МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

О.В. Бирюкова, Б.В. Ермаков, И.В. Корецкая, И.И. Коротких

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Сборник задач

Учебное пособие
по курсу «Физика»
для студентов, обучающихся по направлениям:
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
08.03.01 «Строительство»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.03.01 «Информационная безопасность»,
11.03.01 «Радиотехника»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
12.03.01 «Приборостроение»,
12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»,
13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»,
27.03.02 «Управление качеством»,
27.03.04 «Управление в технических системах»,
11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы».

Москва
Издательство МЭИ
2021

УДК
531
М 55

Утверждено учебным управлением НИУ МЭИ
Подготовлено на кафедре физики им. В.А. Фабриканта НИУ МЭИ

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук
канд. техн. наук

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
Сборник задач: Учеб. пособие по курсу «Физика» / О.В. Бирюкова, Б.В. Ермаков, И.В. Корецкая, И.И. Коротких; Под ред. . — М.: Издательство МЭИ, 2021. — 91 с.

Настоящее пособие содержит набор задач по разделам механики, молекулярной физики и термодинамики учебного плана курса физики МЭИ. В каждом разделе подобраны задачи различной степени трудности. В начале каждого раздела приведены кратко элементы теории и методические указания к решению задач. Все задачи снабжены ответами. В задачнике используется система СИ.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей ИВТИ, ИГВИЭ, ИнЭИ, ИРЭ, ИЭТЭ, ИЭЭ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач является существенно переработанным изданием кафедрального задачника по физике под редакцией В.Ф. Кубарева 2006 года издания. Во всех разделах добавлен теоретический материал, который включает в себя формулировки физических законов данного раздела, запись основных формул и теорем, методические указания по решению задач данного раздела. В задачнике сохранен порядок следования материала. Так динамика твердого тела идет вслед за динамикой материальной точки. Соответственно законы сохранения, как для материальной точки, так и для твердого тела выделены в отдельный блок. По сравнению с предыдущим изданием, добавлены задачи для начинающих изучение и задачи повышенной сложности. В целом подбор задач соответствует учебному плану курса физики МЭИ.

Для успешного решения приведенных задач авторы рекомендуют также воспользоваться книгой Е.М. Новодворской и Э.М. Дмитриева «Методика проведения упражнений по физике во втузе», которая целиком посвящена методике решения задач.

МЕХАНИКА

1. Кинематика

Для определения положения материальной точки в пространстве используются радиус-вектор или координаты. Их связь в декартовой системе координат имеет вид:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Для описания движения служат:

- Траектория – кривая, описанная материальной точкой в пространстве. Для всякой кривой можно записать уравнение $f(x, y, z) = const$.
- Пройденный путь (S) – длина траектории (скалярная величина),
- Вектор перемещения ($\Delta\vec{r}$) –вектор, проведенный из начальной точки траектории в конечную.
- Скорость (вектор мгновенной скорости) определяется как отношение вектора перемещения ко времени, за которое оно произошло, при условии, что приращение времени стремится к нулю:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

В декартовой системе координат:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k};$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k};$$

$$\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad \upsilon_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad \upsilon_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}.$$

Если учесть, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}$ – элементарное перемещение мало и совпадает с участком траектории ($|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}S$), то модуль мгновенной скорости $\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$.

- Ускорение

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}.$$

В декартовой системе координат:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\upsilon_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}\upsilon_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}\upsilon_z}{\mathrm{d}t}\vec{k};$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}.$$

При использовании естественной системы координат с началом в движущейся точке и осями: тангенциальной – по направлению скорости и нормальной – к центру кривизны траектории, разложение вектора ускорения по базису запишется следующим образом:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n},$$

где $|\vec{\tau}| = |\vec{n}| = 1$ единичные вектора соответствующих осей.

Любое криволинейное движение можно разбить на малые участки движения по окружности.

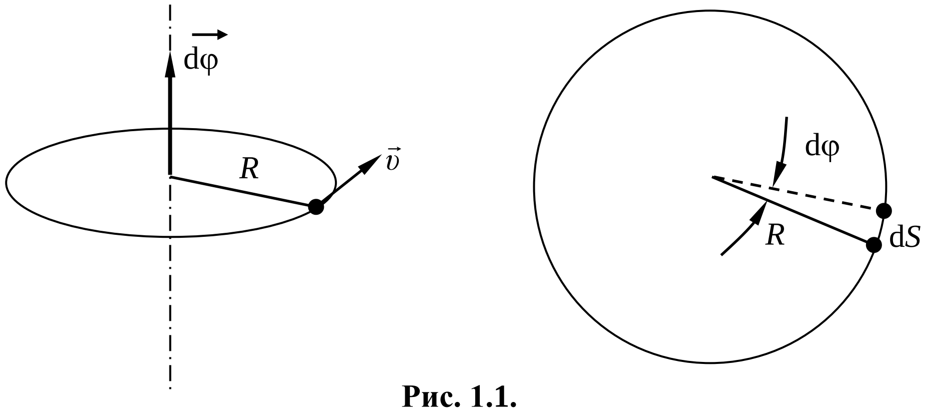


Рис. 1.1.

Характеристиками движения по окружности будут:

- Радиус окружности R;
- Вектор элементарного углового перемещения $\mathrm{d}\vec{\varphi}$;
- Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}$;
- Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}$.

Связь угловых и линейных величин:

$$\mathrm{d}S = R \cdot \mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \left[\mathrm{d}\vec{\varphi}, \vec{R}\right],$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\left[\mathrm{d}\vec{\varphi}, \vec{R}\right]}{\mathrm{d}t} = \left[\vec{\omega}, \vec{R}\right],$$

$$\vec{a} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}, \vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right] + \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}\right].$$

$a_\tau \vec{\tau} = \left[\vec{\varepsilon}, \vec{R}\right]$ – тангенциальная составляющая ускорения (тангенциальное ускорение);

$a_n \vec{n} = \left[\vec{\omega}, \vec{\upsilon}\right]$ – нормальная составляющая ускорения (нормальное ускорение).

Раскрывая векторное произведение, получаем

$$a_\tau = \varepsilon R,$$

$$a_n = \omega \cdot \upsilon = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

При решении задач сопротивлением воздуха пренебрегаем (если не сказано обратное), ускорение свободного падения считаем равным $g = 9{,}81\,\text{м/с}^2$.

1.1. Вектор $\vec{\upsilon}$ изменил направление на противоположное. Найдите: $\Delta\vec{\upsilon}$, $|\Delta\vec{\upsilon}|$, $\Delta\upsilon$.

1.2. Радиус-вектор точки ($\vec{r}$) изменяется: а) только по модулю; б) только по направлению. Что можно сказать о траектории движения точки?

1.3. Начальное значение скорости равно $\vec{\upsilon}_1 = 1\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ (м/с), конечное $\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$ (м/с). Найдите: а) приращение вектора скорости $\Delta\vec{\upsilon}$, б) модуль приращения вектора скорости $|\Delta\vec{\upsilon}|$, в) приращение модуля скорости $\Delta\upsilon$.

1.4. Постоянный по модулю вектор скорости $\vec{\upsilon}$, равномерно поворачиваясь против часовой стрелки в плоскости (x, y), переходит за некоторое время из положения, когда он параллелен оси X, в положение, когда он параллелен оси Y. Какова траектория частицы, движущейся с этой скоростью? Найдите среднее за это время значение вектора скорости $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ и модуль этого среднего значения $|\langle\vec{\upsilon}\rangle|$.

<u>Указание</u>. $\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vec{\upsilon}_i$ или $\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \vec{\upsilon}\,\mathrm{d}t$

1.5. Радиус-вектор частицы изменяется со временем по закону: $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$ (м). Найдите: а) скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение частицы $\vec{a}$; б) модуль скорости υ и модуль ускорения a; в) уравнение траектории; г) нормальное и тангенциальное ускорения при t = 1 с; д) радиус кривизны траектории в тот же момент времени.

1.6. Кинематический закон движения частицы в плоскости (x, y) имеет вид:

$$\begin{cases} x = Bt; \\ y = C, \end{cases}$$

где B и C >0.

Какова траектория движения частицы? Чему равна ее скорость?

1.7. Кинематический закон движения частицы в плоскости (x, y) имеет вид:

$$\begin{cases} x = Bt - At^2; \\ y = C, \end{cases}$$

где A, B, C >0.

Какова траектория движения частицы? Чему равны ее скорость и ускорение? Какой путь пройдет частица с момента t_1 = 0 с до момента $t_2 = B/A$ с.

1.8. Кинематический закон движения частицы в плоскости (x, y) имеет вид:

$$\begin{cases} x = Bt - At^2; \\ y = Dt, \end{cases}$$

где A, B, D >0.

Какова траектория движения частицы? Чему равны ее скорость и ускорение?

1.9. Кинематический закон движения частицы в плоскости (x, y) имеет вид:

$$\begin{cases} x = R\cos\omega t; \\ y = R\sin\omega t, \end{cases}$$

где R и ω >0.

Какова траектория движения частицы? Чему равны модуль скорости и модуль ускорения?

1.10. Зная уравнение движения материальной точки, записанное в СИ: $x = \frac{t^3}{3} + 2t + 8$, найдите скорость и ускорение через время t = 3 с после начала движения. Постройте графики пути, скорости и ускорения материальной точки в зависимости от времени.

1.11. Над колодцем глубиной $h = 10$ м бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью $\upsilon_0 = 5$ м/с. Через сколько времени и с какой скоростью камень достигнет дна колодца?

1.12. Камень бросают вертикально вверх со скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Через $\tau = 1$ с из той же точки с той же скоростью бросают второй камень. Через какое время от начала подъема первого камня и на какой высоте камни столкнутся?

1.13. По наклонной плоскости пустили снизу вверх шарик. На расстоянии $\ell = 30$ см от начала пути шарик побывал дважды: через $\tau_1 = 1$ с и через $\tau_2 = 2$ с после начала движения. Определите начальную скорость и ускорение шарика, считая его постоянным.

1.14. Частица движется вдоль оси *X*. Уравнение движение частицы имеет вид $x = \alpha t(t_0 - t)$, где α и t_0 – заданные константы. Найдите путь, пройденный частицей за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = t_0$.

1.15. Зависимость модуля скорости частицы υ от пройденного ею пути s определяется формулой $\upsilon(s) = \upsilon_0 - bs$, где υ_0 и b заданные константы. Найдите: а) зависимость пути от времени; б) зависимость модуля скорости от времени.

1.16. Материальная точка приходит в движение без начальной скорости с ускорением $a = a_0 - k\upsilon$, где a_0 и k заданные константы. Найдите зависимость скорости частицы от времени.

1.17. Тело брошено с высоты $H = 25$ м горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 25$ м/с. Напишите кинематические уравнения движения тела вдоль горизонтальной оси *X* и вертикальной оси *Y*. Начало координат выберите самостоятельно. Найдите уравнение траектории тела. Найдите время полета тела и дальность.

1.18. Тело брошено с Земли со скоростью υ_0 под углом α к горизонту. 1) Выбрав начало координат в месте бросания, напишите кинематические уравнения движения тела вдоль горизонтальной оси *X* и вертикальной оси *Y*. 2) Докажите, что тело движется по параболической траектории. 3) Найдите время полета тела. 4) Определите радиус кривизны траектории в наивысшей точке полета.

1.19. Снаряд вылетел из орудия под некоторым углом к горизонту. Уравнение траектории снаряда имеет вид $y = -cx^2 + x$, где c – известная положительная постоянная. Определите дальность полета снаряда и угол к горизонту, под которым он вылетел из орудия.

1.20. Тело брошено с башни высотой H со скоростью υ_0, направленной вверх под углом α к горизонту. Поместив начало системы координат у основания башни, запишите законы движения тела вдоль осей *X* и *Y*. Получите уравнение траектории тела. Найдите расстояние по горизонтали, которое пролетит тело.

1.21. Два камня бросили одновременно со скоростями υ_1 и υ_2 с поверхности Земли и с крыши дома. С крыши камень бросили горизонтально, а с поверхности Земли вертикально вверх. Расстояние по горизонтали между начальными точками равно *S*. Камни в воздухе столкнулись. Определите высоту дома *H* и высоту точки *h*, где столкнулись камни.

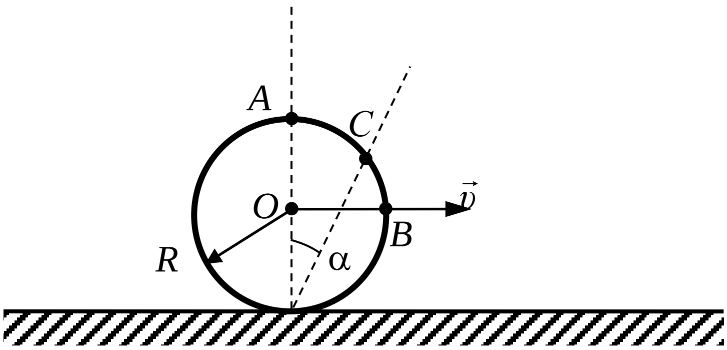
1.22. Тело брошено со скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту. Найдите радиус кривизны траектории этого тела, а также тангенциальное и нормальное ускорение в тот момент, когда его скорость составляет с горизонтом угол $\alpha_2 = 30°$.

1.23. Линейная скорость точек на краю вращающегося диска $\upsilon_1 = 3$ м/с. Точки, расположенные на $\ell = 10$ см ближе к оси, имеют линейную скорость $\upsilon_2 = 2$ м/с. Какова частота вращения диска?

1.24. На горизонтальном валу, совершающем вращение с частотой $\nu = 200$ об/с, на расстоянии $\ell = 20$ см друг от друга закреплены два тонких диска. Для определения скорости полета пули произведен выстрел так, что пуля пробивает оба диска на одинаковом расстоянии от оси вращения. Определите среднюю горизонтальную скорость пули при движении ее между дисками, если угловое смещение пробоин $\alpha = 18°$.

1.25. Диск вращается так, что зависимость проекции угла поворота диска на ось вращения Z от времени определяется уравнением $\varphi_z = Bt + Ct^3$, где B = 2 рад/с, $C = -1$ рад/с^3. Найдите угловую скорость и угловое ускорение диска в произвольный момент времени. Определите начальную угловую скорость, а также угловую скорость и угловое ускорение спустя $t_1 = 2$ с после начала движения.

1.26. Колесо радиуса R катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью υ. Определите скорости точек A, B, C (см. рис.).



К задаче 1.26.

1.27. В условии задачи 1.26 найдите ускорения точек A, B, C.

2. Динамика движения материальной точки

В данном разделе используются следующие характеристики, определяющие характер движения:

Масса – мера инертности тела;

Сила – мера взаимодействия двух тел;

Импульс материальной точки $\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon}$, импульс системы материальных точек $\vec{p} = \sum m_i \cdot \vec{\upsilon}_i$.

Их количественная связь определяется **вторым законом Ньютона:**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i .$$

Изменение импульса за некоторый промежуток времени находится в результате интегрирования:

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F} \mathrm{d}t = \vec{F}_{\text{ср}} \left(t - t_0 \right),$$

где $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ и $\vec{F}_{\text{ср}} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \vec{F} \mathrm{d}t$.

При условии постоянства массы для материальной точки второй закон Ньютона можно записать в виде:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i .$$

При рассмотрении системы материальных точек скорость изменения импульса определяется только внешними силами:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} .$$

При описании движения твердого тела из второго закона Ньютона следует теорема о движении центра масс (C):

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_i .$$

Положение центра масс системы материальных точек может быть определено из соотношения:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} .$$

Здесь $\vec{r}_C$ – радиус-вектор центра масс относительно выбранного тела отсчета;

m_i – масса i-ой материальной точки;

$\vec{r}_i$ – ее радиус-вектор;

m – масса системы.

Радиус-вектор центра масс абсолютно твердого тела находится из соотношения:

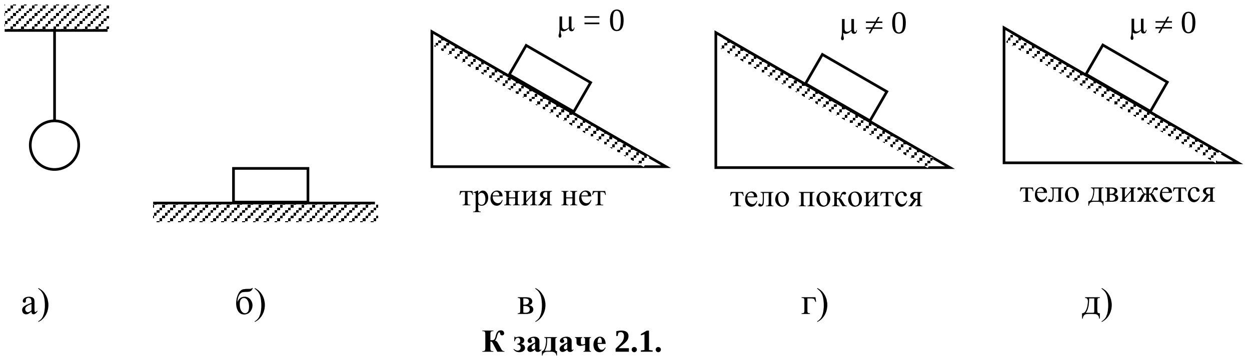
$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int\limits_{(m)} \vec{r}\,\mathrm{d}m .$$

Предлагается следующая последовательность действий при решения задач:

1. Убедиться, что выбранная система отсчета инерциальная.
2. Нарисовать векторы сил, действующих на каждое тело в отдельности. Число сил должно быть равно числу тел, с которыми взаимодействует данное тело (силу реакции опоры $\vec{Q}$ можно заранее разложить на составляющие $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$).
3. Записать уравнение динамики для каждого тела в отдельности или для системы тел в векторном виде.
4. Выбрать удобную систему координат.
5. Освободиться в разумных пределах от кинематических связей («порвать» нити), оставив силы такими, какими они были при наличии связей.
6. Записать уравнения динамики в проекциях на оси координат.
7. Записать кинематические уравнения связей, а также учесть дополнительные условия задачи, если они есть.
8. Решить полученную систему уравнений.
9. Проверить на «реальность» полученный ответ и его размерность.

Во всех задачах этого раздела нити полагаются невесомыми и нерастяжимыми и блоки невесомыми, если не сказано обратное.

2.1. Сила есть мера взаимодействия данного тела с другими физическими объектами. Такое взаимодействие может осуществляться как при непосредственном контакте, так и посредством полей. Нарисуйте векторы сил (но не составляющие сил), действующих на тела, представленные на рисунке.



К задаче 2.1.

2.2. Закон движения тела массой m имеет вид $\vec{r} = bt\vec{i} + ct^2\vec{j}$. Определите силу $\vec{F}$, действующую на тело.

2.3. Скорость частицы массы m зависит от времени по закону $\vec{\upsilon}(t) = at\vec{i} + bt^2\vec{j} + c\vec{k}$, где a, b, c – заданные константы. Определите силу $\vec{F}$, действующую на частицу, а также угол, который образует вектор $\vec{F}$ с горизонтом полагая, что векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ лежат в горизонтальной плоскости.

2.4. Закон движения тела массой m имеет вид $\vec{r} = a\cos\omega t \cdot \vec{i} + a\sin\omega t \cdot \vec{j}$. Определите модуль приложенной силы.

2.5. Шайбе сообщили начальную скорость υ_0, направленную вверх по наклонной плоскости с углом α. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен μ. Какое время шайба будет двигаться вверх? При каком угле наклона плоскости это время будет минимальным?

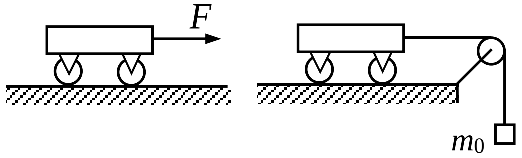
2.6. Пуля массой m, обладающая скоростью υ_0, пробивает доску и уменьшает при этом свою скорость вдвое. Время движения пули в доске равно τ. Найдите среднюю силу сопротивления движению пули внутри доски.

2.7. Горизонтальная струя воды поперечного сечения S = 4 см^2 бьет со скоростью υ = 5 м/с в вертикальную стену и свободно стекает по ней вниз. Найдите горизонтальную силу, с которой струя действует на стену.

2.8. Определите силу давления, действующую на основание водопада высотой h, если плотность воды ρ, а сечение струи водопада – S.

2.9. Свернувшаяся в кольцо змея длиной ℓ начинает равномерно со скоростью υ поднимать вертикально вверх голову. Найдите массу m змеи, если в произвольный момент времени t во время подъема на змею действует реакция опоры N.

2.10. Упругий шероховатый брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, ударяется о вертикальную стенку. При каком минимальном коэффициенте трения между бруском и стенкой брусок отскочит перпендикулярно стенке, если он подлетает к ней под углом α?



а) б)

К задаче 2.11

2.11. Тележка массой m = 10 кг может без трения двигаться по горизонтальным рельсам. Найдите ускорение тележки в двух случаях: а) если тянуть ее с горизонтальной силой $F = 10$ Н; б) если приводить ее в движение грузом массой $m_0 = 1{,}0$ кг, как показано на рисунке. Чему равно натяжение нити в каждом из этих случаев?

2.12. Два груза с массами $m_1 = 5{,}0$ кг и $m_2 = 3{,}0$ кг находятся на гладкой горизонтальной плоскости. Грузы соединены невесомой нерастяжимой нитью. К грузам приложены направленные в противоположные стороны горизонтальные силы $F_1 = 50$ Н и $F_2 = 30$ Н. Найдите натяжение нити. Изменится ли натяжение нити, если большая сила будет приложена к телу с меньшей массой?

2.13. Однородный стержень длиной L лежит на гладком столе. На стержень действуют силы F_1 и $F_2 < F_1$, приложенные к его концам и направленные в разные стороны друг от друга. С какой силой F растянут стержень в сечении, находящемся на расстоянии $\ell < L$ от конца стержня, к которому приложена сила F_1?

2.14. На гладком горизонтальном столе лежат три груза с массами $m_1 = 5$ кг, $m_2 = 3$ кг и $m_3 = 1$ кг, соединенных одинаковыми тонкими нитями. Каждая нить выдерживает нагрузку не более $T = 80$ Н. С какой силой надо потянуть горизонтально груз m_3, чтобы одна нить оборвалась? Какая именно нить оборвется?

2.15. Человек массой $m = 70$ кг находится в лифте. Найдите силу, с которой человек давит на пол кабины лифта, когда лифт при подъеме движется замедленно с ускорением $a = 20$ см/с^2 и когда опускается замедленно с таким же ускорением.

2.16. Платформа, на которую помещен цилиндр массой $m = 10$ кг, опускается вниз по вертикали с ускорением $a = 4$ м/с^2. С какой силой цилиндр давит на платформу во время движения?

2.17. Веревка выдерживает груз массой $m_1 = 90$ кг при вертикальном подъеме с некоторым ускорением и груз массой $m_2 = 110$ кг при опускании с таким же по модулю ускорением. Какой груз можно поднимать этой веревкой равномерно?

2.18. Тело находится на плоскости, угол наклона которой может изменяться от 0 до 90°. Постройте график зависимости модуля силы трения тела о плоскость от угла наклона плоскости к горизонту. Коэффициент трения тела о плоскость μ, масса тела m.

2.19. Два тела положили на наклонную плоскость ($\alpha = 37°$). Найдите ускорения тел, коэффициенты трения для которых соответственно равны $\mu_1 = 0{,}2$, $\mu_2 = 0{,}8$.

2.20. Груз массой m = 100 кг перемещают равномерно по горизонтальной поверхности, приложив силу, направленную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Найдите модуль этой силы, если коэффициент трения при движении груза по плоскости равен μ = 0,3.

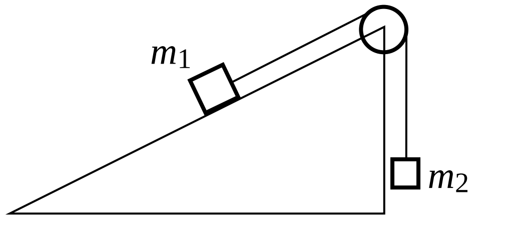
2.21. Тело массой m лежит на горизонтальном столе. На тело начинает действовать горизонтальная сила, модуль которой линейно зависит от времени: $F = b \cdot t$, где $b = \text{const}$. Постройте график зависимости модуля силы трения от времени, полагая коэффициент трения равным μ.

2.22. Тело массой m = 10 кг лежит на шероховатом горизонтальном столе. Коэффициент трения между телом и столом $\mu = 1{,}5$. На тело начинает действовать сила под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Модуль силы изменяется по закону $F = b \cdot t$, где $b = 0{,}5$ Н/с. Через какой промежуток времени после начала действия силы тело начнет движение?

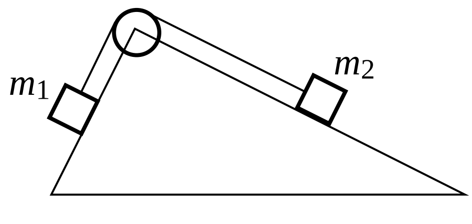
2.23. На тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, начинает действовать сила, зависящая от времени по закону $F = b \cdot t$, где $b = \text{const}$. Направление силы все время составляет угол α с горизонтом. Найдите скорость тела в момент его отрыва от плоскости и путь, пройденный телом к этому моменту.

2.24. На верхнем краю гладкой наклонной плоскости укреплен легкий блок, через который перекинута нить. На одном ее конце привязан груз с массой m_1 = 0,2 кг, лежащий на наклонной плоскости. На другом конце висит груз с массой m_2 = 1,0 кг (см. рисунок). С каким ускорением движутся грузы и каково натяжение нити? Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α = 30°.

2.25. Решите задачу 2.24 при условии, что коэффициент трения между грузом m_1 и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}1$.



К задаче 2.24



К задаче 2.26

2.26. Трехгранная прямоугольная призма расположена, как показано на рисунке. Через легкий блок, укрепленный в верхнем ребре призмы, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами

m_1 = 3,0 кг и m_2 = 5,0 кг. Грузы лежат на совершенно гладких гранях призмы, наклоненных к горизонту под углами α_1 = 60° и α_2 = 30° (см. рисунок). Найдите натяжение нити при движении грузов.

2.27. Груз находится на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. К грузу приложена сила $\vec{F}$, направленная горизонтально в сторону наклонной плоскости. Коэффициент трения груза о плоскость равен μ. При какой массе груза он будет двигаться равномерно вниз по плоскости?

2.28. Наклонная плоскость с углом наклона α, изображенная на рисунке к задаче 2.1 д, движется вправо с ускорением a. При каком минимальном ускорении тело, лежащее на наклонной плоскости, начнет подниматься? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ.

2.29. Тележка массой m_1 = 20 кг может передвигаться без трения по горизонтальной плоскости. На тележке лежит прямоугольный брусок массой m_2 = 5,0 кг. Коэффициент трения между поверхностями бруска и тележки μ = 0,2. Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к бруску, чтобы он начал скользить по поверхности тележки?

2.30. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой m_1, а на ней брусок массой m_2. Коэффициент трения между поверхностями бруска и доски равен μ. К бруску приложена горизонтальная сила, увеличивающаяся со временем по закону $F = b \cdot t$, где b – заданная постоянная. Найдите зависимость ускорений доски и бруска от времени и постройте соответствующие графики.

2.31. Гимнаст падает с высоты $H = 12$м на упругую сетку. Прогиб сетки под действием веса гимнаста $x_0 = 1{,}0$ м. Найдите отношение максимальной силы, действующей на гимнаста со стороны сетки, к его силе тяжести.

2.32. Два одинаковых груза, массой m каждый, лежат на гладком столе, связанные пружиной жесткости k. К одному из грузов приложена сила F, направленная вдоль оси системы. Чему равно удлинение пружины при движении грузов?

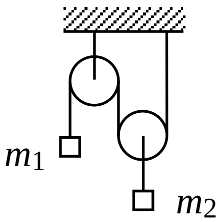
2.33. На гладком горизонтальном столе лежит резиновый жгут жесткости k. К концу жгута, вдоль него, приложена сила F, под действием которой он движется с ускорением в горизонтальном направлении. Чему равно полное удлинение жгута?

Указание. См задачу 2.32. Резиновый жгут можно представить как систему грузиков массой Δm_i, связанных невесомыми пружинами.

2.34. По гладкому горизонтальному столу со скоростью υ

движется тележка массой m_1. На тележке лежит брусок массой m_2. Коэффициент трения между поверхностями бруска и тележки равен μ. К торцу тележки прикреплена пружина. Тележка наезжает на вертикальную стену, упираясь пружиной. При каком минимальном значении коэффициента упругости пружины брусок начнет скользить по тележке?

2.35. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы с массами m_1 = 1000 г и m_2 = 1100 г. Определите ускорения грузов и натяжение нити.



К задаче 2.36

2.36. Найдите ускорения a_1 и a_2 масс m_1 и m_2 и натяжение нити в системе, изображенной на рисунке.

2.37. Через неподвижный блок перекинута нить, на одном конце которой подвешен груз m_3 = 3 кг, а на другом конце – второй блок. Через этот второй блок в свою очередь перекинута нить, на концах которой подвешены грузы m_1 = 1 кг и m_2 = 2 кг. Найдите, с каким ускорением будет опускаться груз m_3, если всю систему трех грузов предоставить самой себе.

2.38. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 198 г и m_2 = 202 г. Найдите ускорение центра масс системы грузов во время их движения.

2.39. К стоящей на горизонтальной плоскости тележке прикреплена подставка с подвешенным к ней на легкой нити металлическим шариком. Какой угол будет составлять нить с вертикалью и каково будет ее натяжение, если тележка движется: а) равномерно; б) равноускоренно с ускорением a.

2.40. На горизонтальной поверхности находится призма (клин) массой m_1 с углом α и на ней брусок массой m_2. Пренебрегая трением между всеми поверхностями соприкосновения тел, найдите ускорение призмы.

2.41. Материальная точка массой m движется вдоль оси X под действием тормозящей силы, пропорциональной скорости $F_x = -\beta\upsilon$, где β – заданная константа. Найдите закон движения этой точки $x(t)$, если она начинает свое движение из начала координат ($x(0) = 0$) с начальной скоростью υ_0. Постройте график зависимости $x(t)$.

2.42. Материальная точка массой m движется вдоль оси X под действием ускоряющей силы, пропорциональной координате $F_x = \beta \cdot x$, где β – заданная константа. Найдите закон движения этой точки $x(t)$, если она начинает свое движение из точки с координатой x_0 без начальной скорости.

2.43. На тело массой m, падающее в поле силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха $\vec{F} = -\beta \vec{\upsilon}$, где $\vec{\upsilon}$ – скорость тела, β – положительная константа. Найдите зависимость скорости тела от времени, если в момент времени $t = 0$ скорость $\upsilon = 0$.

3. Динамика движения материальной точки по окружности

Всякое криволинейное движение можно разбить на малые участки движения по окружности. При таком движении непрерывно изменяется направление вектора скорости, а значит должны существовать силы, направленные под углом к скорости и обусловливающие возникновение нормальной составляющей ускорения. В роли таких сил могут выступать гравитационная сила (при рассмотрении движения космических тел), сила упругости, сила натяжения нити, сила реакции опоры.

Одна из составляющих реакции опоры – сила трения. В зависимости от условий, в которых находится тело, можно говорить о силе трения покоя или о силе трения скольжения. Каждая из них имеет свои особенности (см. таблицу 1).

Таблица 1

Сила трения $\vec{F}_{\text{тр.}}$	
Сила трения скольжения	Сила трения покоя
Сила связана с нормальной составляющей реакции опоры соотношением $F_{\text{тр.ск.}} = \mu N$, где μ – коэффициент трения.	В отличие от силы трения скольжения, не имеет единой расчетной формулы и определяется из динамических условий равновесия или отсутствия проскальзывания. Единственное, что о ней известно, что она не может превышать силу трения скольжения: $F_{\text{тр.пок.}} \le \mu N$.
Эта сила всегда направлена против вектора скорости, поэтому, прежде чем рисовать вектор силы трения скольжения, нужно определить направление скорости скользящего тела.	По направлению она всегда противоположна возможному направлению вектора скорости.

Нормальная составляющая ускорения (нормальное ускорение) связана со скоростью движения и радиусом кривизны траектории соотношением:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega v.$$

Чем больше скорость, тем большие силы требуются для создания ускорения, приводящего к изменению ее направления.

Алгоритм решения задач данного раздела не отличается от рассмотренного в разделе 2. При выборе системы координат одну из осей удобно направлять к центру кривизны траектории.

3.1. С какой начальной горизонтальной скоростью должен вылететь снаряд из орудия, чтобы он облетел Землю параллельно ее поверхности (первая космическая скорость) при отсутствии трения о воздух? Радиус Земли примите равным 6400 км.

3.2. Пусть Земля начала вращаться настолько быстро, что тела, находящиеся на экваторе, стали невесомыми. Найдите в этом случае продолжительность суток. Радиус Земли 6400 км.

3.3. Найдите минимальный период обращения спутника планеты, имеющей плотность $\rho = 3 \cdot 10^3$ кг/м^3. Гравитационная постоянная $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2 / кг^2.

3.4. Две звезды, суммарная масса которых равна M, находятся на расстоянии L. Найдите период обращения этих звезд относительно центра масс системы. Гравитационная постоянная G.

3.5. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $R = 0{,}10$ м от вертикальной оси вращения лежит груз массой $m = 1{,}0$ кг. Коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0{,}05$. При какой минимальной частоте вращения ν_1 груз начинает скользить? Найдите силу трения при частоте $\nu_2 = \nu_1 / 2$.

3.6. Шарик массой m, прикрепленный к резиновому шнуру, движется по окружности, скользя по гладкой горизонтальной плоскости. Период обращения шарика равен T. Жесткость шнура k, а длина нерастянутого шнура равна ℓ_0. Найдите радиус окружности, по которой будет двигаться шарик. При какой угловой скорости вращения процесс растяжения шнура станет «неуправляемым» ($R \to \infty$)?

3.7. Резиновый жгут массой m сделан в виде тонкого круглого кольца радиусом R_0. Жгут раскрутили относительно оси симметрии кольца до угловой скорости ω и положили плашмя на гладкий горизонтальный стол. Найдите радиус R жгута, если его жесткость k.

3.8. Груз массой m подвешен на нити длиной ℓ и колеблется, отклоняясь на угол α в одну и другую стороны. а) Найдите натяжение нити в крайних положениях и в среднем, т.е. при прохождении положения равновесия. б) При отклонении на какой угол α_1 натяжение нити в среднем положении вдвое больше силы тяжести груза? в) При каком угле α_2 модуль полного ускорение груза в крайнем положении равен модулю полного ускорения в среднем положении?

3.9. Грузик висит на нити длиной ℓ. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить грузику, чтобы он описал окружность радиуса ℓ в вертикальной плоскости? Как изменится ответ, если груз висит на невесомом стержне длиной ℓ?

3.10. Небольшой шарик массы m, подвешенный на нити, отвели в сторону так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, а затем отпустили. Найдите: а) ускорение и натяжение нити как функцию угла отклонения нити от вертикали; б) натяжение нити в момент, когда вертикальная составляющая скорости максимальна; в) угол α между нитью и вертикалью в момент, когда вектор полного ускорения шарика направлен горизонтально.

3.11. Грузик привязан к нити, другой конец которой прикреплен к потолку. Вследствие толчка грузик движется по окружности, плоскость которой отстоит от потолка на расстоянии h = 98 см. Какова угловая скорость грузика?

3.12. Решите задачу 3.11 при условии, что вся система находится в лифте, который поднимается равноускоренно с ускорением a = 2 м/с^2.

3.13. С какой максимальной скоростью по горизонтальной плоскости должен ехать велосипедист, описывая дугу радиусом R = 50 м, если коэффициент трения колес о почву μ = 0,4? На какой угол α от вертикали отклонится при этом велосипедист?

3.14. В цирковом аттракционе мотоциклист движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса R = 10,6 м по горизонтальному кругу. Центр масс велосипедиста находится на расстоянии d = 0,8 м от точки опоры. Какова должна быть минимальная скорость мотоциклиста и его угол наклона к горизонту α_0, если коэффициент трения шин о стенку μ = 0,4? Под каким углом α_1 к горизонту наклонен мотоциклист, если его скорость υ_1 = 20 м/с?

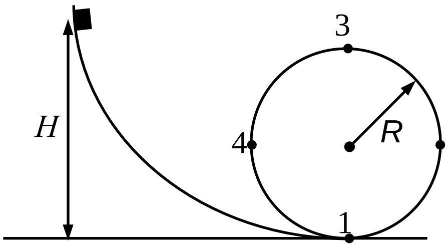
3.15. Цилиндрический сосуд с жидкостью вращается с частотой $\nu = 2\,\text{с}^{-1}$ вокруг оси симметрии. Поверхность жидкости имеет вид воронки. Чему равен угол α наклона поверхности жидкости к плоскости горизонта в точках, лежащих на расстоянии $r = 5\,\text{см}$ от оси?

3.16. Небольшое тело массой m без трения соскальзывает с высоты

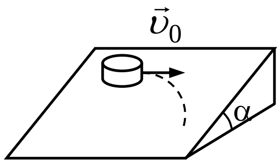
H по расположенному в вертикальной плоскости наклонному желобу, переходящему в круговую («мертвую») петлю радиуса R (см. рис.). Найдите наименьшую высоту H, с которой должно соскальзывать тело, чтобы оно сделало полную петлю, не выпадая из желоба.

3.17. Тело массой m без трения соскальзывает с высоты $H = 2{,}5R$ по вертикальному желобу, переходящему в вертикальную петлю (см. рис. к задаче 3.16). Найдите силу давления тела на желоб в точках 1, 2, 3, 4.

3.18. Тело соскальзывает с вершины полусферы, поставленной своим основанием на горизонтальную плоскость. Пренебрегая трением между телом и полусферой, найдите, на каком расстоянии от плоскости тело оторвется от поверхности полусферы. Радиус полусферы R = 30 см.



К задаче 3.16



К задаче 3.19

3.19. Шайба покоится на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (см. рис.). Шайбу толкнули в горизонтальном направлении вдоль плоскости, сообщив ей скорость υ_0. Найдите время, по истечении которого шайба остановится, если выполняется условие $\mu > \mathrm{tg}\alpha$. Здесь μ – коэффициент трения.

4. Момент инерции. Динамика вращательного движения твердого тела

Момент инерции характеризует распределение массы и является мерой инертности тела во вращательном движении.

Момент инерции материальной точки

$$I = mr^2,$$

определяется массой материальной точки и кратчайшим расстоянием до оси вращения.

Для системы материальных точек

$$I = \sum m_i r_i^2,$$

суммируются моменты инерций всех точек, входящих в систему.

Твердое тело представляем как совокупность материальных точек

$$m = \int\limits_{(m)} \mathrm{d}m \,,$$

и переписываем предыдущее определение, используя новые обозначения:

$$m_i \to \mathrm{d}m \,, \quad \sum \to \int \;\; ,$$

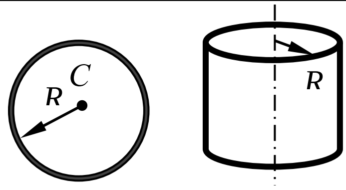
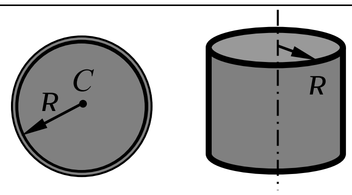
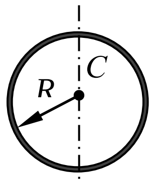
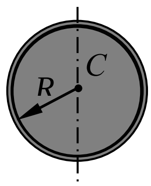
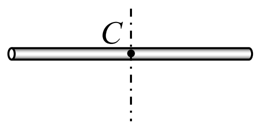
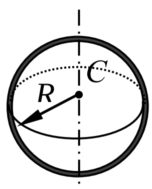
$$I = \int\limits_{(m)} r^2 \mathrm{d}m$$

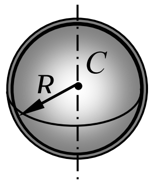
При расчете момента инерции системы тел их моменты инерции складываются:

$$I = \sum I_i \;.$$

Основные формулы расчета момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Кольцо (ось ⊥ плоскости кольца), тонкостенный цилиндр		$I_C = mR^2$
Диск (ось ⊥ плоскости диска), сплошной цилиндр		$I_C = \dfrac{mR^2}{2}$
Кольцо, ось в плоскости кольца		$I_C = \dfrac{mR^2}{2}$
Диск, ось в плоскости диска		$I_C = \dfrac{mR^2}{4}$
Стержень длиной ℓ		$I_C = \dfrac{m\ell^2}{12}$
Сфера		$I_C = \dfrac{2mR^2}{3}$

Шар		$I_C = \dfrac{2mR^2}{5}$

Если ось вращения проходит не через центр масс, для расчета момента инерции используют **теорему Штейнера**:

Момент инерции I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния b между осями:

$$I = I_C + mb^2$$

Расположение осей показано на рис. 4.1.

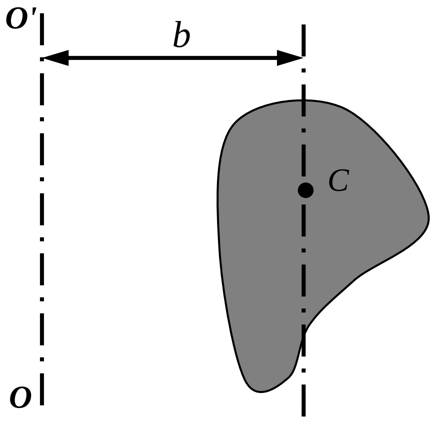


Рис. 4.1

Движение твердого тела можно разделить на поступательное, вращательное и сложное. Для описания поступательного достаточно теоремы о движении центра масс. Для описания вращательного движения используется основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}_i ,$$

где I – момент инерции тела, $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, $\vec{M}_i$ – момент i-ой силы относительно оси вращения.

Момент силы относительно оси есть результат векторного произведения радиус-вектора точки приложения силы, проведенного перпендикулярно оси, и составляющей силы, лежащей в плоскости перпендикулярной оси (см. рис. 4.2):

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_\perp , \vec{F}_\perp\right] .$$

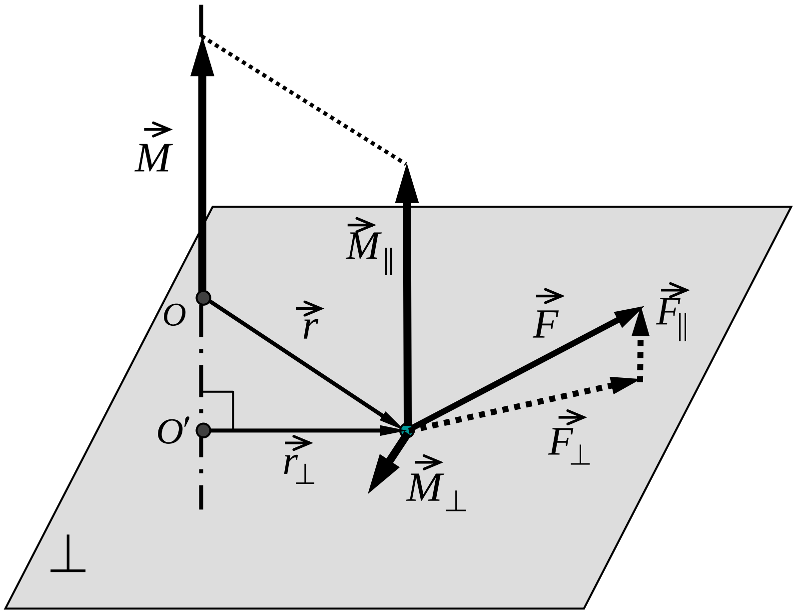


Рис. 4.2

Момент силы относительно оси направлен вдоль оси. Модуль момента силы равен произведению модуля силы на плечо – кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью.

Для описания сложного движения используются одновременно теорема о движении центра масс, основное уравнение динамики вращательного движения и связь линейных и угловых ускорений.

4.1. Определите момент инерции тонкого стержня массой m и длиной ℓ относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец. Рассмотрите два случая: а) однородный стержень; б) неоднородный стержень, плотность которого меняется по закону $\rho = \rho_0\left(1 + k\frac{x}{\ell}\right)$, где x – расстояние до оси вращения.

4.2. Определите момент инерции тонкого однородного стержня массой m и длиной ℓ относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его центр. Как изменится ответ, если стержень согнуть пополам на угол $2\theta < 180°$, если ось перпендикулярна плоскости изгиба? Чему будет равен момент инерции согнутого стержня, если ось расположена в плоскости изгиба симметрично относительно концов стержня?

4.3. Тонкий однородный стержень массой m и длиной ℓ с прикрепленными на его концах маленькими шариками массами m_1 и m_2 может вращаться относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр. Найдите момент инерции системы при условии: а) радиусы шариков $<< \ell$; б) радиусы шариков R_1 и R_2

соответственно.

4.4. Определите момент инерции тонкого диска массой m и радиусом R: а) относительно оси вращения, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр; б) относительно той же оси, если в диске проделать круглое отверстие радиусом r ($r < R/2$), центр которого смещен на расстояние $R/2$ от центра диска; в) относительно оси вращения, расположенной в плоскости диска и проходящей через его центр.

4.5. Тонкая прямоугольная пластинка массой m имеет размеры $a \times b$. Найдите момент инерции этой пластинки относительно оси, проходящей через центр масс пластинки: а) параллельно a; б) перпендикулярно плоскости пластинки.

4.6. Длины сторон однородного прямоугольного параллелепипеда массы m равны a, b, c. Определите момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости a, b.

4.7. Определите момент инерции однородного конуса массой m и с радиусом основания R относительно оси совпадающей с высотой конуса.

4.8. Определите момент инерции тонкостенной сферической оболочки массой m и радиусом R относительно оси: а) проходящей через ее центр; б) касательной к ее поверхности.

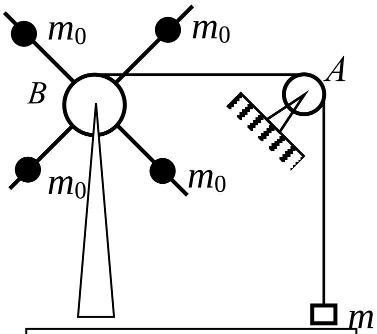
4.9. Найдите момент инерции однородного полого шара с внешним радиусом R и внутренним радиусом R_0. Плотность материала шара равна ρ. Докажите, что, если толщина шарового слоя много меньше его радиуса, то в пределе ответ совпадает с моментом инерции тонкой сферической оболочки.

4.10. Через блок, массу которого m = 0,5 кг можно считать сосредоточенной на ободе, перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 0,5 кг и m_2 = 0,1 кг. Предоставленные самим себе грузы приходят в движение. Принимая, что нить не скользит по колесу во время движения, найдите ускорение грузов и силу давления, оказываемого системой на ось колеса во время движения грузов.

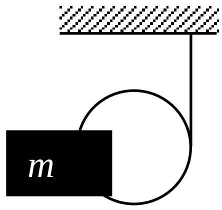
4.11. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две невесомые нерастяжимые нити, к которым подвешены грузы m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,2 кг. Найдите угловое ускорение блока и натяжение нитей, если момент инерции блока I = 0,010 кг·м^2, а радиусы шкивов R_1 = 0,2 м и R_2 = 0,1 м.

4.12. Маховик массой m = 1000 кг жестко связан со шкивом. К окружности шкива, радиус которого R_1 = 0,2 м, приложена постоянная сила F = 100 Н. Масса маховика распределена по его ободу на расстоянии R_2 = 1 м от оси вращения. Через какой промежуток времени угловая скорость маховика достигнет значения ω = 5 рад/с?

4.13. Груз массой m = 10 кг, падая, тянет нить, перекинутую через невесомый блок A и намотанную на шкив B радиусом r = 0,4 м, к которому прикреплены четыре спицы с точечными грузами m_0 = 1,0 кг каждый. Грузы закреплены на расстоянии R = 0,5 м от оси вращения (см. рис.). Момент инерции шкива B со спицами I_0 = 1,0 кг·м^2. Определите ускорение груза и натяжение нити.



К задаче 4.13.



К задаче 4.14.

4.14. На диск массой m = 6 кг намотана нить, один конец которой прикреплен к потолку (см. рис.). Предоставленный самому себе диск падает вниз, разматывая нить. Считая, что нить все время остается вертикальной, найдите ускорение центра масс диска при его падении и натяжение нити.

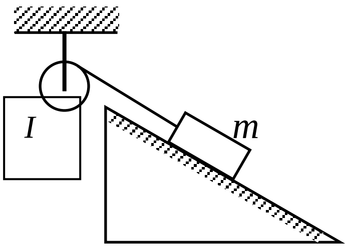
4.15. По наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α = 30°, скатывается без проскальзывания под действием силы тяжести диск. С каким ускорением будет двигаться параллельно наклонной плоскости центр масс диска? При каком минимальном значении коэффициента трения μ возможно качение диска без проскальзывания?

4.16. Обруч и диск одинаковых диаметров скатываются с одной и той же наклонной плоскости. Диск скатывается быстрее, чем обруч, на τ = 0,155 с и приобретает в конце наклонной плоскости скорость υ_1 = 4 м/с. Найдите длину наклонной плоскости, если массы тел равны.

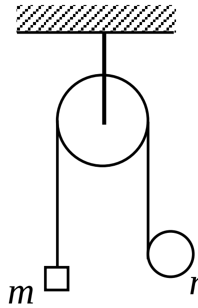
4.17. Раскрученные до угловой скорости ω_0 а) обруч, б) диск положили плашмя на шероховатый стол. Радиус каждого из тел R, масса m, коэффициент трения μ. Найдите момент силы трения и время, по истечении которого вращение прекратится.

4.18. После удара бильярдный шар начал скользить без вращения со скоростью $\upsilon_0 = 2$ м/с по горизонтальной плоскости стола. По мере движения он начинает раскручиваться, а затем катится без проскальзывания. Коэффициент трения $\mu = 0{,}3$. Какой путь пройдет шар до прекращения проскальзывания? Какое время займет этот процесс?

4.19. Длинный сплошной цилиндр радиуса $R = 3$ см, раскрученный до угловой скорости $\omega_0 = 100$ рад/с, осторожно опустили на горизонтальный стол. Скользя по столу, он начал двигаться вперед, а затем покатился без проскальзывания. Какой путь пройдет цилиндр до прекращения проскальзывания, если коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Какое время займет этот процесс?



К задаче 4.20.



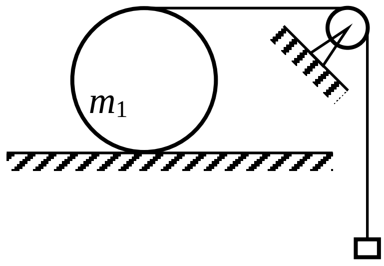
К задаче 4.21.

4.20. Маховик приводится во вращение так, как показано на рисунке. Момент инерции маховика I, радиус R, масса груза равна m, коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью μ. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол α. Найдите угловое ускорение и угловую скорость маховика как функцию времени.

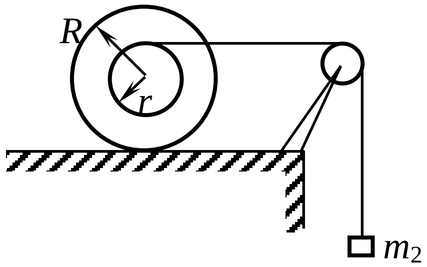
4.21. Через невесомый блок перекинута нить. К одному концу нити прикреплен груз массой $m = 0{,}5$ кг, другой конец намотан на цилиндрический шкив той же массы и радиусом $R = 0{,}1$ м (см. рис.). Система предоставляется сама себе. Найдите натяжение нити во время движения груза и угловое ускорение шкива. При решении задачи примите, что центр шкива движется по вертикальной прямой.

4.22. Через невесомый блок переброшена нить, один конец которой прикреплен к висящему грузу массой $m_1 = 4$ кг, а другой намотан на полый цилиндр массой $m_2 = 2$ кг и радиусом $R = 4$ см. Цилиндр может катиться без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. При этом нить расположена над цилиндром параллельно наклонной плоскости. Определите, с каким ускорением будет двигаться вниз груз m_1. Чему равно натяжение нити?

4.23. Через невесомый блок переброшена нить, один конец которой прикреплен к висящему грузу массой $m_1 = 1{,}0$ кг. Другой конец нити раздвоен и симметрично прикреплен к оси сплошного цилиндра массой $m_2 = 5{,}0$ кг, который может катиться без проскальзывания по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Нить параллельна наклонной плоскости. С каким ускорением будет двигаться груз m_1?



К задаче 4.24.



К задаче 4.25.

4.24. На горизонтальной плоскости лежит цилиндр массой m_1 = 10,0 кг. На цилиндр намотана нить, к свободному концу которой прикреплен груз массой m_2 = 5,0 кг. Нить перекидывается через невесомый блок и система предоставляется самой себе (см. рис.). Предполагая, что цилиндр катится по плоскости без проскальзывания, определите силу трения между плоскостью и цилиндром. Задачу решите для двух случаев: а) цилиндр сплошной; б) цилиндр полый.

4.25. На горизонтальном столе лежит катушка массой $m_1 = 50$ г с намотанной на нее нитью. Нить перекинута через невесомый блок и к концу ее подвешен груз массой $m_2 = 100$ г (см. рис.). Момент инерции катушки $I = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ кг $\cdot$ м^2, $R = 2{,}0$ см, $r = 1{,}0$ см. Принимая, что катушка катится без проскальзывания и нить катушки параллельна столу, найдите ускорение груза. Задачу решите в двух случаях: а) нить расположена выше оси катушки; б) нить расположена ниже оси катушки.

4.26. На горизонтальном столе лежит катушка ниток массой m. Ее момент инерции $I = \beta m R^2$, где β – заданный коэффициент. Внешний радиус катушки R, радиус намотанного слоя ниток r. Катушку тянут за нить с постоянной силой F. Нить составляет с горизонтом угол α и расположена ниже оси катушки. С каким ускорением и в каком направлении будет катиться катушка в отсутствии проскальзывания?

4.27. Катушка ниток находится на плоскости с углом наклона $\alpha = 60°$. Свободный конец нити прикреплен к стене так, что нить параллельна наклонной плоскости и проходит выше оси катушки. Определите ускорение, с которым катушка будет двигаться по наклонной плоскости, если ее масса $m = 50$ г, момент инерции

$I = 5{,}0 \cdot 10^{-6}$ кг м^2, а характерные радиусы катушки $R = 3{,}0$ см и $r = 2{,}0$ см. Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. При каком минимальном угле α возможно движение катушки?

4.28. Решить задачу 4.27 при условии, что нить проходит ниже оси катушки.

4.29. Сила $\vec{F} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 10$ Н, $B = 2$ Н, $C = 5$ Н, приложена к телу в точке с координатами $x_0 = 0{,}1$ м, $y_0 = 0{,}2$ м, $z_0 = 0{,}5$ м. Рассчитать момент силы относительно а) начала координат; б) оси X; в) оси Y.

5. Законы изменения и сохранения импульса, энергии и момента импульса

Согласно второму закону Ньютона для системы материальных точек, скорость изменения импульса системы определяется только внешними силами, действующими на систему:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} .$$

Тогда импульс системы сохраняется **строго**

$$\vec{p} = const,$$

если

$$\sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0 .$$

Возможна ситуация, когда равна нулю только проекция равнодействующей на некоторую ось X

$$\sum F_{ix}^{\text{внеш}} = 0,$$

тогда будет сохраняться проекция импульса на эту ось

$$p_x = const .$$

Закон сохранения импульса выполняется **приближенно**, если внутренние силы в момент взаимодействия много больше внешних:

$$\sum F_{ix}^{\text{внутр}} >> \sum F_{ix}^{\text{внеш}} .$$

В этом случае внешними силами можно пренебречь.

Пространственной характеристикой действия силы является работа. Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$ называется скалярное произведение:

$$\delta A = \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{r}\right)$$

Если сила изменяется по модулю и направлению, работа на конечном перемещении 1→2 рассчитывается как сумма элементарных работ:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{r}\right).$$

Если сила постоянна:

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F}, \mathrm{d}\vec{r}\right) = \left(\vec{F}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right).$$

Если под действием силы тело совершает вращательное движение, для расчета работы справедливо следующее соотношение:

$$A = \int_1^2 \left(\vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}\right).$$

Изменение кинетической энергии тела или системы тел есть результат работы всех сил:

$$\Delta W_{\text{к}} = A_{\text{всех сил}}.$$

Изменение потенциальной энергии определяется работой консервативных сил:

$$\Delta W_{\text{п}} = -A_{\text{конс}}.$$

Тогда изменение полной механической энергии есть результат работы неконсервативных сил:

$$\Delta W = A_{\text{неконс}}.$$

Для расчета кинетической энергии абсолютно твердого тела при вращательном и сложном движении используются следующие соотношения:

$$W_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

$$W_{\text{к}} = \frac{I_C\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon_C{}^2}{2},$$

где ω – угловая скорость, υ_C – скорость центра масс.

При расчете потенциальной энергии нужно помнить, что потенциальная энергия твердого тела в гравитационном поле определяется положением его центра масс.

Скорость изменения **момента импульса** системы тел определяется векторной суммой моментов всех внешних сил:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{M}_i^{\text{внешн.}}.$$

Тогда момент импульса сохраняется

$$\vec{L} = \text{const},$$

если

$$\sum \vec{M}_i^{\text{внешн.}} = 0.$$

По аналогии с законом сохранения импульса, возможно выполнение закона только в проекции на определенную ось.

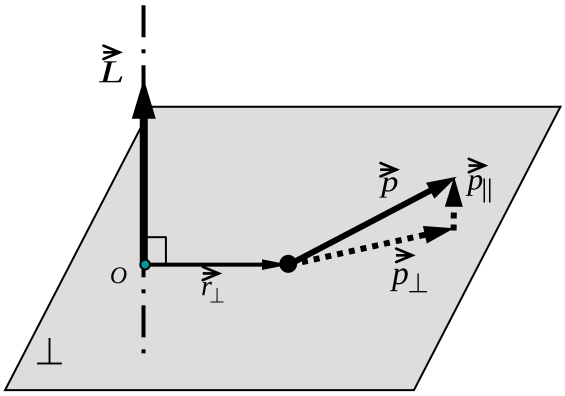


Рис. 5.1

В случае движения материальной точки, момент импульса относительно оси зависит от импульса и расстояния до оси (см. рис. 5.1):

$$\vec{L} = \left[\vec{r}_{\perp}, \vec{p}_{\perp}\right] .$$

Момент импульса твердого тела при вращательном движении определяется соотношением:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} .$$

Если твердое тело совершает сложное движение, момент импульса относительно мгновенной неподвижной оси связан с моментом импульса относительно оси, проходящей параллельно ей через центр масс соотношением

$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \left[\vec{r}_{OC}, \vec{p}\right].$$

а) Работа. Законы изменения и сохранения энергии и импульса.

5.1. Шар массой $m = 0{,}10$ кг свободно падает с высоты $h = 1{,}25$ м на горизонтальную плоскость. Найдите изменение импульса при абсолютно неупругом и абсолютно упругом ударах. Укажите на рисунке вектор изменения импульса $\Delta\vec{p}$.

5.2. Материальная точка массой $m = 1{,}0$ кг равномерно движется по окружности со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Найдите изменение импульса за одну четверть периода; половину периода; целый период.

5.3. Падающий вертикально шарик массой $m = 0{,}2$ кг ударился о пол имея скорость $\upsilon = 5$ м/с, и подпрыгнул на высоту $h = 0{,}4$ м. Найдите среднюю силу, действующую со стороны пола на шарик, если длительность удара $\tau = 0{,}01$ с.

5.4. Тело массой m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью υ_0. Спустя время τ тело упало на Землю. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите: а) изменение импульса тела за время полета; б) среднее значение импульса за время полета.

5.5. Тело массой $m = 5{,}0$ кг брошено под углом $\alpha = 30^{\circ}$ к горизонту с начальной скоростью $\upsilon_0 = 20$ м/с. Укажите на рисунке вектор изменения импульса за время полета. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите изменение импульса тела за время полета. Определите время полета тела.

5.6. Две материальные точки массой m_1 и m_2 скользят по гладкой горизонтальной плоскости со скоростями υ_1 и υ_2 соответственно, причем $\vec{\upsilon}_1 \perp \vec{\upsilon}_2$. В результате взаимодействия точки образуют единое целое. Найдите скорость совместного движения.

5.7. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью υ = 100 м/с на высоте h = 80 м, разорвался на две одинаковые части. Через время $\tau = 0{,}5$ с после взрыва одна часть снаряда упала на землю под тем местом, где произошел взрыв. Какова скорость второй части снаряда? Под каким углом к горизонту она направлена?

5.8. Две платформы свободно движутся навстречу друг другу по двум парам параллельных рельсов. Когда платформы находятся друг против друга, с каждой из них на встречную перебрасываются грузы массой m = 100 кг каждый. После этой переброски первая платформа останавливается, вторая же продолжает двигаться в прежнем направлении со скоростью $\upsilon_2' = 4{,}25$ м/с. Каковы скорости платформ до обмена грузами? Массы платформ с грузами: m_1 = 1,0 т и m_2 = 2,0 т.

5.9. Платформа массой m_1 = 140 кг стоит неподвижно на гладкой горизонтальной поверхности. Находящийся на краю платформы человек массой m_2 = 60 кг переходит на противоположный ее край. Какова длина платформы, если она при этом сдвинулась на расстояние S = 1,2 м?

5.10. Гимнаст массой m_1, имея при себе камень массой m_2, прыгает под углом α к горизонту со скоростью υ. В момент, когда им была достигнута наибольшая высота, он бросает камень со скоростью υ_0 относительно себя назад. На сколько увеличится дальность прыжка гимнаста вследствие того, что им был брошен камень?

Указание: относительная скорость $\vec{\upsilon}_{12} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2$ определяется для фиксированного момента времени. В данном случае нужно рассмотреть момент после броска.

5.11. Реактивный двигатель Циолковского выбрасывает продукты сгорания порциями, масса которых m = 2 кг и скорость при вылете из сопла двигателя u = 1000 м/с (относительно сопла). Масса ракеты в начальный момент M = 300 кг, начальная скорость равна нулю. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением Земли, найдите скорость ракеты после вылета третьей порции газа. Какую скорость υ_0 имела бы ракета при вылете трех порций одновременно?

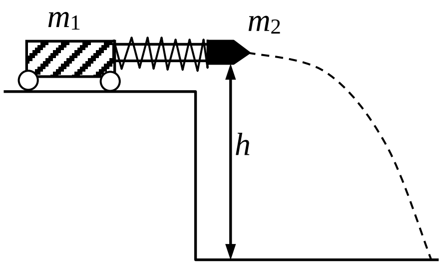
5.12. Для движения ракеты из нее выбрасывается непрерывная струя газа. Принимая, что выбрасываемый газ имеет неизменную относительно ракеты скорость u = 320 м/с, найдите, спустя какое время после пуска ракеты, последняя будет обладать скоростью υ = 160 м/с.

Масса ракеты вместе с начальным зарядом (газом) равна m = 0,30 кг. Каждую секунду из ракеты выбрасывается масса μ = 0,10 кг/с газа. Сопротивлением воздуха пренебречь. Притяжение Земли не учитывать.

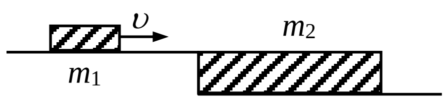
5.13. По какому закону должна меняться во времени масса ракеты M, чтобы она во время работы оставалась неподвижной в поле тяжести Земли, если скорость газовой струи относительно сопла ракеты равна υ? Начальная масса ракеты с топливом m_0.

5.14. Платформа массой m_0 движется со скоростью υ_0. Из бункера на нее начинают высыпать песок. Скорость погрузки равна μ кг/с. Найдите зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки.

5.15. По горизонтальным рельсам может перемещаться без трения пружинная пушка массой m_1. В результате выстрела снарядом массой m_2 в горизонтальном направлении пушка приобрела скорость υ_1. Расстояние по вертикали между начальным и конечным положением снаряда h (см. рисунок). Считая, что перед выстрелом пушка была неподвижна, определите: а) скорость снаряда сразу после выстрела; б) изменение импульса снаряда за время выстрела; в) энергию сжатой пружины; г) работу силы тяжести по перемещению снаряда.



К задаче 5.15.



К задаче 5.24.

5.16. Частица может двигаться в плоскости x, y. На нее действует сила $\vec{F} = a\vec{i}$, где a = 5 Н. Вычислить работу этой силы при перемещении частицы из точки с координатами $x_1 = 1$ м, $y_1 = 2$ м, в точку с координатами $x_2 = 7$ м, $y_2 = 8$ м.

5.17. Решить задачу 5.16 при условии, что частица движется в трехмерном пространстве из точки (1, 2, 5) в точку с координатами (7, 8, 9). Координаты заданы в системе СИ.

5.18. Частица движется в плоскости x, y под действием силы $\vec{F} = -F_0 \cos\omega t \cdot \vec{i} - F_0 \sin\omega t \cdot \vec{j}$. Кинематический закон движения частицы имеет вид $\begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases}$. Какую работу совершает сила $\vec{F}$ на пути S?

5.19. Лифт массой $m = 1\cdot 10^3$ кг поднимается с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Чему равна работа силы натяжения каната, с помощью которого поднимается лифт, за первые $\tau = 4$ с движения?

5.20. На тело действует центральная сила, изменяющаяся по закону $\begin{cases} F_{1r} = \rho r \text{ при } r \le R \\ F_{2r} = \dfrac{\rho R^3}{r^2} \text{ при } r > R \end{cases}$. Здесь ρ – заданная константа. Чему равна работа этой силы по перемещению тела из силового центра в бесконечно удаленную точку? Нарисуйте графики зависимости $F(r)$ и $A(r)$.

5.21. Какую минимальную работу необходимо совершить для того, чтобы перетащить цепочку массой m и длиной ℓ с одной полуплоскости на другую? Коэффициент трения при движении цепочки по первой полуплоскости равен μ_1, по второй – μ_2. Цепочка вначале располагалась перпендикулярно к границе раздела полуплоскостей.

5.22. Капля с начальной массой m падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную μ кг/с. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5.23. Найдите коэффициент трения μ между заторможенными колесами автомобиля и асфальтовым покрытием, если при скорости υ = 36 км/ч тормозной путь автомобиля S = 6 м.

5.24. Брусок массой m_1, имеющий скорость υ, соскальзывает со стола на брусок массой m_2, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности (см. рис.). Найдите путь, который пройдет первый брусок относительно второго. Коэффициент трения между брусками μ.

5.25. Доска длиной $\ell = 0{,}45$м с покоящимся на ее краю бруском движется со скоростью $\upsilon = 3$ м/с. При резкой остановке доски брусок начинает скользить по ее поверхности. При достижении бруском противоположного края доски его кинетическая энергия уменьшилась в три раза по сравнению с первоначальной. Найдите коэффициент трения между бруском и доской.

5.26. Тело массой m движется в положительном направлении оси X под действием силы $\vec{F}$, проекция которой на ось X задается выражением $F_x = c\cdot x$, где $c = const > 0$. В точке с координатой x_0, тело имело скорость υ_0. Найдите зависимость скорости тела от координаты.

Трение отсутствует.

5.27. Тело массой $m = 4$ кг движется вдоль оси X, имея в точке с координатой $x_1 = 2$ м скорость $\upsilon_1 = 10$ м/с. На тело действует тормозящая сила, модуль которой меняется по закону $F = \frac{k}{x^2}$, где $k = 100\,\text{Н} \cdot \text{м}^2$. Определить скорость тела в точке с координатой $x_2 = 10$ м.

5.28. На параллельных нитях равной длины ℓ висят два одинаковых шара радиусом R так, что они соприкасаются. Один из шаров отклоняют до горизонтального положения нити и отпускают без толчка. После соударения второй шар приобретает скорость υ_2 На какую высоту поднимется первый шар после удара? Рассчитайте долю механической энергии системы, перешедшую во внутреннюю при ударе.

5.29. Пуля ударяется с горизонтальной скоростью υ = 400 м/с в шар, подвешенный на нити длиной ℓ = 4 м, застревает в нем. Радиус шара много меньше длины нити. Масса пули m_0 = 20 г и масса шара m = 5 кг. Найдите угол α, на который отклонится нить подвеса шара, Какая доля кинетической энергии пули расходуется при ударе на нагревание и деформацию шара? На какой угол α_0 отклонится нить, если соударение пули с шаром будет абсолютно упругим?

5.30. Определите соотношение масс соударяющихся шаров, один из которых до столкновения покоился, если после центрального упругого удара шары разлетаются в противоположные стороны с одинаковыми скоростями.

5.31. В результате столкновения движущейся прямолинейно частицы с неподвижной, они разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения первой частицы. Найдите отношение масс частиц m_1 / m_2, если угол между их направлениями разлета $\theta = 60°$.

5.32. Частица испытала соударение с покоившейся частицей той же массы. Покажите, что угол между направлениями их разлета после соударения равен $90°$ при упругом ударе и окажется меньше $90°$, если удар не является абсолютно упругим.

Указание: Воспользуйтесь общефизическим законом сохранения энергии и связью энергии и импульса.

5.33. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $W_\text{п} = ax^3 + bx^2 + cz$. Определите силу, действующую на частицу.

5.34. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $W_\text{п} = axyz$. Определите силу, действующую на частицу.

5.35. Тело находится в центральном поле (в поле Земли). Проекция силы, действующей на него со стороны поля, меняется по закону $F_r = -\dfrac{a}{r^2}$, где a – заданная константа. Чему будет равна потенциальная энергия тела в точке, удаленной на расстояние r от силового центра, если нулевой уровень энергии выбран в бесконечно удаленной точке ($W_{\text{п}}(\infty) = 0$).

5.36. В условии задачи 5.20 найдите потенциальную энергию тела в произвольной точке, если нулевой уровень потенциальной энергии выбран в силовом центре ($W_{\text{п}}(0) = 0$).

5.37. Груз копра массой m_1 = 350 кг падает с высоты h = 2 м и ударяет о сваю, вбитую в грунт. Масса сваи m_2 = 75 кг. После удара свая погрузилась в грунт на глубину S = 4 см. Считая соударение копра и сваи неупругим, найдите среднюю силу сопротивления грунта забивке сваи. Какая доля кинетической энергии груза расходуется при ударе груза о сваю на деформацию этих тел?

5.38. Брусок массой m_1 без трения соскальзывает с высоты h по клину с углом α и массой m_2. Клин может скользить по гладкой горизонтальной поверхности. Найдите скорость клина в момент, когда брусок достигнет его основания.

5.39. Тело массой m въезжает без трения в горку, которая может скользить по горизонтальной плоскости. Отношение массы горки к массе тела равно n. Высота горки H. Какой минимальной скоростью должно обладать тело, чтобы достигнуть вершины горки?

5.40. Потенциальная энергия частицы массой m = 3,0 кг в некотором силовом поле определяется выражением $W_{\text{п}} = a\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, где a = 4 Дж/м^2. Частица начинает двигаться без начальной скорости из точки с координатами (3, 3, 3). Найдите ее скорость в тот момент, когда она будет находиться в точке с координатами (1, 1, 1). Координаты заданы в системе СИ.

5.41. Потенциальная энергия тела массой m, находящегося в одномерном потенциальном поле, задается соотношением: $W_{\text{п}} = -ax + bx^2$, где a и b – положительные константы. В точке с координатой x_0 скорость тела υ_0. Определите максимальную скорость тела в процессе движения. При каком положении тела его потенциальная энергия минимальна?

б) Законы изменения и сохранения момента импульса и энергии

5.42. Радиус-вектор материальной точки массой $m = 1$ кг изменяется со временем по закону: $\vec{r} = At^2\vec{i} + Bt\vec{j} + C\vec{k}$, где $A = 3$ м/с^2, $B = 2$ м/с, $C = 1$ м. Найдите зависимость от времени момента импульса материальной точки относительно оси Z.

5.43. Частица массой $m = 10$ г движется в плоскости XY. Ее кинематический закон движения имеет вид $\begin{cases} x = \upsilon \cdot t \\ y = b \end{cases}$, где $\upsilon = 20$ см/с, $b = 10$ см. Чему равен момент импульса частицы относительно оси Z? Укажите на рисунке направление вектора момента импульса.

5.44. Шарик массой m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью υ_0. Найдите модуль момента импульса шарика относительно точки бросания в зависимости от времени движения.

5.45. Цилиндр радиусом $R = 10$ см и массой $m = 200$ г вращается вокруг своей геометрической оси, делая $n = 10$ об/с. Найдите момент импульса цилиндра, если: а) он сплошной; б) полый. Укажите на рисунке направление вектора момента импульса.

5.46. Сплошной цилиндр радиусом $R = 10$ см и массой $m = 200$ г катится по столу без проскальзывания, делая $n = 10$ об/с. Найдите момент импульса цилиндра относительно оси, совпадающей с линией касания цилиндра со столом в начальный момент времени. Укажите на рисунке направление вектора момента импульса.

5.47. При частоте вращения ν = 5 об/с кинетическая энергия маховика, вращающегося вокруг оси, $W_к$ = 1000 Дж. Маховик представляет собой сплошной диск радиуса R = 20 см. Какую силу надо приложить по касательной к его ободу, чтобы за время τ = 30 с уменьшить угловую скорость в k = 2 раза?

5.48. Маховик с моментом инерции I = 0,50 кг·м^2 соединен со шкивом радиусом R = 4,0 см. На шкив намотана нить, к концу которой привязан груз массой m = 500 г. Груз устанавливают на высоте h = 1,0 м от поверхности пола. С каким числом оборотов в секунду будет вращаться маховик, когда груз достигнет пола?

5.49. Однородный стержень длиной ℓ = 4,0 м может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через один из его концов. Какую горизонтальную скорость необходимо сообщить нижнему концу стержня, чтобы последний достиг горизонтального положения?

5.50. По наклонной плоскости с высоты $h = 0{,}20$ м без проскальзывания скатываются: а) обруч; б) диск; в) шар. Определите скорость центра масс каждого из тел в нижней точке наклонной плоскости. Чему будет равна скорость в отсутствие силы трения?

5.51. Два одинаковых стержня длиной ℓ каждый соединены в виде буквы «Г» и подвешены за точку соединения. Какую угловую скорость надо сообщить системе, чтобы один из стержней достиг горизонтального положения?

5.52. На скамье Жуковского стоит человек, держа в вытянутых в стороны руках по гире массой m = 10 кг каждая. Расстояние между осью вращения и каждой гирей при этом r_1 = 0,75 м. Скамью приводят во вращение с числом оборотов n_1 = 0,50 об/с и предоставляют систему самой себе. Какую работу должен произвести человек, чтобы во время вращения системы приблизить гири к оси вращения до расстояния r_2 = 25 см? Момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения I_0 = 0,60 кг·м^2 считать постоянным. Трением в оси скамьи пренебречь.

5.53. На неподвижной скамье Жуковского стоит человек, держа в руках ось массивного колеса, вращающегося в вертикальной плоскости с угловой скоростью ω_0 = 10 рад/с. Ось колеса перпендикулярна оси вращения скамьи Жуковского. Моменты инерции относительно оси вращения: человека I_1 = 1,8 кг·м^2, скамьи I_2 = 0,4 кг·м^2 и колеса I_3 = 1,0 кг·м^2. Найдите угловую скорость системы после того, как человек повернет ось вращения колеса на угол $\pi/2$: а) вверх; б) вниз, совместив ее с осью вращения скамьи. Изменением угловой скорости колеса относительно собственной оси вращения пренебречь.

5.54. Человек стоит на скамье Жуковского, вращающейся с числом оборотов n_0 = 0,5 об/с. Человек держит однородный стержень длиной ℓ = 1,5 м и массой m = 3,0 кг так, что стержень перпендикулярен к оси вращения, а центр масс стержня находится на оси вращения. Момент инерции человека и скамьи I_0 = 1,6 кг·м^2. Какова станет угловая скорость системы, если человек совместит стержень с осью вращения?

5.55. Из центра диска, свободно вращающегося с угловой скоростью ω_0, выходит человек и идет равномерно со скоростью υ по радиусу диска. Масса диска m_1, масса человека m_2, радиус диска R. На какой угол повернется диск к тому времени, когда человек дойдет до его края?

5.56. Тонкий однородный стержень массой m и длиной ℓ может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В другой конец стержня попадает пуля массой m_0, летящая горизонтально со скоростью υ_0. Пуля застревает в стержне. На какую высоту поднимется нижний конец стержня? Какая доля энергии перейдет в тепло в результате удара?

5.57. Сплошной цилиндр, радиус которого R, раскрутили до угловой скорости ω_0 и положили на шероховатый стол. С какой скоростью будет двигаться центр масс цилиндра к моменту, когда прекратится его проскальзывание?

5.58. Шар массой $m_0 = 10$ г, двигавшийся со скоростью $\upsilon_0 = 5$ м/с, испытал упругое лобовое соударение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели (вектор скорости перпендикулярен оси гантели). Масса каждого шарика гантели $m = 5$ г, расстояние между ними $\ell = 1$ см. Стержень, соединяющий шарики, невесом. Определите скорость движения центра масс гантели и ее угловую скорость после удара. Вся система находится на гладком столе.

5.59. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг общей вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси равны $I_1 = 0{,}2\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$ и $I_2 = 0{,}3\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, а их угловые скорости соответственно равны $\omega_1 = 5$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 10$ с$^{-1}$. Верхний диск осторожно опускают на нижний, после чего, благодаря трению, они начинают вращаться как единое целое. Найдите угловую скорость вращения дисков. Какое количество тепла выделилось при взаимодействии дисков? Рассмотрите случаи одинакового и противоположного направления угловых скоростей.

5.60. Пуля массой $m_0 = 10$ г, летящая горизонтально со скоростью $\upsilon_0 = 800$ м/с, попадает в покоящийся на столе деревянный шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 0{,}5$ м и застревает в нем. Удар пришелся на расстоянии $\ell = 40$ см выше центра масс шара. Спустя некоторое время движение шара по столу переходит в качение без проскальзывания. Считая, что $m_0 << m$, определить скорость центра масс шара в этот момент.

5.61. На гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длиной $\ell = 10$ см и массой $m = 200$ г. В одну из точек стержня упруго ударяется шарик массой $m_0 = 50$ г, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? При каком соотношении масс это возможно?

5.62. По горизонтальной поверхности без проскальзывания катится обруч массой $m = 100$ г и радиусом $R = 5$ см. Обруч наезжает на ступеньку высотой $h = 1$ см. Какую минимальную скорость должен иметь обруч, чтобы вкатиться на ступеньку?

5.63. С высоты H с горки без проскальзывания скатывается бочка с водой. Масса бочки m_1, масса воды m_2. Определить скорость центра масс бочки в конце пути, если вязкость воды пренебрежимо мала. Массой крышек бочки пренебречь.

6. Колебания и волны

Колебательным будем называть процесс, обладающий той или иной степенью повторяемости во времени. В случае свободных гармонических колебаний изменяющаяся величина подчиняется **гармоническому закону**:

$$A(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где

A_m – амплитуда,

$(\omega t + \varphi_0)$ – фаза колебаний,

ω – частота,

φ_0 – начальная фаза.

Первая и вторая производные изменяющейся величины тоже подчиняются гармоническому закону. Гармонический закон является решением дифференциального уравнения свободных гармонических колебаний:

$$\frac{\mathrm{d}^2 A(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A(t).$$

Свободные гармонические колебания возникают, если в системе отсутствуют потери энергии. Во всякой реальной системе колебания будут затухать. В этом случае справедливо дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 A = 0,$$

где β – коэффициент затухания.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$A(t) = A_m \exp\{-\beta t\}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний, A_m и φ_0 определяются из начальных условий.

Рассмотрим механические колебания на примере математического маятника. На рис. изображены действующие силы для произвольного положения системы. Будем считать силу сопротивления движению прямо пропорциональной скорости:

$$\vec{F} = -r \cdot \vec{v}.$$

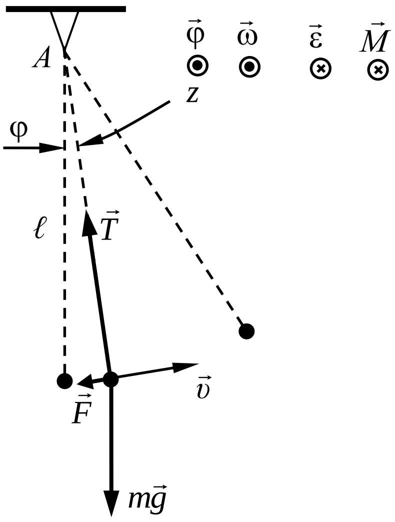


Рис. 6.1.

Тогда основное уравнение динамики вращательного движения $I_A \vec{\varepsilon} = \sum \vec{M}$ примет вид:

$$I_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -rv\ell - mg\ell \sin\varphi.$$

Учтем, что $I_A = m\ell^2$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $v = \frac{d\varphi}{dt}\ell$, и перенесем все слагаемые в левую часть, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0.$$

Введем обозначения

$2\beta = \frac{r}{m}$, β – коэффициент затухания

$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ собственная частота.

Тогда дифференциальное уравнение затухающих колебаний примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2\varphi = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\varphi(t) = \varphi_m \exp\{-\beta t\}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний, φ_m и φ_0 определяются из начальных условий.

Механические колебания могут распространяться в упругой среде и переносить энергию. В этом случае говорят о возникновении волны. Для описания волны вводятся понятия длины волны (λ) и скорости ее распространения $v = \lambda \cdot \nu$, где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ – частота колебаний в Гц.

6.1. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону: $x = 1{,}2\cos[\pi(2t/3 + 1/4)]$ (м). Определите амплитуду, период, частоту и начальную фазу колебаний. Найдите амплитуды скорости и ускорения.

6.2. Точка движется вдоль оси x по закону: $x = a\cos(\omega t - \pi/2)$. Постройте графики: а) зависимости от времени смещения, скорости и ускорения; б) зависимости скорости от смещения; в) зависимости ускорения от смещения.

6.3. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой A_m. Какое временя (в долях периода) требуется для смещения точки на расстояние $A_m/2$ от ее положения равновесия. Какое время требуется для перехода точки из положения равновесия в положение, наиболее удаленное от положения равновесия?

6.4. Как, зная амплитуду смещения A_m и амплитуду скорости υ_m, Найдите частоту гармонических колебаний?

6.5. Частица колеблется вдоль оси x по закону x = 0,1 sin(6,28t) (м). Найдите среднее значение модуля скорости частицы:

а) за первую 1/4 часть периода, б) за период колебаний.

6.6. Частица колеблется вдоль оси x по закону $x = a\cos\omega t$. Считая вероятность W нахождения частицы в интервале от $-a$ до $+a$ равной единице, найдите зависимость от x плотности вероятности $w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}$ нахождения частицы в данной области.

Указание: Вероятность обнаружения частицы в данной области равна отношению времени пребывания частицы в этой области к половине периода.

6.7. Шарик совершает колебания по закону $x_1 = 3\cos(\omega t + \pi/3)$ (см) относительно подставки, к которой он прикреплен через пружину. Подставка в свою очередь колеблется относительно стола по закону $x_2 = 8\sin(\omega t + \pi/6)$ (см). Оба колебания происходят в вертикальном направлении. Запишите уравнение колебаний шарика относительно стола.

6.8. Уравнения движения частицы в плоскости x, y, имеет вид: $\begin{cases} x = a\sin\omega t \\ y = b\cos\omega t \end{cases}$, где a и b – амплитуды колебаний. Найдите уравнение траектории частицы и направление ее движения по этой траектории.

6.9. При какой длине нити период колебаний математического маятника будет равен 1 с? Чему равен период колебаний математического маятника длиной ℓ = 1 м?

6.10. В кабине лифта подвешен маятник, период колебаний которого в неподвижном лифте равен T_0. Каков будет период колебаний этого маятника, если лифт станет опускаться с ускорением $a = \frac{3}{4}g$?

6.11. Жидкость налита в трубку, изогнутую так, что ее колена образуют с горизонтом углы α и β. Найдите период колебаний жидкости, налитой в эту трубку и выведенной из положения равновесия, если длина осевой линии трубки ℓ. Капиллярные силы и вязкость не учитывать.

6.12. Предположим, что по одному из диаметров Земли просверлен канал. Принимая Землю за однородный шар плотностью $\rho = 5{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3, найдите время движения тела от поверхности Земли до ее центра. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/кг$\cdot$с^2.

6.13. Найдите период малых колебаний однородного стержня длиной ℓ относительно горизонтальной оси, отстоящей на 1/4 его длины от конца стержня.

6.14. При какой длине стержня период его колебаний относительно одного из его концов будет равен 1 с? Чему равен период колебаний при длине стержня в 1 м?

6.15. Горизонтальный тонкий стержень подвешен на двух параллельных нитях длиной ℓ каждая. Нити прикреплены к концам стержня. Стержень поворачивают на небольшой угол вокруг вертикальной оси OO', проходящей через середину стержня, и предоставляют самому себе. Найдите период крутильных колебаний стержня.

6.16. Круглый диск радиусом R и массой m, подвешен к потолку на трех параллельных нитях длиной ℓ каждая (трифилярный подвес). Определите период крутильных колебаний диска.

6.17. За 10 с амплитуда свободных колебаний уменьшилась в 10 раз. За какое время амплитуда уменьшится в 100 раз?

6.18. За время $t = 16{,}1$ с амплитуда колебаний уменьшается в $n = 5$ раз. Найдите коэффициент затухания β.

6.19. Найдите логарифмический декремент затухающих колебаний математического маятника длиной $\ell = 50$ см, если в процессе колебаний за время $\tau = 8$ мин он теряет 99% своей энергии.

6.20. Логарифмический декремент затухающих колебаний маятника $\delta = 0{,}02$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний после $N = 100$ полных колебаний маятника?

6.21. За время, в течение которого система совершает $N = 100$ колебаний, амплитуда уменьшается в $n = 5$ раз. Найдите добротность системы Q.

6.22. Добротность колебательной системы $Q = 8$, частота свободных колебаний $\omega = 100$ с$^{-1}$. Определите собственную частоту колебаний этой системы.

6.23. С какой скоростью распространяются волны вдоль прямой, если разность фаз колебаний двух точек, отстоящих друг от друга на расстояние ℓ = 10 см, равна $\Delta\varphi = \pi/4$, и частота колебаний ν = 3,0 Гц.

6.24. Найдите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих на расстояние ℓ = 2 м друг от друга, если длина волны λ = 1 м.

6.25. Найдите смещение от положения равновесия точки, отстоящей от источника колебаний на расстояние $\ell = \lambda/12$ для момента времени $t = T/6$. Амплитуда колебаний A_m = 0,05 м.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

7. Уравнение состояния идеального газа

Идеальный газ – это модель термодинамической системы.

Для описания термодинамической системы вводятся следующие характеристики:

Таблица 3

Название	Обозначение	Размерность	Примечание
относительная атомная масса, относительная молекулярная масса	A, M_r	а.е.м.	1 а.е.м. равна массе одного нуклона в атоме углерода ^{12}C
количество вещества	ν	моль	1моль – количество вещества, масса которого, выраженная в граммах, численно равна относительной молекулярной массе.
молярная масса	μ	кг/моль	
эффективная молярная масса смеси	$\mu_{эф}$	кг/моль	$\mu_{эф} = \frac{m}{\nu} = \frac{\sum m_i}{\sum \nu_i}$
постоянная Авогадро	N_A=6,02 *10^{23}	1/моль	число частиц в одном моле вещества
число молекул	N		
объем	V	м^3	
концентрация	n	1/м^3	число молекул в единице объема $n = N/V$
плотность	ρ	кг/м^3	масса единицы объема $\rho = m/V$
давление	p	Па	$p = \frac{dF_n}{dS}$
температура	T, t	К, ºС	$T = t + 273{,}15$

Три макропараметра, характеризующие состояние термодинамической системы, связаны между собой уравнением Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Здесь R – универсальная газовая постоянная, $R = N_A k = 8{,}31$ Дж/(моль·К), $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/моль – постоянная Больцмана.

Поскольку $\frac{m}{\mu} = \nu$, уравнение состояния идеального газа можно записать в виде:

$$pV = \nu RT.$$

Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует связь давления с температурой:

$$p = nkT.$$

Если термодинамическая система переходит из одного макросостояния в другое, говорят о протекании процесса. Среди всех возможных процессов выделяют изопроцессы, в которых при постоянном количестве вещества сохраняется какой-либо из макропараметров: давление, объем или температура. Для анализа процессов их изображают на pV-диаграмме.

При решении задач под нормальными условиями понимают $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К.

7.1. Определите массу воздуха, заключенного в сосуде объемом $V = 1$ л при $t = 27°C$ и нормальном давлении. Считайте воздух смесью газов, в которой азот составляет 78%, кислород – 21%, аргон – 1%.

7.2. Найдите плотность метана (CH_4) при нормальных условиях.

7.3. Баллон содержит идеальный газ при температуре $t_1 = 27$°С и давлении $p_1 = 200$ кПа. Из баллона выпустили 80% газа и охладили его до $t_2 = 12$°С. Какое давление установится в баллоне?

7.4. Определите массу воздуха, заключенного в пространстве между оконными рамами ($S = 2$ м^2, $\ell = 25$ см) при нормальном атмосферном давлении, если его температура линейно меняется от $t_1 = -10$°С у наружного стекла до $t_2 = 20$°С у внутреннего. Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

7.5. Объем газа при нагревании изменяется по закону $V = \alpha\sqrt{T}$, где α – постоянная величина. Начертите графики этого процесса в координатах (T, V) и (p, V).

7.6. Идеальный газ расширяется по закону $pV^2 = \text{const}$. Как меняется его температура? Начертите графики этого процесса в координатах (p, V) и (T, V).

7.7. Найдите объем сосуда, если при выкачивании воздуха поршневым насосом давление в нем после n = 5 качаний упало с p = 640 мм рт. ст. до p_n = 20 мм рт. ст. Объем поршневого цилиндра V_0 = 1600 см^3. Температуру считать постоянной.

7.8. В колбе емкостью V = 1,0 л находится m_1 = 1,0 г водорода и m_2 = 1,0 г углекислого газа. Температура смеси t = 0°С.Найдите давление смеси.

7.9. Открытая с двух концов трубка длиной $\ell = 0{,}76$ м до половины погружена в ртуть. Какая будет длина ртутного столбика, если, плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути? Атмосферное давление нормальное.

7.10. В запаянной с одного конца длинной стеклянной трубке находится воздух, запертый столбиком ртути длиной L = 10 см. Высота воздушного столба h_1 = 13 см. Трубку переворачивают открытым концом вниз, при этом длина воздушного столбика увеличивается до h_2 = 17 см. Найдите атмосферное давление.

7.11. Два шара емкостью V_0 = 280 см^3 каждый заполнены газом и соединены трубкой, сечение которой S = 1 см^2 и длина L = 17 см. Посередине этой трубки находится капля ртути, занимающая по длине трубки расстояние ℓ = 1 см. В начальный момент температура обоих шаров t = 15°С. На сколько переместится капля ртути, если левый шар нагреть на Δt = 1ºС, а правый на Δt = 1°С охладить?

7.12. В горизонтально расположенном цилиндрическом сосуде длиной L = 85 см находится подвижный поршень, делящий сосуд на две части. Найдите положение поршня в том случае, когда по одну сторону от него находится некоторое количество кислорода O_2, а по другую – такое же по массе количество водорода H_2.

7.13. Сосуд емкостью V = 200 см^3 разделен полупроницаемой перегородкой пополам. В одну половину введено m_1 = 2 мг водорода и m_2 = 4 мг гелия. Через перегородку может диффундировать гелий. Во время процесса поддерживается температура t = 27°С. Какие давления p_1 и p_2 устанавливаются в обеих частях сосуда?

7.14. Два баллона, один емкостью V_1 = 10 л, а другой V_2 = 2 л, содержат воздух под давлением: первый p_1 = 0,6 атм., а второй p_2 = 24 атм. Между баллонами имеется соединительная трубка с краном. Какое установится давление в баллонах, если открыть кран?

7.15. В двух сообщающихся сосудах объемами $V_1 = 0{,}1$ м^3 и $V_2 = 0{,}4$ м^3 находится одинаковый газ при температуре и давлении $T_1 = 370$ К, $p_1 = 12{,}2 \cdot 10^5$ Па и $T_2 = 268$ К, $p_2 = 5{,}0 \cdot 10^5$ Па соответственно. При открывании крана сосуды сообщаются. Найдите давление и температуру после установления равновесия, если процесс происходит без потери теплоты во внешнюю среду.

7.16. Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом и находится при температуре T. Во сколько раз изменится давление в такой системе, если один из сосудов нагреть и поддерживать при температуре T_1, а в другом сохранять прежнюю температуру?

7.17. Идеальный газ в количестве ν молей совершает процесс по закону $p = p_0 - \alpha V^2$, где α, p_0 – положительные константы, V – объем газа. Найдите максимальную температуру газа в ходе этого процесса.

7.18. Идеальный газ в количестве ν молей совершает процесс по закону $p = p_0 e^{-\beta V}$, где β, p_0 – положительные константы, V – объем газа. Найдите максимальную температуру газа в ходе этого процесса.

7.19. Идеальный газ в количестве ν молей совершает процесс $T = T_0 + aV^2$, где a, T_0 – положительные константы, V – объем газа. Найдите минимальное давление в ходе этого процесса. Изобразите процесс на p,V – диаграмме.

7.20. Найдите закон, по которому изменяется давление газа в откачиваемом сосуде в зависимости от времени откачки. Объем сосуда V_0, первоначальное давление p_0. Сосуд откачивается насосом с постоянной производительностью Q ($Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ – объем газа, откачиваемого насосом в единицу времени; этот объем измеряется при давлении, при котором газ поступает в насос).

8. Молекулярно-кинетическая теория

Молекулярно-кинетическая теория идеального газа рассматривает макропараметры состояния, как результат движения молекул. Температура является мерой интенсивности хаотического теплового движения молекул. Средняя кинетическая энергия движения молекул связана с температурой **теоремой Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы**. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$W_0 = \frac{1}{2}kT .$$

Тогда энергия молекулы зависит от ее строения

$$W = \frac{i}{2}kT ,$$

где i – число степеней свободы молекулы.

Для одноатомных молекул $i = 3$, двухатомных $i = 5$, многоатомных $i = 6$. Исключение составляют многоатомные молекулы, имеющие линейную структуру: для них $i = 5$.

Давление газа есть результат взаимодействия его молекул со стенками сосуда. Согласно **основному уравнению МКТ** для давления

$$p = \frac{1}{3}m_0 n < \upsilon^2 >,$$

где m_0 – масса одной молекулы,
n – концентрация молекул,
$< \upsilon^2 > = \frac{\sum_{i=1}^{N} \upsilon_i^2}{N}$ – среднее значение квадрата скорости молекул.

Квадратный корень из этой величины называют **среднеквадратичной скоростью ($\upsilon_{кв}$)**.

8.1. Определите массу одной молекулы: водорода H_2, углекислого газа CO_2 и воды H_2O.

8.2. Сколько молекул воздуха содержится в литровой банке при температуре t = 27° С и нормальном давлении? Какова масса этого воздуха (молярная масса воздуха μ = 29 г/моль)?

8.3. Найдите плотность водорода, если в объеме V = 10 см^3, содержится $N = 10^{17}$ молекул.

8.4. Принимая для воздуха μ = $29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, найдите среднюю квадратичную скорость его молекул при температуре t = 0°С.

8.5. Плотность газа при нормальном давлении равна ρ = 0,18 кг/м^3. Найдите среднюю квадратичную скорость его молекул.

8.6. Один моль идеального газа при нормальных условиях занимает объем V = 22,4 л. Оцените среднее расстояние между молекулами газа. Сравните это расстояние с диаметром молекул d.

8.7. Диаметр молекулы азота $d \approx 3 \cdot 10^{-10}$ м. Считая, что молекулы имеют сферическую форму, найдите, какая часть объема, занимаемая газом, приходится на объем самих молекул при нормальных условиях, и при давлении $p = 500\ p_0$. Расчет вести в предположении, что при этих давлениях газ не отличается от идеального.

8.8. Молекулярный пучок падает на стенку и отражается от нее по закону абсолютно упругого удара. Найдите давление пучка на стенку, если скорость молекул в пучке одинакова и равна $\upsilon = 10^3$ м/с, концентрация молекул $n = 10^{25}$ м$^{-3}$, а масса молекулы $m_0 = 3 \cdot 10^{-26}$ кг. Пучок падает на стенку нормально. Рассмотрите два случая: а) стенка неподвижна, б) стенка движется навстречу пучку со скоростью $u = 100$ м/с.

8.9. Сосуд в форме куба объемом $V = 1$ л содержит $\nu = 10^{-3}$ молей идеального газа. К каждой из шести граней куба движется одинаковое число молекул. Масса каждой молекулы $m_0 = 3 \cdot 10^{-26}$ кг, среднеквадратичная скорость теплового движения $\upsilon_{кв} = 500$ м/с. Найдите давление газа на стенку сосуда.

8.10. Согласно квантовым представлениям поток света – это поток частиц, называемых фотонами, энергия которых равна mc^2, а импульс равен mc. Известно, что на поверхность Земли падает поток энергии плотностью $J = 1{,}3 \cdot 10^3$ Вт/м^2. Определите давление, которое оказывает солнечный свет на Земной диск, в предположении, что вся падающая энергия поглощается. Чему равна сила давления света?

8.11. Часть стенки колбы электролампы накаливания, представляющей собой сферу радиусом $R = 4$ см, посеребрена. Газ из колбы откачан до давления $p_г = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ Па. Лампа потребляет мощность $N = 50$ Вт. Считая, что 90% энергии тратится на излучение, найдите отношение светового давления на посеребренную стенку к давлению газа в колбе.

8.12. Какой кинетической энергией поступательного движения обладают все молекулы окиси углерода (СО) массой $m = 7{,}0$ г при температуре $t = 127$°С? При тех же условиях найдите кинетическую энергию вращательного движения молекул.

8.13. Найдите полную кинетическую энергию молекул азота, занимающих при давлении $p = 736$ мм рт. ст. объем $V = 1000$ см^3.

8.14. Чему равна энергия поступательного движения молекул газа, заключенного в объеме $V = 1$ см^3 при нормальном давлении?

8.15. Определите, исходя из классических представлений, среднеквадратичную угловую скорость вращения молекул азота при $t = 27° C$. Расстояние между ядрами атомов в молекуле $\ell = 3{,}2\cdot 10^{-10}$ м.

8.16. Гелий находится при температуре $t = 27°C$. Кинетическая энергия хаотического теплового движения всех молекул газа $U = 10$ Дж. Рассчитайте число молекул гелия.

8.17. Определите, во сколько раз возросло давление двухатомного газа, содержащегося в сосуде при определенной температуре, в результате диссоциации одной трети молекул этого газа.

8.18. Средняя кинетическая энергия молекулы одноатомного газа $W = 6{,}0\cdot 10^{-21}$ Дж. Давление газа $p = 2{,}0\cdot 10^{5}$ Па. Найдите число молекул газа в единице объема.

8.19. Найдите среднюю кинетическую энергию молекулы азота, если $\nu = 2$ моля этого газа в объеме $V = 10$ л создают давление $p = 1{,}0\cdot 10^{6}$ Па.

8.20. Зная, что средняя квадратичная скорость вращения молекул азота $\sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = 10^{12}$ с$^{-1}$, определите среднюю скорость поступательного движения молекул этого газа. Расстояние между ядрами атомов в молекуле азота примите равным $\ell = 3{,}2\cdot 10^{-10}$ м.

8.21. В сосуде находится смесь азота и гелия. Известно, что полная кинетическая энергия вращательного движения молекул азота равна полной кинетической энергии всех молекул гелия. Определите отношение масс азота и гелия.

8.22. Сосуд, наполненный гелием, движется со скоростью $u = 100$ м/с. Температура газа $t_1 = 0°C$. Пренебрегая теплообменом между газом и стенками сосуда, определите температуру газа после резкой остановки сосуда.

8.23. В сосуде находится азот при давлении $p = 1$ атм и температуре $t = 20°C$. Считая среднюю скорость примерно равной среднеквадратичной, определите сколько молекул ударяется за время $\tau = 1$ с о стенку сосуда площадью $S = 1$ м^2.

8.24. На пружине жесткости K подвешена легкая чашка весов массой m. Вследствие беспорядочных ударов молекул она совершает колебания. Следовательно, предел чувствительности этих весов будет ограничен тепловым движением. Определите ту минимальную массу, которая может быть определена при однократном взвешивании, если температура воздуха T.

9. Первое начало термодинамики. Теплоемкость

Для описания процессов в термодинамике вводят понятия работы сил давления, количества теплоты и изменения внутренней энергии.

Работа сил давления (работа газа) в случае, если давление изменяется в процессе, рассчитывается суммированием элементарных работ

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V .$$

Работа зависит от процесса и численно равна площади под графиком на pV-диаграмме. Работа положительна, если объем газа увеличивается.

Энергия, передаваемая от одной термодинамической системы к другой путем теплообмена, называется количеством теплоты (Q). Получаемое термодинамической системой тепло считается положительным, отдаваемое – отрицательным. Коэффициент пропорциональности между полученным (отданным) количеством теплоты и изменением температуры называется теплоемкостью. Различают теплоемкость тела, удельную теплоемкость и молярную теплоемкость. При описании газов удобнее использовать последнюю:

$$C_\mu = \frac{\delta Q}{\nu \mathrm{d}T} .$$

Теплоемкость зависит от процесса. Процесс, в котором теплоемкость остается неизменной, называется политропным. Для политропного процесса можно использовать интегральную запись:

$$C_\mu = \frac{Q}{\nu \Delta T} .$$

Молярная теплоемкость численно равна количеству теплоты, которое нужно сообщить одному молю газа, чтобы изменить его температуру на один Кельвин.

Внутренняя энергия (U) является функцией состояния, ее изменение от процесса не зависит. Для всех процессов, совершаемых идеальным газом,

$$\Delta U = C_V \nu \Delta T ,$$

где C_V – молярная теплоемкость газа в изохорном процессе, т.е. в процессе, идущем без изменения объема.

Согласно молекулярно-кинетической теории молярная теплоемкость газа в изохорном процессе связана с числом степеней свободы соотношением

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

Для любого термодинамического процесса справедливо **Первое начало термодинамики**, которое можно записать в дифференциальной и интегральной форме:

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A,$$

$$Q = \Delta U + A.$$

Количество теплоты, переданное термодинамической системе, идет на изменение внутренней энергии системы и совершение системой работы.

Опираясь на первое начало термодинамики можно получить общий вид уравнения политропного процесса:

$$pV^n = const,$$

где $n = \frac{C_\mu - C_p}{C_\mu - C_V}$ – показатель политропы.

Теплоемкость в изобарном процессе, т.е. в процессе, идущем без изменения давления, C_p связана с теплоемкостью в изохорном процессе уравнением Майера:

$$C_p = C_V + R.$$

Тогда, зная уравнение конкретного политропного процесса, можно определить теплоемкость газа в этом процессе:

$$C_\mu = C_V + \frac{R}{1-n}.$$

9.1. Воздух нагревается изобарически от T_1 = 300 К до T_2 = 400 К. Найдите работу расширения воздуха, если масса его m = 0,012 кг, молярная масса μ = 0,029 кг/моль.

9.2. Идеальный газ совершает политропный процесс с показателем политропы n = 0. Газ расширяется от объема V_1 = 10 л, до объема V_2 = 40 л, начальное давление газа $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Изобразите процесс на *p, V* диаграмме. Какую работу совершает сила давления газа?

9.3. Идеальный газ в количестве ν = 3 моля взятый при температуре t = 27°С совершает политропный процесс с показателем n = 1 расширяясь объема V_1 = 10 л до объема V_2 = 30 л. Изобразите процесс на *p, V* диаграмме. Определите работу газа.

9.4. Идеальный газ в количестве ν = 2 моля совершает политропный процесс с показателем n = – 1. При этом его температура повышается от t_1 = 27° С до t_2 = 227° С. Изобразите график процесса на диаграмме p, V. Определите работу газа.

9.5. Некоторый газ расширяется по закону $p = p_0 \exp[-\alpha(V - V_0)]$, где $p_0 = 6{,}0\cdot10^5$ Па, $\alpha = 0{,}2$ м$^{-3}$, от объема $V_0 = 2{,}0$ м^3 до $V_1 = 3{,}0$ м^3. Найдите работу газа. Является ли данный процесс политропным?

9.6. Идеальный газ в количестве ν молей нагревают так, что его температура пропорциональна квадрату давления $T = b\cdot p^2$, где b – заданная константа. Изобразите процесс на p, V диаграмме. Какую работу совершает газ при увеличении давления от p_1 до p_2? Является ли этот процесс политропным?

9.7. В некотором интервале температур ν молей газа, занимающих объем V_0, расширяются так, что температура газа меняется по закону $T = aV - bV^2$, где a и b – заданные константы. Изобразите процесс на p, V диаграмме. Определите работу газа при увеличении его объема в θ раз. Является ли этот процесс политропным?

9.8. Выразите работу, совершенную ν молями идеального газа при политропном процессе с показателем n через температуры T_1 и T_2 начального и конечного состояния.

9.9. Теплоизолированный цилиндр, закрытый с обоих концов, разделен подвижным теплоизолирующим поршнем пополам. Обе половины цилиндра, объемом V_0 каждая, заполняются идеальным газом до давления p_0. Найдите работу внешних сил, которую нужно совершить, чтобы, медленно двигая поршень, сместить его до половины объема одной из частей.

9.10. В цилиндре под невесомым поршнем находится азот. Первоначальное давление газа на поршень уравновешивается атмосферным давлением p_0. Действуя на поршень извне, его выдвигают из цилиндра настолько медленно, что температура газа в цилиндре практически не меняется. При увеличении объема в $N = 5$ раз совершенная работа оказалась равной $A^* = 100$ Дж. Определите начальный объем газа.

9.11. Молярная теплоемкость идеального газа в некотором процессе остается постоянной и равной C_μ. Получите уравнение этого процесса и выразите его через p, V параметры.

9.12. Идеальный газ в количестве ν молей совершает процесс, при котором работа газа пропорциональна приращению температуры $\delta A = b\cdot \mathrm{d}T$, где b – заданная константа. Получите уравнение этого процесса и выразите его через p, V параметры. Является ли этот процесс политропным?

9.13. Идеальный газ сжимается под поршнем так, что уходящая в окружающую среду теплота равна приращению внутренней энергии газа. Чему равна теплоемкость этого процесса? Определите уравнение процесса и выразите его через p, V параметры. Является ли этот процесс политропным?

9.14. При изобарическом сжатии некоторого количества кислорода затрачена работа $A^* = 800$ Дж. Какое количество тепла выделилось в окружающую среду при сжатии? Как изменилась внутренняя энергия кислорода?

9.15. Два моля окиси углерода CO расширяются изотермически при температуре $T = 300$ К так, что объем газа увеличивается в $\theta = 10$ раз. Найдите количество тепла, необходимое для осуществления этого процесса, и работу газа при расширении.

9.16. В закрытом сосуде объемом $V = 2{,}5$ л находится водород при температуре $t_1 = 17°$ С и давлении $p_1 = 100$ мм.рт.ст. Водород охлаждают до температуры $t_2 = 0°$ С. Определите: а) приращение внутренней энергии газа; б) количество отданного газом тепла.

9.17. Некоторое количество азота (масса $m = 1{,}0$ кг, начальная температура $T_1 = 293$ К) расширяется адиабатически так, что его объем увеличивается в $\theta = 10$ раз. Найдите работу расширения азота.

9.18. Азот, занимавший объем $V_1 = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3 при давлении $p_1 = 1{,}0 \cdot 10^6$ Па, адиабатически расширился так, что давление его стало равным $p_2 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Найдите работу газа.

9.19. Воздух, массой $m = 10$ кг, расширяется адиабатически. Температура его меняется от $T_1 = 600$ К до $T_2 = 300$ К. Считая воздух двухатомным газом с молярной массой $\mu = 0{,}029$ кг/моль, найдите работу газа.

9.20. Кислород, начальный объем и начальное давление которого $V_1 = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3 и $p_1 = 2{,}0 \cdot 10^5$ Па, расширяется до объема $V_2 = 2V_1$. Найдите работу газа, изменение внутренней энергии и количество подведенного тепла, если расширение происходит: а) изобарически; б) изотермически; в) адиабатически.

9.21. Инертный газ совершает политропный процесс с показателем политропы $n = 2$. Начальные параметры газа – давление p_1 и объем V_1. Конечный объем V_2. Определите: а) работу, совершаемую газом; б) изменение внутренней энергии газа; в) количество подведенного тепла.

9.22. Газ азот совершает политропный процесс с показателем политропы n = 1,4. Определите молярную теплоемкость газа в этом процессе.

9.23. Смесь двух молей гелия и четырех молей азота охлаждают при постоянном объеме на Δt = 20°С. Найдите изменение внутренней энергии и молярную теплоемкость смеси газов в этом процессе.

9.24. При изобарическом нагревании одноатомный газ совершил работу A. Определите количество полученного газом тепла.

9.25. Газ гелий расширяется по закону pV^3 = const. Начальное состояние газа характеризуется параметрами p_1 и V_1. В конечном состоянии объем газа равен V_2. Найдите изменение внутренней энергии и молярную теплоемкость газа в данном процессе.

9.26. Смесь идеальных газов с теплоемкостью C_V совершает политропный процесс с показателем политропы n = 0. Какова молярная теплоемкость газа при этом процессе?

9.27. Углекислый газ (CO_2) совершает политропный процесс с показателем политропы $|n| \to \infty$. Какова молярная теплоемкость газа при этом процессе?

9.28. Идеальный газ совершает политропный процесс с показателем политропы n = 1. Какова молярная теплоемкость газа при этом процессе?

9.29. При расширении идеального одноатомного газа его давление меняется по закону $p = b/V^2$, где b – константа. Найдите молярную теплоемкость газа при этом процессе.

9.30. Найдите молярную теплоемкость идеального газа, расширяющегося по закону $VT^3 = const$, если его молярная теплоемкость в изохорном процессе равна C_V.

9.31. Молярная теплоемкость газа в процессе $pT = const$ равна C_μ = 29 Дж/(моль·К). Определите число степеней свободы молекулы газа.

9.32. Молярная теплоемкость газа при постоянном давлении составляет C_p = 29 Дж/(моль·К). Найдите число степеней свободы молекул газа.

9.33. Найдите молярную теплоемкость идеального многоатомного газа для политропного процесса, в котором давление пропорционально объему.

9.34. Найдите показатель адиабаты γ для смеси, состоящей из ν_1 молей одноатомного газа и ν_2 молей двухатомного газа.

9.35. При каких значениях показателя политропы теплоемкость газа отрицательна?

9.36. При расширении идеального одноатомного газа его давление изменяется по закону $p = p_0 + aV$, где p_0 и a – заданные константы. Найдите молярную теплоемкость газа в этом процессе. Является ли этот процесс политропным?

10. Второе начало термодинамики. Термодинамические циклы. Энтропия

Второе начало термодинамики определяет направления процессов, происходящих в природе самопроизвольно. В этом разделе будут рассмотрены характеристики циклических процессов и условия, необходимые для их протекания.

Цикл называется прямым, если работа совершенная газом за цикл положительна. Прямой цикл используется в тепловых машинах. Для тепловой машины вводится понятие коэффициента полезного действия (η)

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{подв}}},$$

где A – результирующая работа газа за цикл,

$Q_{\text{подв}}$ – подведенное количество теплоты.

В условиях задач, для простоты, коэффициент полезного действия тепловой машины будем называть КПД цикла.

Если для каждого участка цикла записать первое начало термодинамики

$$Q_i = \Delta U_i + A_i,$$

а затем просуммировать все участки с учетом знаков работы и количества теплоты, получим

$$Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}} = A.$$

Изменение внутренней энергии за цикл равно нулю, т.к. система вернулась в исходное состояние. Тогда выражение для КПД можно переписать в виде:

$$\eta = \frac{Q_{\text{подв}} + Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{подв}}} = 1 + \frac{Q_{\text{отв}}}{Q_{\text{подв}}},$$

где $Q_{\text{подв}} > 0$ – подведенное тепло,

$Q_{\text{отв}} < 0$ – отведенное тепло.

Если результирующая работа за цикл отрицательна, цикл называется обратным. Обратный цикл лежит в основе работы теплового насоса и холодильной установки.

Для анализа цикла, его следует изобразить на p, V диаграмме.

Отношение количества теплоты полученного от нагревателя к температуре нагревателя называется приведенным теплом. Для равновесного процесса приведенное тепло равно изменению энтропии системы

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}.$$

Энтропия является функцией состояния, ее изменение определяется только характеристиками начального и конечного состояний системы и не зависит от процесса перехода, даже если этот процесс был неравновесным. Для расчета изменения энтропии справедлива формула:

$$S_2 - S_1 = c_V \nu \ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Согласно второму началу термодинамики при протекании самопроизвольных процессов энтропия изолированной системы не может убывать.

10.1. Найдите количество теплоты, передаваемой холодильнику в цикле Карно, совершающемуся между тепловыми резервуарами с температурами t_1 = 200°С и t_2 = 10°С, если количество теплоты, взятое у нагревателя, равно Q_1 = 400 Дж.

10.2. Найдите работу одного моля двухатомного газа, совершающего цикл Карно, если при изотермическом расширении его объем увеличивается в a = 2,5 раза, а при последующем адиабатическом расширении он производит работу $A_{ад}$ = 6270 Дж.

10.3. Найдите коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя, зная, что для ν = 3 моль двухатомного газа, совершающего этот цикл, при его адиабатическом сжатии работа внешних сил $A^*_{ад} = 12{,}6\cdot10^3$ Дж. Температура нагревателя T_1 =600 К.

10.4. Чему равно теоретически наибольшее количество теплоты, которое может быть отнято с помощью холодильной машины от охлаждаемого ею тела за цикл? Температура тела t_x = –10°С, температура воды, которой передается теплота от тела, t = +10°С. Работа внешних сил за цикл A^* = 100 кДж.

10.5. Двухатомный газ совершает круговой процесс, график которого состоит из двух изохор и двух изобар. Найдите КПД этого цикла, если предельные значения объема газа V_1 = 0,10 м^3 и V_2 = 0,25 м^3, а давления p_1 =1,0 атм и p_2 = 2,5 атм.

10.6. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изотермических процессов с температурами T_1 = 300 К и T_2 = 500 К и двух изохорных с объемами V_2 и V_1, причем $V_2 = a{\cdot}V_1$, где a = 3. Изобразите цикл на p, V диаграмме. Найдите КПД цикла.

10.7. Идеальный двухатомный газ совершает круговой процесс, график которого состоит из двух изотерм с температурами T_1 = 300К и T_2 = 500К и двух изобар с давлениями p_2 и p_1, причем $p_2 = a{\cdot}p_1$, где a = 3. Изобразите цикл на p, V диаграмме и найдите его КПД.

10.8. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изобарных и двух адиабатных процессов. Известно, что отношение максимального и минимального давления в пределах цикла $p_2/p_1 = a$, где a = 3. Изобразите цикл на p, V диаграмме и найдите его КПД.

10.9. Применяемый в двигателях внутреннего сгорания цикл состоит из двух изохорных и двух адиабатных процессов. Горючая смесь двухатомных газов сжимается от объема V_2 = 9 л до объема V_1 = 2 л. Найдите КПД работающего по такому циклу двигателя,

10.10. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, график которого состоит из изобары, адиабаты и изотермы, причем изотермический процесс протекает при минимальной температуре цикла. Отношение максимального и минимального давления в пределах цикла $p_2/p_1 = a$, где a = 3. Изобразите цикл на p, V диаграмме и найдите его КПД.

10.11. Идеальный газ совершает цикл, график которого состоит из изобары, изотермы и адиабаты, причем изотермический процесс протекает при максимальной температуре. Температура в пределах цикла изменяется от T_1 = 300 К до T_2 = 500 К. Изобразите цикл на p, V диаграмме и найдите его КПД.

10.12. Идеальный газ совершает цикл состоящий из изотермического расширения при температуре T_1, изохорического охлаждения до температуры $T_2 = T_1/a$, где a = 3 и адиабатического сжатия до исходной температуры. Изобразите цикл на p, V диаграмме и найдите его КПД.

10.13. Идеальный двухатомный газ совершает цикл, состоящий из изотермического расширения газа, изобарного сжатия и изохорного нагрева до исходной температуры. В пределах цикла объем газа меняется в a раз, где a = 3. Изобразите цикл на p, V диаграмме и найдите его КПД.

10.14. В сосуде содержится 6 молекул:

а) каким числом способов могут быть распределены эти молекулы между левой и правой половиной сосуда?

б) чему равна термодинамическая вероятность состояния, при котором одна молекула находится в левой половине и остальные в правой? Какова вероятность такого состояния?

в) чему равна термодинамическая вероятность состояния, при котором в левой и правой части сосуда находится по три молекулы, т.е. газ распределен равномерно? Какова вероятность такого состояния?

10.15. Некоторая система перешла из состояния 1 в состояние 2, причем статистический вес второго состояния больше, чем первого в $a = 3$ раза. Чему равно приращение энтропии системы?

10.16. Сосуд разделен перегородками на $n = 3$ равные части. В каждой из них находится воздух в одинаковых состояниях, статистический вес каждого из которых равен W_1. Как изменится термодинамическая вероятность системы, если перегородки убрать? Чему будет равно приращение энтропии?

10.17. Найдите приращение энтропии двух молей одноатомного идеального газа при изохорном нагреве от температуры $t_1 = 0°C$ до $t_2 = 273°C$.

10.18. Найдите приращение энтропии двух молей одноатомного идеального газа при изобарном нагреве от температуры $t_1 = 0°C$ до $t_2 = 273°C$.

10.19. Идеальный газ, расширяясь изотермически при $T = 400$ К, совершает работу $A = 800$ Дж. Чему равно приращение энтропии?

10.20. Воздух массой $m = 1{,}0$ кг, взятый при температуре $t_1 = 15°C$ и давлении $p_1 = 1$ атм, после расширения имеет температуру $t_2 = 100°C$ и давление $p_2 = 0{,}9$ атм. Вычислите изменение энтропии.

10.21. Как надо изменить температуру азота массой $m = 3{,}0$ кг, чтобы, не меняя объема газа, уменьшить его энтропию на $\Delta S = 1 \cdot 10^3$ Дж/К. Начальная температура азота $t_1 = 227°C$.

10.22. Найдите изменение энтропии меди массой $m = 50$ г при ее нагревании от $t_1 = 27°C$ до $t_2 = 372°C$. Удельная теплоемкость меди $c = 380$ Дж/(кг·К).

10.23. Найдите изменение энтропии при замерзании $m = 2{,}0$ кг ртути. Теплота плавления ртути $\lambda = 11{,}75$ кДж/кг. Температура замерзания $t = -38{,}9°C$.

10.24. Теплоизолированный сосуд разделен на две равные части перегородкой. В одной половине сосуда содержится идеальный газ, масса которого m. Вторая половина откачана до высокого вакуума. Перегородку убирают и газ заполняет весь объем. Найдите приращение внутренней энергии и изменение энтропии.

10.25. В одном сосуде, объем которого V_1 = 1,6 л, находится m_1 = 14 г окиси углерода (CO). В другом, объемом V_2 = 3,4 л, находится m_2 = 14 г кислорода (O_2). Температуры газов одинаковы. Сосуды соединяют и газы смешиваются. Найдите приращение энтропии при смешении газов.

10.26. Найдите изменение энтропии системы, описанной в задаче 10.25, если в первом сосуде находится такое же по массе количество кислорода.

10.27. Идеальный газ, расширяясь изотермически при температуре T_0, переходит из состояния 1 с энтропией S_1 а состояние 2 с энтропией S_2. Изобразите процесс на T, S – диаграмме. Определите работу, совершенную газом в ходе этого процесса.

10.28. В некоторой температурной области энтропия системы изменяется по закону $S = a + bT$, где a = 100 Дж/К, b = 5,0 Дж/К^2. Какое количество тепла Q получает система при обратимом ее нагреве от T_1 = 290 К до T_2 = 310 К?

10.29. Нарисуйте на T, S диаграмме цикл Карно и найдите его КПД, считая известными температуры нагревателя и холодильника.

10.30. Идеальный газ совершает цикл, в котором он адиабатически расширяется, при этом его температура падает от $T_н$ до $T_х$, затем идет процесс изотермического сжатия при температуре $T_х$. Далее он возвращается в исходное состояние так, что приращение энтропии газа оказывается пропорционально изменению его температуры $S = a + bT$. Изобразите цикл на T, S диаграмме и найдите его КПД.

11. Распределение молекул по скоростям и энергиям. Законы Максвелла и Больцмана

Для характеристики распределения молекул по скоростям вводится функция плотности вероятности, которая определяется как отношение вероятности того, что у данной частицы скорость попадает в интервал $\upsilon \div \upsilon + \mathrm{d}\upsilon$ к величине интервала:

$$F(\upsilon) = \frac{\mathrm{d}P(\upsilon)}{\mathrm{d}\upsilon}.$$

Вид функции $F(\upsilon)$ был установлен Максвеллом теоретически в 1859-60 г.:

$$F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2 \varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z),$$

здесь $\varphi(\upsilon_x) = \dfrac{\mathrm{d}P(\upsilon_x)}{\mathrm{d}\upsilon_x}$ – плотность вероятности нахождения проекции скорости частицы на ось X в интервале $\upsilon_x < \upsilon_{xi} < \upsilon_x + \mathrm{d}\upsilon_x$, при условии, что υ_y, υ_z могут быть произвольными.

$$\varphi(\upsilon_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \cdot \exp\left(-\frac{m_0}{2kT}\upsilon_x^2\right).$$

Тогда распределение Максвелла:

$$F(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2 \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right),$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Используя распределение Максвелла можно найти:

- Вероятность того, что скорость частицы υ лежит в интервале $\upsilon_1 < \upsilon < \upsilon_2$: $P = \int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon$.
- Число молекул, скорости которых лежат интервале $\upsilon_1 < \upsilon < \upsilon_2$: $N_{12} = N\int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} F(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon$.
- Среднюю скорость молекулы: $\langle\upsilon\rangle = \upsilon_{\text{ср}} = \int\limits_0^\infty \upsilon F(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$.
- Среднее значение квадрата скорости молекулы: $\langle\upsilon^2\rangle = \int\limits_0^\infty \upsilon^2 F(\upsilon)\mathrm{d}\upsilon = \dfrac{3kT}{m_0}$.
- Наиболее вероятную скорость, $\upsilon_{\text{вер}} = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$.

При рассмотрении больших объемов газа нужно учитывать действие внешнего потенциального поля – гравитационного поля Земли. В результате взаимодействия с Землей возникает дополнительное давление, зависимость которого от высоты определяется барометрической формулой

$$p = p_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

Здесь p_0 – давление столба газа высоте $h = 0$, μ – молярная масса.

При выводе барометрической формулы температура полагалась постоянной.

Используя связь $p = nkT$ от барометрической формулы легко перейти к распределению Больцмана.

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}},$$

где n_0 – концентрация газа при $h = 0$.

Так как в числителе показателя экспоненты стоит потенциальная энергия одной молекулы, данное соотношение также называют распределением по потенциальным энергиям:

$$n = n_0 e^{-\frac{W_\text{р}}{kT}}.$$

11.1. Дана $f(x)$ – функция распределения вероятностей некоторой величины x. Запишите выражение для вероятности того, что значение величины x находится в интервале от a до b. В чем заключается условие нормировки функции распределения?

11.2. Пусть при стрельбе по мишени функция распределения вероятностей попадания пули в мишень имеет вид $f(r) = A\mathrm{e}^{-\alpha r^2}$, где α – заданный коэффициент, а r – расстояние до центра мишени. Каков смысл функции $f(r)$? Как из условия нормировки найдите коэффициент A? Чему он равен? Найдите вероятность попадания пули в кольцо, внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно R_1 и R_2.

11.3. В условии задачи 11.2 найдите радиус кольца, вероятность попадания в которое наивысшая. Чему равен «среднеквадратичный радиус» $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$?

11.4. Имеется пучок молекул, движущихся вдоль оси x. Функция распределения молекул по скоростям имеет вид $f(\upsilon_x) = b$ при $\upsilon_1 \le \upsilon_x \le \upsilon_2$, где $\upsilon_1 = 100$ м/с, а $\upsilon_2 = 200$ м/с, и равна нулю вне этого интервала.. Нарисуйте график этой функции. Определите: а) коэффициент b; б) среднюю скорость молекул; в) среднеквадратичную скорость.

11.5. Преобразуйте функцию Максвелла, перейдя от переменной υ к переменной $x = \frac{\upsilon}{\upsilon_\text{вер}}$, где $\upsilon_\text{вер}$ − наиболее вероятная скорость молекул.

11.6. Вычислите наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорость молекул кислорода при $t = 20$°C.

11.7. Чему равна вероятность того, что найдется молекула скорость которой, точно равна: а) наиболее вероятной скорости, б) средней скорости, в) среднеквадратичной скорости?

11.8. Какова доля молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на 1% от: а) наиболее вероятной скорости, б) средней скорости, в) среднеквадратичной скорости?

11.9. Какая температура соответствует средней квадратичной скорости молекул кислорода, равной 720 км/час?

11.10. Найдите относительное число молекул $\Delta N / N$, модуль скорости которых больше средней скорости.

11.11. Определите температуру водорода (H_2), для которой средняя квадратичная скорость молекул больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta\upsilon$ = 400 м/с.

11.12. Определите температуру гелия, при которой скоростям молекул υ_1 = 300м/с и υ_2 = 600 м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения молекул.

11.13. Найдите сумму модулей импульсов молекул, содержащихся в одном моле азота (N_2), при температуре 20° С.

11.14. Смесь водорода (H_2) и гелия (He) находится при температуре T = 300К. При каком значении скорости молекул максвелловские функции распределения этих газов пересекаются?

11.15. Найдите функцию распределения молекул идеального газа по кинетическим энергиям из распределения Максвелла молекул по скоростям. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы идеального газа.

11.16. Концентрация молекул газа в сосуде n, средняя скорость теплового движения $\langle\upsilon\rangle$. Сколько молекул ударяется за время τ о стенку сосуда площадью S? Решение выполните двумя способами:

а) считайте скорость всех молекул равными средней скорости $\langle\upsilon\rangle$.

б) воспользуйтесь распределением Максвелла по компонентам скоростей

$$f(\upsilon_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m_0 \upsilon_x^{\,2}}{2kT}\right).$$

11.17. Давление воздуха на уровне моря p_0 = 750 мм рт.ст., а на вершине горы p = 590 мм рт.ст. Какова высота горы, если температура воздуха на любой высоте t = 5° С.

11.18. Найдите давление воздуха: а) над поверхностью Земли на высоте $H = 10$ км; б) в скважине на глубине $h = 10$ км. Считать, что температура воздуха везде одинакова и равна $t = 0$°С. Давление на уровне моря $p_0 = 760$ мм рт.ст., молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль.

11.19. На какой высоте плотность кислорода уменьшится на 1%? Температура газа 27°С.

11.20. Определите массу m_1 воздуха в цилиндре с площадью основания $S = 1{,}0$ м^2 и высотой $h = 1{,}0$ км, используя распределение Больцмана. Давление воздуха у основания цилиндра $p_0 = 1{,}0$ атм, температура по всей высоте равна $t = 17°$ С. Молярная масса воздуха $\mu = 29$ г/моль. Определите массу m_2 воздуха в том же цилиндре, пренебрегая полем тяжести Земли.

11.21. Найдите среднюю потенциальную энергию молекул воздуха в поле тяжести Земли. Атмосферу считайте изотермической.

12. Длина свободного пробега. Явления переноса

Среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными соударениями называется **длиной свободного пробега** (λ). Применение молекулярно-кинетической теории позволяет получить соотношение:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2},$$

где n – концентрация молекул, d – диаметр молекулы.

При рассмотрении условия взаимодействия молекул можно полагать, что одна молекула окружена сферой ограждения, а остальные молекулы точечные. Поперечное сечение сферы ограждения называется эффективным сечением, диаметр ее – эффективным диаметром.

Всякая система, предоставленная самой себе, стремится перейти в состояние равновесия. При этом в ней происходят необратимые процессы, которые получили название явлений переноса.

В зависимости от причин нарушения равновесия выделяют три явления переноса:

- диффузия,
- теплопроводность,
- внутреннее трение (вязкость).

Основные сведения о них сведены в таблицу 4. Соотношения для расчета коэффициентов получены в рамках молекулярно-кинетической теории.

Таблица 4

Причина	Название	Перенос	Закон	Коэффициент
Нарушение концентрации	диффузия	массы	$\frac{\mathrm{d}m}{S\mathrm{d}t} = -D\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}$ (закон Фика)	$\frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\lambda$
Разность температур	теплопроводность	энергии	$\frac{\mathrm{d}Q}{S\mathrm{d}t} = -K\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ (закон Фурье)	$\frac{1}{3}\frac{C_V}{\mu}\rho\langle\upsilon\rangle\lambda$
Разность давлений (течение)	внутреннее трение (вязкость)	импульса	$\frac{\mathrm{d}p}{S\mathrm{d}t} = -\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}$ (закон Ньютона)	$\frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\lambda$

12.1. Средняя длина свободного пробега молекул азота при нормальных условиях $\lambda_1 = 8{,}6\cdot10^{-6}$ м. Вычислите среднюю длину свободного пробега при температуре $t = 0$°C и давлении $p_2 = 0{,}001$ мм рт. ст.

12.2. Воздух нагревается в открытой колбе от температуры $t_1 = 7$°C. Найдите среднюю длину свободного пробега его молекул при температуре $t_2 = 35$°C, если до нагревания эта длина равнялась $\lambda_1 = 9{,}5\cdot10^{-6}$ м.

12.3. В вакуумной технике называют вакуумом такое разрежение газа, при котором средняя длина свободного пробега молекул равна или больше линейных размеров того сосуда, в котором находится этот газ. Какому давлению соответствует такое состояние газа, если размеры сосуда $\ell = 20$ см, а эффективный диаметр молекул газа $d = 3\cdot10^{-8}$ см? Температура $t = 0$°C.

12.4. Вычислите среднее время свободного пробега молекул кислорода при давлении $p = 2$ мм рт. ст. и при температуре $t = 27$°C. Эффективный диаметр молекул кислорода $d = 2{,}9\cdot10^{-8}$ см.

12.5. Сколько столкновений испытывает в среднем каждая молекула азота за одну секунду при нормальных условиях? Эффективный диаметр молекулы азота $d = 3{,}1\cdot10^{-8}$ см.

12.6. Водяной пар диффундирует из пространства над широким сосудом с теплой водой, где его плотность $\rho_1 = 25$ г/м^3, в окружающий его объем воздуха. На расстоянии $\ell = 1{,}0$ м пар конденсируется на холодном стекле, около которого плотность насыщенного пара $\rho_2 = 7{,}5$ г/м^3. Принимая процесс диффузии пара в воздух установившимся и полагая, что среднее значение коэффициента диффузии $D = 2{,}4\cdot10^{-5}$ м^2/с, вычислите, в течение какого времени на поверхности S = 1,0 дм^2 стекла осаждается m = 0,20 мг влаги.

12.7. Поезд метро движется в тоннеле со скоростью υ = 60 км/ч. Найдите силу трения, действующую на каждый квадратный метр крыши поезда. Сила трения возникает вследствие различия скоростей в слоях воздуха в направлении, перпендикулярном плоскости крыши, при отсутствии вихревых движений воздуха. Расстояние от крыши поезда до поверхности тоннеля ℓ = 1,0 м. Коэффициент внутреннего трения воздуха $\eta = 1{,}8\cdot10^{-5}$ кг/м·с.

Указание. Сила трения вычисляется по закону Ньютона для внутреннего трения. Градиент скорости можно оценить, если считать, что слой воздуха, примыкающий к крыше поезда, движется со скоростью υ, а слой, примыкающий к потолку тоннеля, имеет скорость, равную нулю.

12.8. Над диском, который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр масс, подвешен второй такой же диск. Нижний диск вращается с угловой скоростью ω. Известны радиусы дисков R, расстояние между дисками d, коэффициент вязкости воздуха η. Найдите момент силы трения, действующий на верхний диск.

12.9. Две плиты (одна железная толщиной d_1 = 5 см и другая медная толщиной d_2 = 10 см) положены друг на друга. Найдите температуру в месте соприкосновения плит, если поддерживаются постоянными температуры наружных поверхностей: железной плиты t_1 = 100°С, а медной t_2 = 20°С. Коэффициенты теплопроводности железа и меди соответственно равны K_1 = 58,6 Вт/(м·К) и K_2 = 385 Вт/(м·К).

12.10. Коэффициент диффузии водорода при нормальных условиях равен $D = 1{,}31\cdot10^{-4}$ м^2/с. Чему равен при этих условиях коэффициент внутреннего трения водорода?

12.11. Коэффициент внутреннего трения кислорода при нормальных условиях равен $\eta = 1{,}87\cdot10^{-5}$ кг/м·с. Найдите среднюю длину свободного пробега молекул кислорода при этих условиях.

12.12. Принимая коэффициент теплопроводности азота при t = 0°С равным K = 0,13 Вт/(м·К), найдите эффективный диаметр его молекул.

12.13. При температуре t_1 = 0°С коэффициент внутреннего трения водорода равен $\eta_1 = 8{,}5\cdot10^{-6}$ кг/м·с. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы его коэффициент внутреннего трения стал $\eta_2 = 19{,}2\cdot10^{-6}$ кг/с·м?

12.14. Найдите предельное значение давления, ниже которого теплопроводность газа, заключенного между стенками дьюаровского сосуда, начинает зависеть от давления. Расстояние между стенками

$\ell = 5$ мм. Эффективный диаметр молекул газа $d = 3\cdot10^{-8}$ см, температура газа $t = 20°C$.

13. Уравнение Ван-дер-Ваальса

В отличие от идеального газа в модели Ван-дер-Ваальса предпринята попытка учесть взаимодействие молекул. Молекулы, как и в модели идеального газа, представляются твердыми шариками некоторого радиуса r_0. Тогда их центры не могут подойти друг к другу на расстояние, меньше, чем $2r_0$. Если расстояние между молекулами $r > 2r_0$, потенциальная энергия их взаимодействия отрицательна и пропорциональна r^{-6}.

В уравнение состояния по сравнению с идеальным газом вводятся два изменения:

1. В явном виде учитывается конечный объем молекул. Некоторый объем b считается недоступным для молекул. Таким образом, молекула может свободно двигаться в объеме $V - b$. Объем b полагается равным учетверенному объему молекул.
2. Учитывается притяжение молекул друг к другу. Молекулы пристеночного слоя в результате взаимодействия с соседними втягиваются внутрь объема, в результате чего давлением на стенку несколько уменьшается. Это уменьшение давление описывается членом a/V^2.

Тогда для одного моля газа

$$p = RT/(V - b) - a/V^2.$$

Если в объеме V находится ν молей газа, то на каждый моль приходится объем V/ν. В этом случае уравнение Ван-дер-Ваальса после преобразования примет вид:

$$\left(p + \nu^2 a/V^2\right)(V - \nu b) = \nu RT.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса описывает поведение реального газа пока коэффициенты a и b можно считать поправками.

13.1. Найдите давление углекислого газа массой $m = 2{,}2$ кг, занимающего при температуре $t = 27°C$ объем $V = 20$ л из уравнения Ван-дер-Ваальса (p) и уравнения Клапейрона-Менделеева (p'). Постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа $a = 0{,}36$ Н·м^4/моль^2 и $b = 4{,}3\cdot10^{-5}$ м^3/моль.

13.2. Во сколько раз поправка в уравнении Ван-дер-Ваальса на объем молекул больше эффективного объема молекул азота, если для него эта поправка равна b = $3{,}7\cdot 10^{-5}$ м^3/моль? Эффективный диаметр молекул азота $d = 3{,}1\cdot 10^{-8}$ см.

13.3. Найдите постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса для углекислого газа, если его критическое давление $p_{кр}$ = 7,4 МПа, а критическая температура $T_{кр}$ = 304 К.

13.4. Постоянная Ван-дер-Ваальса для воды $a = 5{,}6\cdot 10^{-4}$ Н·м^4/моль^2. Найдите внутреннее давление воды.

13.5. Постоянная Ван-дер-Ваальса для воды $b = 3{,}0\cdot 10^{-5}$ м^3/моль. Найдите критическую плотность воды.

13.6. Считая постоянную Ван-дер-Ваальса для моля кислорода равной a = 0,14 Н·м^4/моль^2, вычислите работу сил взаимного притяжения молекул кислорода массой m = 1,0 г при увеличении его объема от V_1 = 0,50 л до V_2 = 5,0 л.

13.7. В ампулу объемом $V_{амп}$ = 3 см^3 наливается эфир, его плотность ρ = 0,71 г/см^3. Ампула запаивается и эфир нагревается до критической температуры $t_{кр}$ = 194°С. Какой первоначальный объем должен занимать в ампуле эфир, чтобы после нагревания он пришел в критическое состояние? Критическое давление эфира $p_{кр}$ = 35,5 атм.

Указание. $V_{кр} = \frac{m}{\mu}3b = V_{амп}$.

13.8. Получить выражение для работы, совершаемой одним молем ван-дер-ваальсовского газа при изотермическом расширении от объема V_1 до объема V_2.

13.9. Моль азота расширяется адиабатически в пустоту, в результате чего объем газа увеличивается от V_1 = 1 л до V_2 = 10 л. Определить приращение температуры газа, если для азота постоянная Ван-дер-Ваальса равна a = 0,135 Н·м^4/моль^2.

13.10. Найдите выражение для приращения энтропии одного моля ван-дер-ваальсовского газа в переменных T и V.

1

1.1. $\Delta\vec{\upsilon} = -2\vec{\upsilon}$, $|\Delta\vec{\upsilon}| = 2\upsilon$, $\Delta\upsilon = 0$.

1.2. а) прямая линия, выходящая из начала координат, б) линия, все точки которой лежат на сфере радиуса r.

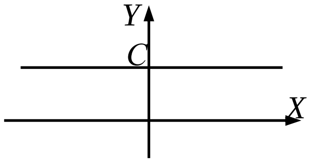
1.3. а) $\Delta\vec{\upsilon} = 1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$ (м/с); б) $|\Delta\vec{\upsilon}| = 1{,}73$ м/с; в) $\Delta\upsilon = 1{,}57$ м/с.

1.4. Траектория – четверть окружности; $\langle\vec{\upsilon}\rangle = \dfrac{2\upsilon}{\pi}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$;

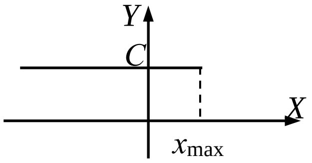
$\left|\langle\vec{\upsilon}\rangle\right| = \dfrac{2\sqrt{2}\upsilon}{\pi} = 0{,}90\upsilon$.

1.5. а) $\vec{\upsilon} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$ (м/с), $\vec{a} = 6\vec{i}$ (м/с^2); б) $|\vec{\upsilon}| = 2\sqrt{1+9t^2}$ (м/с) $|\vec{a}| = 6$ м/с^2; в) $x = 3y^2/4$; г) $a_n = 1{,}9$ м/с^2, $a_\tau = 5{,}7$ м/с^2; д) $R = 21$ м.

1.6. Траектория $y = C$, $\upsilon_x = B$, $\upsilon_y = 0$.

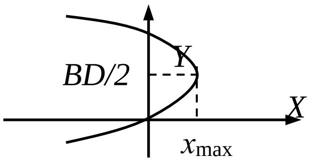


1.7.



$\upsilon_x = B - 2At$, $\upsilon_y = 0$; $a_x = -2A$, $a_y = 0$, $S = 2x_{max} = \dfrac{B^2}{2A}$.

1.8. Траектория – парабола, $\upsilon_x = B - 2At$, $\upsilon_y = D$, $\upsilon = \sqrt{(B-2At)^2 + D^2}$ $a_x = -2A$, $a_y = 0$.



1.9. Траектория – окружность радиуса R: $x^2+y^2 = R^2$, $|\vec{\upsilon}| = \omega R$, $|\vec{a}| = \omega^2 R = \upsilon^2/R$.

1.10. $\upsilon = t^2 + 2 = 11\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}, a = 2t = 6\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

1.11. $t=\left(\upsilon_0+\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}\right)\Big/g=2{,}0\text{ с}$, $\upsilon=\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}=14{,}9\text{ м/с}$.

1.12. $t=\upsilon_0/g+\tau/2=2{,}5\text{ с}$, $H=\dfrac{\upsilon_0^2}{2g}-\dfrac{g\tau^2}{8}=18{,}7\text{ м}$.

1.13. $a=2\ell/\tau_1\tau_2=0{,}3\text{ м/с}^2$, $\upsilon_0=\ell(\tau_1+\tau_2)/\tau_1\tau_2=0{,}45\text{ м/с}$.

1.14. $S=0{,}5\alpha t_0^2$.

1.15. а) $S=\dfrac{\upsilon_0}{b}\left(1-\exp\{-bt\}\right)$; б) $\upsilon=\upsilon_0\exp\{-bt\}$.

1.16. $\upsilon(t)=\dfrac{a_0}{k}\left(1-\exp\{-kt\}\right)$.

1.17. $x=\upsilon_0 t=25t$, $y=H-gt^2/2=25-5t^2$,

$y=-gx^2/2\upsilon_0^2+H=-8\cdot10^{-3}x^2+25$,

$t_\text{п}=\sqrt{2H/g}=2{,}2\text{ с}$, $L=\upsilon_0 t_\text{п}=55\text{ м}$.

1.18. 1) $x=(\upsilon_0\cos\alpha)\cdot t$, $y=(\upsilon_0\sin\alpha)\cdot t-gt^2/2$;

2) $y=-\dfrac{gx^2}{2(\upsilon_0\cos\alpha)^2}+x\operatorname{tg}\alpha$;

3) $t_\text{п}=2\upsilon_0\sin\alpha/g$; 4) $\rho=(\upsilon_0\cos\alpha)^2/g$.

1.19. $L=1/c$, $\alpha=45°$.

1.20. $x=(\upsilon_0\cos\alpha)\cdot t$, $y=H+(\upsilon_0\sin\alpha)\cdot t-gt^2/2$,

$y=-\dfrac{gx^2}{2(\upsilon_0\cos\alpha)^2}+x\operatorname{tg}\alpha+H$; $L=(\upsilon_0\cos\alpha)\cdot t_\text{п}$, где

$t_\text{п}=\left(\upsilon_0\sin\alpha+\sqrt{\upsilon_0^2\sin^2\alpha+2gh}\right)\Big/g$

1.21. $H=\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}S$, $h=\dfrac{S}{\upsilon_2}\left(\upsilon_1-\dfrac{gS}{2\upsilon_2}\right)$.

1.22. $R=\dfrac{\upsilon_0^2\cos^2\alpha_1}{g\cos^3\alpha_2}=3{,}9$ м, $a_n=g\cos\alpha_2=8{,}5$ м/с^2,

$a_\tau=\pm g\sin\alpha_2=\pm4{,}9$ м/с^2.

1.23. $\nu=(\upsilon_1-\upsilon_2)/2\pi\ell=1{,}6\text{ об/с}$, $R=\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_1-\upsilon_2}\ell=0{,}3\text{ м}$.

1.24. $\upsilon=2\pi\nu\ell/\alpha=800\text{ м/с}$.

1.25. $\omega_0=B=2$ рад/с, $\omega_z(t_1)=B+3C\cdot t_1^2=-10$ рад/с,

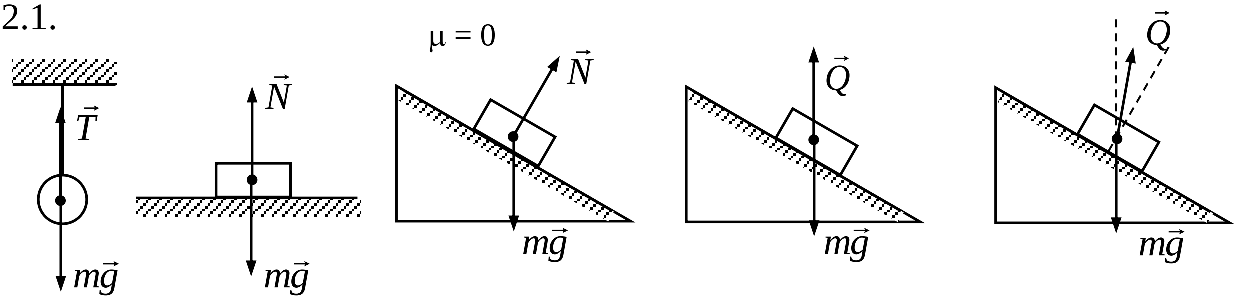
$\varepsilon(t_1)=6C\cdot t_1=-12$ рад/с^2.

1.26. $\upsilon_A=2\upsilon$, $\upsilon_B=\sqrt{2}\upsilon$, $\upsilon_C=2\upsilon\cos\alpha$.

1.27 $a=\upsilon^2/R$.

2

2.1.



2.2. $\vec{F} = 2mc \cdot \vec{j}$

2.3. $\vec{F} = ma \cdot \vec{i} + 2mbt \cdot \vec{j}$, $\alpha = 0$.

2.4. $F = m\omega^2 a$.

2.5. $t = \dfrac{\upsilon_0}{g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}$; $\beta = \mathrm{arctg}(1/\mu)$

2.6. $F_{ср} = \dfrac{m\upsilon_0}{2\tau}$.

2.7. $F = \upsilon^2 S\rho = 10$ Н.

2.8. $F = 2\rho Shg = 2mg$, где $m -$ масса струи водопада.

2.9. $M = \dfrac{N}{g + \upsilon^2 / \ell}$.

2.10. $\mu = \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\alpha$.

2.11. а) $a = \dfrac{F}{m} = 10\ \dfrac{м}{с^2}$ $T = F = 10$ Н;

б) $a = \dfrac{m_0 g}{m + m_0} = 0{,}9\ \dfrac{м}{с^2}$, $T = \dfrac{m_0 m}{m + m_0} g = 9$ Н.

2.12. $T_1 = \dfrac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2} = 38$ Н, $T_2 = \dfrac{F_1 m_1 + F_2 m_2}{m_1 + m_2} = 43$ Н.

2.13. $F = [F_1(L - \ell) + F_2\ell]/L$.

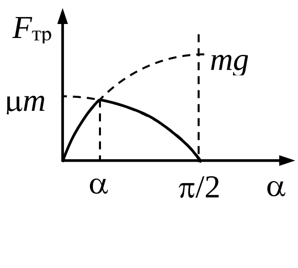
2.14. $F = T\dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2} = 90$ Н.

2.15. $F_1 = m(g - a) = 670$ Н, $F_2 = m(g + a) = 700$ Н.

2.16. $F = m(g - a) = 60$ Н.

2.17. $m = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 99$ кг.

2.18.



$\alpha_0 = \mathrm{arctg}\mu$.

2.19. $a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha) = 4{,}3\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_2 = 0$.

2.20. $F = \dfrac{mg\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 3\cdot 10^2$ Н.

2.21. Покой: $F_{\text{тр}} = bt$; скольжение $F_{\text{тр}} = \mu mg$.

2.22. $t = \mu mg / b(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 167$ с.

2.23. $\upsilon = \dfrac{mg^2}{2b}\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

2.24. $a = \dfrac{g(m_2 - m_1\sin\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}4\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $T = \dfrac{m_1 m_2 g(1+\sin\alpha)}{m_1 + m_2} = 2{,}5$ Н.

2.25. $a = g\dfrac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2} = 7{,}9\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $T = m_2(g - a) = 1{,}9$ Н.

2.26. $T = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = 25$ Н.

2.27. $m = F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)/\,g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$.

2.28. $a = g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)/(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$.

2.29. $F_{\min} = \mu m_2 g(1 + m_2/m_1)$.

2.30. При $t < t_0$ $a_1 = a_2 = \dfrac{bt}{m_1 + m_2}$; при $t > t_0$ $a_1 = \dfrac{m_2}{m_1}\mu g$, $a_2 = \dfrac{at - \mu m_2 g}{m_2}$;

где $t_0 = \mu g\dfrac{m_2(m_1 + m_2)}{bm_1}$.

2.31. $F_{\max}/mg = 6$.

2.32. $\Delta x = \dfrac{F}{2k}$.

2.33. $\Delta\ell = \dfrac{F}{2k}$.

2.34. $k_{\min} = (m_1 + m_2)\dfrac{\mu^2 g^2}{\upsilon^2}$.

2.35. $T = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 10{,}25$ Н, $a_2 = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g = 0{,}47$ м/с^2.

2.36. $a_1 = \dfrac{2(2m_1 - m_2)g}{4m_1 + m_2}$, $a_2 = -\dfrac{a_1}{2}$, $T = \dfrac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}g$.

2.37. $a_3 = g\left(1 - \dfrac{8m_1 m_2}{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}\right) = 0{,}6\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.38. $a=\dfrac{(m_2-m_1)^2}{(m_2+m_1)^2}g=9{,}8\cdot 10^{-4}\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.39. 1) $\alpha=0$, $T=mg$; 2) $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{a}{g}$, $T=m\sqrt{a^2+g^2}$.

2.40. $a_1=\dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{m_1+m\sin^2\alpha}$.

2.41. $x(t)=\dfrac{m\upsilon_0}{\beta}\left(1-\exp\left\{-\dfrac{\beta}{m}t\right\}\right)$.

2.42. $x(t)=\dfrac{x_0}{2}\left(\exp\left\{\sqrt{\dfrac{b}{m}}t\right\}+\exp\left\{-\sqrt{\dfrac{b}{m}}t\right\}\right)$.

2.43. $\upsilon=\dfrac{mg}{\beta}\left(1-\exp\left\{-\dfrac{\beta}{m}t\right\}\right)$.

3

3.1. $\upsilon=\sqrt{gR}=7{,}9\ \dfrac{\text{км}}{\text{с}}$.

3.2. $T=2\pi\sqrt{R/g}=5030\,\text{с}$.

3.3. $T=\sqrt{3\pi/G\rho}=6850$ с.

3.4. $T=2\pi\sqrt{L^3/GM}$.

3.5. $\nu_1=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu g}{R}}=0{,}36\,\text{с}^{-1}$, $F_{\text{тр.покоя}}=\mu mg/4=0{,}12\,\text{Н}$.

3.6. $R=k\ell_0T^2/(kT^2-4\pi^2m)$, $\omega=\sqrt{k/m}$.

3.7. $R=R_0/(1-m\omega^2/4\pi^2k)$.

3.8. а) $T_{\text{кр}}=mg\cos\alpha$; $T_{\text{ср}}=mg(3-2\cos\alpha)$;

б) $\alpha_1=60°$; в) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha_2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$; $\alpha_2=53°$.

3.9. $\upsilon_{\min}=\sqrt{5g\ell}$, $\upsilon_{\min}=\sqrt{4g\ell}$.

3.10. а) $a=g\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$, $T=3mg\cos\alpha$; б) $T=mg\sqrt{3}$; в) $\alpha=54{,}7°$.

3.11. $\omega=\sqrt{g/h}=3{,}2\,\text{с}^{-1}$.

3.12. $\omega=\sqrt{(g+a)/h}=3{,}4\ \text{с}^{-1}$.

3.13. $\upsilon_{\max}=\sqrt{gR\mu}=14\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $\operatorname{tg}\alpha=\mu$; $\alpha=22°$

3.14. $\upsilon_{\min}=\sqrt{\dfrac{g(R-d\cos\alpha_0)}{\mu}}=16\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $\alpha_0=\operatorname{arctg}\mu=22°$;

$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{gR}{v_1^2} = 15°$.

3.15. $\alpha = \operatorname{arctg}\left(4\pi^2\nu^2 r / g\right) = 38°$.

3.16. $H \geq \dfrac{5}{2}R$.

3.17. $N_1 = 6mg$, $N_2 = N_4 = 3mg$, $N_3 = 0$.

3.18. $h = \dfrac{2}{3}R = 20$ см.

3.19. $\Delta t = \dfrac{\mu\upsilon_0}{g\cos\alpha\left(\mu^2 - \operatorname{tg}^2\alpha\right)}$.

4

4.1. а) $I = \dfrac{m\ell^2}{3}$; б) $I = \rho_0 V\ell^2\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}k\right) = \dfrac{m\ell^2}{3}\left(\dfrac{4+3k}{4+2k}\right)$.

4.2. а) $I = \dfrac{m\ell^2}{12}$; б) не изменится; в) $I = \dfrac{m\ell^2}{12}\sin^2\theta$.

4.3. а) $I = \dfrac{m\ell^2}{12} + \dfrac{(m_1 + m_2)\ell^2}{4}$;

б) $I = \dfrac{m\ell^2}{12} + m_1\left(\dfrac{2}{5}R_1^2 + \left(\dfrac{\ell}{2} + R_1\right)^2\right) + m_2\left(\dfrac{2}{5}R_2^2 + \left(\dfrac{\ell}{2} + R_2\right)^2\right)$.

4.4. а) $I = \dfrac{mR^2}{2}$; б) $I = \dfrac{m}{2}\left(R^2 - \dfrac{r^4}{R^2} - \dfrac{r^2}{2}\right)$; в) $I = \dfrac{mR^2}{4}$.

4.5. а) $I = \dfrac{mb^2}{12}$; б) $I = \dfrac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}$.

4.6. $I = \dfrac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}$.

4.7. $I = \dfrac{3}{10}mR^2$.

4.8. а) $I = \dfrac{2}{3}mR^2$; б) $I = \dfrac{5}{3}mR^2$.

4.9. $I = \dfrac{8}{15}\rho\pi\left(R^5 - R_1^5\right)$

4.10. $a=\dfrac{g(m_1-m_2)}{m+m_1+m_2}=3{,}6\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $N=\dfrac{4m_1m_2+2m(m_1+m_2)+m^2}{m+m_1+m_2}\cdot g=9{,}4\ \text{Н}$.

4.11. $\varepsilon=\dfrac{g(m_1R_1-m_2R_2)}{I+m_1R_1^2+m_2R_2^2}=16\ \text{с}^{-2}$; $T_1=m_1(g-\varepsilon R_1)=2{,}0\ \text{Н}$;

$T_2=m_2(g+\varepsilon R_2)=2{,}3\ \text{Н}$.

4.12. $t=\dfrac{mR_2^2\omega}{FR_1}=250\ \text{с}$.

4.13. $T=\dfrac{mg\left(I_0+4m_0R^2\right)}{I_0+4m_0R^2+mr^2}=55\ \text{Н}$; $a=g-T/m$

4.14. $a=\dfrac{2}{3}g=6{,}54\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $T=\dfrac{mg}{3}=19{,}6\ \text{Н}$.

4.15. $a=\dfrac{2}{3}g\sin\alpha=3{,}3\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

4.16. $S=\dfrac{\sqrt{3}\tau\upsilon_1}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}=2{,}0\ \text{м}$.

4.17. а) $M=\mu mgR$, $\tau=\dfrac{\omega_0R}{\mu g}$; б) $M=\dfrac{2}{3}\mu mgR$, $\tau=\dfrac{3}{4}\dfrac{\omega_0R}{\mu g}$.

4.18. $\tau=\dfrac{2}{7}\dfrac{\upsilon_0}{\mu g}=0{,}19\ \text{с}$, $S=\dfrac{12}{49}\dfrac{\upsilon_0^2}{\mu g}=0{,}33\ \text{м}$.

4.19. $\tau=\dfrac{1}{3}\dfrac{\omega_0R}{\mu g}=0{,}5\ \text{с}$, $S=\dfrac{1}{18}\dfrac{\omega_0^2R^2}{\mu g}=0{,}25\ \text{м}$.

4.20. $\varepsilon=\dfrac{mgR(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{mR^2+I}$, $\omega=\dfrac{mgR(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{mR^2+I}t$.

4.21. $T=\dfrac{mg}{2}=2{,}5\ \text{Н}$; $\varepsilon=\dfrac{g}{r}=98\ \text{с}^{-2}$.

4.22. $a_1=\dfrac{2m_1-m_2\sin\alpha}{m_2+2m_1}g=6{,}86\ \text{м/с}^2$, $T=\dfrac{m_1m_2}{2m_1+m_2}(1+\sin\alpha)g=11{,}8\ \text{Н}$.

4.23. $a_1=\dfrac{m_2\sin\alpha-m_1}{m_1+\dfrac{3}{2}m_2}g$.

4.24. $F_{\text{тр}}=m_2g\dfrac{m_1-I/R^2}{m_1+4m_2+I/R^2}$, а) $I=m_1R^2/2$, $F_{\text{тр}}=\dfrac{m_1m_2g}{3m_1+8m_2}=7{,}0\ \text{Н}$;

б) $I=m_1R^2$, $F_{\text{тр}}=0$.

4.25. а) $a_1=\dfrac{m_2(R+r)^2}{m_2(R+r)^2+m_1R^2+I}g=7{,}7\ \text{м/с}^2$;

б) $a_1 = \dfrac{m_2(R-r)^2}{m_2(R-r)^2 + m_1R^2 + I} g = 2{,}8\,\text{м/с}^2$.

4.26. $a = \dfrac{F}{m}\dfrac{(R\cos\alpha - \tau)}{(\beta+1)R}$. При $R\cos\alpha > r$ катушка катится в направлении силы F, в противном случае – обратно.

4.27. $a = \dfrac{mgr(r\sin\alpha - \mu(R+r)\cos\alpha)}{I+mr^2} = 5{,}8\,\text{м/с}^2$, $\alpha \ge \operatorname{arctg}\dfrac{\mu(R+r)}{r}$.

4.28. $a = \dfrac{mgr(r\sin\alpha - \mu(R-r)\cos\alpha)}{I+mr^2} = 6{,}6\,\text{м/с}^2$, $\alpha \ge \operatorname{arctg}\dfrac{\mu(R-r)}{r}$.

4.29. а) $\vec{M} = 4{,}5\vec{j} - 1{,}8\vec{k}$; б) $\vec{M} = 0$; в) $\vec{M} = 4{,}5\vec{j}$.

5

5.1. $\Delta p_1 = m\sqrt{2gh} = 0{,}5\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; $\Delta p_2 = 2m\sqrt{2gh} = 1\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

5.2. $\Delta p_1 = \sqrt{2}m\upsilon \approx 14\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; $\Delta p_2 = 2m\upsilon = 20\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; $\Delta p_3 = 0$.

5.3. $N = mg + m\left(\upsilon + \sqrt{2gh}\right)/\tau = 158\,\text{Н}$.

5.4. а) $\Delta\vec{p} = m\vec{g}\tau$; б) $\langle\vec{p}\rangle = m\vec{\upsilon}_{\text{горизонт.}} = m\vec{\upsilon}_0 + m\vec{g}\tau/2$.

5.5. $\Delta p = 2m\upsilon_0 \sin\alpha = 100\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; $\Delta\vec{p}$ направлен вертикально вниз; $t_\text{п} = \Delta p/mg = 2\upsilon_0\sin\alpha/g = 2{,}0\,\text{с}$.

5.6. $u = \sqrt{(m_1\upsilon_1)^2 + (m_2\upsilon_2)^2}\Big/(m_1+m_2)$,
угол между $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{u}$ $\alpha = \operatorname{arctg}(m_2\upsilon_2/m_1\upsilon_1)$.

5.7. $\upsilon_2 = \sqrt{4\upsilon^2 + \left(\dfrac{h}{\tau} - \dfrac{g\tau}{2}\right)^2} = 250\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\dfrac{h}{\tau} - \dfrac{g\tau}{2}}{2\upsilon} = 38°$.

5.8. $\upsilon_1 = \upsilon_2' \dfrac{m}{m_1 - m\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)} = 0{,}5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$; $\upsilon_2 = \upsilon_2' \dfrac{(m_1 - m)}{m_1 - m\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)} = 4{,}5\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

5.9. $\ell = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2} S = 4\,\text{м}$.

5.10. $\Delta L = m_2\upsilon\upsilon_0\sin\alpha/(m_1+m_2)g$.

5.11. $\upsilon_3 = mu\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{M-m} + \dfrac{1}{M-2m}\right)$, $\upsilon_0 = \dfrac{3mu}{M}$.

5.12. $t = \dfrac{m}{\mu}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{\upsilon}{u}\right\}\right) = 1{,}2\,\text{с}$.

5.13. $M = m_0 \exp\left\{-\dfrac{gt}{\upsilon}\right\}$.

5.14. $\upsilon = \dfrac{m_0\upsilon_0}{m_0 + \mu t}$; $a = \dfrac{\mu m_0 \upsilon_0}{(m_0 + \mu t)^2}$.

5.15. а) $\upsilon_2 = \dfrac{m_1\upsilon_1}{m_2}$; б) $\Delta\vec{p} = m\vec{\upsilon}_2$; в) $W = \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2}\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)$; г) $A = m_2 gh$.

5.16. $A = a(x_2 - x_1) = 30$ Дж.

5.17. $A = 30$ Дж.

5.18. $A = 0$.

5.19. $A = m(a + g)\dfrac{a\tau^2}{2} = 1{,}6 \cdot 10^4$ Дж.

5.20. $A = \dfrac{3}{2}\rho R^2$.

5.21. $A = 0{,}5(\mu_1 + \mu_2)mg\ell$.

5.22. $A = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{g^2 m^3}{\mu^2}$.

5.23. $\mu = \dfrac{\upsilon^2}{2gS} = 0{,}85$.

5.24. $S = \dfrac{m_2}{(m_2 + m_1)} \cdot \dfrac{\upsilon^2}{2\mu g}$.

5.25. $\mu = \upsilon^2 / 3g\ell = 0{,}7$.

5.26. $\upsilon = x\sqrt{\dfrac{c}{m}\left(x^2 - x_0^2\right) + \upsilon_0^2}$.

5.27. $\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1{}^2 - \dfrac{2k}{m}\dfrac{(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}} = 8{,}9$ м/с.

5.28. $h = \dfrac{\left(\upsilon_2 - \sqrt{2g(R + \ell)}\right)^2}{2g}$; $\left|\dfrac{\Delta W}{W}\right| = 1 - \dfrac{\upsilon^2 + 2gh}{2g(\ell + R)}$.

5.29. $\alpha = \arccos\left(1 - \dfrac{h}{\ell}\right)$, где $h = \dfrac{\upsilon^2}{2g}\left(\dfrac{m_0}{m + m_0}\right)^2$, $\alpha = 15°$;

$\dfrac{W_{\text{деф}}}{W_{\text{пули}}} = \dfrac{m_1}{m + m_1} = 0{,}996 \approx 1$;

$\alpha' = \arccos\left(1 - \dfrac{h}{\ell}\right)$, где $h' = \dfrac{2\upsilon^2}{g}\left(\dfrac{m}{m + m_1}\right)^2$, $\alpha' = 30°$.

5.30. $m_2 / m_1 = 3$.

5.31. $m_1 / m_2 = 1 + 2\cos\theta = 2$.

5.33. $\vec{F} = -\left(3ax^2 + 2bx\right)\vec{i} - c\vec{k}$.

5.34. $\vec{F} = -ayz\vec{i} - axz\vec{j} - axy\vec{k}$.

5.35. $W = -a / r$.

5.36. $W = \begin{cases} -\rho r^2/2 \text{ при } r < R \\ -3\rho R^2/2 + \rho R^3/r \text{ при } r > R \end{cases}$.

5.37. $F = (m_1 + m_2)g + \dfrac{m_1^2}{m_1 + m_2} \cdot \dfrac{h}{S} g = 150\,\text{кН}$; $\dfrac{\Delta W_\text{к}}{W_\text{к}} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{3}{17}$.

5.38. $\upsilon = \sqrt{2gh \dfrac{m_1^2}{(m_1 + m_2)\left(m_2 + (m_1 + m_2)\text{tg}^2\alpha\right)}}$

5.39. $\upsilon = \sqrt{2gH \dfrac{n+1}{n}}$.

5.40. $\upsilon = 8$ м/с.

5.41. $\upsilon_{\max} = \sqrt{\upsilon_0^2 + \dfrac{2x_0(bx_0 - a)}{m} + \dfrac{a^2}{2bm}}$; $x = \dfrac{a}{2b}$.

5.42. $L_z = -6t^2$ кг·м²/с.

5.43. $L = m\upsilon b = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$. Вектор $\vec{L}$ не зависит от времени.

5.44. $L = \dfrac{1}{2} m\upsilon_0 g t^2 \cos\alpha$.

5.45. а) $L = mR^2\pi n = 6{,}3 \cdot 10^{-2}\,\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$; б) $L = 2mR^2\pi n = 0{,}13\,\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

5.46. $L = m\upsilon_{\text{ц.м.}} R + I_{\text{ц.м.}}\omega = 3mR^2\pi n = 0{,}19\,\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$.

5.47. $F = \dfrac{W}{\pi\nu\tau R}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = 5{,}3\,\text{Н}$.

5.48. $n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2mgh}{I + mR^2}} = 0{,}7\ \text{с}^{-1}$.

5.49. $\upsilon = \sqrt{3g\ell} = 11\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

5.50. а) $\upsilon = \sqrt{gh} = 1{,}4\,\text{м/с}$; б) $\upsilon = \sqrt{4gh/3} = 1{,}6\,\text{м/с}$; в) $\upsilon = \sqrt{10gh/7} = 1{,}7\,\text{м/с}$; при $\mu = 0$ $\upsilon_0 = \sqrt{2gh} = 1{,}98\,\text{м/с}$ для всех тел.

5.51. $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{2\ell}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$.

5.52. $A = 4\pi^2 n_1^2 m\left(r_1^2 - r_2^2\right)\dfrac{I_0 + 2mr_1^2}{I_0 + 2mr_2^2} = 320$ Дж.

5.53. $\omega = \dfrac{\omega_0 I_3}{I_1 + I_2 + I_3}$.

5.54. $n = n_0\left(1 + \dfrac{m\ell^2}{12 I_0}\right) = 0{,}7\ \dfrac{\text{об}}{\text{с}}$.

5.55. $\varphi = \dfrac{\omega_0 R}{\upsilon}\sqrt{\dfrac{m_1}{2m_2}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{2m_2}{m_1}}$.

5.56. $h = \dfrac{3{m_0}^2{\upsilon_0}^2}{(2m_0 + m)(3m_0 + m)g}$, $\eta = \dfrac{m}{3m_0 + m}$.

5.57. $\upsilon_{\text{ц.м.}} = \omega_0 R/3$.

5.58. $\upsilon_{\text{ц.м.}} = \dfrac{m_0}{m_0 + m}\upsilon_0 = 3{,}3$ м/с, $\omega = \dfrac{2m_0}{m_0 + m}\dfrac{\upsilon_0}{\ell} = 667$ рад/с.

5.59. $\omega = \dfrac{I_1\omega_1 \pm I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$, $Q = \dfrac{I_1 I_2(\omega_1 \mp \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$.

5.60. $\upsilon_{\text{ц.м.}} = \dfrac{5}{7}\dfrac{m_0\upsilon_0(R + \ell)}{mR} = 1{,}0$ м/с.

5.61. $x = \dfrac{\ell}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{m}{m_0} - 1} = 5$ см; т.к. $x \le \dfrac{\ell}{2}$, то $\dfrac{m}{m_0} \le 4$.

5.62. $\upsilon_{\text{ц.м.}} = \sqrt{gh}\,\dfrac{2R}{2R - h} = 0{,}35$ м/с.

5.63. $\upsilon_{\text{ц.м.}} = \sqrt{2gH\,\dfrac{m_1 + m_2}{2m_1 + m_2}}$.

6

6.1. $x_m = 1{,}2$ м, $\omega = 2\pi/3$ рад/с, $T = 3$ с, $\varphi_0 = \pi/4$, $\upsilon_{xm} = 2{,}5$ м/с, $a_{xm} = 5{,}3$ м/с^2.

6.2. б) эллипс $\upsilon_x^2/a^2\omega^2 + x^2/a^2 = 1$; в) прямая $a_x = -\omega^2 x$.

6.3. $\dfrac{t_1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\arcsin\dfrac{x}{A_m} = \dfrac{1}{12}$; $\dfrac{t_2}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{A_m}\right) = \dfrac{1}{6}$.

6.4. $\omega = \dfrac{\upsilon_0}{a}$.

6.5. а) $\langle\upsilon\rangle = \dfrac{2a\omega}{\pi} = 40$ см/с; б) $\langle\upsilon\rangle = 40$ см/с.

6.6. $\dfrac{dW}{dx} = \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$.

6.7. $x = 7\cos(\omega t - 0{,}67)$ см.

6.8. Частица движется по часовой стрелке по эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

6.9. $\ell = 1/4$ м, $T = 2$ с.

6.10. $T = 2T_0$.

6.11. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g(\sin\alpha + \sin\beta)}}$.

6.12. $\tau = \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{3\pi}{G\rho}} = 21\,\text{мин}$.

6.13. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{7}{12}\cdot\dfrac{\ell}{g}}$.

6.14. $\ell = 1/3$ м, $T = 1{,}64$ с.

6.15. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{3g}}$.

6.16. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{2g}}$.

6.17. $\tau = 20$ с.

6.18. $\beta = 0{,}1\,\text{с}^{-1}$.

6.19. $\delta = \dfrac{\pi}{t}\sqrt{\dfrac{l}{g}}\ln\dfrac{W_0}{W_t} = 0{,}007$.

6.20. $\dfrac{A_0}{A_n} = e^{N\delta} = 7{,}4$.

6.21. $Q = \dfrac{\pi N}{\ln n} = 195$.

6.22. $\omega_0 = \omega\sqrt{1 + \dfrac{1}{4Q^2}}$.

6.23. $\upsilon = \dfrac{2\pi\nu\ell}{\Delta\varphi} = 2{,}4\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

6.24. $\Delta\varphi = \dfrac{\ell}{\lambda}2\pi = 4\pi$.

6.25. $x = A\sin\left(2\pi\dfrac{t}{T} - 2\pi\dfrac{\ell}{\lambda}\right) = 0{,}025\,\text{м}$.

7

7.1. $m = \dfrac{\mu_{эф} PV}{RT} = 1{,}2$ г.

7.2. $\rho = \dfrac{p_0 \mu}{RT_0} = 0{,}71 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

7.3. $P_2 = 0{,}2 P_1 T_2 / T_1 = 38$ кПа.

7.4. $m = \dfrac{\mu PS\ell}{R(T_2 - T_1)} \ln \dfrac{T_2}{T_1} = 630$ г.

7.5. В координатах (p, V) – линейная зависимость $p = \dfrac{\nu R}{\alpha^2} V$.

7.6. Уменьшается ($VT = \text{const}$).

7.7. $V = \dfrac{V_0}{\sqrt[n]{\dfrac{p}{p_n}} - 1} = 1600\ \text{см}^3$.

7.8. $p = \dfrac{mRT(\mu_1 + \mu_2)}{V \mu_1 \mu_2} = 1 \cdot 10^6$ Па.

7.9. $h = \dfrac{1}{2}\left[(\ell_0 + \ell) - \sqrt{\ell_0^2 + \ell^2}\right] = 0{,}22$ м. Здесь $\ell_0 = 760$ мм.

7.10. $p = L \dfrac{h_1 + h_2}{h_2 - h_1} = 750$ мм. рт. ст.

7.11. $x = \dfrac{\left[V_0 + \left(\dfrac{L - l}{2}\right) S\right] \Delta t}{ST} = 1$ см.

7.12. $L_1 = \dfrac{L \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = 0{,}05$ м.

7.13. $p_1 = \left(\dfrac{m_1}{\mu_1} + \dfrac{m_2}{2\mu_2}\right) \dfrac{2RT}{V} = 3 \cdot 10^3$ Па; $p_2 = \dfrac{m_2}{\mu_2} \cdot \dfrac{RT}{V} = 1 \cdot 10^3$ Па.

7.14. $p = \dfrac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 4{,}5$ атм.

7.15. $T = \dfrac{p_2 V_2 + p_1 V_1}{\dfrac{p_2 V_2}{T_2} + \dfrac{p_1 V_1}{T_1}} = 300\text{К}$; $p = \left(\dfrac{p_1 V_1}{T_1} + \dfrac{p_2 V_2}{T_2}\right) \dfrac{T}{V_1 + V_2} = 6{,}4 \cdot 10^5$ Па.

7.16. $\dfrac{p_1}{p} = \dfrac{2T_1}{T + T_1}$.

7.17. $T_{\max} = \dfrac{2}{3} \dfrac{p_0}{\nu R} \sqrt{\dfrac{p_0}{3\alpha}}$.

7.18. $T_{\max} = \dfrac{p_0}{\beta \nu e R}$.

7.19. $P_{\min} = 2\nu R\sqrt{aT_0}$.

7.20. $p = p_0 e^{-\frac{Q}{V_0}t}$.

8

8.1. $m_0 = \dfrac{\mu}{N_A}$; $m_1 = 3{,}3 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_2 = 7{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг, $m_1 = 3{,}0 \cdot 10^{-26}$ кг.

8.2. $N \approx 2{,}4 \cdot 10^{22}$ молекул, $m \approx 1{,}2$ г.

8.3. $\rho = \dfrac{\mu}{N_A} \cdot \dfrac{N}{V} = 3 \cdot 10^5 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

8.4. $\upsilon_{\text{кв}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} = 480 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

8.5. $\upsilon_{\text{кв}} = \sqrt{\dfrac{3p}{\rho}} = 1{,}3 \cdot 10^3 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$.

8.6. $\langle a \rangle \approx 33 \cdot 10^{-10}$ м $\approx 10d$.

8.7. Возьмем 1 моль газа, объем которого при нормальных условиях $V_{0\mu} = 22{,}4$ л. Тогда $\eta_1 = \dfrac{V_{\text{собств}}}{V_{0\mu}} = \dfrac{\pi d^3 N_A}{6V_{0\mu}} = 0{,}038\%$

Во втором случае $\eta_2 = \dfrac{\pi d^3 N_A}{6V_{0\mu}} \dfrac{p}{p_0} = 19\%$. При этом условии газ не идеален.

8.8. а) $p = 2m_0 n\upsilon^2 = 6{,}0 \cdot 10^5$ Па; б) $p = 2m_0 n(\upsilon + u)^2 = 7{,}3 \cdot 10^5$ Па.

8.9. $p = \dfrac{2}{3}\dfrac{\nu N_A}{V}\dfrac{m_0\upsilon^2}{2} = 1500$ Па.

8.10. $p = nmc^2 = \dfrac{E}{c} = 4{,}5 \cdot 10^{-6}$ Па, $F = p \cdot \pi R^2 = 5 \cdot 10^8$ Н ($F_{\text{гравит}} \approx 10^{22}$ Н).

8.11. Давление света больше в 11 раз.

8.12. $W_{\text{п}} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{m}{\mu} RT = 1250$ Дж; $W_{\text{вр}} = \dfrac{m}{\mu} RT = 830$ Дж.

8.13. $U = \dfrac{5}{2} pV = 245$ Дж.

8.14. $W_{п} = \frac{3}{2} pV = 0{,}15\,Дж$.

8.15. $\sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \sqrt{\frac{8RT}{\mu \ell^2}} = 2{,}3 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$.

8.16. $N = \frac{2W}{3kT} = 1{,}6 \cdot 10^{21}$.

8.17. Увеличилось в 1,3 раза.

8.18. $n = \frac{3}{2}\frac{p}{W} = 5{,}0 \cdot 10^{25}$ 1/м^3

8.19. $W = \frac{ipV}{2\nu N_A} = 2{,}0 \cdot 10^{-20}$ Дж.

8.20. $\langle \upsilon \rangle = \frac{\sqrt{\langle \omega^2 \rangle}\,\ell}{\sqrt{\pi}} = 180$ м/с.

8.21. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{3\mu_1}{2\mu_2} = 10{,}5$.

8.22. $\Delta T = \frac{\mu u^2}{3R}$, $t_2 = 1{,}6°C$.

8.23. $N = \frac{1}{6} n \langle \upsilon \rangle S\tau = \frac{1}{6}\frac{p}{k}\sqrt{\frac{3R}{\mu T}} S\tau$.

8.24. В процессе колебаний чашек весов, из закона сохранения энергии $\langle W_{кин} \rangle = \langle W_{пот} \rangle$, т.е. $\left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{Kx^2}{2} \right\rangle$,

с другой стороны средняя кинетическая энергия колебаний чашек весов сопоставима с энергией теплового движения молекул $\left\langle \frac{m\upsilon^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2}$. В результате $\left\langle \frac{Kx^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2}$, а так как $\Delta mg = Kx$, то $\Delta m = \frac{\sqrt{KkT}}{g}$.

9

9.1. $A = \frac{m}{\mu} R\Delta T = 340\,Дж$.

9.2. $A = p_0(V_2 - V_1) = 3$ кДж.

9.3. $A = \nu RT \ln\frac{V_2}{V_1} = 8{,}2$ кДж.

9.4. $A = \frac{\nu R}{2}(T_2 - T_1) = 1{,}7$ кДж.

9.5. $A=\frac{p_0}{\alpha}\left(1-\exp\{-\alpha(V_1-V_0)\}\right)=540$ кДж; нет, не является.

9.6. $A=\frac{\nu R}{2}b\left(p_2^2-p_1^2\right)$; да, является.

9.7. $A=\nu RV_0(\theta-1)\left(a-\frac{b}{2}(\theta+1)V_0\right)$; нет, не является.

9.8. $A=\frac{\nu R(T_1-T_2)}{n-1}$

9.9. $A=\frac{p_0V_0}{\gamma-1}\left[2^{\gamma-1}-2+\left(\frac{2}{3}\right)^{\gamma-1}\right]$, где $\gamma=\frac{C_P}{C_V}$.

9.10. $V_1=\frac{A^*}{p_0(N-1-\ln N)}=0{,}42$ л.

9.11. $pV^n=const$, где $n=\frac{C_\mu-C_P}{C_\mu-C_V}$; процесс политропный.

9.12. $pV^n=const$, где $n=1-\frac{\nu R}{b}$; процесс политропный.

9.13. Т.к. $\delta Q=-\mathrm{d}U$, то $C_\mu=-C_V$. Уравнение процесса $pV^n=const$, где $n=\frac{i+1}{i}$; процесс политропный.

9.14. $|Q|=\frac{i+2}{2}A^*=2{,}8\,\text{кДж}$; $\Delta U=-\frac{i}{2}A^*=-2{,}0\,\text{кДж}$.

9.15. $Q=A=\frac{m}{\mu}RT\ln\theta=11\,\text{кДж}$.

9.16. *а*) $\Delta U=\frac{i}{2}\frac{p_1V}{T_1}(T_2-T_1)=-4{,}8$ Дж; *б*) $Q^*=-\Delta U=4{,}8$ Дж.

9.17. $A=\frac{i}{2}\frac{m}{\mu}RT_1\left[1-\left(\frac{1}{\theta}\right)^{\gamma-1}\right]=130\,\text{кДж}$.

9.18. $A=\frac{i}{2}p_1V_1\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]=2{,}4\,\text{кДж}$.

9.19. $A=\frac{m}{\mu}C_V(T_1-T_2)=2{,}1\cdot10^6$ Дж.

9.20. *а*) $A=p_1(V_2-V_1)=1{,}0\,\text{кДж}$, $\Delta U=\frac{i}{2}p_1(V_2-V_1)=2{,}5\,\text{кДж}$,

$Q=A+\Delta U=3{,}5$ кДж;

б) $A = p_1V_1\ln\dfrac{V_2}{V_1} = 0{,}69\,\text{кДж}$, $\Delta U = 0$, $Q = A$;

в) $\Delta U = \dfrac{i}{2}p_1V_1\left(\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right) = -0{,}61\,\text{кДж}$, $A = -\Delta U$, $Q = 0$.

9.21. $A = p_1V_1\left(1 - \dfrac{V_1}{V_2}\right)$, $\Delta U = -\dfrac{i}{2}p_1V_1\left(1 - \dfrac{V_1}{V_2}\right)$, $Q = -\dfrac{i-2}{2}p_1V_1\left(1 - \dfrac{V_1}{V_2}\right)$.

9.22. $C_\mu = 0$.

9.23. $\Delta U = -\,2{,}16$ кДж, $C_\mu = 18{,}5\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$

9.24. $Q = \dfrac{i+2}{2}A$.

9.25. $\Delta U = \dfrac{3}{2}p_1V_1\left(\dfrac{V_1^2}{V_2^2} - 1\right)$, $C_\mu = \dfrac{i-1}{2}R$.

9.26. $C_\mu = C_P = C_V + 1$.

9.27. $C_\mu = C_V = \dfrac{i}{2}R$.

9.28. $C_\mu \Rightarrow \infty$, процесс изотермический.

9.29. $C_\mu = C_V - R = \dfrac{i-2}{2}R$.

9.30. $C_\mu = C_V - 3R$.

9.31. $i = 3$.

9.32. $i = 5$.

9.33. $C_\mu = \dfrac{C_P + C_V}{2} = \dfrac{i+1}{2}R$.

9.34. $\gamma = \dfrac{5\nu_1 + 7\nu_2}{3\nu_1 + 5\nu_2}$.

9.35. $C_\mu < 0$, если $1 < n < \gamma$.

9.36. $C_\mu = C_V + \dfrac{p_0 + aV}{p_0 + 2aV}R$, не является политропным.

10

10.1 $Q_2 = Q_1\dfrac{T_2}{T_1} = 239\,\text{Дж}$.

10.2. $A = \dfrac{2A_{\text{ад}}}{i}\ln a = 2300\,\text{Дж}$.

10.3. $\eta = \dfrac{2A^*_{\text{ад}}}{i\nu RT_1} = 0{,}34$.

10.4. $Q = A^* \dfrac{T_{\text{х}}}{T - T_{\text{х}}} = 1{,}3 \cdot 10^6$ Дж.

10.5. $\eta = \dfrac{2(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{(i+2)p_2(V_2 - V_1) + iV_1(p_2 - p_1)} = 0{,}13$.

10.6. $\eta = \dfrac{2(T_2 - T_1)\ln a}{i(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln a} = 0{,}21$.

10.7. $\eta = (T_2 - T_1)\left[T_2 + \dfrac{(i+2)(T_2 - T_1)}{2\ln a}\right]^{-1} = 0{,}18$.

10.8. $\eta = 1 - a^{\frac{-2}{i+2}} = 0{,}27$.

10.9. $\eta = 1 - \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{i}} = 0{,}45$.

10.10. $\eta = 1 - \dfrac{2\ln a}{(i+2)\left(a^{\frac{2}{i+2}} - 1\right)} = 0{,}15$.

10.11. $\eta = 1 - \dfrac{T_2 - T_1}{T_2 \ln \dfrac{T_2}{T_1}} = 0{,}22$.

10.12. $\eta = 1 - \dfrac{a-1}{a\ln a} = 0{,}39$.

10.13. $\eta = \dfrac{\ln a - b}{\ln a + \frac{i}{2}b} = 0{,}16$, где $b = \dfrac{a-1}{a}$.

10.14. а) 2^6=64 способа; б) W = 6, P = 6/64 = 0,09;
в) W = 20, P = 20/64 = 0,31.

10.15. $\Delta S = k\ln a = 1{,}5 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

10.16. $W = W_1^n = W_1^3$, $\Delta S = k\ln\dfrac{W}{W_1} = 1{,}5 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

10.17. $\Delta S = \nu C_V \ln\dfrac{T_2}{T_1} = 17{,}3$ Дж/К.

10.18. $\Delta S = \nu C_p \ln\dfrac{T_2}{T_1} = 28{,}8$ Дж/К.

10.19. $\Delta S = \frac{A}{T} = 2{,}0$ Дж/К.

10.20. $\Delta S = \frac{m}{\mu} R\left(\frac{i}{2}\ln\frac{T_2}{T_1} + \ln\frac{T_2 P_1}{T_1 P_2}\right) = 1030\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

10.21. $T_2 = T_1 e^{-2\frac{\mu\Delta S}{imR}} = 320\,\text{К}$.

10.22. $\Delta S = cm\ln\frac{T_2}{T_1} = 14{,}5\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

10.23. $\Delta S = \frac{m\lambda}{T} = 100\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

10.24. $\Delta U = 0$. Т.к. температура газа не изменилась, то для вычисления ΔS можно рассмотреть изотермический процесс расширения:

$\Delta S = \frac{m}{\mu} R\ln 2$.

10.25. $\Delta S = \frac{m_1}{\mu_1} R\ln\frac{V_2 + V_1}{V_1} + \frac{m_2}{\mu_2} R\ln\frac{V_2 + V_1}{V_2} = 6{,}3$ Дж/К.

10.26. $\Delta S = \frac{R}{\mu}\left(m_1\ln\frac{\rho_1}{\rho} + m_2\ln\frac{\rho_2}{\rho}\right) = 0{,}7$ Дж/К, где $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1}$, $\rho_2 = \frac{m_2}{V_2}$,

$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$.

10.27. $A = Q = T_0(S_2 - S_1)$.

10.28. $Q = \frac{b\left(T_2^2 - T_1^2\right)}{2} = 30$ кДж.

10.29. $\eta = \frac{T_\text{н} - T_\text{х}}{T_\text{н}}$.

10.30. $\eta = \frac{T_\text{н} - T_\text{х}}{T_\text{н} + T_\text{х}}$.

11

11.1. $P(a \le x \le b) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$, условие нормировки имеет вид $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

11.2. $f(r)$ – плотность вероятности попадания пули в данную область пространства. Из условия $\int\limits_0^\infty f(r)2\pi r\mathrm{d}r = 1$ находим $A = \alpha/\pi$.

Тогда $P(R_1 \le r \le R_2) = \int\limits_{R_1}^{R_2} f(r)2\pi r\mathrm{d}r = \exp\left(-\alpha R_1^2\right) - \exp\left(-\alpha R_2^2\right)$.

11.3. $r_{\text{вер}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha}}$; $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 1/\sqrt{\alpha}$.

11.4. а) Из условия нормировки $b = \dfrac{1}{\upsilon_2 - \upsilon_1} = 0{,}01$ с/м;

б) $\langle \upsilon \rangle = \displaystyle\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon f(\upsilon) \mathrm{d}\upsilon = \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = 150{,}0$ м/с;

в) $\langle \upsilon^2 \rangle = \displaystyle\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon^2 f(\upsilon) \mathrm{d}\upsilon = \dfrac{\upsilon_1^2 + \upsilon_1\upsilon_2 + \upsilon_2^2}{3}$, откуда $\sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle} = 152{,}8$ м/с.

11.5. $\mathrm{d}N_x = \dfrac{4N}{\sqrt{\pi}} x^2 \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x$.

11.6. $\upsilon_{\text{вер}} = 390$ м/с, $\langle \upsilon \rangle = 440$ м/с, $\upsilon_{\text{ср.кв}} = 478$ м/с.

11.7. Во всех случаях вероятность равна нулю.

11.8 а)1,66% б)1,80% в)1,86%.

11.9. $t = -221°$ С. При $t = -182{,}9°C$ и нормальном давлении кислород сжижается.

11.10. $\Delta N / N = 50\%$

11.11. T = 380 K.

11.12. $T = \dfrac{\mu\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)}{4R \ln \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}} = 47$ К.

11.13. $\sum |m_0 \vec{\upsilon}_i| = \mu \cdot \langle \upsilon \rangle = 13$ кг·м/с.

11.14. $\upsilon = \left(\dfrac{3RT \ln(\mu_2 / \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} \right)^{1/2} = 1{,}61 \cdot 10^3$ м/с.

11.15. $\mathrm{d}N_\varepsilon = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} N_0 (kT)^{-3/2} \sqrt{\varepsilon} \exp(-\varepsilon / kT) \mathrm{d}\varepsilon$, $\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{3}{2} kT$.

11.16. а) $N_1 = \dfrac{1}{6} n \langle \upsilon \rangle S\tau$, б) $N_2 = \dfrac{1}{4} n \langle \upsilon \rangle S\tau$.

11.17. $h = \dfrac{RT}{\mu g} \ln \dfrac{p_0}{p} = 1950$ м.

11.18. а) 0,29 атм., б) 3,5 атм.

11.19. h = 78 м.

11.20. $m_1 = \dfrac{p_0 S}{g} \left(1 - \exp\left[-\dfrac{\mu g h}{RT} \right] \right) = 1158$ кг, $m_2 = \dfrac{p_0 \mu}{RT} Sh = 1205$ кг.

11.21. $\langle U\rangle = \dfrac{\int\limits_0^\infty U\exp\left\{-\dfrac{U}{kT}\right\}\mathrm{d}U}{\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\dfrac{U}{kT}\right\}\mathrm{d}U} = kT$.

12

12.1. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{p_0}{p_2} = 6{,}5$ м.

12.2. $\lambda_2 = \lambda_1 \dfrac{T_2}{T_1} = 1{,}0\cdot 10^{-5}$ м.

12.3. $p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2\lambda} = 5\cdot 10^{-2}$ Па.

12.4. $\tau = \dfrac{\sqrt{RT\mu}}{4N_A d^2 p\sqrt{\pi}} \approx 9\cdot 10^{-8}$ с.

12.5. $z = 4\sqrt{\dfrac{N_A\pi}{\mu kT}}d^2\cdot P = 5{,}1\cdot 10^9$ с$^{-1}$.

12.6. $t = \dfrac{m\ell}{DS(\rho_1-\rho_2)} \approx 50$ с.

12.7. $\dfrac{F}{S} = \eta\dfrac{\upsilon}{\ell} = 3\cdot 10^{-4}$ Н/м^2.

12.8. $M = \dfrac{\pi R^4\eta}{2d}\omega$.

12.9. $t = \dfrac{\chi_1 d_2 t_1 + \chi_2 d_1 t_2}{\chi_1 d_2 + \chi_2 d_1} = 38{,}7^\circ$ С.

12.10. $\eta = \dfrac{p\mu}{RT}D = 1{,}16\cdot 10^{-5}\ \dfrac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}$.

12.11. $\lambda = \dfrac{3\eta}{p_0}\sqrt{\dfrac{\pi RT}{8\mu}} = 9{,}3\cdot 10^{-8}$ м.

12.12. $d = \sqrt{\dfrac{5k}{3\pi\chi}\sqrt{\dfrac{RT}{\pi\mu}}} = 0{,}95\cdot 10^{-10}$ м.

12.13. $T_2 = T_1 \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 = 1390\,\text{К}$.

12.14. $p = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l} = 2\,\text{Па}$.

13

13.1. $p = \frac{\frac{m}{\mu} RT}{V - \frac{m}{\mu} b} - \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{a}{V^2} = 4{,}7\text{МПа}$; $p' = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} = 6{,}2\,\text{МПа}$.

13.2. $\frac{b\nu}{V_{\text{эф}}} = \frac{6b}{\pi d^3 N_A} = 3{,}9$.

13.3. $a = \frac{27}{64} \frac{R^2 T_{\text{кр}}^2}{p_{\text{кр}}} = 0{,}36 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^4}{\text{моль}^2}$; $b = \frac{RT_{\text{кр}}}{8 p_{\text{кр}}} = 4{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$.

13.4. $p' = \frac{a\rho^2}{\mu^2} = 1{,}7\,\text{МПа}$.

13.5. $\rho_{\text{кр}} = \frac{\mu}{3b} = 200 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

13.6. $A = \frac{m^2}{\mu^2} a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -0{,}25\,\text{Дж}$.

13.7. $V = \frac{8\mu p_{\text{кр}} V_{\text{амп}}}{3RT_{\text{кр}}\rho} = 0{,}8\,\text{см}^3$.

13.8. $A = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)$.

13.9. $\Delta T = \frac{m}{\mu} \frac{2a}{iR} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) = -5{,}9\,\text{К}$.

13.10. $\Delta S = c_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b}$.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ	
МЕХАНИКА	
1. Кинематика	
2. Динамика движения материальной точки	
3. Динамика движения материальной точки по окружности	
4. Момент инерции. Динамика вращательного движения твердого тела	
5. Законы изменения и сохранения импульса, энергии и момента импульса	
6. Колебания и волны	
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА	
7. Уравнение состояния идеального газа	
8. Молекулярно-кинетическая теория	
9. Первое начало термодинамики. Теплоемкость	
10. Второе начало термодинамики. Термодинамические циклы. Энтропия	
11. Распределение молекул по скоростям и энергиям. Законы Максвелла и Больцмана	
12. Длина свободного пробега. Явления переноса	
13. Уравнение Ван-дер-Ваальса	
ОТВЕТЫ	

Учебное издание

Бирюкова Ольга Витальевна, Ермаков Борис Владимирович, Корецкая Ирина Валерьевна, Коротких Иван Игоревич

МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Сборник задач

Учебное пособие
по курсу «Физика»
для студентов, обучающихся по направлениям
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
08.03.01 «Строительство»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.03.01 «Информационная безопасность»,
11.03.01 «Радиотехника»
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
12.03.01 «Приборостроение»,
12.03.04 «Биотехнические системы и технологии»,
13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника»,
27.03.02 «Управление качеством»,
27.03.04 «Управление в технических системах»,
11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы».

Редактор издательства

Темплан издания	МЭИ 2021(II), метод.	Подписано в печать . .
Печать офсетная	Формат 60x84/16	Физ. печ.л. 5,7
Тираж 2000	Изд. №	Заказ

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д.14