Amacımız: Non-rotating, uncharged black hole spacetime metric solution

Çıkış noktamız: Einstein'ın kütleçekimi bir kuvvet olarak değil, uzay-zamanın eğriliği olarak tanımlaması.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Einstein Field Equation-(EFE)-Maddenin uzay zamanı nasıl büktüğünü anlatır

Biz boş uzayda (vakum ortamı, kara deliğin dışı) ışığın hareketini inceleyeceğiz. Bu sebeple denklemi çözerken bazı değerleri bu şartlara uygun olarak alacağız.

İlk olarak enerji-momentum tensörü ile başlıyoruz (eşitliğin sağ tarafı). Uzay boşluğunda (vakum ortamı) madde yoktur. Bu nedenle enerji-momentum tensörü sıfırdır.

İkinci olarak (amacımız doğrultusunda) evrenin genişlemesi ile ilgilenmiyoruz. Bu nedenle cosmological scale değerini (/\=0) alıyoruz.

Bu sadeleştirmeler sonucu denklem şu hale geliyor:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

Matematiksel işlemler (trace alma) sonucu EFE Vacuum Solution'a ulaşıyoruz:

* EFE for Vacuum Solution:

$R_{\mu\nu} = 0$ "Ricci Flat"

↳ (Ricci tensoru)

Anlamı: Madde yoksa Ricci Eğriliği sıfırdır. Ancak Riemann Eğriliği sıfır değildir. Uzay-zaman bükülmesi vardır:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \neq 0$$

Şimdi burda bir tanım yapmamız gerekiyor:

Metric Tensor: Uzay-zamanın geometrisini tanımlayan genel matematiksel nesnedir. Matris formunda 4x4 matris olarak gösterilir. 4 boyuta sahiptir (3 uzay + 1 zaman).

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

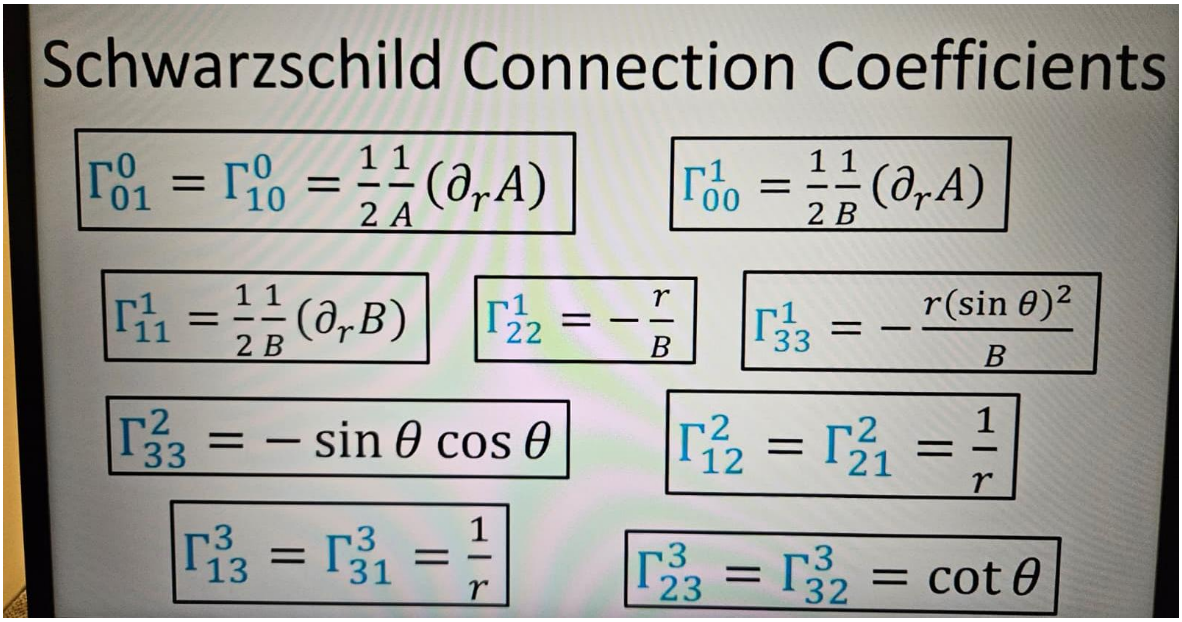
Bizim çalışmamızın devamında, yukarıda tanımladığımız özel koşullar altında kara deliğin geometrisini tanımlamak için kullanacağımız şey metric tensor'ün özel bir çözümü olan Schwarzschild Metriği'dir.

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \begin{bmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2(\sin\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Schwarzschild Metriği şu koşullar altında geçerlidir: Vakum ortamı (ortamda merkez kütle hariç-bizim durumda kara delik-başka madde yoktur), Küresel simetrik (kütle mükemmel bir küredir), Statik (kütle zamanla değişmez ve dönmez), Yüksüz (elektriksel yükü yoktur).

Schwarzschild Metriği bu koşullar altında uzay-zaman haritası oluşturmamızı sağlayacak. Işık bu harita üzerinde bu kurallara uygun şekilde hareket edecek.

Schwarzschild Metriğinin matris formunda iki adet bilinmeyen var A(r) ve -B(r). Bu bilinmeyenleri bulmak için Christoffel Sembollerini kullanacağız. Bu semboller metric tensor türevlerinden elde edilir. Schwarzschild Metriği için sıfır olmayan semboller aşağıdaki gibidir:



Bu sembolleri kullanarak bazı matematiksel prosedürleri uygulayıp A(r) ve -B(r) değerlerini şu şekilde buluyoruz:

$1 - \frac{r_s}{r}$ →A(r)

$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}$ →B(r)

Rs: Schwarzschild yarıçapıdır. Event horizon (olay ufku) da denir. Kara deliğin yarı çapıdır.

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \Big\}$$ schwarzschild radius (Event horizon)

Şimdi metrik bize haritayı verdi. Peki bu harita ne kadar bükülüyor? Bunu bulmak için yine Christoffel Sembolleri kullanacağız.

Bu semboller eğrilik miktarını tanımlamanın yanı sıra ilerleyen adımlarda ışığın hareketini analiz etmemizi sağlayacak ivme denklemlerini elde etmede de kullanılacak.

Şimdi tanımlamamız gereken bir diğer şey Geodesic kavramı. Işık uzayda bir noktadan diğerine hareket ederken en kısa yolu izler. Eğimli uzay-zaman üzerinde en kısa yolu Geodesic denklem tanımlar. Denklemin en genel formu şu şekildedir:

* Geodesic Eq.

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

Bu denklem hesapladığımız Christoffel Sembollerini ve ışığın anlık hızını alıp bize ivme değerini verir.

Geodesic denklemi 4 değişken için (t, r, teta, phi) tek tek açarız ve 4 ivme denklemi elde ederiz. Işığın uzay-zamanda hareketi bu 4 denklem kullanılarak analiz edilecek:

A) Zaman ivmesi:

$$\ddot{t} = -\left(\frac{r_s}{r(r-r_s)}\dot{r}\dot{t}\right)$$

ışığın zaman akışındaki değişimi (gravitational time dilation)

B) Radyal İvme:

$$\ddot{r} = -\left(\frac{r_s(r-r_s)}{2r^3}\dot{t}^2 - \frac{r_s}{2r(r-r_s)}\dot{r}^2 - (r-r_s)\dot{\theta}^2 - (r-r_s)\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$

* Işığın kara deliğe doğru ne kadar çekildiği ve saptığı

C) Polar Açı İvmesi:

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2\right)$$

* Ekvator düzleminden sapma

D) Azimutal Açı İvmesi:

$$\ddot{\phi} = -\left(\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\cot\theta\,\dot{\theta}\dot{\phi}\right)$$

* Işığın kara delik etrafındaki dönüşü