sind folgende Begegnungen absolviert:

1. Abend	2. Abend	3. Abend
1-2	1-3	1-4
3-5	2-6	2-5
4-6	4-5	3-6

Es ist leicht zu überprüfen, dass die restlichen 6 Spielpaarungen 1-5, 1-6, 5-6, 2-3, 2-4, 3-4 nicht an zwei weiteren Abenden beendet werden können (wenn 1-5 spielt, kann dazu weder das Spiel 1-6 noch das Spiel 5-6 parallel ausgetragen werden, da jeder Spieler nur einmal pro Abend spielen soll). Das Turnier lässt sich nur mit drei weiteren Abenden beenden:

4. Abend	5. Abend	6. Abend
1-5	1-6	5-6
2-3	2-4	3-4

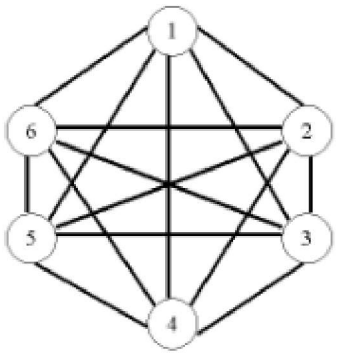
Für das Turnier benötigt die Abteilung somit einen Abend länger als ursprünglich geplant, außerdem müssen an jedem der letzten Abende zwei Spieler aussetzen. Da man hinterher bekanntlich immer schlauer ist, fragt sich Anton, ob das so sein muss oder ob die Abteilung mit einem anderen Spielplan ihr Turnier auch schon nach 5 Abenden hätte beenden können. Bei der abendlichen Sportschau stellt Anton fest, dass die Fußballbundesliga eigentlich ein ähnliches Problem hat. Dort müssen 18 Mannschaften in einer Hin- und Rückserie jeweils genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielen, wobei in jeder Runde (Wochenende) jede Mannschaft genau ein Spiel austrägt. Anton denkt zurück und erinnert sich, dass in den letzten Jahren jede Saison in $2 \cdot 17 = 34$ Wochen beendet werden konnte und nie eine Mannschaft in einer Runde aussetzen musste. Er fragt sich, ob es immer einen solchen Spielplan gibt oder ob evtl. die Zahl 18 günstiger als die Zahl 6 ist.

Verlassen wir jetzt einmal Anton, den TV Schmetterhausen sowie die Fußballbundesliga und betrachten unser Problem etwas allgemeiner: Gegeben sind eine gerade Anzahl n von Mannschaften (oder Spielern) und $n-1$ Runden (Spieltage). Gesucht ist ein Spielplan, so dass jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere spielt und jede Mannschaft in jeder Runde genau ein Spiel austrägt. Die Frage ist, ob es für jede gerade Zahl n einen solchen Spielplan gibt und wenn ja, wie man ihn konstruieren kann. Die Antwort

ist, dass für jedes gerade n eine Lösung existiert (also sowohl für $n = 18$ als auch für $n = 6$, aber auch für $n = 100$ oder $n = 1024$). Im Folgenden werden wir einen Algorithmus angeben, der für jedes n einen solchen Spielplan berechnet.

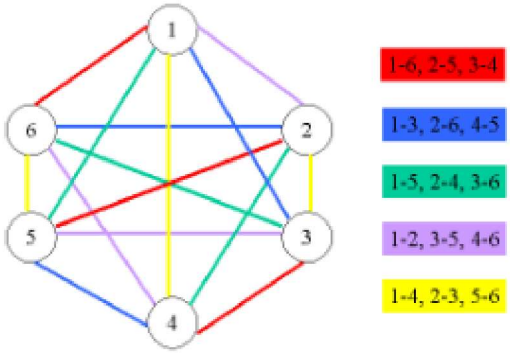
Um den Algorithmus anschaulich beschreiben zu können, modellieren wir unser Problem zunächst mit Hilfe von so genannten Graphen, die generell in der Informatik eine wichtige Rolle spielen. Ein Graph besteht aus einer Menge von Knoten und Kanten, wobei eine Kante jeweils zwei Knoten miteinander verbindet. Auf diese Weise lassen sich z.B. Straßennetzwerke (vgl. den 23. Algorithmus der Woche) modellieren, bei denen Straßen den Kanten und Kreuzungen den Knoten entsprechen.

Bei unserem Turnier- oder Sportligaplanungsproblem führen wir für jede Mannschaft einen Knoten ein, die Spiele entsprechen den Kanten. Für $n = 6$ Mannschaften erhält man folgenden Graphen:

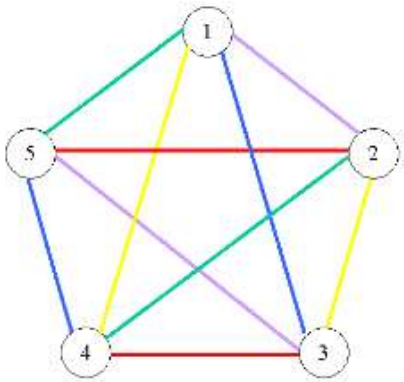


Einen solchen Graphen nennt man auch vollständig, da jeder Knoten mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist (zur Erinnerung: jede Mannschaft soll gegen jede andere spielen). Um einen Spielplan zu erhalten, färben wir nun die Kanten mit den Farben $1, 2, \ldots, n-1$, wobei jede Farbe eine Runde repräsentiert. Eine solche Färbung wollen wir zulässig nennen, wenn sie einem zulässigen Spielplan entspricht. Dazu müssen alle Kanten, die in den gleichen Knoten hineinführen, unterschiedlich gefärbt sein (sonst ist die Bedingung verletzt, dass jede Mannschaft in jeder Runde nur einmal spielt).

Für unseren Graphen mit $n = 6$ Knoten ist z.B. die unten abgebildete Kantenfärbung mit $n - 1 = 5$ Farben zulässig. Ein zugehöriger Spielplan ist neben dem Graphen dargestellt, wobei die Farbe "rot" die erste Runde repräsentiert, die Farbe "blau" die zweite Runde, usw.



Es bleibt die Frage, wie man für jede gerade Zahl n eine zulässige Kantenfärbung für den vollständigen Graphen mit n Knoten bestimmen kann. Betrachten wir in dem Beispiel einmal den Graphen, der entsteht, wenn wir Knoten 6 und alle 5 Kanten, die in ihn hineinführen, entfernen. Es ergibt sich ein 5-Eck, bei dem die 5 Kanten auf dem Rand (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1) alle unterschiedlich gefärbt sind. Zeichnen wir das 5-Eck wie unten als regelmäßiges 5-Eck (d.h. die Innenwinkel an allen 5 Ecken sind gleich), fällt auf, dass jede Kante im Inneren des 5-Ecks die gleiche Farbe wie die zugehörige parallele Kante auf dem Rand hat. Sind bei einer Kantenfärbung immer nur parallele Kanten (die ja keinen Knoten gemeinsam haben) mit der gleichen Farbe gefärbt, ist unsere obige Bedingung erfüllt, dass Kanten, die in den gleichen Knoten hineinführen, stets unterschiedlich gefärbt sind. Bei unserem Beispiel sehen wir weiterhin, dass bei jedem der 5 Knoten 4 Farben verbraucht sind und jeweils eine andere Farbe unbenutzt ist (die jeweils für die Kante zum Knoten 6 genutzt werden kann).



Diese Beobachtungen lassen sich zu einem Konstruktionsverfahren für eine Kantenfärbung für jeden Graphen mit einer geraden Anzahl n von Knoten umsetzen. Im Folgenden stellen wir einen Algorithmus vor, der in $n-1$ Schritten jeweils eine Menge von parallelen Kanten mit einer anderen Farbe färbt (vgl. auch die Abbildung unter dem Algorithmus). Man kann zeigen, dass dieser Algorithmus für jede gerade Zahl n funktioniert und eine zulässige Kantenfärbung liefert. Die so entstandene Färbung wird auch kanonische 1-Faktorisierung genannt (die Kantenmengen einer Farbe bilden jeweils einen so genannten 1-Faktor im Graphen).

ALGORITHMUS KANTENFÄRBUNG (GEOMETRISCHE VERSION)

1. Bilde aus den Knoten $1,2,\ldots,n-1$ ein regelmäßiges $(n-1)$-Eck und platziere den Knoten n links oben neben dem $(n-1)$-Eck.
2. Verbinde den Knoten n mit der "Spitze" des $(n-1)$-Ecks.
3. Verbinde die übrigen Knoten jeweils mit dem gegenüberliegenden Knoten auf der gleichen Höhe im $(n-1)$-Eck.
4. Die eingefügten $\frac{n}{2}$ Kanten werden mit der ersten Farbe gefärbt (im Beispiel die Kanten 6-1, 5-2, 4-3).
5. Verschiebe die Knoten $1,\ldots,n-1$ des $(n-1)$-Ecks gegen den Uhrzeigersinn zyklisch um eine Position weiter (d.h. Knoten 2 geht auf den Platz von Knoten 1, Knoten 3 ersetzt den alten Knoten 2, ..., Knoten $n-1$ ersetzt den alten Knoten $n-2$ und Knoten 1 ersetzt den alten Knoten $n-1$). Der Knoten n behält seinen Platz neben dem $(n-1)$-Eck und die in den Schritten 2 und 3 eingefügten Kanten behalten ihre Position im $(n-1)$-Eck.
6. Die neu resultierenden $\frac{n}{2}$ Kanten werden mit der zweiten Farbe gefärbt (im Beispiel die Kanten 6-2, 1-3, 5-4).
7. Die Schritte 5 und 6 des Verfahrens werden für die übrigen Farben $3,\ldots,n-1$ wiederholt.