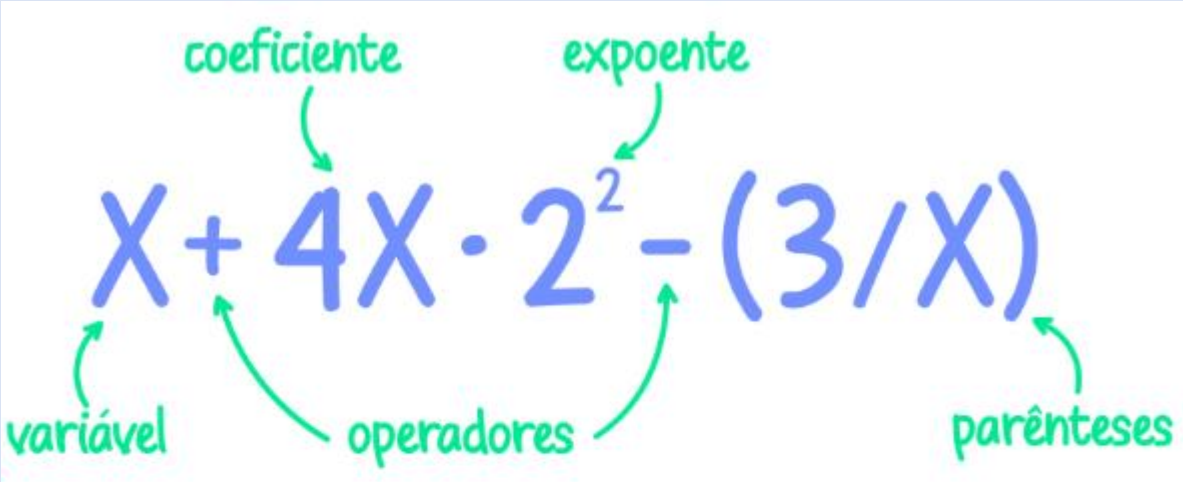
TÓPICOS DE MATEMÁTICA

UIA1 | AULAS 03_04 |
EXPRESSÕES ALGÉBRICAS
FRAÇÕES ALGÉBRICAS,
RACIONALIZAÇÃO E
FRAÇÕES PARCIAIS



UNIDADE DE INTERAÇÃO E APRENDIZAGEM 1 | UIA 1
CONJUNTOS E INTERVALOS

- Aula 01 | Conjuntos
- Aula 02 | Plano Cartesiano e Módulo
- **Aula 03 | Expressões Algébricas**
- **Aula 04 | Frações Algébricas, Racionalização e Frações Parciais**

AULA 03 | EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

INTRODUÇÃO

Na matemática, estudamos as ***expressões algébricas*** e as ***expressões numéricas***.

1. EXPRESSÕES NUMÉRICAS

As expressões numéricas são expressões que envolvem apenas números, além das operações básica da aritmética (adição, subtração, multiplicação, divisão, além da potenciação e radiciação).

Exemplo

$$\left\{15+\left[\left(7-100\div 10^{2}\right)+\left(16\div\sqrt{4}-4\right)\right]^{2}+10\right\}\times 3$$

A ordem em que as operações devem ser realizadas é a seguinte, nessa ordem:

1. Potenciação e radiciação
2. Multiplicação e divisão
3. Adição e subtração

ORDEM ENTRE COLCHETES, CHAVES E PARÊNTESES

Em algumas **expressões numéricas**, existem algumas prioridades na resolução. As prioridades são estabelecidas por colchetes chaves e parênteses. A **prioridade** em que as operações devem ser feitas é a seguinte:

1. **Parênteses** - As operações que estiverem dentro dos parênteses devem ser resolvidas primeiro.
2. **Colchetes** – Depois de resolvidos as operações que estavam dentro de parênteses, damos prioridade às operações que estão dentro dos colchetes.
3. **Chaves** - Depois de resolvidos as operações que estavam dentro dos parênteses e colchetes, resolvemos os as operações que estão nas chaves.

Exemplo

$$\left\{15+\left[\left(7-100\div 10^{2}\right)+\left(16\div\sqrt{4}-4\right)\right]^{2}+10\right\}\times 3$$

-Solução-

$$\{15 + [(7 - 100:10^{2}) + (16:\sqrt{4} - 4)]^{2} + 10\}\cdot 3$$

$$\{15 + [(7 - 100:100) + (16:\sqrt{4} - 4)]^{2} + 10\}\cdot 3$$

$$\{15 + [(7 - 1) + (16:\sqrt{4} - 4)]^{2} + 10\}\cdot 3$$

$$\{15 + [(6) + (16:\sqrt{4} - 4)]^{2} + 10\}\cdot 3$$

$$\{15 + [6 + (16:\sqrt{4} - 4)]^2 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + [6 + (16:2 - 4)]^2 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + [6 + (8 - 4)]^2 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + [6 + (4)]^2 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + [6 + 4]^2 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + [10]^2 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + 100 + 10\}\cdot 3$$
$$\{15 + 100 + 10\}\cdot 3 = 125\cdot 3 = 375$$

2. EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

As **expressões algébricas** são expressões que envolvem ***variáveis*** e ***números*** com ***operações da aritmética***. As **variáveis** podem assumir qualquer valor numérico e são geralmente representadas pelas letras *x*, *y*, z, etc. Também podem ser chamadas de **incógnitas ou literais,** que representam um valor desconhecido.

As variáveis de uma expressão algébrica podem vir acompanhadas de números, que são as chamadas **constantes ou coeficientes.**

Exemplos

(a) $3xy$ (3 é o coeficiente e xy é a parte literal)
(b) $5xy + 2x$ (5 e 2 são os coeficientes e *xy* e *x* as partes literais)
(c) $2x^2 + xy - 4x^2y^2$
(d) $x^2y + xyz - 8z^2$

CLASSIFICAÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

As expressões algébricas são classificadas em monômios, binômios, trinômios e polinômios.

1. MONÔMIOS

Monômios são expressões algébricas que apresentam apenas o produto entre coeficientes (parte numérica) pelas variáveis (parte literal). Ou seja, não contém as operações de adição e subtração.

Exemplos

(a) $5xy$
(b) $4x^2y^2$
(c) xyz
(d) $-\frac{3}{2}xy$
(e) 10
(f) ax^2y

2. BINÔMIOS

Binômio é uma expressão algébrica composta por dois monômios, unidos pela adição ou subtração operando entre eles. Ou seja, é uma soma ou subtração de dois monômios.

Exemplos

(a) $5xy - x$
(b) $4x^2y^2 + 3y$
(c) $2yz - 4x$
(d) $\frac{1}{2}xy + 7xy^4$
(e) $ax^3y - 3$

3. TRINÔMIOS

Trinômio é uma expressão algébrica composta por três monômios, com adições ou subtrações operando entre eles.

Exemplos

(a) $x^2 + 2xy^4 - xy$
(b) $4x^2y^2 + 3y - 2x$
(c) $y + 2yz - 4x$
(d) $5x^3 - \frac{1}{2}xy + 7xy^2$
(e) $ax^2y - 7x^5 - 3$

4. POLINÔMIOS

Polinômio é uma expressão algébrica composta com quatro ou mais monômios, com adições ou subtrações operando entre eles.

Os polinômios são a adição e subtração de dois ou mais monômios.

Exemplos:

(a) $3x^4 + 4xy - xy^3 + 3x$
(b) $4x^2y^2 + 3y - 2x + xyz$
(c) $y + 2yz - 4x - 2xyz + y^5$
(d) $2x^3 - \sqrt{2}xy + 3x^3y^2 + 4xyz - 8y^5$
(e) $ax^2y - bx^5 - cxy^2 - 4x$

TERMOS SEMELHANTES

Dizemos que dois termos algébricos são semelhantes quando possuem a mesma parte literal (variáveis), podendo ter coeficientes diferentes (constantes).

Exemplos:

(a) $4x^3$ e $-12x^3$ (as constantes 4 e -12 são diferentes, mas as variáveis devem ser iguais e de mesma potência)
(b) 4abc e 6abc
(c) 2x e –5x
(d) $-4mp^2$ e $10mp^2$
(e) 6xyz e –2xyz

OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

Podemos realizar operações algébricas entre monômios, binômios, trinômios e polinômios usando as operações básicas da aritmética. Essa é uma característica importante dos termos semelhantes de uma expressão algébrica. Os termos semelhantes podem ser somados algebricamente.

Por exemplo, 3x + 7x é igual a 10x. Para somar termos semelhantes, basta somar algebricamente seus coeficientes e repetir a parte literal.

1. SOMA E SUBTRAÇÃO DE MONÔMIOS

Podemos somar ou subtrair monômios quando eles têm a parte literal em comum. Então, procederemos da seguinte forma:

- Somamos ou subtraímos os coeficientes e mantemos a parte literal.

Exemplo:

- $5xy + 7xy^2 + 8xy - 4x^2y + 3xy^2$

  $= (5xy + 8xy) + (7xy^2 + 3xy^2) - 4x^2y$

  $= \mathbf{13xy + 10xy^2 - 4x^2y}$

2. MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIOS

Para multiplicar monômios, primeiramente multiplicamos os coeficientes (constantes), e depois as variáveis. Neste caso, temos que tomar cuidado com as potências das variáveis.

- *Na multiplicação de monômios de mesma base, somamos as potências e conservamos a base.*

Exemplo:

$$5xy^4 \times 4x^2y = (5\times 4)(xy^4 \times x^2y) = 20x^{1+2}y^{4+1} = 20x^3y^5$$

3. DIVISÃO DE MONÔMIOS

Para dividir dois monômios, primeiramente devemos dividir os coeficientes (constantes) entre si e depois as variáveis entre elas.

- *Na divisão de monômios de mesma base, conserva-se a base e subtrai os expoentes.*

Exemplos:

(a) $\dfrac{18y^7}{3y^3} = \left(\dfrac{18}{3}\right)\left(\dfrac{y^7}{y^3}\right) = 6y^{7-3} = 6y^4$

(b) $\dfrac{15x^5y^4}{5x^2y^2}=\left(\dfrac{15}{5}\right)\left(\dfrac{x^5}{x^2}\right)\left(\dfrac{y^4}{y^2}\right)=3x^{5-2}y^{4-2}=3x^3y^2$

(c) $\dfrac{6x^5}{2x^5}=\left(\dfrac{6}{2}\right)\left(\dfrac{x^5}{x^5}\right)=3x^{5-5}=3x^0=3.1=3$

4. SOMA E SUBTRAÇÃO DE POLINÔMIOS

As operações e regras são as mesmas para os monômios acima. Os polinômios são somados ou subtraídos colocando os termos comuns de mesma parte literal juntos. Somente podemos somar ou subtrair os coeficientes em que a parte literal é comum, se for diferente não deve ser somada ou subtraída e, sim, conservada no resultado final.

Exemplo:

$$\begin{aligned}3x^2+2y^4+4x^2+3y^3+2x-5xy-x &= (3x^2+4x^2)+2y^4+3y^3+(2x-x)-5xy\\ &= 7x^2+2y^4+3y^3+x-5xy\end{aligned}$$

5. MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

Polinômios são multiplicados utilizando a propriedade distributiva da multiplicação.

- *Multiplicar o primeiro termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo, multiplicar o segundo termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo,* e assim por diante.

Exemplo:

- $(3x + 2y) \times (x + 2y) = (3x \times x) + (3x \times 2y) + (2y \times x) + (2y \times 2y) =$ $\mathbf{3x^2 + 6xy + 2xy + 2y^2}$

6. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Para dividir dois polinômios devemos dividir os coeficientes entre si e a parte literal entre elas, tomando cuidado ao dividir as potências e usar as regras de divisão de potência: *bases iguais, repete a base e subtrai os expoentes*.

Exemplos:

1. **Divisão de polinômio por monômio**

$$\frac{6x^2+2xy-2y}{2x}=\frac{6x^2}{2x}+\frac{2xy}{2x}-\frac{2y}{2x}=3x+y-\frac{y}{x}$$

$$\frac{3x^2y-3xy}{xy}=\frac{3x^2y}{xy}-\frac{3xy}{xy}=3x-3$$

2. **Divisão de polinômio por polinômio**

D(X)	E(x)	Dividendo	Divisor
R(x)	Q(x)	Resto	Quociente

Exemplos

(a) Dividir o polinômio $6x^3 - 13x^2 + x + 3$ pelo polinômio $2x^2 - 3x - 1$.

$$
\begin{array}{rl}
6x^3 - 13x^2 + x + 3 & \big|\ 2x^2 - 3x - 1 \\
\underline{-6x^3 + 9x^2 + 3x} & \quad 3x - 2 \\
-4x^2 + 4x + 3 & \\
\underline{4x^2 - 6x - 2} & \\
-2x + 1 &
\end{array}
$$

(b) Dividir o polinômio $12x^3 + 4x^2 - 8x$ pelo polinômio $4x$.

$$
\begin{array}{rl}
12x^3 + 4x^2 - 8x & \big|\ 4x \\
\underline{-12x^3} & \quad 3x^2 + x - 2 \\
0x + 4x^2 & \\
\underline{-4x^2} & \\
0x \ -8x & \\
\underline{+8x} & \\
0 &
\end{array}
$$

(c) Dividir o polinômio $6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$ pelo polinômio $2x^2 + x - 3$.

$$
\begin{array}{rl}
6x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1 & \big|\ 2x^2 + x - 3 \\
\underline{-(6x^4 + 3x^3 - 9x^2)} & \quad 3x^2 - 2x + 7 \\
-4x^3 + 12x^2 - x + 1 & \\
\underline{-(-4x^3 - 2x + 6x)} & \\
14x^2 - 7x + 1 & \\
\underline{-(14x^2 + 7x - 21} & \\
-14x + 22 &
\end{array}
$$

FATORAÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Fatorar uma expressão algébrica significa escreve-la de forma diferente, mas que mantenha o mesmo resultado, caso as variáveis sejam substituídas por algum valor. Podemos fatorar, reescrevendo a expressão de forma que coloquemos a parte comum como um produto da parte diferente. Esse produto é chamado **PRODUTOS NOTÁVEIS.**

Dessa forma, podemos fatorar expressões algébricas utilizando os seguintes casos:

1. Fator comum

Quando temos uma variável em comum, coloquemos ela em evidência, isto é, coloquemos ela como um produto dos termos que não são comuns:

Exemplo: $ax + bx$

Observe que o fator comum é o *x*. Neste caso, podemos colocá-lo em evidência.

$$ax + bx = x(a + b)$$

2. **Agrupamento**

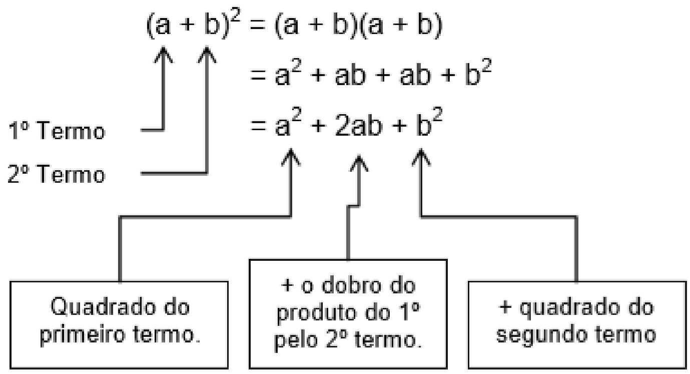
Quando temos vários termos e variáveis em comum, agrupamos eles para simplificar, colocando os grupos como um produto pelas variáveis que os multiplicam.

Exemplo: $ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

3. **Trinômio Quadrado Perfeito para a soma**

O trinômio formado por três monômios que não possuem termos em comum.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$



"***O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo***".

Exemplos

(a) $(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$

(b) $(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$

4. **Trinômio Quadrado Perfeito para a subtração**

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

"O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo."

Exemplo

(a) $(7x - 2y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2$

5. **Diferença de dois quadrados**

Quando temos dois termos em comum, de forma que os termos sejam um produto de uma soma por uma subtração.

$$a^2-b^2=(a+b)\times(a-b)$$

"O produto da soma de dois termos por sua diferença é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo

6. **Cubo Perfeito (adição)**

Quando temos a primeira parcela ***a*** ao cubo (a^3), mais o triplo de a^2b, mais o triplo de ab^2, mais o cubo de **b** (b^3), podemos fatorar pelo **cubo da soma** de ***a*** mais **b.**

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

7. **Cubo Perfeito (subtração)**

Quando temos a primeira parcela ***a*** ao cubo (a^3), menos o triplo de a^2b, mais o triplo de ab^2, menos o cubo de **b** (b^3), podemos fatorar pelo **cubo da diferença** de ***a*** mais **b.**

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

AULA 04 | FRAÇÕES ALGÉBRICAS, RACIONALIZAÇÃO E FRAÇÕES PARCIAIS

1. FRAÇÕES AGÉBRICAS

Frações algébricas são expressões que possuem pelo menos uma incógnita no denominador. Assim, são exemplos de frações algébricas:

(a) $\dfrac{x}{x+1}$

(b) $\dfrac{x^2+3x}{2x^3+1}$

(c) $\dfrac{8}{2x^3}$

(d) $\dfrac{1}{x^2}$

PROPRIEDADES

Da mesma forma que ocorre com as frações numéricas, as frações algébricas são somadas ou subtraídas obedecendo dois casos diferentes.

1. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

1º CASO - Denominadores iguais

Para adicionar ou subtrair frações algébricas com denominadores iguais, as mesmas regras aplicadas às frações numéricas aqui são aplicadas também. Ou seja, repetimos o denominador e somamos apenas o numerador.

Exemplo

(a) $\dfrac{x^2+3x}{2x^3} + \dfrac{3x^2-5x}{2x^3}$

$$\frac{x^2+3x}{2x^3} + \frac{3x^2-5x}{2x^3} = \frac{(x^2+3x)+(3x^2-5x)}{2x^3} = \frac{4x^2-2x}{2x^3}$$

(b) $\dfrac{3x+2}{x+1}+\dfrac{4x^2-7x+3}{x+1}-\dfrac{x-3}{x+1}$

$$\frac{3x+2}{x+1}+\frac{4x^2-7x+3}{x+1}-\frac{x-3}{x+1} = \frac{(3x+2)+(4x^2-7x+3)-(x-3)}{x+1} = \frac{4x^2-5x+8}{x+1}$$

2º CASO - Denominadores diferentes

Para adicionar ou subtrair frações algébricas com denominadores diferentes, siga as mesmas orientações dadas na resolução de frações numéricas de denominadores diferentes. Ou seja, temos que determinar o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores.

Exemplo

(a) $\dfrac{x^2-3}{2x-2}+\dfrac{x^2}{x-1}$

O primeiro passo é escrever os denominadores de forma fatorada.

$2x - 2 = 2(x -1)$

$$\frac{x^2-3}{2x-2}+\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-3}{2(x-1)}+\frac{x^2}{x-1}$$

Observe que o menor termo que é múltiplo de $x - 1$ e $2(x - 1)$ é $2(x - 1)$. Logo, $MMC(2(x-1),\ x-1)=2(x-1)$. Assim,

$$\frac{(x^2-3)+2x^2}{2(x-1)} = \frac{x^2-3+2x^2}{2(x-1)} = \frac{3x^2-3}{2(x-1)} = \frac{3(x^2-1)}{2(x-1)} = \frac{3(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \frac{3(x+1)}{2}$$

(b) $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{2x^2}{x^2-y^2}+\dfrac{y}{x+y}$

Escrever os denominadores de forma fatorada.

$$\frac{x}{x-y}+\frac{2x^2}{(x-y).(x+y)}+\frac{y}{x+y}$$

$$MMC(x-y,\ (x-y)(x+y),\ x+y) = (x-y)(x+y)$$

Logo,

$$\frac{x}{x-y}+\frac{2y^2}{(x-y).(x+y)}+\frac{y}{x+y} = \frac{x(x+y)+2y^2+y(x-y)}{(x-y).(x+y)} = \frac{x^2+xy+2y^2+xy-y^2}{(x-y).(x+y)} = \frac{x^2+2xy+y^2}{(x-y).(x+y)}$$

$$= \frac{(x+y)^2}{(x-y).(x+y)} = \frac{(x+y).(x+y)}{(x-y).(x+y)} = \frac{x+y}{x-y}$$

(c) $\frac{y+3}{y-3}-\frac{2}{y+3}-\frac{24+4y}{y^2-9}$

Escrever os denominadores de forma fatorada.

$$\frac{y+3}{y-3}-\frac{2}{y+3}-\frac{24+4y}{y^2-9} = \frac{y+3}{y-3}-\frac{2}{y+3}-\frac{24+4y}{(y-3)(y+3)}$$

$$MMC\,(y-3,\ y+3,(y-3)(y+3)) = (y-3)(y+3)$$

$$\frac{y+3}{y-3}-\frac{2}{y+3}-\frac{24+4y}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y+3)(y+3)-2(y-3)-(24+4y)}{(y-3)(y+3)} = \frac{y^2+6y+9-2y+6-24-4y}{(y-3)(y+3)}$$

$$= \frac{y^2-9}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y-3)(y+3)}{(y-3)(y+3)} = 1$$

2. RACIONALIZAÇÃO

O processo de reescrever frações contendo radicais (raízes) de modo que o denominador fique sem esses radicais é chamado ***racionalização***.

Mas antes de aprendermos a racionalizar, vamos aos conceitos de potenciação e radiciação.

2.1 POTENCIAÇÃO

DEFINIÇÃO 1 - Potência de grau ***n*** de um número ***a*** é o produto de ***n*** fatores iguais a ***a***.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ vezes}}$$

- ***n*** é o expoente da potência, que determina o seu grau.
- ***a*** é a base da potência.

Exemplo

$3^4 = 3\times 3\times 3\times 3 = 81 \rightarrow 3^4 = 81$

$(-2)^3 = (-2)\times(-2)\times(-2) = -8 \rightarrow (-2)^3 = -8$

Casos particulares

1- A potência de expoente 1 é igual à base.

Exemplo: $3^1 = 3$
2- Toda potência de base 1, para qualquer potência o resultado é sempre 1

Exemplo: $1^7 = 1$

3- Toda potência de 0 é igual a 0:

Exemplo: $0^3 = 0$

4- Toda potência de expoente par é positiva.

Exemplo: $(-3)^4 = 81$ e $3^4 = 81$

5- Toda potência de base negativa e expoente ímpar é negativa.

Exemplo: $(-3)^5 = -243$

PROPRIEDADES

Sendo ***a*** e ***b*** números reais e positivos, com ***m*** e ***n*** números racionais, são válidas as seguintes propriedades:

PROPRIEDADES	DESCRIÇÃO
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	Na multiplicação, base igual, conserva-se a base e soma os expoentes.
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Na divisão, base igual, conserva-se a base e subtrai os expoentes.
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	
$\left(a^m\right)^n = a^{m \times n}$	
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	
$a^0 = 1$	Todo número diferente de zero, elevado a zero é 1.
$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$	

Exemplos

(1) $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

(2) $\dfrac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$

(3) $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

(5) $\left(5^2\right)^6 = 5^{2\times 6} = 5^{12}$

(6) $\sqrt[3]{25^4} = 25^{\frac{4}{3}}$

(7) $5^0 = 1$

(8) $\dfrac{1}{10^5} = 10^{-5}$

IMPORTANTE

- $(-3^2) \neq (-3)^2$, pois $(-3^2) = -(3 \times 3) = -9$ e $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

2.2 RADICIAÇÃO

DEFINIÇÃO 2 - Denomina-se raiz de índice ***n*** (ou raiz n-ésima) de ***a***, ao número ou expressão que, elevado à potência ***n*** reproduz ***a***.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}}$$

onde,

- n = índice da raiz
- *a* = radicando
- $\sqrt{\ }$ = raiz

Exemplos

(1) $\sqrt{4} = 2$, pois 2² = 4.

(2) $\sqrt[3]{27} = 3$, pois 3³ = 27.

(3) $\sqrt[4]{81} = 3$, pois $3^4 = 81$.

PROPRIEDADES

Sendo ***a*** e ***b*** números reais e positivos, com ***m*** e ***n*** números inteiros positivos, são válidas as seguintes propriedades:

PROPRIEDADES	DESCRIÇÃO
$\sqrt[n]{0} = 0$	Raiz n-ésima de zero é zero.
$\sqrt[n]{1} = 1$	Raiz n-ésima de um é um.
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$	
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$	
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$	
$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$	
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	
$b \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \times a}$	

Exemplos

(1) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{180} = \sqrt{4 \times 9 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

(3) $\sqrt[4]{3^8} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

(4) $3.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[3]{54}$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE RADICAIS SEMELHANTES

Radicais de mesmo índice e mesmo radicando são semelhantes. Na adição e subtração de radicais semelhantes, operam-se os coeficientes e conserva-se o radical.

Exemplo

(1) $3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

Agora voltemos à racionalização.

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Como definido no início desta seção**, racionalização** é o processo de reescrever frações contendo radicais (raízes) de modo que o denominador fique sem esses radicais. É o processo de tornar um denominador irracional em um número racional sem alterar o valor numérico de uma fração.

Para racionalizar o denominador de uma fração, devemos multiplicar os termos desta fração por uma expressão com radical, denominado fator racionalizante, de modo a obter uma nova fração equivalente com denominador sem radical.

Exemplos

(a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

O denominador desta fração é um radical. Vamos reescrever a fração, de modo que este radical não apareça no denominador. Para isso, basta multiplicar a fração pelo radical, e dividir por ele mesmo.

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

(b) $\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{5}}$

$$\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{3\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{3 \times 5} = \frac{\sqrt{35}}{15}$$

(c) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}}$

$$\frac{8}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{8\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{8\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{8\sqrt[3]{25}}{5}$$

- Denominador composto por uma adição ou subtração

Quando o denominador é composto por uma adição ou uma subtração envolvendo alguma raiz quadrada, utiliza-se as propriedades do produto da soma pela diferença dos mesmos termos. Ou seja, multiplica-se pelo ***conjugado***. Assim, se o denominador envolve uma adição, multiplicaremos a fração pela diferença dos termos no denominador e vice-versa.

Exemplos

(a) $\dfrac{9}{\sqrt{5}+1}$

$$\frac{9}{\sqrt{5}+1} \times \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{9(\sqrt{5}-1)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{9(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times 1+1\times\sqrt{5}+1\times 1} = \frac{9(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{9(\sqrt{5}-1)}{4}$$

(b) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{10}}$

$$\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{7}+\sqrt{10}}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}=\frac{5\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}=\frac{5\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}+\sqrt{7}\times\sqrt{10}-\sqrt{10}\times\sqrt{7}-\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\frac{5\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}{7-10}$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}{-3} = -\frac{5\left(\sqrt{7}+\sqrt{10}\right)}{3}$$

EXERCÍCIOS

1- Calcule o resultado dos seguintes monômios.

a) $-2y^2 - 7y^2 + 5y^2 =$
b) $\frac{3}{4}xy - \frac{1}{4}xy =$
c) $7y - (-2y + y) + (-3y + 5y)$
d) $(-3x^2y) \times (+2x^2y^2) =$
e) $(-3{,}1a^3) \times (+0{,}6a^2) =$
f) $(\frac{1}{3}a^2b^3) \times (\frac{1}{2}a^4b) =$
g) $(30x^9) : (10x^4) =$
h) $(-7{,}5\, x^4y^3) : (1{,}5\, x\, y^2) =$
i) $(\frac{1}{2}xy^7) : \left(\frac{1}{5}xy^5\right) =$

2- Calcule os seguintes produtos notáveis:

a) $(x + 5)^2 =$
b) $(3y^2 - 2)^2 =$
c) $(2x + b)(2x - b) =$
d) $(2x - 1)^3 =$
e) $(x - 4c)^3 =$

3- Fatore cada uma das expressões algébricas a seguir, colocando o **termo comum** em evidência:

a) $8x^3 - 2x^2 + 6x$
b) $a^6 - 4a^2$
c) $4x^3 + 2x^2 + 6x$
d) $6x^3y^3 - 9x^2y + 15xy^2$
e) $8b^4 - 16b^2 - 24b$
f) $7x^2 + 14y^2$

4- Fatore cada **diferença de dois quadrados** a seguir:

a) $a^2 - 9$
b) $x^4 - 1$
c) $100 - x^2$
d) $x^2 - 36$

5- Fatore por **agrupamento** cada uma das expressões algébricas a segui:

a) $6x + 6y + ax + ay$
b) $7m + 7n - am - na$
c) $3x - 3 + yx - y$
d) $ax - 2x + 10a - 20$

6- Se os polinômios $P(x) = 4x^4 - (r + 2)x^3 - 5$ e $Q(x) = sx^4 + 5x^3 - 5$ são idênticos, qual o valor de $r^3 - s^3$?
Resposta: - 407

7- Dado o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 1$, onde $m \in R$ e seja $P(a)$ o valor de **P** para $x = a$. Se $P(2) = 3.P(0)$, calcule $P(m)$.

Resposta: O valor de P(m) é - 3.

8- (UFMG) – O quociente da divisão de $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + x - 1$ por $q(x) = 4x^3 + 1$ é:

a. $x - 5$
b. $x - 1$
c. $x + 5$
d. $4x - 5$
e. $4x + 8$

Resposta: (b)

9- (UFPE) – Qual o resto da divisão do polinômio $x^3 - 2x^2 + x + 1$ por $x^2 - x + 2$?

a. $x + 1$
b. $3x + 2$
c. $-2x + 3$
d. $x - 1$
e. $x - 2$

Resposta: (c)

10- (CEFET-PR) – O quociente da divisão de $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ por $Q(x) = x - 3$ é:

a. $x - 3$
b. $x^3 - x^2 + 1$
c. $x^2 - 5x + 6$
d. $x^2 - 4x + 4$
e. $x^2 + 4x - 4$

Resposta: (d)

11- (UNICAMP-SP) – O resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ pelo polinômio $Q(x) = x^2 - 4$ é:

a. $R(x) = 2x - 2$
b. $R(x) = -2x + 4$
c. $R(x) = x + 2$
d. $R(x) = 4x - 4$
e. $R(x) = -x + 4$

Resposta: (d)

FRAÇÕES ALGÉBRICAS, RACIONALIZAÇÃO E FRAÇÕES PARCIAIS

1- (Colégio Pentágono) Simplifique as expressões algébricas abaixo:

(a) $\dfrac{x^2 - 4}{2x + 4}$ (b) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$ (c) $\dfrac{25a^2 + 30ab + 9b^2}{25a^2 - 9b^2}$

(d) $\left(\frac{m}{m-n}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{m^2-n^2}{n}$ (e) $\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{a}{a+b}$

RESPOSTAS:

(a) $\frac{x-2}{2}$ (b) $\frac{x-3}{x+3}$ (c) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (d) $\frac{(m+n)^2}{2n}$ (e) $\frac{a-b}{b}$

2- (Colégio Pentágono) Efetue as adições e subtrações entre as frações algébricas.

(a) $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x^2+x}+\frac{1}{x}$ (b) $\frac{3a}{x}-\frac{5a}{4x}+\frac{7a}{2x}$

(c) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}$ (d) $\frac{a+b}{a^2b}+\frac{2a+b}{a^2b}-\frac{3a+b}{a^2b}$

RESPOSTAS:

(a) $\frac{3x+4}{x(x+1)}$ (b) $\frac{21a}{4x}$ (c) $\frac{x+3}{x(x+1)}$ (d) $\frac{1}{a^2}$

3- (Colégio Pentágono) Efetue as multiplicações das frações algébricas.

(a) $\frac{2x-2y}{x^2-y^2}.\frac{x^2+2xy+y^2}{4x+4y}$ (b) $\frac{5a^2-5}{6a-3}.\frac{2a-1}{10a^2-10}$

(c) $\frac{x^2+x^3}{x-1}.\frac{x^2-x}{x+1}$ (d) $\frac{6a^3b^2}{8x^2y^3}.\frac{4x^3y^5}{3ab^3}.\frac{2b}{ay}$

RESPOSTAS: (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) x^3 (d) 2axy

4- (Colégio Pentágono) Efetue as divisões das frações algébricas.

(a) $\frac{a^2-b^2}{3ab^2}:\frac{a^2+2ab+b^2}{6a^2b}$ (b) $\frac{x^2-xy}{xy+y}:\frac{xy-y^2}{x^2+x}$

(c) $\left(\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-3}{x+2}\right):\frac{2x^2-2x+8}{x-2}$ (d) $\frac{x^2-4x}{x^2+1}:\frac{x^2-16}{2x^2+2}$

RESPOSTAS: (a) $\frac{2a(a-b)}{b(a+b)}$ (b) $\frac{x^2}{y^2}$ (c) $\frac{1}{x+2}$ (d) $\frac{2x}{x+4}$

5- (CESGRANRIO) Racionalizando o denominador, vemos que a razão $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ é igual a:

(a) $2+\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (c) $1+2\sqrt{3}$ (d) $2+2\sqrt{3}$

Resposta: (a)

6- (EsSA-91) Racionalizando o denominador da expressão $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, obtemos:

(a) $3\sqrt{6}$ (b) $-2\sqrt{6}+5$ (c) $2+\sqrt{3}$ (d) $3+\sqrt{6}$ (e) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{4}$

Resposta: (b)

7- Racionalize:

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{3}{4\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt[5]{2}}$ f) $\dfrac{7}{\sqrt[5]{3^2}}$ g) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{6^2}}$ h) $\dfrac{6}{\sqrt{a}+1}$

RESPOSTAS:

(a) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (d) $\dfrac{3\sqrt[3]{25}}{5}$ (e) $\dfrac{3\sqrt[5]{16}}{2}$ (f) $\dfrac{7\sqrt[5]{27}}{3}$ (g) $\sqrt{6}$ (h) $\dfrac{6(\sqrt{a}-1)}{a-1}$

8- Decomponha as frações em soma de frações parciais.

(a) $\dfrac{5x+1}{x^2+2x-15}$ (b) $\dfrac{5x+13}{x^2-5x+6}$ (c) $\dfrac{x^2+8}{x^2-5x+6}$

RESPOSTAS:

(a) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+5}$ (b) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x-2}$ (c) $\dfrac{-12}{x-2}+\dfrac{17}{x-3}$