

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

О.Н. БУЛЫЧЕВА, В.П. ГРИГОРЬЕВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
СБОРНИК РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ

Методическое пособие
по курсу
«Высшая математика»

Под редакцией А.А. Амосова

Задача 1. Алгебраические операции над матрицами.

Даны матрицы A, B, C, D и числа α, β . Вычислить матрицу $F = \alpha\beta AB^T + \beta CD$. Матрицы A и C общие для всех вариантов, числа α, β и матрицы B, D даны ниже.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 8 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.1. \alpha = 2, \beta = -3, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 7 & 2 \\ 8 & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. \alpha = -2, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. \alpha = 2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. \alpha = -3, \beta = -2, B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. \alpha = 4, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -4 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. \alpha = -2, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.7.} \quad \alpha = 3, \beta = -4, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & -8 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.8.} \quad \alpha = 4, \beta = -2, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 7 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.9.} \quad \alpha = 4, \beta = -2, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.10.} \quad \alpha = -2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.11.} \quad \alpha = -5, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.12.} \quad \alpha = 2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.13.} \quad \alpha = 2, \beta = -3, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.14.} \quad \alpha = 2, \beta = -3, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.15.} \quad \alpha = -2, \beta = 4, B = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.16.} \quad \alpha = 4, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.17.} \quad \alpha = 2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.18.} \quad \alpha = -2, \beta = -4, B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.19.} \quad \alpha = 2, \beta = -2, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.20.} \quad \alpha = 5, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.21.} \quad \alpha = 4, \beta = -2, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.22.} \quad \alpha = 2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.23.} \quad \alpha = 5, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 9 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.24.} \quad \alpha = 3, \beta = -4, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.25.} \quad \alpha = -2, \beta = 4, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.26.} \quad \alpha = 3, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.27.} \quad \alpha = -4, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.28. \alpha = 2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.29. \alpha = 2, \beta = -3, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.30. \alpha = -3, \beta = 2, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.31. \alpha = 2, \beta = 3, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Вычисление определителя пятого порядка.

Вычислить определитель матрицы с помощью метода элементарных преобразований.

2.1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & -4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.4.

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.5.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.7.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ -4 & -4 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.8.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.9.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.11.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.12.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.13.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.14.

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.15.

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -4 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.16.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.17.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -4 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.18.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.19.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.20.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.21.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.22.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.23.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.24.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.25.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.26.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 2 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.27.

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & -4 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.28.

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.29.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.30.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.31.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Вычисление обратной матрицы.

Вычислить матрицу, обратную к данной.

3.1.

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

3.2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -13 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 13 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3.4.

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 2 \\ -1 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3.5.

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

3.6.

$$\begin{pmatrix} 15 & 7 & -4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3.7.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -5 & 1 & 4 \\ -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3.8.

$$\begin{pmatrix} -22 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3.9.

$$\begin{pmatrix} 8 & -10 & 3 \\ 1 & 12 & -5 \\ 11 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3.10.

$$\begin{pmatrix} 5 & 17 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

3.11.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ -5 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

3.12.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.13.

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & 12 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

3.14.

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ 5 & 1 & 2 \\ -8 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

3.15.

$$\begin{pmatrix} 12 & 5 & -7 \\ 11 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3.16.

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & -4 \\ 2 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

3.17.

$$\begin{pmatrix} 13 & 6 & -7 \\ -5 & -3 & 1 \\ 2 & 17 & 2 \end{pmatrix}$$

3.18.

$$\begin{pmatrix} 17 & 9 & -5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.19.

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 14 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

3.20.

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -11 \\ 12 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3.21.

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 10 \\ -15 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

3.22.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -11 \\ -6 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.23.

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -5 \\ 6 & 11 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.24.

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 18 \end{pmatrix}$$

3.25.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -9 \\ 1 & 3 & 8 \\ -5 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

3.26.

$$\begin{pmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 5 & 4 & -13 \\ 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3.27.

$$\begin{pmatrix} 11 & -9 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

3.28.

$$\begin{pmatrix} -1 & 12 & 11 \\ 1 & -3 & 8 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3.29.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -7 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

3.30.

$$\begin{pmatrix} 11 & 8 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 17 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

3.31.

$$\begin{pmatrix} 15 & -4 & 3 \\ 2 & 11 & 7 \\ 7 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Решение системы линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей.

Решить систему линейных алгебраических уравнений, используя правило Крамера и с помощью обратной матрицы.

4.1.

$$\begin{cases} 9x - 2y - 4z = 49 \\ -x + 4y + z = -12 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases}.$$

4.2.

$$\begin{cases} 8x - 9y - 2z = 25 \\ -2x + y - 4z = -1 \\ -5x + 9y - 2z = 1 \end{cases}.$$

4.3.

$$\begin{cases} 4x - 3y - 9z = -8 \\ -10x - y - z = -12 \\ -2x + 9y - 3z = 4 \end{cases}.$$

4.4.

$$\begin{cases} 3x - 7y - 7z = 47 \\ -7x - 3y + 3z = -49 \\ -5x + 6y + 3z = -32 \end{cases}.$$

4.5.

$$\begin{cases} 4x - 7y - z = 2 \\ -5x + 2y + 4z = 41 \\ x + 6y + 3z = -11 \end{cases}.$$

4.6.

$$\begin{cases} 7x - 3y - 8z = -26 \\ -3x - 2y + 3z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 48 \end{cases}.$$

4.7.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ -9x + y + 2z = -52 \\ -4x + 8y - 5z = -39 \end{cases}.$$

4.8.

$$\begin{cases} 7x - 2y - 4z = 30 \\ -9x + y - 2z = -68 \\ -2x + 4y + 3z = -13 \end{cases}.$$

4.9.

$$\begin{cases} 9x - 3y - 8z = -32 \\ -6x - y + 4z = -2 \\ x + 6y - 5z = 18 \end{cases}.$$

4.10.

$$\begin{cases} 8x - 2y - 6z = 32 \\ -6x + 4y - 3z = 21 \\ x + 2y + 2z = -3 \end{cases}.$$

4.11.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ -10x + 6y - 3z = -57 \\ x + 8y + 4z = 50 \end{cases}.$$

4.12.

$$\begin{cases} 5x - 3y - 5z = -23 \\ -10x + 6y + 4z = 46 \\ 4x + y + 2z = -15 \end{cases}.$$

4.13.

$$\begin{cases} 4x - 5y - 7z = -27 \\ -3x + y + 4z = 15 \\ 3x + 5y - 3z = -7 \end{cases}.$$

4.14.

$$\begin{cases} 9x - 3y - 3z = 21 \\ -9x + y + z = -25 \\ -4x + 4y - 5z = 5 \end{cases}.$$

4.15.

$$\begin{cases} 5x + y - 4z = 2 \\ -2x + 6y + 3z = 32 \\ -5x + 3y - z = 42 \end{cases}.$$

4.16.

$$\begin{cases} 5x - 9y - 7z = 31 \\ -5x + 4y + z = -27 \\ -4x + y - 5z = -23 \end{cases}.$$

4.17.

$$\begin{cases} 4x - 9y - 6z = 29 \\ -6x + 2y - 2z = 34 \\ 3x + 3y + 4z = -39 \end{cases}.$$

4.18.

$$\begin{cases} 2x - 6y - 9z = -17 \\ -10x + 4y - z = -67 \\ -5x + 4y + z = -32 \end{cases}.$$

4.19.

$$\begin{cases} 5x - 7y - 3z = 14 \\ -5x - 3y - z = -30 \\ 4x + y + 4z = 18 \end{cases}.$$

4.20.

$$\begin{cases} 8x - 3y - 7z = -43 \\ -5x + 6y - 3z = 0 \\ x + 5y - 2z = 19 \end{cases}.$$

4.21.

$$\begin{cases} 3x - 6y + z = 16 \\ -8x - 2y + z = 47 \\ x + 6y - z = -36 \end{cases}.$$

4.22.

$$\begin{cases} x + y - 4z = -31 \\ -9x + y - 3z = -5 \\ -2x + 8y - 2z = -48 \end{cases}.$$

4.23.

$$\begin{cases} 5x - 6y - 7z = -21 \\ -6x + 4y - 5z = 59 \\ -x + 2y - z = 13 \end{cases}.$$

4.24.

$$\begin{cases} 10x - 8y + z = -59 \\ -5x + 4y + 2z = 17 \\ x + 7y - 3z = 33 \end{cases}.$$

4.25.

$$\begin{cases} x - 4y - z = 7 \\ -4x + y - 5z = -34 \\ -5x + 4y + 4z = -7 \end{cases}.$$

4.26.

$$\begin{cases} 4x + y - 9z = -1 \\ -7x + 5y - 3z = -44 \\ 3x + 3y + z = -2 \end{cases}.$$

4.27.

$$\begin{cases} 7x - 6y - 4z = -54 \\ -4x + 2y + 3z = 28 \\ -4x + 4y + z = 30 \end{cases}.$$

4.28.

$$\begin{cases} 10x - 7y - 5z = 83 \\ -8x + 5y + 2z = -62 \\ 2x + 7y + 3z = -21 \end{cases}.$$

4.29.

$$\begin{cases} 5x - 7y - 7z = -41 \\ -9x + 2y - 4z = -41 \\ 2x + 6y - 2z = 14 \end{cases}.$$

4.30.

$$\begin{cases} 5x - 5y - 9z = -59 \\ -9x + y + 4z = 9 \\ -2x + 9y - 2z = 11 \end{cases}.$$

4.31.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 14 \\ 3x - 4y + 2z = -25 \\ 7x - 6y + 4z = -43 \end{cases}.$$

Задача 5. Вычисление ранга матрицы.

Вычислить ранг матрицы, указать базисный минор и базисные строки.

5.1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -21 & 0 & -20 & -5 \\ 3 & 1 & 16 & -12 & 1 \\ 5 & -21 & 21 & -37 & -4 \end{pmatrix}$$

5.2.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 & 3 & 4 \\ -9 & 9 & 3 & -6 & -4 \\ -25 & 20 & 17 & -15 & -20 \\ 35 & -37 & -7 & 24 & 12 \end{pmatrix}$$

5.3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & 2 \\ 5 & -5 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -12 & -10 \end{pmatrix}$$

5.4.

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 23 & 18 & -18 & 1 & -5 \\ 28 & 24 & 3 & -4 & -4 \\ -18 & -14 & 9 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5.5.

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 & 0 & -4 \\ 18 & -10 & 16 & 1 & 12 \\ 10 & -50 & 20 & -5 & 20 \\ 29 & -5 & 23 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

5.6.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -4 & 0 \\ 12 & 15 & -2 & -17 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.7.

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 & -4 & -3 \\ 8 & -6 & 9 & 13 & 6 \\ 33 & 11 & -10 & 0 & 15 \\ -25 & -17 & 19 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

5.8.

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -5 & 4 & -2 & 2 & 0 \\ 11 & -1 & 7 & 1 & 3 \\ 29 & -18 & 15 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

5.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & -6 & -8 & -13 & -8 \\ -16 & 8 & 22 & 21 & -4 \\ -11 & 10 & 18 & 24 & 4 \end{pmatrix}$$

5.10.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 11 & 5 \\ 0 & -18 & -4 & -13 & -1 \end{pmatrix}$$

5.11.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ 19 & 7 & 7 & 2 & 12 \\ 10 & 6 & 8 & 2 & 8 \\ 15 & 9 & 12 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

5.12.

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & -15 & -3 & 12 & 3 \\ 14 & 26 & 2 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

5.13.

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & -5 & -4 \\ -1 & 17 & -4 & -12 & -12 \\ -3 & 1 & -12 & 14 & 4 \\ 3 & -31 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

5.14.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 5 & -2 \\ -9 & -5 & 0 & -4 & 2 \\ -25 & 0 & 6 & -25 & 10 \\ 37 & 15 & -7 & 22 & -10 \end{pmatrix}$$

5.15.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & -2 & -5 \\ 8 & 0 & -20 & -13 & -25 \\ 2 & 0 & 29 & 18 & 15 \\ 4 & 0 & -22 & -14 & -20 \end{pmatrix}$$

5.16.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 4 & -5 \\ -3 & 0 & -13 & 17 & -20 \\ 9 & 0 & 11 & 13 & -20 \\ 0 & 0 & -10 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

5.17.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -6 & -25 \\ -15 & 5 & 17 & -24 & -10 \\ -12 & 4 & 12 & -16 & 0 \end{pmatrix}$$

5.18.

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 11 & -10 & -6 & -13 & -8 \\ 9 & -2 & -7 & -7 & -8 \\ -20 & 12 & 19 & 20 & 16 \end{pmatrix}$$

5.19.

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -5 & 1 \\ 7 & 13 & -2 & 17 & -3 \\ -2 & 0 & -18 & -3 & -1 \\ -7 & -17 & 22 & -19 & 5 \end{pmatrix}$$

5.20.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -2 & -4 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 15 & 16 & 11 & 20 \\ -5 & -13 & -10 & -9 & -16 \end{pmatrix}$$

5.21.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & -5 & -5 \\ -2 & 13 & -30 & 22 & 25 \\ 10 & 1 & 42 & 0 & -15 \\ 0 & -3 & -1 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

5.22.

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 & -3 & 3 \\ -15 & 9 & 0 & -10 & 9 \\ 5 & -3 & -7 & 6 & -3 \\ 5 & -3 & 18 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

5.23.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & -12 & -8 & 0 & -4 \\ -11 & -19 & -10 & -16 & -5 \end{pmatrix}$$

5.24.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 1 & 6 & -9 & 1 & -8 \\ 2 & -18 & 12 & -4 & 8 \\ 9 & -11 & -16 & -4 & -20 \end{pmatrix}$$

5.25.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ -5 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ -5 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 15 & 10 & -15 & -24 & -20 \end{pmatrix}$$

5.26.

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 & -5 & -3 \\ 18 & 3 & 10 & 18 & 12 \\ -30 & -33 & 5 & -30 & -12 \\ 9 & -9 & 12 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

5.27.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 & -5 \\ 9 & -15 & 7 & 26 & -25 \\ -4 & 12 & 9 & -24 & 20 \\ -2 & 6 & -8 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

5.28.

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -4 & -3 & -3 \\ -7 & 9 & -13 & -12 & -9 \\ 6 & -5 & 13 & 9 & 6 \\ 13 & -14 & 22 & 21 & 15 \end{pmatrix}$$

5.29.

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & -1 & -1 \\ -8 & 0 & -12 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & -16 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.30.

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 5 & 0 & -4 \\ -15 & 26 & 27 & 4 & -20 \\ -26 & 18 & 16 & -8 & -16 \\ -1 & -6 & -7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

5.31.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 10 & 16 & -11 & 16 \\ 0 & -6 & 1 & -15 & 0 \\ -2 & 4 & 12 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Линейная зависимость векторов.

Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или нет. Если система линейно зависима, то найти коэффициенты линейной зависимости.

6.1.

$$x_1 = (-14; 14; -10; 3; -13; -13)$$

$$x_2 = (-12; 9; -15; 5; -4; 7)$$

$$x_3 = (4; 5; -14; -13; -10; -2)$$

$$x_4 = (-96; 33; -59; 91; 30; 97)$$

6.2.

$$x_1 = (-14; -17; -16; 12; -18; 8)$$

$$x_2 = (-11; 4; 15; -1; -10; -3)$$

$$x_3 = (-14; -9; 9; 12; 11; -7)$$

$$x_4 = (0; 8; 25; 0; 29; -15)$$

6.3.

$$x_1 = (19; 9; 2; -14; -5; 11)$$

$$x_2 = (-8; -10; -17; 12; 12; 15)$$

$$x_3 = (-4; 11; 0; 0; -2; 15)$$

$$x_4 = (7; 10; -15; -2; 5; 41)$$

6.4.

$$x_1 = (-22; 5; 23; 29; -48; 40)$$

$$x_2 = (0; 13; -9; -1; 11; -10)$$

$$x_3 = (-12; 8; 14; 18; -17; 18)$$

$$x_4 = (2; -11; -5; -7; -14; 4)$$

6.5.

$$x_1 = (-15; -1; 4; 17; -13; 5)$$

$$x_2 = (19; 16; -9; 5; 11; 15)$$

$$x_3 = (10; -3; 13; 18; 2; -15)$$

$$x_4 = (-1; 11; 12; 57; -13; 10)$$

6.6.

$$x_1 = (-11; 0; 0; -3; 16; -11)$$

$$x_2 = (19; 18; 15; 7; 17; 2)$$

$$x_3 = (-2; 18; 5; 14; 14; 16)$$

$$x_4 = (6; 36; 20; 18; 47; 7)$$

6.7.

$$\begin{aligned}x_1 &= (8; 9; 17; -17; 13; -6) \\x_2 &= (17; 6; -19; 15; -2; 11) \\x_3 &= (10; -3; -18; 19; 8; 7) \\x_4 &= (78; 45; 48; -45; 102; -15)\end{aligned}$$

6.9.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-16; -3; -12; -12; -15; 7) \\x_2 &= (1; -10; -4; -6; -13; -8) \\x_3 &= (-14; -12; 9; -15; 5; -4) \\x_4 &= (-72; -40; 53; -63; 51; -4)\end{aligned}$$

6.11.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-6; -14; 4; 9; 12; -6) \\x_2 &= (-2; -6; -11; -8; 1; 17) \\x_3 &= (4; 4; 0; 13; 3; 8) \\x_4 &= (2; -2; -63; -58; -19; 97)\end{aligned}$$

6.13.

$$\begin{aligned}x_1 &= (2; 15; -11; -12; -1; 0) \\x_2 &= (13; 3; 3; -12; -5; 1) \\x_3 &= (11; -11; 13; -6; -2; 3) \\x_4 &= (-11; 11; -13; 6; 2; -3)\end{aligned}$$

6.15.

$$\begin{aligned}x_1 &= (5; 3; 0; 6; -16; 15) \\x_2 &= (1; -11; 17; 6; 0; 2) \\x_3 &= (-18; -19; 2; 0; -17; 3) \\x_4 &= (-9; -60; 70; 30; -33; 26)\end{aligned}$$

6.8.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-17; -7; -7; 10; 9; -5) \\x_2 &= (16; -15; -18; 11; 1; -7) \\x_3 &= (19; 1; 8; 3; -4; -7) \\x_4 &= (-24; -61; -84; 47; 29; -17)\end{aligned}$$

6.10.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-14; -5; 11; 0; 13; -16) \\x_2 &= (7; 13; -16; -9; 6; -18) \\x_3 &= (-2; 19; -12; -7; 13; 17) \\x_4 &= (12; 45; -44; -25; 25; -19)\end{aligned}$$

6.12.

$$\begin{aligned}x_1 &= (17; -13; 0; -9; 9; -11) \\x_2 &= (1; -7; 11; -10; -7; -19) \\x_3 &= (5; -8; -2; 18; -5; 14) \\x_4 &= (36; -40; 22; -38; 4; -60)\end{aligned}$$

6.14.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-11; 8; -1; 10; 10; -13) \\x_2 &= (-6; -12; -2; 1; -4; 16) \\x_3 &= (-14; -3; -17; -19; -6; -1) \\x_4 &= (-96; -22; -46; 6; 12; 10)\end{aligned}$$

6.16.

$$\begin{aligned}x_1 &= (1; -4; -17; 7; 13; -2) \\x_2 &= (11; -18; -8; -13; 16; 10) \\x_3 &= (-16; 5; -5; -2; 15; 11) \\x_4 &= (-75; 78; 5; 55; -21; -20)\end{aligned}$$

6.17.

$$x_1 = (-18; -17; 19; -6; -16, -2)$$

$$x_2 = (-14; 10; 2; 6; 11; 9)$$

$$x_3 = (-8; 14; -18; 17; 14; 6)$$

$$x_4 = (28; 48; -56; 29; 46; 10)$$

6.19.

$$x_1 = (13; -13; 15; -8; -4; 5)$$

$$x_2 = (-14; -11; 4; -14; -14; 2)$$

$$x_3 = (-18; -5; 14; -14; -17; 10)$$

$$x_4 = (73; 25; -11; 48; 55; -11)$$

6.21.

$$x_1 = (-14; -14; 18; 16; -12; 19)$$

$$x_2 = (-1; -3; 16; 7; -13; -2)$$

$$x_3 = (15; 2; 18; 18; -1; 0)$$

$$x_4 = (17; -22; 90; 86; -27; 38)$$

6.23.

$$x_1 = (-17; 3; 6; 5; 7; 14)$$

$$x_2 = (8; -12; 5; -1; -13; -17)$$

$$x_3 = (3; -16; -12; 18; -6; 5)$$

$$x_4 = (-17; 60; 31; -53; 31; 2)$$

6.25.

$$x_1 = (-8; 15; -4; 4; -6; 19)$$

$$x_2 = (-11; 0; -19; -16; 8; -18)$$

$$x_3 = (-2; 15; -12; 18; -8; 7)$$

$$x_4 = (19; -45; -15; -14; 24; -87)$$

6.18.

$$x_1 = (-13; -16; 9; -6; -12; 2)$$

$$x_2 = (13; 6; -1; 7; 11; 10)$$

$$x_3 = (3; 13; 19; -2; 15; 11)$$

$$x_4 = (-6; -36; -30; 5; -31; -10)$$

6.20.

$$x_1 = (16; 5; -4; -1; -13; 3)$$

$$x_2 = (-6; -4; 1; -7; 17; -17)$$

$$x_3 = (-7; -17; 3; 12; 6; 8)$$

$$x_4 = (-57; 88; 6; -70; 32; -60)$$

6.22.

$$x_1 = (-10; 19; -19; 2; 15; 5)$$

$$x_2 = (-6; 0; -2; -9; 19; 4)$$

$$x_3 = (11; -8; -19; 9; -9; -6)$$

$$x_4 = (-35; 5; 72; -47; 50; 21)$$

6.24.

$$x_1 = (-19; 9; 14; 18; -11; 7)$$

$$x_2 = (15; -15; 17; 10; -6; 12)$$

$$x_3 = (17; -14; 6; -16; -2; 5)$$

$$x_4 = (28; -35; 54; 22; -25; 36)$$

6.26.

$$x_1 = (11; -6; -7; -16; 15; 12)$$

$$x_2 = (2; 3; -6; -4; 1; 7)$$

$$x_3 = (-15; -17; 10; 0; -6; -15)$$

$$x_4 = (44; -7; -19; -40; 49; 37)$$

6.27.

$$\begin{aligned}x_1 &= (3; 10; 5; 6; -9; -7) \\x_2 &= (-11; 1; -1; 3; -16; -7) \\x_3 &= (-13; 7; 9; 16; -11; -11) \\x_4 &= (-4; 12; 20; 26; 10; -8)\end{aligned}$$

6.29.

$$\begin{aligned}x_1 &= (19; 12; 8; -14; 17; -17) \\x_2 &= (-3; 13; 18; -1; -15; 11) \\x_3 &= (4; -9; -6; 19; 15; -1) \\x_4 &= (5; -5; 6; 37; 15; 9)\end{aligned}$$

6.31.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-8; 15; -4; 4; -6; 1) \\x_2 &= (-11; 0; -1; -6; 8; -8) \\x_3 &= (-2; 1; -12; 8; 8; 7) \\x_4 &= (7; 13; 21; -6; -30; -5)\end{aligned}$$

6.28.

$$\begin{aligned}x_1 &= (-19; 15; 2; -11; 11; 13) \\x_2 &= (1; -7; -16; -10; -12; -19) \\x_3 &= (-18; 1; 15; -11; -3; 12) \\x_4 &= (-21; 22; 63; 19; 33; 69)\end{aligned}$$

6.30.

$$\begin{aligned}x_1 &= (8; -5; 17; -7; -12; 15) \\x_2 &= (-15; -2; 11; -11; -14; 6) \\x_3 &= (18; -2; 1; 18; 10; 0) \\x_4 &= (-2; -8; 33; -32; -34; 30)\end{aligned}$$

Задача 7. Исследование совместности системы линейных алгебраических уравнений.

Исследовать систему алгебраических уравнений на совместность с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

7.1.

$$\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 29 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 7x_2 - 13x_3 + 5x_4 = 43 \end{cases}$$

7.2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 17 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -20 \\ 11x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 45 \end{cases}$$

7.3.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 17 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 11 \\ 2x_1 + 12x_2 + 15x_3 = 63 \end{cases}$$

7.4.

$$\begin{cases} x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -6 \\ 4x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -6 \end{cases}$$

7.5.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 23 \\ 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 29 \end{cases}$$

7.6.

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 24 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = -6 \\ -12x_1 - 12x_2 + 12x_4 = 25 \end{cases}$$

7.7.

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 18 \\ 7x_1 - 9x_3 = -21 \end{cases}$$

7.8.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 - 5x_4 = -5 \\ 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 6 \\ 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 15x_4 = 17 \end{cases}$$

7.9.

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4 \\ -5x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5 \\ 7x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

7.10.

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 19 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 11 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 13 \end{cases}$$

7.11.

$$\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -8 \\ -4x_1 + 4x_3 - x_4 = 36 \\ 8x_1 - 8x_3 + 2x_4 = -72 \end{cases}$$

7.13.

$$\begin{cases} -3x_1 - x_3 - 5x_4 = 17 \\ -5x_2 - 2x_3 + x_4 = 17 \\ -6x_1 - 15x_2 - 8x_3 - 7x_4 = 86 \end{cases}$$

7.15.

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 - 4x_4 = -4 \\ 2x_3 + x_4 = 7 \\ 12x_1 - 2x_3 + 17x_4 = 23 \end{cases}$$

7.17.

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_3 = -15 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = -24 \\ 23x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

7.19.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 15 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ -19x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 40 \end{cases}$$

7.21.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_3 = -28 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ -x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -35 \end{cases}$$

7.12.

$$\begin{cases} -5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -9 \end{cases}$$

7.14.

$$\begin{cases} -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 27 \\ -4x_1 + 4x_2 = -24 \\ 12x_1 - 10x_2 - 4x_3 - x_4 = 44 \end{cases}$$

7.16.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 34 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -7 \\ 13x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 47 \end{cases}$$

7.18.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 10 \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 18 \\ -7x_1 + x_2 - 3x_3 + 15x_4 = 3 \end{cases}$$

7.20.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_3 - 4x_4 = -22 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 25 \\ 15x_1 - 25x_2 - 20x_4 = 15 \end{cases}$$

7.22.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7 \\ 6x_2 + 11x_3 + x_4 = 29 \end{cases}$$

7.23.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 15 \\ 4x_1 + 5x_3 - 5x_4 = -24 \\ 4x_2 + 17x_3 + 7x_4 = -73 \end{cases}$$

7.24.

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 29 \\ -2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = -10 \\ -16x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases}$$

7.25.

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_3 + 4x_4 = -10 \\ 2x_2 = -8 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 33 \end{cases}$$

7.26.

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 4x_4 = -4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -4 \\ 6x_2 - 7x_4 = 29 \end{cases}$$

7.27.

$$\begin{cases} 3x_3 - 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 10 \\ 15x_1 + 10x_2 - 15x_3 = 6 \end{cases}$$

7.28.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 22 \\ -7x_2 + 9x_3 + 9x_4 = -11 \end{cases}$$

7.29.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 15 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 11 \\ 7x_1 - x_3 + 9x_4 = 59 \end{cases}$$

7.30.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 12 \\ 5x_1 + 5x_3 - 2x_4 = -20 \\ -10x_2 - 40x_3 - 9x_4 = 121 \end{cases}$$

7.31.

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 - 3x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Задача 8. Решение системы однородных линейных алгебраических уравнений.

Решить систему линейных алгебраических уравнений: построить фундаментальную систему решений и выписать общее решение.

8.1.

$$\begin{cases} -9x - 4y - 3z + 7u + 10v = 0 \\ x + 2y + z - u - 2v = 0 \\ -16x - 8y - 6z + 12u + 18v = 0 \\ -3x - 2y - z + 3u + 4v = 0 \end{cases}$$

8.2

$$\begin{cases} 6x + 3y + z - 7u - 7v = 0 \\ 4x + 2z - 10u - 10v = 0 \\ -8x - 7y + z + u + v = 0 \\ y - z + 3u + 3v = 0 \end{cases}$$

8.3.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2u + 1v = 0 \\ x - y + z + 2u = 0 \\ -x - 6y + 4z + 2u - 3v = 0 \\ y - z + v = 0 \end{cases}$$

8.4

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + 2v = 0 \\ -3x - 3y - z + 2u + 2v = 0 \\ 17x + 13y + 3z - 2u + 2v = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

8.5.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 2u + 2v = 0 \\ 12x + 5y + 6z + 8u + 8v = 0 \\ 13x + 5y + 5z + 8u + 8v = 0 \\ 5x + 2y + 3z + 4u + 4v = 0 \end{cases}$$

8.6

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + 3u + 3v = 0 \\ 3x + 3y + z - u - v = 0 \\ 15x + 11y + 3z + 5u + 5v = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

8.7.

$$\begin{cases} 6x + 3y + z + u + 10v = 0 \\ 4x + 2z = 0 \\ 4x + 2y + z + 6v = 0 \\ y - z + u + 4v = 0 \end{cases}$$

8.8

$$\begin{cases} 9x + 4y + 3z - 10u - 10v = 0 \\ x + 2y + z - 2u - 2v = 0 \\ 7x + 4y + 3z - 8u - 8v = 0 \\ 3x + 2y + z - 4u - 4v = 0 \end{cases}$$

8.9.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4u + 4v = 0 \\ x - y + z + 2u + v = 0 \\ x + 6y - 4z + 4v = 0 \\ y - z + v = 0 \end{cases}$$

8.11.

$$\begin{cases} z + u + v = 0 \\ 8x + 3y + 4z + 9u + 6v = 0 \\ 11x + 4y + 4z + 11u + 7v = 0 \\ 3x + y + 2z + 4u + 3v = 0 \end{cases}$$

8.13.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4u - v = 0 \\ x - y + z + u + v = 0 \\ x + 6y - 4z + 4u - 3v = 0 \\ y - z + u = 0 \end{cases}$$

8.15.

$$\begin{cases} 9x + 4y + 3z - 7u - 7v = 0 \\ x + 2y + z - u - v = 0 \\ 7x + 4y + 3z - 5u - 5v = 0 \\ 3x + 2y + z - 3u - 3v = 0 \end{cases}$$

8.17.

$$\begin{cases} 3x + y - 4u + 5v = 0 \\ 3x + y + 4z + 13v = 0 \\ 8x + 3y + z - 9u + 16v = 0 \\ 3x + y + 2z - 2u + 9v = 0 \end{cases}$$

8.10

$$\begin{cases} 3x + y + 5u + 2v = 0 \\ 3x + y + 4z + 13u + 10v = 0 \\ 8x + 3y + z + 16v + 7v = 0 \\ 3x + y + 2z + 9u + 6v = 0 \end{cases}$$

8.12

$$\begin{cases} 3x + 2y - u + 2v = 0 \\ x - y + z + u + 2v = 0 \\ 4x + 7y - 3z - 4u = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

8.14

$$\begin{cases} 9x + 4y + 3z - 7u - 10v = 0 \\ x + 2y + z - u - 2v = 0 \\ 8x + 4y + 3z - 6u - 9v = 0 \\ 3x + 2y + z - 3u - 4v = 0 \end{cases}$$

8.16

$$\begin{cases} 9x + 4y + 3z - 7u - 7v = 0 \\ x + 2y + z - u - v = 0 \\ 8x + 4y + 3z - 6u - 6v = 0 \\ 3x + 2y + z - 3u - 3v = 0 \end{cases}$$

8.18

$$\begin{cases} 9x + 4y + 3z - 7u - 10v = 0 \\ x + 2y + z - u - 2v = 0 \\ 7x + 4y + 3z - 5u - 8v = 0 \\ 3x + 2y + z - 3u - 4v = 0 \end{cases}$$

8.19.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4u - v = 0 \\ x - y + z + u + v = 0 \\ 5x + 6y - 2z + 8u - 3v = 0 \\ y - z + u = 0 \end{cases}$$

8.21.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4u + 2v = 0 \\ x - y + z + u + 3v = 0 \\ 4x + 7y - 3z + 7u - 3v = 0 \\ y - z + u - v = 0 \end{cases}$$

8.23.

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + u + 5v = 0 \\ 3x + 3y + z - u + v = 0 \\ 9x + 7y + 2z + 7v = 0 \\ x + y + v = 0 \end{cases}$$

8.25.

$$\begin{cases} 3x + y - 7u + 5v = 0 \\ 11x + 4y + 5z - 16u + 29v = 0 \\ 11x + 4y + z - 24u + 21v = 0 \\ 3x + y + 2z - 3u + 9v = 0 \end{cases}$$

8.27.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 2u + 2v = 0 \\ 12x + 5y + 6z + 8u + 8v = 0 \\ 3x + y + z + 2u + 2v = 0 \\ 5x + 2y + 3z + 4u + 4v = 0 \end{cases}$$

8.20

$$\begin{cases} 9x + 4y + 3z - 7u - 7v = 0 \\ x + 2y + z - u - v = 0 \\ 7x + 4y + 3z - 5u - 5v = 0 \\ 3x + 2y + z - 3u - 3v = 0 \end{cases}$$

8.22

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + 3v = 0 \\ 3x + 3y + z - 2u - v = 0 \\ 10x + 8y + 2z - 2u + 2v = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

8.24

$$\begin{cases} 3x + 2y + u + 4v = 0 \\ x - y + z + 2v = 0 \\ x + 6y - 4z + 3u = 0 \\ y - z + u = 0 \end{cases}$$

8.26

$$\begin{cases} 3x + y - 4u + 5v = 0 \\ 11x + 4y + 5z - 4u + 29v = 0 \\ 8x + 3y + z - 8u + 16v = 0 \\ 3x + y + 2z + 9v = 0 \end{cases}$$

8.28

$$\begin{cases} z + u + 2v = 0 \\ 8x + 3y + 4z + 17u + 13v = 0 \\ 6x + 2y + 2z + 12u + 8v = 0 \\ 3x + y + 2z + 7u + 6v = 0 \end{cases}$$

8.29.

$$\begin{cases} 3x + y + 2u + 2v = 0 \\ 11x + 4y + 5z + 12u + 17v = 0 \\ 20x + 7y + 7z + 20u + 27v = 0 \\ 3x + y + 2z + 4u + 6v = 0 \end{cases}$$

8.30

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2u + 2v = 0 \\ x - y + z + 3u + 3v = 0 \\ -2x - 5y + 3z + 3u + 3v = 0 \\ y - z - u - v = 0 \end{cases}$$

8.31.

$$\begin{cases} 5x + 3y + z - 2u + 5v = 0 \\ 3x + 3y + z - 4u + v = 0 \\ 5x + 4y + z - 4u + 4v = 0 \\ x + y - u + v = 0 \end{cases}$$

Задача 9. Решение системы неоднородных линейных алгебраических уравнений.

Найти общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

9.1.

$$\begin{cases} 11x + 5y + 3z + 48u + 101v = 63 \\ -3x + y - z + 2u - 19v = -5 \\ 5x + 7y + z + 52u + 63v = 53 \\ x + y + 6u + 10v = 6 \end{cases}$$

9.2.

$$\begin{cases} 5x + 3y + z + 3u - 28v = -18 \\ -3x - 3y - z + u + 22v = -8 \\ 4x - 4y + 2z + 14u + 2v = -78 \\ 2x + 2y - 14v = -2 \end{cases}$$

9.3.

$$\begin{cases} 5x + 3y - 36u - 4v = -58 \\ 5x + 3z - 18u - 31v = -67 \\ 4x - 4y + 8z + 8u - 72v = -80 \\ -x + y - 2z - 2u + 18v = 20 \end{cases}$$

9.4.

$$\begin{cases} -3x - 4y - z + 22u + 8v = -52 \\ 9x + 6y + 3z - 42u + 12v = 30 \\ 9x + 2y + 5z - 44u + 38v = -10 \\ 9x + 6y + 3z - 42u + 12v = 30 \end{cases}$$

9.5.

$$\begin{cases} 5x - y + 2z + 19u + 6v = 7 \\ 4x + 5y - z + u + 12v = -23 \\ 25x + 9y + 12z + 69u + 6v = 57 \\ 7x + 5y + 2z + 13u + 6v = 1 \end{cases}$$

9.7.

$$\begin{cases} 19x + 7y + 9z - 41u + 60v = 45 \\ -9x - 5y - 7z + 15u - 52v = 73 \\ 23x + 7y + 13z - 49u + 88v = 29 \\ 5x + 2y + 3z - 10u + 21v = -6 \end{cases}$$

9.9.

$$\begin{cases} -11x - 5y - 3z - 24u - 2v = 25 \\ -3x + y - z + 2u - 2v = 65 \\ 2x + 2y + 6u - 4v = 50 \\ 12x + 6y + 3z + 27u = 0 \end{cases}$$

9.11.

$$\begin{cases} -12x - 4y - 4z + 68u - 48v = 20 \\ -3x + z + 8u - 26v = 6 \\ -5x - 4y - 9z + 52u + 34v = 14 \\ -5x - 2y - 3z + 32u - 10v = 10 \end{cases}$$

9.13.

$$\begin{cases} 18x + 7y + 10z - 53u - 40v = 47 \\ 24x + 11y + 14z - 67u - 68v = 61 \\ 3x + 2y + 2z - 7u - 14v = 7 \\ 15x + 6y + 9z - 45u - 36v = 39 \end{cases}$$

9.6.

$$\begin{cases} 8x + y + z + 44u - 15v = -35 \\ 8x + 7y + 4z + 59u - 33v = 1 \\ 9x - 3y + 42u - 12v = -21 \\ 7x + 5y + 2z + 46u - 18v = -49 \end{cases}$$

9.8.

$$\begin{cases} -x + z - u + 4v = 1 \\ 15x + 6y + 7z + 51u - 68v = 33 \\ 8x + 4y + 10z + 42u - 44v = 54 \\ 5x + 2y + 3z + 19u - 24v = 17 \end{cases}$$

9.10.

$$\begin{cases} x + 2z + 6u - 9v = 31 \\ 9x + 3y + 5z + 46u - 31v = 3 \\ 15x + 3y + 13z + 74u - 65v = 93 \\ 4x + y + 3z + 20u - 16v = 16 \end{cases}$$

9.12.

$$\begin{cases} 9x + 5y + 3z + 4u + 22v = 23 \\ 2x + 2y + 2z + 16u = -50 \\ 3x + 2y + z + 3u + 8v = 5 \\ 3x + 2y + z + 3u + 8v = 5 \end{cases}$$

9.14.

$$\begin{cases} 4x + 2y + z - 19u - 33v = -19 \\ -y + 4u + 5v = 1 \\ -10x - 3y - 2z + 42u + 69v = 63 \\ x + y - 8u - 9v = -14 \end{cases}$$

9.15.

$$\begin{cases} 5x - y + 2z - 12u - 32v = 43 \\ 22x + 9y + 9z + 28u - 60v = -1 \\ 3x + y + z + 2u - 10v = 6 \\ -7x - 5y - 2z - 20u + 8v = 19 \end{cases}$$

9.17.

$$\begin{cases} 9x + 4y + 6z - 22u + 41v = -2 \\ -13x - 6y - 6z + 28u - 45v = -6 \\ -7x - 3y - z + 9u - 14v = 11 \\ 12x + 5y + 7z - 25u + 51v = -21 \end{cases}$$

9.19.

$$\begin{cases} x + 2z - 9u + 12v = 87 \\ 9x + 3y + 5z - 24u - 8v = -3 \\ -6x - 2y - 2z + 12u + 16v = 74 \\ 4x + y + 3z - 15u + 4v = 50 \end{cases}$$

9.21.

$$\begin{cases} 8x + y + 3z + 38u - 37v = 17 \\ 11x + 5y + 4z + 37u - 39v = 26 \\ 2x - y + z + 16u - 15v = 5 \\ 4x + 3y + z + 6u - 7v = 7 \end{cases}$$

9.23.

$$\begin{cases} 22x + 9y + 10z + 30u - 119v = 48 \\ 16x + 9y + 10z + 48u - 107v = 18 \\ 3x + 3y + 3z + 21u - 30v = -3 \\ 13x + 6y + 7z + 27u - 77v = 21 \end{cases}$$

9.16.

$$\begin{cases} -6x - 2y - 3z + 10u - 26v = 6 \\ 6x + 3y + 6z - 21u + 9v = -12 \\ -6x - 2y - 5z + 22u - 10v = 10 \\ -3x - y - 2z + 8u - 9v = 4 \end{cases}$$

9.18.

$$\begin{cases} 5x + 3y - 16u + 13v = -32 \\ 5x + 3z + 17u + 7v = -20 \\ 5x + 3y - 16u + 13v = -32 \\ -x + y - 2z - 16u + 3v = 2 \end{cases}$$

9.20.

$$\begin{cases} 6x + 3y + 4z + 53u - 12v = -20 \\ -11x - 5y - 5z - 83u + 8v = 34 \\ -6x - 3y - 4z - 58u + 12v = 20 \\ 9x + 4y + 5z + 72u - 12v = -30 \end{cases}$$

9.22.

$$\begin{cases} 10x + 4y + 3z + 27u + 37v = 15 \\ 6x + y + 2z + 18u + 29v = 15 \\ 4x + 3y + z + 9u + 8v = 0 \\ x + y + 3u + v = 6 \end{cases}$$

9.24.

$$\begin{cases} 17x + 7y + 8z - 3u - 115v = -36 \\ 2x - y - z + 5u - 2v = 22 \\ x - y - 2z + 3u + 7v = 24 \\ 11x + 5y + 6z - 3u - 79v = -32 \end{cases}$$

9.25.

$$\begin{cases} 4x + 3z + 10u - 11v = 8 \\ 4x + 3y - 17u + 13v = -40 \\ 14x - 3y + 15z + 65u - 70v = 94 \\ x - y + 2z + 12u - 12v = 21 \end{cases}$$

9.26.

$$\begin{cases} 19x + 7y + 9z - 53u + 94v = 6 \\ -9x - 5y - 7z + 23u - 38v = 18 \\ -13x - 8y - 11z + 33u - 53v = 30 \\ 5x + 2y + 3z - 13u + 23v = -6 \end{cases}$$

9.27.

$$\begin{cases} 3x + y - 16u - v = -31 \\ 11x + 4y + 5z - 51u + 33v = -51 \\ -7x - 3y - 4z + 34u - 29v = 25 \\ -3x - y - 2z + 12u - 13v = 5 \end{cases}$$

9.28.

$$\begin{cases} 17x + 6y + 7z + 71u - 85v = 61 \\ 3x - z + 11u + 7v = 95 \\ 9x + 3y + 4z + 40u - 46v = 43 \\ -5x - 2y - 3z - 23u + 33v = 3 \end{cases}$$

9.29.

$$\begin{cases} 3x + y + 17u + 11v = -6 \\ 11x + 4y + 5z + 73u + 73v = -90 \\ 8x + 3y - z + 44u + 20v = 6 \\ -3x - y - 2z - 21u - 25v = 36 \end{cases}$$

9.30.

$$\begin{cases} 17x + 7y + 8z - 3u - 115v = -36 \\ -15x - 8y - 9z + 8u + 113v = 73 \\ x - y - 2z + 3u + 7v = 24 \\ 11x + 5y + 6z - 3u - 79v = -32 \end{cases}$$

9.31.

$$\begin{cases} 5x + 4y + z - u + 3v = 12 \\ x - 2z + 7u - v = 3 \\ 3x + 4y + 5z + 15u + 5v = 6 \\ x - z + 9u - 3v = 1 \end{cases}$$

Задача 10. Алгебраические операции над комплексными числами.

Вычислить комплексное число. Ответ записать в алгебраической форме.

10.1.

$$\left(\frac{1}{1+4i^{15}}\right)^2 + \frac{1}{1-3i^{20}}$$

10.2.

$$\left(\frac{i^5+3}{1-i^{19}}\right)^3 + \frac{1}{3i^{41}+2}$$

10.3.

$$\left(\frac{5+2i^7}{2+i^{11}}\right)^4 + \frac{3}{2i^{35}-1}$$

10.4.

$$\left(\frac{1}{1-5i^{20}}\right)^3 - \frac{2}{4i^{21}+1}$$

10.5.

$$\left(\frac{i^5}{2+2i^{17}}\right)^3 + \frac{2}{5i^{15}-1}$$

10.6.

$$\left(\frac{i^3}{1-2i^{15}}\right)^2 - \frac{2i}{4i^{15}+1}$$

10.7.

$$\left(\frac{2}{2-3i^{11}}\right)^3 + \frac{2}{3i^{22}-2}$$

10.8.

$$\left(\frac{4i}{1+2i^{15}}\right)^4 + \frac{5}{2i^{37}+1}$$

10.9.

$$\left(\frac{-i^6}{1+3i^{23}}\right)^4 - \frac{2i}{5i^{12}-1}$$

10.10.

$$\left(\frac{i}{2+5i^{16}}\right)^3 - \frac{1}{2i^{15}+1+i}$$

10.11.

$$\left(\frac{1}{3-2i^{20}}\right)^2 + \frac{2}{3i^{25}+2}$$

10.12.

$$\left(\frac{i^3}{2-i^{15}}\right)^2 + \frac{3i}{2i^{37}-5}$$

10.13.

$$\left(\frac{i}{2+5i^{25}}\right)^2 + \frac{1}{i^{17}+2}$$

10.14.

$$\left(\frac{i}{2+3i^{29}}\right)^3 - \frac{i}{3i^{11}+5}$$

10.15.

$$\left(\frac{4}{5-2i^{18}}\right)^2 + \frac{2}{4i^{21}-3}$$

10.17.

$$\left(\frac{i}{2-3i^{29}}\right)^2 - \frac{2i}{5i^{21}-1}$$

10.19.

$$\left(\frac{2+i}{2-i^{25}}\right)^3 + \frac{2i}{5i^{14}-2}$$

10.21.

$$\left(\frac{2}{5+i^{24}}\right)^2 + \frac{3i}{5i^{21}-2}$$

10.23.

$$\left(\frac{-2+i}{1+i^5}\right)^4 + \frac{2i-1}{5i^{100}-2}$$

10.25.

$$\left(\frac{1}{1+2i^{37}}\right)^2 + \frac{2i}{8i^{50}+1}$$

10.27.

$$\left(\frac{i}{2+3i^{28}}\right)^3 + \frac{5i}{i^5+3}$$

10.16.

$$\left(\frac{1}{2+3i^{10}}\right)^3 + \frac{3i}{2i^{17}-1}$$

10.18.

$$\left(\frac{1+i^3}{2-i^{17}}\right)^2 + \frac{1}{2i^{17}+3}$$

10.20.

$$\left(\frac{1}{1-i^{37}}\right)^4 - \frac{5}{2i^{22}+3}$$

10.22.

$$\left(\frac{1+i}{2+i^{35}}\right)^3 - \frac{2}{6i^{25}-3}$$

10.24.

$$\left(\frac{i}{1+3i^{34}}\right)^2 + \frac{3}{7i^{45}+1}$$

10.26.

$$\left(\frac{1}{3+i^{21}}\right)^3 + \frac{3}{6i^{23}+5}$$

10.28.

$$\left(\frac{1+2i}{1+3i^{41}}\right)^2 + \frac{i}{i^{19}+4}$$

10.29.

$$\left(\frac{1+4i}{1+2i^{33}}\right)^3 + \frac{1+i}{2i^{41}-1}$$

10.30.

$$\left(\frac{2-2i}{1+5i^{32}}\right)^2 + \frac{2-i}{5i^{41}+2}$$

10.31.

$$\left(\frac{1-i}{1+2i^{17}}\right)^4 + \frac{3+i}{2i^{25}+1}$$

Задача 11. Алгебраические операции над комплексными числами.

Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить комплексное число w и записать ответ в алгебраической форме.

$$11.1. \quad z_1 = -\sqrt{3} + i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad w = z_1 \overline{z_2}.$$

$$11.2. \quad z_1 = 2\sqrt{3} - 2i; \quad z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}; \quad w = (z_2)^2 / z_1.$$

$$11.3. \quad z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \quad z_2 = \sqrt{3} + i; \quad w = z_1 / (z_2)^2.$$

$$11.4. \quad z_1 = \sqrt{5} + i\sqrt{5}; \quad z_2 = 4\sqrt{3} - 4i; \quad w = (z_1)^2 \overline{z_2}.$$

$$11.5. \quad z_1 = 2 + 2i; \quad z_2 = 4 - 4\sqrt{3}i; \quad w = z_1 / (z_2)^2.$$

$$11.6. \quad z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i; \quad z_3 = \sqrt{3} + i; \quad w = z_1 \overline{z_2} z_3.$$

$$11.7. \quad z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}; \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i; \quad w = \overline{z_1} (z_2)^2.$$

$$11.8. \quad z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = 1 - i; \quad w = z_1 (\overline{z_2})^2.$$

$$11.9. \quad z_1 = 1 - 2i; \quad z_2 = 1 + i; \quad z_3 = 1 + \sqrt{3}i; \quad w = z_1 \overline{z_2} z_3.$$

$$11.10. \quad z_1 = 1 + i; \quad z_2 = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}i; \quad w = (z_2)^2 / z_1.$$

$$11.11. \quad z_1 = 1 - i; \quad z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i; \quad w = z_1^2 \overline{z_2}.$$

$$11.12. \quad z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i; \quad z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}; \quad w = z_1 \overline{z_2} z_3.$$

$$11.13. \quad z_1 = 1 + i; \quad z_2 = \sqrt{3} - i; \quad w = z_1 (\overline{z_2})^2.$$

$$11.14. \quad z_1 = 1 - i; \quad z_2 = \sqrt{3} + i; \quad w = (z_1)^2 / z_2.$$

- 11.15. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i; \quad z_2 = 1 - i; \quad w = (z_1)^3 z_2.$
- 11.16. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i; \quad w = \overline{z_1}/(z_2)^2.$
- 11.17. $z_1 = 5 + i; \quad z_2 = \sqrt{3} + i; \quad w = z_1(\overline{z_2})^3.$
- 11.18. $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_3 = 2i; \quad w = \overline{z_1} z_2 z_3.$
- 11.19. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i; \quad w = z_1(\overline{z_2})^2.$
- 11.20. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i; \quad w = \overline{z_1} z_2 z_3.$
- 11.21. $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = \sqrt{3} - i; \quad w = (z_1)^3 \overline{z_2}.$
- 11.22. $z_1 = 4 + 4i; \quad z_2 = -\sqrt{3} + i; \quad w = \overline{z_1}/(z_2)^2.$
- 11.23. $z_1 = 2 + 2i; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3}; \quad w = \overline{z_1}(z_2)^3.$
- 11.24. $z_1 = 5 - 5i; \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_3 = \sqrt{3} + i; \quad w = \overline{z_1} z_2 z_3.$
- 11.25. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = 2 + 2i; \quad w = \overline{z_1}(z_2)^3.$
- 11.26. $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad z_3 = \sqrt{3} + i; \quad w = z_1 \overline{z_2}/z_3.$
- 11.27. $z_1 = 1 - i; \quad z_2 = -\sqrt{3} + i; \quad w = (\overline{z_1})^3 z_2.$
- 11.28. $z_1 = 1 + i; \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_3 = -1 + i\sqrt{3}; \quad w = z_1 \overline{z_2}/z_3.$
- 11.29. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = 2 - 2i; \quad w = (z_1)^3 \overline{z_2}.$
- 11.30. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i; \quad z_2 = 1 + i; \quad w = \overline{z_1}/(z_2)^3.$
- 11.31. $z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad z_2 = 4 - 4i; \quad w = z_2/(\overline{z_1})^3.$

Задача 12. Возведение комплексного числа в степень.

Вычислить комплексное число z , используя формулу Муавра. Записать результат в алгебраической форме.

- 12.1. $(1 - i)^6(1 + i\sqrt{3})^{20}.$ 12.2. $(1 + i\sqrt{3})^{15}/(\sqrt{8} - \sqrt{8}i)^4.$
- 12.3. $(2 + 2i)^7/(1 - i\sqrt{3})^{20}.$ 12.4. $(1 + i)^{15}(2 - 2i\sqrt{3})^{10}.$
- 12.5. $(2 - 2i)^8(\sqrt{3} + i)^{20}.$ 12.6. $(1 - \sqrt{3}i)^{20}(1 - i)^{17}.$
- 12.7. $(\sqrt{3} - i)^{20}(1 + i)^{15}.$ 12.8. $(\sqrt{3} + i)^{10}/(2 - 2i)^3.$

- 12.9.** $(\sqrt{3} + i)^{10}(2 + 2i)^5$. **12.10.** $(1 + \sqrt{3}i)^5(1 - i)^{10}$.
12.11. $(2 + 2i)^5/(1 - \sqrt{3}i)^{10}$. **12.12.** $(1 + \sqrt{3}i)^{20}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^5$.
12.13. $(1 - i)^{15}(2 - 2\sqrt{3}i)^{10}$. **12.14.** $(1 + i)^{20}/(\sqrt{3} - i)^{15}$.
12.15. $(1 + i)^5(1 + i\sqrt{3})^{10}$. **12.16.** $(\sqrt{3} - i)^5(2 + 2i)^{10}$.
12.17. $(\sqrt{3} + i)^{10}(1 + i)^6$. **12.18.** $(1 - i)^7(1 + i\sqrt{3})^6$.
12.19. $(2 - 2i)^{10}/(1 - i\sqrt{3})^7$. **12.20.** $(2 - 2i)^{10}(\sqrt{3} + i)^5$.
12.21. $(\sqrt{3} - i)^7/(3 - 3i)^5$. **12.22.** $(\sqrt{3} - i)^{10}(1 - i)^8$.
12.23. $(2 + 2i)^{10}/(\sqrt{3} + i)^{12}$. **12.24.** $(1 + i)^9(\sqrt{3} + i)^5$.
12.25. $(2 + 2i)^7/(-1 + i\sqrt{3})^8$. **12.26.** $(1 + i\sqrt{3})^9(1 + i)^8$.
12.27. $(-1 + i\sqrt{3})^7/(1 - i)^8$. **12.28.** $(1 + i\sqrt{3})^5(1 - i)^{10}$.
12.29. $(\sqrt{3} + i)^8/(1 + i)^7$. **12.30.** $(2 - 2i)^{10}/(1 + i\sqrt{3})^6$.
12.31. $(1 + i\sqrt{3})^7/(1 - i)^6$.

Задача 13. Вычисление корня из комплексного числа.

Вычислить все значения корня и изобразить их на комплексной плоскости.

- 13.1.** $\sqrt[5]{-10}$. **13.2.** $\sqrt[5]{1 + i\sqrt{3}}$. **13.3.** $\sqrt[6]{\sqrt{3} - i}$.
13.4. $\sqrt[4]{-5}$. **13.5.** $\sqrt[5]{1 - i}$. **13.6.** $\sqrt[5]{2 - 2i}$.
13.7. $\sqrt[4]{-i}$. **13.8.** $\sqrt[6]{\sqrt{3} + i}$. **13.9.** $\sqrt[6]{1 - i}$.
13.10. $\sqrt[7]{1 + i\sqrt{3}}$. **13.11.** $\sqrt[4]{1 + i}$. **13.12.** $\sqrt[6]{-6}$.
13.13. $\sqrt[6]{2 + 2i}$. **13.14.** $\sqrt[5]{1 - i\sqrt{3}}$. **13.15.** $\sqrt[6]{-3i}$.
13.16. $\sqrt[7]{-2 + 2i}$. **13.17.** $\sqrt[5]{-4 + 4i}$. **13.18.** $\sqrt[7]{-7}$.

- 13.19.** $\sqrt[5]{-1+i}$. **13.20.** $\sqrt[3]{-1/27}$. **13.21.** $\sqrt[4]{-i/16}$.
13.22. $\sqrt[5]{2-2i\sqrt{3}}$. **13.23.** $\sqrt[4]{4-4i}$. **13.24.** $\sqrt[5]{5+5i}$.
13.25. $\sqrt[7]{7i}$. **13.26.** $\sqrt[5]{5-5i}$. **13.27.** $\sqrt[5]{-32}$.
13.28. $\sqrt[4]{1/81}$. **13.29.** $\sqrt[6]{-64i}$. **13.30.** $\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$.
13.31. $\sqrt[5]{-\sqrt{3}+i}$.

Задача 14. Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

14.1.

$$\begin{pmatrix} -2 & -12 & -24 \\ -4 & -4 & -6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

14.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -1 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

14.3.

$$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

14.4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 12 & 24 \\ 3 & -1 & -3 \\ -3 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

14.5.

$$\begin{pmatrix} -2 & -12 & -12 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

14.6.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ -6 & -7 & -24 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

14.7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -8 \\ 2 & 9 & 10 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

14.8.

$$\begin{pmatrix} 7 & 14 & 8 \\ -8 & -15 & -8 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

14.9.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -8 \\ -4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

14.10.

$$\begin{pmatrix} 11 & 18 & -9 \\ -4 & -7 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

14.11.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 8 \\ -6 & -6 & -11 \end{pmatrix}$$

14.12.

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ 6 & 11 & 6 \\ -6 & -6 & -13 \end{pmatrix}$$

14.13.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -5 & -7 & -6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

14.14.

$$\begin{pmatrix} -2 & -18 & -21 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

14.15.

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

14.16.

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -6 \\ 3 & 2 & 3 \\ -8 & -16 & -7 \end{pmatrix}$$

14.17.

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -10 \\ -3 & -1 & -8 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

14.18.

$$\begin{pmatrix} -1 & -8 & -19 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

14.19.

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

14.20.

$$\begin{pmatrix} 5 & 18 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \\ -6 & -12 & -11 \end{pmatrix}$$

14.21.

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -3 \\ -4 & -9 & -9 \\ 6 & 18 & 16 \end{pmatrix}$$

14.22.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 30 \\ -3 & -3 & -11 \end{pmatrix}$$

14.23.

$$\begin{pmatrix} -13 & -9 & -4 \\ 14 & 10 & 4 \\ -7 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

14.24.

$$\begin{pmatrix} -2 & -18 & -12 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

14.25.

$$\begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -4 & -12 & -9 \end{pmatrix}$$

14.26.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ -6 & -9 & -6 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

14.27.

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 15 \\ -4 & -9 & -18 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

14.28.

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ 3 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & -10 \end{pmatrix}$$

14.29.

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & -8 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

14.30.

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & -24 \\ -3 & -3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

14.31.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Произведение матриц какого порядка определено?
2. Какие преобразования матрицы не изменяют её определитель?
3. Пусть даны две квадратные матрицы. Как проверить, являются ли они взаимно обратными?
4. Какое количество решений может иметь система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей?
5. Какие преобразования матрицы не изменяют её ранг?
6. Какие системы векторов называются линейно зависимыми?
7. Всегда ли системы линейных однородных алгебраических уравнений имеют нетривиальное решение?
8. Дайте определение фундаментального решения системы линейных однородных алгебраических уравнений.
9. Какова размерность пространства собственных векторов, принадлежащих данному собственному значению матрицы?
10. Пусть даны два комплексных числа. Каковы модуль и аргумент их произведения? Их частного?

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2001. 376с.
2. Ильин В.А., Позняк В.Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2001. 320с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1988. 222с.