УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

МГИМО
УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Симушев
С.М. Зарбалиев
В.В. Григорьев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПРОМЕТЕЙ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
МЕЖДУНАРОДНЫХ ОТНОШЕНИЙ (УНИВЕРСИТЕТ)
МИНИСТЕРСТВА ИНОСТРАННЫХ ДЕЛ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

А.А. Симушев, С.М. Зарбалиев, В.В. Григорьев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

МОСКВА
2022

УДК 51
ББК 22.1я73
С 378

Редактор:
Зарбалиев С.М.

Рецензенты:

Артамонов Н.В., канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой математики, эконометрики и информационных технологий МГИМО МИД России;

Кравцев С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического анализа МГУ им. М.В. Ломоносова.

Симушев А.А.

С 378 Высшая математика: Учебное пособие / А.А. Симушев, С.М. Зарбалиев, В.В. Григорьев. — М.: Прометей, 2022. — 224 с.

ISBN 978-5-00172-357-8

В учебном пособии содержатся наиболее важные разделы математического анализа: введение в анализ, дифференциальное исчисление и интегральное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие покрывает основные разделы, входящие в стандарт курса «Математический анализ». Каждая глава делится на параграфы, посвященные отдельным темам. В конце приведён большой список используемой литературы. На протяжении всей книги выдержан строгий научный стиль изложения, все основные теоремы снабжены подробными доказательствами и найден удачный баланс между математической строгостью и доступностью изложения. Все темы проиллюстрированы примерами с подробнейшими решениями. Важной особенностью учебного пособия является то, что в нём разобрано большое количество типовых задач. В основу книги положены лекции, читаемые авторами в МГИМО МИД России и НИУ МЭИ.

Учебное пособие представляет интерес для широкого круга учащихся как на бакалаврских программах, так в магистратуре. Его можно рекомендовать студентам, желающим получить систематические знания по предмету.

Учебное пособие предназначено для подготовки студентов и магистров экономических и технических вузов при изучении ими разделов математического анализа и для самостоятельной проработки соответствующего материала студентами дистанционной формы обучения. Настоящее пособие может быть использовано аспирантами и преподавателями.

Объем рассмотренного материала соответствует программе для высших учебных заведений, рекомендованной Министерством науки и высшего образования РФ.

ISBN 978-5-00172-357-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебное пособие по математическому анализу предназначено для студентов экономических и инженерных специальностей.

Учебное пособие подготовлено на основе семестрового курса лекций по математическому анализу, который читался авторами на протяжении нескольких лет студентам экономических специальностей МГИМО МИД России и студентам инженерных специальностей НИУ МЭИ (Московского энергетического университета).

Учебное пособие состоит из трех глав и делится на пятнадцать параграфов. В первой главе приведены основных понятия теории множеств, которая является универсальным языком всей математики, а также разобраны теоретические вопросы, относящиеся к числовым последовательностям, пределу числовой последовательности, определению функции, пределу и непрерывности функции. Во второй и третьей главах подробно рассматриваются другие конструкции математического анализа — производная и интеграл. Приведены основные теоремы математического анализа с подробными доказательствами. Все части пособия теоретически взаимосвязаны.

Понимая объективную трудность в усвоении основ математического анализа ввиду их абстрактности, изложение сопровождено большим количеством примеров, решение которых помогает усвоению теоретического материала.

В конце пособия приведен список литературы, в котором можно найти не представленные доказательства или выводы формул. Приведены тематически подобранные варианты контрольных работ и примерные варианты экзаменационных заданий.

Определения, теоремы, формулы, примеры и рисунки имеют двухступенчатую нумерацию: первая часть является номером параграфа, вторая — порядковым номером.

По математическому анализу выпущено немало замечательных книг, которые авторы широко использовали, и часто без прямых ссылок. Заранее приносим свои извинения, что не всегда возможным оказалось цитирование авторства, впрочем, иногда и неизвестного. Прямо скажем, что авторы не рассматривают свой учебник как научный труд — это всего лишь добросовестная и многолетняя обработка изданной к настоящему моменту литературы.

Авторы надеются, что эта книга, написанная как учебное пособие для студентов, окажется очень полезной для всех преподающих высшую математику.

Авторы допускают, что изложение как по форме, так и по содержанию не лишено недостатков. Все замечания и предложения будут приняты с благодарностью.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам заведующему кафедрой математики, эконометрики и информационных технологий МГИМО доценту Н.В. Артамонову и доценту кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова С.В. Кравцеву за ряд ценных замечаний и советов, которые способствовали улучшению настоящего пособия.

Заранее благодарим будущих читателей за их советы и критические замечания.

Авторы

Глава I. Введение в анализ

§1. Некоторые сведения из теории множеств

1.1. Элементы логической символики

Приведём наиболее часто используемые **логические символы**.

1°. Символ $\Rightarrow$ называется **знаком следования** (импликации). Запись $A \Rightarrow B$ означает, что из справедливости высказывания A следует справедливость высказывания B.

2°. Символ $\Leftrightarrow$ называется **знаком равносильности** (эквивалентности) утверждений, стоящих по разные стороны от этого символа. Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что из справедливости высказывания A следует справедливость высказывания B, а из справедливости высказывания B следует справедливость высказывания A. Другими словами, высказывание A равносильно высказыванию B; высказывание B является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выполнялось высказывание A; высказывание A выполняется тогда и только тогда, когда выполняется высказывание B.

3°. Символ $\forall$ называется **символом общности**. Он заменяет следующие слова: для каждого, для любого, для всякого, каждый, любой, всякий.

4°. Символ $\exists$ называется **знаком существования**. Он заменяет следующие слова: существует, найдется. Символ $\exists!$ заменяет слова «существует единственный».

Симвролы $\forall$ и $\exists$ называются **кванторами**.

5°. $\vee$ — знак дизъюнкции, заменяющий союз «или». Запись $A \vee B$ означает, что имеет место хотя бы одно из высказываний A, B.

6°. $\wedge$ — знак конъюнкции, заменяющий союз «и».

7°. Символ $\overline{\alpha}$ будем понимать как отрицание высказывания α или, коротко, «не α».

Пример 1.1.

1°. Запись $\forall x\colon x \geqslant 1 \Rightarrow \ln x \geqslant 0$ означает следующее утверждение: «для каждого x такого, что $x \geqslant 1$, выполняется неравенство $\ln x \geqslant 0$».

2°. Запись $\exists!\, x\colon\ x^2 \leqslant 0$ означает следующее утверждение: «существует **единственный** x такой, что $x^2 \leqslant 0$» (предполагаем, что $x \in \boldsymbol{R}$).

1.2. Множества. Основные понятия

Понятия «**множество**», «**элемент**» и понятие «**принадлежности**» являются **первичными** (исходными) в математике и не определяются через другие более простые понятия. Можно дать лишь некоторые пояснения этих понятий.

Множество — набор, совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы, называемых его элементами (синонимы: класс, семейство, набор, система и т.п.).

Обозначение: множества принято обозначать заглавными буквами латинского или греческого алфавитов $(A, B, X, \ldots;\ \Omega,\ \ldots)$, а их элементы — малыми буквами тех же алфавитов $(a, b, x,\ \ldots;\ \omega,\ \ldots)$.

Принадлежность элемента a множеству A записывается с помощью знака **принадлежности** $\in$: $a \in A$. Если b не принадлежит B, то пишут $b \notin B$ или $b \,\overline{\in}\, B$.

Определение 1.1. Множество A называется подмножеством множества B (множество A включено в множество B), если все элементы множества A принадлежат множеству B:

$$A \subset B \ (\text{или } B \supset A) \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \{\forall x\colon x \in A \Rightarrow x \in B\} \ \Leftrightarrow\ \{\forall x \in A \Rightarrow x \in B\}.$$

Символ $\subset$ называется символом **включения**.

Замечание 1.1. Включение (символ $\subset$) и принадлежность (символ $\in$) — **разные** понятия.

Определение 1.2. Множество A равно множеству B (при этом пишут $A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$ (то есть множества A и B состоят из одних и тех же элементов):

$$A = B \ \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \{A \subset B \wedge B \subset A\}.$$

Определение 1.3. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным** (например, множество малых букв латинского алфавита).

Определение 1.4. Множество называется **бесконечным**, если для любого натурального числа n в этом множестве имеются элементы, количество которых больше n.

Определение 1.5. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\varnothing$.

Замечание1.2. Пустое множество включено в любое множество.

Способы задания множеств

1°. Перечисление элементов.

2°. Указание правила для определения принадлежности элементов множеству.

Способы записи множеств

1°. $A=\{a, b, c, ...\}$, где $a, b, c, ...$ — элементы множества A.

2°. $A=\{a_\lambda\}=\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, где a_λ — элементы множества A, λ — их индексы, Λ — множество индексов.

3°. $A=\{x\colon ...\}$, где за знаком «:» следует правило для определения принадлежности элементов множеству A.

1.3. Операции над множествами

1. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $C=A\cup B$, которое состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A, B (при этом допускается, что элемент принадлежит как множеству A, так и множеству B):

$$A\cup B=\{x\colon\ x\in A \vee x\in B\}.$$

2. Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $D=A\cap B$, которое состоит из элементов, принадлежащих сразу обоим множествам A и B (то есть элементов, общих для этих множеств):

$$A\cap B=\{x\colon\ x\in A \wedge x\in B\}.$$

3. Разностью множеств A и B называется такое множество $A\setminus B$, которое состоит из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B:

$$A\setminus B=\{x\colon\ x\in A \wedge x\notin B\}.$$

Определение 1.6. Пусть $B\subset A$ (B — подмножество множества A). Тогда множество $A\setminus B$ называется **дополнением** множества B до множества A и пишут $A\setminus B=\overline{B}$.

Простейшие свойства операций над множествами

1. $A \cup B = B \cup A$ — свойство **коммутативности** сложения.
2. $A \cap B = B \cap A$ — свойство коммутативности произведения.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — свойство **ассоциативности** сложения.
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — свойство **ассоциативности** произведения.
5. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — свойство **дистрибутивности**.

1.4. Основные числовые множества

$\boldsymbol{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ — множество **натуральных** чисел.

$\boldsymbol{N_0} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\} = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ — множество **целых неотрицательных** чисел.

$\boldsymbol{Z} = \{\ldots,\ -n,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ — множество **целых** чисел.

$\boldsymbol{Q} = \left\{x\colon\ x = \frac{p}{q},\ \text{где } p \in \boldsymbol{Z},\ q \in \boldsymbol{N}\right\}$ — множество **рациональных** чисел.

$\boldsymbol{R}$ — множество **действительных** чисел.

Очевидно включение $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{N_0} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Наиболее часто используемые подмножества множества $\boldsymbol{R}$

1. $\{x\colon\ a \leqslant x \leqslant b\} = [a;\, b]$ — **отрезок**.
2. $\{x\colon\ a < x < b\} = (a;\, b)$ — **интервал** (конечный).
3. $\{x\colon\ a < x \leqslant b\} = (a;\, b]$ — **полуинтервал** (конечный).
4. $\{x\colon\ a \leqslant x < b\} = [a;\, b)$ — **полуинтервал** (конечный).
5. $\{x\colon\ x \geqslant a\} = [a;\ +\infty)$ — бесконечный **полуинтервал**.
6. $\{x\colon\ x \leqslant b\} = (-\infty;\, b]$ — бесконечный **полуинтервал**.
7. $\{x\colon\ x > a\} = (a;\ +\infty)$ — бесконечный **интервал**.
8. $\{x\colon\ x < b\} = (-\infty;\, b)$ — бесконечный **интервал**.
9. $\{x\colon\ -\infty < x < +\infty\} = (-\infty;\ +\infty) = \boldsymbol{R}$ — бесконечный **интервал**.

Определение 1.7. Все подмножества множества $\boldsymbol{R}$, приведённые в пунктах **1–9**, называются числовыми **промежутками** (или, короче, промежутками). Промежутки $[a;\, b]$, $(a;\, b)$, $(a;\, b]$ и $[a;\, b)$ являются **конечными**, а промежутки $[a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b]$, $(a;\ +\infty)$, $(-\infty;\ b)$ и $(-\infty;\ +\infty)$ — **бесконечными**. Числа a и b называются их **концами** (левым и правым), а число $(b-a)$ — **длиной** (конечного) числового промежутка.

1.5. Некоторые свойства действительных чисел

1. Свойство **упорядоченности.** Для любых действительных чисел a и b справедливо одно из 3-х соотношений: либо $a<b$, либо $a=b$, либо $a>b$.

2. Свойство **непрерывности.** Пусть A и B — два произвольных **непустых** числовых множества, обладающих свойством: неравенство $a\leqslant b$ справедливо **для любых** двух элементов $a\in A$ и $b\in B$. Тогда найдётся такое **действительное** число c, что для всех $a\in A$ и $b\in B$ выполняется двойное неравенство $a\leqslant c\leqslant b$ (**рис. 1.1**).

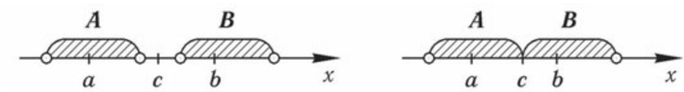

Рис. 1.1

3. Модуль действительного числа и его свойства.

Определение 1.8. Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется **неотрицательное** число $|a|=\begin{cases} a, \text{ если } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a<0. \end{cases}$

Свойства модуля

1) $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ (**неравенство треугольника**).

2) $|a\pm b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$ ($\Rightarrow|a\pm b|\geqslant|a|-|b|$) (следствие неравенства треугольника).

3) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

4) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ при $b\neq 0$.

5) Пусть $b>0$. Тогда $|a|<b \iff -b<a<b$,

$$|a|\leqslant b \iff -b\leqslant a\leqslant b.$$

4. Геометрическая интерпретация множества R. Окрестность точки

Определение 1.9. Прямая, на которой выбраны направление, начало отсчёта (точка O) и масштаб, называется **числовой осью**.

Между множеством **действительных** чисел $\boldsymbol{R}$ и **точками** числовой оси устанавливают **взаимно однозначное соответствие** по правилу:

1) числу $m \in \boldsymbol{R}$ соответствует **точка** M с **координатой** m;

2) и обратно, каждой **точке** M числовой оси соответствует **число** $m \in \boldsymbol{R}$ — **координата** этой точки.

Это соответствие позволяет **геометрически** множество $\boldsymbol{R}$ изображать направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа — точками этой прямой. Поэтому совокупность **действительных чисел** $\boldsymbol{R}$ часто называют **числовой** (или действительной) **прямой**, а отдельные числа — её точками.

Замечание 1.3. В случае горизонтального расположения числовой оси направление (ориентацию) на ней **обычно** выбирают слева-направо — так, чтобы положительным числам соответствовали точки, расположенные **справа** от точки O, а отрицательным — **слева** от точки O. Поэтому (в соответствии с геометрической интерпретацией множества $\boldsymbol{R}$) иногда вместо «a меньше b» («a больше b») говорят, что точка a лежит **левее** (**правее**) точки b.

Замечание 1.4. В случае вертикального расположения числовой прямой направление на ней **обычно** выбирают снизу-вверх (положительным числам соответственно точки, расположенные **выше** точки O, а отрицательным числам — **ниже** точки O).

Определение 1.10. Окрестностью $U(x_0)$ точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ называется любой **интервал** $(a; b)$, где $a < b$, содержащий точку x_0. В частности интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta \equiv \text{const} > 0$, **симметричный** относительно точки x_0, называется δ-окрестностью точки x_0 и обозначается $U_\delta(x_0)$ (**рис. 1.2**).

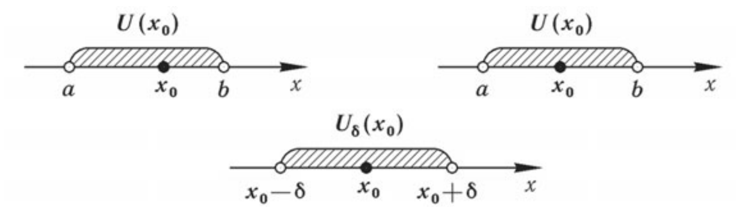

Рис. 1.2

Замечание 1.5. Из определения следует, что все точки из δ-окрестности $U_\delta(x_0)$ удовлетворяют соотношениям:

$$x \in U_\delta(x_0) \iff x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \iff x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \iff$$
$$\iff -\delta < x - x_0 < \delta \iff |x - x_0| < \delta.$$

Определение 1.11. Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ называются множество точек $\dot{U}(x_0)$ числовой оси, получаемое из окрестности $U(x_0)$ исключением самой точки x_0 (**рис. 1.3**). Аналогично определяется **проколотая** $\boldsymbol{\delta}$-окрестность $\dot{U}_\delta(x_0)$ точки x_0:

$$\dot{U}(x_0) = U(x_0) \setminus \{x_0\} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

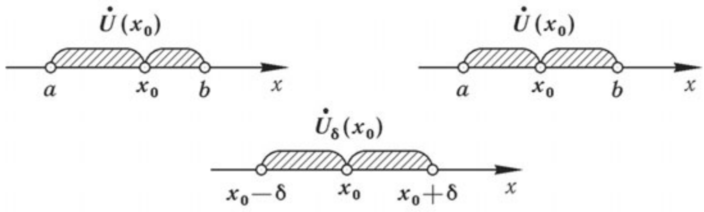

Рис. 1.3

Определение 1.12. Полуокрестностью точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ называется любой интервал числовой оси $\boldsymbol{R}$, одним из концов которого является точка x_0. При этом интервал $U^-(x_0) = (a; x_0)$, где $a < x_0$, расположенный **слева** от точки x_0, называется её **левой полуокрестностью**, а интервал $U^+(x_0) = (x_0; b)$, где $b > x_0$, расположенный **справа** от точки x_0, — её **правой полуокрестностью** (**рис. 1.4**).

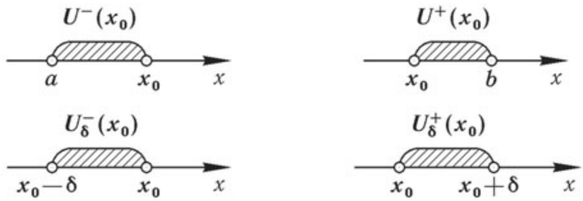

Рис. 1.4

Если полуокрестность имеет **длину** $\delta > 0$ (**рис. 1.4**), её называют δ-полуокрестностью:

$$U_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \text{ — левая } \delta\text{-полуокрестность точки } x_0,$$
$$U_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta) \text{ — правая } \delta\text{-полуокрестность точки } x_0.$$

Определение 1.13. Множество $U_E(\infty)$ действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $|x| > E$, где $E > 0$ — фиксированное положительное число, называется $\boldsymbol{E}$**-окрестностью** символа ∞ (**рис. 1.5**).

Бесконечный интервал $U_E(-\infty)=(-\infty,\ -E)$, где $E>0$, называется $\boldsymbol{E}$ -**окрестностью** символа $(-\infty)$ (**рис. 1.5**).

Бесконечный интервал $U_E(+\infty)=(E,\ +\infty)$, где $E>0$, называется $\boldsymbol{E}$ -**окрестностью** символа $(+\infty)$ (**рис. 1.5**).

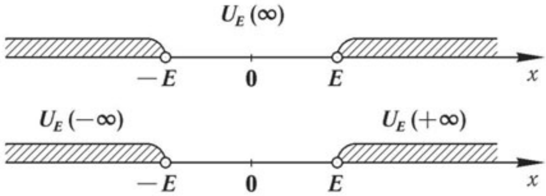

Рис. 1.5

1.6. Ограниченные и неограниченные множества

Определение 1.14. Множество $A\subset \boldsymbol{R}$ называется **ограниченным сверху**, если существует такое число $M\in \boldsymbol{R}$, что для каждого элемента $x\in A$ выполняется неравенство $x\leqslant M$. При этом число M называется **верхней гранью** множества A.

$$(A\subset \boldsymbol{R} - \text{ограничено } \textbf{сверху}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists M\in \boldsymbol{R}\colon\ \forall x\in A \ \Rightarrow\ x\leqslant M).$$

Определение 1.15. Множество $A\subset \boldsymbol{R}$ называется **ограниченным снизу**, если существует такое число $m\in \boldsymbol{R}$, что для каждого элемента $x\in A$ выполняется неравенство $x\geqslant m$. При этом число m называется **нижней гранью** множества A.

$$(A\subset \boldsymbol{R} - \text{ограничено } \textbf{снизу}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists m\in \boldsymbol{R}\colon\ \forall x\in A \ \Rightarrow\ x\geqslant m).$$

Определение 1.16. Множество $A\subset \boldsymbol{R}$ называется **ограниченным**, если оно ограничено и сверху, и снизу.

$$(A\subset \boldsymbol{R} - \text{ограничено}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\exists M_1>0\colon\ \forall x\in A \ \Rightarrow\ |x|\leqslant M_1).$$

Пример 1.2.

1. Множество $(a;\ +\infty)$ **ограничено снизу** числом a.

2. Множество $(-\infty;\, b)$ **ограничено сверху** числом b.

3. Интервал $(a;\, b)$ ограничен **сверху** числом b, а **снизу** — числом a. $M_1=\max\,(|a|;\,|b|)$.

4. $\{x_1, ..., x_n\}$ — **ограниченное** множество. $M_1 = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$.

Для следующих примеров нам понадобится умение строить **отрицание** простейших логических формул, содержащих **кванторы** $\forall, \exists$.

Построим **отрицание утверждения** $\forall x \in A \Rightarrow \alpha$.

Если данное утверждение не имеет смысла, то предложение α имеет место не для всех $x \in A$, то есть существует элемент $x \in A$, для которого α не имеет места: $\overline{(\forall x \in A \Rightarrow \alpha)} \Leftrightarrow (\exists x \in A \Rightarrow \overline{\alpha})$.

Аналогично: $\overline{(\exists y \in B \Rightarrow \beta)} \Leftrightarrow (\forall y \in B \Rightarrow \overline{\beta})$.

Правило. Для построения отрицания логической формулы, содержащей кванторы $\forall$, $\exists$ и высказывание α, необходимо знак $\forall$ заменить на $\exists$, знак $\exists$ — на $\forall$, а высказывание α — на его отрицание $\overline{\alpha}$.

5. (множество $B \subset \boldsymbol{R}$ не является **ограниченным сверху**) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall M \in \boldsymbol{R} \ \exists x \in B: \ x > M).$$

6. (множество $C \subset \boldsymbol{R}-$ не является **ограниченным снизу**) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall m \in \boldsymbol{R} \ \exists x \in C: \ x < m).$$

7. (множество $D \subset \boldsymbol{R}$ не является **ограниченным**) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\forall M_1 > 0 \ \exists x \in D: \ |x| > M_1).$$

Замечание 1.6. Ограниченное сверху множество $A \subset \boldsymbol{R}$ имеет бесконечно много верхних граней. Если M — **верхняя грань**, то и $M^* > M$ — тоже.

Замечание 1.7. Аналогично, ограниченное снизу множество $B \subset \boldsymbol{R}$ имеет **бесконечно много** нижних граней.

Точные верхние и нижние грани множеств

Определение 1.17. Число $M \in \boldsymbol{R}$ называется **точной верхней гранью** ограниченного **сверху** множества $A \subset \boldsymbol{R}$, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для любого $x \in A$ выполняется неравенство $x \leqslant M$ (т.е. число M является **верхней гранью** множества A);

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in A$, что $x > M - \varepsilon$ (это означает, что ни одно число, меньшее M, **не является** верхней гранью множества A; другими словами M — **наименьшая** из всех верхних граней множества A) (**рис.1.6**).

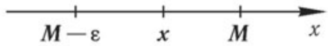

Рис. 1.6

Точная верхняя грань числового множества A **обозначается** символом $\sup A$ (читается «**супремум**» A).

Определение 1.18. Число $m \in \boldsymbol{R}$ называется **точной нижней гранью** ограниченного **снизу** множества $C \subset \boldsymbol{R}$, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1) для любого $x \in C$ выполняется неравенство $x \geqslant m$, (т.е. число m является **нижней гранью** множества C);

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in C$, что $x < m + \varepsilon$ (это означает, что ни одно число, большее m, не является нижней гранью множества C; другими словами m — **наибольшая** из всех нижних граней множества C) (**рис.1.7**).

Рис. 1.7

Точная нижняя грань числового множества C **обозначается** символом $\inf C$ (читается «**инфимум**» C).

Пример 1.3.

1. Любой **конечный интервал** $A = (a; b)$ имеет **точные** грани: $\inf A = a$ и $\sup A = b$.

2. Любой отрезок $C = [a; b]$ имеет **точные** грани: $\inf C = a$ и $\sup C = b$.

Теорема 1.1 (свойство полноты множества действительных чисел).

1) Всякое **ограниченное сверху непустое** множество $A \subset \boldsymbol{R}$ имеет **единственную** точную верхнюю грань $\sup A$.

2) Всякое **ограниченное снизу непустое** множество $C \subset \boldsymbol{R}$ имеет **единственную** точную нижнюю грань $\inf C$.

Доказательство. Докажем только первое утверждение теоремы. Рассмотрим множество B, состоящее из всех верхних граней множества A. Очевидно, что $B \neq \varnothing$. По свойству **непрерывности** множества $\boldsymbol{R}$ существует такое действительное число c, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ выполняется двойное неравенство $a \leqslant c \leqslant b$. Очевидно, что $c = \sup A$. Единственность $\sup A$ следует из того, что множество $B \subset \boldsymbol{R}$ не может иметь двух различных наименьших элементов (в соответствие со свойством упорядоченности множества $\boldsymbol{R}$). ■

Замечание 1.8. Как видно из доказательства теоремы, она выражает важное свойство множества действительных чисел — **полноту**.

Следствие. Пусть A и B — произвольные непустые подмножества $\boldsymbol{R}$, обладающие свойством $a \leqslant b$ для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$. Тогда:

1) существуют $\sup A = \underline{I}$ и $\inf B = \overline{I}$;

2) справедливо неравенство $\underline{I} \leqslant \overline{I}$;

3) равенство $\underline{I} = \overline{I}$ справедливо **тогда и только тогда**, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $a \in A$ и $b \in B$, что $0 \leqslant b - a < \varepsilon$.

Доказательство. 1) Согласно условиям следствия любое число $b \in B$ ограничивает **сверху** множество A (т.е. является верхней гранью множества A), поэтому по **теореме 1.1** существует единственная точная верхняя грань $\sup A = \underline{I}$, удовлетворяющая неравенству $\underline{I} \leqslant b$ для любого $b \in B$.

2) Число $\underline{I}$ ограничивает множество B **снизу** (т.е. является нижней гранью множества B), поэтому по **теореме 1.1** существует **единственная** точная нижняя грань $\inf B = \overline{I}$, причём справедливо неравенство $\overline{I} \geqslant \underline{I}$ (**рис. 1.8**).

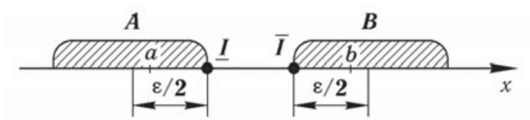

Рис. 1.8

3) Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $\underline{I} = \overline{I}$. В соответствии с определением $\sup A$ и $\inf B$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $a \in A$ и $b \in B$, что $\begin{cases} 0 \leqslant \underline{I} - a < \varepsilon/2, \\ 0 \leqslant b - \overline{I} < \varepsilon/2 \end{cases}$ (**рис. 1.8**). Складывая эти неравенства и учитывая, что $\underline{I} = \overline{I}$, получаем: $0 \leqslant (b - a) < \varepsilon$.

Достаточность ($\Leftarrow$). Сначала заметим, что для любой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ справедливы неравенства: $a \leqslant \underline{I} \leqslant \bar{I} \leqslant b$ (**рис. 1.8**), поэтому $0 \leqslant \bar{I} - \underline{I} \leqslant (b-a)$ и

$$|\bar{I} - \underline{I}| \leqslant |b-a|. \tag{1.1}$$

Пусть теперь для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $a \in A$ и $b \in B$, что $0 \leqslant (b-a) < \varepsilon$. С учетом соотношения **(1.1)** это означает, что неравенство $|\bar{I} - \underline{I}| < \varepsilon$ должно выполняться для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\underline{I} = \bar{I}$. ■

§2. Числовая последовательность

2.1. Числовая последовательность. Арифметические операции над последовательностями. Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение 2.1. Пусть каждому номеру $n \in \boldsymbol{N}$ поставлено в соответствие (по определённому закону) число $x_n \in \boldsymbol{R}$. Тогда множество занумерованных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется числовой последовательностью (или просто последовательностью) и обозначается символом $\{x_n\}$. Отдельные числа x_n называются элементами или членами последовательности $\{x_n\}$.

Пример 2.1. Две последовательности:

$$\{n\} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{и} \quad \left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots\right\}.$$

Замечание 2.1. x_n и x_k при $n \neq k$ считаются различными элементами последовательности, хотя не исключено, что как числа они равны между собой, то есть может быть $x_n = x_k$. Например, для последовательности $\{x_n = (-1)^n\}$ справедливы равенства $\begin{cases} x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = 1, \\ x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = -1. \end{cases}$

Определение 2.2. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две числовые последовательности, то

1) $\{x_n + y_n\}$ называется **суммой** этих последовательностей;

2) $\{x_n - y_n\}$ называется **разностью** этих последовательностей;

3) $\{x_n \cdot y_n\}$ называется **произведением** этих последовательностей;

4) при $y_n \neq 0$ последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ называется **частным** этих последовательностей.

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху**, если существует такое число $M \in \boldsymbol{R}$, что для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant M$.

Определение 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной снизу**, если существует такое число $m \in \boldsymbol{R}$, что для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $x_n \geqslant m$.

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если она ограничена **и сверху, и снизу**, то есть, если существует такое число $M_1 > 0$, что для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant M_1$.

Определение 2.6. Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если она **не является ограниченной**, то есть для любого числа $M_2 > 0$ существует такой номер $n \in \boldsymbol{N}$, что $|x_n| > M_2$.

Пример 2.2. Последовательность $\left\{x_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ является **ограниченной**, так как $|x_n| = \frac{1}{n} \leqslant 1 \equiv M_1$ для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$.

Пример 2.3. Последовательность $\{x_n = (-1)^n \cdot n\}$ является **неограниченной**, так как для любого числа $M_2 > 0$ существует такой номер $n \in \boldsymbol{N}$, что $|x_n| \equiv n > M_2$. Этот номер n можно взять равным числу $[M_2]+1$ (здесь $[M_2]$ — целая часть числа M_2).

2.2. Предел числовой последовательности

Определение 2.7. Число a называется **пределом числовой** последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, что для все элементы x_n этой последовательности с номерами $n > N$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

Определение 2.8. Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если она **имеет (конечный)** предел, т.е. **существует** такое число $a \in \boldsymbol{R}$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, что для всех номеров $n > N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$. Последовательность, **не являющаяся** сходящейся, называется **расходящейся**.

Замечание 2.2. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, $n > N$, можно записать в эквивалентной форме:

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \ n > N.$$

Последнее неравенство означает, что при $n > N$ точка x_n лежит в ε-окрестности числа a, то есть $x_n \in U_\varepsilon(a)$. Поэтому **определение 2.8** можно переформулировать следующим образом: последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если существует такое число $a \in \boldsymbol{R}$, что в любой ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ числа a находятся **все элементы** последовательности $\{x_n\}$, **начиная с некоторого** номера (зависящего, конечно, от ε).

Пример 2.4. Доказать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 - 5}{n^2} = 1$.

◀ Необходимо доказать, что последовательность $x_n = \frac{n^2 - 5}{n^2}$ сходится к числу $a = 1$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и определим при каких $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется **неравенство** $|x - a| < \varepsilon$:

$$|x_n - a| < \varepsilon \iff \frac{5}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{5}{\varepsilon} \iff n > \sqrt{5/\varepsilon}.$$

Если бы в **определении 2.8** не было сказано, что $N(\varepsilon)$ — номер, то есть **натуральное число**, то в качестве $N(\varepsilon)$ можно было взять число $\sqrt{5/\varepsilon}$. Учитывая это ограничение, возьмём в качестве $N(\varepsilon)$ произвольное **натуральное** число, удовлетворяющее **неравенству** $N(\varepsilon) \geqslant \sqrt{5/\varepsilon}$, например,

$$N(\varepsilon) = [\sqrt{5/\varepsilon}] + 1. \ ▶$$

Замечание 2.3. Добавление или отбрасывание у последовательности любого конечного числа членов не влияет на **существование** предела последовательности и его **величину**.

Теорема 2.1. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ имеет **единственный** предел.

Доказательство. Пусть $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Докажем, что число $b \neq a$ **не может быть** пределом последовательности $\{x_n\}$. Возьмём $\varepsilon = \frac{|b - a|}{3} > 0$. Тогда $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$ (**рис. 2.1**).

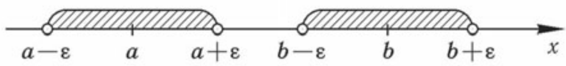

Рис. 2.1

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)+1$, лежат в ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$ точки a. Поэтому в ε-окрестности $U_\varepsilon(b)$ точки b может лежать лишь **конечное число** членов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно (см. **замечание 2.2**), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq b$. ■

Теорема 2.2. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ является **ограниченной**.

Доказательство. 1) Согласно неравенству треугольника имеем

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \leqslant |x_n - a| + |a|.$$

2) Пусть $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Тогда для $\varepsilon = 1$ существует такой номер $N = N(1) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 1$. Поэтому при $n > N$ справедливы неравенства

$$|x_n| \leqslant |x_n - a| + |a| \leqslant 1 + |a|.$$

Следовательно, для **любого** $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, 1 + |a|\},$$

означающее, что последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной. ■

Замечание 2.4. Не всякая ограниченная последовательность **сходится**.

Пример 2.5. Доказать, что последовательность

$$\{x_n = (-1)^{n+1}\} = \{1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots\}$$

ограничена, однако **не является** сходящейся.

◄ Заданная последовательность **ограничена**, так как $|x_n| = 1$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Докажем **от противного**, что она **не является сходящейся**. Предположим, что она сходится к некоторому числу a. Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ существует такой номер $N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство $a - \frac{1}{2} < x_n < a + \frac{1}{2}$. А поскольку $x_{2k-1} = 1$ и $x_{2k} = -1$ для любого $k \in \boldsymbol{N}$, то должно выполняться неравенство $a - \frac{1}{2} < -1 < 1 < a + \frac{1}{2}$. Но расстояние между точками $\left(a + \frac{1}{2}\right)$, $\left(a - \frac{1}{2}\right)$ равно $\left(a + \frac{1}{2}\right) - \left(a - \frac{1}{2}\right) = 1$ — меньше расстояния между числами (-1) и 1, равного 2. Получили противоречие, доказывающее ложность исходного предположения о сходимости заданной последовательности. ►

2.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их свойства. Теорема о представлении

Определение 2.9. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,$$

т.е. для **любого** $\varepsilon > 0$ **существует** такой номер $N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Замечание 2.5. Очевидно, что **определение 2.9** эквивалентно следующему определению: последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой** последовательностью, если для любого $\varepsilon > 0$ лишь **конечное число** членов этой последовательности **удовлетворяет** неравенству $|\alpha_n| \geqslant \varepsilon$ (таких членов существует не более $N(\varepsilon)$).

Укажем простейшую связь сходящейся и бесконечно малой последовательностей, которая используется при доказательстве свойств сходящихся последовательностей.

Теорема 2.3 (теорема о представлении). Последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к числу a **тогда и только тогда**, когда её можно представить в виде **суммы** $\{x_n = a + \alpha_n\}$ **числа** a и **бесконечно малой** последовательности $\{\alpha_n\}$.

Доказательство. Это свойство непосредственно следует из **определений 2.8–2.9**, записанных для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{\alpha_n\}$ в терминах неравенств (т.е. на языке «ε-N»), поскольку $\alpha_n = x_n - a$, то

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\text{для } \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}\text{: } \forall n > N \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon);$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\text{для } \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}\text{: } \forall n > N \ \Rightarrow \ |\alpha_n| < \varepsilon). \ \blacksquare$$

Пример 2.6. Доказать, что последовательность $\left\{\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ является **бесконечно малой**.

◄ Действительно, фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$|\alpha_n| \equiv \frac{1}{n} < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

В качестве числа $N(\varepsilon)$ из определения **2.8** можно взять любое **натуральное** число, удовлетворяющее условию $N(\varepsilon)>\frac{1}{\varepsilon}$, например, $N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\in \boldsymbol{N}$. Следовательно, для всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$, означающее, что $\{\alpha_n\}$ — **бесконечно малая** последовательность. ►

Пример 2.7. Доказать, что последовательность $\left\{\alpha_n=\frac{1}{2^n}\right\}$ является **бесконечно малой**.

◄ Действительно, фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда

$$|\alpha_n|\equiv\frac{1}{2^n}<\varepsilon \iff 2^n>\frac{1}{\varepsilon} \iff n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}.$$

В качестве числа $N(\varepsilon)$ из определения 2.7 можно взять любое **натуральное** число, удовлетворяющее условию $N(\varepsilon)>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$, например, $N(\varepsilon)=$ $=\max\left\{\left[\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right];\ 1\right\}\in \boldsymbol{N}$. Следовательно, для всех $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n|<\varepsilon$, означающее, что $\{\alpha_n\}$ является **бесконечно малой** последовательностью. ►

Определение 2.10. Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой** последовательностью, если для любого числа $A>0$ существует такой номер $M=M(A)\in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n>M(A)$ выполняется неравенство $|x_n|>A$.

Замечание 2.6. Очевидно, что **определение 2.10** эквивалентно следующему определению: последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой** последовательностью, если для любого числа $A>0$ лишь конечное число членов этой последовательности удовлетворяет неравенству $|x_n|\leqslant A$ (таких членов существует не более, чем $M(A)$).

Пример 2.8. Доказать, что последовательности $\{n\}$, $\{-n\}$ и $\{(-1)^n\cdot n\}$ являются **бесконечно большими**.

◄ Для этих последовательностей справедливо равенство $|x_n|=n$, $n\in \boldsymbol{N}$, поэтому неравенство $|x_n|\equiv n>A$, где $A>0$, выполняется для всех номеров, удовлетворяющих неравенству $n>M(A)\equiv[A]+1\in \boldsymbol{N}$. ►

Замечание 2.7. Любая **бесконечно большая** последовательность является **неограниченной**. Однако **обратное**, вообще говоря, **неверно**.

Пример 2.9. Доказать, что **неограниченная** последовательность

$$\{0;\ 1;\ 0;\ 2;\ 0;\ 3;\ \ldots\}$$

не является бесконечно большой последовательностью.

◀ Так как $x_{2k-1} = 0$ для любого $k \in \boldsymbol{N}$, то (согласно **определению 2.9**) заданная последовательность **не является бесконечно большой**. ▶

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

Лемма 2.1. Бесконечно малая последовательность является **ограниченной** последовательностью.

Доказательство. Лемма **2.1** является следствием **теоремы 2.2.** ■

Лемма 2.2. 1) Если $\{x_n\}$ — **бесконечно большая** последовательность и $x_n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, то $\left\{\alpha_n = \frac{1}{x_n}\right\}$ — **бесконечно малая** последовательность.

2) Если $\{\alpha_n\}$ — **бесконечно малая** последовательность и $\alpha_n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, то $\left\{x_n = \frac{1}{\alpha_n}\right\}$ — **бесконечно большая** последовательность.

Доказательство. 1) Фиксируем **произвольное положительное** число ε. Согласно **определению 2.8 бесконечно малой** последовательности, необходимо найти такой номер N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Для этого подставим число $A = \frac{1}{\varepsilon}$ в **определение 2.9 бесконечно большой** последовательности: существует такой номер $M = M(A) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > M$ выполняется неравенство $|x_n| > A$. Преобразуем последнее неравенство:

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon \iff |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Таким образом, при $n > M$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Мы доказали 1-й пункт **леммы 2.2.**

2) Фиксируем произвольное $A > 0$ и подставим $\varepsilon = \frac{1}{A}$ в **определение 2.8 бесконечно малой** последовательности: существует такой номер $N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Преобразуем последнее неравенство:

$$|\alpha_n| < \varepsilon \iff \frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{A} \iff |x_n| > A \text{ для любого номера } n > N. \blacksquare$$

Лемма 2.3. Последовательность $\{\alpha_n\}$ является **бесконечно малой тогда и только тогда**, когда **бесконечно малой** является последовательность $\{|\alpha_n|\}$.

Доказательство. Это свойство непосредственно следует из определения **2.8**, записанного для БМП $\{\alpha_n\}$ и $\{|\alpha_n|\}$ в терминах неравенств (т.е. на языке «ε-N»):

1) последовательность $\{\alpha_n\}$ является **бесконечно малой**, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер $N=N(\varepsilon)\in \boldsymbol{N}$, что для всех номеров $n>N$ элементы α_n этой последовательности удовлетворяют неравенству:

$$|\alpha_n-0|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad |\alpha_n|<\varepsilon.$$

2) последовательность $\{|\alpha_n|\}$ является **бесконечно малой**, если $\lim\limits_{n\to\infty}|\alpha_n|=0$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой номер $N=N(\varepsilon)\in \boldsymbol{N}$, что для всех номеров $n>N$ элементы $|\alpha_n|$ этой последовательности удовлетворяют неравенству:

$$||\alpha_n|-0|<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad ||\alpha_n||<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad |\alpha_n|<\varepsilon. \ \blacksquare$$

Лемма 2.4. Сумма (разность) двух **бесконечно малых** последовательностей есть **бесконечно малая** последовательность.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Для доказательства леммы воспользуемся неравенством треугольника

$$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

По определению **бесконечно малой** последовательности имеем:

$$\begin{cases}\text{для } \forall\varepsilon_1>0 \ \exists \text{ такой номер } N_1=N(\varepsilon_1), \text{ что } \forall n>N_1 \ \Rightarrow\ |\alpha_n|<\varepsilon_1;\\ \text{для } \forall\varepsilon_2>0 \ \exists \text{ такой номер } N_2=N(\varepsilon_2), \text{ что } \forall n>N_2 \ \Rightarrow\ |\beta_n|<\varepsilon_2.\end{cases}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и положим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2}$, $N(\varepsilon)=$ $=\max\{N_1;N_2\}$. Тогда при $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n\pm\beta_n|\leqslant|\alpha_n|+|\beta_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

означающее, что последовательности $\{\alpha_n+\beta_n\}$ и $\{\alpha_n-\beta_n\}$ являются бесконечно малыми. $\blacksquare$

Следствие. Алгебраическая сумма **любого конечного** числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Доказательство провести **самостоятельно**, используя метод математической индукции.

Лемма 2.5. Произведение **ограниченной** и **бесконечно малой** последовательностей является **бесконечно малой** последовательностью.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — **ограниченная** последовательность, а $\{\alpha_n\}$ — **бесконечно малая** последовательность. Следовательно, по определению имеем:

1) существует такое число $A > 0$, что для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $|x_n| < A$;

2) для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon_1) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon_1$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{A}$. Тогда для любого номера $n > N$ имеем

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \varepsilon_1 = A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Следствие 1. Произведение **двух бесконечно малых** последовательностей является **бесконечно малой** последовательностью.

Доказательство. Первую бесконечно малую последовательность (согласно **лемме 2.1**) можно рассмотреть как ограниченную. ■

Следствие 2. Произведение любого **конечного** числа **бесконечно малых** последовательностей есть **бесконечно малая** последовательность.

Доказательство провести **самостоятельно**, используя метод математической индукции.

Лемма 2.6. Если **постоянная** последовательность $\{\alpha_n\}$ является **бесконечно малой** последовательностью, то $\alpha_n = 0$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство (от противного). Пусть последовательность $\{\alpha_n\}$ является **постоянной**, т.е. все её члены равны между собой: $\alpha_n = c$, $n \in \boldsymbol{N}$. Предположим, что $c \neq 0$. Возьмем $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Тогда неравенству $|\alpha_n| < \varepsilon$ **не удовлетворяет** ни один член последовательности. Это означает, что $\{\alpha_n\}$ **не является бесконечно малой** последовательностью. Полученное противоречие показывает, что исходное предположение $c \neq 0$ **неверно.** ■

2.4. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями

Теорема 2.4. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ **сходятся** к числам a и b, соответственно, то их сумма, разность и произведение являются **сходящимися** последовательностями, причём выполняются равенства:

1. $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n + y_n) = a + b$ (**предел суммы сходящихся** последовательностей равен **сумме пределов** этих последовательностей);
2. $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n - y_n) = a - b$ (**предел разности сходящихся** последовательностей равен **разности пределов** этих последовательностей);

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=ab$ (**предел произведения сходящихся** последовательностей равен **произведению пределов** этих последовательностей).

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $\begin{cases} x_n = a+\alpha_n, \\ y_n = b+\beta_n, \end{cases}$ где α_n, β_n — **бесконечно малые** последовательности.

1–2. $(x_n \pm y_n)-(a\pm b)=(\alpha_n \pm \beta_n)$ — **бесконечно малая** последовательность, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=a\pm b$.

3. $(x_n y_n - ab)=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)-ab=(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ — **бесконечно малая** последовательность, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=ab$. ■

Лемма 2.7. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) $y_n \neq 0$ для любого номера $n\in \boldsymbol{N}$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\neq 0$.

Тогда последовательность $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ является **ограниченной**.

Доказательство. 1) Согласно неравенству треугольника имеем:

$$|b|=|(b-y_n)+y_n|\leqslant|b-y_n|+|y_n| \iff |y_n|\geqslant|b|-|b-y_n|.$$

2) Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\neq 0$, то для $\varepsilon=\frac{|b|}{2}>0$ существует такой номер $N=N(\varepsilon)\in\boldsymbol{N}$, что для любого номера $n>N$ выполняется неравенство $|y_n - b|<\varepsilon\equiv\frac{|b|}{2}$. Поэтому при $n>N$ справедливы неравенства

$$|y_n|\geqslant|b|-|y_n-b|>|b|-\frac{|b|}{2}=\frac{|b|}{2}>0 \iff \frac{1}{|y_n|}<\frac{2}{|b|}.$$

Следовательно, $\dfrac{1}{|y_n|}\leqslant M=\max\left\{\dfrac{1}{|y_1|}, \ldots, \dfrac{1}{|y_N|}, \dfrac{2}{|b|}\right\}$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$. ■

Теорема 2.5. Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ **сходятся** к числам a и b, соответственно;
2) $b\neq 0$;
3) $y_n \neq 0$ для любого номера $n\in\boldsymbol{N}$.

Тогда последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится к числу $\dfrac{a}{b}$.

Доказательство. Поскольку последовательность

$$\left(\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}\right)=\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}=\frac{(ab+\alpha_n\cdot b)-(ab+\beta_n\cdot a)}{y_n b}=\frac{1}{y_n}\cdot\left(\alpha_n-\beta_n\cdot\frac{a}{b}\right)$$

является **бесконечно малой** (как произведение **ограниченной** и **бесконечно малой** последовательностей), то $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится к числу $\frac{a}{b}$. ■

§3. Предельный переход в неравенствах

Теорема 3.1. Пусть выполняются следующие **два** условия.

1) Существуют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

2) Для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$ (или $x_n < y_n$).

Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство (от противного). Предположим, что $a > b$ и возьмем $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. По определению предела числовой последовательности

$$\begin{cases} \exists \text{ такой номер } N_1 = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}, \text{ что } \forall n > N_1 \quad \Rightarrow \ a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \\ \exists \text{ такой номер } N_2 = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}, \text{ что } \forall n > N_2 \quad \Rightarrow \ b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon. \end{cases}$$

Положим $N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого номера $n > N(\varepsilon)$ справедливы неравенства:

$$b - \varepsilon < \boxed{y_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon,$$

из которых следует, что $y_n < x_n$ при $n > N$. Получили противоречие, которое показывает ложность предположения, что $a > b$. ■

Следствие 1. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$;

2) для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant b$ (или $x_n < b$).

Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство. Достаточно применить теорему **3.1** для случая, когда $y_n = b$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$. ■

Следствие 2. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$;

2) для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $a \leqslant y_n$ (или $a < y_n$).

Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство. Достаточно применить теорему **3.1** для случая, когда $x_n = a$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$. ■

Следствие 3. Если все элементы сходящейся последовательности $\{x_n\}$ принадлежат отрезку $[a; b]$, то её предел также принадлежит отрезку $[a; b]$. То есть, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ и двойное неравенство $a \leqslant x_n \leqslant b$ выполняется для любого $n \in \boldsymbol{N}$, то $a \leqslant c \leqslant b$.

Замечание 3.1. Если в следствии 3 последовательность $\{x_n\}$ лежит на интервале $(a; b)$, то всё равно гарантируется лишь, что $c \in [a; b]$. Это замечание иллюстрируется следующим примером.

Пример 3.1. Для сходящейся последовательности $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ имеем:

$$x_n \in (0;\ 2),\ \ n \in \boldsymbol{N},\ \text{однако}\ \ c = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in [0;\ 2],\ \text{но}\ c \notin (0;\ 2).$$

Теорема 3.2 (о пределе **«зажатой»** последовательности). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ справедливы для всех $n \in \boldsymbol{N}$;

2) существуют равные пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Тогда последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела числовой последовательности

$$\begin{cases} \exists \text{ такой номер } N_1 = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}, \text{что } \forall n > N_1 \ \Rightarrow \ \boxed{a - \varepsilon < x_n} < a + \varepsilon; \\ \exists \text{ такой номер } N_2 = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}, \text{что } \forall n > N_2 \ \Rightarrow \ b - \varepsilon < \boxed{z_n < b + \varepsilon}. \end{cases}$$

Тогда для любого номера $n > N(\varepsilon)$ справедливы неравенства:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \ \Leftrightarrow \ |y_n - a| < \varepsilon,$$

из которых следует, что $\{y_n\}$ сходится к числу a: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ■

§ 4. Монотонные последовательности

4.1. Основные понятия

Определение 4.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется

1) невозрастающей, если $x_{n+1} \leqslant x_n$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow$);

2) неубывающей, если $x_{n+1} \geqslant x_n$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$ (обозначение: $x_n \uparrow$);

3) **убывающей**, если $x_{n+1} < x_n$ для $\forall n \in N$ (обозначение: $x_n \downarrow\downarrow$);

4) **возрастающей**, если $x_{n+1} > x_n$ для $\forall n \in N$ (обозначение: $x_n \uparrow\uparrow$).

Определение 4.2. Невозрастающие, неубывающие, убывающие и возрастающие последовательности называются **монотонными**.

Определение 4.3. Кроме того, убывающие и возрастающие последовательность называются **строго монотонными**.

Замечание 4.1. Невозрастающая и **убывающая** последовательности **ограничены сверху** числом x_1.

Замечание 4.2. Неубывающая и **возрастающая** последовательности **ограничены снизу** числом x_1.

Пример 4.1. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — **убывающая.**

Пример 4.2. Последовательность $\{1; 1; 2; 2; 3; 3; ...\}$ — **неубывающая**.

4.2. Признак Вейерштрасса сходимости монотонной последовательности

Теорема 4.1 (Вейерштрасса). 1) Неубывающая и **ограниченная сверху** последовательность $\{x_n\}$ сходится, причём к $\sup\{x_n\}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

2) Невозрастающая и **ограниченная снизу** последовательность $\{y_n\}$ сходится, причём к $\inf\{y_n\}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\}$.

Доказательство. 1) а) Так как последовательность $\{x_n\}$ **ограничена сверху**, то существует $\sup\{x_n\} = \overline{x}$.

б) Фиксируем произвольное положительное число ε. Из определения точной верхней грани $\sup\{x_n\}$ следует, что

$$\begin{cases} \text{для любого } \varepsilon > 0 \text{ существует такой номер } k(\varepsilon) \in N, \text{ что } x_k > \overline{x} - \varepsilon; \\ \text{для любого номера } n \in N \text{ выполняется неравенство } x_n \leqslant \overline{x}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leqslant \overline{x} - x_k < \varepsilon.$$

в) Поскольку последовательность $\{x_n\}$ — **неубывающая**, то для всех номеров $n > k(\varepsilon)$ имеем (**рис. 4.1**)

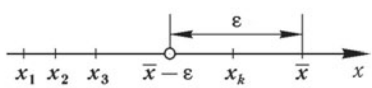

Рис. 4.1

$$x_n \in [x_k ; \overline{x}] \quad \Leftrightarrow \quad |x_n - \overline{x}| \leqslant |x_k - \overline{x}| < \varepsilon \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |x_n - \overline{x}| < \varepsilon \ \text{ для любого } \ n > k(\varepsilon).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ **сходится**, причём к числу $\overline{x} = \sup\{x_n\}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$.

2) Вспомогательная последовательность $\{x_n = -y_n\}$ удовлетворяет условиям 1-го пункта теоремы и, кроме того, $\inf\{y_n\} = -\sup\{x_n\}$ (**доказать самостоятельно**), откуда получается 2-й пункт теоремы. ■

Следствие. Монотонная ограниченная последовательность **сходится**.

Пример 4.3. Доказать, что для любого $q \in [0; 1)$ последовательность $\{q^n\}$ сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

◀ Последовательность $x_n = q^n$ — **невозрастающая**, поскольку

$$x_{n+1} = q^{n+1} = q \cdot q^n = q \cdot x_n \leqslant x_n \ \text{ для любого } \ n \in \boldsymbol{N},$$

и **ограничена снизу** числом 0, т.к. $x_n = q^n \geqslant 0$. Поэтому по **теореме Вейерштрасса сходится**: существует **конечный** предел $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = A$.

Заменяя $n = k+1$, получаем равенство

$$A = \lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{k\to\infty} q^{k+1} = q \cdot \lim_{k\to\infty} q^k = q \cdot A \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad A = q \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad A(1-q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0,$$

так как по условию $q \neq 1$. ▶

4.3. Бином Ньютона

Определение 4.4. Факториалом целого неотрицательного числа n называется число $n!$ (читается: эн факториал), определяемое по формуле:

$$n! = \begin{cases} n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1, & \text{если } n \in \boldsymbol{N}; \\ 1, & \text{если } n = 0. \end{cases}$$

Пример 4.4. $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2\cdot 1 = 2$, $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$, ...

Теорема 4.2. Для любых чисел a, b при любом $n \in \boldsymbol{N}$ справедлива **формула бинома Ньютона**

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1} \cdot b + \ldots + C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k + \ldots + C_n^n \cdot b^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $k=\overline{0,n}$, — **биномиальные коэффициенты**.

Лемма 4.1. При $0 \leqslant k \leqslant n-1$ биномиальные коэффициенты удовлетворяют **равенству** $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Доказательство леммы.

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!}\left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right] =$$

$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k-1)!}\cdot\frac{k+1+n-k}{(k+1)(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \ \blacksquare$$

Замечание 4.1. Учитывая **лемму 4.1**, биномиальные коэффициенты можно записать в виде **треугольника Паскаля**:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{1} & & & \\
 & & \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & \mathbf{1} & & \\
 & \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{6} & & \mathbf{4} & & \mathbf{1} & \\
\mathbf{1} & & \mathbf{5} & & \mathbf{10} & & \mathbf{10} & & \mathbf{5} & & \mathbf{1} \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Доказательство теоремы проведём методом математической индукции.

1) При $n=1$ формула верна: $(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$, т.к. $C_1^0 = C_1^1 = 1$.

2) Пусть формула бинома Ньютона справедлива при $n=k$, где $k \geqslant 1$. Докажем, что она верна и при $n=k+1$.

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) =$$

$$= (C_k^0\cdot a^k + C_k^1\cdot a^{k-1}\cdot b + C_k^2\cdot a^{k-2}\cdot b^2 + \ldots + C_k^k\cdot b^k)(a+b) =$$

$$= C_k^0\cdot a^{k+1} + C_k^1\cdot a^k\cdot b + C_k^2\cdot a^{k-1}\cdot b^2 + \ldots + C_k^k\cdot a\cdot b^k +$$

$$+ C_k^0\cdot a^k\cdot b + C_k^1\cdot a^{k-1}\cdot b^2 + \ldots + C_k^{k-1}\cdot a\cdot b^k + C_k^k\cdot b^{k+1} =$$

$$= \underbrace{C_k^0}_{C_{k+1}^0=1}\cdot a^{k+1} + \underbrace{(C_k^1 + C_k^0)}_{C_{k+1}^1}\cdot a^k\cdot b + \underbrace{(C_k^2 + C_k^1)}_{C_{k+1}^2}\cdot a^{k-1}\cdot b^2 + \ldots +$$

$$+ \underbrace{(C_k^k + C_k^{k-1})}_{C_{k+1}^k}\cdot a\cdot b^k + \underbrace{C_k^k}_{C_{k+1}^{k+1}=1}\cdot b^{k+1}. \ \blacksquare$$

Пример 4.5. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

4.4. Число e

Теорема 4.3. Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является **сходящейся**.

Замечание 4.2. Следуя **Эйлеру**, предел этой последовательности обозначается буквой e. Известно, что $e = 2{,}718\ 281\,828\,459\,045\,\ldots$. Постоянную e называют **неперовым числом** или числом **Д. Непера** (1550−1617).

Доказательство. 1) Сначала заметим, что при $k \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$k! = k(k-1)(k-2)\ldots 2\cdot 1 \geqslant 2^{k-1}.$$

2) Далее по формуле бинома Ньютона получим

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-[k-1])}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \quad \text{при } n \geqslant 2 \qquad \mathbf{(4.1)}$$

$$x_{n+1} = 2 + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \quad \text{при } n \geqslant 2 \qquad \mathbf{(4.2)}$$

Все слагаемые в суммах **(4.1)** и **(4.2) положительны**, причём каждое слагаемое суммы **(4.1) меньше** соответствующего слагаемого суммы **(4.2)**, так как

$$\left(1-\frac{m}{n}\right) < \left(1-\frac{m}{n+1}\right) \text{ для } m = \overline{1, n-1}.$$

Кроме того число слагаемых в сумме **(4.2)** на одно **больше**, чем в сумме **(4.1)**. Поэтому $x_n < x_{n+1}$ для любого $n \in N$, то есть последовательность $\{x_n\}$ является **возрастающей**.

3) Поскольку $0 < 1 - \frac{m}{n} < 1$ для $m = \overline{1, n-1}$, то (с учётом пункта 1) получаем:

$$x_n < 2 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} =$$

$$=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3 \text{ для любого } n\in \boldsymbol{N}.$$

4) Таким образом, мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ — **возрастающая** и **ограниченная сверху** (числом 3). Поэтому (**теорема 4.1 Вейерштрасса**) она является **сходящейся**, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e \leqslant 3$. ■

4.5. Принцип вложенных отрезков

Определение 4.5. Последовательность отрезков $\Delta_n=[a_n;b_n]$ называется **стягивающейся**, если выполняются следующие **два** условия:

1) каждый последующий отрезок принадлежит предыдущему (вложенные отрезки), то есть $\Delta_{n+1}\subset\Delta_n$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$;

2) длина n-го отрезка Δ_n стремится к нулю при $n\to\infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

Лемма (Кантора). Последовательность $\Delta_n=[a_n;b_n]$ **стягивающихся** отрезков имеют **единственную общую** точку.

Доказательство. 1) Существование. Рассмотрим два множества (две последовательности) $A=\{a_n\}$ и $B=\{b_n\}$. Условие вложенности отрезков означает, что $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\ldots\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant\ldots\leqslant b_2\leqslant b_1$, поэтому для любых номеров $n,k\in\boldsymbol{N}$ выполняется неравенство $a_n\leqslant b_k$. Согласно **свойству непрерывности** действительных чисел существует точка $c\in\boldsymbol{R}$, разделяющая множества A и B:

$$a_n\leqslant c\leqslant b_k \text{ для любых номеров } n,k\in\boldsymbol{N}.$$

В частности, $a_n\leqslant c\leqslant b_n$ для любого номера $n\in\boldsymbol{N}$, то есть c является общей точкой для всех отрезков Δ_n, $n\in\boldsymbol{N}$.

2) Единственность (доказательство от противного). Предположим, что существуют две **различные** точки c_1 и c_2, принадлежащие всем отрезкам последовательность $\{\Delta_n\}$ (**рис.4.2**).

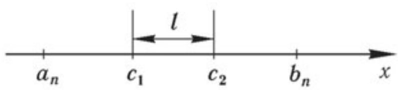

Рис. 4.2

Тогда для любого $n\in\boldsymbol{N}$ выполняются неравенства:

$$a_n\leqslant c_1\leqslant c_2\leqslant b_n \;\Rightarrow\; (b_n-a_n)\geqslant(c_2-c_1)=l>0,$$

откуда, **предельным переходом** в неравенстве, получаем **противоречие**:

$$0 = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) \geqslant l > 0,$$

которое доказывает **единственность**. ■

Замечание 4.3. В **лемме Кантора** рассматривается бесконечная система вложенных **отрезков**, а **не** интервалов — это **существенно**. Для системы стягивающихся интервалов лемма **неверна**. Например, система вложенных интервалов $\widetilde{\Delta}_n = \left(0; \frac{1}{n}\right)$ **не имеет** общей точки, поскольку $\bigcap \widetilde{\Delta}_n = \varnothing$.

§5. Подпоследовательности. Частичные пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса

5.1. Подпоследовательность. Частичный предел

Определение 5.1. Пусть $\{x_n\}$ — заданная последовательность, а $\{n_k\}$ — произвольная **возрастающая** последовательность **натуральных** чисел $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots)$. Тогда последовательность $\{y_k = x_{n_k}\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$.

Пример 5.1. Последовательность **чётных натуральных** чисел 2, 4, 6,..., взятых в порядке возрастания, **является подпоследовательностью** последовательности натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., а последовательность 6, 4, 2, ... уже **не является подпоследовательностью** последовательности 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Замечание 5.1. Согласно определению, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ образована из членов исходной последовательности $\{x_n\}$ с сохранением порядка следования элементов.

Замечание 5.2. В записи $\{x_{n_k}\}$ число k означает **порядковый номер** члена последовательности $y_1 = x_{n_1}$, $y_2 = x_{n_2}$, ..., а n_k — это номер этого члена в исходной последовательности.

Замечание 5.3. Поскольку $\{n_k\}$ — **возрастающая** последовательность **натуральных** чисел, то $n_k \geqslant k$ (здесь сравниваются члены с одинаковым порядковым номером у двух строго монотонных последовательностей $\{n_k\}$ и $\{k\}$, причём у первой шаг $h_k = n_{k-1} - n_k \geqslant 1$, а у второй шаг равен $\widetilde{h}_k = 1$). Поэтому $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Замечание 5.4. У последовательности существует **бесконечное** число подпоследовательностей.

Определение 5.2. Пусть $\{y_k = x_{n_k}\}$ — произвольная **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$. Если **существует** (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = B$, то B называется **частичным пределом** или **предельной точкой** последовательности $\{x_n\}$.

Определение 5.3. Пусть L — множество всех частичных пределов **ограниченной** последовательности $\{x_n\}$. Тогда числа $\sup L$ и $\inf L$ называют соответственно **верхним** и **нижним** пределами этой последовательности. Для них используются следующин обозначения:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n = \sup L \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n = \inf L.$$

Теорема 5.1. 1) Если последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к числу a, то любая её подпоследовательность $\{y_k\}$ **сходится** к этому же числу.

2) Если $\{x_n\}$ — **бесконечно большая** последовательность, то любая её подпоследовательность $\{y_k\}$ — **бесконечно большая** последовательность.

Доказательство. 1) Если последовательность $\{x_n\}$ **сходится** к числу a, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon) \in \boldsymbol{N}$, что для всех номеров $n > N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Поскольку $n_k \geqslant k$, то для любого номера $k > N$ выполняются неравенства:

$$n_k \geqslant k > N \quad \Rightarrow \quad |y_k - a| = |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{y_k\}$ **сходится** к числу a.

2) Доказать самостоятельно. ■

5.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании частичного предела у ограниченной последовательности

Ранее было доказано, что любая **сходящаяся** последовательность **ограничена**. Обратное утверждение неверно: последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но не является сходящейся. Однако имеет сходящиеся подпоследовательности: $\{1;\ 1;\ 1;\ ...\}$ сходится к 1, а $\{-1;\ -1;\ -1;\ ...\}$ — к (-1).

Всегда ли ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 5.2 (Больцано-Вейерштрасса). Из любой **ограниченной** последовательности $\{x_n\}$ можно выделить **сходящуюся** подпоследовательность.

Доказательство. 1) Из ограниченности последовательности $\{x_n\}$ следует, что существует отрезок $[a; b]$, содержащий все её члены.

2) Построим систему $\{\Delta_n\}$ стягивающихся отрезков, обладающих свойством: любой отрезок Δ_n этой системы содержит бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

1°. Разделим $\Delta = [a; b]$ пополам и в качестве отрезка $\Delta_1 = [a_1; b_1]$ возьмём любую из половинок, которая содержит **бесконечное** число членов последовательности $\{x_n\}$. Его длина равна $|\Delta_1| = b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$.

2°. Аналогичную операцию проделаем с отрезком Δ_1. В результате получим отрезок $\Delta_2 = [a_2; b_2]$ с длиной $|\Delta_2| = b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$.

3°. На n-м шаге получим отрезок $\Delta_n = [a_n; b_n]$ с длиной

$$|\Delta_n| = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Мы построили систему стягивающихся отрезков $\{\Delta_n\}$, поскольку

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \ldots \quad \text{и} \quad |\Delta_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

По **лемме Кантора** эта система имеет **единственную общую точку** $c = \bigcap \Delta_n$.

3) Выделим из исходной последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{y_k\}$, сходящуюся к числу c.

1°. Пусть $y_1 = x_{n_1}$ — произвольный член последовательности $\{x_n\}$, лежащий на отрезке Δ_1.

2°. На отрезке Δ_2 содержится **бесконечное число** членов последовательности $\{x_n\}$, поэтому существует элемент x_{n_2} с номером $n_2 > n_1$. Положим $y_2 = x_{n_2}$.

3°. Продолжая подобную процедуру далее, получим **подпоследовательность** $\{y_k\}$ последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что она **сходится** к числу c. Для этого заметим, что y_k и $c \in \Delta_k$ (**рис. 5.1**).

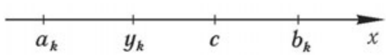

Рис. 5.1

Поэтому справедливо неравенство

$$|y_k - c| \leqslant |\Delta_k| = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Поскольку последовательность $\left\{\frac{1}{2^k}\right\}$ является **бесконечно малой** (п. 2.2., **пример 2.4**), то из **неравенства (5.1)** следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = c$. ■

Для **неограниченной** последовательности $\{x_n\}$ аналогичный результат имеет следующий вид.

Теорема 5.3. Из любой **неограниченной** последовательности $\{x_n\}$ можно выделить **бесконечно большую** подпоследовательность $\{y_k\}$.

Доказательство. 1) Из **неограниченности** последовательности $\{x_n\}$ следует существование номера $n_1 \in N$, для которого выполняется неравенство $|x_{n_1}| > 1$. Положим $y_1 = x_{n_1}$.

2) Поскольку множество $\{x_n\}$, где $n > n_1$, не является ограниченным (иначе последовательность $\{x_n\}$ была бы ограниченной), то существует номер $n_2 > n_1$, для которого выполняется неравенство $|x_{n_2}| > 2$. Положим $y_2 = x_{n_2}$.

3) На k-м шаге $(k > 2)$ находим номер $n_k > n_{k-1}$, для которого выполняется неравенство $|x_{n_k}| > k$. Положим $y_k = x_{n_k}$.

4) Очевидно, что построенная подпоследовательность $\{y_k\}$ является **бесконечно большой**. ■

Следствие (2-х теорем). Из **любой** последовательности можно выделить либо **сходящуюся**, либо **бесконечно большую** подпоследовательность.

§6. Критерий Коши для сходимости последовательности

До сих пор для установления сходимости последовательности $\{x_n\}$ нам приходилось угадывать предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ этой последовательности, а затем оценивать разность $|x_n - a|$, проверяя определение сходимости. Критерий Коши позволяет устанавливать сходимость последовательности $\{x_n\}$ только по её членам.

6.1. Фундаментальная последовательность

Определение 6.1. Последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной** (или последовательностью **Коши**), если выполнено условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N$, $k > N$ (или $n \geqslant N$, $k \geqslant N$) выполняется неравенство $|x_n - x_k| < \varepsilon$.

Замечание 6.1. Последовательность $\{x_n\}$ **не является** фундаментальной, если существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого номера $N \in \mathbf{N}$ найдётся пара номеров $n > N$, $k > N$, для которой выполняется неравенство $|x_n - x_k| \geqslant \varepsilon_0$.

Лемма 6.1. Фундаментальная последовательность **ограничена**.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ является **фундаментальной** последовательностью. Тогда, согласно определению, для $\varepsilon = 1$ существует такой номер $N = N(1)$, что для всех номеров $n, k \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - x_k| < \varepsilon \equiv 1$. В частности, при $k = N$ получаем неравенство $|x_n - x_N| < 1$, которое выполняется для всех $n \geqslant N(1)$. Следовательно,

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leqslant |x_n - x_N| + |x_N| \leqslant 1 + |x_N| = h \text{ при } n \geqslant N.$$

Поэтому $|x_n| \leqslant \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, h\}$. для любого $n \in \mathbf{N}$. ■

6.2. Необходимое и достаточное условие (критерий) сходимости последовательности

Теорема 6.1 (Критерий Коши). Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ **необходимо и достаточно**, чтобы она была **фундаментальной**.

Доказательство. Докажем только **необходимость**. Пусть $\{x_n\}$ сходится к числу a. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, что для всех номеров $n > N$ элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, для номеров $n, k \geqslant N$ выполняются неравенства

$$|x_n - x_k| = |(x_n - a) - (x_k - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. последовательности $\{x_n\}$ является **фундаментальной**. ■

Упражнение 6.1. Доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

◀ Согласно **критерию Коши** последовательность $\{x_n\}$ является расходящейся, если она **не является фундаментальной**, т.е.

$$\exists \varepsilon_0 > 0: \text{ для } \forall N \in \boldsymbol{N} \quad \exists n > N, \ \exists k > N: \ |x_n - x_k| \geqslant \varepsilon_0 . \qquad \textbf{(6.1)}$$

Для произволного номера $N \in \boldsymbol{N}$ возьмём $n = N+1$ и $k = 2n$. Тогда

$$|x_n - x_k| = |x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{n+n} \cdot n = \frac{1}{2} = \varepsilon_0 .$$

Таким образом, условие **(6.1)** выполняется для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ **не является фундаментальной** и **расходится**. ▶

§7. Числовые функции

7.1. Числовые функции и их графики

Определение 7.1. Пусть $X \in \boldsymbol{R}$ — произвольное множество. Числовой функцией, определенной на множестве X, называется соответствие f, которое каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие **единственное** число $y \in \boldsymbol{R}$. При этом пишут $y = f(x)$, где $x \in X$, и называют x независимой переменной (или аргументом функции), а y — зависимой переменной.

Замечание 7.1. В дальнейшем мы будем изучать (как правило) числовые функции, поэтому для краткости станем именовать их просто **функциями**.

Множество X называют **областью определения** функции f и обозначают $D(f)$, а числа x из $D(f)$ — **значениями аргумента**. Число y_0, соответствующее значению $x_0 \in D(f)$, называют **значением функции в точке** x_0 (это частное значение функции f) и обозначают $f(x_0)$ или $f(x)|_{x=x_0}$ (**рис. 7.1**). Совокупность всех частных значений, которые f принимает на области определения $D(f)$, называется **множеством значений** функции и обозначается $E(f)$.

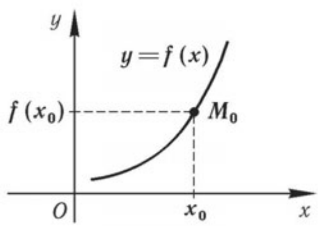

Рис. 7.1

Обозначения. Для функции приняты следующие обозначения:

1) $y=f(x)$, где $x \in X$; **2)** $y=y(x)$, где $x \in X$;

3) $f: X \to Y$; **4)** $f: X \to \boldsymbol{R}$.

Определение 7.2. Графиком функции $y=f(x)$, $x \in D(f)$, в прямоугольной декартовой системе координат Oxy называется множество всех точек $M(x; f(x))$ плоскости Oxy, абсциссы которых принадлежат $D(f)$, а ординаты равны соответствующим значениям функции.

7.2. Способы задания функции

1. Аналитический способ. Функция $y=f(x)$ называется заданной аналитически, если она определяется с помощью формулы (или, что то же, аналитического выражения), указывающей, какие действия надо произвести над каждым значением x, чтобы получить соответствующее значение y. При этом функция может задаваться одной формулой на всей области определения, или несколькими, различными для разных областей её задания.

Пример 7.1. $y=3-x$, $X=D(y)=\boldsymbol{R}$, $Y=E(y)=\boldsymbol{R}$ (**рис. 7.2**).

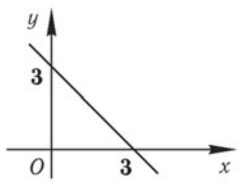

Рис. 7.2

Пример 7.2. $\begin{cases} 0, & \text{если } x<0; \\ \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x<1; \\ 1, & \text{если } x \geqslant 1. \end{cases}$ $\quad X=D(y)=\boldsymbol{R}$; $Y=E(y)=[0;\ 1]$. (**рис. 7.3**).

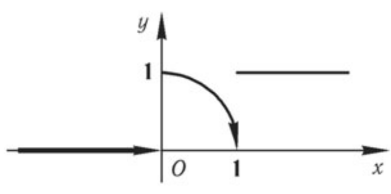

Рис. 7.3

Пример 7.3. $y=\operatorname{sgn} x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, \text{ если } x>0; & \text{signum — знак (лат.);} \\ 0, \text{ если } x=0; & X=D(y)=\boldsymbol{R}; \\ -1, \text{ если } x<0. & Y=E(y)=\{-1;\ 0;\ 1\} \end{cases}$ (**рис. 7.4**).

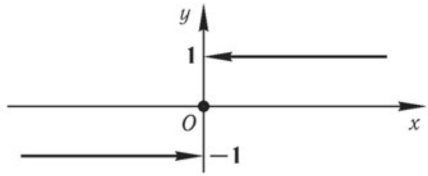

Рис. 7.4

Областью определения функции, заданной аналитически, если она заранее не указана, считается **ОДЗ** (область допустимых значений) аналитического выражения, определяющего функцию. Напомним, что ОДЗ аналитического выражения — это множество всех действительных значений x, для каждого из которых это выражение имеет смысл, т.е. принимает вполне определённое действительное значение. Приведём примеры:

1°. $y = \sin x \quad \Rightarrow \quad D(y) = \boldsymbol{R} = (-\infty;\ +\infty).$

2°. $y = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad D(y) = \boldsymbol{R} \setminus \{1\} = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$

3°. $y = \sqrt{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad D(y) = [-2;\ 2].$

2. Графический способ. Функция $y = f(x)$ называется заданной графически, если задан её график, т.е. множество точек $M(x; f(x))$ на плоскости Oxy, абсциссы которых принадлежат области определения $D(f)$, а ординаты равны соответствующим значениям функции.

Замечание 7.2. Отметим, что не любая линия на плоскости с декартовой системой координат Oxy определяет (однозначную) функцию. Например, любая окружность (положительного радиуса) не является графиком (**однозначной**) функции, потому что некоторым значениям аргумента x соответствуют две точки на окружности.

Не для каждой функции можно изобразить её график. Например, функция Дирихле, определённая на всей числовой прямой $\boldsymbol{R}$ следующим образом

$$y = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \textbf{рациональное} \text{ число;} \\ 0, \text{ если } x - \textbf{иррациональное} \text{ число,} \end{cases}$$

не допускает такого изображения.

Замечание 7.3. Преимуществом графического задания функции является **наглядность**, позволяющая установить важные черты поведения функции. **Недостаток** этого способа заключается в невозможности применения математического аппарата для более детального исследования функции.

3. Табличный способ. Функция называется заданной таблично, если приведена таблица, в которой указаны числовые значения функции y_1, ..., y_n для отдельных значений аргументов x_1, ..., x_n. Например,

x	0	0,2	0,3	0,5	1
y	3	2,5	1,7	—0,2	5

Область определения такой функции состоит лишь из значений аргументов, приведённых в таблице.

Замечание 7.4. Несмотря на простоту, табличный способ обладает существенными недостатками, так как не даёт полного представления о характере функциональной зависимости между переменными x и y (за исключением случая, когда в таблице перечислены все возможные значения аргумента x) и не является наглядным.

Замечание 7.5. Краткое рассмотрение преимуществ и недостатков различных способов задания функции показывает, что для изучения её поведения лучше всего сочетать исследование аналитического выражения функции с построением её графика (по точкам — с помощью таблицы).

7.3. Арифметические действия над функциями

Пусть f и g — числовые функции, а C — произвольное действительное число (или, как часто говорят, постоянное). Тогда на пересечении областей определения этих функций — на множестве $X = D(f) \cap D(g)$ (если оно непусто) можно производить различные арифметические операции над функциями.

1. Умножение функции на число. Функция $C \cdot f$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x_0 \in D(f)$ значение $y_0 = C \cdot f(x_0)$.

2. Сложение функций. Функция $f + g$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x_0 \in X$ значение $y_0 = f(x_0) + g(x_0)$.

3. Вычитание функций. Функция $f - g$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x_0 \in X$ значение $y_0 = f(x_0) - g(x_0)$.

4. Умножение функций. Функция $f \cdot g$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x_0 \in X$ значение $y_0 = f(x_0) \cdot g(x_0)$.

5. Деление функций. Функция $\frac{f}{g}$ определяется как функция, принимающая в каждой точке $x_0 \in X$ значение $y_0 = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

7.4. Основные характеристики функций

1. Чётные и нечётные функции

Определение 7.3. Функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **чётной**, если для любого числа $x \in X$ выполняются **два** условия:

1) $-x \in X$;

2) $f(-x) = f(x)$.

График **чётной** функции **симметричен** относительно **оси** Oy (**рис. 7.5**).

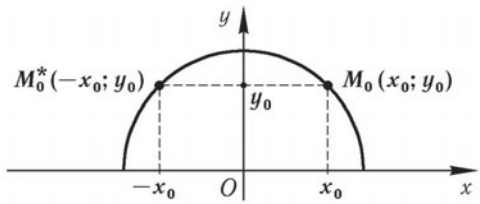

Рис. 7.5

Определение 7.4. Функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **нечётной**, если для любого числа $x \in X$ выполняются **два** условия:

1) $-x \in X$;

2) $f(-x) = -f(x)$.

График **нечётной** функции **симметричен** относительно **начала координат** (**рис. 7.6**).

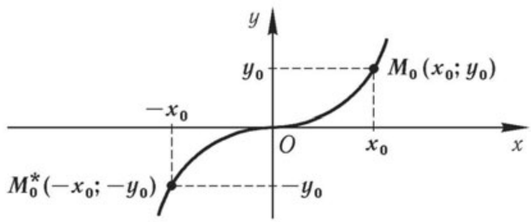

Рис. 7.6

Сформулируем простейшие свойства **чётных** и **нечётных** функций.

Теорема 7.1. Сумма, разность, произведение и частное **чётных** функций есть функции **чётные**.

Теорема 7.2. Сумма и разность **нечётных** функций есть функции **нечётные**.

Теорема 7.3. Произведение и частное **двух нечётных** функций есть функции **чётные**.

Замечание 7.6. Не следует думать, что каждая функция является либо **чётной**, либо **нечётной**. Большинство функций не относятся ни к одному из этих классов. Их называют **функциями общего вида**. Приведём примеры таких функций: $y=2^x$, $y=\lg x$, $y=x^5+1$.

2. Ограниченные и неограниченные функции

Определение 7.7. Функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **ограниченной сверху** на множестве $G \subset X$, если существует такое действительное число M, что для всех $x \in G$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$ (**рис. 7.7**).

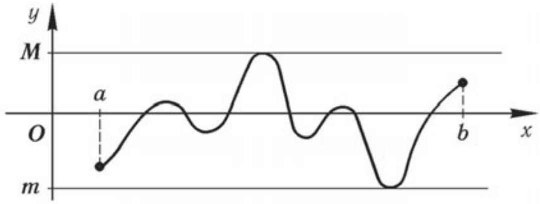

Рис. 7.7

Определение 7.8. Функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **ограниченной снизу** на множестве $G \subset X$, если существует такое действительное число m, что для всех $x \in G$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant m$ (**рис. 7.7**).

Определение 7.9. Функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **ограниченной** на множестве $G \subset X$, если она **ограничена** на этом множестве и **снизу**, и **сверху** (**рис. 7.8**), т.е. существует такое число $M_1 > 0$, что для всех $x \in G$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M_1$ (**рис. 7.8**).

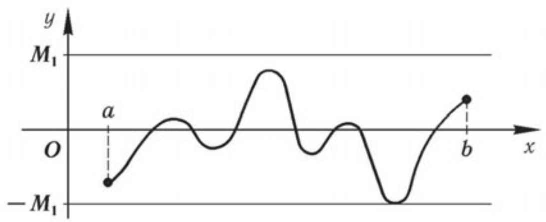

Рис. 7.8

3. Мотонные функции

Определение 7.5. Пусть $f: X \to \boldsymbol{R}$ и $G \subset X$. Если **для любых** значений аргументов x_1, $x_2 \in G$:

1) из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **возрастающей** на **множестве** G;

2) из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **неубывающей** на **множестве** G;

3) из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **убывающей** на **множестве** G;

4) из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется **невозрастающей** на **множестве** G.

Определение 7.6. Возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие на множестве G функции называются **монотонными** на этом множестве, а возрастающие и убывающие функции — **строго монотонными**. Интервалы, на которых функция является монотонной, называются её интервалами монотонности.

Функция, график которой изображён на **рис. 7.9**, **возрастает** на отрезке $[c; d]$, **не убывает** на отрезке $[b; e]$, **убывает** на отрезках $[a; b]$ и $[e; s]$, **не возрастает** на отрезках $[a; c]$ и $[d; s]$.

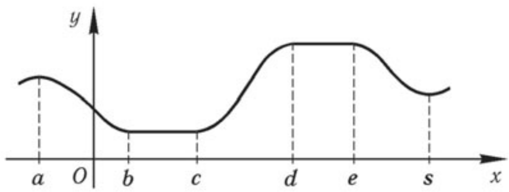

Рис. 7.9

4. Периодические функции

Определение 7.7. Функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **периодической**, если **существует** такое число $T \neq 0$, что для каждого $x \in X$ выполняются следующие условия:

1) числа $(x-T)$ и $(x+T)$ принадлежат множеству X;

2) справедливы равенства $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$.

При этом число называется **периодом** функции $f(x)$.

Теорема 7.4. Если число T является **периодом** функции $y = f(x)$, то и число $Q = kT$, где $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \neq 0$, также является её **периодом**.

Определение 7.8. Наименьший положительный период функции $f(x)$, если он **существует**, называется **основным периодом** этой функции.

Замечание 7.7. Не любая периодическая функция имеет **основной период**. Например, **функция Дирихле**, определённая на всей числовой оси следующим образом

$$y=\begin{cases} 1, \text{ если } x - \textbf{рациональное} \text{ число;} \\ 0, \text{ если } x - \textbf{иррациональное} \text{ число,} \end{cases}$$

имеет периодом **любое рациональное** число и, поэтому, **не имеет** основного периода.

Теорема 7.5. Пусть $f(x)$ — **периодическая** функция. Тогда для любого действительного числа $C \neq 0$ функции $f(x+C)$, $Cf(x)$ и $f(x)+C$ также являются **периодическими**, причём функции $f(x)$, $f(x+C)$, $Cf(x)$ и $f(x)+C$ имеют **равные периоды**.

Теорема 7.6. Пусть T — **период** функции $f(x)$ и $\alpha \neq 0$. Тогда число $T_1 = \frac{T}{|\alpha|}$ является периодом функции $f(\alpha x)$. Если, кроме того, T — **основной период** функции $f(x)$, то T_1 — **основной период** функции $f(\alpha x)$.

Определение 7.8. Положительные числа T_1 и T_2 называются **соизмеримыми**, если существуют такие **натуральные** числа n и k, что $nT_1 = kT_2$. При этом число $T = nT_1 = kT_2$ называется **кратным чисел** T_1 и T_2.

Теорема 7.7. Если периоды T_1 и T_2 функций $f(x)$ и $g(x)$ **соизмеримы**, то число T, кратное T_1 и T_2, является **периодом** их суммы, разности, произведения и частного.

Замечание 7.8. Не следует считать, что если T_1 и T_2 — **основные** периоды функций $f(x)$ и $g(x)$, то число T, является **наименьшим общим кратным** чисел T_1 и T_2, всегда является **основным** периодом функций $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$. Например, **основной период** функций $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π, а **основной период** их частного $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ равен π.

Теорема 7.8. Пусть **периодическая** функция $f(x)$ имеет в точках a и b $(a < b)$ **локальный максимум** (минимум) и **не имеет** локального максимума (минимума) на интервале $(a; b)$. Тогда любой её **положительный период** T не может быть меньше расстояния между этими точками, т.е. $T \geqslant (b-a)$.

Теорема 7.9. Пусть **периодическая** функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$, а вточках a и b $(a<b)$ либо не определена, либо разрывна. Тогда любой её **положительный период** T не может быть меньше расстояния между этими точками, т.е. $T \geqslant (b-a)$.

§8. Предел функции

8.1. Два определения предела функции в точке. Их эквивалентность

Определение 8.1 (по **Гейне** – на языке последовательностей). Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $a \in \boldsymbol{R}$ (или при $x \to a$), если выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ определена в некоторой **проколотой окрестности** $\dot{U}(a)$ точки a (т.е. $\dot{U}(a) \subset D(f)$);

2) для любой последовательности $\{x_n\} \subset \dot{U}(a)$, сходящейся к точке a, последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений этой функции сходится к числу A.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определение 8.2 (по **Коши** — на языке неравенств или на языке «**ε-δ**»). Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке $a \in \boldsymbol{R}$ (или при $x \to a$), если выполняются следующие **два** условия (**рис. 8.1**):

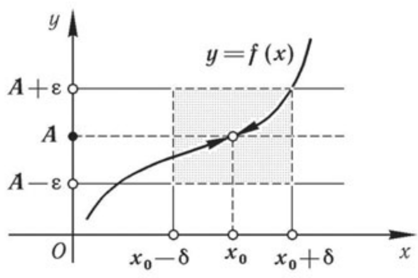

Рис. 8.1

1) $f(x)$ определена в некоторой **проколотой окрестности** $\dot{U}(a)$ точки a (т.е. $\dot{U}(a) \subset D(f)$);

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется **неравенство** $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание 8.1. Для обобщения понятия предела функции полезно **определение 8.2** сформулировать в терминах окрестностей (приведём два варианта такого определения.

1) Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \boldsymbol{R}$ (или при $x \to a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \dot{U}_\delta(a)$ выполняется включение $f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

2) Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке $a \in \boldsymbol{R}$ (или при $x \to a$), если для любой окрестности $U(A)$ точки A существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки a, что для любого $x \in \dot{U}(a)$ выполняется включение $f(x) \in U(A)$.

Теорема 8.1. Определения **8.1** и **8.2** предела функции в точке по Гейне и по Коши **эквивалентны**.

Доказательство. В определениях предела функции $f(x)$ по Коши и по Гейне предполагалось, что функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a. Следовательно, существует такое число $\delta_0 > 0$, что $x \in \dot{U}_{\delta_0}(a) \subset D(f)$. Далее будем рассматривать δ, удовлетворяющие условию $\delta \in (0; \delta_0]$.

1) (Коши $\Rightarrow$ Гейне). Пусть число A есть предел функции f в точке a по **Коши**. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию

$$0 < |x - a| < \delta \tag{8.1}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Докажем, что в этом случае существует предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне, который равен числу A. Для этого рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, целиком лежащую в $\dot{U}_{\delta_0}(a)$ и сходящуюся к числу a. Согласно определению сходящейся последовательности существует такой номер $N = N(\delta) \in \boldsymbol{N}$, что для любого номера $n > N$ выполняется неравенство $0 < |x_n - a| < \delta$ (то есть условие **(8.1)**), из которого (смотрите условие **(8.2)**) следует, что неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ справедливо для любого $n > N$, то есть последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A. Тем самым мы доказали, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке a по **Гейне**.

2) (Гейне $\Rightarrow$ Коши; доказательство от противного). Пусть число A есть предел функции $f(x)$ в точке a по **Гейне**. Предположим, что A не является пределом $f(x)$ в точке a по **Коши**. Это означает, что существует такое $\boldsymbol{\varepsilon_0} > 0$, что для любого $\boldsymbol{\delta} > 0$ (напоминаем, что $\boldsymbol{\delta} \leqslant \boldsymbol{\delta_0}$) существует такая точка $x = x(\boldsymbol{\delta})$, что

$$0 < |x - a| < \boldsymbol{\delta}, \qquad \textbf{(8.3)}$$

но

$$|f(x) - A| > \boldsymbol{\varepsilon_0}. \qquad \textbf{(8.4)}$$

Рассмотрим числовую последовательность $\boldsymbol{\delta}_n = \frac{\boldsymbol{\delta_0}}{n}$ и соответствующую ей последовательность точек $x_n = x(\boldsymbol{\delta}_n)$, $n \in \boldsymbol{N}$. В силу **(8.3–8.4)** для любого $n \in \boldsymbol{N}$ выполняются условия $\begin{cases} 0 < |x_n - a| < \frac{\boldsymbol{\delta_0}}{n}; \\ |f(x_n) - A| \geqslant \boldsymbol{\varepsilon_0}, \end{cases}$ означающие, что $\{x_n\} \subset \dot{U}_{\boldsymbol{\delta_0}}(a)$ и $x_n \to a$ при $n \to \infty$, но $f(x_n) \not\to A$ при $n \to \infty$. Это означает, что число A **не является** пределом функции $f(x)$ в точке a **по Гейне**. Полученное противоречие завершает доказательство 2-го пункта. ■

Следствие. Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то он **единственный**.

Доказательство. Согласно **определению 8.1**, этот предел равен пределу последовательности, а предел последовательности – **единственный**. ■

Пример 8.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to a} (2 - 3x) = 2 - 3a$.

◄ **1 способ** (с помощью определения по **Гейне**). Так как $x \to a$, то рассмотрим произвольную сходящуюся к a последовательность $\{x_n\}$, все члены которой отличны от a. Используя свойства предела последовательности получим:

$$\lim_{x \to a} (2 - 3x) = \lim_{n \to \infty} (2 - 3x_n) = \lim_{n \to \infty} 2 - 3 \lim_{n \to \infty} x_n = 2 - 3a.$$

2 способ (с помощью определения по **Коши**). Требуется для произвольного $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ найти такое число $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \boldsymbol{\delta}$, выполнялось бы неравенство

$$|(2 - 3x) - (2 - 3a)| < \boldsymbol{\varepsilon} \iff 3|x - a| < \boldsymbol{\varepsilon} \iff |x - a| < \tfrac{\boldsymbol{\varepsilon}}{3}.$$

Очевидно, что достаточно взять $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{3}$. ►

Пример 8.2. Доказать, что функция **Дирихле**

$$f(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ — **рациональное** число;} \\ 0, \text{ если } x \text{ — **иррациональное** число,} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке $a \in \boldsymbol{R}$.

◀ Фиксируем произвольное $a \in \boldsymbol{R}$. Воспользуемся определением **предела функции по Гейне**. Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$, сходящиеся к a, и обладающие свойствами

$$\left.\begin{array}{l} x_n \neq a,\ x_n \text{ — **рациональное** число} \\ z_n \neq a,\ z_n \text{ — **иррациональное** число} \end{array}\right\} \text{ для } n \in \boldsymbol{N}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1 \neq 0 = \lim_{n \to \infty} 0 = \lim_{n \to \infty} f(z_n).$$

Неравенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$ для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$ означает, что **не существует** $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **ни в одной** точке $a \in \boldsymbol{R}$. ▶

8.2. Обобщение понятия предела функции в точке. Предел функции при $x \to \infty$

Напомним, что в **§1, п. 1.5** были даны понятия **окрестностей** точки $a \in \boldsymbol{R}$ и символов ∞, $+\infty$ и $-\infty$, называемых иногда бесконечно удаленными точками. Определение предела функции в точке по Коши, записанное в терминах окрестностей, позволяет перенести его на случай бесконечно удаленных точек. Пусть ω — либо точка $a \in \boldsymbol{R}$, либо одна из бесконечно удаленных точек ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 8.3. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \omega$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует **проколотая** окрестность $\dot{U}(\omega)$, в каждой точке которой выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание 8.2. В определении **8.3** (в скрытом виде) содержится требование, чтобы область определения функции $f(x)$ содержала некоторую проколотую окрестность точки ω.

Замечание 8.3. Заменяя условие $x \in \dot{U}(\omega)$ соответствующим неравенством, получим определение предела по Коши для случаев $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Замечание 8.4. Используя бесконечно большие последовательности $x_n \to \infty$, $x_n \to +\infty$ и $x_n \to -\infty$, легко сформулировать определение предела функции по Гейне для этих же случаев.

Замечание 8.5. Как и в случае $x \to a$, где $a \in \boldsymbol{R}$, определения пределов по Гейне и по Коши — эквиваленты.

8.3. Односторонние пределы функции

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ не накладывалось никаких ограничений на то, как именно точка x стремится к точке a (слева, справа, совершая колебания около a). Однако бывают случаи, когда способ приближения точки x к a существенно влияет на значение предела функции. В связи с этим вводят понятия **односторонних** пределов.

Определение 8.4 (по Гейне). Число A называют **левым** (**правым**) пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$, элементы которой **меньше**—левее (**больше**—правее) a, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ **сходится** к A. Левый и правый пределы функции называются **односторонними пределами**. Для них используется следующая символическая запись:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a-} f(x) = A, \text{ или } f(a-0) = A$$

$$\left(\lim_{x \to a+0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a+} f(x) = A \text{ или } f(a+0) = A\right).$$

Замечание 8.6. В случае $a = 0$ для односторонних пределов используются следующие обозначения:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x),$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x).$$

Определение 8.5 (по Коши). Число A называют **левым** (**правым**) пределом функции $f(x)$ в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию

$$a - \delta < x < a \quad (\text{соответственно, } a < x < a + \delta),$$

выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Замечание 8.7. Определение односторонних пределов по Коши легко формулируется в терминах полуокрестностей точки a:

$$\left(\lim_{x \to a-0} f(x) = A\right) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon\ \forall x \in U_{\delta}^{-}(a)\ \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(A));$$

$$\left(\lim_{x\to a+0} f(x)=A\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0\colon\ \forall x\in U_{\delta}^{+}(a)\ \Rightarrow f(x)\in U_{\varepsilon}(A)\right).$$

Упражнение. Найти односторонние пределы функции $f(x)=\operatorname{sgn} x$ в точке $a=0$.

Теорема 8.2. Определения односторонних пределов по **Коши** и по **Гейне эквивалентны**.

Доказательство провести самостоятельно.

Теорема 8.3. Функция $f(x)$ имеет предел в точке a **тогда и только тогда**, когда в этой точке **существуют** как **правый**, так и **левый** пределы этой функции, причём они **совпадают**. В этом случае **предел** функции $f(x)$ в точке a равен **односторонним** пределам этой функции в точке a.

Доказательство. 1) Необходимость $(\Rightarrow)$. Пусть существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Тогда (согласно определению предела функции по Коши) для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Следовательно, как для точек $x\in(a-\delta;a)$, так и для точек $x\in(a;a+\delta)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. А это (согласно определению односторонних пределов по Коши) означает, что число A является пределом функции $f(x)$ в точке a как **слева**, так и **справа**:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=A=\lim_{x\to a+0} f(x).$$

2) Достаточность $(\Leftarrow)$. Обратно, пусть существуют равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=A.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют такие числа $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$, что для всех x из интервалов $(a-\delta_1;a)$ и $(a;a+\delta_2)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Положим $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда для любого x, удовлетворяющего условию

$$x\in(a-\delta;a)\cup(a;a+\delta) \quad\Leftrightarrow\quad 0<|x-a|<\delta$$

выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. ■

8.4. Свойства пределов функций, связанные с арифметическими операциями и предельным переходом в неравенствах

Теорема 8.4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a **конечные** пределы, причём $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$.

Тогда 1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,g(x)]=AB$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ при условии, что $B\neq 0$.

Доказательство. Докажем только пункт **2)** (остальные пункты доказываются **аналогично**).

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}\subset D(f)$, сходящуюся к точке a, для которой выполняется условие $x_n\neq a$, $n\in \boldsymbol{N}$. Согласно условию теоеремы и определению предела функции по **Гейне**, последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к числам A и B соответственно:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n)=B.$$

Поэтому (см. свойства числовых последовательностей, связанные с арифметическими операциями) справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)\,g(x_n)]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\cdot\lim_{n\to\infty} g(x_n)=A\cdot B,$$

из которого следует существование предела $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\,g(x)]$ и равенство

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)]=\lim_{n\to\infty}[f(x_n)\,g(x_n)]=AB. \ \blacksquare$$

Теорема 8.5. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке a **конечные** пределы, причём $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$;

2) существует проколотая окрестность $\dot{U}(a)$, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x)\leqslant g(x)$.

Тогда $A\leqslant B$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}\subset D(f)$, сходящуюся к точке a, для которой выполняется условие $x_n\neq a$, $n\in \boldsymbol{N}$. Согласно условию теоеремы и определению предела функции по **Гейне**, последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ сходятся к числам A и B соответственно:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x)=B.$$

Следовательно, для окрестности $\overset{\bullet}{U}(a)$ найдётся такой номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, что для всех номеров $n > N$ элементы этой последовательности удовлетворяют условию $\{x_n\} \subset \overset{\bullet}{U}(a)$. Поэтому для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $f(x_n) \leqslant g(x_n)$, из которого следует (см. свойства числовых последовательностей, связанные с предельным переходом в неравенствах), что

$$A = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B, \text{ т.е. } A \leqslant B. \blacksquare$$

Теорема 8.6 (о «зажатой» функции). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) существуют равные пределы: $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A = \lim\limits_{x \to a} f_2(x)$;

2) существует проколотая окрестность $\overset{\bullet}{U}(a)$, для всех точек которой выполняется неравенство $f_1(x) \leqslant g(x) \leqslant f_2(x)$.

Тогда с**уществует** предел функции $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset D(f)$, сходящуюся к точке a, для которой выполняется условие $x_n \neq a$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда (согласно определению предела функции по **Гейне**) $\lim\limits_{n \to \infty} f_1(x_n) = A = \lim\limits_{n \to \infty} f_2(x_n)$ и из сходимости $x_n \to a$ при $n \to \infty$ следует существование такого номера $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, что для всех номеров $n > N$ элементы x_n этой последовательности лежат в **проколотой окрестности** $\overset{\bullet}{U}(a)$. Следовательно, двойное неравенство $f_1(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant f_2(x_n)$ выполняется для любого номера $n > N$ и по теореме о **пределе «зажатой» последовательности** существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = A$. Это равносильно (см. определение предела функции по **Гейне**) **существованию** предела $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$. $\blacksquare$

8.5. Локальная ограниченность функций, имеющих (конечный) предел. Критерий Коши существования (конечного) предела функции

Пусть ω — либо конечная точка a, либо бесконечно удаленная точка ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 8.7 (локальная ограниченность). Пусть существует **конечный** предел $\lim\limits_{x\to\omega} f(x)=A$. **Тогда существует** проколотая окрестность $\dot{U}(\omega)$ точки ω, в которой функция $f(x)$ ограничена (то есть существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x\in\dot{U}(\omega)$ справедливо неравенство $|f(x)|<M$).

Доказательство. В определении предела функции по Коши возьмем $\varepsilon=1$. Тогда существует проколотая окрестность $\dot{U}(\omega)$, в каждой точке которой выполняется неравенство $|f(x)-A|<1$. Поэтому (согласно неравенству треугольника), для любого $x\in\dot{U}(\omega)$ справедлива следующая оценка:

$$|f(x)|=|(f(x)-A)+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|\equiv M,$$

означающая **локальную ограниченность** функции $f(x)$ в точке ω. ■

Определение 8.6. Функция $f(x)$ удовлетворяет в точке ω **условию Коши**, если для любого $\varepsilon>0$ существует такая **проколотая** окрестность $\dot{U}(\omega)$, что для любых $x', x''\in\dot{U}(\omega)$ выполняется неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Замечание 8.8. В определении условия Коши для функции $f(x)$ в точке ω (в скрытой форме) содержится требование, чтобы область определения функции $f(x)$ содержала некоторую **проколотую окрестность** точки ω.

Теорема 8.8 (**Критерий Коши** существования предела **функции**). Для существования (**конечного**) предела функции $f(x)$ в точке ω **необходимо и достаточно**, чтобы эта функция удовлетворяла в точке ω условию Коши.

Доказательство Приведём доказательство только **необходимости**. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Тогда (согласно определению предела функции по Коши) для любого $\varepsilon>0$ существует такая проколотая окрестность $\dot{U}(\omega)$, что для любого $x\in\dot{U}(\omega)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому (благодаря неравенству треугольника) для любых $x', x''\in\dot{U}(\omega)$ справедлива оценка:

$$|f(x')-f(x'')|=|(f(x')-A)-(f(x'')-A)|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

означающая, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке ω **условию Коши**. ■

8.6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть ω — либо конечная точка a, либо бесконечно удаленная точка ∞, $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 8.7. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** в точке ω (или при $x \to \omega$), если $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = 0$.

Замечание 8.9. В определении **8.7** (в скрытом виде) содержится требование, чтобы $D(f)$ содержала некоторую **проколотую окрестность** точки ω.

Пример 8.3. Функция $f(x) = x^n$ является **бесконечно малой** при $x \to 0$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$.

Определение 8.8. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** в точке ω (или при $x \to \omega$), если для любого числа $M > 0$ **существует** такая проколотая окрестность $\dot{U}(\omega)$ этой точки, что для всех $x \in \dot{U}(\omega)$ справедливо неравенство $|f(x)| > M$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \infty$, и такой предел называют **бесконечным пределом**. Кроме того, если в некоторой окрестности $\dot{U}(\omega)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant 0$ $(f(x) < 0)$, то для **бесконечно большой** функции при $x \to \omega$ пишут $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = -\infty\right)$.

Замечание 8.10. Определения **конечного** и **бесконечного** пределов в терминах окрестностей имеют одинаковый вид: пусть Ω — либо действительное число A, либо один из символов ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Тогда

$$\left(\lim_{x \to \omega} f(x) = \Omega\right) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{l}\text{Для любой окрестности } V(\Omega) \text{ существует такая } \textbf{проколотая} \text{ окрестность} \\ \dot{U}(\omega)\text{, что для любого } x \in \dot{U}(\omega) \text{ справедлива принадлежность } f(x) \in V(\Omega)\end{array}\right).$$

Теорема 8.9. 1) Если $\alpha(x)$ — **бесконечно малая** функция при $x \to \omega$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\omega)$, то $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ — **бесконечно большая** функция при $x \to \omega$.

2) Если $f(x)$ — **бесконечно большая** функция при $x \to \omega$ и $f(x) \neq 0$ в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(\omega)$, то $\beta(x) = \frac{1}{f(x)}$ — **бесконечно малая** функция при $x \to \omega$.

Доказательство провести самостоятельно, используя определение предела функции по **Гейне** или по **Коши**.

Замечание 8.11. Для **бесконечно малых функций** справедливы все свойства **бесконечно малых последовательностей**.

§9. Непрерывность функции

9.1. Понятие непрерывности функции в точке

Определение 9.1. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $a \in \boldsymbol{R}$, если выполняются следующие **три** условия:

1) она **определена** в некоторой **окрестности** точки a;
2) существует **конечный** предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$;
3) этот предел равен значению функции в точке a (**рис. 9.1**):

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad \textbf{(9.1)}$$

Используя для $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ определение по **Гейне** или по **Коши** можно переписать определение **9.1** в виде:

Определение 9.2 (Гейне). Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $a \in \boldsymbol{R}$, если выполняются следующие **три** условия:

1) она **определена** в некоторой **окрестности** $U(a)$ точки a;
2) для любой последовательности $\{x_n\} \subset U(a)$, **сходящейся** к точке a, существует **конечный** предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$;
3) этот предел равен значению функции в точке a:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a). \qquad \textbf{(9.2)}$$

Определение 9.3 (Коши). Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $a \in \boldsymbol{R}$, если выполняются следующие условия:

1) она **определена** в некоторой **окрестности** точки a;
2) для любого $\varepsilon > 0$ **существует** такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ (**рис. 9.1**).

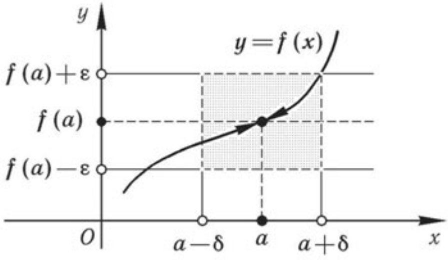

Рис. 9.1

Замечание 9.1. Равенство **(9.1)** можно записать в виде

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right),$$

означающем, что для **непрерывной** функции можно переставить знак функции и знак предела.

Введем **новые обозначения**: $\Delta x = x - a$ и $\Delta y(a) = \Delta f(a) = f(x) - f(a)$.

Сформулируем определение непрерывности функции в новых обозначениях.

Определение 9.4. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $a \in \boldsymbol{R}$, если выполняются следующие условия:

1) она **определена** в некоторой **окрестности** точки a;

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y(a) = 0.$

Теорема 9.1. Определения **9.1** и **9.4 эквивалентны**.

Доказательство провести самостоятельно.

Замечание 9.2. Непрерывные функции образуют **основной класс** функций, с которыми работают в математическом анализе. Для **непрерывных** функций **малому** изменению аргумента соответствует **малое** изменение значения функции.

Пример 9.1. Функция $f(x) \equiv c$ **непрерывна** в любой точке $x = a \in \boldsymbol{R}$, так как

$$\Delta y(a) = c - c = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y(a) = 0.$$

Пример 9.2. Функция $f(x) \equiv x$ **непрерывна** в любой точке $x = a \in \boldsymbol{R}$, так как

$$\Delta y(a) = \Delta x \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y(a) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Пример 9.3. Доказать, что функция $f(x) \equiv \sin x$ **непрерывна** в любой точке $x = a \in \boldsymbol{R}$.

◀ Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.1. Для любого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$.

Доказательство. Рассмотрим **три** случая.

1 случай: $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

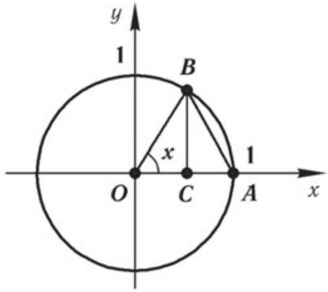

Рис. 9.2

В **тригонометрическом круге** рассмотрим центральный угол $\angle BOA$ радианной меры x. Из точки B опустим перпендикуляр BC на радиус AO (**рис. 9.2**). Очевидно, что

$$\textbf{длина отрезка } \boldsymbol{BC} \leqslant \textbf{длины хорды } \boldsymbol{AB} \leqslant \textbf{длины дуги } \overset{\frown}{\boldsymbol{AB}}$$

(первое неравенство справедливо, поскольку BC — катет, AB — гипотенуза прямоугольного ΔABC, а второе неравенство — т.к. длина дуги окружности $\overset{\frown}{AB}$ не меньше длины хорды AB, которая её стягивает).

Поскольку $\overset{\frown}{AB} = x$, то $BC = \sin x$ (согласно определению $\sin x$). Следовательно, мы доказали неравенство $\sin x \leqslant x$ для $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

2 случай: $0 \leqslant |x| < \frac{\pi}{2}$.

Согласно доказанному выше, справедливо неравенство $|\sin|x|| \leqslant |x|$.

Поскольку функция $\sin x$ является **нечётной**, то $|\sin x|$ — **чётная** функция, следовательно, $|\sin x| = |\sin|x||$. Таким образом, имеем

$$|\sin x| = |\sin|x|| \leqslant |x| \quad \Rightarrow \quad |\sin x| \leqslant |x| \text{ при } 0 \leqslant |x| < \frac{\pi}{2}.$$

3 случай. $|x| \geqslant \frac{\pi}{2}$.

Очевидно, что

$$|\sin x|\leqslant 1<\frac{\pi}{2}\leqslant|x| \;\Rightarrow\; |\sin x|\leqslant|x| \text{ при } |x|\geqslant\frac{\pi}{2}. \;\blacksquare$$

Теперь докажем **непрерывность** функции $f(x)=\sin x$ в произвольной точке $x=a\in\boldsymbol{R}$. Произведём несложные преобразования и оценки

$$|\Delta y(a)|=|\sin(a+\Delta x)-\sin a|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|=|\Delta x| \;\Rightarrow\; |\Delta y(a)|\leqslant|\Delta x|.$$

Далее, в определении непрерывности функции (по **Коши**) возьмём $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. В результате получим, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\underbrace{\delta(\varepsilon)}_{=\varepsilon}>0$, что для любого x, удовлетворяющего условию $|\Delta x|<\delta(=\varepsilon)$, выполняется неравенство $|\Delta y|\leqslant|\Delta x|<\varepsilon(=\delta)$, означающее, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y(a)=0,$$

т.е. функция $\sin x$ **непрерывна** в каждой точке $a\in\boldsymbol{R}$. ►

9.2. Точки разрыва. Их классификация

В этом пункте предполагаем, что функция f определена в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(a)$ точки a, то есть $\dot{U}(a)\subset D(f)$.

Определение 9.5. Точка a называется **точкой разрыва** функции f, если эта функция: **1)** либо **не определена** в точке a,

2) либо определена, но **не является непрерывной** в точке a.

Замечание 9.3. Для функции, определённой в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(a)$, точка a является **точкой разрыва**, если **не выполняется хотя бы** одно из следующих условий:

1) $a\in D(f)$;

2) существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$;

3) $A=f(a)$.

Определение 9.6. Точка a называется **точкой разрыва первого рода** функции $f(x)$, если выполняются следующие **два** условия:

1) a — **точка разрыва** функции $f(x)$;

2) существуют **конечные односторонние** пределы функции f в точке a: $f(a-0)\equiv\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a+0)\equiv\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Замечание 9.4. Для точки $x=a$ разрыва **первого рода** функции $f(x)$ разность $f(a+0)-f(a-0)$ называют **скачком функции** в точке a.

Замечание 9.5. В случае **нулевого** скачка, то есть когда
$$f(a+0)=f(a-0),$$
точку a разрыва **первого рода** называют точкой **устранимого разрыва**. Полагая
$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\neq a; \\ A, \quad \text{если } x=a, \end{cases} \quad \text{где } A=f(a+0)=f(a-0),$$
получим функцию, **непрерывную** в точке a (смотрите теорему в пункте **8.3**) и совпадающую с $f(x)$ при $x\neq a$. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ доопределена в точке a **по непрерывности.**

Определение 9.7. Точка разрыва функции $f(x)$ называется **точкой разрыва второго рода**, если она не является точкой разрыва первого рода.

Замечание 9.6. В точке разрыва второго рода хотя бы один из односторонних пределов **бесконечен** или **не существует**.

Пример 9.4. а) Функция $f(x)=\operatorname{sgn} x$ имеет в точке $x=0$ разрыв **первого** рода, поскольку существуют **конечные неравные односторонние** пределы:
$$\operatorname{sgn}(+0)=1\neq -1=\operatorname{sgn}(-0).$$
Найдём **скачок** функции в этой точке:
$$\operatorname{sgn}(+0)-\operatorname{sgn}(-0)=2\neq 0.$$

б) Функция $f(x)=|\operatorname{sgn} x|$ имеет в точке $x=0$ **устранимый разрыв**: переопределив её в точке $x=0$ единицей, получим функцию $\tilde{f}(x)\equiv 1$, **непрерывную** на всей числовой прямой.

Пример 9.5. а) Функция $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв **второго рода**, поскольку имеет в этой точке **бесконечные** односторонние пределы:
$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{1}{x}=-\infty; \qquad \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{1}{x}=+\infty.$$

б) Функция $g(x)=\operatorname{tg} x$ имеет в точках $x_n=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, разрывы **второго рода**, поскольку имеет в этих точках **бесконечные** односторонние пределы.

Пример 9.6. а) Функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв **второго рода**, так как в этой точке у неё **не существуют** односторонние пределы.

б) Функция Дирихле $f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x - \textbf{рациональное} \text{ число;}\\ 0, \text{ если } x - \textbf{иррациональное} \text{ число,}\end{cases}$ имеет в каждой точке $a \in \boldsymbol{R}$ разрыв **второго рода**, так как ни в одной точке числовой прямой **не имеет односторонних** пределов.

9.3. Локальные свойства непрерывных функций

Локальными называют такие свойства функций, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки из области определения.

Теорема 9.2 (локальная ограниченность функции, непрерывной в точке). Функция $f(x)$, **непрерывная** в точке a, **ограничена** в некоторой окрестности этой точки, то есть существуют такие окрестность $U(a)$ и число $M>0$, что для каждой точки $x \in U(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

Доказательство. Из непрерывности функции $f(x)$ в точке a следует существование **конечного** предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$. Следовательно (согласно свойству **локальной ограниченности** функции, имеющей **конечный предел)**, существуют такие проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ и число $M>0$, что для каждой точки $x \in \dot{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

Далее, переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \to a$, получим неравенство $|f(a)|=|\lim\limits_{x \to a} f(x)| \leqslant M$, из которого следует, что для каждой точки $x \in U(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$. ■

Теорема 9.3 (об устойчивости знака непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ **непрерывна** в точке a и $f(a) \neq 0$. Тогда существует окрестность этой точки, в которой $f(x)$ имеет **тот же знак**, что и $f(a)$.

Доказательство. Не теряя общности доказательства, можно считать, что $f(a)>0$. В определении **непрерывности** функции $f(x)$ в точке a (по **Коши**) возьмём $\varepsilon=\frac{1}{2} f(a)$. Тогда существует окрестность $U(a)$, в которой выполняется неравенство

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon \iff -\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon \iff$$

$$\iff f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon \iff 0<\frac{1}{2} f(a)<f(x)<\frac{3}{2} f(a).$$

Следовательно, окрестность $U(a)$ — искомая. ■

Теорема 9.4 (о сохранении свойства непрерывности при арифметических операциях над функциями). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны** в точке a. Тогда их **сумма, разность, произведение** и (при дополнительном ограничении $g(x)\neq 0$) **частное** $f(x)/g(x)$ **непрерывны** в точке a.

Доказательство. Терема **9.4** является **следствием** свойств пределов функций, связанных с арифметическими операциями. Докажем лишь непрерывность произведения функций (непрерывность суммы, разности и частного функций доказывается **аналогично**).

Из **непрерывности** функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a следует, что

1) $f(x)$ и $g(x)$ **определены** в некоторой окрестности $U(a)$;

2) существуют **конечные** пределы:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a).$$

Следовательно, произведение $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ определено в этой же окрестности $U(a)$, и, согласно свойствам пределов функций в точке, справедливо равенство:

$$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)=f(a)\cdot g(a)=h(a) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \lim_{x\to a} h(x)=h(a),$$

означающее **непрерывность** функции $h(x)$ в **точке** a. ■

Пример 9.7. Докажем **непрерывность** алгебраического многочлена $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ во всех точках числовой прямой.

◀ В **примерах 9.1** и **9.2** было доказано, что постоянная функция $f(x)\equiv c$ и функция $f(x)\equiv x$ **непрерывны** на всей $\boldsymbol{R}$. Следовательно, по теореме **9.4** непрерывными являются функции $c\cdot x^k=c\cdot\underbrace{x\cdot\ldots\cdot x}_{k}$ как произведение **конечного** числа непрерывных функций (доказывается индукция по числу k).

Поэтому многочлен $P(x)$ также **непрерывен** на числовой прямой $\boldsymbol{R}$ как сумма **конечного** числа **непрерывных** слагаемых (функций). ▶

Определение 9.8. Пусть определены функции $\begin{cases}\varphi: X\to Y;\\ f: Y\to Z.\end{cases}$ Тогда на множестве X определена функция $F=f\circ\varphi\colon X\to Z$ по правилу

$$F(x)=f(\varphi(x)),$$

называемая **сложной функцией** или **суперпозицией функций** f и φ.

Аналогично (индукцией по числу n) определяется **суперпозиция** $n>2$ функций: $F(x)=f_1(f_2(\ldots(f_n(x))\ldots))$.

Теорема 9.5 (непрерывность сложной функции). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $y = \varphi(x)$ **непрерывна** в точке x_0;

2) функция $z = f(y)$ **непрерывна** в точке $y_0 = \varphi(x_0)$.

Тогда сложная функция $z = F(x)$, где $F(x) = f(\varphi(x))$, **непрерывна** в точке x_0.

Доказательство. 1) Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции $z = f(y)$ в точке y_0, существует такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что окрестность $U_{\delta_1}(y_0)$ лежит в области определения $D(f)$ и для любого $y \in U_{\delta_1}(y_0)$ выполняется неравенство $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$, то есть $f(y) \in U_\varepsilon(z_0)$, где $z_0 = f(y_0)$.

2) В силу **непрерывности** функции $y = \varphi(x)$ в точке x_0 для $\varepsilon_1 = \delta_1 > 0$ существует такое число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1) > 0$, что окрестность $U_{\delta_2}(x_0)$ лежит в области определения $D(\varphi)$ и для любого $x \in U_{\delta_2}(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon_1$, то есть $\varphi(x) \in U_{\delta_1}(y_0)$, где $y_0 = \varphi(x_0)$.

3) Таким образом, для любого $x \in U_{\delta_2}(x_0)$ справедливы неравенства:

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon_1 \equiv \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(\varphi(x)) - f(\varphi(x_0))| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, справедливое для любого $x \in U_{\delta_2}(x_0)$, означает, что **сложная** функция $f(\varphi(x))$ **непрерывна** в точке x_0. ■

Замечание 9.7. При доказательстве **теоремы 9.5** мы использовали **определение непрерывности** функции в точке по **Коши**.

Замечание 9.8. Представим на **рис. 9.3 соответствие** между окрестностями точек x_0, $y_0 = \varphi(x_0)$ и $z_0 = f(y_0)$. Сначала по **заданному** числу $\varepsilon > 0$ находим $\delta_1(\varepsilon) > 0$, а затем по числу δ_1 находим $\delta_2(\delta_1) > 0$.

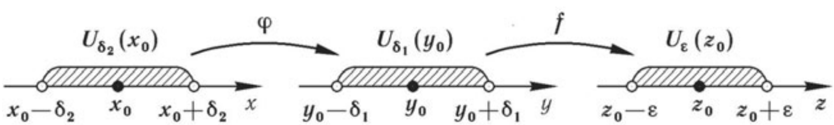

Рис. 9.3

Упражнение 9.1. Доказать **теорему 9.5**, используя определение непрерывности в терминах последовательностей (по **Гейне**).

Пример 9.8. Доказать, что функция $z = \cos x$ **непрерывна** на всей числовой прямой.

◀ Исходную функцию можно представить в виде $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ — **суперпозиции** двух **непрерывных** на $\boldsymbol{R}$ функций:

$$z = \sin y,\ \ y \in \boldsymbol{R}, \quad \text{и} \quad y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ \ x \in \boldsymbol{R}.$$

Поэтому (согласно **теореме 9.5**) она **непрерывна** в любой точке a числовой прямой. ►

9.4. Замечательные пределы

Рассмотрим **два** предела, играющих важную роль при расчёте **сложных** пределов.

Теорема 9.6 (первый замечательный предел).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Лемма 9.2. При $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ справедливо (двойное) неравенство

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad \textbf{(9.3)}$$

Доказательство. 1) Пусть сначала $x \in G \equiv \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. В **тригонометрическом круге** рассмотрим **центральный** угол $\angle AOB$ радианной меры x. Пусть C — проекция точки B на отрезок OA, D — точка пересечения луча OB и прямой, проведённой через точку A перпендикулярно отрезку OA (**рис. 9.4**). Тогда

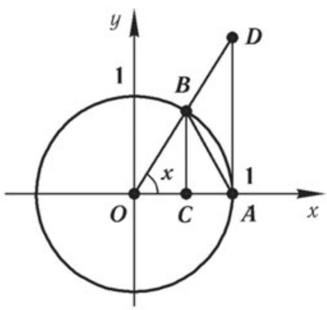

Рис. 9.4

$$BC = \sin x \quad \text{и} \quad DA = \operatorname{tg} x.$$

Сравним удвоенные площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOD. Для этого заметим, что

$$2S_{\Delta\, OAB} = OA \cdot BC = 1 \cdot \sin x = \sin x;$$

$$2S_{\measuredangle OAB} = OA^2 \cdot x = 1^2 \cdot x = x \quad \text{и}$$

$$2S_{\Delta\, OAD} = OA \cdot AD = 1 \cdot \operatorname{tg} x,$$

поэтому

$$2S_{\Delta\, OAB} < 2S_{\measuredangle OAB} < 2S_{\Delta\, OAD} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x \underset{G}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{G}{\Leftrightarrow} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \underset{G}{\Leftrightarrow} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Таким образом, мы доказали, что неравенство **(9.3)** справедливо для $x \in G \equiv \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$.

2) Пусть теперь $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Поскольку функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ — **чётные**, то неравенство **(9.3)** справедливо также и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\, 0\right)$. ■

Доказательство теоремы 9.6. Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \cos x, \quad g(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{и} \quad f_2(x) = 1.$$

В лемме мы доказали, что на множестве $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ (то есть в проколотой крестности $\dot{U}(0)$ точки $a = 0$) справедливо двойное неравенство $f_1(x) < g(x) < f_2(x)$. Поскольку, кроме того, существуют равные пределы:

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos\, 0 = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0} f_2(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

то по **теореме 8.6 о «зажатой» функции** (п. **8.4**) существует $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. ■

Пример 9.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$$◄ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos\, 0} = 1. ►$$

Теорема 9.7 (второй замечательный предел).

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Без доказательства.

9.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 9.9. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a; b]$, если она **непрерывна** в каждой точке интервала $(a; b)$, а также **непрерывна справа** в точке a, то есть $f(a+0) = f(a)$, и **непрерывна слева** в точке b, то есть $f(b-0) = f(b)$.

1. Ограниченность непрерывной на отрезке функции

Теорема 9.8 (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, то она **ограничена** на этом отрезке, то есть существует такая постоянная $M>0$, что для всех $x\in[a;b]$ справедливо неравенство $|f(x)|<M$.

Доказательство (от противного). 1) Предположим, что $f(x)$ **не ограничена** на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого $n\in N$ существует такая точка $x_n\in[a;b]$, что $|f(x_n)|>n$. Следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ — **бесконечно большая**.

2) Последовательность $\{x_n\}$ **ограничена**, так как лежит на отрезке $[a;b]$, следовательно, по **теореме Больцано-Вейерштрасса** содержит **сходящуюся подпоследовательность** $\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k}\to c\in[a;b]$ при $k\to\infty$.

3) Последовательность $\{f(x_n)\}$ — **бесконечно большая**, потому **её подпоследовательность** $\{f(x_{n_k})\}$ — также **бесконечно большая**:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\infty.$$

4) Функция $f(x)$ **непрерывна** в точке c (**непрерывна справа**, если $c=a$, и **непрерывна слева**, если $c=b$), поэтому $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$. В соответствии с **определением непрерывности** функции $f(x)$ по **Гейне** получаем противоречие с пунктом **3)** доказательства настоящей теоремы:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(c)\neq\infty.$$

Это **противоречие** доказывает, что предположение о неограниченности функции $f(x)$ **неверно.** ■

Замечание 9.9. Первая теорема Вейерштрасса **неверна** для промежутков, **не являющихся отрезками**. Приведём **два** примера:

1) функция $f(x)=\frac{1}{x}$ **непрерывна** на полуинтервале $(0;1]$, но не является ограниченной на нём;

2) функция $g(x)=x^2$ **непрерывна** на бесконечном интервале $\boldsymbol{R}$, но **не является ограниченной** на $\boldsymbol{R}$.

2. Достижимость точных граней

Теорема 9.9 (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ **достигает** на нём своих **точной верхней** и **точной нижней граней**, то есть на отрезке $[a;b]$ существуют такие точки ξ и ζ, что

$$f(\xi)=\sup_{x\in[a;b]} f(x) \quad \text{и} \quad f(\zeta)=\inf_{x\in[a;b]} f(x).$$

Замечание 9.10. Значения функции $f(x)$ в точках ξ и ζ равны, соответственно, **наибольшему** и **наименьшему** значениям этой функции **на отрезке** $[a;b]$: $f(\zeta)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi)$ для любого $x\in[a;b]$ (**рис. 9.5**).

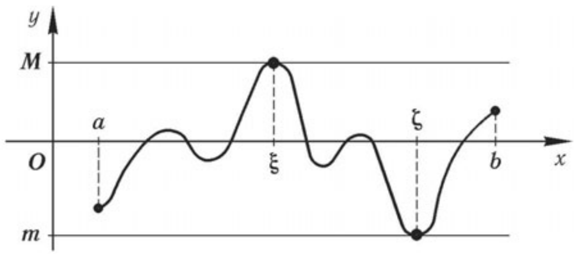

Рис. 9.5

Замечание 9.11. Вторая теорема Вейерштрасса **неверна** для промежутков, **не являющихся отрезками**. Приведём **один** пример: функция $f(x)\equiv x$, **непрерывная на интервале** $(0;1)$, **не достигает** на этом интервале своей точной верхней грани, равной 1, и своей точной нижней грани, равной 0.

Доказательство теоремы. Ограничимся доказательством лишь **существования** точки ξ. Существование точки ζ доказывается **аналогично**.

1) Согласно 1-й теореме Вейерштрасса, множество $E(f)$ значений функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ **ограничено**, поэтому **имеет точную верхнюю грань** $\sup E(f)=M$. Это означает, что для для любого номера $n\in \boldsymbol{N}$ существует точка $x_n\in[a;b]$, для которой выполняется неравенство

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M. \qquad \textbf{(9.4)}$$

2) Последовательность $\{x_n\}$ лежит на отрезке $[a;b]$, поэтому она **ограничена**. Следовательно (согласно **теореме Больцано-Вейерштрасса**), содержит **сходящуюся подпоследовательность** $\{x_{n_k}\}$:

$$x_{n_k}\to\xi\in[a;b] \ \text{ при } k\to\infty.$$

3) По условию теоремы функция $f(x)$ **непрерывна** в точке ξ, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\xi).$$

4) Согласно **(9.4)**, справедливо (двойное) **неравенство**

$$M-\frac{1}{n_k}<f(x_{n_k})\leqslant M, \quad k\in\boldsymbol{N},$$

поэтому по **теореме 3.2 о «зажатой» последовательности**, получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M \quad \Rightarrow \quad f(\xi) = M.$$

Таким образом, $\sup E(f) = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x) = M = f(\xi) = \max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$. ■

3. Промежуточные значения

Теорема 9.10 (теорема Коши о нуле непрерывной функции). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$,

2) $f(x)$ принимает на концах **отрезка** $[a;b]$ значения **разных знаков**, то есть $f(a)\cdot f(b) < 0$.

Тогда на интервале $(a;b)$ имеется **хотя бы один нуль** функции $f(x)$, то есть существует такая точка $c\in(a;b)$, в которой $f(c)=0$ (**рис. 9.6**).

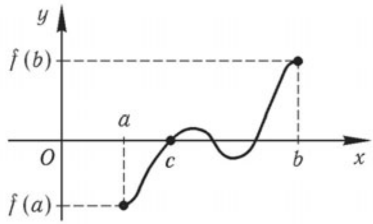

Рис. 9.6

Замечание 9.12. Геометрически теорема Коши означает, что функция $f(x)$, удовлетворяющая этой теореме, имеет график, **пересекающий ось** Ox **хотя бы в одной точке** (точке c) из интервала $(a;b)$.

Доказательство. Не теряя общности доказательства, будем считать, что $f(a)<0$, а $f(b)>0$ (иначе рассмотрим функцию $g(x)\equiv -f(x)$).

1) Пусть d — середина отрезка $[a;b]$. Возможны **два** случая.

1-й случай. Если $f(d)=0$, то теорема доказана.

2-й случай. Если $f(d)\neq 0$, то на концах одного из отрезков $[a;d]$ или $[d;b]$ функция $f(x)$ принимает значения **разных знаков**. Такой отрезок обозначим $\Delta_1 = [a_1;b_1]$. Очевидно, что $f(a_1)<0<f(b_1)$.

2) Пусть d_1 — середина отрезка Δ_1. Возможны **два** случая:

1-й случай. Если $f(d_1)=0$, то теорема доказана.

2-й случай. Если $f(d_1) \neq 0$, то на концах одного из отрезков $[a_1; d_1]$ или $[d_1; b_1]$ функция $f(x)$ принимает значения **разных знаков**. Такой отрезок обозначим $\Delta_2 = [a_2; b_2]$. Очевидно, что $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

Продолжая начатые построения, получим:

1) либо через **конечное** число шагов найдется точка $c \in (a; b)$, в которой $f(c) = 0$;
2) либо будет построена последовательность **стягивающихся** отрезков $\{\Delta_n\}$ (поскольку $|\Delta_n| = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$), обладающая свойством:

$$f(a_n) < 0 < f(b_n), \quad n \in \boldsymbol{N}. \qquad \textbf{(9.5)}$$

Согласно **лемме Кантора** (о стягивающихся отрезках), существует **единственная** точка $c \in [a; b]$, общая для всех отрезков последовательности $\{\Delta_n\}$, причём $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$. Поскольку функция $f(x)$ **непрерывна** в точке $c \in [a; b]$, то $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(c) = \lim\limits_{n \to \infty} f(b_n)$.

Далее осуществим предельный переход в неравенствах **(9.5)**:

$$f(c) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c) \quad \Rightarrow \quad f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c).$$

Следовательно, $f(c) = 0$. А поскольку функция $f(x)$ не обращается в нуль на концах отрезка $[a; b]$, то $c \in (a; b)$. ■

Следствие 1 (теорема Коши о промежуточных значениях). Пусть выполняются следующие два условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a; b]$,
2) $f(x)$ принимает на концах **отрезка** $[a; b]$ **разные** значения:

$$f(a) = A \neq B = f(b).$$

Тогда для любого числа C, заключённого между числами A и B, найдётся точка $c \in (a; b)$, в которой $f(c) = C$. (**рис. 9.7**).

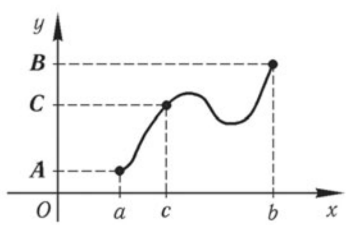

Рис. 9.7

Замечание 9.13. Следствие 1 утверждает, что **непрерывная** на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке **все значения**, заключенные между числами A и B.

Доказательство следствия 1. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=f(x)-C$. Она удовлетворяет условиям **теоремы Коши о промежуточных значениях**, поэтому существует такая точка $c\in(a;b)$, в которой $g(c)=0$. Очевидно, что $f(c)=g(c)+C=0+C=C$. ■

Следствие 2. Если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $M=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то множество значений $E(f)$, принимаемых функцией $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, есть отрезок $[m;M]$.

Доказательство следствия 2. 1) По **2-й теореме Вейерштрасса** на отрезке $[a;b]$ существуют точки ζ и ξ, в которых $f(x)$ достигает свои **наименьшее** и **наибольшее** значения: $f(\zeta)=m$ и $f(\xi)=M$. Следовательно,

$$E(f)\subset[m;M].$$

2) Согласно **следствию 1**, множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ на отрезке $[\zeta;\xi]$, есть отрезок $[m;M]$, поэтому $E(f)=[m;M]$. ■

4. Существование и непрерывность функции, обратной для непрерывной и строго монотонной функции

Определение 9.10. Пусть функция $y=f(x)$ **определена** на множестве $X=D(f)$ и $Y=E(f)$ — множество всех **её значений**. Если f такова, что каждое значение $y_0\in E(f)$ она принимает **только при одном значении** $x_0\in D(f)$, то эта функция называется **обратимой**.

Определение 9.11. Пусть **обратимая** функция $y=f(x)$ определена на множестве $X=D(f)$ и $Y=E(f)$ — множество всех её значений. Тогда функция $x=g(y)$, определённая на множестве Y и ставящая в соответствие каждому $y_0\in Y$ число $x_0\in X$, для которого $f(x_0)=y_0$, называется **обратной** для функции $y=f(x)$ и обозначается символом f^{-1} (т.е. $f^{-1}(y)=g(y)$).

Замечание 9.14. График функции $y=f(x)$ и **обратной** для неё функции $x=f^{-1}(y)$ совпадают, только аргумент обратной функции рассматривается на оси Oy. Но если, следуя нашим привычкам, аргумент обозначать буквой x и откладывать его значения на оси абсцисс, а значения функции — буквой y и откладывать их на оси ординат (т.е. вместо уравнения $x=f^{-1}(y)$ писать $y=f^{-1}(x)$), то графики функции $y=f(x)$ и **обратной** ей функции $x=f^{-1}(y)$ окажутся симметричными относительно биссектрисы **I и III координатных углов**. На **рис. 9.8** показаны графики **взаимно обратных** функций $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и $x=\arcsin y$, $y\in[-1;1]$.

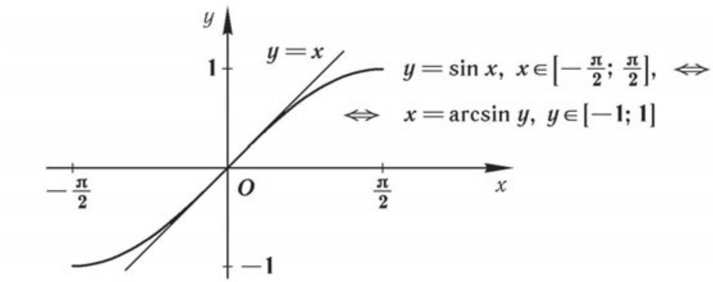

Рис. 9.8

На **рис. 9.9** приведены графики функций $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, и $y=\arcsin x$, $x\in[-1;1]$. Они **симметричны** относительно прямой $y=x$.

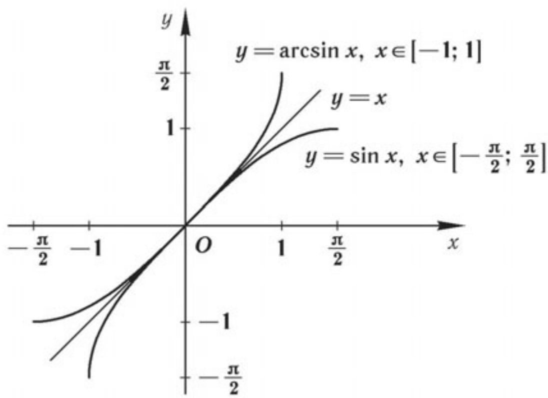

Рис. 9.9

Лемма 9.3. Если функция $f(x)$ **строго монотонна** на отрезке $[a;b]$, то в каждой внутренней точке $x_0\in(a;b)$ она имеет **конечные односторонние** пределы, а в концевых точках a и b — соответственно **правый** и **левый пределы**. При этом для **возрастающей** функции справедливы неравенства:

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0),\quad f(a)\leqslant f(a+0),\quad f(b-0)\leqslant f(b).$$

Для **убывающей** функции аналогичные неравенства имеют вид:

$$f(x_0-0)\geqslant f(x_0)\geqslant f(x_0+0),\quad f(a)\geqslant f(a+0),\quad f(b-0)\geqslant f(b).$$

Доказательство леммы 9.3. Не теряя общности доказательства, будем считать функцию $f(x)$ **возрастающей** (в случай **убывающей** функции $f(x)$ рассматривают **возрастающую** функцию $h(x)=-f(x)$).

1) Докажем, что в любой точке $c\in(a;b]$ существует **конечный левый** предел. По условию для любого $x\in[a;c)$ выполняется неравенство $f(x)\leqslant f(c)$, т.е. множество значений, принимаемых функцией на полуинтервале $[a;c)$ **ограничено сверху** числом $f(c)$, поэтому (по теореме о точной верхней грани) существует $\sup\limits_{x\in[a;c)} f(x)=M\leqslant f(c)$. Согласно определению точной верхней грани, выполняются следующие **два** условия.

1°. Для любого $x\in[a;c)$ справедливо неравенство $f(x)\leqslant M$.

2°. Для любого $\boldsymbol{\varepsilon}>0$ существует точка $x_{\boldsymbol{\varepsilon}}\in[a;c)$, для которой выполняется неравенство $M-\boldsymbol{\varepsilon}<f(x_{\boldsymbol{\varepsilon}})$.

Положим $\boldsymbol{\delta}=c-x_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ($\boldsymbol{\delta}>0$, т.к. $x_{\boldsymbol{\varepsilon}}<c$). Поскольку $f(x)$ — **непрерывная** функция, то (с учётом условий **1°−2°**) для любого $x\in(x_{\boldsymbol{\varepsilon}};c)\equiv$ $\equiv(c-\delta;c)\equiv U_{\boldsymbol{\delta}}^{-}(c)$ выполняются неравенства

$$M-\boldsymbol{\varepsilon}<f(x_{\varepsilon})\leqslant f(x)\leqslant M\quad\Rightarrow\quad M-\boldsymbol{\varepsilon}<f(x)\leqslant M,$$

из которых следует, что $|f(x)-M|<\boldsymbol{\varepsilon}$ для $x\in U_{\boldsymbol{\delta}}^{-}(c)$. Это означает, что существует

$$\lim_{x\to c-0} f(x)=M,\ \text{причём}\ f(c-0)=M\leqslant f(c).$$

2) Аналогично доказывается существование **конечного правого** предела в любой точке $c\in[a;b)$. ■

Следствие. Если функция f **монотонна** на отрезке $[a;b]$, то она может иметь на этом отрезке лишь **точки разрыва 1-ого рода**.

Доказательство. Очевидно. ■

Лемма 9.4. Монотонная функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$ **тогда и только тогда**, когда множеством её значений $E(f)$ является отрезок с концами в точках $A=f(a)$ и $B=f(b)$.

Доказательство леммы 2. 1) Пусть $f(x)$ — монотонная **непрерывная** на отрезке $[a;b]$ функция. Не теряя общности доказательства, будем считать функцию $f(x)$ **неубывающей** на $[a;b]$. Тогда для любого $x\in[a;b]$ выполняются неравенства

$$A=f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)=B,$$

означающие, что $E(f)\subset[A;B]$. Кроме того (по **теореме Коши о промежуточных значениях**) имеем: $[A;B]\subset E(f)$. Следовательно, $E(f)=[A;B]$.

2) Пусть теперь $E(f)=[A;B]$. Докажем от противного, что $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$. **Предположим**, что $f(x)$ **имеет разрыв** в точке $c\in[a;b]$. Согласно следствию из **леммы 9.3** — это точка разрыва 1-ого рода, поэтому выполняется **хотя бы одно** из условий:

$$f(c-0)\neq f(c), \quad f(c+0)\neq f(c).$$

Пусть (для определённости) $f(c-0)\neq f(c)$. Тогда в силу монотонности функции $f(x)$ интеграл ($(f(c-0);f(c))$ не принадлежит множеству значений $E(f)$ — получили **противоречие**, доказывающеей, что предположение о наличие у функции $f(x)$ разрыва на отрезке $[a;b]$ **ошибочно**. ■

Теорема 9.11. Пусть **непрерывная** функция $y=f(x)$ **возрастает** на отрезке $[a;b]$. Тогда на отрезке $[f(a);f(b)]$ определена функция $x=g(y)$, **обратная** к $f(x)$, **непрерывная** и **возрастающая**.

Доказательство. 1) Существование обратной функции. Введём обозначения: $A=f(a)$ и $B=f(b)$. Согласно **лемме 9.4**, $E(f)=[A;B]$. В соответствии с определением обратной функции нужно доказать, что для **любого** числа $y_0\in[A;B]$ существует **единственное** решение уравнения $f(x)=y_0$ на отрезке $[a;b]$. Существование хотя бы одного корня этого уравнения следует из **теоремы Коши о промежуточных значениях**. А **единственность** этого решения — следует из **строгой монотонности** функции $f(x)$:

$$x_1\neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1)\neq f(x_2).$$

2) Строгую монотонность (возрастание) обратной функции докажем от противного: предположим, что на отрезке $[A;B]$ существует такая пара чисел $y_1<y_2$, что $x_1=g(y_1)>x_2=g(y_2)$. Но тогда для $x_2<x_1$ имеем $f(x_2)\equiv y_2>y_1\equiv f(x_1)$, что противоречит **возрастанию** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

3) Непрерывность обратной функции. Поскольку $E(g)=[a;b]$, то (согласно **лемме 9.4**) функция $g(y)$ **непрерывна** на области определения — отрезке $D(g)=[A;B]$. ■

5. Непрерывность элементарных функций

Определение 9.12. Основными элементарными функциями называются следующие функции.

1) **Постоянная** функция $y \equiv C$, где $C \equiv \text{const}$.

Область **определения**: $D(f) = \boldsymbol{R}$ — **вся числовая ось**.

2) **Степенная** функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$ и $\alpha \neq 0$.

Её **область определения** $D(f)$ **зависит** от показателя степени α:

а) при $\alpha \in \boldsymbol{N}$ функция **определена** на всей числовой оси:
$$D(f) = \boldsymbol{R};$$

б) при $\alpha \in \boldsymbol{Z}, \alpha < 0$, функция **определена** на множестве
$$D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{0\};$$

в) при $\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}, \alpha > 0$, функция **определена** на множестве
$$D(f) = [0; +\infty);$$

г) при $\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}, \alpha < 0$, функция **определена** на множестве
$$D(f) = (0;\ +\infty).$$

3) **Показательная функция** $y = a^{x}$, где $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Область **определения**: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

4) **Логарифмическая функция** $y = \log_a x$, где $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$.

Область **определения**: $D(f) = (0;\ +\infty)$.

5) **Тригонометрические функции**:

а) $y = \sin x$, область **определения**: $D(f) = \boldsymbol{R}$;

б) $y = \cos x$, область **определения**: $D(f) = \boldsymbol{R}$;

в) $y = \operatorname{tg} x$, область **определения**:
$$D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\colon\ x \neq \tfrac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z}\};$$

г) $y = \operatorname{ctg} x$, область **определения**:
$$D(f) = \{x \in \boldsymbol{R}\colon\ x \neq \pi k, \text{ где } k \in \boldsymbol{Z}\}.$$

6) **Обратные тригонометрические функции**:

а) $y = \arcsin x$, область **определения**: $D(f) = [-1;\ 1]$;

б) $y = \arccos x$, область **определения**: $D(f) = [-1;\ 1]$;

в) $y = \operatorname{arctg} x$, область **определения**: $D(f) = \boldsymbol{R}$;

г) $y = \operatorname{arcctg} x$, область **определения**: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Теорема 9.12. Основные элементарные функции **непрерывны** на областях определения.

Доказательство. Было доказано (в примерах), что непрерывными являются постоянная функция и тригонометрические функции $y = \sin x$,

$y=\cos x$. Следовательно, непрерывными являются функции $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ (как отношения непрерывных функция) и обратные тригонометрические функции (как обратные к строго монотонным и непрерывным функциям). Для степенной, показательной и логарифмической функций принимаем теорему **без доказательства**. ■

Определение 9.13. Элементарными называются функции, получаемые из основных элементарных функций с помощью **конечного** числа **арифметических** операций и **суперпозиций**.

Теорема 9.13. Любая элементарная функция **непрерывна** во всех **внутренних** точках области определения.

Доказательство. Очевидно. ■

§10. Сравнение функций. Эквивалентные функции. Символика $\bar{o}$

10.1. Эквивалентные функции

Определение 10.1. Если в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(\omega)$ точки $\omega\in\overline{\boldsymbol{R}}$ (здесь ω обозначает либо точку a числовой прямой $\boldsymbol{R}$, либо один из символов $-\infty$, $+\infty$ или ∞) определены такие функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, что $\lim\limits_{x\to\omega} h(x)=1$ и $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называют **эквивалентными** при $x\to\omega$ (пишут: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to\omega$).

Теорема 10.1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и **не обращаются в нуль** в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(\omega)$ точки $\omega\in\overline{\boldsymbol{R}}$. Тогда эквивалентность функций $f(x)\sim g(x)$ при $x\to\omega$ равносильна тому, что

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Доказательство. Очевидно. ■

Приведем простейшие эквивалентности **бесконечно малых** функций:

1) $\sin u\sim\operatorname{tg} u\sim\arcsin u\sim\operatorname{arctg} u\sim\ln(1+u)\sim(e^u-1)\sim u$ при $u\to 0$;

2) $(a^u-1)\sim u\cdot\ln a$ при $u\to 0$ $(a>0,\ a\neq 1)$;

3) $[(1+u)^\beta-1]\sim\beta u$ при $u\to 0$ $(\beta\in\boldsymbol{R})$;

4) $(1-\cos u)\sim\frac{u^2}{2}$ при $u\to 0$

и **бесконечно больших** функций:

1) $P_n(x) \equiv (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) \sim a_0 x^n$ при $x \to \infty$ $(a_0 \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N})$;

2) $\sqrt[k]{P_n(x)} \sim \sqrt[k]{a_0 x^n}$ при $x \to +\infty$ $(a_0 > 0;\ n, k \in \boldsymbol{N};\ k \geqslant 2)$;

3) $\ln P_n(x) \sim \ln(a_0 x^n) \sim n \ln x$ при $x \to +\infty$ $(a_0 > 0;\ n \in \boldsymbol{N})$;

4) Формула **Стирлинга**: $n! \sim \dfrac{n^n \sqrt{2\pi n}}{e^n}$ при $n \to +\infty$.

Докажем некоторые из приведенных выше эквивалентностей.

Пример 10.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

◀ Воспользуемся свойством **непрерывности** функции $\ln x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x)\right] = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} =$$

$$= \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right] = \ln e = 1. \ ▶$$

Пример 10.2. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, где $a > 0$.

В частности, при $a = e$ получится равенство: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

◀ Произведём замену переменной:

$$a^x - 1 = u \iff a^x = u + 1 \iff x = \log_a(u+1) = \frac{\ln(1+u)}{\ln a};$$

$$(x \to 0) \iff (u \to 0).$$

В результате получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u \cdot \ln a}{\ln(1+u)} = \ln a \cdot \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \ln a. \ ▶$$

10.2. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов

Теорема 10.2. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) $\left.\begin{matrix} f(x) \sim f_1(x), & z(x) \sim z_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x), & w(x) \sim w_1(x) \end{matrix}\right\}$ при $x \to \omega$ (где $\omega \in \overline{\boldsymbol{R}}$); **(10.1)**

2) существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x \to \omega} \dfrac{f_1(x)\, z_1(x)}{g_1(x)\, w_1(x)}$.

Тогда: существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x \to \omega} \frac{f(x)\, z(x)}{g(x)\, w(x)} = \lim_{x \to \omega} \frac{f_1(x)\, z_1(x)}{g_1(x)\, w_1(x)}.$$

Доказательство. 1) Эквивалентности **(10.1)** равносильны тому, что в некоторой **проколотой** окрестности точки $\omega \in \overline{\boldsymbol{R}}$ справедливы равенства:

$$\begin{cases} f(x)=f_1(x)\cdot h_1(x), & z(x)=z_1(x)\cdot h_2(x), \\ g(x)=g_1(x)\cdot h_3(x), & w(x)=w_1(x)\cdot h_4(x), \end{cases}$$

где функции $h_1(x)$, $h_2(x)$, $h_3(x)$ и $h_4(x)$ обладают свойством

$$\lim_{x\to\omega} h_1(x)=\lim_{x\to\omega} h_2(x)=\lim_{x\to\omega} h_3(x)=\lim_{x\to\omega} h_4(x)=1. \qquad \textbf{(10.2)}$$

2) Из **существования** пределов $\lim\limits_{x\to\omega}\dfrac{f_1(x)\,z_1(x)}{g_1(x)\,w_1(x)}$ и **(10.2)** следует существование **проколотой** окрестности $\dot{U}(\omega)$, во всех точках x которой

$$g_1(x)\neq 0,\ \ w_1(x)\neq 0,\ \ h_1(x)\neq 0,\ \ h_2(x)\neq 0,\ \ h_3(x)\neq 0 \text{ и } h_4(x)\neq 0.$$

3) В окрестности $\dot{U}(\omega)$ определена функция

$$\frac{f(x)\,z(x)}{g(x)\,w(x)}=\frac{h_1(x)\,h_2(x)}{h_3(x)\,h_4(x)}\cdot\frac{f_1(x)\,z_1(x)}{g_1(x)\,w_1(x)},$$

поэтому справедливо равенство

$$\lim_{x\to\omega}\frac{f(x)\,z(x)}{g(x)\,w(x)}=\lim_{x\to\omega}\frac{h_1(x)\,h_2(x)}{h_3(x)\,h_4(x)}\cdot\lim_{x\to\omega}\frac{f_1(x)\,z_1(x)}{g_1(x)\,w_1(x)}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to\omega}\frac{f_1(x)\,z_1(x)}{g_1(x)\,w_1(x)}=\lim_{x\to\omega}\frac{f_1(x)\,z_1(x)}{g_1(x)\,w_1(x)}. \ \blacksquare$$

Рекомендация 10.1. При вычислении предела от функции, являющейся произведением или частным нескольких функций, **любой общий множитель** можно заменить на **эквивалентный**.

Пример 10.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)\arcsin 3x}{\ln^2(1+5x)}=A.$

◀ Воспользуемся следующими **эквивалентностями бесконечно малых** функций:

$$\left.\begin{aligned} (e^u-1)&\sim u \\ \arcsin u&\sim u \\ \ln(1+u)&\sim u \end{aligned}\right\} \text{ при } u\to 0, \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{aligned} (e^{2x}-1)&\sim 2x \\ \arcsin 3x&\sim 3x \\ \ln(1+5x)&\sim 5x \end{aligned}\right\} \text{ при } x\to 0.$$

В результате получим:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\arcsin 3x}{\ln^2(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 3x}{(5x)^2}=\frac{2\cdot 3}{5^2}=\frac{6}{25}. \ ▶$$

10.3. Сравнение функций. Символика $\bar{o}$

Правила сравнения бесконечно малых функций при $x \to \omega \in \overline{R}$

1°. Если в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(\omega)$ точки $\omega \in \overline{R}$ определены такие функции $f(x)$, $g(x)$, $\alpha(x)$, что

$$f(x) = g(x) \cdot \alpha(x), \qquad \textbf{(10.3)}$$

где $\alpha(x)$ — **бесконечно малая** функция при $x \to \omega$, то функцию $f(x)$ называют **бесконечно малой по сравнению** с функцией $g(x)$ при $x \to \omega$ и пишут $f(x) = \bar{o}(g(x))$ при $x \to \omega$.

Замечание 10.1. Функция $f(x) \equiv \bar{o}(1)$ при $x \to \omega$ — это просто **бесконечно малая** функция при $x \to \omega$.

Замечание 10.2. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(\omega)$, то равенство **(10.3)** можно записать в виде

$$\lim_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \omega} \frac{\bar{o}(g)}{g} = 0.$$

Пример 10.4. $x^2 = \bar{o}(x)$ при $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0.$

2°. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — **бесконечно малые** функции при $x \to \omega$. Если существует **конечный** $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми** функциями **одного порядка**.

Пример 10.5. $\alpha(x) = 3x$ и $\beta(x) = \sin 2x$ — бесконечно малые функции при $x \to 0$ одного порядка.

3°. Понятие **эквивалентных бесконечно малых** функций при $x \to \omega$ определялось ранее.

4°. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — **бесконечно малые** функции при $x \to \omega$. Если существует **конечный** $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ — называется **бесконечно малой** функцией **n-го порядка** относительно $\beta(x)$.

5°. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются **подобными функциями** при $x \to \omega$ (пишут $\varphi(x) \asymp \psi(x)$ при $x \to \omega$), если существуют **постоянные** $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и **проколотая** окрестность $\dot{U}(\omega)$, в каждой точке x которой справедливо двойное неравенство $C_1 |\psi(x)| \leqslant |\varphi(x)| \leqslant C_2 |\psi(x)|$.

Пример 10.6. Доказать, что $(2x+\sin x) \asymp x$ при $x \to 0$.

◀ Воспользуемся неравенством треугольника:

$$|2x|-|\sin x| \leqslant |2x+\sin x| \leqslant |2x|+|\sin x|.$$

В результате получим следующие оценки:

$$|x| \leqslant |2x|-|x| \leqslant |2x|-|\sin x| \leqslant |2x+\sin x| \leqslant$$
$$\leqslant |2x|+|\sin x| \leqslant |2x|+|x| \leqslant 3|x|, \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Поскольку вся числовая ось содержит любую проколотую окрестность $\dot{U}(0)$ точки $\omega=0$, то мы получили двойное неравенство

$$|x| \leqslant |2x+\sin x| \leqslant 3|x|, \quad x \in \dot{U}(0),$$

означающее **подобие** функций $(2x+\sin x)$ и x при $x \to 0$. ▶

10.4. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора

Пусть функция $f(x)$ **непрерывна** на промежутке (конечном или бесконечном) X и $x_0 \in X$. Тогда, согласно **определению** непрерывности $f(x)$ в точке x_0 **по Коши**, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in U_\delta(x_0) \cap X$ выполняется **неравенство**

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ясно, что δ зависит как от ε, так и от точки x_0: чем «круче» идёт график функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, тем меньше будет δ, соответствующее x_0.

Возникает **вопрос:** «В каких случаях для функции $f: X \to R$ можно по $\varepsilon > 0$ указать $\delta > 0$, которое применимо для любой точки $x \in X$? »

Определение 10.2. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на промежутке X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой пары точек $x', x'' \in X$, удовлетворяющей условию $|x'-x''| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$.

Пример 10.7. Доказать, что функция $y = x$ **равномерно непрерывна** на всей числовой прямой $X = \boldsymbol{R}$.

◀ В определении **равномерной непрерывности** следует взять $\delta = \varepsilon$ и заметить, что $|f(x')-f(x'')| \equiv |x'-x''|$, поэтому из условия $|x'-x''| < \delta = \varepsilon$ автоматически следует неравенство $|f(x')-f(x'')| < \varepsilon$. ▶

Замечание 10.3. Из определения **равномерной непрерывности** $f(x)$ на промежутке X следует **равномерная непрерывность** $f(x)$ на любом промежутке $X' \subset X$.

Лемма 10.1. Функция $f(x)$, **равномерно непрерывная** на промежутке X, **непрерывна** в любой точке $x_0 \in X$ (для концевых точек — **односторонняя** непрерывность).

Доказательство. В **определении** равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке X достаточно вместо точки x'' взять точку x_0. ■

Замечание 10.4. Обратный результат, вообще говоря, **неверен**: функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке некоторого промежутка X, **может не быть** равномерно непрерывной на X. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0; 1)$, но **не является** равномерно непрерывной на нём. Случай, когда обратный результат верен, приведён в теореме Кантора.

Теорема 10.3 (Кантор). Функция $f(x)$, **непрерывная** на **отрезке** $X = [a; b]$, **равномерно непрерывна** на нём.

Глава II. Дифференциальное исчисление

§11. Дифференцирование

11.1. Понятие производной

1. Определение производной

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ точки x_0. Для любого $x \in \dot{U}(x_0)$ определим величины:

$$\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \neq 0; \\ \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0), \end{cases}$$

где Δx — **приращение аргумента**, а $\Delta f(x_0)$ — соответствующее **приращение функции** $f(x)$ в точке x_0.

Определение 11.1. Производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется **предел** отношения приращения функции в этой точке $\Delta f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$, если этот предел **существует и конечен**:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 11.2. Если в точке x_0 выполняется условие

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty \quad (\text{или} = -\infty),$$

то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет **бесконечную** производную со знаком плюс (или со знаком минус).

Замечание 11.1. В отличие от **бесконечной** производной, определённую выше производную функции $f(x)$ иногда называют **конечной** производной.

Замечание 11.2. Если функция $f(x)$ имеет **конечную** производную в **каждой** точке x из **интервала** X, то производную $f'(x)$ рассматривают как функцию переменной x, определённую на **интервале** X.

Процесс **нахождения** (вычисления) производной называется **дифференцированием.**

Пример 11.1. Найти производную **постоянной** функции $y = c$.

◀ Очевидно, что $\Delta y(x_0) = c - c = 0$ для **любой** точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$, поэтому

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,\ \ x_0\in \boldsymbol{R}.$$

Следовательно $c'=0$. ►

Пример 11.2. Найти **производную** функции $y=\sin x$.

◄ Используя формулу **разности синусов**, **непрерывность** функции $\cos x$ на всей числовой прямой и **первый замечательный предел**, находим:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=\cos x_0\cdot 1=\cos x_0.$$

Следовательно, $(\sin x)'=\cos x,\ \ x\in\boldsymbol{R}$. Аналогично, получаем:

$$(\cos x)'=-\sin x,\ \ x\in\boldsymbol{R}.$$ ►

Пример 11.3. Продифференцировать **показательную** функцию $y=a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$.

◄ Запишем приращение функции:

$$\Delta y\ (x_0)=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}\,(a^{\Delta x}-1).$$

Тогда, используя **эквивалентность бесконечно малых** функций

$$(a^{\beta}-1)\sim\beta\ln a\quad\text{при }\beta\to 0,$$

получаем:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0}\,(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^{x_0}\ln a.$$

Следовательно, $(a^x)'=a^x\ln a,\quad x\in\boldsymbol{R}$. При $a=e$ эта формула принимает вид $(e^x)'=e^x,\ \ x\in\boldsymbol{R}$. ►

Пример 11.4. Продифференцировать **степенную** функцию $y=x^n$ с натуральным показателем степени $n\in\boldsymbol{N}$.

◄ Используя формулу **бинома Ньютона**, получаем:

$$\Delta y(x)=(x+\Delta x)^n-x^n=n\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

Заметим, что каждое слагаемое, стоящее в правой части, содержит множитель $(\Delta x)^k$, где $k\in\boldsymbol{N},\ 1\leqslant k\leqslant n$. Поэтому

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}=n\cdot x^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot(\Delta x)+\ldots+(\Delta x)^{n-1}.$$

Очевидно, что все слагаемые, стоящие в правой части равенства (кроме первого) содержат множитель $(\Delta x)^k$, где $k\in\boldsymbol{N},\ \ 1\leqslant k\leqslant n-1$, и поэтому стремятся к нулю при $\Delta x\to 0$. Следовательно,

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = n \cdot x^{n-1}, \ x \in \boldsymbol{R}, \ \text{где } n \in \boldsymbol{N}. \ \blacktriangleright$$

2. Односторонние производные

Определение 11.3. Если функция $y = f(x)$ **непрерывна слева (справа)** в точке x_0 и **существует** предел $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(\text{соответственно } \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right)$, то этот предел называют **левой** (соответственно **правой**) производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'_-(x_0)$ (соответственно $f'_+(x_0)$).

Замечание 11.3. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то она также имеет в этой точке **левую** и **правую** производные, которые совпадают с $f'(x_0)$.

Вместе с тем существуют функции, имеющие в точке x_0 **односторонние** производные, но не имеющие в этой точке **производной**.

Пример 11.5. Найти **односторонние** производные функции $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

◀ Запишем приращение функции в этой точке:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x \ \text{при } \Delta x > 0; \\ -\Delta x \ \text{при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Поскольку $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, функция $f(x) = |x|$ **не имеет** в точке $x_0 = 0$ **производной** (ни конечной, ни бесконечной). ▶

11.2. Дифференцируемость функции

1. Дифференцируемость функции в точке

Определение 11.4. Функция $f(x)$, определенная в некоторой **окрестности** $U(x_0)$, называется **дифференцируемой** в точке x_0, если её приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \overline{o}(\Delta x), \ \ \Delta x \to 0, \qquad \textbf{(11.1)}$$

где A — некоторое **число**, не зависящая от Δx.

Установим связь между **дифференцируемостью** функции в точке и существованием **производной** в той же точке.

Теорема 11.1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была **дифференцируема** в точке x_0, **необходимо и достаточно**, чтобы в этой точке существовала (**конечная**) **производная** $f'(x_0)$.

Доказательство. Необходимость Пусть функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, т.е. её приращение в этой точке имеет вид **(11.1)**. Поделим это тождество на Δx:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{\overline{o}(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0,$$

и перейдём к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overline{o}(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

означающее, что функция $f(x)$ **имеет** в точке x_0 (**конечную**) **производную**, равную числу A: $f'(x_0) = A$.

Достаточность. Пусть существует **конечная производная** $f'(x_0)$, т.е. существует **конечный** предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$. Обозначим $f'(x_0) = A$. Тогда разность $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - A$ является **бесконечно малой функцией** при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \Delta x \to 0, \qquad \textbf{(11.2)}$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Поскольку $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \overline{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то из равенства **(11.2)** следует равенство **(11.1)**, означающее, что функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0. ■

2. Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0. Тогда её праращение в этой точке есть сумма **двух** слагаемых:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \overline{o}(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Первое из них пропорционально Δx, а в таких случаях говорят, что оно есть **линейная однородная** функция переменной Δx. Второе слагаемое $\overline{o}(\Delta x)$ является бесконечно малой функцией при $\Delta x \to 0$ **высшего** порядка малости по сравнению с Δx. Если $A \neq 0$, то **второе** слагаемое стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ **быстрее** первого. В связи с этим первое слагаемое

$A \cdot \Delta x \equiv f'(x_0) \cdot \Delta x$ называется **главным членом** приращения $\Delta f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$.

Определение 11.5. Если функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, то её **дифференциалом** в этой точке называется **(главная) линейная однородная** относительно Δx часть приращения $\Delta f(x_0)$:

$$dy(x_0) = df(x_0) = A \cdot \Delta x \equiv f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Замечание 11.4. Если $A = 0$, то слагаемое $A \cdot \Delta x \equiv 0$ уже не является **главной** частью приращения $\Delta f(x_0)$, так как, вообще говоря, $\overline{o}(\Delta x) \neq 0$. Однако и в этом случае по определению полагаем **дифференциал функции** в точке x_0 равным $A \cdot \Delta x \equiv 0$, т.е. $dy(x_0) = df(x_0) = 0$.

Замечание 11.5. Поскольку $\Delta y = dy + \overline{o}(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, то, вообще говоря, $\Delta y \neq dy$. Равенство $\Delta y = dy$ имеет место лишь для **линейной функции** $y = Ax + B$: $\Delta y = A \cdot \Delta x = dy$. В частности, если $y = x$, то $\Delta x = dx$.

Новая запись. Учитывая, что $A = f'(x_0)$, и для **независимой** переменной x справедливо равенство $\Delta x = dx$, выражение для дифференциала можно записать в виде

$$dy(x_0) = df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx. \qquad \textbf{(11.3)}$$

Из формулы **(11.3)** получается новое **обозначение для производной** функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Здесь **правая часть** представляет собой **отношение** дифференциала $df(x_0)$ этой функции в точке x_0 к дифференциалу dx её аргумента.

Замечание 11.6. Равенство $\Delta y = dy + \overline{o}(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, даёт при малых Δx формулу для **приближенных** вычислений: $\Delta y \approx dx$ в точке x_0.

Упражнение 11.1. Доказать, что при $|\alpha| \ll 1$ справедливо следующее приближённое равенство: $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$.

3. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности

Теорема 11.2. Если функция $f(x)$ **дифференцируема** в данной точке x_0, то она и **непрерывна** в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, то есть её **приращение** в этой точке имеет **представление**

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \bar{o}(\Delta x), \ \ \Delta x \to 0,$$

из которого следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$, а это и означает **непрерывность** функции $f(x)$ в точке x_0. ■

Замечание 11.7. Обратное утверждение **неверно**: функция может быть непрерывной в точке, но не быть дифференцируемой (то есть не иметь конечной производной) в этой точке. Примером может служить функция $y = |x|$, которая непрерывна в точке x_0, однако не имеет в этой точке конечной производной.

4. Геометрический смысл производной и дифференциала

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, **определённой** на интервале $(a; b)$ и **непрерывной** в точке $x_0 \in (a; b)$. Пусть точка $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$ (т.е. $\Delta x = x - x_0 \neq 0$). Проведём через точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M(x; y)$, где $y_0 = f(x_0)$, прямую, называемую **секущей** (**рис. 11.1**). Угол наклона этой секущей обозначим через $\varphi(\Delta x) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ — он зависит от приращения Δx. Уравнение этой секущей можно записать в виде

$$y = k(\Delta x) \cdot (x - x_0) + y_0, \qquad \textbf{(11.4)}$$

где

$$k(\Delta x) = \operatorname{tg}(\varphi(\Delta x)) = \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} \qquad \textbf{(11.5)}$$

— **угловой коэффициент секущей**.

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то прямую l_0 с углом наклона φ_0, проходящую через точку M_0, называют **предельным положением секущей** при $\Delta x \to 0$.

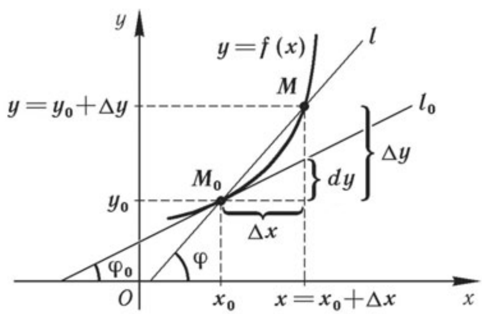

Рис. 11.1

Определение 11.6. Касательной l_0 к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ называют **предельное положение секущей** M_0M при $\Delta x \to 0$. **(рис. 11.1)**

Замечание 11.8. Возможны **два** случая.

1-й случай. $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда l_0 называется **наклонной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке M_0. В этом случае существует **конечный предел** $k_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}(\varphi(\Delta x))$ и уравнение касательной l_0 имеет вид:

$$y = k_0 \cdot (x - x_0) + y_0 \qquad \textbf{(11.6)}$$

(оно может быть получено из уравнения **(11.4) предельным переходом** при $\Delta x \to 0$).

В силу формулы **(11.5)** существование **конечного** предела

$$k_0 = \lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

означает **существование** в точке x_0 **конечной** производной $f'(x_0)$, равной **угловому коэффициенту** k_0 **касательной** l_0 к графику функции $f(x)$ в точке M_0, поэтому уравнение касательной принимает вид:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0. \qquad \textbf{(11.7)}$$

Геометрический смысл производной. Производная $f'(x_0)$ функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна **тангенсу угла** φ_0 между положительным направлением оси Ox и касательной l_0 к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Геометрический смысл дифференциала. Перепишем уравнение **(11.7)** в виде

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

и заметим, что выражение, стоящее в правой части уравнения — **дифференциал** $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$ функции $f(x)$ в точке x_0. Таким образом, уравнение касательной l_0 принимает вид $\Delta y = df(x_0)$. Следовательно, дифференциал $df(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равен **приращению ординаты** Δy на касательной l_0 к графику функции $f(x)$ в этой же точке.

2-й случай. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ или $-\frac{\pi}{2}$. Тогда l_0 называется **вертикальной касательной** к графику функции $f(x)$ в точке M_0. В этом случае

$$\lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = +\infty \quad \text{или } -\infty.$$

Уравнение **вертикальной касательной** $x = x_0$ получается из **уравнения секущей**, преобразованного к виду $\frac{y}{k(\Delta x)} = x - x_0 + \frac{y_0}{k(\Delta x)}$, предельным переходом при $\Delta x \to 0$.

Замечание 11.9. В случае существования в точке x_0 **левой производной** $f'_-(x_0)$ график функции $f(x)$ имеет в точке так называемую **левую касательную** — луч, выходящий из точки M_0, имеющей угловой коэффициент $f'_-(x_0)$, и для которого $-\infty \leqslant x \leqslant x_0$. Аналогично определяется **правая касательная**. Левую и правую касательную называют **односторонними касательными**. Легко заметить, что график функции $f(x)$ имеет в точке M_0 касательную **тогда и только тогда**, когда существуют **обе односторонние касательные** к графику этой функции в точке M_0, **объединение** которых даёт **прямую** (которая и является касательной).

5. Физический смысл производной

Пример 11.6. Пусть функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки M от начала отсчёта за время x. Тогда за время x_0 она пройдёт путь $y_0 = f(x_0)$, а за время x_1 — путь $y_1 = f(x_1)$. Следовательно, путь, пройденный за промежуток времени $[x_0; x_1]$ (продолжительности $\Delta x = x_1 - x_0$), равен $\Delta y(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Отношение $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ называется **средней скоростью** движения на отрезке времени $[x_0; x_0 + \Delta x]$, а предел этой скорости при $\Delta x \to 0$ — **мгновенной скоростью** $v_{\text{мгн}}(x_0)$ точки M в момент времени x_0.

Физический смысл производной. Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения производной функции. Какую бы зависимость ни отражала функция $y = f(x)$, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ есть функция **скорости изменения** переменной y относительно изменения переменной x на участке $x \in [x_0; x_0 + \Delta x]$, а $y'(x_0)$ — **мгновенная скорость** изменения y в точке x_0.

11.3. Правила дифференцирования

1. Правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

Теорема 11.3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ **дифференцируемы** в точке x, то сумма, разность, произведение и (при дополнительном ограничении $v(x)\neq 0$) частное $\frac{u(x)}{v(x)}$ этих функций также **дифференцируемы** в этой точке и справедливы равенства:

1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$;

3) $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$.

Доказательство. По условию функции $u(x)$ и $v(x)$ **определены** в некоторой **окрестности** $U(x)$ точки x. Дадим переменной x такое приращение $\Delta x\neq 0$, что $(x+\Delta x)\in U(x)$. Для доказательства теоремы нам понадобятся равенства

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f(x),$$

определение производной и **свойства пределов**, связанные с арифметическими операциями.

1) Пусть $f(x)=u(x)\pm v(x)$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=f(x+\Delta x)-f(x)=\\&=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]=\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u(x)\pm\Delta v(x).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}[u(x)\pm v(x)]'&=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)\pm\Delta v(x)}{\Delta x}=\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}=u'(x)\pm v'(x).\end{aligned}$$

2) Пусть $f(x)=u(x)\cdot v(x)$, тогда

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=f(x+\Delta x)-f(x)=\\&=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=\\&=[u(x)+\Delta u(x)]\cdot[v(x)+\Delta v(x)]-u(x)\cdot v(x)=\\&=u(x)\cdot\Delta v(x)+\Delta u(x)\cdot v(x)+\Delta u(x)\cdot\Delta v(x).\end{aligned}$$

Поэтому

$$[u(x)\cdot v(x)]' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\cdot \Delta v(x) + \Delta u(x)\cdot v(x) + \Delta u(x)\cdot \Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[u(x)\cdot \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}\cdot v(x) + \Delta u(x)\cdot \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= u(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= u(x)\cdot v'(x) + v(x)\cdot u'(x) + 0\cdot v'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

3) Пусть $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, тогда

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x) + \Delta u(x)}{v(x) + \Delta v(x)} - \frac{u(x)}{v(x)} =$$

$$= \frac{\cancel{u(x)\cdot(x)} + \Delta u(x)\cdot(x) - \cancel{u(x)\cdot v(x)} - u(x)\cdot \Delta v(x)}{v^2(x) + v(x)\cdot \Delta v(x)} = \frac{\Delta u\cdot v - u\cdot \Delta v}{v^2 + v\cdot \Delta v}.$$

Поэтому

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v - u\cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{v^2} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$, так как функция $v(x)$ **дифференцируема** в точке x, а следовательно и **непрерывна** в этой точке. ■

Пример 11.7. Найти производную функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

$$◄\ (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot \cos x - \sin x\cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично доказывается, что $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. ►

2. Производная обратной функции

Теорема 11.4. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $y = f(x)$ **строго монотонная** и **непрерывна** на интервале $(a; b)$;

2) в точке $x_0 \in (a; b)$ **существует конечная** производная $f'(x) \neq 0$.

Тогда:

1) **обратная** функция $f^{-1}(y) \equiv \varphi(y)$ имеет **конечную производную** в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$;

2) справедливо равенство $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. 1) Пусть функция $y = f(x)$ **строго монотонная** и **непрерывна** на интервале $(a; b)$. Тогда по **теореме 9.11** **обратная** функция $f^{-1}(y) \equiv \varphi(y)$ **определена, непрерывна** и **строго монотонная** на интервале $(A; B)$, где $A = \inf\limits_{x \in (a;b)} f(x)$, $B = \sup\limits_{x \in (a;b)} f(x)$. Поэтому $y_0 = f(x_0) \in (A; B)$.

2) Пусть $\{y_n\}$ — **произвольная** последовательность точек из интервала $(A; B)$, **сходящаяся** к y_0 при $n \to \infty$, и такая, что $y_n \neq y_0$ для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда соответствующая ей последовательность $\{x_n = \varphi(y_n)\}$ обладает свойствами:

а) она сходится к числу $x_0 = \varphi(y_0)$ (согласно свойству **непрерывности** функции $x = \varphi(y)$);

б) $x_n \neq x_0$ для любого номера $n \in \boldsymbol{N}$ (согласно свойству **строгой монотонности** функции $x = \varphi(y)$).

Следовательно, для этих последовательностей справедливы тождества:

$$\frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} \equiv \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} \equiv \frac{1}{\left(\dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}\right)} \equiv \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)}, \quad n \in \boldsymbol{N}.$$

3) Согласно определению производной от функции $\varphi(y)$ в точке y_0 (мы переходим от предела по Коши к пределу по Гейне и обратно) имеем:

$$\varphi'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(y_n) - \varphi(y_0)}{y_n - y_0} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \ \blacksquare$$

Пример 11.8. Найти производные функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$.

◀ Рассмотрим пару взаимно обратных **строго монотонных** функций

$$\begin{cases} y = \arcsin x, & D(y) = X = (-1; 1); \\ & E(y) = Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \sin y, & D(x) = Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \\ & E(x) = X = (-1; 1). \end{cases}$$

На множестве $Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $x = \sin y$ удовлетворяет условиям **теоремы 11.4** о производной **обратной** функции, поэтому для любого $x_0 \in X = (-1; 1)$ справедливы равенства

$$(\arcsin x)'\big|_{x=x_0} = \frac{1}{(\sin y)'}\bigg|_{y=y_0} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}},$$

где $y_0 = \arcsin x_0$. Следовательно, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$.

Мы воспользовались равенством $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$, справедливым на множестве $Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором $\cos y > 0$.

Аналогично доказывается, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$. ►

Пример 11.9. Найти производные функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.

◄ Рассмотрим пару взаимно обратных **строго монотонных** функций

$$\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x, & D(y) = X = \boldsymbol{R}; \\ & E(y) = Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \operatorname{tg} y, & D(x) = Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right); \\ & E(x) = X = \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

На множестве $Y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $x = \operatorname{tg} y$ удовлетворяет условиям **теоремы 11.4** о производной **обратной** функции, поэтому для любого $x_0 \in X = \boldsymbol{R}$ справедливы равенства

$$(\operatorname{arctg} x)'\big|_{x=x_0} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}\bigg|_{y=y_0} = \cos^2 y_0 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y_0} = \frac{1}{1+x_0^2},$$

где $y_0 = \operatorname{arctg} x_0$. Следовательно, $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Аналогично доказывается, что $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \boldsymbol{R}$. ►

Пример 11.10. Найти производную **логарифмической** функции $y = \log_a x$, где $a>0$, $a \neq 1$.

◄ Рассмотрим пару взаимно обратных **строго монотонных** функций

$$\begin{cases} y = \log_a x, & D(y) = X = (0; +\infty); \\ & E(y) = Y = \boldsymbol{R}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = a^y, & D(x) = Y = \boldsymbol{R}; \\ & E(x) = X = (0; +\infty). \end{cases}$$

На множестве $Y = R$ **показательная** функция $x = a^y$ удовлетворяет условиям **теоремы 11.4** о производной **обратной** функции, поэтому для любого $x_0 \in (0; +\infty)$ справедливы равенства

$$(\log_a x)'\big|_{x=x_0} = \frac{1}{(a^y)'}\bigg|_{y=y_0} = \frac{1}{a^{y_0}\ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}, \text{ где } y_0 = \log_a x_0.$$

Следовательно, $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x>0$. При $a = e$ эта формула принимает вид $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x>0$. ►

3. Производная сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Теорема 11.5. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $y=g(x)$ **дифференцируема** в точке x_0;

2) функция $z=f(y)$ **дифференцируема** в точке $y_0=g(x_0)$.

Тогда:

1) сложная функция $z=F(x)=f(g(x))$ **дифференцируема** в точке x_0;

2) её **производная** в этой точке может быть вычислена по формуле

$$F'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)\cdot$$

Доказательство. 1) Из **дифференцируемости** функции в точке следует её **непрерывность** в этой точке. Поэтому функция $f(y)$ **непрерывна** в точке y_0, а $g(x)$ **непрерывна** в точке x_0.

2) Дифференцируемость функций $f(y)$ и $g(x)$ в точках y_0 и x_0, соответственно, означает (согласно определению), что они **определены** в некоторых **окрестностях** $U_\varepsilon(y_0)$ и $U_\delta(x_0)$ этих точек и **их приращения**

$$\begin{cases}\Delta f(y_0)=f(y_0+\Delta y)-f(y_0);\\ \Delta g(x_0)=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)\end{cases}$$

имеют вид:

$$\Delta f(y_0)=[f'(y_0)+\alpha(\Delta y)]\cdot\Delta y \text{ при } 0<|\Delta y|<\varepsilon, \qquad \textbf{(11.8)}$$

$$\Delta g(x_0)=[g'(x_0)+\beta(\Delta x)]\cdot\Delta x \text{ при } 0<|\Delta x|<\delta,$$

где $\alpha(\Delta y)$ — **бесконечно малая** функция при $\Delta y\to 0$ и $\beta(\Delta x)$ — **бесконечно малая** функция при $\Delta x\to 0$.

3) Доопределим функцию $\alpha(\Delta y)$ в нуле по **непрерывности**: $\alpha(0)=0$, тогда равенство **(11.8)** будет выполняться в целой окрестности $U_\varepsilon(y_0)$, то есть при $|\Delta y|<\varepsilon$ (при $\Delta y=0$ это равенство принимает вид $0=0$).

4) Используя **непрерывность** функции $g(x)$ в точке x_0, **уменьшим** $\delta>0$ (если необходимо) так, чтобы для любого $x\in U_\delta(x_0)$ (то есть при $|\Delta x|<\delta$) выполнялось бы неравенство $|\Delta g(x_0)|<\varepsilon$.

5) Рассмотрим **приращение сложной функции** $F(x)$ в точке x_0 при $|\Delta x|<\delta$:

$$\Delta F(x_0)=F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=f[g(x_0+\Delta x)]-f[g(x_0)]=$$
$$=f[g(x_0)+\Delta g(x_0)]-f[g(x_0)]=$$
$$=f(y_0+\Delta y)\big|_{\Delta y=\Delta g(x_0)}-f(y_0)=\Delta f(y_0)\big|_{\Delta y=\Delta g(x_0)}.$$

Поскольку $|\Delta x|<\delta$, то выполняется неравенство $|\Delta g(x_0)|<\varepsilon$, поэтому формула **(11.8)** справедлива при $\Delta y=\Delta g(x_0)$. В результате имеем:

$$\Delta F(x_0)=[f'(y_0)+\alpha(\Delta y)]\cdot\Delta y\big|_{\Delta y=\Delta g(x_0)}=$$

$$=[f'(y_0)+\alpha(\Delta g(x_0))]\cdot[g'(x_0)+\beta(\Delta x)]\cdot\Delta x=\underbrace{f'(y_0)\cdot g'(x_0)}_{\text{число}}\cdot\Delta x+$$

$$+\underbrace{[f'(y_0)\cdot\beta(\Delta x)+\alpha(\Delta g(x_0))\cdot g'(x_0)+\alpha(\Delta g(x_0))\cdot\beta(\Delta x)]}_{\gamma(\Delta x)}\cdot\Delta x$$

где $\gamma(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, так как $\Delta g(x_0)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ (непрерывность функции $g(x)$ в точке x_0).

Таким образом, мы получили равенство

$$\Delta F(x_0)=\underbrace{f'(y_0)\cdot g'(x_0)}_{\text{const}}\cdot\Delta x+\underbrace{\gamma(\Delta x)}_{\text{БМФ при }\Delta x\to 0}\cdot\Delta x,$$

означающее (по определению), что сложная функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0)=f'(y_0)\cdot g'(x_0)$. ■

Пример 11.11. Найти производную степенной функции $y=x^{\alpha}$, $x>0$, в случае произвольного **действительного** показателя степени α.

◀ Напомним, что формула для производной степенной функции $y=x^n$ с **натуральным** показателем степени $n\in\boldsymbol{N}$ была получена **ранее**: $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$, $x\in\boldsymbol{R}$. В случае **произвольного показателя степени** $\alpha\in\boldsymbol{R}$ представим степенную функцию в виде **сложной** функции:

$$x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}=e^{g(x)},\ \text{где}\ g(x)=\alpha\ln x.$$

Тогда

$$(x^{\alpha})'=(e^{g(x)})'=e^{g(x)}\cdot g'(x)=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\ \text{для любого}\ \alpha\in\boldsymbol{R}.\ ▶$$

Пример 11.12. Найти производную **степенно-показательной** функции $[u(x)]^{v(x)}$ с областью определения $D(f)=\{x\in\boldsymbol{R}:\ u(x)>0\}$.

◀ Представим заданную функцию в виде **сложной** функции:

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)'=[e^{v(x)\ln u(x)}]'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot[v(x)\ln u(x)]'=$$

$$=[u(x)]^{v(x)}\cdot[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)].$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)'=[u(x)]^{v(x)}\cdot[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}\cdot u'(x)],\ \ x\in D(f).\ ▶$$

Следствие (инвариантность формы первого дифференциала относительно преобразования независимой переменной). Дифференциал функции $y = f(x)$ имеет один и тот же вид

$$dy = f'(x) \cdot dx \qquad \textbf{(11.9)}$$

как в случае, когда x — **независимая** переменная, так и в случае, когда $x = \varphi\ (t)$ — **дифференцируемая** функция другой переменной.

Доказательство. Пусть $x = \varphi\ (t)$ — **дифференцируемая** функция переменной t. По правилу **дифференцирования сложной функции** $y = f(\varphi\ (t)) = F(t)$ имеем: $F'(t) = f'(x)|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$, откуда по определению **дифференциала** получаем: $dy = F'(t) \cdot dt = f'(x)|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) \cdot dt$. Поскольку $\varphi'(t) \cdot dt = dx|_{x=\varphi(t)}$, то $dy = f'(x) \cdot dx|_{x=\varphi(t)}$, то есть формула **(11.9)** остаётся справедливой при **замене** x на $\varphi\ (t)$. Это свойство называется **инвариантностью формы первого дифференциала**. ■

4. Производная функции, заданной параметрически

Определение 11.7. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) $x(t)$ и $y(t)$ — **пара** функций, определённых в некоторой **окрестности** $U(t_0)$ точки t_0;

2) функция $x(t)$ имеет **обратную** $t = t(x)$, определённую в некоторой **окрестности** $V(x_0)$ точки $x_0 = x(t_0)$.

Тогда в окрестности $V(x_0)$ определена **сложная** функция

$$F(x) = y\,(t\,(x)),$$

которую называют функцией, **заданной параметрически** с помощью уравнений

$$\begin{cases} x = x\,(t); \\ y = y\,(t). \end{cases}$$

Замечание 11.11. Напомним, что по **теореме 9.11 непрерывная** и **строго монотонная** в окрестности $U(t_0)$ функция $x = x(t)$ имеет **обратную функцию** $t = t(x)$, **непрерывную** и **строго монотонную**.

Пример 11.13. Система уравнений $\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t \end{cases}$ задаёт при $t \in [0;\, \pi]$ функцию $y = +\sqrt{R^2 - x^2}$, а при $t \in [\pi;\, 2\pi]$ — функцию $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$. Их графики образуют окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 11.14. Система уравнений $\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t \end{cases}$ (где $a > 0$ и $b > 0$) задаёт при $t \in [0; \pi]$ функцию, графиком которой является **верхняя** часть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а при $t \in [\pi; 2\pi]$ — функцию, графиком которой является **нижняя** часть этого эллипса.

Далее мы будем использовать следующие **обозначения**:

$$\frac{dy(t(x))}{dx} = y'_x; \qquad \frac{dy(t)}{dt} = y'_t = \dot{y}; \qquad \frac{dx(t)}{dt} = x'_t = \dot{x}.$$

Теорема 11.6. Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функция $F(x)$ задана (**параметрически**) в некоторой **окрестности** $V(x_0)$ точки $x_0 = x(t_0)$ с помощью уравнений $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in U(t_0)$;

2) существуют **конечные** производные $\dot{x}(t_0)$ и $\dot{y}(t_0)$;

3) $\dot{x}(t_0) \neq 0$.

Тогда: 1) параметрически заданная функция $F(x)$ **дифференцируема** в точке x_0;

2) справедлива формула $F'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$.

Доказательство. 1) функция $F(x) \equiv y(t(x))$ **дифференцируема** в точке x_0 по **теореме 11.5** о производной **сложной** функции.

2) Первое доказательство. Воспользуемся свойством **инвариантности формы** 1-ого дифференциала (**следствие** теоремы **11.5**):

$$\begin{cases} dx = \dot{x} \cdot dt; \\ dy = \dot{y} \cdot dt \end{cases}$$

и запишем **производную** функции $F(x)$ в точке x_0 с помощью **дифференциалов**:

$$F'(x_0) = \left.\frac{dy(t(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\dot{y}\,dt}{\dot{x}\,dt}\right|_{t=t_0} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Второе доказательство. Воспользуемся **теоремами 11.5** и **11.4** о дифференцируемости **сложной** функции **и обратной** функции:

$$F'(x_0) = \left.\frac{dy(t(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \cdot \left.\frac{dt(x)}{dx}\right|_{x=x_0} =$$

$$= \dot{y}(t_0) \cdot \frac{1}{\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0}} = \dot{y}(t_0) \cdot \frac{1}{\dot{x}(t_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}. \ \blacksquare$$

5. Таблица производных основных элементарных функций

Напомним, что **элементарными** называются функции, которые получаются из **основных элементарных** функций с помощью **конечного** числа **арифметических** операций $(+, -, \times, :)$ и **суперпозиций** функций, осуществлённых над **основными элементарными** функциями. Поэтому для дифференцирования элементарных функций достаточно таблицы основных элементарных функций и правил дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и суперпозиции функций (сложной функции).

Замечание 11.10. Учитывая сказанное выше, нетрудно заметить, что **производная** любой **элементарной** функции также является **элементарной** функцией.

I. $(\mathrm{const})'=0$.

II. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, где $\alpha\in\boldsymbol{R}$. В частности, $x'=1$ и $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

III. $(a^x)'=a^x\ln a$, где $a>0$, $a\neq 1$. В частности, $(e^x)'=e^x$.

IV. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, где $a>0$, $a\neq 1$. В частности, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

V. $(\sin x)'=\cos x$.

VI. $(\cos x)'=-\sin x$.

VII. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

VIII. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$.

IX. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

X. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

XI. $(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

XII. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

XIII. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.

XIV. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

XV. $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVI. $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Используя **теорему 11.5** можно все формулы для производных **основных элементарных** функция **(II–XVI)** записать в более **общем виде**: если $u=u(x)$ — **дифференцируемая** функция, то

II. $(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$, где $\alpha\in\boldsymbol{R}$. В частности $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.

III. $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$, где $a>0$, $a\neq 1$. В частности, $(e^u)'=e^u\cdot u'$.

IV. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$, где $a>0$, $a\neq 1$. В частности, $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.

V. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.

VI. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.

VII. $(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.

VIII. $(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

IX. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

X. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.

XI. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

XII. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

XIII. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

XIV. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

XV. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$.

XVI. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$.

11.4. Производные и дифференциалы высших порядков

1. Понятие производной n-го порядка

Пусть функция $f(x)$ **дифференцируема** на **интервале** $(a; b)$. Тогда на этом интервале определена функция $g(x) \equiv f'(x)$, которая также может оказаться дифференцируемой хотя бы в одной точке этого интервала.

Определение 11.8.

1) Назовем $f'(x)$ **производной 1-го порядка** функции $f(x)$.

2) Производная $g'(x)$ от **производной** $g(x) \equiv f'(x)$ функции $f(x)$ называется **производной 2-го порядка** (или **второй производной**) функции $f(x)$:

$$g'(x) = f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'.$$

3) Производной n-го **порядка** $(n \in N,\ n \geqslant 2)$ от функции $f(x)$ называется (первая) **производная от производной этой функции** $(n-1)$-го **порядка**:

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)' \quad \text{или} \quad y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'. \qquad \textbf{(11.1)}$$

4) Производные, начиная со 2-й, называются производными **высших порядков**.

Замечание 11.12. Для **существования** $f^{(n)}(x_0)$ — производной n-ого порядка в точке x_0 **необходимо существование** $f^{(n-1)}(x)$ — производной $(n-1)$-го **порядка** в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ точки x_0.

Пример 11.15. Найти n-ю производную **показательной** функции $y \equiv a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

◄ $y' = a^x \cdot \ln a$,

$y'' = (a^x)' \cdot \ln a = a^x \cdot \ln^2 a$,

. . . . . .

$y^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a$, где $n \in N$.

В частности, $(e^x)^{(n)} = e^x$. ►

Пример 11.16. Найти n-ю производную функции $y = \sin x$.

◄ $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

$y'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right)$.

. . . . . .

$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right)$, где $n \in \boldsymbol{N}$. ►

Пример 11.17. Найти n-ю производную функции $y = \cos x$.

◄ Аналогично получаем $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot n\right)$, где $n \in \boldsymbol{N}$. ►

Пример 11.18. Найти n-ю производную **степенной** функции $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

◄ $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$,

$y'' = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$,

. . . . . .

$y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdot\ldots\cdot[\alpha - (n-1)]\, x^{\alpha - n}$, где $n \in \boldsymbol{N}$.

В частности, если $\alpha = k \in \boldsymbol{N}$, то

$$(x^k)^{(n)} = \begin{cases} k! & \text{при } n = k; \\ 0 & \text{при } n > k. \end{cases}$$ ►

Теорема 11.7. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 **производные** n-го порядка. **Тогда**

1) их сумма и произведение также имеют в точке x_0 **производные** n-го порядка;

2) справедливы формулы:

$$[f(x) + g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x); \tag{11.2}$$

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x) \text{ (формула **Лейбница**)}. \tag{11.3}$$

В этих формулах использовались следующие **обозначения**:

$$f^{(0)}(x) = f(x), \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad 0! = 1.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

1) Докажем формулу **(11.2)**.

1°. При $n = 1$ формула верна: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

2°. Пусть формула **(11.2)** верна для производной k-го порядка. Докажем, что тогда она верна и для производной $n=(k+1)$-го порядка.

$$[f(x)+g(x)]^{(k+1)}=\left([f(x)+g(x)]^{(k)}\right)'=\left[f^{(k)}(x)+g^{(k)}(x)\right]'=.$$
$$=\left[f^{(k)}(x)\right]'+\left[g^{(k)}(x)\right]'=f^{(k+1)}(x)+g^{(k+1)}(x).$$

2) Формула **(11.3)** доказывается аналогично. ■

2. Дифференциалы высших порядков

Обозначения. Для удобства будем наряду с обозначениями дифференциалов символами dx и dy использовать обозначения δx и δy.

Определение 11.9. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке x некоторого интервала. Тогда её **дифференциал** $dy=f'(x)\,dx$ называется **дифференциалом первого порядка**.

Замечание 11.13. Дифференциал первого порядка $dy=f'(x)\,dx$ является функцией **двух** переменных: аргумента x и его дифференциала dx.

Определение 11.10. Дифференциал $\delta(dy)$ от дифференциала первого порядка dy в точке x, взятый при $\delta x=dx$, называется **дифференциалом второго порядка** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается символом d^2y:

$$d^2y=\delta(dy)\big|_{\delta x=dx}=\delta(f'(x)\,dx)\big|_{\delta x=dx}.$$

Замечание 11.14. При вычислении **второго дифференциала** различают **два** случая:

1) аргумент x является **независимой** переменной;

2) аргумент x представляет собой **дифференцируемую функцию** некоторой **независимой** переменной t.

В **1-м случае** мы имеем право считать, что дифференциал dx не зависит от переменной x и равен одному и тому же приращению аргумента Δx (для всех $x\in D(f)$). Поэтому $\delta(dx)=(dx)'_x\,\delta x=0\cdot\delta x=0$. Следовательно (в этом случае), для второго дифференциала функции $f(x)$ справедливо представление:

$$d^2y=\delta(dy)\big|_{\delta x=dx}=\delta(f'(x)\,dx)\big|_{\delta x=dx}=\{\delta[f'(x)]\,dx+f'(x)\,\delta(dx)\}\big|_{\delta x=dx}=$$
$$=\{\delta[f'(x)]\,dx+0\}\big|_{\delta x=dx}=\{f''(x)\,\delta x dx\}\big|_{\delta x=dx}=f''(x)\cdot(dx)^2. \quad \textbf{(11.4)}$$

Во **2-м случае**, согласно **формуле (13.4)**, $d^2x(t)=x''(t)\cdot(dt)^2\neq 0$, поэтому представление для **второго дифференциала** функции $f(x)$ имеет более **сложный** вид:

$$d^2y=\delta(dy)\big|_{\delta x=dx}=\delta(f'(x)\,dx)\big|_{\delta x=dx}=\{\delta[f'(x)]\,dx+f'(x)\,\delta(dx)\}\big|_{\delta x=dx}=$$
$$=\{f''(x)\,\delta x dx+f'(x)\delta(dx)\}\big|_{\delta x=dx}=f''(x)\cdot(dx)^2+f'(x)\cdot d^2x. \qquad \mathbf{(11.5)}$$

Дифференциал d^ny произвольного порядка $n\in \boldsymbol{N}$, $n\geqslant 2$, вводится по индукции.

Определение 11.11. Дифференциалом n-го **порядка** (или n-ым дифференциалом) функции $y=f(x)$ (обозначение: d^ny) называется дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала $d^{n-1}y$, взятый при $\delta x=dx$.

Теорема 11.8. В случае, когда аргумент x является **независимой** переменной, для n-го **дифференциала** n раз дифференцируемой функции $y=f(x)$ справедлива формула

$$d^ny=y^{(n)}(x)\cdot(dx)^n,\ \text{где}\ n\in \boldsymbol{N}. \qquad \mathbf{(11.6)}$$

Доказательство. Используем метод **математической индукции**.

1°. Для $n=1$ формула, очевидно, верна.

2°. Пусть она верна для $n=k$: $d^ky=y^{(k)}(x)\cdot(dx)^k$, где $k\in \boldsymbol{N}$, и функция $y^k(x)$ **дифференцируема** в точке x. Поскольку аргумент x является **независимой** переменной, мы имеем право считать, что дифференциал dx **не зависит** от переменной x и равен одному и тому же приращению аргумента Δx (для всех $x\in D(f)$). Поэтому

$$d^{k+1}y=\delta(d^ky)\big|_{\delta x=dx}=\delta\big[y^{(k)}(x)\cdot(dx)^k\big]\big|_{\delta x=dx}=\delta\big[y^{(k)}(x)\big]\big|_{\delta x=dx}\cdot(dx)^k=$$
$$=[y^{(k)}(x)]'_x\,\delta x\big|_{\delta x=dx}\cdot(dx)^k=y^{(k+1)}(x)\cdot(dx)^{k+1}.\ \blacksquare$$

Замечание 11.15. Сравнивая формулы **(13.4)** и **(13.5)**, мы видим, что **дифференциал 2-го порядка** (в отличие от дифференциала 1-го порядка) **не обладает** свойством **инвариантности формы** (относительно преобразования независимой переменной) — у него появилось дополнительное слагаемое. Оно тождественно (равно) нулю лишь в случае, когда $x=\varphi(t)=at+b$ — линейная функция (здесь a и b — постоянные). Только в этом случае вид 2-го дифференциала не меняется. Дифференциалы высших порядков также **не обладают** свойством **инвариантности формы**.

§12. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

12.1. Основные теоремы дифференциального исчисления

1. Локальный экстремум. Теорема Ферма

Определение 12.1. Точка $x_0 \in \boldsymbol{R}$ называется точкой **локального максимума (минимума)**, а значение $f(x_0)$ функции в ней — **локальным максимумом (минимумом)**, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Определение 12.2. Точки **локального максимума и минимума** называются точками **локального экстремума**, а значения функции в них — **локальными экстремумами** функции.

Замечание 12.1. Кроме понятия локального экстремума функции в математике используют также понятие **строгого локального экстремума** функции. Точка $x_0 \in \boldsymbol{R}$ называется точкой **строгого локального максимума** (**минимума**), если существует такая **проколотая** окрестность $\dot{U}(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x \in \dot{U}(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{соответственно } f(x) > f(x_0)).$$

Эти точки объединяются общим названием — **точки строгого локального экстремума**, а значения функций в них — **строгими локальными экстремумами** функции.

Теорема 12.1 (теорема Ферма — необходимое условие локального экстремума). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **имеет** в точке x_0 **локальный экстремум**;

2) существует (**конечная**) производная $f'(x_0)$.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Замечание 12.2. Согласно **определению** локального экстремума функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям **теоремы Ферма**, определена в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ точки x_0.

Доказательство (теоремы Ферма). Не теряя общности доказательства, будем считать, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 **локальный максимум**. Это означает, что существует такая окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, что для любого $x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$.

Пусть $\Delta x = x - x_0$, тогда для любого $x = x_0 + \Delta x \in U_\varepsilon(x_0)$ выполняется неравенство $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0$. Следовательно:

1) при $\Delta x > 0$ (т.е. для $x > x_0$, $x \in U_\varepsilon(x_0)$) справедливы неравенства:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0;$$

2) при $\Delta x < 0$ (т.е. для $x < x_0$, $x \in U_\varepsilon(x_0)$) справедливы неравенства:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

По условию теоремы существует (**конечная**) производная $f'(x_0)$. Поэтому существуют односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ и справедливо равенство:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Это возможно лишь при $f'_+(x_0) = 0 = f'_-(x_0)$. Но тогда и $f'(x_0) = 0$. ■

Замечание 12.3. Теорема Ферма даёт **необходимое** условие **внутреннего экстремума** дифференцируемой функции. Для **невнутренних** экстремумов (например, точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ для функции $f(x) = x$, определенной на отрезке $D(f) = [0;\, 1]$) утверждение о том, что $f'(x_0) = 0$ в точке локального экстремума $x_0 \in D(f)$, вообще говоря, **неверно**.

Замечание 12.4. Геометрически **теорема Ферма** вполне очевидна: в точке **внутреннего локального экстремума** дифференцируемой функции касательная к её графику **горизонтальна**.

Замечание 12.5. Физически **теорема Ферма** означает, что **в точке возврата** при движении по прямой (в этой точке координата имеет экстремум) скорость будет равна 0.

2. Теорема Ролля

Теорема 12.2 (теорема Ролля). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;\, b]$;

2) $f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a;\, b)$;

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда существует такая точка $c \in (a;\, b)$, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. По **второй** теореме **Вейерштрасса непрерывная на отрезке** $[a; b]$ функция $f(x)$ **достигает** своих **наибольшего и наименьшего значений** на этом отрезке: существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a; b]$, что

$$f(x_1) = \max_{[a;b]} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_2) = \min_{[a;b]} f(x).$$

Возможны **два** случая.

1-й случай. $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда $f(x) = \text{const} = f(x_1) = f(x_2)$ и в любой точке $c \in (a; b)$ справедливо равенство: $f'(c) = 0$.

2-й случай. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда хотя бы одна из точек x_1, x_2 принадлежит интервалу $(a; b)$, так как $f(a) = f(b)$. Эта точка — искомая точка c, так как $c \in (a; b)$ и

$$f(c) = \max_{[a;b]} f(x) \quad \text{или} \quad f(c) = \min_{[a;b]} f(x).$$

Следовательно, по **теореме Ферма**, $f'(c) = 0$. ■

Замечание 12.6. Геометрический смысл **теоремы Ролля**: при выполнении условий теоремы Ролля существует такая точка $c \in (a; b)$, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(c; f(c))$ **параллельна** оси $0x$ (**рис. 12.1**).

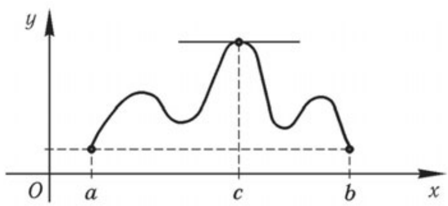

Рис. 12.1

Замечание 12.7. Все условия теоремы Ролля **существенны.** Ниже на рисунках изображены графики функций, каждая из которых удовлетворяет всем условиям **теоремы Ролля** на отрезке $[-2; 2]$, **кроме одного**. Для всех этих функций **не существует** точки на интервале $(-2; 2)$, в которой производная была бы **равна нулю**.

Пример 12.1. Функция $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -2 \leqslant x < 2; \\ 2 & \text{при } x = 2 \end{cases}$ **не является непрерывной** на отрезке $[-2; 2]$ (**рис. 12.2**).

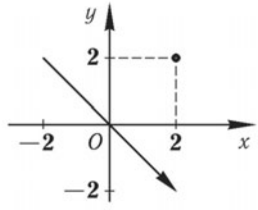

Рис. 12.2

Пример 12.2. Функция $f(x)=2-|x|$ **не является дифференцируемой** на интервале $(-2;\ 2)$ (**рис. 12.3**).

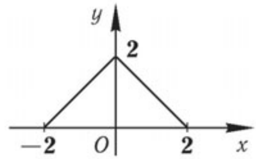

Рис. 12.3

Пример 12.3. Функция $f(x)=x$ принимает на концах отрезка $[-2;\ 2]$ **разные** значения: $f(-2)\neq f(2)$ (**рис. 12.4**).

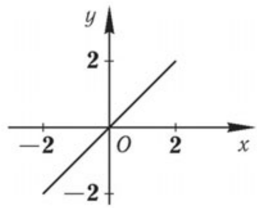

Рис. 12.4

3. Формула конечных приращений Лагранжа

Теорема 12.3 (теорема Лагранжа). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$;

2) $f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a;b)$.

Тогда существует такая точка $c\in(a;b)$, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a).$$

Эта формула называется **формулой конечных приращений Лагранжа**.

Замечание 12.8. Теорема **Лагранжа** является очевидным **обобщением** теоремы **Ролля**.

Доказательство. Перепишем **формулу Лагранжа** в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

и положим $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lambda$ — это **число**. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)\equiv f(x)-\lambda x$ и проверим, удовлетворяет ли она условиям **теоремы Ролля**.

1) Функция $g(x)$ **непрерывна на отрезке** $[a; b]$ как **разность двух непрерывных** функций;

2) $g(x)$ — **дифференцируема на интервале** $(a; b)$ как **разность двух дифференцируемых** функций;

3) $g(b)-g(a)=[f(b)-\lambda b]-[f(a)-\lambda a]=[f(b)-f(a)]-\lambda(b-a)=0.$

Таким образом, мы установили, что функция $g(x)$ удовлетворяет условиям **теоремы Ролля** на отрезке $[a; b]$, следовательно, существует такая точка $c\in(a; b)$, что

$$g'(c)=0 \iff f'(c)-\lambda=0 \iff f'(c)=\lambda. \blacksquare$$

Замечание 12.9. Число $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ равно **угловому коэффициенту хорды**, соединяющей концевые точки $A\,(a; f(a))$ и $B\,(b; f(b))$ графика функции $y=f(x)$, $x\in[a; b]$. Следовательно, **геометрический смысл теоремы Лагранжа** заключается в том, что существует хотя бы одна такая точка $c\in(a; b)$, для которой касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $C\,(c; f(c))$ **параллельна** секущей AB (**рис. 12.5**).

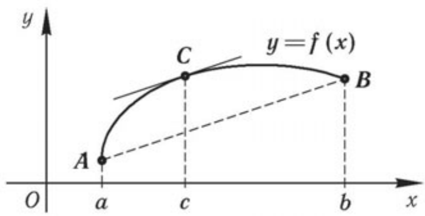

Рис. 12.5

Замечание 12.10. Очевидно, что **любая** точка $c\in(a; b)$ может быть представлена в виде $c=a+\theta\cdot(b-a)$, где $0<\theta<1$, поэтому **формулу конечных приращений Лагранжа** иногда записывают в виде

$$f(b)-f(a)=f'[a+\theta\cdot(b-a)]\cdot(b-a), \text{ где } 0<\theta<1.$$

Если же положить $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$, то $c=x_0+\theta\cdot\Delta x$, где $0<\theta<1$, и **формула конечных приращений Лагранжа** примет вид:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x, \text{ где } 0<\theta<1.$$

Следствие 1. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **дифференцируема** на **интервале** $(a;b)$;

2) $f'(x)=0$ для всех $x\in(a;b)$.

Тогда $f(x)\equiv C\equiv \text{const}$ на **интервале** $(a;b)$ (т.е. для всех $x\in(a;b)$).

Доказательство. Пусть x_0 — фиксированная точка из интервала $(a;b)$, а x — произвольная точка из этого интервала. Тогда по **теореме Лагранжа**, применённой к $f(x)$ на отрезке $[x_0;x]$ (или $[x;x_0]$), имеем:

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)=0, \text{ где } c\in(x_0;x) \text{ (или } (x;x_0)).$$

Следовательно, $f(x)\equiv f(x_0)\equiv C$ для любого $x\in(a;b)$. ■

Следствие 2. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, где $a<b$;

2) $f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a;b)$.

Тогда, если

1) $f'(x)>0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **возрастает** на $[a;b]$;

2) $f'(x)<0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **убывает** на $[a;b]$;

3) $f'(x)\geqslant 0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **не убывает** на $[a;b]$;

4) $f'(x)\leqslant 0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **не возрастает** на $[a;b]$.

Доказательство. 1) Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки, удовлетворяющие условию $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1;x_2]$, получаем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\cdot(x_2-x_1)>0, \text{ где } x_1<c<x_2,$$

так как $f'(c)>0$ и $(x_2-x_1)>0$. Т.е. $f(x_2)>f(x_1)$, если $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$.

Пункты 2−4 доказываются аналогично. ■

4. Обобщённая формула конечных приращений (формула Коши)

Теорема 12.4 (теорема Коши). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ **непрерывны на отрезке** $[a;b]$;

2) $f(x)$ и $g(x)$ **дифференцируемы на интервале** $(a;b)$,

3) $g(x)\neq 0$ во всех точках $x\in(a;b)$.

Тогда существует **хотя бы одна** такая точка $c\in(a;b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Эта формула называется (**обобщённой) формулой конечных приращений Коши**.

Доказательство. 1) Заметим, что по **теореме 12.2 (Ролля)** $g(b)\neq g(a)$, иначе существовала бы точка $x_0\in(a;b)$, в которой $g'(x_0)=0$, а это противоречит пункту **3)** условий **теоремы Коши**.

2) Введем обозначение: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\lambda$ (это число) и преобразуем **формулу Коши**:

$$\lambda=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad\Leftrightarrow\quad f'(c)-\lambda g'(c)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (f(x)-\lambda g(x))'|_{x=c}=0.$$

3) Рассмотрим **вспомогательную** функцию $h(x)=f(x)-\lambda g(x)$, которая удовлетворяет условиям **теоремы Ролля**.

1°. Функция $h(x)$ **непрерывна** на **отрезке** $[a;b]$.

2°. $h(x)$ **дифференцируема** на **интервале** $(a;b)$.

3°. $h(b)-h(a)=[f(b)-\lambda g(b)]-[f(a)-\lambda g(a)]=$
$=[f(b)-f(a)]-\lambda[g(b)-g(a)]=0 \quad\Rightarrow\quad h(a)=h(b).$

Следовательно, существует такая точка $c\in(a;b)$, что

$$h'(c)=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(c)-\lambda g'(c)=0. \ ■$$

Замечание 12.11. Теорема **Лагранжа** — это частный случай теоремы **Коши** (для функции $g(x)\equiv x$).

Замечание 12.12. Теорему Коши **нельзя получить** с помощью **формулы Лагранжа** для функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{cases} f(b)-f(a)=f'(c_1)\cdot(b-a), & \text{где } a<c_1<b;\\ g(b)-g(a)=g'(c_2)\cdot(b-a), & \text{где } a<c_2<b, \end{cases}$$

поскольку точки c_1 и c_2 могут **не совпадать**.

Замечание 12.13 (геометрический смысл формулы Коши). Рассмотрим функцию $F(x)$, заданную **параметрически** системой уравнений $\begin{cases} x=g(t),\\ y=f(t), \end{cases}$ $t\in[a;b]$. Теорема Коши утверждает, что в некоторой точке $c\in(a;b)$ тангенс угла наклона **касательной** к этой кривой (**угловой коэффициент**) равен тангенсу угла наклона **хорды**, соединяющей концевые точки этой кривой:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

12.2. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей

Определение 12.3. Будем говорить, что отношение **двух** функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to \omega$

1) есть **неопределённость вида** $\left[\frac{0}{0}\right]$, если $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \lim\limits_{x \to \omega} g(x) = 0$ и $g(x) \neq 0$ для всех точек x из некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(\omega)$;

2) есть **неопределённость вида** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, если $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \lim\limits_{x \to \omega} g(x) = \infty$.

Раскрыть эти неопределённости означает **вычислить** $\lim\limits_{x \to \omega} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он **существует**, или установить, что он **не существует**.

При раскрытии неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ иногда удобно применять так называемое **правило Лопиталя**, позволяющее заменить предел отношения функций пределом отношения их производных.

1. Раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

Теорема 12.5 (правило Лопиталя). Пусть выполняются следующие **четыре** условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ **определены** и **дифференцируемы** в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(a)$ точки $a \in \boldsymbol{R}$;

2) **существуют** пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0$ для $x \in \dot{U}(a)$;

4) **существует** (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда

1) **существует** (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$;

2) **справедливо равенство** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, называемое **правилом Лопиталя** раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Доказательство 1) Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a **по непрерывности**: положим $f(a) = g(a) = 0$ (в результате функции $f(x)$ и

$g(x)$ станут **непрерывными** в точке a). Поэтому по **теореме Лагранжа** для любого $x \in \dot{U}(a)$ существует такая точка $c \in \dot{U}(a)$, что

$$g(x)-g(a)=g'(c)\cdot(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad g(x)=g'(c)\cdot(x-a).$$

А поскольку $x \neq a$ и (по условию **теоремы**) $g'(c) \neq 0$ для $c \in \dot{U}(a)$, то $g(x) \neq 0$ для $x \in \dot{U}(a)$.

2) Пусть $\{x_n\}$ — **произвольная** числовая последовательность из **проколотой** окрестности $\dot{U}(a)$, **сходящаяся** к a. Тогда для **любого** номера $n \in \boldsymbol{N}$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям **теоремы Коши** на отрезке $[a; x_n]$ (или $[x_n; a]$, если $x_n < a$). Поэтому для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ существует такая точка $c_n \in (a; x_n)$, что

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)},$$

т.к. $f(a)=g(a)=0$.

3) Поскольку $|c_n-a|<|x_n-a|$, $n \in \boldsymbol{N}$, то $c_n \to a$ при $n \to \infty$, т.к. (согласно выбору последовательности $\{x_n\}$) $|x_n-a| \to 0$ при $n \to \infty$.

4) Далее, используя определение предела функции по **Гейне** и условие **4) теоремы 12.5**, получаем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n \to \infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

То есть **существует** (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо **равенство**

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

Замечание 12.13. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям **теоремы Лопиталя 12.5**, то правило Лопиталя можно применить **повторно**: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=\lim\limits_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Замечание 12.14. Теорема **12.5** остаётся **верной** и в случаях, когда $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Покажем как случай $x \to \infty$ **заменой переменной** $x=\frac{1}{t}$ сводится к случаю $t \to 0$. Мы будем использовать следующее обозначение:

$$f'(1/t)=f'(x)\big|_{x=1/t}.$$

По **правилу Лопиталя** (теорема **12.5**) имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{[f(1/t)]'}{[g(1/t)]'}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)\cdot(-1/t^2)}{g'(1/t)\cdot(-1/t^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 12.4. Вычислить **предел функции** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

◀ Воспользуемся **правилом Лопиталя** (теорема **12.5**):

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1.\ \blacktriangleright$$

Пример 12.5. Вычислить **предел функции** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

◀ Дважды воспользуемся **правилом Лопиталя** (теорема **12.5**):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}\sin 2x}{\cancel{2}x}=\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{1}=2.\ \blacktriangleright$$

2. Раскрытие неопределённостей вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Теорема 12.6 (правило Лопиталя). Пусть выполняются следующие **четыре** условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ **определены** и **дифференцируемы** в некоторой **проколотой** окрестности $\dot{U}(a)$ точки $a\in\boldsymbol{R}$;

2) **существуют** пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

3) $g'(x)\neq 0$ для $x\in\dot{U}(a)$;

4) **существует** (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда:

1) **существует** (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$;

2) **справедливо равенство** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, называемое **правилом Лопиталя** раскрытия неопределённости вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Без доказательства.

Замечание 12.15. Замечания **12.13 и 12.14** к **теореме 12.5 (Лопиталя)** для неопределённости $\left[\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right]$ **справедливы** и для неопределённости $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 12.6. Вычислить **предел функции** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$.

◀ Воспользуемся **правилом Лопиталя** (теорема **12.6**):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}=\frac{1}{\alpha}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0.\ ▶$$

Пример 12.7. Вычислить **предел функции**: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

◀ Воспользуемся **правилом Лопиталя** (теорема **12.6**) n раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdot x^{n-2}}{e^x}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.\ ▶$$

Замечание 12.15. Согласно **теоремам 12.5 и 12.6** (Лопиталя) **правило Лопиталя** служит для раскрытия неопределённостей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Следует отметить, что неопределённости видов $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[0^0]$,, $[\infty^0]$, $[1^{\infty}]$ и т.д. часто удаётся свести к неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ с помощью различных преобразований.

Пример 12.8. Вычислить **предел функции**: $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\,\ln x$.

◀ Сведём неопределённость вида $[0\cdot\infty]$ к неопределённости вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ и воспользуемся **правилом Лопиталя** (теорема **12.6**):

$$\lim_{x\to+0}\sqrt{x}\,\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-1/2})'}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{(-1/2)\,x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to+0}\sqrt{x}=0.\ ▶$$

12.3. Формула Тейлора

1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть $P_n(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kx^k$ — произвольный **многочлен** степени $n\in N$ (здесь b_k, $k=\overline{0;n}$, — **числовые** множители, называемые **коэффициентами** многочлена). Фиксируем произвольную точку $x_0\in \boldsymbol{R}$ и представим переменную x в виде суммы $x=(x-x_0)+x_0$. В результате многочлен $P_n(x)$ примет вид

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k\left[(x-x_0)+x_0\right]^k.$$

Раскроем квадратные скобки (по формуле **бинома Ньютона**) и приведём подобные (по степеням разности $(x-x_0)$) слагаемые. В результате получим выражение для многочлена $P_n(x)$ в следующей форме:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k, \quad \mathbf{(12.1)}$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — числовые множители, **зависящие** от коэффициентов $b_0, \ldots, b_n$ и точки x_0.

Определение 12.4. Представление **(12.1)** называется **разложением многочлена** $P_n(x)$ по степеням разности $(x-x_0)$. Числовые множители $a_0, \ldots, a_n$ называются **коэффициентами** этого разложения.

Теорема 12.7. Для коэффициентов **разложения (12.1)** многочлена $P_n(x)$ по степеням разности $(x-x_0)$ справедлива формула

$$a_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k=\overline{0;n}, \quad \mathbf{(12.2)}$$

(здесь $0!=1$, $P_n^{(0)}(x)\equiv P_n(x)$).

Доказательство. 1) $P_n^{(0)}(x_0)\equiv P_n(x_0)=a_0$.

2) Последовательно найдём **производные** многочлена $P_n(x)$ в точке x_0:

$$P_n'(x)=a_1+2a_2\cdot(x-x_0)+3a_3\cdot(x-x_0)^2+\ldots+na_n\cdot(x-x_0)^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_n'(x_0)=a_1=1!\cdot a_1.$$

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot a_2+3\cdot 2\cdot a_3\cdot(x-x_0)+\ldots+n\cdot(n-1)\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_n''(x_0)=2!\cdot a_2.$$

. . . .

$$P_n^{(k)}(x)=k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_k+\ldots+$$
$$+n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_n^{(k)}(x_0)=k!\cdot a_k.$$

. . . .

$P_n^{(n)}(x)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_n$ — это **число**, поэтому

$$P_n^{(n)}(x_0)=n!\cdot a_n.$$

Попутно заметим, что **все производные** порядка **выше** n от многочлена $P_n(x)$ (n-й степени) равны **нулю**.

3) Таким образом, справедлива общая формула

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = \overline{0; n}. \ \blacksquare$$

Учитывая **теорему 12.7**, **разложение (12.1)** можно переписать в виде:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \qquad \textbf{(12.3)}$$

Определение 12.5. Формула **(12.3)** называется **формулой Тейлора** для многочлена $P_n(x)$ по степеням разности $(x - x_0)$ (или **формулой Тейлора** для многочлена $P_n(x)$ **с центром** в точке x_0).

Следствие. Разложение многочлена $P_n(x)$ по степеням разности $(x - x_0)$ **единственно** и совпадает с **формулой Тейлора** для этого многочлена **с центром** в точке x_0.

Доказательство. Мы доказали в **теореме 12.7**, что коэффициенты такого разложения **однозначно** определяются **формулой (12.3)**. ■

2. Формула Тейлора для произвольной функции

Определение 12.6. Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ **непрерывные производные** до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда многочлен

$$Q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \qquad \textbf{(12.4)}$$

называется **многочленом Тейлора** n-го порядка с **центром** в точке x_0 для функции $f(x)$.

Замечание 12.16. Следствием теоремы из предыдущего пункта является следующие равенства:

$$\begin{cases} Q_n(x_0) = f(x_0), \\ Q_n'(x_0) = f'(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots \\ Q_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \end{cases} \quad \textbf{(12.5)}$$

Однако $f(x) \not\equiv Q_n(x)$, кроме случая, когда $f(x)$ — **многочлен** степени **не выше** n (то есть существует точка, в которой значения функции $f(x)$ и многочлена $Q_n(x)$ **не совпадают**).

Разность

$$r_n(x) = f(x) - Q_n(x) \quad \textbf{(12.6)}$$

показывает **погрешность**, которую мы допускаем при **замене** функции $f(x)$ её **многочленом Тейлора** $Q_n(x)$.

Определение 12.7. Формула

$$f(x) = Q_n(x) + r_n(x) \quad \textbf{(12.7)}$$

называется **формулой Тейлора** для функции $f(x)$ с **центром** в точке x_0 и **остаточным членом** (точнее n-ым остаточным членом) $r_n(x)$.

Замечание 12.17. Само по себе равенство **(12.7)**, конечно, не представляет интереса, если о функции $r_n(x)$ неизвестно ничего, кроме её определения **(12.6)**.

Теорема 12.8 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$ **непрерывную** производную $f^{(n+1)}(x)$. Тогда для любого $x \in \dot{U}(x_0)$ найдётся такая точка $c \in (x_0; x)$ (или $c \in (x; x_0)$, если $x < x_0$), что справедливо равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \quad \textbf{(12.8)}$$

Формула **(12.8)** называется **формулой Тейлора** для функции с **центром** в точке и **остаточным членом**

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \textbf{(12.9)}$$

в **форме Лагранжа**.

Доказательство. 1) Согласно **формуле (12.5)** для функции $r_n(x) = f(x) - Q_n(x)$ справедливы равенства:

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

2) Функция $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$ обладает аналогичным свойством:

$$g(x_0)=g'(x_0)=g''(x_0)=...=g^{(n)}(x_0)=0.$$

Кроме того $g^{(n+1)}(x)\equiv(n+1)!$

3) Поскольку $Q_n(x)$ — **многочлен** n-й степени, то $Q_n^{(n+1)}(x)\equiv 0$ и

$$r_n^{(n+1)}(x)=[f(x)-Q_n(x)]^{(n+1)}=f^{(n+1)}(x)-Q_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$$

для любого $x\in U(x_0)$.

4) Фиксируем **произвольную** точку $x\in\dot{U}(x_0)$. Не теряя общности доказательства, будем считать, что $x>x_0$. Из условий теоремы следует, что для любого номера $k=\overline{0;n}$ пара функций $r_n^{(k)}(x)$ и $g^{(k)}(x)$ удовлетворяет теореме Коши на отрезке $[x_0;x]$.

5) Применим последовательно теорему Коши к парам функций $r_n^{(k)}(x)$ и $g^{(k)}(x)$, . $k=\overline{0;n}$, на отрезке $[x_0;x]$:

$$\frac{r_n(x)}{g(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{r_n'(x_1)}{g'(x_1)}=\frac{r_n'(x_1)-r_n'(x_0)}{g'(x_1)-g'(x_0)}=\frac{r_n''(x_2)}{g''(x_2)}=...=$$
$$=\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)}=\frac{r_n^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_n)-g^{(n)}(x_0)}=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{g^{(n+1)}(x_{n+1})}=\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}.$$

Здесь $x_1, ..., x_{n+1}$ — некоторые точки из интервала $(x_0;x)$, про которые, согласно теореме Коши, известно, что $x_1\in(x_0;x)$, $x_2\in(x_1;x)$ и, вообще, $x_{k+1}\in(x_0;x_k)$ для $k=\overline{1;n}$,

6) Положим $c=x_{k+1}$, тогда из пунктов **5)** и **2)** получим равенство

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot g(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1},\text{ где } c\in(x_0;x).\ \blacksquare$$

Замечание 12.8. В случае $x_0=0$ формулу **(12.8)** называют **формулой Маклорена:**

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$
$$\text{где } c\in(0;x). \qquad \textbf{(12.10)}$$

Следствие (локальная формула Тейлора или формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 **непрерывную** производную $f^{(n+1)}(x)$. Тогда в **проколотой** окрестности $\dot{U}(x_0)$ справедливо следующее представление:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\bar{o}\big((x-x_0)^n\big) \text{ при } x\to x_0. \qquad \textbf{(12.11)}$$

Формула **(12.11)** называется **формулой Тейлора** для функции $f(x)$ с центром в точке x_0 и **остаточным членом** $r_n(x)=\bar{o}\big((x-x_0)^n\big)$, $x\to x_0$, в форме **Пеано** (или **локальной формулой Тейлора**).

Доказательство. Пусть $I_\delta=[x_0-\delta;x_0+\delta]$, где $\delta>0$, — произвольный отрезок, лежащий в окрестности $U(x_0)$. По условию следствия производная $f^{(n+1)}(x)$ **непрерывна** на отрезке I_δ, поэтому (**первая** теорема **Вейерштрасса**) **ограничена** на этом отрезке: существует такое число $M_{n+1}>0$ (не зависящее от $x\in I_\delta$), что

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_{n+1} \text{ для любого } x\in I_\delta. \qquad \textbf{(12.12)}$$

Используя **теорему 12.8** (о формуле **Тейлора** с остаточным членом в форме **Лагранжа**) и неравенство **(12.12)**, имеем: для любого $x\in I_\delta$ **существует** такая точка $c\in(x_0-\delta;x_0+\delta)\subset I_\delta$, что

$$|r_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

следовательно для любого $x\in\dot{U}(x_0)\subset I_\delta$ выполняется **двойное** неравенство

$$0\leqslant\left|\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\right|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|,$$

означающее, в частности, что $\dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$ — **бесконечно малая** функция при $x\to x_0$, т.е. $r_n(x)=\bar{o}\big((x-x_0)^n\big)$ при $x\to x_0$, $x\in\dot{U}(x_0)$. ■

Замечание 12.9. Локальная формула Тейлора может быть доказана при **менее жёстких** ограничениях на функцию $f(x)$: пусть $f(x)$ дифференцируема $(n-1)$ раз в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и существует $f^{(n)}(x_0)$. Тогда $r_n(x)=\bar{o}\big((x-x_0)^n\big)$ при $\Delta x\to 0$.

Замечание 12.10. В случае $x_0=0$ **локальную формулу Тейлора (12.11)** называют **локальной формулой Маклорена:**

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\bar{o}\big((x-x_0)^n\big) \text{ при } x\to x_0. \qquad \textbf{(12.13)}$$

3. Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций

1°. $f(x)=e^x$.

◀ Поскольку $f(0)=e^0=1$ и $(e^x)^{(k)}\equiv e^x$ для любого $k\in\boldsymbol{N}$, то $f^{(k)}(0)=e^0=1$, $k\in\boldsymbol{N}$, и формула **Маклорена** для **показательной** функции принимает вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\overline{o}(x^n)\ \text{ при } x\to 0,\ n\in\boldsymbol{N}.\ ▶$$

2°. $f(x)=\sin x$.

◀ Так как $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$ для любого $k\in\boldsymbol{N}_0$, то

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & \text{если } k=2l \quad\text{— чётное;}\\(-1)^l, & \text{если } k=2l+1 \text{ — нечётное,}\end{cases}\quad l\in\boldsymbol{N}_0,$$

и **формула Маклорена** имеет вид:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\overline{o}(x^{2n+2})\ \text{ при } x\to 0.\ ▶$$

3°. $f(x)=\cos x$.

◀ Так как $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\cdot k\right)$ для любого $k\in\boldsymbol{N}_0$, то

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}(-1)^l, & \text{если } k=2l \quad\text{— чётное;}\\0, & \text{если } k=2l+1 \text{ — нечётное,}\end{cases}\quad l\in\boldsymbol{N}_0,$$

и **формула Маклорена** имеет вид:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\overline{o}\left(x^{2n+1}\right)\ \text{ при } x\to 0.\ ▶$$

4°. $f(x)=\ln(1+x)$.

◀ Так как $f'(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$,

$$f''(x)=-1\cdot(1+x)^{-2},$$

$$\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!\cdot(1+x)^n,$$

то $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ для любого $n\in\boldsymbol{N}$

и **формула Маклорена** имеет вид:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n}+\overline{o}\left(x^n\right)\ \text{ при } x\to 0.\ ▶$$

5°. $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$.

◀ Так как $f'(x)=\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}$,

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot[\alpha-(n-1)]\cdot(1+x)^{\alpha-n},$$

то $f(0)=1,\ \ f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)$ для любого $n\in \boldsymbol{N}$

и **формула Маклорена** имеет вид:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\cdot x^3+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+\overline{o}(x^n) \text{ при } x\to 0.\ \blacktriangleright$$

12.4. Исследование поведения функций и построение графиков

1. Промежутки монотонности функции

Напомним признак монотонности функции, полученный в п. 12.1.

Следствие 2 (из теоремы Лагранжа 12.3). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, где $a<b$;

2) $f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a;b)$.

Тогда, если

1) $f'(x)>0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **возрастает** на $[a;b]$;

2) $f'(x)<0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **убывает** на $[a;b]$;

3) $f'(x)\geqslant 0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **не убывает** на $[a;b]$;

4) $f'(x)\leqslant 0$ для любого $x\in(a;b)$, то $f(x)$ **не возрастает** на $[a;b]$.

2. Локальный экстремум функции

1°. Необходимое условие локального экстремума

Напомним понятие локального экстремума.

Определение 12.1. Точка $x_0\in \boldsymbol{R}$ называется точкой **локального максимума (минимума)**, а значение $f(x_0)$ функции в ней — **локальным максимумом (минимумом)**, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x\in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)\leqslant 0 \ \ (\text{соответственно } \Delta f(x_0)\geqslant 0).$$

Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой в точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ функции было доказано в теореме **Ферма**.

Теорема 12.1 (теорема Ферма). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **имеет** в точке x_0 **локальный экстремум**;

2) существует (**конечная**) производная $f'(x_0)$.

Тогда $f'(x_0)=0$.

Определение 12.8. Точки, в которых производная функции равна нулю, называется стационарными точками этой функции.

Определение 12.9. Точки, в которых функция непрерывна, а её производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими точками** этой функции.

Следствие теоремы Ферма (необходимое условие локального экстремума). Если **непрерывная** функция имеет в точке x_0 локальный экстремум, то x_0 — **критическая** точка функции $f(x)$.

Замечание 12.11. Не всякая **критическая** точка $x_0=0$ **является** точкой **локального экстремума** функции.

Пример 12.9. Функция $y=x^2$ имеет **единственную критическую** точку $x_0=0$, которая **является** точкой **локального минимума**.

Пример 12.10. Функция $y=x^3$ имеет **единственную критическую** точку $x_0=0$, которая **не является** точкой **локального экстремума**, так как

$$\Delta y(0)=x^3-0^3=x^3>0 \text{ при } x>0 \text{ и}$$
$$\Delta y(0)=x^3-0^3=x^3<0 \text{ при } x<0.$$

Пример 12.11. Функция $y=|x|$ имеет **единственную критическую** точку $x_0=0$, которая **является** точкой **локального минимума**.

2°. Достаточные условия локального экстремума

Теорема 12.9 (первое достаточное условие (строго) локального экстремума). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** в некоторой δ-окресности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0=0$;

2) функция $f(x)$ **дифференцируема** в **проколотой** окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ этой точки.

Тогда:

1а) если $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ при } x \in (x_0 - \delta; x_0) \text{ — слева от точки } x_0; \\ f'(x) < 0 \text{ при } x \in (x_0; x_0 + \delta) \text{ — справа от точки } x_0 \end{cases}$ (то есть производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «—» при переходе аргумента x через точку x_0 (слева направо)), то x_0 является точкой (строго) локального **максимума** функции $f(x)$;

1б) если $\begin{cases} f'(x) < 0 \text{ при } x \in (x_0 - \delta; x_0) \text{ — слева от точки } x_0; \\ f'(x) > 0 \text{ при } x \in (x_0; x_0 + \delta) \text{ — справа от точки } x_0 \end{cases}$ (то есть производная $f'(x)$ меняет знак с «—» на «+» при переходе аргумента x через точку x_0 (слева направо)), то x_0 является точкой (строго) локального **минимума** функции $f(x)$;

2) если $f'(x)$ имеет в **проколотой** окрестности $\dot{U}_\delta(x_0)$ **один и тот же знак**, то x_0 **не является** точкой **локального экстремума**.

Замечание 12.12. В случае нестрогих неравенств теорема остается в силе со следующей поправкой: экстремум — **нестрогий**.

Задание. Сформулировать и доказать **теорему 12.9** для случая нестрогих неравенств.

Доказательство теоремы 12.9. Пусть x_1, x_2 — произвольные точки из $\dot{U}_\delta(x_0)$, удовлетворяющие двойному неравенству $x_1 < x_0 < x_2$. По условию **теоремы 12.9** функция $f(x)$ обладает следующими свойствами:

1) она **непрерывна** на отрезках $[x_1; x_0]$ и $[x_0; x_2]$;

2) она **дифференцируема** на интервалах $(x_1; x_0)$ и $(x_0; x_2)$.

Поэтому на каждом из отрезков $[x_1; x_0]$ и $[x_0; x_2]$ для неё справедлива **теорема Лагранжа** (о конечных приращениях):

1°. $f(x_1) - f(x_0) = f'(c_1) \cdot (x_1 - x_0)$, где $c_1 \in (x_1; x_0)$;

2°. $f(x_2) - f(x_0) = f'(c_2) \cdot (x_2 - x_0)$, где $c_2 \in (x_0; x_2)$.

1а) В этом случае из **формулы Лагранжа** получаем следующие оценки:

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c_1) \cdot (x_1 - x_0) < 0, \text{ т.к. } \begin{cases} f'(c_1) > 0; \\ (x_1 - x_0) < 0 \end{cases} \text{ и}$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(c_2) \cdot (x_2 - x_0) < 0, \text{ т.к. } \begin{cases} f'(c_2) > 0; \\ (x_2 - x_0) < 0, \end{cases}$$

означающие, что

$$f(x)-f(x_0)<0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x)<f(x_0)$$

для любого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$, то есть x_0 — точка (строго) **локального максимума** для $f(x)$.

1б) Этот пункт доказывается аналогично.

2) Если $f'(x)>0$ в $\dot{U}_\delta(x_0)$ то (согласно формуле **Лагранжа**) оценки принимают вид:

$$\begin{cases} f(x_1)-f(x_0)=f'(c_1)\cdot(x_1-x_0)<0; \\ f(x_2)-f(x_0)=f'(c_2)\cdot(x_2-x_0)<0, \end{cases}$$

поскольку

$$x_1<x_0<x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x_1-x_0)<0; \\ (x_2-x_0)>0. \end{cases}$$

Таким образом, $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$ при $x_1<x_0<x_2$, т.е. x_0 **не является** точкой **локального экстремума** для функции $f(x)$. Случай $f'(x)<0$ рассматривается аналогично. ■

Для доказательства следующих достаточных условий локального экстремума нам понадобится вспомогательная лемма.

Лемма. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $g(x)$ **определена** в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0;

2) существует производная $g'(x_0)\neq 0$.

Тогда приращение $\Delta g(x_0)=g(x)-g(x_0)$ функции $g(x)$ в этой точке меняет знак при переходе аргумента x через точку x_0 (слева направо)

1) с «—» на «+», если $g'(x_0)>0$;

2) с «+» на «—», если $g'(x_0)<0$.

Другими словами, существует такое $\delta>0$, что для любого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$

1) $\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}>0$, если $g'(x_0)>0$ и

2) $\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}<0$, если $g'(x_0)<0$.

Доказательство леммы. 1) Пусть $g'(x_0)=c>0$. Поскольку

$$g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

то (согласно определению по **Коши предела функции** в точке x_0) для $\varepsilon = \frac{c}{2} > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - c \right| < \varepsilon = \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{c}{2} < \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} - c < \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{c}{2} < \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} < \frac{3c}{2}.$$

Таким образом $\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} > 0$ для любого $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$.

2) Случай $g'(x_0) = c < 0$ доказывается аналогично — достаточно взять $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. ■

Теорема 12.10 (второе достаточное условие (строгого) локального экстремума). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) x_0 — **стационарная** точка функции $f(x)$ (то есть $f'(x_0) = 0$);

2) существует $f''(x_0) \neq 0$.

Тогда:

1) x_0 — точка **строгого локального максимума**, если $f''(x_0) < 0$;

2) x_0 — точка **строгого локального минимума**, если $f''(x_0) > 0$.

Доказательство теоремы 12.10. 1) Пусть $f''(x_0) < 0$. Применим **лемму** к функции $g(x) = f'(x)$. Приращение $\Delta g(x_0) = f'(x) - f'(x_0) \equiv f'(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$» при переходе аргумента x через точку x_0 (слева направо), так как $g'(x_0) = f''(x_0) < 0$. Следовательно (по **теореме 12.9**) x_0 — точка (строгого) **локального максимума**.

2) Случай $f''(x_0) > 0$ доказывается аналогично. ■

Теорема 12.11 (третье достаточное условие (строгого) локального экстремума). Пусть для некоторого $n \in N$ выполняются следующие **два** условия:

1) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$;

2) $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

Тогда:

1) если $(n+1)$ — **чётное** число, то x_0 — точка (строгого) **локального экстремума** функции $f(x)$, причём

1а) (строгого) **локального максимума**, если $f^{(n+1)}(x_0) < 0$;

1б) (строгого) **локального минимума**, если $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.

2) если $(n+1)$ — **нечётное** число, то x_0 **не является** точкой **локального экстремума** функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 12.11. Докажем **теорему** для случая, когда $f^{(n+1)}(x_0)<0$ (для случая, когда $f^{(n+1)}(x_0)>0$, доказывается аналогично).

Рассмотрим **формулу Тейлора** для функции $h(x)=f'(x)$ с центром в точке x_0 (и остаточным членом в форме **Лагранжа**)

$$f'(x)=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1},$$

где $c\in(x_0;x)$ или $c\in(x;x_0)$.

Применим лемму к функции $g(x)=f^{(n)}(x)$. Приращение этой функции $\Delta g(x_0)=f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x)$ меняет знак с «+» на «—» при переходе аргумента x через точку x_0 (слева направо), так как

$$f^{(n)}(x_0)=0 \quad \text{и} \quad g'(x_0)=f^{(n+1)}(x_0)<0.$$

1) Если $(n+1)$ — **чётное** число, то и $(n-1)$ — также **чётное** число, поэтому $(x-x_0)^{n-1}>0$ при $x\neq x_0$. Поэтому производная

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \text{ (где } c\in(x_0;x) \text{ или } c\in(x;x_0))$$

меняет знак с «+» на «—» при переходе аргумента x через точку x_0 (слева направо). Согласно **теореме 12.9** это означает, что x_0 — точка (строгого) локального максимума.

2) Если $(n+1)$ — **нечётное** число, то и $(n-1)$ — также **нечётное** число, поэтому множитель $(x-x_0)^{n-1}$ **меняет знак** при переходе аргумента x через точку x_0, а произведение

$$f'(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

— **нет** (здесь $c\in(x_0;x)$ или $c\in(x;x_0)$). Согласно **теореме 12.9** это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ **не имеет** локального экстремума. ■

Замечание 12.13. Теорема 12.10 является **частным** случаем **теоремы 12.11** ($n=1$).

Замечание 12.14. Если в условии **теоремы 12.11** дополнительно потребовать **существование** $f^{(n+1)}(x)$ в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и её **непрерывность** в самой точке x_0, то для доказательства **теоремы 12.11** можно использовать **формулу Тейлора** для заданной функции $f(x)$:

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$\text{где } c\in(x_0;x) \text{ или } c\in(x;x_0).$$

В силу **непрерывности** функции $g(x)=f^{(n+1)}(x)$ в точке x_0 и условия $g(x_0)=f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ **существует** окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в которой $g(x)$ **сохраняет** знак. Поэтому **изменяет** или **нет** знак приращение $\Delta f(x_0)$ при переходе аргумента x через точку x_0 **полностью зависит** от множителя $(x-x_0)^{n+1}$.

При **чётном** $(n+1)$ знак приращения $\Delta f(x_0)$ (в окрестности $U(x_0)$) совпадает со знаком $f^{(n+1)}(c)$, где $c\in\dot{U}(x_0)$, т.е. со знаком $f^{(n+1)}(x_0)$. Поэтому x_0 — точка (строгого) локального максимума, если $f^{(n+1)}(x_0)<0$ и x_0 — точка (строгого) локального минимума, если $f^{(n+1)}(x_0)>0$.

При **нечётном** $(n+1)$ знак приращения $\Delta f(x_0)$ (в окрестности $U(x_0)$) меняется при переходе аргумента x через точку x_0, поэтому (согласно **теореме 12.9**) функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет локального экстремума.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

Для функции, **непрерывной** на отрезке, существует (согласно второй теореме Вейерштрасса) точка, в которой эта функция принимает наибольшее значение, и точка, в которой функция принимает наименьшее значение.

Пусть $x_0\in[a;b]$ — точка, в которой непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ достигает своего **наибольшего** (наименьшего) значения. Возможны лишь **3 случая**: **1)** $x_0=a$; **2)** $x_0=b$; **3)** $x_0\in(a;b)$.

Если $x_0\in(a;b)$, то, согласно сказанному в **п. 4**, точка x_0 является точкой **локального максимума** (минимума), и её следует искать среди критических точек функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ **конечное** число критических точек: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, справедливы равенства:

$$M=\max_{x\in[a;b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_m)\}, \qquad \textbf{(12.14)}$$

$$m=\min_{x\in[a;b]} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_m)\}. \qquad \textbf{(12.15)}$$

Определение 12.10. Наибольшее M и **наименьшее** m и значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называют также **абсолютным** (или **глобальным**) соответственно **максимумом** и **минимумом** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Эти понятия обозначают термином **абсолютный** (или **глобальный**) **экстремум функции**, применимым к **любому** множеству из области определения этой функции.

Пример 12.12. Найти **глобальные экстремумы** функции

$$f(x)=\sin x+\cos x$$

на отрезке $[0;\pi]$.

◀ Заданная функция **дифференцируема** на **всей** числовой прямой $\boldsymbol{R}$, поэтому попробуем воспользоваться формулами **(12.14)** и **(12.15)**.

1) $f'(x)=\cos x-\sin x$.

2) $f'(x)=0 \iff \cos x=\sin x \iff \operatorname{tg} x=1 \iff x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in \boldsymbol{N}$.

Из этих точек лишь $x_0=\frac{\pi}{4}\in(0;\pi)$, т.е. $f(x)$ имеет на интервале $(0;\pi)$ **единственную** критическую (точнее — **стационарную**) точку.

3) Вычислим **значения** заданной **функции** на концах **отрезка** $[0;\pi]$ и в **критических** точках этой функции, лежащих на интервале $(0;\pi)$:

$$f(0)=\sin 0+\cos 0=0+1=1;$$

$$f(\pi)=\sin\pi+\cos\pi=0-1=-1;$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\max_{x\in[0;\pi]} f(x)=\max\{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}=\sqrt{2} \quad \text{и}$$

$$\min_{x\in[0;\pi]} f(x)=\min\{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}=-1. \ ▶$$

4. Выпуклость функции

Пусть функция $f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a;b)$. Тогда в любой своей точке $M_0(x_0;f(x_0))$, где $x_0\in(a;b)$, кривая $y=f(x)$ имеет **касательную**, не параллельную оси Oy, поскольку её **угловой коэффициент**, равный $f'(x_0)$, **конечен**.

Определение 12.11. Дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция называется:

1) выпуклой вверх (вниз) на интервале $(a;b)$, если для любой точки $x_0 \in (a;\, b)$ касательная к кривой $y = f(x)$ с точкой касания $M_0(x_0\,;\, f(x_0))$ расположена (в пределах указанного интервала) **не ниже (не выше)** этой кривой;

2) строго выпуклой вверх (вниз) на интервале $(a;b)$, если для любой точки x_0 из этого интервала касательная к кривой $y = f(x)$ с точкой касания $M_0(x_0\,;\, f(x_0))$ расположена (в пределах указанного интервала за исключением точки касания M_0) **выше (ниже)** этой кривой.

Определение 12.12. Пусть функция $f(x)$ **дифференцируема** в некоторой окрестности точки x_0. Эта функция называется:

1) выпуклой вверх (вниз) **в точке** x_0, если она **выпукла** вверх (вниз) в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ этой точки;

2) строго выпуклой вверх (вниз) **в точке** x_0, если она **строго выпукла** вверх (вниз) в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ этой точки.

Теорема 12.13 (**достаточные условия выпуклости и строгой выпуклости** функции на **интервале**).

1) Если $f''(x) \leqslant 0$ (соответственно, $f''(x) \geqslant 0$) на интервале $(a;b)$, то функция $f(x)$ **выпукла** вверх (вниз) на интервале $(a;b)$.

2) Если $f''(x) < 0$ (соответственно, $f''(x) > 0$) на интервале $(a;b)$, то функция $f(x)$ **строго выпукла** вверх (вниз) на интервале $(a;\, b)$.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (a;\, b)$. Тогда для **любого** $x \in (a;\, b)$ по **формуле Тейлора** имеем:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

где $c = x_0 + \theta\cdot(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, следовательно $c \in (a;\, b)$.

Касательная к кривой $y = f(x)$ с точкой касания $M_0(x_0\,;\, f(x_0))$ имеет уравнение $y = g(x)$, где

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

поэтому для любого $x \in (a;\, b)$ справедливо равенство

$$g(x) - f(x) = -\frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

где $c \in (a;\, b)$, из которого легко получаются искомые оценки.

1а) Если $f''(x) \leqslant 0$ на интервале $(a;\, b)$, то

$$g(x)-f(x)=-\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2 \geqslant 0$$

для любого $x \in (a;b)$, т.е. **касательная** к кривой $y=f(x)$ с точкой касания $M_0(x_0;f(x_0))$ лежит (в пределах интервала $(a;b)$) **не ниже** этой кривой.

1б) Если $f''(x) \geqslant 0$ на интервале $(a;b)$, то доказательство проводится аналогично.

2) Если $f''(x)<0$ на интервале $(a;b)$, то

$$g(x)-f(x)=-\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2 > 0,$$

для любого $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$, то есть касательная к кривой $y=f(x)$ с точкой касания $M_0(x_0;f(x_0))$ лежит (в пределах множества $(a;b)\setminus\{x_0\}$) **выше** этой кривой.

3) Если $f''(x)>0$ на интервале $(a;b)$, то доказательство проводится аналогично. ■

Следствие. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) $f''(x_0) \neq 0$;

2) $f''(x)$ **непрерывна** в точке x_0.

Тогда x_0 — **точка выпуклости** функции $f(x)$, причём

1) при $f''(x_0)<0$ — **строгой выпуклости вверх**;

2) при $f''(x_0)>0$ — **строгой выпуклости вниз**.

Доказательство Поскольку функция $h(x)=f''(x)$ **непрерывна** в точке x_0 и $h(x_0)=f''(x_0) \neq 0$, то по **теореме 9.3** (о сохранении знака непрерывной функции) существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в которой функция $h(x)=f''(x)$ сохраняет знак. В этой окрестности, согласно **теореме 1**, функция $f(x)$ **строго выпукла**, причём:

1) при $f''(x)<0$ — **строго выпукла вверх**;

2) при $f''(x)>0$ — **строго выпукла вниз**. ■

Теорема 12.14. **Пусть** выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **дифференцируема** на интервале $(a;b)$;

2) функция $f(x)$ **выпукла** на этом интервале.

Тогда:

1) функция $f'(x)$ **непрерывна** и **монотонна** на интервале $(a;b)$;

2) строгая выпуклость $f(x)$ влечёт **строгую монотонность** $f'(x)$;

3) выпуклость **вверх** соответствует **убыванию**, а выпуклость **вниз** — **возрастанию** производной $f'(x)$.

Без доказательства.

5. Точки перегиба

Определение 12.13. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** в некоторой **окрестности** точки x_0;

2) функция $f(x)$ **дифференцируема** в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Тогда точка x_0 называется **точкой перегиба функции** $f(x)$ (а точка $M_0(x_0; f(x_0))$ — **точкой перегиба её графика** или, что то же самое, кривой $y=f(x)$), если **существует окрестность** $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой **слева** и **справа** от точки x_0 функция $f(x)$ имеет **разные** направления **строгой выпуклости**.

Замечание 12.15. В некоторых учебниках рассматривают точки **перегиба** и точки **строгого перегиба**. В терминах таких учебников **определение 12.13** соответствует точке **строгого перегиба**.

Замечание 12.16. Иногда в определении точки перегиба x_0 функции $f(x)$ дополнительно требуют существование касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ (то есть существование конечной или бесконечной производной функции $f(x)$ в точке x_0). Заметим, что для функции $f(x)$, **дифференцируемой** в **целой** окрестности $U(x_0)$ точки x_0, это условие выполняется **автоматически**.

Замечание 12.17. Иногда точку перегиба определяют следующим образом: пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $y=L(x)$ — уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Если разность $f(x)-L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется точкой перегиба функции f. Другими словами, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой график функции $f(x)$ при $x<x_0$ и $x>x_0$ находится по разные стороны от касательной $y=L(x)$. Это свойство вытекает из определения 1 точки перегиба в случае непрерывности производной $f'(x)$ в точке x_0. Точнее справедливо:

Утверждение 12.1. Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функция $f(x)$ имеет **конечную производную** в некоторой окрестности точки x_0 (то есть **дифференцируема** в этой окрестности);

2) $f'(x)$ **непрерывна** в точке x_0,

3) x_0 — точка **перегиба** функции $f(x)$ (в соответствии с **определением 12.13**).

Тогда существует **окрестность** точки x_0, в пределах которой **слева** и **справа** от точки x_0 график функции $f(x)$ находится по разные стороны от касательной, проведённой к этому графику в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Без доказательства.

Теорема 12.15 (необходимое условие перегиба). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) в некоторой окрестности точки x_0 **существует** $f''(x)$, **непрерывная** в точке x_0;

2) x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Тогда $f''(x)=0$.

Доказательство. Предположение, что $f''(x)\neq 0$ противоречит **следствию** теоремы **12.13** из пункта 6. ■

Замечание 12.18. Можно доказать **теорему 12.15** при более слабых ограничениях на функции $f(x)$:

Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) в некоторой окрестности точки x_0 **существует** $f''(x)$;

2) x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Тогда $f''(x_0)=0$.

Теорема 12.16 (первое достаточное условие (строгого) перегиба). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ точки x_0;

2) функция $f(x)$ **дважды** дифференцируема в **проколотой** окрестности $\dot{U}(x_0)$ этой точки;

3) $f''(x)$ в пределах этой окрестности имеет **разные знаки** слева и справа от точки x_0 (то есть при $x<x_0$ и при $x>x_0$).

Тогда x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. По **теореме 12.13** из пункта 6 функция $f(x)$ в пределах окрестности $U(x_0)$ имеет **разные направления** строгой выпуклости слева и справа от точки x_0, поэтому (согласно определению) является точкой перегиба функции $f(x)$. ■

Теорема 12.17 (второе достаточное условие (строгого) перегиба). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) в некоторой окрестности точки x_0 существует $f'''(x)$;

2) $f'''(x)$ **непрерывна** в точке x_0;

3) $f''(x_0)=0$, но $f'''(x_0)\neq 0$.

Тогда x_0 **— точка перегиба** функции $f(x)$.

Доказательство. Поскольку функция $h(x)=f'''(x)$ **непрерывна** в точке x_0 и $h(x_0)=f'''(x_0)\neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$, в которой $h(x)=f'''(x)$ **сохраняет знак**. По формуле **Тейлора с центром** в точке x_0 для функции $g(x)=f''(x)$ справедливо равенство:

$$f''(x)=f''(x_0)+\frac{f'''(c)}{1!}\cdot(x-x_0)=f'''(c)\cdot(x-x_0),\quad x\in U(x_0), \qquad \textbf{(12.16)}$$

где точка c лежит на интервале с концами x_0 и x. Поскольку x_0 и x принадлежат окрестности $U(x_0)$, то и весь интервал с концами в точках x_0 и x содержится в этой окрестности. Поэтому для всех $x\in U(x_0)$ сомножитель $f'''(c)$ **имеет один и тот же знак** и в пределах **проколотой** окрестности $\dot{U}(x_0)$ (согласно **формуле 12.16**) **знак второй** производной $f''(x)$ **меняется лишь** с изменением знака линейного множителя $(x-x_0)$, то есть в точке x_0. Таким образом, $f''(x)$ имеет в окрестности $U(x_0)$ **разные знаки** слева и справа от точки x_0, поэтому (**теорема 12.16**) x_0 **является точкой перегиба** функции $f(x)$. ■

Теорема 12.18 (третье достаточное условие строгого перегиба). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) в некоторой **окрестности** $U(x_0)$ **существует** $f^{(n+1)}(x)$, где n — **фиксированное натуральное** число;

2) $f^{(n+1)}(x)$ **непрерывна** в точке x_0;

3) $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0$, однако $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$.

Тогда:

1) если число $(n+1)$ — **нечётное**, то x_0 **не является** точкой (строгого) **перегиба** функции $f(x)$;

2) если число $(n+1)$ — **чётное**, то x_0 является точкой **строгой** выпуклости функции $f(x)$:

а) строгой выпуклости вверх, если $f^{(n+1)}(x_0)<0$;

б) строгой выпуклости вниз, если $f^{(n+1)}(x_0)>0$.

Без доказательства.

6. Асимптоты графика функции

Определение 12.14. Вертикальная прямая $x = x_0$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Определение 12.15. 1) Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x > M$, где $M = \text{const}$. Прямая

$$y = k \cdot x + b \qquad \textbf{(12.17)}$$

называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ **при** $x \to +\infty$, если $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — **бесконечно малая** функция при $x \to +\infty$.

2) Пусть функция $y = f(x)$ определена при $x < M$, где $M = \text{const}$. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ **при** $x \to -\infty$, если $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad \textbf{(12.18)}$$

где $\alpha(x)$ — **бесконечно малая** функция при $x \to -\infty$.

Теорема 12.19. Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ **тогда и только тогда**, когда существуют **два конечных** предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b. \qquad \textbf{(12.19)}$$

Доказательство. 1) Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда она имеет представление (12.17), благодаря которому имеем:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k \quad \text{и}$$
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

2) Достаточность ($\Rightarrow$). Пусть существуют **конечные** пределы **(12.19)**. Из второго предела следует, что функция $[f(x) - (kx + b)] = \alpha(x)$ — **бесконечно малая** функция при $x \to +\infty$, следовательно $f(x)$ имеет представление **(12.18)**. ■

Замечание 12.19. Аналогичная теорема верна при $x \to -\infty$.

Пример 12.13. Найти **наклонную асимптоту** графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, где $a = \text{const}$, при $x \to +\infty$. Заметим, что этим графиком является **ветвь гиперболы** $x^2 - y^2 = a^2$.

◀ Воспользуемся формулами **(12.19)**:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x^2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = x$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$ при $x \to +\infty$. ▶

7. Схема построения графика функции

1°. Найти область определения функции и её точки разрыва.

2°. Вычислить односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва. Найти вертикальные асимптоты.

3°. Проверить, является ли функция чётной, нечётной, периодической.

4°. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5°. Найти наклонные асимптоты графика функции.

6°. Вычислить первую производную функции. Найти точки локального экстремума функции и промежутки монотонности.

7°. Вычислить вторую производную функции. Найти точки перегиба графика функции и промежутки выпуклости.

8°. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования. При этом полезно найти несколько точек графика функции, исходя из её уравнения.

Пример 12.14. Провести **исследование** функции $f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$ и построить её **график**.

◀ Общее исследование функции и построение её графика выполним **по предложенной схеме.**

1°. Функция $f(x)$ определена для всех $x \in \boldsymbol{R}$, кроме точки $x = 1$:

$$D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{1\} = \{x \in \boldsymbol{R}\colon\ x \neq 1\} = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty).$$

Точка $x = 1$ является **точкой разрыва** этой функции.

2°. Найдём **односторонние** пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)$. Поскольку $(x-1)^2 \sim x^2$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$, то имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2}=-\infty.$$

Далее,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{2(x-1)^2}=\left[\frac{1}{+0}\right]=+\infty. \qquad \mathbf{(12.20)}$$

Из равенств **(12.20)** следует, что прямая $x=1$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x\to 1-0$ и при $x\to 1+0$.

3°. Функция $f(x)$ **не является периодической**. Проверим, является ли она чётной или нечётной:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x-1)^2}=\frac{-x^3}{2(x+1)^2}=\neq \pm f(x).$$

Следовательно, $f(x)$ **не является** ни чётной, ни нечётной.

4°. Найдём точки пересечения графика функции с осями координат:

$$f(0)=0 \quad \text{и} \quad f(x)=0 \iff \frac{x^3}{2(x-1)^2}=0 \iff x=0.$$

Таким образом, $f(x)$ пересекает оси координат только в **одной точке** $O(0;\,0)$.

5°. Найдём **наклонные асимптоты** графика функции (если они есть). Напомним, что прямая $y=kx+b$ является **наклонной асимптотой** графика $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ **тогда и только тогда**, когда существуют **конечные** пределы

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b. \qquad \mathbf{(12.21)}$$

Найдём пределы **(12.21)**. При раскрытии **неопределённости** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ воспользуемся следующими **эквивалентностями** функций:

$$\left.\begin{aligned}(2x^2-x)&\sim 2x^2\\ 2(x-1)^2&\sim 2x^2\end{aligned}\right\} \text{ как при } x\to+\infty, \text{ так и при } x\to-\infty.$$

В результате получим:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Далее,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}-\frac{x}{2}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-x}{2(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{2x^2}=1.$$

Таким образом, прямая $y=\frac{1}{2}x+1$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

6°. Найдём **первую** производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=\left[\frac{x^3}{2(x-1)^2}\right]'=\frac{1}{2}\,\frac{\left(x^3\right)'(x-1)^2-x^3\left[(x-1)x^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2}=$$
$$=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{2(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3},\quad x\neq 1.$$

Напомним, что функция $f(x)$ может иметь **локальный экстремум** только в **критических точках** (т.е., в точках области определения $D(f)$, где $f'(x)=0$ или $f'(x)$ **не существует**). Заметим, что $f'(x)$ определена на всей области $D(f)$, поэтому нужно найти только **стационарные** точки функции $f(x)$ (т.е. точки, в которых $f'(x)=0$). Имеем:

$$f'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}=0\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=3.\end{array}\right.$$

Теперь применим достаточное условие локального экстремума в критических точках $x=0$ и $x=3$. Напомним, что точка x_0, в которой функция $f(x)$ **непрерывна**, является точкой её **локального максимума (минимума)**, если существует окрестность этой точки, в которой

$$\begin{cases}f'(x)>0 & \text{при } x<x_0;\\ f'(x)<0 & \text{при } x>x_0\end{cases}\qquad\left(\text{соответственно }\begin{cases}f'(x)<0 & \text{при } x<x_0;\\ f'(x)>0 & \text{при } x>x_0\end{cases}\right).$$

Другими словами, если производная $f'(x)$ **изменяет знак** с «+» на «−» (соответственно с «−» на «+») при переходе через точку x_0 (в которой $f(x)$ **непрерывна**), то x_0 является точкой **локального максимума** (соответственно, **минимума**) функции $f(x)$. Найдём промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$ и промежутки монотонности $f(x)$:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	+	**Не существ.**	−	0	+
$f(x)$	↗	**Не существ.**	↘	лок. **минимум** $f(3)=3,375$	↗

Следовательно, точка $x=3$ является **точкой локального минимума** функции $f(x)$, причём $f(3)=\frac{3^3}{2(3-1)^2}=\frac{27}{8}=3,375$. Так как $f'(x)$ **не меняет** знак при переходе через точку $x=0$, то $x=0$ **не является** точкой локального экстремума функции $f(x)$. Кроме того, $f(x)$ **возрастает** на интервалах $(-\infty;1)$ и $(3;+\infty)$, так как $f'(x)>0$ на этих интервалах, и $f(x)$ **убывает** на интервале $(1;3)$, так как $f'(x)<0$ на этом интервале.

7°. Найдём **вторую** производную функции $f(x)$:

$$f''(x)=[f'(x)]'=\left[\frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}\right]'=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^3-3x^2\right)'(x-1)^3-(x^3-3x^2)\left[(x-1)^3\right]'}{\left[(x-1)^3\right]^2}=$$

$$=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{2(x-1)^6}=\frac{3x}{(x-1)^4},\quad x\neq 1.$$

Напомним, что функция $f(x)$ может иметь точку перегиба x_0, если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ **не существует** (при условии непрерывности $f(x)$ в точке x_0). Заметим, что $f''(x)$ определена на всей области определения $D(f)$ функции $f(x)$. Следовательно, нужно найти только точки, в которых $f''(x)=0$. Имеем:

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3x}{(x-1)^4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0.$$

Применим теперь достаточное условие точки перегиба функции $f(x)$ для точки $x=0$: если вторая производная $f''(x)$ изменяет знак при переходе через точку непрерывности x_0, то x_0 является **точкой перегиба** функции $f(x)$. Найдём **интервалы знакопостоянства** второй производной $f''(x)$ и промежутки выпуклости $f(x)$:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	**Не существует**	$+$
$f(x)$	$\cap$	Точка перегиба. $f(0)=0$	$\cup$	**Не существует**	$\cup$

Таким образом, $f''(x)$ **меняет знак** пре переходе через точку $x=0$. Следовательно, $x=0$ является **точкой перегиба** графика функции $f(x)$, причём $f(0)=0$. Кроме того, график функции $f(x)$ является **выпуклым вверх** на интервале $(-\infty;0)$, так как $f''(x)<0$ на этом интервале и график $f(x)$

является **выпуклым вниз** на интервалах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$, так как $f''(x) > 0$ на этих интервалах.

8°. Теперь построим график функции $f(x)$.

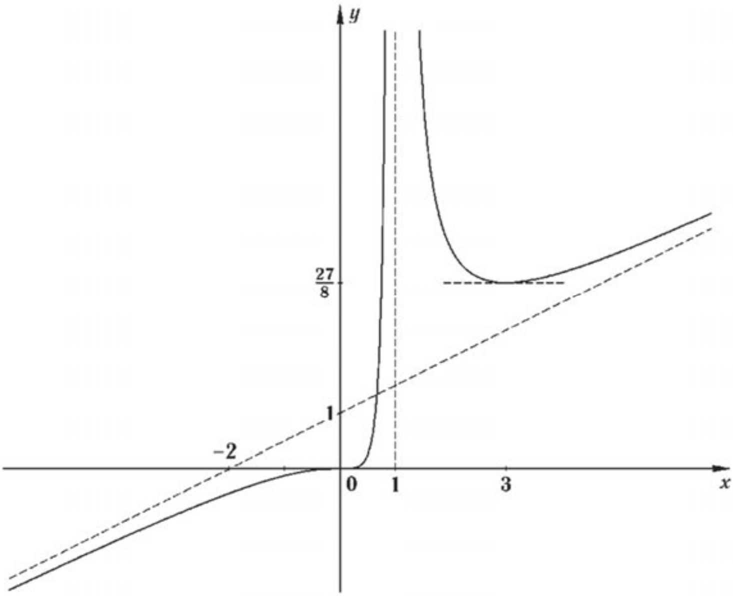

Рис. 12.6

►

Глава III

§ 13. Неопределенный интеграл

13.1. Первообразная функции. Неопределенный интеграл

Определение 13.1. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если на этом интервале справедливо тождество:

$$F'(x) \equiv f(x), \quad x \in (a;b).$$

Замечание 13.1. Аналогичное определение можно дать и для случая полуинтервала и отрезка со следующим уточнением: в граничной точке промежутка $\langle a;b \rangle$ под $F'(x)$ следует понимать одностороннюю производную.

Теорема 13.1. Пусть $F(x)$ — **первообразная** для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Тогда любая другая **первообразная** $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на этом же интервале может быть представлена в виде суммы $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. И, **обратно**, любая функция вида $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, является первообразной для $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две произвольные первообразные для функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Тогда

$$[\Phi(x) - F(x)]' \equiv \Phi'(x) - F'(x) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0, \quad x \in (a;b),$$

поэтому (согласно следствию из теоремы Лагранжа) $\Phi(x) - F(x) \equiv C$, т.е. $\Phi(x) \equiv F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

($\Leftarrow$) Пусть $F(x)$ — произвольная первообразная для $f(x)$ на интервале $(a;b)$, а C — произвольная постоянная. Тогда

$$[F(x) + C]' \equiv F'(x) + C' \equiv f(x), \quad x \in (a;b),$$

т.е. $F(x)+C$ также первообразная для $f(x)$ на интервале $(a;b)$. ■

Замечание 13.2. Теорема 13.1 показывает как устроено множество всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ и позволяет ввести понятие неопределённого интеграла от функции $f(x)$ на этом интервале.

Определение 13.2. Совокупность **всех** первообразных функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ на этом интервале и обозначается $\int f(x)\,dx$. При этом:

$f(x)$ называется **подынтегральной** функцией;
дифференциал $f(x)\,dx$ — **подынтегральным** выражением;
переменная x — **переменной** интегрирования.

Проинтегрировать функцию $f(x)$ — значит найти её неопределённый интеграл. Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, то (согласно **теореме 13.1**) пишут $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, где C — любая постоянная, хотя правильнее писать $\int f(x)\,dx = \{F(x)+C\}$, поскольку речь идёт о множестве всех первообразных функций $f(x)$ на $(a;b)$. Однако (в силу установившихся традиций) фигурные скобки, обозначающие множество, обычно не пишут.

Замечание 13.3. Итак, символ $\int f(x)\,dx$ обозначает **совокупность всех** первообразных функции $f(x)$. Однако, иногда мы будем понимать его как некоторый **элемент из этой совокупности**, т.е. как какую-то из первообразных функции $f(x)$.

13.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1°. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал — подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x) \quad \text{и} \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

Доказательство: а) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+C' = f(x)$.

б) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' \cdot dx = f(x)\,dx$.

2°. Неопределенный интеграл от **дифференциала** (дифференцируемой) функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Замечание 13.4. Из свойств **1°** и **2°** следует, что символы $\int$ и d, стоящие рядом, **взаимно уничтожаются**, однако в случае **2°** (после этого взаимного уничтожения символов) требуется добавить слагаемое C — произвольную постоянную.

3°. Линейность неопределенного интеграла. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на интервале $(a;b)$, то для любой пары чисел $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, такой, что $\lambda^2+\mu^2 \neq 0$, функция $\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)$ также интегрируема на этом интервале, причём

$$\int[\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx=\lambda\int f(x)\,dx+\mu\int g(x)\,dx. \qquad \textbf{(13.1)}$$

В частности:

3.1°. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int[\lambda\cdot f(x)]\,dx=\lambda\cdot\int f(x)\,dx,\ \text{если}\ \lambda\neq 0. \qquad \textbf{(13.2)}$$

3.2°. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx. \qquad \textbf{(13.3)}$$

Замечание 13.5. Равенства **(13.1)–(13.3)** означают совпадение множеств функций в левой и правой частях этих равенств.

Доказательство 3.1°. Пусть $F(x)$ — **первообразная** для функции $f(x)$, т.е. $F'(x)\equiv f(x)$. Тогда $\lambda\cdot F(x)$ — **первообразная** для функции $\lambda\cdot f(x)$, так как

$$[\lambda\cdot F(x)]'=\lambda\cdot F'(x)=\lambda\cdot f(x).$$

Поэтому при $\lambda\neq 0$ справедливо равенство

$$\lambda\cdot\int f(x)\,dx=\lambda\cdot\{F(x)+C\}=\lambda\cdot F(x)+C_1=\int[\lambda\cdot f(x)]\,dx,\ \text{где}\ C_1=\lambda\cdot C.$$

Доказательство 3.2°. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — **первообразные** для функций $f(x)$ и $g(x)$, соответственно: $F'(x)\equiv f(x)$ и $G'(x)\equiv g(x)$. Тогда функции $F(x)\pm G(x)$ являются **первообразными** для функций $f(x)\pm g(x)$:

$$[F(x)\pm G(x)]'=F'(x)\pm G'(x)=f(x)\pm g(x),$$

поэтому

$$\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx=\{F(x)+C_1\}\pm\{G(x)+C_2\}=(F(x)\pm G(x))+(C_1\pm C_2)=$$

$$=(F(x)\pm G(x))+C=\int[f(x)\pm g(x)]\,dx.$$

Доказательство 3°. Это свойство получается компиляцией свойств **3.1°** и **3.2°** (формула (13.1) получается последовательным применением формулы (13.3), а затем (13.2)):

$$\int [\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)]\,dx = \int [\lambda \cdot f(x)]\,dx + \int [\mu \cdot g(x)]\,dx =$$
$$= \lambda \cdot \int f(x)\,dx + \mu \cdot \int g(x)\,dx,$$

если $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. Если же один из коэффициентов равен нулю, то формула (13.1) превращается в (уже доказанную) формулу **(13.2)**.

13.3. Таблица основных неопределённых интегралов

1. Гиперболические функции

Кроме **основных элементарных** функций в математике и её приложениях широко используются элементарные функции, называемыми **гиперболическими**:

синус гиперболический $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и

косинус гиперболический $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;

тангенс гиперболический $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и

котангенс гиперболический $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

Нетрудно получить следующие простейшие формулы, связывающие эти функции:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x \equiv 1, \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x \equiv 1 \text{ при } x \neq 0;$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \text{ в частности, } \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \text{ в частности, } \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \text{ в частности, } \operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x};$$

$$\operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

2. Таблица основных интегралов

К основным относят неопределённые интегралы от некоторых элементарных функций. Поскольку (в силу свойств **1°** и **2°** неопределённых интегралов) операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны:

$$F'(x)=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

эти интегралы можно найти при помощи таблицы производных основных элементарных функций.

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{I.}\ \int 0\,dx=C, \\ \textbf{II.}\ \int 1\,dx=\int dx=x+C, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{III.}\ \int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (x>0,\alpha\neq-1). \\ \textbf{IV.}\ \int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C, \text{ на любом промежутке, на котором } x\neq 0. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{V.}\ \int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C,\ (a>0,\ a\neq 1). \\ \textbf{VI.}\ \int e^{x}dx=e^{x}+C, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{VII.}\ \int \sin x\,dx=-\cos x+C, \\ \textbf{VIII.}\ \int \cos x\,dx=\sin x+C, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \textbf{IX.}\ \int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C, \\ \textbf{X.}\ \int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{XI.}\ \int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C,\ \text{ где } a\neq 0, \\ \textbf{XII.}\ \int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ \text{ где } a\neq 0,\ (\textbf{высокий логарифм}), \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{XIII.}\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{x}{a}+C,\ (a>0,\ |x|<a), \\ \textbf{XIV.}\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C,\ \text{ где } A\neq 0,\ (\textbf{длинный логарифм}), \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{XV.}\ \int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C, \\ \textbf{XVI.}\ \int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \textbf{XVII.}\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth} x+C, \\ \textbf{XVIII.}\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+C. \end{array}\right.$$

Доказательство IV. Воспользуемся очевидными тождествами:

$$|x|'\equiv \operatorname{sgn} x \ \text{ при } x\neq 0 \quad \text{и} \quad |x|\equiv x\cdot\operatorname{sgn} x.$$

В результате получим:

$$(\ln|x|+C)'=\frac{1}{|x|}\cdot|x|'=\frac{1}{x\cdot\operatorname{sgn} x}\cdot\operatorname{sgn} x=\frac{1}{x} \ \text{ при } x\neq 0. \ \blacksquare$$

Доказательство XIV. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, имеем $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$, поэтому

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+A}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}\cdot\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+A}}\cdot\cancel{2}x\right) = \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+A}}}\cdot\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+A}}}{\sqrt{x^2+A}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}. \ \blacksquare$$

13.4. Основные методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения основных свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

Пример 13.1. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx = \operatorname{tg} x - x + C.\ \blacktriangleright$$

2. Метод замены переменной или подстановки

Во многих случаях введения новой переменной интегрирования позволяет свести вычисление данного неопределенного интеграла к нахождению нового интеграла, который является табличным или к нему сводящимся (т.е. перейти к непосредственному интегрированию). Такой метод называется методом подстановки или методом замены переменной в неопределенном интеграле. Он основан на свойстве инвариантности формул интегрирования.

Теорема 13.2. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $g(u)\colon U \to \boldsymbol{R}$ имеет на промежутке U первообразную $G(u)$;

2) функция $u = u(x)\colon X \to U$ дифференцируема на промежутке X

(из п.п. 1−2, в частности, следует, что определены **сложные** функции $g(u(x))\colon X \to \boldsymbol{R}$ и $G(u(x))\colon X \to \boldsymbol{R}$).

Тогда: 1) на **промежутке** X сложная функция $G(u(x))$ **является** первообразной **для функции** $g(u(x))\cdot u'(x)$;

2) справедлива формула, называемая **формулой замены переменной** в неопределенном интеграле:

$$\int g(u(x))\cdot u'(x)\,dx=\int g(u(x))\cdot d(u(x))=\int g(u)\,du\Big|_{u=u(x)}. \qquad \textbf{(13.4)}$$

Доказательство. 1) Согласно правилу дифференцирования **сложной** функции, для любого $x\in X$ имеем:

$$\frac{dG(u(x))}{dx}=\frac{dG(u)}{du}\bigg|_{u=u(x)}\cdot\frac{du(x)}{dx}=g(u)\Big|_{u=u(x)},$$

т.е. сложная функция $G(u(x))$ является **первообразной** на промежутке X для функции $g(u(x))\cdot u'(x)$. Поэтому на этом промежутке справедливо равенство:

$$\int g(u(x))\cdot u'(x)\,dx=G(u(x))+C.$$

2) Поскольку $G(u(x))+C\equiv(G(u)+C)\Big|_{u=u(x)}\equiv\int g(u)\,du\Big|_{u=u(x)}$, то

$$\int g(u(x))\cdot u'(x)\,dx=\int g(u)\cdot du\Big|_{u=u(x)}. \ \blacksquare$$

Замечание 13.6. Существуют **два варианта** метода замены переменной, поскольку этой формулой можно пользоваться как **«слева направо»**, так и **«справа налево»**.

1-й вариант (метод подведения функций под знак дифференциала)

Следствие 1 (теоремы 13.2). Если на промежутке X **интегрируемая** функция $f(x)$ может быть представлена в виде **произведения**

$$f(x)=g(u(x))\cdot u'(x),$$

где $u(x)$ — некоторая функция, имеющая на X производную, а $g(u)$ имеет первообразную на промежутке $u(X)$, то на промежутке X справедливо равенство:

$$\int f(x)\,dx=\int g(u(x))\cdot u'(x)\,dx=\int g(u(x))\,d(u(x))=\int g(u)\,du\Big|_{u=u(x)}. \qquad \textbf{(13.5)}$$

Пример 13.2. Вычислить интеграл $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

◀ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx=\int e^{\sin x}d(\sin x)=\left\|\begin{matrix}\text{замена}\\ \sin x=u\end{matrix}\right\|=\int e^u\,du=$

$=e^u+C=e^{\sin x}+C.$ ▶

Пример 13.3. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

◄ $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = \left\| \begin{matrix} \text{замена} \\ \cos x = u \end{matrix} \right\| = -\int \frac{du}{u} =$

$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$ ►

2-й вариант (метод подстановки)

Следствие 2 (теоремы 13.2). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) $\begin{cases} u = u(x): X \to U, \\ x = x(u): U \to X, \end{cases}$ — **пара** взаимно обратных **функций (осуществляющих** взаимно-однозначные **отображения промежутков** $U, X \subset \boldsymbol{R}$);

2) функция $x(u)$ **имеет на** U производную $x'(u)$;

3) функция $f(x)$ интегрируема **на некотором промежутке** $D(f)$.

Тогда на пересечении множеств $D(f) \cap X$ справедливо равенство

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(u)) \cdot dx(u)\Big|_{u=u(x)} = \int f(x(u)) \cdot x'(u)\,du\Big|_{u=u(x)}, \quad \textbf{(13.6)}$$

называемое **формулой интегрирования подстановкой** в неопределённом интеграле.

Замечание 13.7. Напомним, что **непрерывная** функция $x(u): U \to X$, определенная на промежутке U, имеет (однозначную) обратную функцию $u(x): X \to U$ **тогда и только тогда, когда** является **строго монотонной** на U. Приведённое замечание позволяет упростить формулировку следствия 2 и привести это следствие в виде, более удобном для применения.

Следствие 2* (теоремы 13.2). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функция $f(x)$ **интегрируема** на промежутке X;

2) функция $x = x(u): U \to X$ **строго монотонна** и **дифференцируема** на промежутке U;

3) множество значений функции $x(u)$ совпадает с промежутком X.

Тогда на промежутке X справедлива формула (13.6) интегрирования подстановкой (здесь $u = u(x): X \to U$ — функция, обратная для $x = x(u)$).

Замечание 13.8. При использовании **следствия 2*** следует иметь в виду, что выбранная для подстановки функция может оказаться **не строго монотонной** на своей области определения, а множество её значений может содержать промежуток X, но не совпадать с ним. В этом случае в качестве

$x(u)$ берут сужение этой функции на некоторый промежуток U. В примере, следующем ниже, в качестве $x(u)$ берётся сужение функции $x=u^2$ на интервал $U=(0;+\infty)$ для того, чтобы дифференцируемая функция $x(u)\equiv u^2$ была **строго монотонной** и множество её значений **совпадало** с промежутком $X=(0;+\infty)$, на котором (определена и) интегрируема заданная функция $f(x)$.

Пример 13.4. Вычислить интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

◀ Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (определена и) интегрируема на интервале $X=(0;+\infty)$ (далее будет доказано, что **из непрерывности** функции на некотором промежутке следует её **интегрируемость** на этом промежутке). Функция $x=u^2$, заданная на интервале $u\in U=(0;+\infty)$, удовлетворяет условиям **следствия 2***:

1) она строго монотонна и дифференцируема **на интервале** U;

2) множество её значений совпадает с интервалом X.

Поэтому её можно использовать для подстановки в формуле **(13.3)** (заметим, что её обратная функция имеет вид $u(x)=\sqrt{x}\colon X\to U$):

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\left\| \begin{array}{c}\textbf{подстановка}\\ \begin{cases}x=u^2,\\ u>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\sqrt{x},\\ x>0.\end{cases}\end{array}\right\|=\int\frac{e^u}{u}\,d(u^2)=\int\frac{e^u}{u}\cdot 2u\,du=2\int e^u\,du=$$

$$=2e^u+C=2e^{\sqrt{x}}+C. \blacktriangleright$$

Замечание 13.9. Метод замены переменной в неопределенном интеграле обосновывает свойство **инвариантности** формул интегрирования, которое заключается в следующем:

$$\text{если } \int f(x)\,dx=F(x)+C, \qquad \text{то } \int f(u)\,du=F(u)+C,$$

где $u=u(x)$ — дифференцируемая функция переменной x.

Замечание 13.10. Приведём таблицу основных интегралов с учётом свойства **инвариантности формул интегрирования**.

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{I. } \int 0\,du=C,\\ \textbf{II. } \int 1\,du=\int du=u+C,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{III. } \int u^{\alpha}\,du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ (u(x)>0,\ \alpha\neq-1).\\ \textbf{IV. } \int \frac{du}{u}=\ln|u|+C, \text{ на любом промежутке, на котором } u(x)\neq 0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{V. } \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \ (a>0,\ a\neq 1). \\ \textbf{VI. } \int e^u du = e^u + C,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{VII. } \int \sin u\, du = -\cos u + C, \\ \textbf{VIII. } \int \cos u\, du = \sin u + C,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\textbf{IX. } \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C, \\ \textbf{X. } \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{XI. } \int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C, \text{ где } a\neq 0, \\ \textbf{XII. } \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C, \text{ где } a\neq 0, \text{ (высокий логарифм)},\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{XIII. } \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C, \ (a>0,\ |u|<a), \\ \textbf{XIV. } \int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C, \text{ где } A\neq 0, \text{ (длинный логарифм)},\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\textbf{XV. } \int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C, \\ \textbf{XVI. } \int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\textbf{XVII. } \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C, \\ \textbf{XVIII. } \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.\end{array}\right.$$

В этих формулах a, A — **действительные** числа,
u — **независимая** переменная или
непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$.

3. Метод интегрирования по частям

Теорема 13.3. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) на промежутке X функции $u(x)$ и $v(x)$ **дифференцируемы**;

2) функция $v(x)\cdot u'(x)$ **интегрируема** на X.

Тогда: 1) функция $u(x)\cdot v'(x)$ также **интегрируема** на промежутке X;

2) на этом промежутке справедливо равенство

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx, \qquad \textbf{(13.7)}$$

называемое **формулой интегрирования по частям** в неопределенном интеграле.

Замечание 13.11. Учитывая свойство инвариантности формы первого дифференциала:

$$\begin{cases} u'(x)\cdot dx = d(u(x)) = du, \\ v'(x)\cdot dx = d(v(x)) = dv, \end{cases}$$

формулы интегрирования по частям в неопределенном интеграле можно записать в компактном виде:

$$\int u(x)\cdot dv(x)=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot du(x) \quad\Leftrightarrow\quad \int u\,dv=uv-\int v\,du. \tag{13.8}$$

Доказательство. 1) Из формулы производной произведения имеем:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v' \quad\Leftrightarrow\quad u\cdot v'=(u\cdot v)'-u'\cdot v.$$

а) функция $(u\cdot v)'$ **интегрируема** на промежутке X (функция $u\cdot v$ — её первообразная на этом промежутке);

б) функция $u'\cdot v$ **интегрируема** на X по условию теоремы.

Поэтому функция $u\cdot v'=(u\cdot v)'-u'v$ интегрируема на X (разность интегрируемых функций — свойство **3°** неопределенного интеграла).

2) Интегрируя равенство $u\cdot v'=(u\cdot v)'-u'v$, получаем формулу **(13.7)**.

■

Пример 13.5. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

◄ $$\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\cdot d\underbrace{x}_{v}=\operatorname{arctg} x\cdot x-\int x\cdot d(\operatorname{arctg} x)=x\operatorname{arctg} x-\int x\cdot\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C.$$ ►

Пример 13.6. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

◄ $$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x dx}_{dv}=\int \underbrace{x}_{u}\cdot d\underbrace{(e^x)}_{v}=x\cdot e^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$ ►

Пример 13.7. Используя формулу интегрирования по частям, вывести рекуррентную формулу для интеграла $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, где $a\neq 0$, $n\in N$, $n\geqslant 2$.

◄ $$a^2\cdot I_n=\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\int\frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=I_{n-1}-\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

К интегралу $\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}$ применим формулу интегрирования по частям, взяв $u(x)\equiv x$ и используя тождество $\frac{dt}{t^n}=d\left(\frac{t^{-n+1}}{-n+1}\right)=\frac{1}{(1-n)}d\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right)$:

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}=\int x\cdot\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{d(x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)}\int x\,d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{-1}{2(n-1)}\left[x\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right]=-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

В результате получим:

$$a^2 I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} \cdot I_{n-1} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1};$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{1}{a^2(2n-2)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{a^2(2n-2)} \cdot I_{n-1}. \ \blacktriangleright$$

13.5. Постановка задачи интегрирования в конечном виде

Особую роль в анализе играет множество элементарных функций, т.е. функций, получаемых из 12-ти основных элементарных с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиции (без предельного перехода). В курсе дифференциального исчисления доказывается, что все элементарные функции дифференцируемы (если основные элементарные функции, породившие заданную элементарную функцию, рассматривать на интервалах), и их производные являются также элементарными функциями, то есть операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций.

Иначе обстоит дело с операцией интегрирования. Можно доказать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями. Примерами таких интегралов могут послужить следующие:

$\int e^{-x^2}\,dx$ — **интеграл ошибок Пуассона** (теории вероятностей);

$\int \frac{dx}{\ln x}$, $(0 < x \neq 1)$ — **интегральный логарифм** (теория чисел);

$\int \sin x^2 dx$ и $\int \cos x^2 dx$ — **интегралы Френеля** (физика);

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ и $\int \frac{\cos x}{x} dx$ $(x \neq 0)$ — **интегральный синус** и **косинус**;

$\int \frac{e^x}{x} dx$ — **интегральная показательная функция**.

Они называются **специальными функциями**. В случаях, когда первообразная от элементарной функции $f(x)$ так же является элементарной функцией, говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ «**берётся**» или «вычисляется **в конечном виде»**. В противном случае этот интеграл называется «**неберущимся**» или «**невычисляемым в конечном виде**». Известны сравнительно немногие общие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. Основные классы функций, интегрируемых в конечном виде, рассмотрены **автором** в пособии [**8**].

§ 14. Определённый интеграл

14.1. Определение и условия существования определённого интеграла

1. Понятие определённого интеграла

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$: $[a;b] \to \boldsymbol{R}$, где $a < b$.

Определение 14.1. Неразмеченным разбиением отрезка $[a;b]$ называется произвольное конечное множество точек $\boldsymbol{\tau} = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, обладающее свойством: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (**рис. 14.1**). Отрезок $[a;b]$ с помощью разбиения $\boldsymbol{\tau}$ распадется на n **частичных** отрезков: $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

Рис. 14.1

Определение 14.2. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ **длину** i-го частичного отрезка Δ_i разбиения $\boldsymbol{\tau}$. Число $|\boldsymbol{\tau}| = \boldsymbol{\lambda}_\tau = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$ назовём **диаметром разбиения** $\boldsymbol{\tau}$.

Определение 14.3. На каждом **частичном** отрезке Δ_i разбиения $\boldsymbol{\tau}$ выберем произвольную точку $\xi_i \in \Delta_i \equiv [x_{i-1}; x_i]$ (**рис. 14.2**). Совокупность точек $\overline{\xi} = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$ назовём **разметкой** разбиения $\boldsymbol{\tau}$. Множество точек

$$v = \left\{\boldsymbol{\tau}; \overline{\xi}\right\} = \{x_0, x_1, ..., x_n; \xi_1, ..., \xi_n\}$$

назовём **размеченным разбиением** отрезка $[a;b]$. Соответствующее ему **неразмеченное** разбиение обозначим $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(v)$. Диаметром $|v|$ **размеченного** разбиения v называется диаметр соответствующего **неразмеченного** разбиения $\boldsymbol{\tau}$: $|v| = |\boldsymbol{\tau}(v)|$.

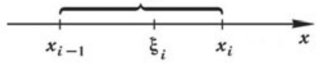

Рис. 14.2

Определение 14.4. Сумма

$$\sigma_v(f) \equiv \sigma_\tau\left(f, \overline{\xi}\right) = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + ... + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad \textbf{(14.1)}$$

называется **интегральной суммой** функции $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению $v=\{\tau;\overline{\xi}\}$ отрезка $[a;b]$.

Геометрический смысл интегральной суммы

Пусть функция $f(x)$ обладает следующими **двумя** свойствами:

1) она **непрерывна** на отрезке $[a;b]$;

2) $f(x)\geqslant 0,\ x\in[a;b]$.

Тогда: 1) каждое слагаемое $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ в интегральной сумме $\sigma_v(f)$ есть **площадь прямоугольника** с основанием Δ_i и высотой, равной $f(\xi_i)$;

2) интегральная сумма $\sigma_v(f)$ равна **площади ступенчатой фигуры**, составленной из прямоугольников, указанных в п.1).

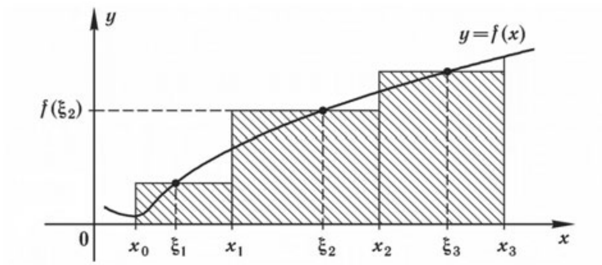

Рис. 14.3

Определение 14.5. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по **Риману** на отрезке $[a;b]$, если для **любой** последовательности $\{v_k\}$ размеченных разбиений, диаметры которых стремятся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty}|v_k|=0$, последовательность интегральных сумм $\sigma_{v_k}(f)$ имеет (один и тот же) **конечный** предел, который обозначается

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau\left(f,\overline{\xi}\right)\equiv\lim_{|v|\to 0}\sigma_v(f)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textbf{(14.2)}$$

и называется **интегралом Римана** функции $f(x)$ по отрезку $[a;b]$.

При этом: a — **нижний**, а b — **верхний** пределы интегрирования;

$f(x)$ — **подынтегральная** функция;

x — **переменная** интегрирования.

Сформулируем определение интеграла Римана на «$\varepsilon-\delta$» языке.

Определение 14.6. Число $\boldsymbol{I}$ называется **интегралом Римана** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого **размеченного** разбиения v отрезка $[a;b]$ с диаметром $|v|<\delta$ выполняется неравенство

$$|\sigma_v(f)-\boldsymbol{I}|<\varepsilon. \qquad \textbf{(14.3)}$$

Замечание 14.1. Без использования термина **«размеченное разбиение» определение 14.6** имеет вид: число $\boldsymbol{I}$ называется **интегралом Римана** от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого **неразмеченного** разбиения τ с диаметром $|\tau|<\delta$ при любом выборе точек $\xi_1,\ldots,\xi_n$ (где $\xi_i\in\Delta_i\equiv[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$) выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i-\boldsymbol{I}\right|<\varepsilon. \qquad \textbf{(14.4)}$$

Теорема 14.1. Определения **14.5** и **14.6** интеграла Римана **эквивалентны**.
Без доказательства.

Замечание 14.2. В дальнейшем для краткости: **а)** вместо «**функция, интегрируемая по Риману**» будем говорить «**интегрируемая функция**»; **б)** вместо «**интеграл Римана**» — просто «**интеграл**».

Замечание 14.3. Дополним определение интеграла следующими соглашениями:

а) $\int\limits_a^a f(x)\,dx=0$, если $f(x)$ определена в точке a;

б) $\int\limits_b^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx.$

Пример 14.1. Проинтегрировать функцию $f(x)\equiv c$ на отрезке $[a;b]$.

◄ Составим интегральную сумму для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Заметим, что $f(\xi_i)=c$ для любого набора точек $\xi_1,\ldots,\xi_n\in[a;b]$, поэтому для любого размеченного разбиения v отрезка $[a;b]$ справедливо равенство $\sigma_v(f)=\sum\limits_{i=1}^{n} c\cdot\Delta x_i=c\cdot(b-a)\equiv\text{const}$. Поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|v|\to 0} \sigma_v(f) = c\cdot(b-a). \ \blacktriangleright$$

2. Необходимое условие интегрируемости

Теорема 14.2. Пусть функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$. Тогда она **ограничена на нём**.

Доказательство (от противного). 1) Пусть f интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда существует число I, удовлетворяющее условию (14.4). Полагая $\varepsilon = 1$ в (14.4), получаем двойное неравенство

$$I - 1 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i < I + 1, \qquad \textbf{(14.5)}$$

справедливое для любого разбиения $\tau = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$, диаметр которого $|\tau| < \delta_1 \equiv \delta(1)$, при любой разметке $\overline{\xi} = \{\xi_1, ..., \xi_n\}$.

2) Фиксируем разбиение τ, удовлетворяющее условию $|\tau| < \delta_1$, и **предположим**, что $f(x)$ **не ограничена** на отрезке $[a;b]$. Тогда $f(x)$ не является ограниченной хотя бы на одном частичном отрезке Δ_i разбиения τ. Не теряя общности доказательства, будем считать, что $f(x)$ не ограничена на отрезке $\Delta_1 \equiv [x_0; x_1] \equiv \ \equiv [a; x_1]$. Фиксируем произвольные точки $\xi_2, ..., \xi_n$, где $\xi_i \in \Delta_i$ $(i = \overline{2, n})$, и обозначим $\sum\limits_{i=2}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = A$. Тогда

$$\sigma_\tau\left(f, \overline{\xi}\right) = f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + A$$

и можно записать двойное неравенство (14.5) в виде:

$$I - 1 - A < f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 < I + 1 - A \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{I-1-A}{\Delta x_1} < f(\xi_1) < \frac{I+1-A}{\Delta x_1}. \qquad \textbf{(14.6)}$$

Двойное неравенство (14.6) означает, что $f(x)$ ограничена на отрезке Δ_1. Получили противоречие, завершающее доказательство **теоремы 14.2**. ■

Замечание 14.4. Ограниченность функции на отрезке $[a;b]$ **не являются достаточным** условием её интегрируемости на этом отрезке. Например, **функция Дирихле**

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \textbf{рациональное} \text{ число}; \\ 0, \text{ если } x - \textbf{иррациональное} \text{ число} \end{cases}$$

не интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, $a<b$, хотя и ограничена. Докажем это. Для произвольного неразмеченного разбиения τ отрезка $[a;b]$ составим две интегральные суммы. Для 1-й суммы точки разметки $\xi_1, ..., \xi_n$ возьмём **рациональными**, а для 2-й суммы — **иррациональными**. В результате получим

$$\sigma_{1\tau}=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot\Delta x_i=\underbrace{b-a}_{\text{const}}>0 \quad \text{и}$$

$$\sigma_{2\tau}=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot\Delta x_i=0.$$

Поэтому

$$\lim_{|\tau|\to 0}\sigma_{1\tau}=\lim_{|\tau|\to 0}(b-a)=(b-a)>0 \quad \text{и} \quad \lim_{|\tau|\to 0}\sigma_{2\tau}=\lim_{|\tau|\to 0}0=0.$$

Получили неравные пределы, следовательно, не существует предела $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\sigma_\tau$. Согласно определению (интеграла Римана) это означает, что функция Дирихле **не интегрируема** на (любом) отрезке $[a;b]$.

Замечание 14.5. Далее в курсе **МА** мы введём понятие **несобственного** интеграла. Окажется, что некоторые **неограниченные** на отрезке $[a;b]$ функции будут интегрируемы в смысле **несобственного** интеграла.

3. Суммы Дарбу

Определение 14.7. Пусть функция $f(x)$ **ограничена** на отрезке $[a;b]$. Для произвольного разбиения $\tau=\{a=x_0, x_1, ..., x_n=b\}$ отрезка $[a;b]$ введём обозначения:

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x) \quad \text{и} \quad m_i=\inf_{x\in\Delta_i}f(x),$$

где $\Delta_i=[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$, — **частичные** отрезки разбиения τ. Тогда суммы

$$\overline{S}_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i \quad \text{и} \quad \underline{S}_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i \qquad \textbf{(14.7)}$$

называются, соответственно, **верхней и нижней суммами Дарбу** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, **соответствующими** разбиению τ этого отрезка.

Замечание 14.6. Суммы Дарбу **не зависят** от разметки $\overline{\xi}$ разбиения τ.

Геометрический смысл сумм Дарбу

Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$;

2) $f(x)\geqslant 0,\ x\in[a;b]$.

Под **криволинейной трапецией** с основанием $[a;b]$ будем понимать плоскую фигуру (лежащую на плоскости Oxy):

$$G=\{(x;y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\},$$

которая ограничена:

1) сверху графиком функции $y=f(x),\ x\in[a;b]$;

2) снизу отрезком $x\in[a;b]$ прямой $y=0$ (оси Ox);

3) сбоку прямыми $x=a$ и $x=b$.

Пусть $\boldsymbol{\tau}=\{x_0=a<x_1<\ldots<x_n=b\}$ — произвольное **неразмеченное** разбиение отрезка $[a;b]$. В силу **непрерывности** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (согласно 2-ой теореме **Вейерштрасса**) числа m_i и M_i, $i=\overline{1,n}$, (из **определения 14.7**) равны, соответственно, **наименьшему** и **наибольшему** значениям функции $f(x)$ на отрезке $\Delta_i=[x_{i-1};x_i]$:

$$m_i=\min_{x\in\Delta_i}f(x) \quad \text{и} \quad M_i=\max_{x\in\Delta_i}f(x).$$

Поэтому:

1) **Верхняя** сумма Дарбу $\overline{S}_\tau$ (соответствующая разбиению $\boldsymbol{\tau}$) равна площади (элементарной) ступенчатой фигуры $\overline{G}_\tau$, **описанной** около криволинейной трапеции G (**рис. 14.4**);
2) **Нижняя** сумма Дарбу $\underline{S}_\tau$ (соответствующая разбиению $\boldsymbol{\tau}$) равна площади (элементарной) ступенчатой фигуры $\underline{G}_\tau$, **вписанной** в криволинейную трапецию G (**рис. 14.4**).

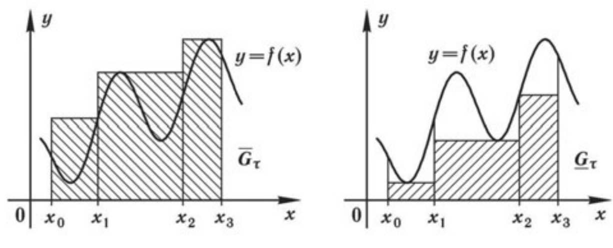

Рис. 14.4

Замечание 14.7. Анализируя геометрический смысл интегральной суммы и сумм Дарбу, можно ожидать, что интеграл от **интегрируемой** на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$ будет равен числу, которое следует принять за площадь соответствующей криволинейной трапеции. Но к этому же числу будут стремиться верхняя $\overline{S}_\tau$ и нижняя $\underline{S}_\tau$ суммы Дарбу при стремлении диаметра разбиения τ к нулю ($|\tau| \to 0$). Поэтому представляется **вероятным**, что для интегрируемости функции $f(x)$ **необходимо и достаточно**, чтобы разность между верхней $\overline{S}_\tau$ и нижней $\underline{S}_\tau$ суммами Дарбу стремилась к нулю. Строго соответствующее утверждение **будет сформулировано ниже** (см. критерий интегрируемости).

Свойства сумм Дарбу

1°. Для любого размеченного разбиения $v = (\tau; \overline{\xi})$ отрезка $[a; b]$ справедливы неравенства:

$$\underline{S}_\tau(f) \leqslant \sigma_\tau(f; \overline{\xi}) \leqslant \overline{S}_\tau(f). \qquad \textbf{(14.8)}$$

Доказательство.

1) Так как $\xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$, то $m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i$ для $i = \overline{1, n}$.

2) Поэтому, $m_i \cdot \Delta x_i \leqslant f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leqslant M_i \cdot \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$, (т.к. $\Delta x_i > 0$).

3) Складывая неравенства из п. 2), получаем:

$$\underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i}_{\sigma_\tau(f; \overline{\xi})} \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = \overline{S}_\tau(f). \qquad \blacksquare$$

2°. Для **непрерывной** на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ справедливы утверждения:

а) **нижняя** сумма Дарбу является **наименьшей** интегральной суммой

$$\underline{S}_\tau(f) = \min_{\overline{\xi}} \sigma_\tau(f; \overline{\xi});$$

б) **верхняя** сумма Дарбу является **наибольшей** интегральной суммой

$$\overline{S}_\tau(f) = \max_{\overline{\xi}} \sigma_\tau(f; \xi),$$

где **максимум** и **минимум** берутся по всевозможным разметкам $\overline{\xi}$ разбиения τ.

Доказательство. По 2-й теореме **Вейерштрасса** существуют **две** такие разметки (два набора точек) $\overline{\xi}' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ и $\overline{\xi}'' = \{\xi_1'', \ldots, \xi_n''\}$, что $\xi_i', \xi_i'' \in \Delta_i$, $i = \overline{1, n}$, и $f(\xi_i') = m_i$, $f(\xi_i'') = M_i$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому справедливы следующие равенства:

$$\begin{cases} \underline{S}_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i') \cdot \Delta x_i = \sigma_\tau(f; \overline{\xi}'); \\ \overline{S}_\tau(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i'') \cdot \Delta x_i = \sigma_\tau(f; \overline{\xi}''), \end{cases}$$

Означающие (с учётом **неравенства 14.8**), что

$$\underline{S}_\tau(f) = \min_{\overline{\xi}} \sigma_\tau(f; \overline{\xi}) \quad \text{и} \quad \overline{S}_\tau(f) = \max_{\overline{\xi}} \sigma_\tau(f; \xi). \ \blacksquare$$

3°. При добавлении к точкам разбиения τ новых точек **верхняя** сумма Дарбу **не возрастает**, а **нижняя** сумма Дарбу **не убывает**:

$$\underline{S}_\tau \leqslant \underline{S}_{\tau'} \leqslant \overline{S}_{\tau'} \leqslant \overline{S}_\tau$$

(здесь τ' — разбиение $[a; b]$, полученное из τ добавлением новых точек).

Доказательство.

1) Заметим, что достаточно доказать свойство **3°** для случая, когда разбиение τ' получается из τ добавлением одной точки.

2) Пусть разбиение τ' получается из τ добавлением только одной новой точки $x' \in (x_{i-1}; x_i)$. Тогда верхняя сумма Дарбу $\overline{S}_{\tau'}$ получается из $\overline{S}_\tau$ заменой слагаемого $M_i \cdot \Delta x_i$ на сумму

$$M_i' \cdot (x' - x_{i-1}) + M_i'' \cdot (x_i - x'), \text{ где } M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \quad \text{и}$$

$$M_i' = \sup_{x \in [x_{i-1}; x']} f(x) \leqslant M_i, \quad M_i'' = \sup_{x \in [x'; x_i]} f(x) \leqslant M_i.$$

Поэтому

$$M_i' \cdot (x' - x_{i-1}) + M_i'' \cdot (x_i - x') \leqslant M_i [(\cancel{x'} - x_{i-1}) + (x_i - \cancel{x'})] =$$
$$= M_i (x_i - x_{i-1}) = M_i \Delta x_i.$$

Следовательно, $\overline{S}_{\tau'} \leqslant \overline{S}_\tau$.

3) Аналогично доказывается неравенство $\underline{S}_\tau \leqslant \underline{S}_{\tau'}$. ■

4°. Для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 отрезка $[a; b]$ нижняя сумма Дарбу не превосходит верхнюю сумму:

$$\underline{S}_{\tau_1}(f) \leqslant \overline{S}_{\tau_2}(f) \qquad \textbf{(14.9)}$$

(т.е. любая нижняя сумма Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ **не больше** любой её верхней суммы Дарбу на этом отрезке).

Доказательство. Обозначим символом τ разбиения отрезка $[a;b]$, полученное объединением точек, образующих разбиения τ_1 и τ_2. Тогда, согласно свойству **3°**, имеем: $\underline{S}_{\tau_1}(f) \leqslant \underline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_\tau(f) \leqslant \overline{S}_{\tau_2}(f)$. ■

4. Критерий интегрируемости

Теорема 14.3. (Критерий интегрируемости Римана). Для того, чтобы функция $f\colon [a;b] \to \boldsymbol{R}$ была интегрируемой на отрезке $[a;b]$ **необходимо и достаточно**, чтобы она была ограничена на $[a;b]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существовало (неразмеченное) разбиение τ этого отрезка, для которого выполнялось бы неравенство:

$$(0 \leqslant)\ \overline{S}_\tau - \underline{S}_\tau < \varepsilon. \qquad \textbf{(14.10)}$$

Без доказательства.

5. Достаточные условия интегрируемости. Классы интегрируемых функций. Интегрируемость непрерывных функций

Теорема 14.4. Если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, то она **интегрируема** на этом отрезке.

Доказательство. Заметим, что из непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует (1-ая теорема Вейерштрасса) её **ограниченность** на этом отрезке.

1) По теореме Кантора из непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует её равномерная непрерывность на этом отрезке, означающая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in [a;b]$, удовлетворяющей условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

2) Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть τ — произвольное (неразмеченное) разбиение отрезка $[a;b]$ с диаметром $|\tau| < \delta(\varepsilon_1)$.

Обозначим через $\overline{\xi}' = \{\xi_1', \ldots, \xi_n'\}$ и $\overline{\xi}'' = \{\xi_1'', \ldots, \xi_n''\}$ разметки разбиения τ (наборы точек), при которых интегральные суммы равны, соответственно, **нижней** и **верхней суммам Дарбу** функции $f(x)$ для разбиения τ:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i') \cdot \Delta x_i = \underline{S}_\tau(f), \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'') \cdot \Delta x_i = \overline{S}_\tau(f).$$

3) Поскольку $\xi_i', \xi_i'' \in \Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1,n}$, то

$$|\xi_i' - \xi_i''| \leqslant |x_i - x_{i-1}| \equiv \Delta x_i < \delta(\varepsilon_1) \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant f(\xi_i'') - f(\xi_i') < \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \bar{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i'') - f(\xi_i')]\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_1 \Delta x_i = \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \\ = \varepsilon_1 \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

т.е. функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$ (критерий **Римана**). ■

Теорема 14.5. Если функция $f(x)$ **ограничена** на отрезке $[a;b]$ и имеет на $[a;b]$ лишь **конечное число** точек разрыва, то $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$.

Без доказательства.

Теорема 14.6. Если функция $f(x)$ **монотонна** на отрезке $[a;b]$, то она **интегрируема** на этом отрезке.

Без доказательства.

Замечание. 14.8. Монотонная функция может иметь точки разрыва. **Однако** множество этих точек **не более**, чем **счётно.**

Замечание. 14.9. Связь между интегрируемостью функции и **нарушением** у неё **непрерывности** на некотором подмножестве отрезка интегрирования устанавливает **критерий интегрируемости Лебега**. Для его формулировки нам понадобится понятие множества **лебеговой меры нуль**.

Определение 14.8. Множество X, лежащее на числовой оси, называется множеством **лебеговой меры нуль**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие этого множества **конечной** или **счётной** системой интервалов, сумма длин которых меньше ε.

Критерий Лебега. Для того, чтобы функция $f\colon [a;b] \to \boldsymbol{R}$ была интегрируемой на отрезке $[a;b]$ **необходимо и достаточно**, чтобы она была **ограничена** на этом отрезке и множество её **точек разрыва** имело **лебегову меру нуль**.

Без доказательства.

14.2. Свойства определённого интеграла

1. Линейность определённого интеграла. Если $f(x)$ и $g(x)$ **интегрируемы** на отрезке $[a;b]$, то для любых чисел $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$

1) функция $h(x) \equiv \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)$ **интегрируема** на этом отрезке;

2) справедлива формула

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx. \qquad \textbf{(14.11)}$$

Доказательство. **1)** Интегральная сумма для функции $h(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет вид:

$$\sigma_v(h) = \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} [\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)]\Delta x_i =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \lambda \cdot \sigma_v(f) + \mu \cdot \sigma_v(g).$$

2) Пусть $\{v_k\}$ — последовательность (**размеченных**) разбиений, диаметры которых стремятся к 0: $\lim\limits_{k \to 0} |v_k| = 0$. Тогда (согласно условию) последовательности интегральных сумм $\{\sigma_{v_k}(f)\}$ и $\{\sigma_{v_k}(g)\}$ сходятся, соответственно, к интегралам

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g(x)\,dx.$$

Поэтому сходится последовательность $\{\sigma_{v_k}(h) \equiv \lambda \cdot \sigma_{v_k}(f) + \mu \cdot \sigma_{v_k}(g)\}$ интегральных сумм функции $h(x)$ (свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями), т.е. функция $h(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, причём справедлива формула (14.11). ■

Частные случаи

$$\text{1)} \begin{cases} \lambda \neq 0, \\ \mu = 0. \end{cases} \Rightarrow \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \textbf{(14.12)}$$

$$\text{2)} \begin{cases} \lambda = 1, \\ \mu = \pm 1. \end{cases} \Rightarrow \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx. \qquad \textbf{(14.13)}$$

2. Аддитивность определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, где $a < c < b$.

Тогда:

1) функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$;

2) справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad \textbf{(14.14)}$$

Доказательство. **1)** Сначала докажем, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию интегрируемости Римана, имеем:

а) из интегрируемости $f(x)$ на отрезке $[a;c]$ следует, что существует разбиение $\boldsymbol{\tau}'$ отрезка $[a;c]$, для которого выполняется неравенство $\overline{S}_{\tau'}(f)-\underline{S}_{\tau'}(f)<\frac{\varepsilon}{2}$;

б) из интегрируемости $f(x)$ на отрезке $[c;b]$ следует, что существует разбиение $\boldsymbol{\tau}''$ отрезка $[c;b]$, для которого выполняется неравенство $\overline{S}_{\tau''}(f)-\underline{S}_{\tau''}(f)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим множество точек $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}'\cup\boldsymbol{\tau}''$ — очевидно, что это (неразмеченное) разбиение отрезка $[a;b]$, для которого справедливо неравенство

$$\overline{S}_{\tau}(f)-\underline{S}_{\tau}(f)\equiv\left[\overline{S}_{\tau'}(f)+\overline{S}_{\tau''}(f)\right]-\left[\underline{S}_{\tau'}(f)+\underline{S}_{\tau''}(f)\right]\equiv$$
$$\equiv\left[\overline{S}_{\tau'}(f)-\underline{S}_{\tau'}(f)\right]+\left[\overline{S}_{\tau''}(f)-\underline{S}_{\tau''}(f)\right]<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого $\varepsilon>0$ существует (**неразмеченное**) разбиение $\boldsymbol{\tau}$ отрезка $[a;b]$, для которого выполняется неравенство $\overline{S}_{\tau}(f)-\underline{S}_{\tau}(f)<\varepsilon$. Согласно **критерию интегрируемости Римана**, это означает, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$.

2) Теперь докажем **равенство (14.14)**. Из интегрируемости $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует (согласно **определению 14.5**), что для любой последовательности $\{v_k\}$ (размеченных) разбиений отрезка $[a;b]$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{k\to\infty}|v_k|=0$, справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sigma_{v_k}(f).$$

Построим одну из таких последовательностей.

Рассмотрим произвольные последовательности $\{v'_k\}$ и $\{v''_k\}$ (**размеченных**) разбиений (соответственно) отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$, для которых выполняются условия:

$$\lim_{k\to\infty}|v'_k|=0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty}|v''_k|=0. \qquad \textbf{(14.15)}$$

Тогда (согласно определению 14.5) справедливы равенства:

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sigma_{v'_k}(f) \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sigma_{v''_k}(f). \qquad \textbf{(14.16)}$$

Очевидно, что $\{v_k=v'_k\cup v''_k\}$ является искомой последовательностью размеченных разбиений отрезка $[a;b]$. Действительно,

а) $0\leqslant|v_k|=\max\{|v'_k|,\,|v''_k|\}\leqslant|v'_k|+|v''_k|$, $k\in\boldsymbol{N}$, поэтому (согласно равенствам (14.15) и правилу о двух милиционерах)

$$\lim_{k\to\infty} |v_k| = 0; \tag{14.17}$$

б) $$\lim_{k\to\infty} \sigma_{v_k}(f) = \lim_{k\to\infty}\left[\sigma_{v'_k}(f)+\sigma_{v''_k}(f)\right] = \lim_{k\to\infty}\sigma_{v'_k}(f)+\lim_{k\to\infty}\sigma_{v''_k}(f) =$$

$$\underset{(2.16)}{=} \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{14.18}$$

Равенства **(14.17)** и **(14.18)** означают справедливость формулы **(14.14)**. ■

Замечание 14.10. Формула **(14.14)** справедлива при любых значениях чисел a, b, c, лишь бы функция $f(x)$ была бы интегрируема на наибольшем по длине отрезке.

3. Если $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$, то она **интегрируема** на любом отрезке $[c;d]$, целиком лежащем внутри отрезка $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Фиксируем произвольный $\varepsilon > 0$. Согласно критерию интегрируемости Римана, существует разбиение $\tilde{\tau}$ отрезка $[a;b]$, для которого выполняется неравенство

$$\overline{S}_{\tilde{\tau}}(f) - \underline{S}_{\tilde{\tau}}(f) < \varepsilon.$$

Рассмотрим новое разбиение $\tau = \tilde{\tau} \cup \{c\} \cup \{d\}$ отрезка $[a;b]$, полученное из $\tilde{\tau}$ добавлением двух точек c и d. Тогда (свойство **3°** сумм Дарбу) справедливо неравенство $\overline{S}_{\tau}(f) - \underline{S}_{\tau}(f) < \varepsilon$. Пусть τ^* — разбиение отрезка $[c;d]$, состоящее из точек разбиения τ, лежащих на отрезке $[c;d]$. Для него имеем:

$$\overline{S}_{\tau}(f) - \underline{S}_{\tau}(f) = \left[\overline{S}_{\tau^*}(f) - \underline{S}_{\tau^*}(f)\right] + \sum_{\tau\setminus\tau^*}(M_i - m_i)\cdot\Delta x_i \geqslant \overline{S}_{\tau^*}(f) - \underline{S}_{\tau^*}(f).$$

Таким образом,

$$0 \leqslant \overline{S}_{\tau^*}(f) - \underline{S}_{\tau^*}(f) \leqslant \overline{S}_{\tau}(f) - \underline{S}_{\tau}(f) < \varepsilon.$$

Это означает (согласно **критерию интегрируемости Римана**), что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c;d]$. ■

4. Пусть функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$. Тогда функция $|f(x)|$ также **интегрируема** на отрезке $[a;b]$.

Доказательство. 1) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно критерию интегрируемости Римана существует разбиение τ отрезка $[a;b]$, для которого выполняется неравенство $\overline{S}_{\tau}(f) - \underline{S}_{\tau}(f) < \varepsilon$.

2) Используем следующие обозначения:

$$M_i = \sup_{x\in\Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x\in\Delta_i} f(x), \qquad M_i^* = \sup_{x\in\Delta_i} |f(x)|, \quad m_i^* = \inf_{x\in\Delta_i} |f(x)|,$$

где $\Delta_i = [x_{i-1}; x_i]$, $i = \overline{1, n}$.

3) Воспользуемся неравенствами:

$$0 \leqslant M_i^* - m_i^* \leqslant M_i - m_i, \ i = \overline{1, n}. \qquad \textbf{(14.19)}$$

Упражнение. Доказать неравенства (14.19), рассмотрев следующие случаи: **1)** $0 \leqslant m_i \leqslant M_i$; **2)** $m_i < 0 \leqslant M_i$; **3)** $m_i \leqslant M_i < 0$.

Домножим неравенства (14.19) на соответствующие Δx_i и сложим — в результате получим оценку:

$$0 \leqslant \overline{S}_\tau(|f|) - \underline{S}_\tau(|f|) = \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*) \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot \Delta x_i =$$
$$= \overline{S}_\tau(f) - \underline{S}_\tau(f) < \varepsilon.$$

Таким образом, справедливо неравенство $0 \leqslant \overline{S}_\tau(|f|) - \underline{S}_\tau(|f|) < \varepsilon$, означающее (согласно **критерию интегрируемости Римана**) интегрируемость функции $|f(x)|$ на отрезке $[a; b]$. ■

5. Оценки интегралов. Теорема о среднем значении

Теорема 14.7. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a; b]$, где $a < b$;
2) $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a; b]$.

Тогда справедливо следующее неравенство:

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0. \qquad \textbf{(14.20)}$$

Доказательство. 1) Пусть $\{v_k\}$ — произвольная последовательность (**размеченных**) разбиений отрезка $[a; b]$, диаметры которых стремятся к нулю: $\lim\limits_{k\to\infty} |v_k| = 0$. Тогда из интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ следует сходимость последовательности интегральных сумм $\{\sigma_{v_k}(f)\}$ к определённому интегралу:

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{v_k}(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2) Поскольку $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a;b]$, то для любого разбиения из последовательности $\{v_k\}$ выполняется неравенство:

$$\sigma_{v_k}(f) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем неравенство **(14.20)**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{k \to \infty} \sigma_{v_k}(f) \geqslant 0. \blacksquare$$

Следствие. Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ **интегрируемы** на отрезке $[a;b]$, где $a < b$;

2) $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in [a;b]$.

Тогда справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx,$$

означающее, что **функциональное неравенство** $f(x) \geqslant g(x)$, $x \in [a;b]$, **можно интегрировать** по отрезку $[a;b]$, на котором оно выполняется (если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на этом отрезке).

Доказательство. Легко заметить, что функция $h(x) \equiv [f(x) - g(x)]$ удовлетворяет на отрезке $[a;b]$ условиям теоремы 14.7, поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b h(x)\,dx \geqslant 0. \blacksquare$$

Теорема 14.8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, где $a \leqslant b$, то справедливо неравенство:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad \textbf{(14.21)}$$

Доказательство. 1) При $a = b$ это неравенство тривиально: $0 \leqslant 0$.

Пусть теперь $a < b$. Ранее было доказано, что из интегрируемости $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует интегрируемость $|f(x)|$ на $[a;b]$. Проинтегрируем очевидное двойное неравенство $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, $x \in [a;b]$, (**следствие теоремы 14.7**):

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \equiv \int_a^b (-|f(x)|)dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \quad\Leftrightarrow\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

■

Замечание 14.11. Если отказаться от ограничения $a \leqslant b$, то аналог неравенства (14.21) будет иметь вид:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \qquad \textbf{(14.22)}$$

Действительно, при $a < b$ справедливо неравенство $\int_a^b |f(x)|\,dx \geqslant 0$, поэтому

$$\left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

и неравенства (14.21) и (14.22) равносильны.

При $a > b$ имеем:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f(x)|\,dx = \left|\int_b^a |f(x)|\,dx\right| = \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|.$$

Теорема 14.9 (о среднем значении). Если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$ (где $a < b$), то **существует** такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Доказательство. 1) По 2-й теореме **Вейерштрасса** непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ достигает на нём своих наименьшего m и наибольшего M значений, то есть существуют точки $x_1, x_2 \in [a;b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$, причём

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \text{ для любого } x \in [a,b]. \qquad \textbf{(14.23)}$$

2) Проинтегрируем неравенство (14.23) по отрезку $[a;b]$ (следствие теоремы 14.7) и разделим на число $(b-a) > 0$:

$$\int_a^b m\cdot dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\cdot dx \quad\Leftrightarrow\quad m\cdot(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\cdot(b-a) \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad m \leqslant \mu \leqslant M, \text{ где } \mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad \textbf{(14.24)}$$

Неравенство **(14.24)** означает, что число μ заключено между наименьшим и наибольшим значениями **непрерывной** на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, поэтому (следствие из теоремы **Коши** о **промежуточных значениях**) существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что:

$$f(\xi) = \mu \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a). \;\blacksquare$$

Замечание 14.12. Теорема 14.9 остаётся верной и при $b < a$, поскольку в этом случае для некоторой точки $\xi \in [b;a]$ справедливо равенство

$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Домножив его на (-1), получим требуемое:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx = -f(\xi) \cdot (a-b) = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Геометрический смысл теоремы о среднем

Пусть $f(x)$ — **непрерывная положительная** функция на отрезке $[a;b]$.

1) Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ равен площади $S_{\text{тр}}$ криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$ (**рис. 14.5**).

2) Геометрический смысл теоремы о среднем: площадь криволинейной трапеции $S_{\text{тр}}$ (из пункта 1) равна площади прямоугольника, имеющего высоту $f(\xi)$ и основание $(b-a)$ (**рис. 14.5**).

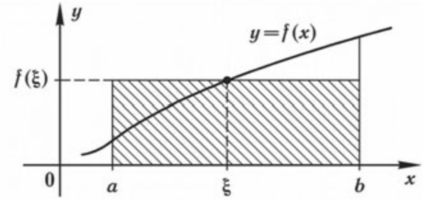

Рис. 14.5

14.3. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Вычисление определенных интегралов

1. Непрерывность интеграла по верхнему пределу интегрирования

Определение 14.9. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Согласно свойству **3°** п. 1.4, она интегрируема на каждом отрезке $[a;c]$, где $a \leqslant c \leqslant b$, поэтому для каждого $x \in [a;b]$ имеет смысл интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \textbf{(14.25)}$$

называемый **интегралом с переменным верхним пределом**.

Геометрический смысл: для $f(x) > 0$, $x \in [a;b]$, функция $F(x)$ равна площади заштрихованной криволинейной трапеции (**рис. 14.6**).

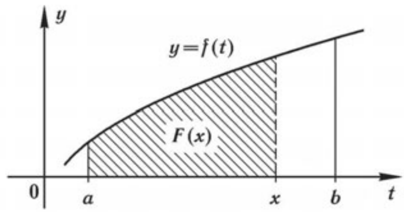

Рис. 14.6

Теорема 14.10. Пусть функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$. Тогда функция $F(x)$, определённая **формулой (14.25)**, **непрерывна** на отрезке $[a;b]$.

Доказательство. 1) Пусть точки x_0 и $(x_0 + \Delta x)$ принадлежат отрезку $[a;b]$. В силу аддитивности определенного интеграла, приращение функции $F(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$\Delta F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt. \qquad \textbf{(14.26)}$$

2) Из **интегрируемости** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует её **ограниченность** на этом отрезке: существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для каждого $x \in [a;b]$.

3) Используя неравенство (14.22), оценим приращение $\Delta F(x_0)$:

$$|\Delta F(x_0)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt \right| \leqslant \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} M\cdot dt \right| \leqslant M\cdot|\Delta x|$$

для каждого $x_0 \in [a;b]$ при условии, что $(x_0 + \Delta x) \in [a;b]$.

4) Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x_0) = 0$, т.е. $F(x)$ **непрерывна** в точке x_0.

Поскольку x_0 — произвольная точка отрезка $[a;b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на всём этом отрезке. ■

2. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница

Значение интеграла с переменным верхним пределом раскрывает следующая теорема.

Теорема 14.11. Если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, то функция $F(x)$, определённая формулой (14.25), имеет на $[a;b]$ производную, равную $f(x)$, т.е.

$$F'(x) \equiv \frac{dF(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)\,dt = f(x) \text{ для каждого } x \in [a;b].$$

Замечание 14.13. Для точек $x = a$ и $x = b$ под $F'(x)$ подразумеваем соответствующую одностороннюю производную функции $F(x)$.

Доказательство теоремы 14.11. **1)** Фиксируем произвольную точку $x_0 \in [a;b]$ и пусть $(x_0 + \Delta x) \in [a;b]$. В силу аддитивности определенного интеграла, приращение функции $F(x)$ в точке x_0 имеет вид **(14.26)**.

2) По условию теоремы 14.11, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, поэтому к последнему интегралу из формулы **(14.26)** применима теорема о среднем значении: существует такая точка $\xi \in (x_0; x_0 + \Delta x)$, что

$$\Delta F(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot\Delta x.$$

Отметим, что при $\Delta x \to 0$ точка $\xi \to x_0$, поэтому (в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0) справедливо равенство: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x_0)$.

3) По определению производной от функции $F(x)$ в точке x_0 имеем:

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x_0). \; ■$$

Следствие. Пусть функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$. Тогда:

1) $f(x)$ имеет на $[a;b]$ **первообразную**, равную $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ — интегралу с **переменным верхним пределом**;

2) связь между **неопределенным** и **определенным** интегралами можно представить в виде следующего равенства:

$$\int f(x)\,dx=\int\limits_a^x f(t)\,dt+C,\ \ x\in[a;b].$$

Доказательство. Очевидно.

Приведём основную теорему интегрального исчисления.

Теорема 14.12 (Формула Ньютона-Лейбница). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$;

2) $\Phi(x)$ — **произвольная** первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Тогда справедлива **формула Ньютона-Лейбница**:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)\equiv\Phi(x)\Big|_a^b. \qquad \textbf{(14.27)}$$

Доказательство. 1) Пусть $\Phi(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Согласно следствию **теоремы 14.11**, существует такая постоянная C_1, что

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt+C_1,\ \text{где}\ x\in[a,b].$$

2) Подставим в эту формулу значения $x=b$ и $x=a$:

$$\Phi(b)=\int\limits_a^b f(t)\,dt+C_1,\qquad \Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)\,dt+C_1\equiv C_1.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим формулу Ньютона-Лейбница. ■

Пример 14.2. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\,dx$.

◀ $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$ ▶

3. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле

Определение 14.10. Функция $f(x)$ называется **непрерывно дифференцируемой** на отрезке $[a;b]$, если она имеет на этом отрезке **непрерывную производную** (для точек $x=a$ и $x=b$ под $f'(x)$ подразумевается соответствующая односторонняя производная функции $f(x)$).

Теорема 14.13 (о замене переменной в определённом интеграле). Пусть выполняются следующие **четыре** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[x_1; x_2]$;

2) функция $\varphi(t)$ **непрерывно дифференцируема** на отрезке $[\alpha;\beta]$;

3) множество значений функции $\varphi(t), t\in[\alpha;\beta]$, принадлежат отрезку $[x_1; x_2]$.

4) $a=\varphi(\alpha)$ и $b=\varphi(\beta)$.

Тогда справедлива **формула замены переменной** (или формула интегрирования подстановкой) в определённом интеграле:

$$\int\limits_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt. \qquad \textbf{(14.28)}$$

Доказательство. 1) Из **непрерывности** функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует, что:

а) она имеет на **этом отрезке** первообразную;

б) для любой её первообразной (на этом отрезке) $F(x)$ справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \qquad \textbf{(14.29)}$$

2) Согласно условию теоремы 14.13, на отрезке $[\alpha;\beta]$ определена и **непрерывна** функция $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$, для которой сложная функция $F[\varphi(t)]$ является первообразной (на этом отрезке):

$$\frac{d}{dt}F[\varphi(t)] = \frac{dF(x)}{dx}\bigg|_{x=\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(x)\big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t),\ \ t\in[\alpha;\beta],$$

поэтому по **формуле Ньютона-Лейбница** для функции $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ справедливо равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)] = F(b)-F(a). \qquad \mathbf{(14.30)}$$

3) Из равенств **(14.29)** и **(14.30)** следует формула **(14.28) замены переменной в определённом интеграле**. ■

Замечание. 14.14. Подынтегральное выражение в определённом интеграле всегда имеет вид $f(x)\cdot dx$, где x — независимая переменная. При этом в определении **определённого** интеграла **не предполагалось**, что $f(x)\cdot dx$ — дифференциал какой-либо функции. Однако для **непрерывной** функции $f(x)$ было доказано, что выражение $f(x)\cdot dx$ всегда является дифференциалом некоторой функции, а именно — **любой её первообразной** $F(x)$: $f(x)\cdot dx = d[F(x)]$. Поэтому (в этом случае) естественно считать следующие записи равноправными:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b d[F(x)].$$

Замечание. 14.15. Будем допускать под знаком определённого интеграла **любую запись дифференциала**, то есть для дифференцируемой функции $g(x)$ положим по определению

$$\int_a^b f(x)\cdot d[g(x)] = \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx, \qquad \mathbf{(14.31)}$$

если интеграл в правой части равенства **(14.31)** существует.

Замечание. 14.16. С помощью обозначения **(14.31)** формула **(14.28)** замены переменной в определённом интеграле может быть записана в виде

$$\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot d[\varphi(t)]. \qquad \mathbf{(14.32)}$$

Таким образом, при замене переменной $x=\varphi(t)$ в определённом интеграле следует всюду в интеграле формально заменить символ x на выражение $\varphi(t)$ и соответствующим образом изменить пределы интегрирования (так, чтобы $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$).

Замечание. 14.17. Отметим, что формулу **(14.28)** или **(14.32)** замены переменной в определённом интеграле можно использовать как **«слева направо»** так и **«справа налево»**. Однако (в отличие от неопределённого интеграла) в конце вычислений не следует возвращаться к первоначальной переменной.

Пример 14.3. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^3 e^{x^2} x\,dx$.

◀ Воспользуемся простейшим равенством $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$:

$$\int\limits_0^3 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 e^{x^2} d(x^2) = \left\| \begin{array}{l} \text{замена: } x^2 = u \\ x = 3 \Rightarrow u = 9 \\ x = 0 \Rightarrow u = 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int\limits_0^9 e^u du = \left.\frac{e^u}{2}\right|_0^9 = \frac{e^9 - 1}{2}. \ ▶$$

Пример 14.4. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$.

◀ Попытаемся упростить подынтегральное выражение с помощью введения новой переменной

$$t = \sqrt{e^x - 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t \geqslant 0, \\ x = \ln\,(t^2 + 1). \end{cases}$$

Другими словами, сделаем замену переменной:

$$x = \ln(t^2 + 1), \ \ dx = \frac{2t}{t^2 + 1}dt, \qquad \begin{cases} x = \ln 2 \ \Rightarrow \ t = 1; \\ x = 0 \quad\ \Rightarrow \ t = 0. \end{cases}$$

При этом множеством значений функции $x = \ln(t^2 + 1)$, $t \in [0; 1]$, является отрезок $x \in [0; \ln 2]$. Условия **теоремы 14.13 выполняются**, поэтому

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx = \int\limits_0^1 t \cdot \frac{2t}{t^2 + 1}\,dt = 2\int\limits_0^1 \frac{(t^2 + 1) - 1}{(t^2 + 1)}\,dt = 2\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \operatorname{arctg} t)\Big|_0^1 = 2(1 - \operatorname{arctg} 1) = 2 - \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Пример 14.5. Используя **замену переменной** докажем, что для **чётной непрерывной** функции $f(x)$, определённой на отрезке $[-a; a]$, где $a > 0$, справедлива формула

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

◀ **1)** Напомним, что функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **чётной**, если для любого $x \in X$ выполняются два условия: **1)** $-x \in X$ и **2)** $f(-x) = f(x)$.

2) Рассмотрим сначала интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[-a;\ 0]$:

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{Замена: } x = -t \ \Rightarrow \ dx = -dt \\ \quad x = 0 \quad\ \Rightarrow \ t = 0 \\ \quad x = -a \ \Rightarrow \ t = a \end{array} \right\| = \int\limits_a^0 f(-t)\cdot(-1)\,dt =$$

$$-\int\limits_a^0 f(t)\,dt = \int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

3) Согласно свойству **аддитивности определённого интеграла**, имеем:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx. \ \blacktriangleright$$

Пример 14.6. Для **нечётной непрерывной** функции $f(x)$, определённой на отрезке $[-a; a]$, справедлива формула: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

◀ **1)** Напомним, что функция $f: X \to \boldsymbol{R}$ называется **нечётной**, если для любого $x \in X$ выполняются **два** условия: **1)** $-x \in X$ и **2)** $f(-x) = -f(x)$.

2) С помощью замены $x = -t$ легко доказать, что

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

3) Свойство **аддитивности определённого интеграла** завершает доказательство. ▶

Теорема 14.14 (формула интегрирования по частям для определённого интеграла). Если $u(x)$ и $v(x)$ — **непрерывно дифференцируемые** функции на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} v(x)\cdot u'(x)\,dx. \qquad \textbf{(14.33)}$$

Доказательство. Пусть $f(x) = u(x)\cdot v(x)$. Тогда справедливо равенство

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x), \ \ x \in [a; b], \qquad \textbf{(14.34)}$$

которое **можно интегрировать** на отрезке $[a; b]$ (так как по условию теоремы 14.14 функции $u'(x)\cdot v(x)$, $u(x)\cdot v'(x)$, а, следовательно, и их сумма $f'(x)$, непрерывны на отрезке $[a; b]$):

$$\int\limits_{a}^{b} f'(x)dx = \int\limits_{a}^{b} u'(x)\,v(x)dx + \int\limits_{a}^{b} u(x)\,v'(x)dx. \qquad \textbf{(14.35)}$$

Согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем:

$$\int\limits_{a}^{b} f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b \equiv u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b,$$

поэтому равенство (14.35) можно переписать в следующем виде:

$$u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b=\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx+\int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{(14.33)}\ \blacktriangleright$$

Замечание 14.18. Учитывая, что $\begin{cases} v'(x)\cdot dx = dv(x), \\ u'(x)\cdot dx = du(x), \end{cases}$ формулу **интегрирования по частям (14.33)** можно записать в следующем виде (см. **замечание 14.15**):

$$\int_a^b u(x)\cdot dv(x)=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\cdot du(x). \tag{14.36}$$

Пример 14.7. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{v}=\ln x\cdot x\Big|_1^e-\int_1^e x\,d\ln x=(e\ln e-1\cdot\ln 1)-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=e-x\Big|_1^e=1.\ \blacktriangleright$$

Пример 14.8. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx$.

$$\blacktriangleleft\ \int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg} x\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\cdot d\underbrace{\left(\frac{x^2}{2}\right)}_{v}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{2}\,d(\operatorname{arctg} x)=$$

$$=\frac{3\operatorname{arctg}\sqrt{3}-0}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} x^2\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(x-\operatorname{arctg} x)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \blacktriangleright$$

14.4. Приложения определённого интеграла

1. Вычисление площади плоской фигуры

А. Площадь плоской фигуры

Определение 14.11. Множество G точек на плоскости Oxy называется **ограниченным**, если оно содержится в круге конечного радиуса, то есть существует такое $R>0$, что для любой точки $M(x;y)\in G$ выполняется неравенство $x^2+y^2\leqslant R^2$.

Определение 14.12. Плоской фигурой будем называть любое ограниченное множество G точек плоскости. Для плоской фигуры G рассмотрим следующие множества многоугольников.

Пусть: 1) $\{P\}$ — множество всех многоугольников, целиком лежащих в G (то есть $P\subset G$); $\{S(P)\}$ — множество их площадей (множество чисел);

2) $\{Q\}$ — множество всех многоугольников, каждый из которых содержит G (то есть $G\subset Q$); $\{S(Q)\}$ — множество их площадей (множество чисел).

Отметим, что: **1)** $P\subset G\subset Q$ для любых P и Q, поэтому $S(P)\leqslant S(Q)$ для любых многоугольников P и Q;

2) фиксируем произвольный многоугольник $Q_0\in\{Q\}$. Тогда для любого вписанного многоугольника $P\in\{P\}$ справедливо неравенство $S(P)\leqslant S(Q_0)$, то есть множество $\{S(P)\}$ площадей **вписанных** в G многоугольников **ограничено сверху** числом $S(Q_0)$. Следовательно оно **имеет точную верхнюю грань** $\sup\limits_{P} S(P)=\underline{S}$, причём $\underline{S}\leqslant S(Q)$ для любого $Q\in\{Q\}$;

3) из п. **2)** следует, что множество $\{S(Q)\}$ площадей **описанных** около G многоугольников **ограничено снизу** числом $\underline{S}$, поэтому имеет **точную нижнюю грань** $\inf\limits_{Q}\{S(Q)\}=\overline{S}\geqslant\underline{S}$.

Определение 14.13. Плоская фигура G называется **квадрируемой**, если $\underline{S}=\overline{S}$. В этом случае число $S=S(G)=\underline{S}=\overline{S}$ называется **площадью** плоской фигуры G (по **Жордану**).

Теорема 14.15 (критерий квадрируемости). Для **квадрируемости** плоской фигуры G **необходимо и достаточно**, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовали такие многоугольники P и Q, что

1) $P\subset G\subset Q$;

2) $(0\leqslant)S(Q)-S(P)<\varepsilon$.

Доказательство. 1) (Необходимость; $\Rightarrow$). Пусть фигура G — **квадрируема**, а $\{P\}$ и $\{Q\}$ множества многоугольников из **определения 14.12**. Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Согласно определению **точных граней** $\underline{S}=\sup\limits_{P}\{S(P)\}$ и $\overline{S}=\inf\limits_{Q}\{S(Q)\}$ имеем (**рис. 14.7**):

1°. Существует многоугольник $P\subset G$ такой, что $\underline{S}-S(P)<\frac{\varepsilon}{2}$.

2°. Существует многоугольник $Q\supset G$ такой, что $S(Q)-\overline{S}<\frac{\varepsilon}{2}$.

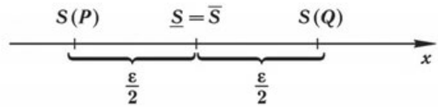

Рис. 14.7

Поскольку $\underline{S}=\overline{S}$, то складывая неравенства **1°—2°**, получаем:

$$\left(S(Q)-\cancel{\overline{S}}\right)+\left(\cancel{\underline{S}}-S(P)\right)<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad S(Q)-S(P)<\varepsilon.$$

Необходимость доказана

2) (Достаточность; $\Leftarrow$). Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Для него (согласно условию **теоремы 14.15**) существуют многоугольники P и Q такие, что:

3°. $P\subset G\subset Q$;

4°. $(0\leqslant)S(Q)-S(P)<\varepsilon$.

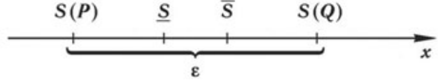

Рис. 14.8

Поскольку $S(P)\leqslant\underline{S}\leqslant\overline{S}\leqslant S(Q)$ (**рис. 14.8**), то из **3°–4°** следует неравенство

$$0\leqslant\overline{S}-\underline{S}<\varepsilon. \qquad \textbf{(14.37)}$$

Неравенство (14.37) справедливо для любого $\varepsilon>0$, поэтому $\overline{S}=\underline{S}$. ■

Теорема 14.16 (Критерий квадрируемости). Для квадрируемости плоской фигуры **необходимо и достаточно**, чтобы её граница $\varGamma$ имела **нулевую площадь** (по Жордану).

Доказательство. 1) (Необходимость; $\Rightarrow$). Отметим, что разность $Q \setminus P$ двух многоугольников P и Q является многоугольником, причём в случае $P \subset Q$ справедливо равенство $S(Q \setminus P) = S(Q) - S(P)$.

Пусть плоская фигура G — квадрируема. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существуют такие многоугольники P и Q, что $P \subset G \subset Q$ и $(0 \leqslant) S(Q) - S(P) < \varepsilon$. Поскольку граница Γ фигуры G принадлежит многоугольнику $Q \setminus P$, то

$$0 \leqslant S(\Gamma) \leqslant S(Q) - S(P) < \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $0 \leqslant S(\Gamma) < \varepsilon$, означающее, что $S(\Gamma) = 0$. **Необходимость доказана**

2) (Достаточность; $\Leftarrow$). Без доказательства. ■

Теорема 14.17 (достаточное условие квадрируемости). Для того, чтобы плоская фигура была квадрируемой, **достаточно**, чтобы её граница была **спрямляемой кривой** (имела **конечную** длину).

Без доказательства.

Замечание 14.19. Определение **спрямляемой** кривой будет приведено **ниже**.

Б. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

Пусть **неотрицательная** функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a; b]$. Тогда под криволинейной трапецией будем понимать фигуру G, заданную на плоскости Oxy условиями

$$G = \{(x; y):\ a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}. \qquad \textbf{(14.38)}$$

Теорема 14.18. Криволинейная трапеция G, определяемая условиями **(14.38) (рис. 14.9)**, где $f(x)$ **неотрицательная непрерывна** на отрезке $[a; b]$ функция,

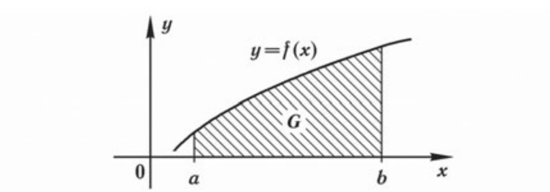

Рис. 14.9

1) является **квадрируемой** фигурой;

2) её площадь $S(G)$ можно вычислить по формуле

$$S(G)=\int_a^b f(x)dx. \qquad \textbf{(14.39)}$$

Доказательство. **1)** Для произвольного (**неразмеченного**) разбиения τ отрезка $[a;b]$ рассмотрим ступенчатые фигуры P_τ и Q_τ, соответствующие нижней $\underline{S}_\tau(f)$ и верхней $\overline{S}_\tau(f)$ суммам Дарбу функции $f(x)$ для разбиения τ: $S(P_\tau)=\underline{S}_\tau(f)$ и $S(Q_\tau)=\overline{S}_\tau(f)$.

2) P_τ и Q_τ — многоугольники, причем P_τ вписан в криволинейную трапецию G, а Q_τ — описан около неё. Поэтому $P_\tau \subset G \subset Q_\tau$.

3) Непрерывная функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для **любого** разбиения τ отрезка $[a;b]$ с диаметром $|\tau|<\delta$ выполняется неравенство

$$0\leqslant \overline{S}_\tau(f)-\underline{S}_\tau(f)<\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 0\leqslant S(Q_\tau)-S(P_\tau)<\varepsilon, \qquad \textbf{(14.40)}$$

означающее, что криволинейная трапеция G — **квадрируемая фигура**, причём для её площади $S(G)$ справедливы неравенства:

$$\underline{S}_\tau(f)\equiv S(P_\tau)\leqslant S(G)\leqslant S(Q_\tau)\equiv \overline{S}_\tau(f). \qquad \textbf{(14.41)}$$

4) Единственное число, удовлетворяющее двойному неравенству

$$\underline{S}_\tau(f)\leqslant S(G)\leqslant \overline{S}_\tau(f) \qquad \textbf{(14.42)}$$

для любого разбиения τ отрезка $[a;b]$, равно $\int_a^b f(x)dx$, поэтому справедлива формула **(14.39)**. ■

Замечание 14.20. Теорема 14.18 (равенство **(14.39)**) выражает **геометрический смысл** определенного интеграла.

Замечание 14.21. Для **непрерывных** на отрезке $[a;b]$ функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, удовлетворяющих условию $f_2(x)\leqslant f_1(x)$, $x\in[a;b]$, рассмотрим фигуру $G_1=\{(x;y)\colon\ a\leqslant x\leqslant b,\ f_2(x)\leqslant y\leqslant f_1(x)\}$ (**рис. 14.10**),

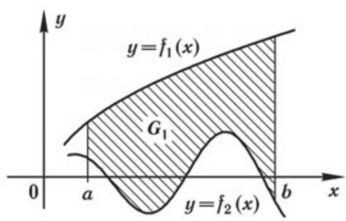

Рис. 14.10

также называемую **криволинейной трапецией.** Её площадь выражается формулой

$$S(G_1)=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \qquad \textbf{(14.43)}$$

Для случая $f_2(x)\geqslant 0,\ x\in[a;b]$, она очевидна, так как $S(G_1)$ равна разности площадей двух криволинейных трапеций:

$$G^*=\{(x;y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f_1(x)\}\quad \text{и}$$
$$G^{**}=\{(x;y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f_2(x)\}.$$

Если же условие $f_2(x)\geqslant 0$ выполняется не для всех $x\in[a;b]$, достаточно сдвинуть фигуру G_2 **вверх** вдоль оси Oy (параллельный перенос) на величину $h\geqslant\left|\inf\limits_{x\in[a;\,b]} f_2(x)\right|$ (чтобы неравенство $f_2(x)+h\geqslant 0$ выполнялось на всём отрезке $x\in[a;b]$). В результате переноса получится **равная** ей фигура

$$G_1^*=\{(x;y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant f_2(x)+h\leqslant y\leqslant f_1(x)+h\},$$

следовательно,

$$S(G_1)=\int_a^b ([f_1(x)+h]-[f_2(x)+h])\,dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx.$$

Замечание 14.22. Если **непрерывная** функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a;b]$, то область D, заключенная между графиком функции $y=f(x)$ и осью Ox, разрезается этой осью на конечное число криволинейных трапеций. На **рис. 14.11** таких трапеций **три**: D_1, D_2 и D_3.

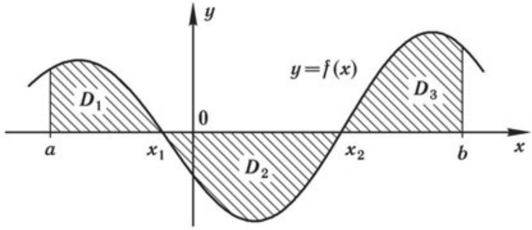

Рис. 14.11

а) В этом случае определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx=S(D_1)-S(D_2)+S(D_3) \qquad \textbf{(14.44)}$$

равен алгебраической сумме площадей этих криволинейных трапеций, причём площади этих трапеций, расположенных над осью Ox берут со знаком «$+$», а расположенных под осью Ox — со знаком «$-$».

б) Площадь области D равна сумме площадей этих трапеций и вычисляется по формуле

$$S(D)=S(D_1)+S(D_2)+S(D_3)=\int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла **рекомендуется**:

1°. Разбить отрезок $[a;b]$ на **частные** отрезки таким образом, чтобы на каждом из них функция $f(x)$ не меняла своего знака.

2°. Используя свойство **аддитивности** интеграла, представить $\int_a^b |f(x)|\,dx$ в виде суммы интегралов по этим **частным** отрезкам, а для вычисления каждого из них воспользоваться следующим правилом:

$$\int_c^d |f(x)|\,dx=\begin{cases}+\int_c^d f(x)dx, \text{ если } f(x)\geqslant 0 \text{ для любого } x\in[c;d];\\ -\int_c^d f(x)dx, \text{ если } f(x)\leqslant 0 \text{ для любого } x\in[c;d].\end{cases} \qquad \textbf{(14.45)}$$

Для приведённого примера имеем:

$$S=S_1+S_2+S_3=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^{x_1} f(x)dx-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{b} f(x)dx. \qquad \textbf{(14.46)}$$

Замечание 14.23. Площадь **криволинейной трапеции** следующего вида

$$G_2=\{(x;y)\colon\ c\leqslant x\leqslant d,\ \varphi_2(y)\leqslant x\leqslant\varphi_1(y)\},$$

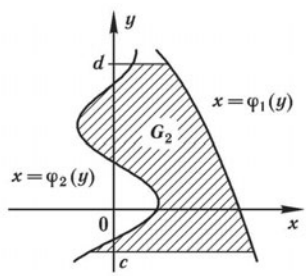

Рис. 14.12

где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ **непрерывные** на $[c;d]$ функции (**рис. 14.12**), вычисляются по формуле, аналогичной **(14.40)**:

$$S(G_2)=\int_c^d [\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]\,dy. \qquad \textbf{(14.47)}$$

Замечание 14.24. Более сложные фигуры (как правило) удаётся разрезать на **конечное** число фигур рассмотренных видов. Площадь всей фигуры равна сумме площадей всех частей, на которых она разрезана.

Замечание 14.25. Отметим **частный случай** применения формулы **(14.39)**. Пусть:

1) кривая, ограничивающая **сверху** криволинейную трапецию G (вида **(14.38)**), задана в параметрическом виде: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in[t_1\,;\,t_2]$;

2) $\varphi(t)$ **непрерывно дифференцируема** и **монотонна** на отрезке $t\in[t_1\,;\,t_2]$;

3) $\psi(t)$ **непрерывна** на отрезке $t\in[t_1\,;\,t_2]$;

4) $\varphi(t_1)=a$ и $\varphi(t_2)=b$.

Тогда (в результате **замены переменной в определенном интеграле**) формула **(14.39)** приобретает вид:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot d\varphi(t)=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)dt. \qquad \textbf{(14.48)}$$

Пример 14.9. Вычислить площадь круга $x^2+y^2\leqslant R^2$.

◄ **1 способ.** Площадь круга равна учетверённой площади криволинейной трапеции $x^2+y^2\leqslant R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Применяя формулу **(14.39)**, получим:

$$S=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\;dx=\left\|\begin{array}{c}\text{Подстановка (замена): } x=R\cos t,\ t=[0;\,\pi/2],\\ \sqrt{R^2-x^2}=R\sqrt{\sin^2 t}=R\,|\sin t|=R\sin t,\\ \begin{cases} x=R \Leftrightarrow t=0,\\ x=0 \Leftrightarrow t=\pi/2.\end{cases}\end{array}\right\|=$$

$$=4\int_{\pi/2}^{0}R\sin t\cdot d(R\cos t)=-4R^2\int_{\pi/2}^{0}\sin^2 t\;dt=4R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=2R^2\left(t\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)=\pi R^2.$$

2 способ. Рассмотрим верхнюю половину круга — криволинейную трапецию $x^2+y^2\leqslant R^2$, $y\geqslant 0$, и зададим в параметрическом виде дугу окружности, ограничивающую её сверху:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi]; \qquad \begin{cases} x = R \iff t = 0; \\ x = -R \iff t = \pi. \end{cases}$$

Площадь круга равна удвоенной площади этой трапеции. Применяя **формулы (14.39)** и **(14.48)**, получим

$$S = 2\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int_{\pi}^{0} R\sin t \cdot d(R\cos t) = \pi R^2$$

(здесь $y = f(x)$ — уравнение верхней дуги окружности). ►

2. Вычисление площади фигуры в полярных координатах

Наиболее важной после прямоугольной системы координат на плоскости является **полярная система координат**. Она состоит из:

1) некоторой точки O, называемой **полюсом**;

2) исходящего из неё луча OE — **полярной оси**;

3) масштабного отрезка (для измерения длин отрезков).

Для произвольной точки M на плоскости, не совпадающей с полюсом O, положим (**рис. 14.13**):

1) r — **расстояние** от точки M до точки O (длина отрезка OM);

2) φ — **угол**, на который необходимо повернуть луч OE для совмещения с лучом OM

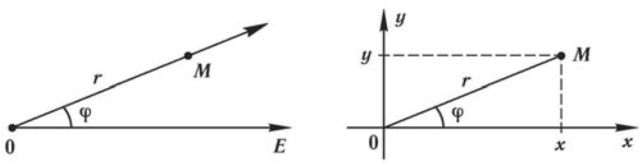

Рис. 14.13

(угол φ считается **положительным**, если поворот осуществляется **против хода** часовой стрелки и **отрицательным** в противоположном случае). Числа r и φ называют **полярными координатами** точки M и пишут $M(r;\varphi)$, при этом r называют **полярным радиусом** (**первая** полярная координата), а φ — **полярным углом** (**вторая** полярная координата).

Для получения всех точек плоскости достаточно ограничить полярные координаты промежутками:

$$\begin{cases} r \in [0; +\infty); \\ \varphi \in (-\pi; \pi] \text{ или } [0; 2\pi). \end{cases}$$

В этом случае каждой точке плоскости (**кроме** полюса O) соответствует **единственная** пара координат $(r;\varphi)$, и обратно. Иногда приходится рассматривать углы из **более широких диапазонов**.

Установим связь между полярными координатами $(r;\varphi)$ точки M и её прямоугольными декартовыми координатами $(x;y)$. Будем полагать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе O, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Очевидно, что

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \qquad \textbf{(14.49)}$$

Пусть **неотрицательная** функция $r(\varphi)$ **непрерывна** на отрезке $\varphi\in[\alpha;\beta]$. Тогда под **криволинейным сектором** будем понимать плоскую фигуру (**рис. 14.14**)

$$D=\{(r;\varphi):\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta,\ 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)\}, \qquad \textbf{(14.50)}$$

ограниченную **двумя лучами**, составляющими с полярной осью углы $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, и **непрерывной** кривой, заданной уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$.

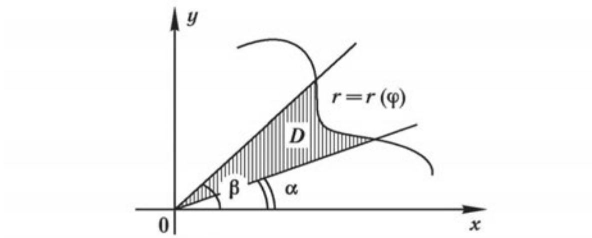

Рис. 14.14

Теорема 14.19. Пусть **неотрицательная** функция $r(\varphi)$ **непрерывна** на отрезке $\varphi\in[\alpha;\beta]$. Тогда **криволинейный сектор** D, заданный условиями **(14.50)**,

1) является **квадрируемой** фигурой;

2) его **площадь** можно вычислить по формуле

$$S(D)=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad \textbf{(14.51)}$$

Доказательство (аналогично доказательству **теоремы 14.4**).

1) Для произвольного разбиения $\boldsymbol{\tau}=\{\alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=\beta\}$ отрезка $[\alpha;\beta]$ рассмотрим ступенчатые секторы P_τ и Q_τ, определяемые условиями (**рис. 14.15**):

1°. P_τ — состоит из n круговых секторов вида

$$D_i^*=\{(r;\varphi):\ \varphi\in[\varphi_{i-1};\varphi_i],\ 0\leqslant r\leqslant r_i\},\ \text{где}\ r_i=\min_{\varphi\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]} r(\varphi),\ i=\overline{1,n}.$$

2°. Q_τ — состоит из n равных круговых секторов вида

$$D_i^{**} = \{(r;\varphi):\ \varphi\in[\varphi_{i-1};\varphi_i],\ 0\leqslant r\leqslant R_i\},\ \text{где } R_i = \max_{\varphi\in[\varphi_{i-1};\varphi_i]} r(\varphi),\ i=\overline{1,n}.$$

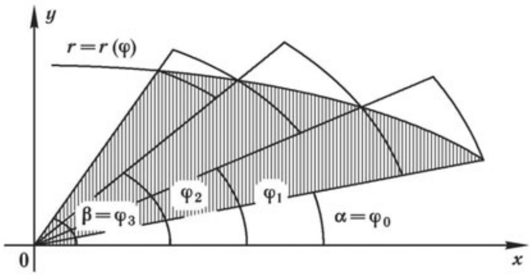

Рис. 14.15

Площади этих криволинейных секторов равны **нижней** $\underline{S}_\tau(f)$ и **верхней** $\overline{S}_\tau(f)$ **суммам Дарбу** для функции $f(\varphi)=\frac{1}{2}r^2(\varphi)$, соответствующих разбиению τ отрезка $[\alpha;\beta]$: $S(P_\tau)=\underline{S}_\tau(f)$, $S(Q_\tau)=\overline{S}_\tau(f)$ (см. **рис. 14.4** и **определение** сумм Дарбу).

2) Очевидно, что $P_\tau\subset G\subset Q_\tau$ (**рис. 14.15**).

3) Функция $f(\varphi)=\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ непрерывна, а, следовательно, интегрируема на отрезке $[\alpha;\beta]$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta= =\delta(\varepsilon)>0$, что для каждого разбиения τ отрезка $[\alpha;\beta]$ с диаметром $|\tau|<\delta$ выполняется неравенство

$$0\leqslant\overline{S}_\tau(f)-\underline{S}_\tau(f)<\varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 0\leqslant S(Q_\tau)-S(P_\tau)<\varepsilon, \qquad \textbf{(14.52)}$$

означающее, что криволинейный сектор D — **квадрируемая** фигура, площадь которой удовлетворяет неравенствам

$$\underline{S}_\tau(f)\equiv S(P_\tau)\leqslant S(D)\leqslant S(Q_\tau)\equiv\overline{S}_\tau(f). \qquad \textbf{(14.53)}$$

4) Единственное число $S(D)$, удовлетворяющее неравенствам **(14.53)** для любых разбиений τ отрезка $[\alpha;\beta]$ равно определенному интегралу

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi)\,d\varphi\equiv\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi,$$

поэтому справедлива **формула (14.51)**. ■

Пример 14.10. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $(a > 0)$.

◀ Фигура G симметрична относительно координатных осей. Вычислим площадь той её части, которая лежит в I четверти, — криволинейного сектора D (**рис. 14.16**), ограниченного лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$ и непрерывной кривой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in [0;\ \pi/4]$.

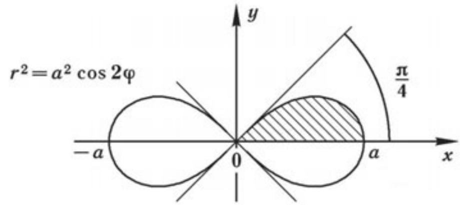

Рис. 14.16

$$S(D) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi\ d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

Следовательно, $S(G) = 4S(D) = a^2$. ▶

3. Вычисление длины плоской кривой

А. Понятие простой плоской кривой. Длина плоской кривой

Определение 14.14. Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — функции, **непрерывные** на отрезке $[a;b]$. Тогда геометрическое место точек (***ГМТ***) на плоскости Oxy, координаты которых определяются условием

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a;b], \qquad \textbf{(14.54)}$$

называют:

1) простой (плоской) **незамкнутой кривой** (заданной **параметрически**), если **разным** значениям параметра $t \in [a;b]$ (из **всего отрезка**) соответствуют **разные** точки $M(x;y)$ этой кривой (т.е. **нет кратных точек**); точки, соответствующие $t = a$ и $t = b$, называют **концевыми**;

2) простой (плоской) **замкнутой кривой** (заданной **параметрически**), если **разным** значениям параметра $t \in [a;b)$ (из **полуинтервала**) соответствуют **разные** точки $M(x;y)$ этой кривой, а **концевые точки** этой кривой (т.е. соответствующие значениям параметров $t = a$ и $t = b$) **совпадают**: $M(x(a);y(a)) = M(x(b);y(b))$.

Замечание 14.26. График **непрерывной** функции $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$, является простейшим примером **простой незамкнутой кривой** (здесь параметром является переменная x).

Примеры.

14.11. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$, — **простая незамкнутая** кривая — верхняя дуга окружности $x^2 + y^2 = 5^2$ (**рис. 14.17**). Здесь **параметр** t — это полярный угол.

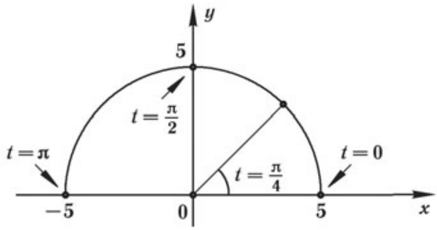

Рис. 14.17

14.12. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$, — **простая замкнутая** кривая — эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. (**рис. 14.18**).

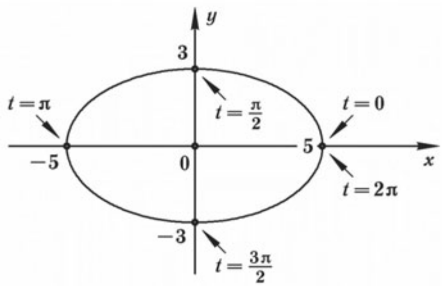

Рис. 14.18

14.13. $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$, — **простая незамкнутая** кривая — дуга синусоиды (**первая волна**) (**рис. 14.19**). В качестве параметра выступает абсцисса точки $M(x; y)$ кривой.

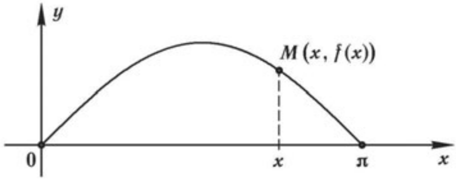

Рис. 14.19

Определение 14.15. Пусть выполняются следующие два условия:

1) Γ — **простая** (**замкнутая** или **незамкнутая**) кривая, заданная (**параметрически**) уравнениями (14.54);

2) $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ — **произвольное** разбиение отрезка $[a;b]$ на n частей и $|\tau| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta t_i = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (t_i - t_{i-1})$ — его **диаметр**.

Тогда: 1) этому **разбиению** τ соответствует **разбиение** кривой Γ точками $A = M_0$, M_1, ..., M_{n-1}, $M_n = B$, где $M_i = M(\varphi(t_i); \psi(t_i))$, $i = \overline{0, n}$, (**рис. 14.20**).

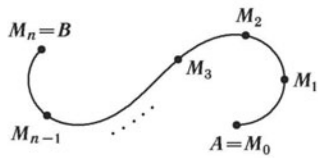

Рис. 14.20

2) Ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ (звеньями которой являются отрезки прямых $[M_{i-1}M_i]$, $i = \overline{1, n}$) назовём **вписанной** в кривую Γ. Обозначим длину ломаной символом

$$l_\tau = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i|, \qquad \textbf{(14.55)}$$

где $|M_{i-1}M_i|$ — длина отрезка $[M_{i-1}M_i]$:

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad \textbf{(14.56)}$$

Определение 14.16. Число l называется пределом длин l_τ ломаных (**вписанных** в Γ) при $|\tau| \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения τ отрезка $[a;b]$ с диаметром $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство

$$0 \leqslant l - l_\tau < \varepsilon.$$

Сформулируем определение предела длин ломаных в терминах последовательностей.

Определение 14.17. Число l называется пределом длин l_τ ломаных (**вписанных** в Γ) при $|\tau| \to 0$, если для любой последовательности $\{\tau_k\}$ разбиений отрезка $[a;b]$, диаметры $|\tau_k|$ которых стремятся к нулю при $k \to \infty$, справедливо равенство $l = \lim\limits_{k\to\infty} l_{\tau_k}$.

Теорема 14.20. Определения **14.16** и **14.17 эквивалентны**.
Без доказательства.

Б. Длина кривой, заданной параметрически

Теорема 14.21. Пусть выполняются следующие два условия:

1) **простая** кривая Γ задана **параметрически** уравнениями (14.54),
2) функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — **непрерывно дифференцируемы** на отрезке $[a;b]$.

Тогда: **1)** кривая Γ — **спрямляема**;

2) её **длина** может быть найдена по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} \cdot dt. \qquad \textbf{(14.57)}$$

Для доказательства нам понадобится следующее неравенство.

Неравенство.

$$\left|\sqrt{u^2+\alpha^2} - \sqrt{u^2+\beta^2}\right| \leqslant |\alpha - \beta| \qquad \textbf{(14.58)}$$

Доказательство неравенства.

$$\left|\sqrt{u^2+\alpha^2} - \sqrt{u^2+\beta^2}\right| = \frac{|\alpha^2-\beta^2|}{\sqrt{u^2+\alpha^2}+\sqrt{u^2+\beta^2}} \leqslant \frac{|\alpha-\beta|\,|\alpha+\beta|}{|\alpha|+|\beta|} \leqslant \frac{|\alpha-\beta|\cancel{(|\alpha|+|\beta|)}}{\cancel{(|\alpha|+|\beta|)}} = |\alpha-\beta|.$$

■

Доказательство теоремы 14.21. 1) Пусть $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ — **произвольное** разбиение отрезка $[a;b]$ и $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ — ломанная, **вписанная** в кривую Γ, соответствующая разбиению τ (см. опр. 14.15).

2) Длина этой ломаной равна следующей сумме

$$l_\tau = \sum_{i=1}^{n} |M_{i-1}M_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}. \qquad \textbf{(14.59)}$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ **непрерывно дифференцируемы** на отрезке $[a;b]$, поэтому на любом отрезке $[t_{i-1};t_i]$, $i = \overline{1,n}$, удовлетворяют теореме **Лагранжа**:

$\begin{cases} \text{существует такая точка } \xi_i \in (t_{i-1}; t_i), \text{ что } \varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \dot{\varphi}(\xi_i)\cdot\Delta t_i; \\ \text{существует такая точка } \eta_i \in (t_{i-1}; t_i), \text{ что } \psi(t_i)-\psi(t_{i-1}) = \dot{\psi}(\eta_i)\cdot\Delta t_i. \end{cases}$

Следовательно,

$$l_\tau = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\eta_i)}\cdot\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\cdot\Delta t_i +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\eta_i)}\cdot\Delta t_i - \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\cdot\Delta t_i\right) =$$

$$= \sigma_\tau(h, \overline{\xi}) + r_\tau(h, \overline{\xi}, \overline{\eta}),$$

где

$$h(t) = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t)+\dot{\psi}^2(t)}, \quad \overline{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad \overline{\eta} = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\},$$

$$\sigma_\tau(h, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\cdot\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} h(\xi_i)\cdot\Delta t_i,$$

$$r_\tau(h, \overline{\xi}, \overline{\eta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\eta_i)} - \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\right)\cdot\Delta t_i.$$

Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $h(x)$ **интегрируема** на этом отрезке, поэтому существует предел интегральных сумм

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(h, \overline{\xi}) = \int_a^b h(t)dt \equiv \int_a^b \sqrt{\dot{\varphi}^2(t)+\dot{\psi}^2(t)}\cdot dt.$$

3) Докажем, что $\lim\limits_{|\tau|\to 0} r_\tau(h, \overline{\xi}, \overline{\eta}) = 0$. Воспользуемся **неравенством (14.58)**:

$$\left|\sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\eta_i)} - \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\right| \leqslant \left|\dot{\psi}(\eta_i) - \dot{\psi}(\xi_i)\right|, \ i = \overline{1, n}.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из **непрерывности** $\dot{\psi}(t)$ на отрезке $[a;b]$ следует (по **лемме Кантора**) её **равномерная непрерывность** на этом отрезке. Поэтому для положительного числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ существует такое $\delta_1 = \delta(\varepsilon_1) > 0$, что для любых $t', t'' \in [a;b]$, удовлетворяющих условию $|t'-t''| < \delta_1$, выполняется неравенство $\left|\dot{\psi}(t') - \dot{\psi}(t'')\right| < \varepsilon_1$.

Следовательно, для любого разбиения τ отрезка $[a;b]$ с диаметром $|\tau| < \delta_1$ имеем:

$$\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}; t_i), \ i = \overline{1, n}, \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant |\eta_i - \xi_i| < \Delta t_i \leqslant |\tau| < \delta_1, \ i = \overline{1, n}, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|\dot{\psi}(\eta_i) - \dot{\psi}(\xi_i)\right| < \varepsilon_1, \ i = \overline{1, n}. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|r_\tau(h,\overline{\xi},\overline{\eta})\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\eta_i)} - \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\right)\cdot \Delta t_i\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\eta_i)} - \sqrt{\dot{\varphi}^2(\xi_i)+\dot{\psi}^2(\xi_i)}\right|\cdot \Delta t_i < \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_1\cdot\Delta t_i =$$

$$= \varepsilon_1 \cdot \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i = \frac{\varepsilon}{(b-a)}\cdot(b-a) = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Пример 14.14. Найти **длину** окружности $x^2+y^2=R^2$.

◀ Параметризуем заданную окружность, взяв в качестве параметра полярный угол t: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $t\in[0;\,2\pi]$, и по **формуле (14.57)** получим:

$$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}\,dt = R\int_0^{2\pi}dt = 2\pi R. \ ▶$$

B. Длина кривой в декартовых координатах

Теорема 14.22 (**следствие** теоремы 14.21). **Пусть** выполняются следующие два условия: **1)** функция $f(x)$ **непрерывно дифференцируема** на отрезке $[a;b]$; **2)** кривая Γ является графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a;b]$. **Тогда: 1)** кривая Γ **спрямляема**; **2) длину** Γ можно вычислить по формуле

$$l = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad \textbf{(14.60)}$$

Доказательство. Заметим, что кривую Γ можно параметризовать, взяв в качестве параметра переменную x: $\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \end{cases}$ $t\in[a;b]$. При этом все условия теоремы 14.21 выполняются. Поэтому:

1) кривая Γ **спрямляема**;

2) её длину можно вычислить по формуле (14.57), полагая в ней $\begin{cases} \varphi(t)\equiv t, \\ \psi(t)\equiv f(t), \end{cases}$ и заменяя в конце переменную интегрирования t на x:

$$l = \int_a^b\sqrt{\dot{\varphi}^2(t)+\dot{\psi}^2(t)}\ dt = \int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}\ dt = \int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\ dx. \ \blacksquare$$

Пример 14.15. Вычислить **длину** кривой Γ, заданной в **декартовой** системе координат уравнением $y=\operatorname{ch}x$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

◀ Применяя формулу (14.60), получаем

$$l=\int_0^2\sqrt{1+((\operatorname{ch}x)')^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx=\int_0^2\sqrt{\operatorname{ch}^2 x}\,dx=\int_0^2|\operatorname{ch}x|\,dx=\int_0^2\operatorname{ch}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sh}x\Big|_0^2=\operatorname{sh}2-\operatorname{sh}0=\operatorname{sh}2. \ ►$$

Г. Длина кривой в полярных координатах

Теорема 14.23 (**следствие** теоремы 14.21). Пусть выполняются следующие **два** условия:

1) функция $r(\varphi)$ **непрерывно дифференцируема** на отрезке $[\alpha;\beta]$;

2) кривая Γ задается в полярной системе координат уравнением $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$.

Тогда: **1)** кривая Γ **спрямляема**;

2) **длину** Γ можно вычислить по формуле

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+\dot r^2(\varphi)}\,d\varphi. \qquad \textbf{(14.61)}$$

Доказательство. Параметризуем кривую Γ, взяв в качестве параметра полярный угол φ. Для этого в формулы (14.49), выражающие декартовы координаты $(x;y)$ через полярные $(r;\varphi)$, подставим $r=r(\varphi)$:

$$\begin{cases}x=r(\varphi)\cdot\cos\varphi,\\ y=r(\varphi)\cdot\sin\varphi,\end{cases}\quad \varphi\in[\alpha;\beta].$$

При этом все условия теоремы 14.21 выполнены. Поэтому: **1)** кривая Γ **спрямляема**; **2)** её **длину** можно вычислить по формуле (14.57).

Проведём вспомогательные вычисления: $\begin{cases}\dot x=\dot r\cdot\cos\varphi-r\sin\varphi,\\ \dot y=\dot r\cdot\sin\varphi+r\cos\varphi,\end{cases}\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad \dot x^2+\dot y^2=(\underline{\dot r^2\cos^2\varphi}-\cancel{2\dot r r\cos\varphi\sin\varphi}+\underline{\underline{r^2\sin^2\varphi}})+$$

$$+(\underline{\dot r^2\sin^2\varphi}-\cancel{2\dot r r\sin\varphi\cos\varphi}+\underline{\underline{r^2\cos^2\varphi}})=\dot r^2+r^2. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\dot x^2(\varphi)+\dot y^2(\varphi)}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+\dot r^2(\varphi)}\,d\varphi. \ ►$$

Пример 14.16. Вычислить **длину** кривой Γ, заданной в **полярной** системе координат уравнением $r=2\sin\varphi$, $\varphi\in[0;\pi]$.

◄ Исходная кривая является окружностью (**рис. 14.21**):

$$r^2=2r\sin\varphi \iff x^2+y^2=2y \iff x^2+(y-1)^2=1.$$

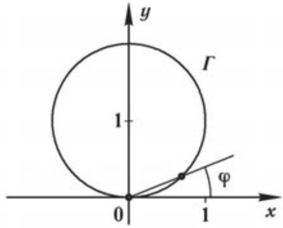

Рис. 14.21

Воспользуемся формулой **(14.61)**:

$$l = \int_0^{\pi} \sqrt{4\sin^2 \varphi + 4\cos^2 \varphi}\, dx = 2\int_0^{\pi} d\varphi = 2\pi. \ \blacktriangleright$$

§ 15. Несобственные интегралы

15.1. Несобственный интеграл на бесконечном промежутке (несобственный интеграл первого рода)

Определение 15.1. Пусть функция $f(x)$: **1)** определена на **бесконечном** полуинтервале $[a; +\infty)$, **2) интегрируема** на отрезке $[a; b]$ при любом $b \in [a; +\infty)$. Тогда **несобственным интегралом** (**первого рода**) от функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ назовём символ

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx, \qquad \textbf{(15.1)}$$

придавая ему следующий смысл.

1) Если существует **конечный** предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx = A$, то полагаем по определению $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx = A$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл **сходится** (к числу A).

2) В противном случае (т.е. когда указанный предел **равен** ∞ или **не существует**) говорят, что несобственный интеграл (**15.1**) **расходится**, и символу (**15.1**) **не приписывается** никакое числовое значение.

При этом символ $+\infty$ будем называть **особой точкой** несобственного интеграла первого рода.

Замечание 15.1. **Несобственный интеграл** (**первого** рода) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ с **особой точкой** $-\infty$ определяется аналогичным образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(15.2)}$$

Пример 15.1. Исследовать **сходимость** несобственного интеграла $J(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ в зависимости от параметра α.

◀ **1)** При $\alpha \neq 1$ имеем

$$J(\alpha) = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{b^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{1}{(1-\alpha)} \right] = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \alpha < 1; \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Следовательно, несобственный интеграл $J(\alpha)$ **сходится** при $\alpha > 1$ и **расходится** при $\alpha < 1$.

2) При $\alpha = 1$ имеем:

$$J(1) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \left(\ln|x| \Big|_{1}^{b} \right) = \lim_{b \to +\infty} (\ln b) = +\infty,$$

т.е. интеграл $J(1)$ **расходится**. ▶

15.2. Несобственный интеграл на конечном промежутке (несобственный интеграл второго рода)

Определение 15.2. Пусть функция $f(x)$: **1)** определена на **конечном** полуинтервале $[a;\omega)$, **2)** **интегрируема** на отрезке $[a;b]$ при любом $b \in [a;\omega)$. Тогда **несобственным интегралом** (**второго рода**) от функции $f(x)$ на промежутке $[a;\omega)$ назовём символ

$$\int\limits_{a}^{\omega} f(x)\,dx, \qquad \textbf{(15.3)}$$

придавая ему следующий смысл.

1) Если существует **конечный** предел

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = A, \qquad \textbf{(15.4)}$$

то полагаем по определению

$$\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega-0}\int\limits_a^{b} f(x)\,dx = A. \qquad \textbf{(15.5)}$$

В этом случае говорят, что **несобственный интеграл сходится** (к числу A).

2) В противном случае (т.е. когда указанный предел **равен** ∞ или **не существует**) говорят, что несобственный интеграл (**15.3**) **расходится** и символу (**15.3**) **не приписывается** никакое числовое значение.

При этом число ω будем называть **особой точкой** несобственного интеграла второго рода.

Замечание 15.2. Определение 15.2 несобственного интеграла (**15.3**) на конечном промежутке $[a;\omega)$ является содержательным лишь в случае, когда функция $f(x)$ **неограниченна** на интервале $(\omega-\delta;\omega)$ при любом $\delta>0$. В самом деле, если функция $f(x)$ **интегрируема** на отрезке $[a;b]$ при любом $b\in[a;\omega)$ и ограничена на $[a;\omega)$, то, доопределив эту функцию в точке ω, получим функцию, которая **интегрируема** по **Риману** на отрезке $[a;\omega]$. При этом **интеграл Римана** от **доопределённой** функции равен пределу (**15.4**) и **не зависит** от значения функции в точке ω. Поэтому в дальнейшем, рассматривая несобственный интеграл (**15.3**), будем считать, что функция $f(x)$ является **неограниченной** на интервале $(\omega-\delta;\omega)$ при любом $\delta>0$, а точку ω будем называть **особой точкой** подынтегральной функции $f(x)$ или интеграла (**15.3**).

Замечание 15.3. Несобственный интеграл (**второго** рода) от функции $f(x)$ на **конечном** промежутке $(\omega;a]$ с **особой точкой** ω определяется аналогичным образом: $\int\limits_{\omega}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\omega+0}\int\limits_a^{b} f(x)\,dx.$

Пример 15.2. Исследовать **сходимость** несобственного интеграла $I(\alpha)=\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ в зависимости от параметра α.

◄ При $\alpha>0$ подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ является неограниченной в каждой правой полуокрестности $U_{\delta}^{+}(0)\equiv(0;\delta)$ точки $\omega=0$, поэтому $I(\alpha)$ является несобственным интегралом **второго** рода с **особой точкой** $\omega=0$.

1) При $\alpha\neq1$ имеем:

$$I(\alpha)=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^1 x^{-\alpha}dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}\right|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha<1;\\ +\infty, & \text{если } \alpha>1.\end{cases}$$

Следовательно, несобственный интеграл $J(\alpha)$ **сходится** при $\alpha < 1$ и **расходится** при $\alpha > 1$.

2) При $\alpha = 1$ имеем: $I(1) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0} \left(\ln|x| \Big|_\varepsilon^1 \right) = -\lim\limits_{\varepsilon \to +0} (\ln \varepsilon) = +\infty$,

т.е. интеграл $I(1)$ **расходится**. ►

15.3. Несобственный интеграл с единственной особой точкой, расположенной на конце промежутка интегрирования

Поскольку вопрос о сходимости несобственного интеграла решается одинаково для несобственного интеграла **первого** и **второго** рода, то в дальнейшем мы будем рассматривать оба эти случая вместе, введя следующее основное определение.

Определение 15.3. Пусть функция $f(x)$: **1)** определена на **конечном** или **бесконечном** полуинтервале $[a;\omega)$, **2) интегрируема** на отрезке $[a;b]$ при любом $b \in [a;\omega)$. Тогда **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ на промежутке $[a;\omega)$ с **единственной** особой точкой ω назовём символ

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx, \tag{15.6}$$

придавая ему следующий смысл.

1) Если существует **конечный** предел

$$\lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_a^b f(x)\,dx = A, \tag{15.7}$$

то полагаем по определению

$$\int\limits_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b \to \omega - 0} \int\limits_a^b f(x)\,dx = A. \tag{15.8}$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл **сходится** (к числу A).

2) В противном случае (т.е. когда указанный предел **равен** ∞ или **не существует**) говорят, что несобственный интеграл (**15.6**) **расходится** и символу (**15.6**) **не приписывают** никакое числовое значение.

Замечание 15.4. Несобственный интеграл $\int\limits_\omega^b f(x)\,dx$ с **единственной** особой точкой ω, расположенной на **левом** конце промежутка интегрирования $(\omega;b]$, определяется аналогичным образом:

$$\int_{\omega}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to \omega+0} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Замечание 15.5. Далее (для определённости) будем считать, что **несобственность (особенность)** интеграла связана только с **верхним** пределом интегрирования. Случай, когда особенность интеграла связана с **нижним** пределом интегрирования, рассматривается аналогично.

Основные свойства несобственного интеграла

1°. Линейность. Если сходятся **несобственные** интегралы $\int_{a}^{\omega} f(x)\,dx$ и $\int_{a}^{\omega} g(x)\,dx$, то для любых чисел $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ **сходится** несобственный интеграл $\int_{a}^{\omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx$ и справедливо равенство

$$\int_{a}^{\omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_{a}^{\omega} f(x)\,dx + \mu \int_{a}^{\omega} g(x)\,dx. \tag{15.9}$$

Доказательство. Следует из **линейности** определённого интеграла:

$$\int_{a}^{\omega} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lim_{b \to \omega-0} \int_{a}^{b} [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx =$$

$$= \lim_{b \to \omega-0} \left(\lambda \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \mu \int_{a}^{b} g(x)\,dx \right) = \lambda \cdot \lim_{b \to \omega-0} \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \mu \cdot \lim_{b \to \omega-0} \int_{a}^{b} g(x)\,dx =$$

$$= \lambda \int_{a}^{\omega} f(x)\,dx + \mu \int_{a}^{\omega} g(x)\,dx. \ \blacksquare$$

2°. Аддитивность. Если определён (**сходится** или **расходится**) несобственный интеграл $J = \int_{a}^{\omega} f(x)\,dx$, **то** для каждого $c \in (a; \omega)$: **1)** определён несобственный интеграл $J_c = \int_{c}^{\omega} f(x)dx$;

2) оба интеграла J и J_c сходятся или расходятся **одновременно**;

3) в случае **сходимости** интегралов справедливо равенство:

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\omega} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(15.10)}$$

Доказательство. Следует из **аддитивности** определённого интеграла: для каждого $b \in (c; +\infty)$ справедливо равенство

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b} f(x)\,dx. \qquad \textbf{(15.11)}$$

Переходя к пределу при $b \to \omega - 0$, получаем утверждение **1)−3)** (рассматривая левую и правую части равенства (**15.11**) как функции переменной «b», замечаем, что средний интеграл не зависит от «b», поэтому является постоянной функцией переменной «b»). ■

3°. Формула замены переменной в несобственном интеграле. Пусть выполняются следующие **четыре** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на полуинтервале $[a; \omega)$;

2) функция $\varphi(t)$ **непрерывно дифференцируема** на полуинтервале $[\alpha; \gamma)$;

3) $\varphi(t)$ **строго монотонна** на $[\alpha; \gamma)$ ($\dot{\varphi}(t)$ знакопостоянна на $[\alpha; \gamma)$);

4) $\varphi(\alpha) = a$ и $\lim\limits_{\beta \to \gamma - 0} \varphi(\beta) = \omega$.

Тогда **определён** несобственный интеграл

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\,dt \qquad \textbf{(15.12)}$$

с **особой точкой** γ, причём справедливо равенство

$$\int_a^{\omega} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\,dt. \qquad \textbf{(15.13)}$$

Доказательство. 1) Существование **несобственного интеграла** (**15.12**) следует из **непрерывности** функции $f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)$ на полуинтервале $[\alpha; \gamma)$.

2) Формула (**15.13**) получается предельным переходом при $b \to \omega - 0$ из формулы замены переменой в определённом интеграле:

$$\int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)\,dt,$$

справедливой для любого $b \in (a; \omega)$. ■

4°. Формула интегрирования по частям в несобственном интеграле. Пусть выполняются следующие **два** условия: **1)** функции $u(x)$, $v(x)$ **непрерывно дифференцируемы** на полуинтервале $[a;\omega)$; **2)** существует **конечный** предел $\lim\limits_{b\to\omega-0} u(b)\cdot v(b)$.

Тогда: 1) интегралы $\int\limits_a^\omega u(x)\cdot v'(x)\,dx$ и $\int\limits_a^\omega u'(x)\cdot v(x)\,dx$ сходятся или расходятся **одновременно**;

2) в случае их сходимости справедливо равенство

$$\int\limits_a^\omega u(x)\,dv(x)=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^\omega-\int\limits_a^\omega v(x)\,du(x), \qquad \textbf{(15.14)}$$

где $u(x)\cdot v(x)\Big|_a^\omega=\lim\limits_{b\to\omega-0} u(b)\cdot v(b)-u(a)\cdot v(a)$.

Доказательство. Формула (**15.14**) получается предельным переходом при $b\to\omega-0$ из формулы интегрирования по частям в **определённом** интеграле:

$$\int\limits_a^b u(x)\,dv(x)=u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b v(x)\,du(x), \qquad \textbf{(15.15)}$$

справедливой для любого $b\in(a;\omega)$. Пункт **1)** теоремы является очевидным следствием формул (**15.14**) и (**15.15**). ■

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла

Теорема 15.1. Несобственный интеграл интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ (с **единственной** особой точкой ω) сходится **тогда и только тогда**, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $B=B(\varepsilon)\in(a;\omega)$, что для любой пары чисел b_1, b_2, удовлетворяющей условию $B<b_1<b_2<\omega$, справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon. \qquad \textbf{(15.16)}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt \quad (a<x<\omega)$ — интеграл с **переменным верхним пределом**. Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)\,dx$ (см. опр. 15.20) **эквивалентна** существованию конечного одностороннего предела $\lim\limits_{x\to\omega-0} F(x)$, что (согласно **критерию Коши** существования **конечного одностороннего** предела функции в точке) **равносильно** следующему утверждению: для любого $\varepsilon>0$ существует такая точка $B(\varepsilon)=B\in(a;\omega)$, что для любой пары чисел b_1 и b_2, удовлетворяющей условию $B<b_1<b_2<\omega$, выполняется неравенство

$$|F(b_2)-F(b_1)|<\varepsilon. \tag{15.17}$$

Поскольку $F(b_2)-F(b_1)=\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx$, то неравенство (**15.17**) равносильно неравенству (**15.16**). ■

Пример 15.3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$ или установить его **расходимость**.

◀ Подынтегральная функция $f(x)\equiv e^{-x}$ **непрерывна** на полуинтервале $[a;\omega)$, поэтому исходный несобственный интеграл имеет **единственную** особую точку $\omega=+\infty$ (несобственный интеграл 1-го рода).

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(e^0-e^{-b}\right)=e^0=1.$$

Таким образом, данный несобственный интеграл **сходится** (к 1). ▶

15.4. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сравнения несобственных интегралов

Теорема 15.2. Пусть выполняются следующие **два** условия: **1)** функция $f(x)$ **интегрируема** по Риману на любом отрезке $[a;b]\subset[a;\omega)$; **2)** $f(x)\geqslant 0$ для любых $x\in[a;\omega)$.

Тогда: 1) несобственный интеграл интеграл $J=\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ (с **единственной** особой точкой ω) сходится **тогда и только тогда**, когда функция $\Phi(x)=\int\limits_a^{x} f(t)\,dt$ **ограничена сверху** на полуинтервале $x\in[a;\omega)$;

2) в случае **сходимости** несобственного интеграла J неравенство

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx\leqslant J \qquad \textbf{(15.18)}$$

справедливо для **любого** $b\in[a;\omega)$.

Доказательство. 1) Сходимость несобственного интеграла J означает (согласно определению) существование конечного предела $\lim\limits_{b\to\omega-0}\Phi(b)$.

2) Поскольку $f(x)\geqslant 0$ при $x\in[a;\omega)$, то для произвольной пары чисел x_1, x_2, удовлетворяющих условию $a\leqslant x_1<x_2<\omega$, выполняется неравенство $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt\geqslant 0$, означающее, что функция $\Phi(x)$ **не убывает** на полуинтервале $[a;\omega)$.

3) По теореме о пределе **монотонной** функции существование конечного предела $\lim\limits_{b\to\omega-0}\Phi(b)$ от **неубывающей** функции $\Phi(x)$ **равносильно** ограниченности сверху этой функции на полуинтервале $[a;\omega)$.

4) Фиксируем произвольное $b\in[a;\omega)$. Из п. 2) настоящего доказательства следует, что для любой точки $c\in[b;\omega)$ справедливо неравенство $\Phi(b)\leqslant\Phi(c)$. Поэтому неравенство (**15.18**) является следствием теоремы о предельном переходе в неравенстве:

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx=\Phi(b)\leqslant\lim_{c\to\omega-0}\Phi(c)=\int\limits_a^{\omega} f(x)dx. \ \blacksquare$$

Теорема 15.3 (первый признак сравнения). Пусть выполняются следующие **два** условия: **1)** определены несобственные интегралы $J_1=\int\limits_a^{\omega} g(x)\,dx$ и $J_2=\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ (с **единственной** особой точкой ω); **2)** для любого $x\in[a;\omega)$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant g(x) \leqslant f(x). \qquad \textbf{(15.19)}$$

Тогда: 1) из **сходимости** несобственного интеграла J_2 следует **сходимость** несобственного интеграла J_1;

2) из **расходимости** несобственного интеграла J_1 следует **расходимость** несобственного интеграла J_2.

Доказательство №1. 0) Проинтегрировав неравенство (**15.19**) на произвольном отрезке $[a;b] \subset [a;\omega)$, получим оценку для интегралов:

$$0 \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx,$$

справедливую для любого $b \in [a;\omega)$.

1) Пусть **сходится** несобственный интеграл J_2 (с **единственной** особой точкой ω). Согласно **теореме 15.25** и **пункту 0)** для любого $b \in [a;\omega)$ справедлива следующая оценка

$$0 \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^\omega f(x)\,dx < +\infty,$$

означающая, что функция $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ **ограничена сверху** на полуинтервале $x \in [a;\omega)$. Поэтому (согласно **теореме 15.25**) несобственный интеграл J_1 **сходится**.

2) Пусть **расходится** несобственный интеграл J_1. Для несобственного интеграла J_2 существуют лишь **две возможности**: либо J_2 сходится, либо J_2 расходится. Первая из возможностей противоречит (уже доказанному) п. 1) этой теоремы. Следовательно, несобственный интеграл J_2 **расходится**.

■

Доказательство №2. 0) Проинтегрируем неравенство (**15.19**) на произвольном отрезке $[b_1;b_2] \subset [a;\omega)$ (здесь $b_1 < b_2$). В результате получим следующие оценки для интегралов:

$$0 \leqslant \int_{b_1}^{b_2} g(x)dx \leqslant \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \left|\int_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| \leqslant \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|, \qquad \textbf{(15.20)}$$

справедливые для любых $b_1 < b_2$ из полуинтервала $[a;\omega)$.

1) Пусть **сходится** несобственный интеграл J_2 (с **единственной** особой точкой ω). Согласно **критерию Коши** (сходимости несобственного интеграла), это равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число

$B = B(\varepsilon) \in (a;\omega)$ такое, что для любой пары чисел b_1, b_2, удовлетворяющей условию $B < b_1 < b_2 < \omega$, справедливо неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$, а следовательно (см. оценку (**15.20**)) и неравенство $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)dx\right| < \varepsilon$, означающее, что **условие Коши** (сходимости несобственного интеграла) выполняется для интеграла J_1, причём с тем же самым $B = B(\varepsilon)$. То есть несобственный интеграл J_1 **сходится**.

2) Пусть теперь несобственный интеграл J_1 расходится. Для несобственного интеграла J_2 существуют лишь **две** возможности: либо J_2 сходится, либо J_2 расходится. Первая из возможностей противоречит уже доказанному п. 1) этой теоремы. Следовательно, несобственный интеграл J_2 **расходится**. ■

Замечание 15.6. Утверждения **теоремы 15.3** остаются справедливыми при следующем ослаблении условия **2)** теоремы: неравенство $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ выполняется на полуинтервале $[c;\omega)$ для некоторого $c \in [a;\omega)$. Для доказательства достаточно применить **теорему 15.3** к паре несобственных интегралов $J_1^* = \int\limits_c^{\omega} g(x)\,dx$ и $J_2^* = \int\limits_c^{\omega} f(x)\,dx$, а затем воспользоваться свойством аддитивности несобственного интеграла, согласно которому:

1) J_1 и J_1^* сходятся или расходятся **одновременно**;

2) J_2 и J_2^* сходятся или расходятся **одновременно**.

Замечание 15.7. Сравнение исследуемых **несобственных интегралов** обычно производится с табличными интегралами или с теми интегралами, для которых легко устанавливается их сходимость или расходимость. Например,

$$\text{1) } \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}},\quad \text{2) } \int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}},\quad \text{3) } \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^{\alpha} x},\quad \text{4) } \int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\ln^{\alpha} x},\quad \text{5) } \int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^{\alpha} x},\quad \text{6) } \int\limits_1^{+\infty} e^{-\beta x}dx.$$

Пример 15.4. Исследовать **сходимость** несобственного интеграла (1-го рода)

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^4+5x^2+1}}dx.$$

◀ **1)** Проведём оценку подынтегральной функции на промежутке интегрирования $[2;\,+\infty)$:

$$0<g(x)\equiv\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x^4+5x^2+1}}\leqslant\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^4}}\equiv\frac{x^{1/3}}{x^2}\equiv\frac{1}{x^{5/3}}\equiv f(x)\text{ для всех }x\in[2;\,+\infty).$$

2) Несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x^{5/3}}$ — сходится (см. **пример 15.1**), так как показатель степени $\alpha=\frac{5}{3}>1$.

3) Несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} g(x)\,dx$ **сходится** (**первый** признак сравнения). ▶

Теорема 15.4 (второй признак сравнения — в предельной форме). Пусть выполняются следующие **три** условия: **1) определены** несобственный интеграл $J_1=\int\limits_a^{\omega} g(x)\,dx$ и $J_2=\int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$ (с **единственной** особой точкой ω); **2)** всюду на полуинтервале $[a;\omega)$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)>0; \end{cases}\tag{15.21}$$

3) существует следующий предел

$$\lim_{x\to\omega-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda,\tag{15.22}$$

причём $0<\lambda<+\infty$.

Тогда интегралы J_1 и J_2 **сходятся** или **расходятся одновременно**.

Доказательство. 1) Из существования предела (**15.22**) следует, что для $\varepsilon=\frac{\lambda}{2}>0$ существует такая точка $c\in[a;\omega)$, для которой при всех $x\in[c;\omega)$ выполняются неравенства:

$$\lambda-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<\lambda+\varepsilon\quad\Leftrightarrow\quad 0<\frac{\lambda}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<\frac{3\lambda}{2}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 0<\frac{\lambda}{2}\cdot g(x)<f(x)<\frac{3\lambda}{2}\cdot g(x)\tag{15.23}$$

(домножение неравенства на функцию $g(x)$ является **равносильным** преобразованием, так как $g(x)>0$ для всех $x\in[c;\omega)$).

2) Для доказательства **теоремы 15.4** (согласно свойству **аддитивности** несобственного интеграла) достаточно доказать, что **одновременно сходятся** или **расходятся** интегралы $J_1=\int\limits_c^{\omega} g(x)\,dx$ и $J_2=\int\limits_c^{\omega} f(x)\,dx$ (см. **замечание 15.7** к **теореме 15.3**).

3) Воспользуемся свойством **линейности** несобственного интеграла и **первым признаком сравнения** (**теорема 15.3**):

3.1) если **сходится** $\int\limits_c^{\omega} g(x)\,dx$, то **сходится** $\int\limits_c^{\omega} \frac{3\lambda}{2}g(x)\,dx$, и, благодаря неравенству (**15.23**), несобственный интеграл $\int\limits_c^{\omega} f(x)\,dx$;

3.2) если **сходится** $\int\limits_c^{\omega} f(x)\,dx$, то (благодаря **неравенству (15.23)**) **сходится** несобственный интеграл $\int\limits_c^{\omega} \frac{\lambda}{2}g(x)\,dx$, а, следовательно, и $\int\limits_c^{\omega} g(x)\,dx$.

Таким образом, в пункте **3)** мы доказали, что несобственные интегралы J_1 и J_2 **сходятся** или **расходится одновременно**. ■

Пример 15.5. Исследовать **сходимость** несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

◀ **1)** Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ **непрерывна** на полуинтервале $(0;1]$ и **неограниченна** в любой окрестности точки $\omega=0$. Следовательно исходный интеграл является **несобственным интегралом 2-го рода** (с **единственной** особой точкой $\omega=0$).

2) Поскольку $f(x)\equiv\frac{1}{\sin x}\sim\frac{1}{x}\equiv g(x)$ при $x\to 0$, причем $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$ для всех $x\in(0;1]$, то несобственные интегралы $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ и $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ **сходятся** или **расходятся одновременно** (**II** признак сравнения).

3) Как установлено ранее (**примере 15.18)**, несобственный интеграл $\int\limits_0^1 g(x)\,dx \equiv \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ **расходится**, поэтому **расходится** и несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$. ►

15.5. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

В этом пункте $J = \int\limits_a^{\omega} f(x)\,dx$, $\widetilde{J} = \int\limits_a^{\omega} |f(x)|\,dx$ — **несобственные** интегралы с **единственной особой** точкой ω.

Теорема 15.5. Из сходимости несобственного интеграла $\widetilde{J}$ следует сходимость несобственного интеграла J.

Доказательство. Пусть **сходится** несобственный интеграл $\widetilde{J}$. Тогда:

1) сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{\omega} 2|f(x)|\,dx$ (свойство линейности несобственного интеграла);

2) сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^{\omega} (f(x)+|f(x)|)\,dx$ (**I признак сравнения**), поскольку $0 \leqslant f(x)+|f(x)| \leqslant 2|f(x)|$, $x \in [a;\omega)$;

3) сходится несобственный интеграл J (свойство линейности несобственного интеграла), так как

$$J \equiv \int\limits_a^{\omega} f(x)dx \equiv \int\limits_a^{\omega} [(f(x)+|f(x)|)-|f(x)|]dx \equiv$$

$$\equiv \underbrace{\int\limits_a^{\omega} (f(x)+|f(x)|)dx}_{\textbf{сходится}} - \underbrace{\int\limits_a^{\omega} |f(x)|\,dx}_{\textbf{сходится}}. \blacksquare$$

Определение 15.4. Несобственный интеграл J называется:

1) абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл $\widetilde{J}$;

2) условно сходящимся, если J — сходится, а $\widetilde{J}$ — расходится.

Замечание 15.8. Теорема 15.5 утверждает, что из **абсолютной** сходимости несобственного интеграла следует его (**обычная**) сходимость.

Пример 15.6. Исследовать **сходимость** несобственного интеграла $J = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$. Установить **тип сходимости**.

◀ **1)** Очевидно, что $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}} \equiv \frac{1}{x^{3/2}}$ для любого $x \geqslant 1$.

2) Несобственный интеграл $J_1 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ **сходится** (см. **пример 15.1**), так как показатель степени $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

3) Несобственный интеграл $J_2 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\,dx$ **сходится** (**I** признак сравнения), следовательно исходный несобственный интеграл J **сходится абсолютно**. ▶

Признаки **сравнения** позволяют устанавливать **абсолютную** сходимость (или расходимость) несобственных интегралов. Приведём признак сходимости, пригодный для установления **условной** сходимости несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема 15.6 (признак Дирихле). Пусть выполняются следующие **три** условия:

1) функция $f(x)$ **непрерывна** на полупрямой $x \in [a; +\infty)$ и имеет на ней **ограниченную** первообразную $F(x)$;

2) функция $g(x)$ **непрерывно дифференцируема** на $[a; +\infty)$;

3) функция $g(x)$ **не возрастает** на $[a; +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тогда несобственный интеграл 1-го рода $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ **сходится**.

Доказательство. 1) Ограниченность первообразной $F(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ означает существование такого числа $M > 0$, для которого неравенство $|F(x)| \leqslant M$ выполняется при любом $x \in [a; +\infty)$.

2) Поскольку $g(x) \downarrow 0$ при $x \to +\infty$ (на полупрямой $x \in [a; +\infty)$), то

$$\begin{cases} g'(x) \leqslant 0; \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{для } x \in [a; +\infty).$$

Следовательно, $|g'(x)| \equiv -g'(x),\ x \in [a; +\infty)$.

3) Пусть числа b_1, b_2 удовлетворяют условию $a < b_1 < b_2 < +\infty$. Применим к определённому интегралу $I = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x) g(x)\, dx$ формулу интегрирования по частям:

$$I = \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x) g(x)\, dx = \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x)\, d(F(x)) = g(x) \cdot F(x) \Big|_{b_1}^{b_2} - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x)\, d(g(x)) =$$

$$= F(b_2) g(b_2) - F(b_1) g(b_1) - \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x) g'(x)\, dx.$$

4) Оценим интеграл I:

$$|I| = \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x) g(x) dx \right| \leqslant |F(b_2) g(b_2)| + |F(b_1) g(b_1)| + \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x) g'(x) dx \right|$$

а) $|F(b_2) g(b_2)| + |F(b_1) g(b_1)| \leqslant M \cdot g(b_2) + M \cdot g(b_1) \leqslant$

$$\leqslant M \cdot g(b_1) + M \cdot g(b_1) = 2M \cdot g(b_1).$$

б) $\left| \int\limits_{b_1}^{b_2} F(x) g'(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_{b_1}^{b_2} |F(x) g'(x)| dx \leqslant M \cdot \int\limits_{b_1}^{b_2} |g'(x)| dx =$

$$= -M \cdot \int\limits_{b_1}^{b_2} g'(x)\, dx = -M \cdot g(x) \Big|_{b_1}^{b_2} = M \cdot [g(b_1) - g(b_2)] \leqslant M \cdot g(b_1).$$

в) Таким образом, $|I| \leqslant 2M \cdot g(b_1) + M \cdot g(b_1) = 3M \cdot g(b_1)$.

5) Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из равенства $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ следует, что для $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3M} > 0$ существует такое число $B = B(\varepsilon_1) \in [a; +\infty)$, что неравенство $|g(x)| < \varepsilon_1$ выполняется для любого $x > B$. Поэтому для любой пары чисел b_1, b_2, удовлетворяющей условию $B < b_1 < b_2 < +\infty$, справедлива оценка:

$$|I| = \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x) g(x) dx \right| \leqslant 3M \cdot g(b_1) < 3M \cdot \varepsilon_1 = 3M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon,$$

означающая, что несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x) g(x)\, dx$ **сходится** по **критерию Коши**. ■

Пример 15.7. Исследовать сходимость **несобственных** интегралов **1-го рода** $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$, где $a>0$.

◀ **а)** Для первого из этих несобственных интегралов проверим условия **признака Дирихле**.

1°. Функция $f(x)\equiv\sin x$ **непрерывна** на полупрямой $[a;+\infty)$, а её первообразная $F(x)\equiv-\cos x$ **ограничена** на этой полупрямой.

2°. Функция $g(x)\equiv\frac{1}{x}$ **непрерывно дифференцируема** на $[a;+\infty)$.

3°. $g(x)\downarrow 0$ при $x\to+\infty$ (на полупрямой $x\in[a;+\infty)$).

Следовательно, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)g(x)\,dx\equiv\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ **сходится** (признак **Дирихле**).

б) Аналогично доказывается **сходимость** несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ (при $a>0$). ▶

Пример 15.8. Установить **тип** сходимости несобственного интеграла $J=\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ $(a>0)$.

◀ Исследуем сходимость несобственного интеграла

$$\tilde{J}=\int\limits_a^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\equiv\int\limits_a^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

с помощью **I признака сравнения**. Очевидно, что:

1) $\frac{\sin^2 x}{x}\leqslant\frac{|\sin x|}{x}$ для любого $x\geqslant a>0$.

2) $J_1=\int\limits_a^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\int\limits_a^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}dx=\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{2x}-\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$, следовательно, несобственный интеграл J_1 **расходится** как разность **расходящегося** и **сходящегося** несобственных интегралов (см. **пример 15.7**). Следовательно, несобственный интеграл $\tilde{J}$ **расходится** (**I признак сравнения**) и исходный несобственный интеграл J **сходится условно.** ▶

ПРИЛОЖЕНИЯ

Варианты контрольных работ

Контрольная работа 1

Вариант 1

Найдите пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-\sqrt{3-x}}{x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+1}{5x^3+2x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 4x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

Вариант 2

Найдите пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x+8}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 6x)\operatorname{ctg}^2 5x$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

Вариант 3

Найдите пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 7x}{1-\cos 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+1}{2x+4}\right)^{7x}$.

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0=2$:

$$f(x)=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1).$$

2. Найти $y'''(0)$, если $y(x)=e^{2x}\sin 3x$.

3. Для функции $f(x)=(1-x)\log_3(x-1)$ найдите промежутки возрастания и убывания, а также укажите точки локальных экстремумов.

4. На отрезке $[-2;\ 0]$ найти наименьшее $y_{\text{нм}}$ и $y_{\text{нб}}$ наибольшее значение функции $y=\frac{2x-1}{x^2+2}$.

5. Для функции $f(x)=\frac{x+1}{(x+2)^2}$ найдите промежутки выпуклости (выпуклости вниз), вогнутости (выпуклости вверх), а также укажите точки перегиба.

6. Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\frac{4x^2+3x-3}{x+4}$.

Вариант 2

1. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0=2$:

$$f(x)=6\cdot 2^{x-2}-x^3+3x^2-6x.$$

2. Найти $y''(0)$, если $y(x)=2^{\sin x}\cos(\sin x)$.

3. Для функции $f(x)=(1-x)\ln(x-1)$ найдите промежутки возрастания и убывания, а также укажите точки локальных экстремумов.

4. На отрезке $[-1;\ 1]$ найти наименьшее $y_{\text{нм}}$ и $y_{\text{нб}}$ наибольшее значение функции $y=\frac{x+1}{e^2}$.

5. Для функции $f(x)=x^2e^{2/x}$ найдите промежутки выпуклости, а также укажите точки перегиба.

6. Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\frac{x^3-3x}{x^2-1}$.

Контрольная работа 3

Вариант 1

Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int\left(2x^3+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^2}+7^{3x}+5\right)dx.$

2. $\int\frac{\sin 3x\,dx}{\sqrt{3-2\cos 3x}}.$

3. $\int(3-2x)e^{2x+1}dx.$

4. $\int\frac{x^2+4x+7}{(x-2)(x+1)^2}dx.$

5. $\int\frac{(3-2x)\,dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}.$

Вариант 2

Найдите неопределенные интегралы:

1. $\int\left(2\cos x-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x^2-4}\right)dx.$

2. $\int\frac{dx}{2x+3x\ln x}.$

3. $\int(3x+5)e^{2x-3}dx.$

4. $\int\frac{x^2-2}{(x+3)(x+1)^2}dx.$

5. $\int\sin^3 2x\cos^2 2x\,dx.$

Вариант 3

Вычислить неопределенные интегралы:

1. $\int\frac{4x^3-5x^2-2x+9}{x^3}dx.$

2. $\int\frac{\sin x}{7+\cos^2 x}dx.$

3. $\int(3x+2)\sin 7x\,dx.$

4. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx.$

5. $\int \frac{x^4-2x^3-4x^2+30x-27}{x^2+x-6}\,dx.$

Контрольная работа 4

Вариант 1

1. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,(1+\cos x)\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}};$ б) $\int\limits_0^2 \arcsin\frac{x}{4}\,dx.$

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x\,\sin(1/x)}{3x+\sqrt[5]{x}+4}\,dx.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y=\cos x\sin 2x,\quad y=0\quad \left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Найтидлину дуги, заданной уравнением в полярной системе координат: $\rho=2\cos^3\frac{\varphi}{3},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$

Вариант 2

1. Вычислить определённые интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{3+\sqrt{4-3x}};$ б) $\int\limits_0^1 (3x^2-2)\operatorname{ch}2x\,dx.$

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{e^{3/x}-1}{\sqrt[3]{2x^4+3x+5}}\,dx.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат:

$$\rho=1-\sin 2\varphi.$$

4. Найти длину дуги, заданной уравнением в декартовой системе координат: $y=\ln(1-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

Вариант 3

1. Вычислить определённые интегралы:

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}\,dx}{e^x+3}$; б) $\displaystyle\int\limits_0^1(1-x^2)\operatorname{sh}2x\,dx$.

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int\limits_3^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^5-\ln x}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$y=\frac{1}{1+\sqrt{x}},\quad y=0,\quad x=0,\quad x=1.$$

4. Найтидлину дуги, заданной параметрически:

$$\begin{cases}x=e^{2t}\sin t,\\ y=e^{2t}\cos t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

1. Множества. Основные понятия. Операции над множествами.
2. Основные числовые множества. Окрестность точки.
3. Ограниченные и неограниченные множества.
4. Точные грани числовых множеств. Существование точных граней у ограниченных множеств (без доказательства).
5. Числовые последовательности. Ограниченные, неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Примеры.
6. Ограниченность бесконечно малой последовательности.
7. Связь бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей.
8. Свойства бесконечно малых последовательностей: сумма бесконечно малых последовательностей.
9. Свойства бесконечно малых последовательностей: произведение ограниченной и бесконечно малой последовательностей; произведение бесконечно малых последовательностей.

10. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями (привести доказательство только для алгебраической суммы двух сходящихся последовательностей).
12. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями (привести доказательство только для произведения двух сходящихся последовательностей).
13. Свойства сходящихся последовательностей: предельный переход в неравенствах; теорема о промежуточных значениях.
14. Монотонные последовательности. Признак Вейерштрасса сходимости монотонной последовательности.
15. Лемма Кантора о вложенных отрезках (доказательство существования).
16. Подпоследовательности. Частичные пределы. Связь предела последовательности с частичными пределами.
17. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
18. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности (доказательство только необходимости).
19. Числовые функции. Способы задания функции.
20. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне. Эквивалентность двух определений (без доказательства).
21. Свойства пределов функций, связанные с арифметическими операциями.
22. Свойства пределов функций, связанные с предельным переходом в неравенствах. Теорема о промежуточных значениях.
23. Локальная ограниченность функций, имеющих предел. Критерий Коши существования предела функции (доказательство только необходимости).
24. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между ними.
25. Сравнение функций. Символ $\overline{o}$.
26. Эквивалентные функции. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.
27. Непрерывность функции в точке. Примеры непрерывных функций. Доказательство непрерывности функции $\sin x$.
28. Точки разрыва функции и их классификация.
29. Локальные свойства непрерывных функций: устойчивость знака непрерывной функции.
30. Арифметические свойства непрерывных функций.
31. Непрерывность сложной функции.

32. Замечательные пределы (доказательство только для первого замечательного предела).
33. Первая теорема Вейерштрасса.
34. Теорема Коши о нуле непрерывной функции.
35. Существование и непрерывность обратной функции (без док-ва).
36. Определение производной. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали.
37. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал функции. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции.
38. Производная суммы, разности, произведения и частного.
39. Производная обратной функции.
40. Производная сложной функции.
41. Производные высших порядков.
42. Локальный экстремум. Теорема Ферма.
43. Теорема Ролля.
44. Формула конечных приращений Лагранжа.
45. Формула конечных приращений Коши.
46. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (без доказательства). Формулы Маклорена некоторых элементарных функций.
47. Локальный экстремум функции. Необходимое и первое достаточное условия локального экстремума.
48. Выпуклость функции. Достаточное условие выпуклости кривой.
49. Точки перегиба. Необходимое условие для точки перегиба (без док-ва). Достаточное условие существования точки перегиба.
50. Асимптоты графика функции. Схема построения графика функции.
51. Первообразная функции и её свойства. Определение неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов.
52. Основные свойства неопределённого интеграла.
53. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
54. Определение определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости.
55. Суммы Дарбу и их свойства.
56. Интегрируемость непрерывных функций.
57. Линейность определенного интеграла.
58. Аддитивность определенного интеграла.
59. Интегрируемость функции на любом отрезке, принадлежащем отрезку интегрируемости этой функции.
60. Интегрируемость модуля интегрируемой функции.
61. Оценка интеграла от положительной функции и её следствие.

62. Оценка модуля интеграла.
63. Теорема о среднем значении для определенного интеграла.
64. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Непрерывность интеграла по верхнему пределу.
65. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу интегрирования.
66. Формула Ньютона-Лейбница.
67. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.
68. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах.
69. Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически.
70. Длина кривой в декартовых и полярных координатах.
71. Несобственный интеграл первого рода. Критерий Коши сходимости.
72. Свойства несобственного интеграла.
73. Первый признак сравнения для несобственных интегралов.
74. Второй признак сравнения для несобственных интегралов.
75. Абсолютная и условная сходимость интегралов. Сходимость абсолютно сходящегося интеграла в обычном смысле.

ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Вычислить предел последовательности.
2. Вычислить предел функции.
3. Доказательство предела по определению.
4. Доказательство непрерывности функции по определению.
5. Сравнение бесконечно малых функций.
6. Вычислить производную функции.
7. Доказательство существования производной по определению.
8. Вычислить производные высших порядков.
9. Найти уравнение касательной и нормали к графику функции в данной точке.
10. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
11. Исследовать функцию на локальный экстремум. Найти промежутки монотонности функции.
12. Найти промежутки выпуклости функции. Найти точки перегиба функции и касательные к графику функции в этих точках.
13. Исследовать функцию и построить график.
14. Вычисление неопределённых интегралов.
15. Вычисление определённых интегралов.
16. Исследование несобственных интегралов на сходимость.

Образцы вариантов письменного экзамена

Вариант 1

1. Найдите пределы функций: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-5x^3-1}{6x^4-4x^5+5}$.; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos 2x}$.

2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0=2$:

$$f(x)=x^2-4x-(x-2)\ln(x-1).$$

3. Для функции $f(x)=(x+6)\log_5(-6-x)$ найдите промежутки монотонности, а также точки локальных экстремумов.

4. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{x^2+6x+5}$; **б)** $\int(2x+1)\cos(3x-5)dx$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$y=x^2$ и $y=2-|x|$.

Вариант 2

1. Найдите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-2x-3}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(2x-1)-\ln(2x-3)]$.

2. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0=-1$:

$$f(x)=\sin^2(x+1)+x^2+2x.$$

3. Найдите асимптоты графика функции $f(x)=\frac{4x^2+3x-3}{x+4}$.

4. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$; **б)** $\int x^3\lg x\,dx$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямыми $x=0$ и $x=2$.

Образцы вариантов устного экзамена

Вариант 1

1. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.

2. Производная обратной функции.

3. Вычислить площадь области, заданной в полярной системе координат:

$$r = \cos \varphi.$$

Вариант 2

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

2. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

3. Вычислить производную функции:

$$y = \sqrt[5]{3-\cos 4x}\ \operatorname{arctg}^3 [2x - \ln (3x)].$$

Вариант 3

1. Формула конечных приращений Лагранжа.

2. Второй признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

3. Вычислить предел функции: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt[3]{5x-2}-2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Игнатьева, Н.У.** Математический анализ. Пределы и дифференцирование: учебное пособие по курсу «Математический анализ» / **Н.У. Игнатьева, М.Ф. Черепова, А.А. Симушев, А.М. Бирюков, И.А. Боровиков**, Нац. исслед. ун-т «МЭИ» (НИУ «МЭИ»). — М.: Изд-во МЭИ, 2018.

2. **Игнатьева, Н.У.** Математический анализ. Интегралы: задачник по курсу «Математический анализ» / **Н.У. Игнатьева, М.Ф. Черепова, А.А. Симушев, А.М. Бирюков, О.Н. Булычева**, Нац. исслед. ун-т «МЭИ» (НИУ «МЭИ»). — М.: Изд-во МЭИ, 2019.

3. **Ильин, В.А.** Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. I: учеб. для вузов / **В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.** — 6-е изд. — М.: Физматлит, 2001.

4. **Ильин, В.А.** Математический анализ. В 2 ч. Ч.1.: учеб. для вузов / **В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов.** — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Проспект, 2007.

5. **Кудрявцев, Л.Д.** Краткий курс математического анализа: Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: учебник для вузов / **Л.Д. Кудрявцев.** — 4-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2015.

6. **Кудрявцев, Л.Д.** Курс математического анализа: В 3 т. Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной: учеб. для вузов / **Л.Д. Кудрявцев.** — 5-е изд., перераб. и доп. — М.: Дрофа, 2003.

7. **Симушев, А.А.** Интегральное исчисление функций одной переменной: учеб. пособие для вузов / **А.А. Симушев.** — М.: Издательство «Спутник +», 2020.

8. **Симушев, А.А.** Неопределённый интеграл: Задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие для вузов / **А.А. Симушев.** — М.: Издательство «Спутник +», 2019.

9. **Тер-Крикоров, А. М.** Курс математического анализа: учеб. пособие для вузов / **А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин.** — 4-е изд., испр. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

10. **Шипачев, В. С.** Высшая математика. Полный курс: учебник для бакалавров для вузов / **В. С. Шипачев; Ред. А. Н. Тихонов.** — 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2013.

11. **Яблонский, А.И.** Высшая математика: Общий курс: Учебник для экономических специальностей вузов / **А. И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина, В.В. Косьянчук, С.А. Самаль, Л.Ф. Янчук, Л.И. Шевченко, А.Ф. Корзюк; Ред. С. А. Самаля.** — 2-е изд.,перераб . — Мн.: Вышэйшая школа, 2000.

Учебное издание

СИМУШЕВ Александр Анатольевич
ЗАРБАЛИЕВ Сахавет Маилович
ГРИГОРЬЕВ Владимир Викторович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции
Набор и компьютерная вёрстка: *Симушев А.А.*
Редактор: *Зарбалиев С.М.*
Дизайн обложки: *Вершинина И.А.*

Издательство «Прометей»
119002, г. Москва, ул. Арбат, д. 51, стр. 1
Тел./факс: +7 (495) 730-70-69
E-mail: info@prometej.su

Подписано в печать 03.07.2022
Формат 60×84/16. Объем 14,0 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 1525

ISBN 978-5-00172-357-8

9 785001 723578 >

СИМУШЕВ Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ МЭИ

ЗАРБАЛИЕВ Сахавет Маилович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, эконометрики и информационных технологий МГИМО (У)

ГРИГОРЬЕВ Владимир Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, эконометрики и информационных технологий МГИМО (У)

А.А. Симушев,
С.М. Зарбалиев,
В.В. Григорьев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

В учебном пособии содержатся наиболее важные разделы математического анализа: введение в анализ, дифференциальное исчисление и интегральное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие покрывает основные разделы, входящие в стандарт курса «Математический анализ». Каждая глава делится на параграфы, посвященные отдельным темам. В конце приведён большой список используемой литературы. На протяжении всей книги выдержан строгий научный стиль изложения, все основные теоремы снабжены подробными доказательствами и найден удачный баланс между математической строгостью и доступностью изложения. Все темы проиллюстрированы примерами с подробнейшими решениями. Важной особенностью учебного пособия является то, что в нём разобрано большое количество типовых задач. В основу книги положены лекции, читаемые авторами в МГИМО МИД России и НИУ МЭИ.

Учебное пособие представляет интерес для широкого круга учащихся как на бакалаврских программах, так в магистратуре. Его можно рекомендовать студентам, желающим получить систематические знания по предмету.

Учебное пособие предназначено для подготовки студентов и магистров экономических и технических вузов при изучении ими разделов математического анализа и для самостоятельной проработки соответствующего материала студентами дистанционной формы обучения. Настоящее пособие может быть использовано аспирантами и преподавателями.

Объем рассмотренного материала соответствует программе для высших учебных заведений, рекомендованной Министерством науки и высшего образования РФ.

ISBN 978-5-00172-357-8

9 785001 723578 >

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ