**Project #1 3-4题**

**PurseLofty**

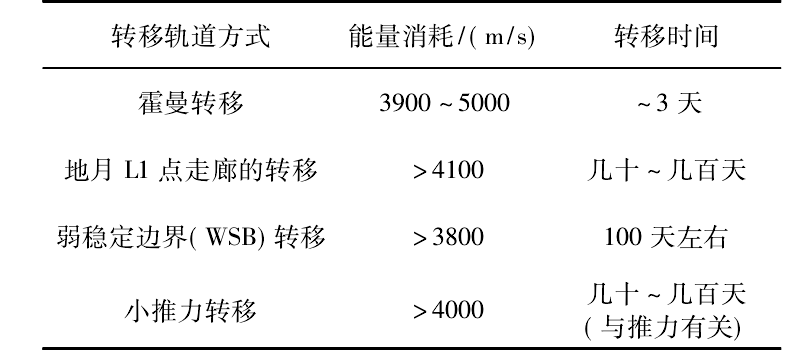
**1.轨道的选择**

首先我们要确定选择何种登月轨道，再进行具体计算。经过调研可知，地月转移轨道主要有以下四类：霍曼转移、地月L1走廊转移、弱稳定边界转移、小推力转移。下面分别做简要介绍分析。

霍曼转移是最基本双脉冲机动轨道，首先在绕地轨道上加速将飞行器推入奔月轨道，然后于近月处减速使其进入绕月轨道；地月L1走廊转移是利用L1点的稳定流形，将飞行器送入该流形后，自动演化到月球的引力范围内，不难看出该方式要比霍曼转移更省能量，然而，这一演化过程耗时很长（几十甚至几百天[[1]](#endnote-1)），且最终所处的绕月轨道往往不是探测器所希望的，需要额外速度增量再次转移，因此总体上不一定优于霍曼转移方式。

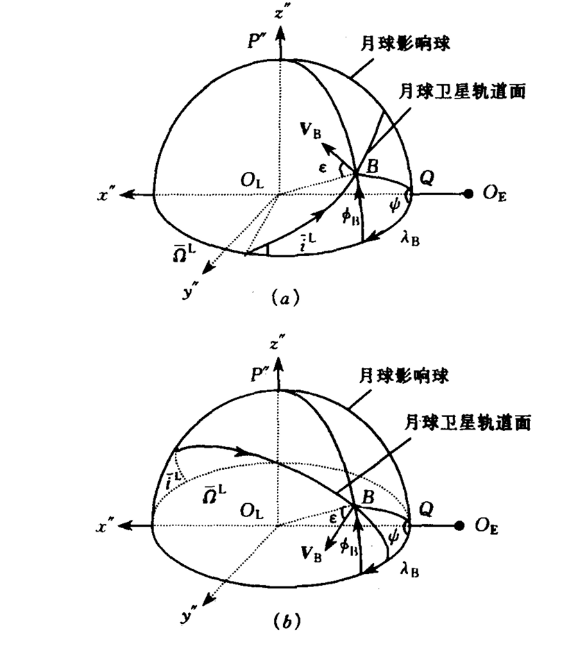
弱稳定边界转移仍是利用流形包裹的轨道，但同时利用了日-地不变流形和地-月不变流形，这一方式同样有着耗时过长的问题；小推力转移是由于一次性提供大速度冲量对发动机要求过高，因此转而采用较小的连续推力（分次施加的脉冲推力），其轨道呈螺旋形，这一方式的耗时同样较长，且有安全性问题[[2]](#endnote-2)，故也较少采用。

四种不同方式的能量消耗和转移时间如下所示：



可以看出，虽然霍曼轨道不一定是耗能最少的轨道，但在节省时间上有突出优势。第3题中计算出的轨道还要用在第4题里，显然不可能让探月航天员花上近百天来转移，因此，本文中所采用的转移轨道应为霍曼轨道。

**2.建立计算的数学模型**

这是一个限制性三体（如果还考虑太阳，就是四体）问题，没有解析解，而用雅各比积分进行纯数值模拟超出了Mathematica的递归深度极限（当然，也可能是我写的算法不行），时间紧迫的我也没有空闲来学习STK等专业轨道设计软件。因此，本文采用双二体近似算法进行建模，以下是详细过程。

**2.1双二体方法概述**

双二体方法的核心是月球影响球，其半径. 此时地月转移轨道可分为两段：首先是位于月球影响球之外的地心段，此段忽略月球引力，轨道为地心圆锥曲线; 然后是月球影响球内的月心段，此段忽略地球引力，轨道为月心圆锥曲线。在影响球边界上，将两段圆锥曲线拼接为一个整体[[3]](#endnote-3)。

**2.2坐标系和六大基本参数**

如右上图所示，取月心白道坐标系，其中是月心，轴由地球指向该时刻的月球，轴垂直于白道面，方向与月球公转的角动量方向相同。

设B是转移轨道与月球影响球的交点，称为入口点。为了确定具体的轨道，我们需要6个独立参数，本文的选取方案为：

（1）B点的月球经度，我们规定在月球运动的前方为正值（西经），后方为负值；

（2）B点的月球纬度；

（3）探测器月心轨道相对白道面的倾角；

（4）中，探测器在B点的速度矢量和位置矢量夹角的补角；

（5）探测器地球停泊轨道的地心距；

（6）地心系中，探测器在地球停泊轨道上加速点处速度矢量与位置矢量的夹角.

之所以选取这六个参数，是因为它更符合探月轨道设计的实际情况，我们往往是希望探测器以某种方式入月，然后据此计算轨道。而project #1第3题中却指定地球发射位置而去求入月经度，似乎有些本末倒置。不过题目本身仅仅是一个启发，不必深究，因此笔者在这里做了这样的修改。

**2.3几个关键轨道参数的计算**

本节我们就利用上面的6个基本参数，解析地（实际上是近似）计算轨道中的一些关键参数，限于篇幅，这里略去数学演算的部分，只是呈现整体的思路和结果。

**2.3.1入口点对月速度方向**

我们需要引入升交点的概念，其指探测器轨道的升段与白道面的交点，设升交点到B点的弧长为，易得. 升交点经度与探测器是升段（如图a）还是降段（如图b）到达B点有关，升段时：

进而对月速度矢量-，其中-表示绕轴逆时针旋转-的旋转矩阵。

降段时：

对月速度矢量-.

**2.3.2入口点对地速度矢量**

将2.3.1中求出的**记作**，并记，则由几何关系（正弦定理），对地速度矢量的三个分量满足，其中是月球公转速度，是显然的。

为了求出，我们需要定义一系列的量，记，其中是B点的地心位置矢量，记作. 再记，其中为地球引力常数。

有了这些量，我们可以根据地心段的能量守恒和动量守恒得出满足的一个二次方程，如果记，则.

**2.3.3地心轨道参数**

地心段轨道指从地球停泊轨道上的EA点加速开始，经椭圆轨道到达B点。记，则椭圆的半通径，半长轴，偏心率.

B点的真近点角和偏近点角分别为，对EA点，，因此探测器在地心段轨道的用时.

我们进而可以求出EA点位置和速度的地心矢量，记，则：

**2.3.4月心轨道参数**

通过简单的计算即可验证，探测器到达B点的速度必定远大于该处的月球逃逸速度，因此月心段轨道为双曲线，记，则 ，近月距，B的真近点角，偏近点角满足.

从而月心段耗时，近月点的月心位置矢量，相对月心的速度.

**2.4为节省能量而进行的参数限制**

虽然我们已经确定采用霍曼轨道，但具体的参数选取仍有一定的自由度，为节省能量，一些参数的选择也会有一些限制，下面对此进行分析。首先明确，本节采用两次变轨位置（EA点和LP点）的速度脉冲之和来衡量能量消耗。

本文中的全部计算都是通过笔者编写的python程序完成的，读者可以在GitHub项目**Simple-Earth-Moon-Orbit-Design**中下载该程序。

**2.4.1应采取地心顺行轨道**

2.3.2节中我们解出有两个可能值，那么具体应该取正值还是负值呢？假设地球停泊轨道和绕月轨道的高度均为200km，入口点为西经50°，纬度为0. 我们改变的值，运用2.3节的模型，分别计算取“+”“-”时的速度脉冲，结果如下表所示:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 符号 |  |
| 10 | + | 4.5568 |
| 10 | - | 4.1327 |
| 30 | + | 4.5427 |
| 30 | - | 4.1292 |
| 60 | + | 4.5037 |
| 60 | - | 4.1663 |
| 90 | + | 4.4609 |
| 90 | - | 4.0940 |
| 120 | + | 4.4301 |
| 120 | - | 4.0680 |
| 150 | + | 4.4133 |
| 150 | - | 4.0461 |
| 170 | + | 4.4085 |
| 170 | - | 4.0384 |

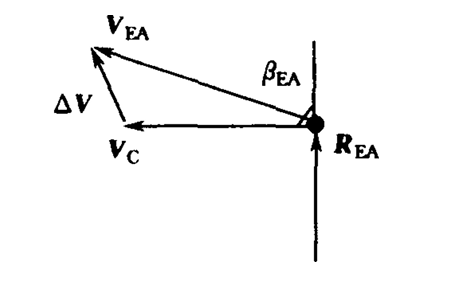
从中明显可以看出，取“+”时的能量消耗始终大于取“-”时，因此，本文此后的计算中，均取的较小解。此时对应的轨道在航天上称为地心顺行轨道（因为地心段相对白道面的倾角小于90°）。

另外，表中数据似乎说明增大时，所消耗的能量也在减小，但数值变化较小，难以确定这是否与月球轨道高度相关，也并未查到关于这点的相关文献。且也与卫星的探测目的相关，一般是给定的，因此我们不加以限制。

**2.4.2地球停泊轨道上应沿速度方向加速**

这里研究与耗能的关系，我们同样采用数值计算列表的方法来比较，直观上感觉耗能最小的应该为90°，那么我们就在这附近搜索。

同样假设地球停泊轨道和绕月轨道的高度均为200km，入口点为西经50°，纬度为0，并设. 数值计算的结果如下表所示，其中表示在EA点的速度增量：



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 81 | 10.9246 | 3.4577 |
| 84 | 10.9246 | 3.2853 |
| 87 | 10.9245 | 3.1772 |
| 90 | 10.9245 | 3.1403 |
| 93 | 10.9245 | 3.1772 |
| 96 | 10.9245 | 3.2583 |
| 99 | 10.9246 | 3.4577 |

注意到的值基本没有变化，故近月点的对月速度也基本相同，从而我们只用考虑EA点的速度脉冲，显然是90°时耗能最少。

**2.4.3地球停泊轨道高度无关紧要**

改变轨道高度，其余假设不变，同时令，数值计算结果如下：

|  |  |
| --- | --- |
| H |  |
| 150 | 4.1071 |
| 180 | 4.0992 |
| 200 | 4.0941 |
| 240 | 4.0834 |
| 270 | 4.0754 |
| 300 | 4.0677 |
| 330 | 4.0600 |
| 360 | 4.0524 |
| 400 | 4.0421 |
| 450 | 4.0295 |
| 500 | 4.0770 |

虽然随着轨道高度的增加，转移能耗略有降低，但将飞船发射到更高轨本身也需要更多的能量，因此总体来说轨道高度是不须加以限制的.

**3.第3题的具体数值计算**

按照前面所说的，我们稍微变更一下题目，改为已知入口点的经纬度，求飞船在地球停泊轨道上变轨的位置。已知，无妨设（即假设这是一艘极月飞船），再设地球停泊轨道高为200km，故

我们还需要参数才能计算轨道，按真实情况考虑，探测器第一次进入绕月轨道时应当处在较高处，不妨设高也为200km，即近月距，对进行反复迭代搜索得（这一过程借助程序完成）。

取地月距。

对地心段轨道，转移初速，椭圆轨道参数

求得，对应为北纬2.9253°，西经179.2509°，取地球黄赤交角为23.44°，再考虑时间内地球的自转，可得变轨点的瞬时经纬度位置为南纬20.5148°，西经11.9263°.

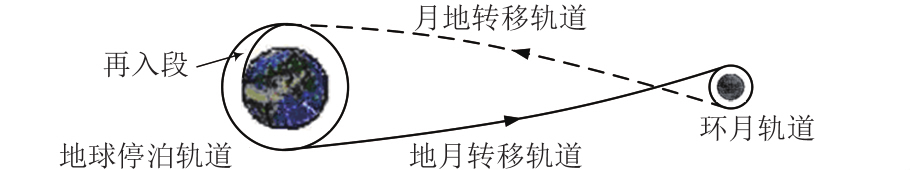
对月心段轨道，双曲线参数

故所需的总时间为

**4.紧急返回问题（第4题）的相关讨论**

**4.1轨道设计**

查阅文献可知，如下图所示的自由返回轨道是应用最为广泛的安全返回轨道[[4]](#endnote-4)：



这一轨道需要3次变轨：地月段减速以被月球捕获，月球轨道上加速奔向地球，以及在近地处减速被地球捕获。

**4.2具体计算**

，故出事的位置还未进入月球影响球的半径内，记该位置为C，则C的偏近点角为110.4639°，从而由C点运动到近月点LP所用时间为22.3899h。

近月点的月心位置矢量的x分量为，由此可求出绕月运动的角度，因此绕月圆轨道所用的时间为0.7953h，此后是一个完整的逆向地月转移过程，故总用时为

这里肯定没法使用第2次变轨点对应月球经纬度为0的假设，因为这会导致前面的参数设置自相矛盾，因此我们还是沿用第3题中的经纬度关系。由对称性，再考虑整个过程当中的地球自转效应，知到达地球位置的经纬度为南纬26.3653°，西经89.2644°.

参考文献

1. 侯锡云,刘林.共线平动点的动力学特征及其在深空探测中的应用[J].宇航学报,2008, (03):736-747+771. [↑](#endnote-ref-1)
2. 王劼,崔乃刚,刘暾.定常幅值小推力登月飞行器轨道研究[J].航空学报,2001,(01):6-9. [↑](#endnote-ref-2)
3. 郗晓宁，曾国强，任萱等. 月球探测器轨道设计[M].北京: 国防工业出版社,2001 [↑](#endnote-ref-3)
4. 彭祺擘,张海联.载人登月地月转移轨道方案综述[J].载人航天,2016,22(06):663-672+705. [↑](#endnote-ref-4)