Численные методы. Иттерационный метод Якоби

Альвинский Александр

June 4, 2023

1 Введение

Эта лабораторная работа посвящена итерационному методу Якоби, который представляет собой итерационный численный метод, используемый для решения систем линейных уравнений. Метод Якоби особенно эффективен, когда система может быть преобразована в диагонально доминирующую форму. Это итеративный алгоритм, который многократно обновляет переменные до тех пор, пока не будет достигнут желаемый уровень точности.

2 Постановка задачи

Целью данной лабораторной работы было решение следующей системы линейных уравнений методом итераций Якоби:

$$
\begin{aligned}
-9x_1 - x_2 + 0.3x_3 + x_4 &= -77.9 \\
x_1 + 10x_2 - 0.7x_3 + 1.2x_4 &= 48.4 \\
0.5x_1 - 4.4x_3 + 11x_3 + 3.1x_4 &= -21.4 \\
-2.4x_2 + 4.8x_3 - 10x_4 &= 5.5
\end{aligned}
$$

Начальные значения были установлены как $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ и $x_4 = 0$. Желаемый уровень точности, обозначенный ε, был предоставлен в качестве входных данных.

3 Метод

Итерационный метод Якоби был реализован с использованием языка программирования Python. Код был структурирован следующим образом:

```
# Определение уравнений для решения
# в диагонально доминирующей форме
```

```python
f1 = lambda x1, x2, x3, x4: (-77.9 - 5.5 * x4 + 0.3 * x2 - x1) / 9
f2 = lambda x1, x2, x3, x4: (-48.4 + 1.1 * x3 - 0.7 * x2 + 1.2 * x1) / 10
f3 = lambda x1, x2, x3, x4: (21.4 + 3.1 * x4 + 4.4 * x3 - 0.5 * x1) / 11
f4 = lambda x1, x2, x3, x4: (-5.5 - 2.3 * x4 - 4.8 * x3 + 2.4 * x2) / 10

# Начальная настройка
x01 = 0
x02 = 0
x03 = 0
x04 = 0
count = 1

# Точность
e = float(input('Enter eps: '))

# Реализация итерации Якоби
print('\nCount\tx1\tx2\tx3\tx4\n')

condition = True

while condition:
    x11 = f1(x01, x02, x03, x04)
    x22 = f2(x01, x02, x03, x04)
    x33 = f3(x01, x02, x03, x04)
    x44 = f4(x01, x02, x03, x04)
    print('%d\t%0.4f\t%0.4f\t%0.4f\t%0.4f\n' % (count, x11, x22, x33, x44))
    e1 = abs(x01 - x11)
    e2 = abs(x02 - x22)
    e3 = abs(x03 - x33)
    e4 = abs(x04 - x44)

    count += 1
    x01 = x11
    x02 = x22
    x03 = x33
    x04 = x44

    condition = e1 > e and e2 > e and e3 > e and e4 > e

print('\nSolution: x1=%0.3f, x2=%0.3f, x3 = %0.3f and x4 = %0.3f\n' % (x11, x22, x33, x44))
```

Система линейных уравнений была определена с использованием лямбда-функций. Задавались начальные значения и требуемая точность. Затем выполнялся итерационный цикл Якоби до тех пор, пока не была достигнута заданная точность. На каждой итерации вычислялись и печатались обновленные значения x_1, x_2, x_3 и x_4. Цикл продолжался до тех пор, пока разница между текущим и предыдущим значениями не стала меньше ε.

4 Результаты и анализ

Результаты применения метода итераций Якоби к заданной системе линейных уравнений представлены в таблице 1. В таблице отображается количество итераций вместе с соответствующими значениями x_1, x_2, x_3 и x_4.

Table 1: Результаты

Иттерация	x_1	x_2	x_3	x_4
1	-8.6556	-4.8400	1.9455	-0.5500
2	-7.5190	-5.3259	2.9621	-2.5189
3	-6.4583	-5.0436	2.7622	-2.6707
4	-6.4740	-4.9581	2.5912	-2.4721
5	-6.5908	-4.9848	2.5796	-2.4152
6	-6.6135	-4.9982	2.5962	-2.4290
7	-6.6029	-4.9982	2.6000	-2.4371

Анализируя итерации, мы можем наблюдать сходимость решения. Количество итераций неуклонно увеличивается по мере того, как алгоритм уточняет значения x_1, x_2, x_3 и x_4. Алгоритм завершается, когда разница между последовательными итерациями становится ниже заданной точности.

5 Вывод

Метод итераций Якоби обеспечивает надежный подход к решению систем линейных уравнений. В этой лабораторной работе мы успешно применили итерационный метод Якоби для решения заданной системы уравнений. Внедрив предоставленный код и настроив начальные значения и желаемую точность, мы получили итерационные решения для системы.

Метод итераций Якоби является эффективным инструментом для аппроксимации решений систем линейных уравнений. Это позволяет итеративно уточнять значения переменных, обеспечивая сходимость к точному решению. Выполнив эту лабораторную работу, мы получили практический опыт реализации метода итераций Якоби и понимания его сходимости.