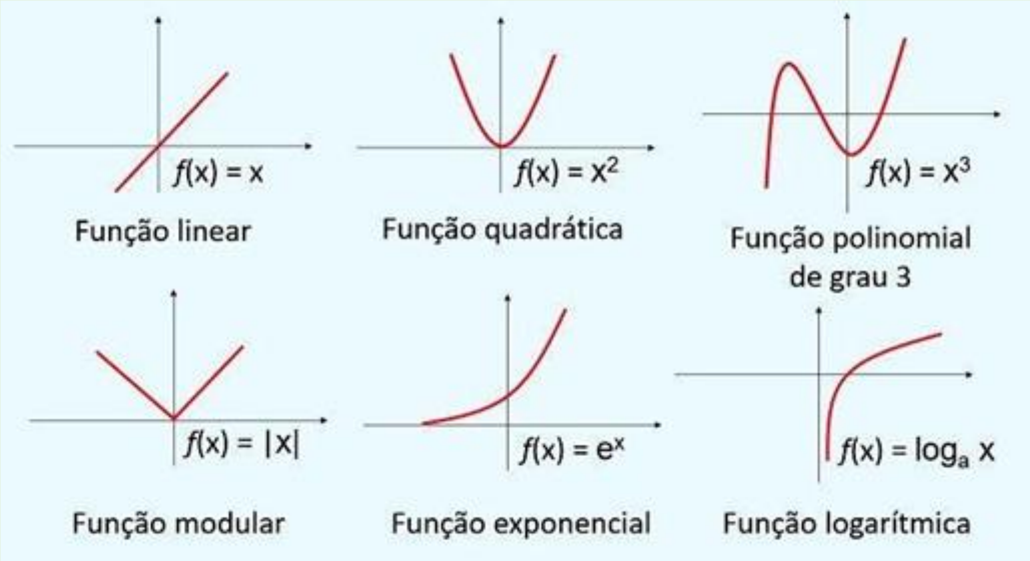
TÓPICOS DE MATEMÁTICA

UIA3 - ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS



Unidade de Interação e Aprendizagem 3 | UIA 3

Algumas Funções Especiais

- Aula 09 | Funções Elementares
- Aula 10 | Outras Funções Elementares
- **Aula 11 | Funções Inversíveis**
- **Aula 12 | Função Logarítmica e Exponencial**

AULA 11 | FUNÇÕES INVERSÍVEIS

Antes de estudarmos funções inversíveis, vamos estuar funções compostas.

1. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Como já definido na UIA2, uma função é uma relação existente entre duas variáveis *x* e y, onde a variável y depende de *x*, formando assim pares ordenados (x, y) que podem ser representados no plano cartesiano. O resultado y é chamado imagem de x. Por exemplo, se

- $f(x) = 3x + 2$, então f leva cada valor de x ao resultado $y = 3x + 2$.

Em muitos casos, sobre um número *x* atua primeiro uma função *f* e, depois, sobre a imagem obtida, torna a atuar uma outra função g.

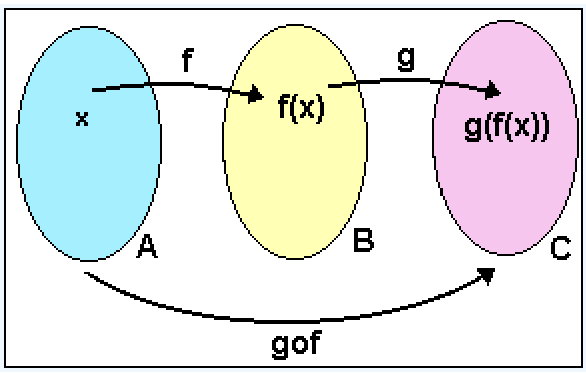
Por exemplo, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$, para calcularmos a imagem do número 2, quando aplicamos primeiro a função *f* e depois g sobre a imagem obtida, devemos primeiro calcular f(2) = 4 e, a seguir, g(f(2)) = g(4) = 9.

Em resumo, começamos o processo com o número 2 como valor de entrada e obtivemos o número 9 ao seu final. Dessa maneira, aplicando primeiro a função *f* a um determinado valor de seu domínio e depois outra função g, à imagem assim obtida, definimos uma nova função, chamada composta de g com f, e denotamos por

$$(g \text{ o } f)(x) = g(f(x)).$$

Em resumo, **s**e uma função *f* associa valores de um conjunto A para certo conjunto B, e uma função g associa valores de B a elementos de um conjunto C, então podemos pegar um caminho direto de A para C, estabelecendo uma função composta.

Definição 1 - Dadas as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, denominamos função composta de **g** e ***f*** a função $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$.



Exemplos

1- Sejam f(x) = 3x – 2 e g(x) = 4x + 1. Determine:

(a) $(g \circ f)(x)$ = g(f(x)) = g(3x – 2) = 4.(3x – 2) + 1 = 12x – 8 + 1 = 12x - 7
(b) $(f \circ g)(x)$ = f(g(x)) = f(4x + 1) = 3(4x + 1) -2 = 12x + 3 – 2 = 12x + 1

2- (UCSal) Sejam f e g funções de R em R, sendo R o conjunto dos números reais, dadas por f(x) = 2x - 3 e f(g(x)) = -4x + 1. Nestas condições, g(-1) é igual a:

- Solução -

Como f(x) = 2x -3, podemos escrever: f[g(x)] = 2.g(x) - 3 = - 4x + 1

Logo, 2.g(x) = - 4x +4 \ g(x) = -2x + 2 e assim, g(-1) = -2(-1) + 2 = 4.

Logo, g(-1) = 4.

3- (UEFS 2005) Sabendo-se que a função real f(x) = ax + b é tal que $f(2x^2 + 1) = - 2x^2 + 2$, para todo x em IR, pode-se afirmar que b/a é igual a

- Solução -

Ora, se f(**x**) = a**x** + b, então $f(\mathbf{2x^2 + 1}) = a(\mathbf{2x^2 + 1}) + b$
Como $f(2x^2 + 1) = - 2x^2 + 2$, vem, igualando:

$a(2x^2 + 1) + b = - 2x^2 + 2$

Efetuando o produto indicado no primeiro membro, fica: $2ax^2 + a + b = -2x^2 + 2$

Então, poderemos escrever: 2a = -2 → a = -2 /2 = -1

E, também, a + b = 2 ; como a = -1, vem substituindo: (-1) + b = 2 → b = 2 + 1 = 3

Logo, o valor procurado a/b será a/b = -1 / 3.

CONTEXTOS, APLICAÇÕES (UFPR)

1. **TRÂNSITO**

No trânsito Funcionários do departamento de engenharia de trânsito de um município resolveram efetuar um levantamento sobre ***o número de pessoas que saíram do município por uma determinada rodovia***.

Para tal, dividiram o problema em duas etapas:

- o número de veículos que deixavam a cidade por minuto e
- quantas pessoas havia em cada veículo.

Quanto ao número de veículos por minuto, concluíram que, em média, 8 veículos deixavam a cidade por minuto, ou seja, a função

$$\mathbf{v(t) = 8t,}$$

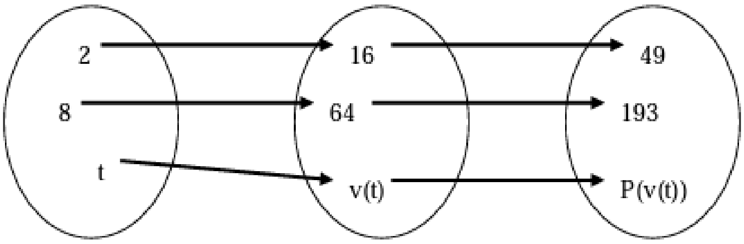
fornecia o número de carros que deixavam a cidade, onde t indica o número de minutos. Por exemplo, em 2 minutos, 16 carros saiam da cidade pois, v(2) = 8.2 =16. Em 9 minutos, v(9) = 8.9 = 72 veículos.

Já o número de pessoas por veículo obedecia à lei deformação

$$\mathbf{p(v) = 3v + 1},$$

sendo **v** o número de veículos e p o número de pessoas em cada veículo. Assim, por exemplo, em 3 carros, p(3) = 3.3 +1 = 10 pessoas. Em 8 carros, p(8) = 3.8 +1 = 25 pessoas.

Veja o esquema a seguir:



Dizemos que p(v(t)) é a função composta de p(v) e v(t).

2. VENDAS

Em vendas, o número de unidades vendidas numa loja é dado por $\mathbf{v(t) = t^2 + t}$, onde t indica o número de horas trabalhadas. Já o lucro é dado por $\mathbf{L(v) = 2v - 1}$, sendo v o número de unidades vendidas.

Pede-se:

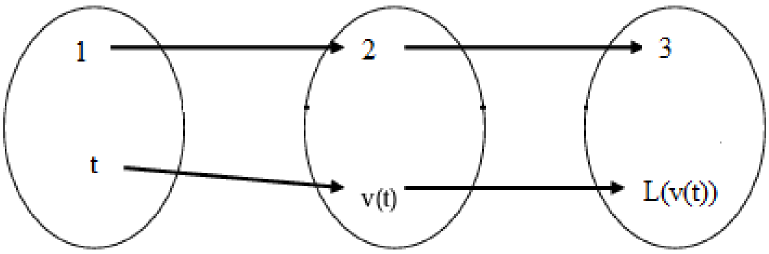
- O número de unidades vendidas em 1 hora;

  $v(1) = 1^2 + 1 = 2$ unidades

- O lucro obtido em 1 hora;

  $V(1) = 2$

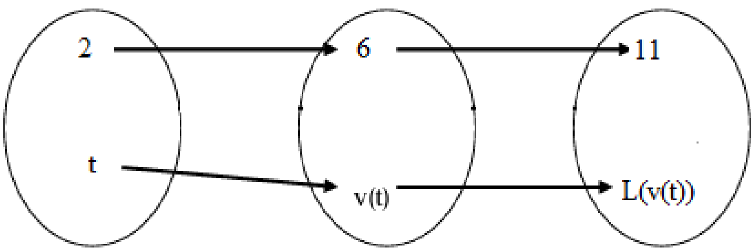
  $L(v(1)) = L(2) = 2.2 - 1 = 3$



- O lucro obtido em 2 horas;

  $V(2) = 2^2 + 2 = 6$

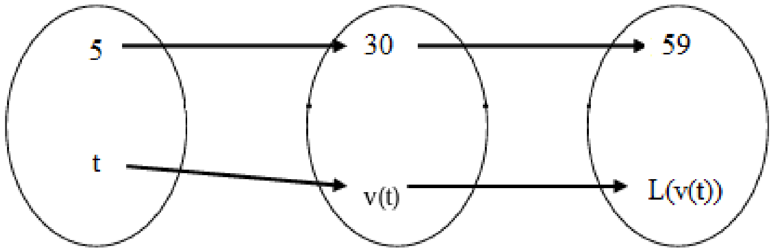
  $L(v(2)) = L(6) = 2.6 - 1 = 11$



- O número de unidades vendidas em 5 horas e o lucro obtido;

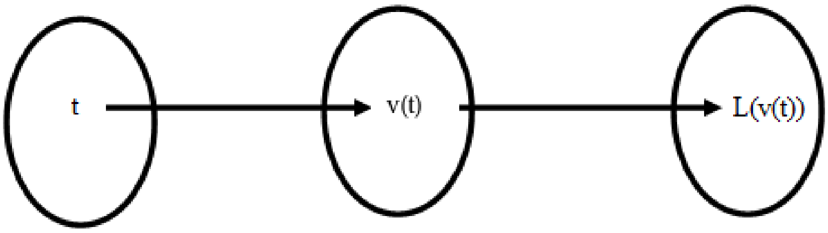
$v(5) = 5^2 + 5 = 30$

$L(v(5)) = L(30) = 2.(30) – 1 = 59$



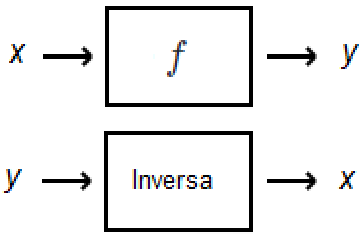
- O lucro em função direta do tempo trabalhado, ou seja, L(v(t)).

$L(v(t)) = L(t^2 + t) = 2(t^2 + t) – 1 = 2t^2 + 2t – 1$
$L(v(t)) = 2t^2 + 2t – 1$



2. FUNÇÕES INVERSÍVEIS

O conceito de função inversa é simples, pois como o próprio nome sugere, são funções que fazem exatamente o inverso da função f(x), ou seja, tendo uma função f(x) que transforma x em y, acha-se o caminho inverso, isto é, **uma função que transforme y para x. N**o sentido geral, são funções que "revertem" umas às outras.



A ideia de operação inversa é muito antiga. Os babilônios já tinham a noção de raiz quadrada e raiz cúbica e conheciam um algoritmo para a determinação das raízes quadrada ou cúbica de um número através da inversão através da radiciação e potenciação.

$$y = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; y^2 = x$$

A criptografia é uma aplicação de funções inversas. A criptografia faz o uso da matemática para codificar mensagens, senhas numéricas ou textuais, número de cartões de crédito, etc. Uma vez criptografada por uma função que associa cada caractere de uma mensagem a símbolos (códigos), para descriptografá-la é necessário fazer o caminho inverso, ou seja, usar uma função inversa, que aplicada aos símbolos codificados, descodifique a mensagem.

Na matemática, quase todas as operações possuem suas respectivas operações inversas, como por exemplo:

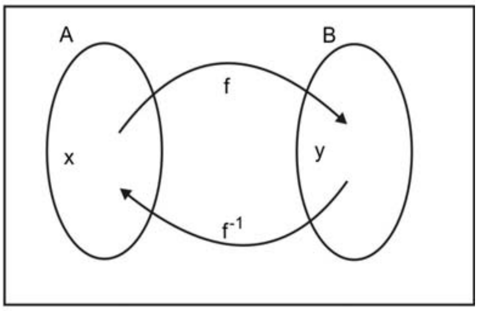
- Soma → subtração
- Multiplicação → divisão
- Potenciação → radiciação
- Exponencial → logarítmica

FUNÇÃO INVERSA

Definição 1 - Seja f : A $\rightarrow$ B uma função. Se existir uma função g : B $\rightarrow$ A tal que

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

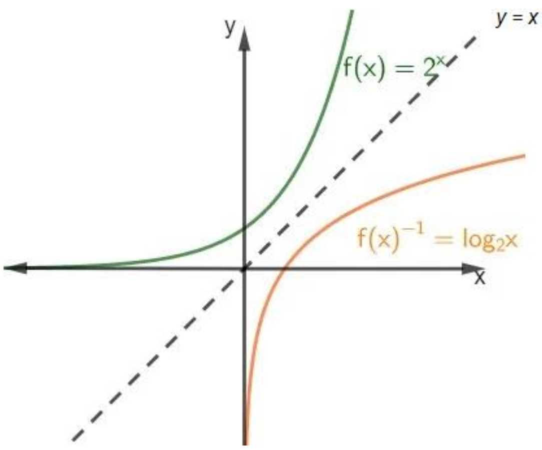
Dizemos que g : B $\rightarrow$ A é a função inversa de f e é indicada por f^{-1}.



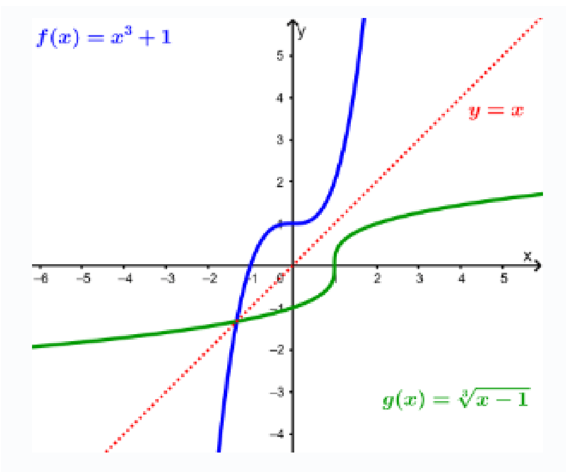
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

O gráfico de f^{-1} será sempre simétrico ao gráfico da função f em relação à reta y = x, o que permite analisar o comportamento dessas funções, ainda que não consigamos descrever a lei de formação da função inversa em alguns casos, devido a sua complexidade.

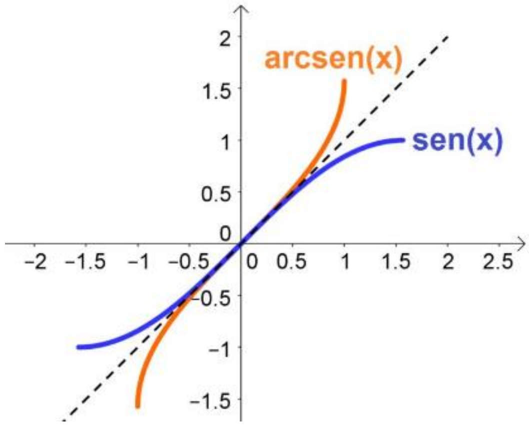
Exemplo 1 - Abaixo temos o gráfico da função $f(x)=2^x$ e da sua função inversa $f^{-1}(x)=\log_2 x$, simétricos em relação à linha pontilhada (reta y = x).



Exemplo 2 - Abaixo temos o gráfico da função $f(x)=x^3+1$ e da sua função inversa $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$, simétricos em relação à linha pontilhada (reta y = x).



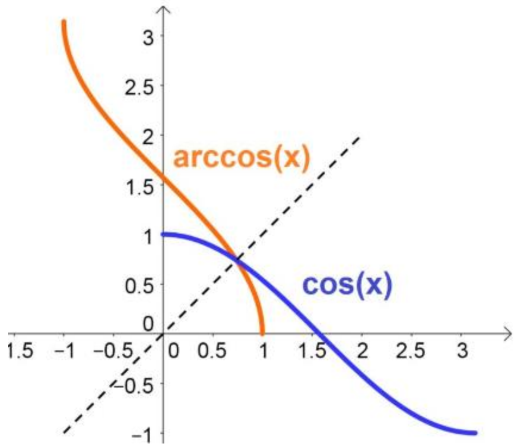
Exemplo 3 – Gráficos da função f(x) = sen(x) e sua inversa $f^{-1}(x)=arcsen(x)$.



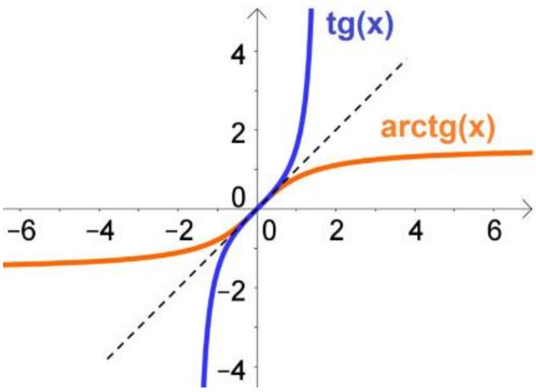
Observação – As funções trigonométricas inversas são denotadas pela palavra “arc” antes do nome (arcseno, arccosseno, arctangente), que também pode ser denotadas por sen^{-1}, $\cos^{-1}, tg^{-1}$. Ou seja,

$$sen^{-1}(x)=arcsen(x)$$
$$\cos^{-1}(x)=\arccos(x)$$
$$tg^{-1}(x)=arctg(x)$$

Exemplo 4 – Gráficos da função f(x) = cos(x) e sua inversa $f^{-1}(x)=\arccos(x)$.



Exemplo 5 – Gráficos da função f(x) = tg(x) e sua inversa $f^{-1}(x)=arctg(x)$.



REGRA PRÁTICA PARA DETERMINAR A INVERSA

Dada a sentença que define a função f: $A \to B$, para determinarmos a sentença que define f^{-1}: $A \to B$, procedemos da seguinte maneira:

- trocamos na expressão da função $y = f(x)$ a variável x pela variável y e vice-versa. Assim, teremos $x = f(y)$;
- e isolamos, em um dos membros a variável y.

Exemplos:

1- Dada a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 3$, determine $f^{-1}(x)$.

Escrevendo $y = f(x) = 2x - 3$, assim, teremos $y = 2x - 3$.

- trocando-se as variáveis, tem-se: $x = 2y - 3$.
- Isolando a variável y: $x = 2y - 3 \Rightarrow x + 3 = 2y\ 3 \Rightarrow 2y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x+3}{2}$.

Portanto: $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

2- Dada a função f: : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3 + 5$, determine $f^{-1}(x)$.

Escrevendo $y = f(x) = 2x^3 + 5$, assim, teremos $y = 2x^3 + 5$.

- trocando-se as variáveis, tem-se: $x = 2y^3 + 5$.
- Isolando a variável y:

$x = 2y^3 + 5 \Rightarrow 2y^3 = x - 5 \Rightarrow y^3 = \frac{x-5}{2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$

Portanto: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-5}{2}}$.

3- Seja uma função bijetora f(x) = 3x + 6, teremos que a inversa de f(x), ou seja f^{-1} (x), será $f^{-1}(x) = \frac{x-6}{3}$, pois y = 3x + 6 → para a inversa x = 3y + 6 , então $y = \frac{x-6}{3}$. Calcular f(3).

Temos f(3) = 3.3 + 6 = 12. Agora ao calcularmos f^{-1} (12) = $\frac{12-6}{3} = 2$. Assim percebe-se a relação entre a função e a sua inversa.

FUNÇÕES INJETORA, SOBREJETORA E INJETORA

Para que uma função admita uma inversa, ela precisa ser **bijetora**, ou seja, **injetora** e **sobrejetora** ao mesmo tempo.

Definição 1 - Função injetora ou injetiva - Uma função f : A → B é injetora (ou um-para-um) se nenhum elemento de B for imagem de dois elementos distintos de A, ou seja, uma função f : A→ B é **injetora** se dois elementos distintos quaisquer de A têm sempre duas têm imagens distintas em B, isto é:

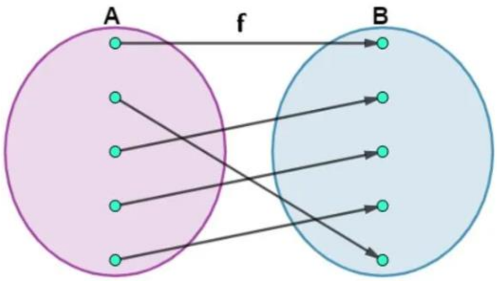
$$x_1 \neq x_2 \text{ implica que } f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou

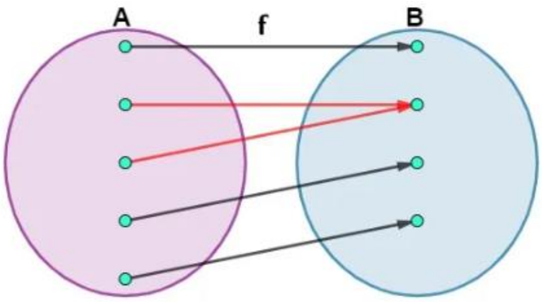
$$f(x_1) = f(x_2) \text{ implica } x_1 = x_2$$

Isso significa que elementos diferentes no conjunto A precisam estar associados a elementos diferentes no conjunto B, não podendo haver dois ou mais elementos do conjunto A que possuem o mesmo correspondente no conjunto B.

Analisando o diagrama abaixo, podemos perceber que essa é uma função injetora. Veja que **não existe dois elementos do conjunto A ligados a um mesmo elemento do conjunto B**, isso significa que dois elementos distintos do conjunto A sempre possuem imagens diferentes no conjunto B, o que faz com que essa função seja injetora.



Já o seguinte diagrama, **não se trata de uma função injetora**, pois podemos observar que **existem dois elementos distintos do domínio A** (setas vermelhas) que possuem a mesma imagem no contradomínio.

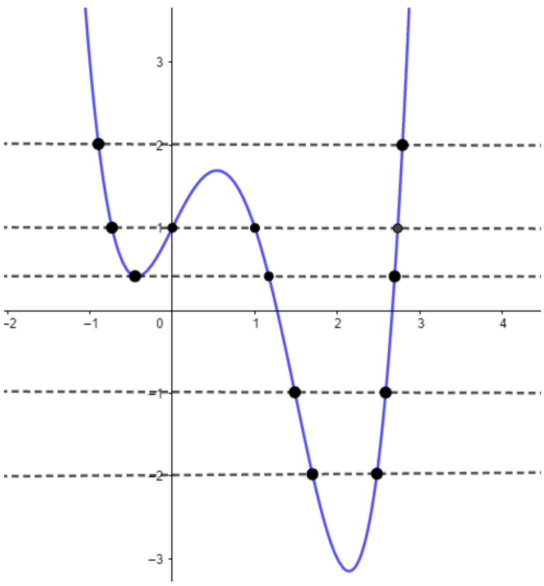


VERIFICAR SE UMA FUNÇÃO É INJETORA PELO SEU GRÁFICO

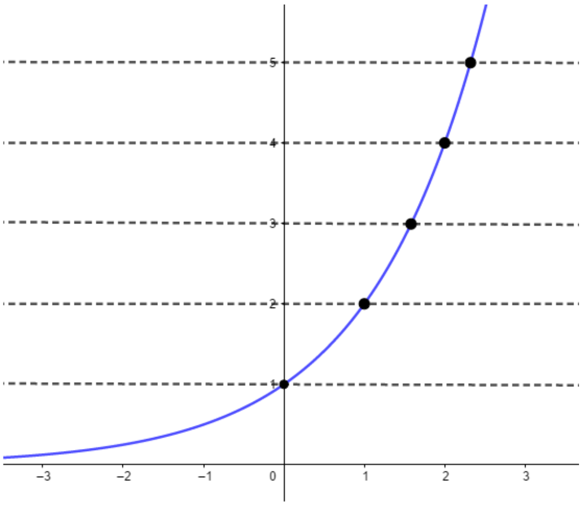
Dado o gráfico de uma função *f* podemos identificar se ela é injetora (ou injetiva) ou não pelo seu gráfico. Se uma função é injetora então não há elementos do conjunto imagem que sejam imagens de mais de um elemento do domínio. Então,

- ***se traçarmos linhas paralelas ao eixo x do gráfico da função e estas interceptarem a função em mais de um ponto em relação ao eixo y então dizemos que esta função não é injetiva***.

Veja abaixo os exemplos:



Esta função acima não é injetora, pois se traçarmos linhas horizontais sobre o gráfico percebemos que estas linhas interceptam a função em mais de um ponto da reta. Observe, por exemplo, que o y = 2 no eixo y é imagem de dois elementos distintos no eixo x, assim como y = 1, y = -1, etc



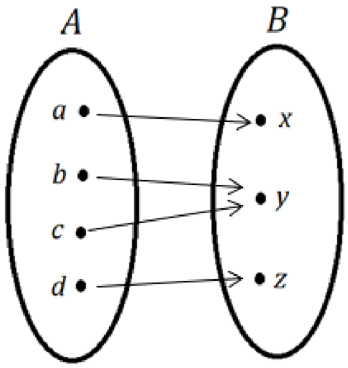
Esta função acima é injetora, pois cada reta horizontal intercepta o gráfico da função em um único ponto.

Definição 2 - Função sobrejetora ou sobrejetiva - Uma função f: A → B é uma função sobrejetora se todo elemento y de B é a imagem de pelo menos um elemento x de A, ou seja, quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que *f(x)* = *y*.

Isto equivale a afirmar que a imagem da função deve ser exatamente igual ao contradomínio B da função (Im(f) = B), ou seja, não pode sobrar elementos em B. Caso exista um elemento de B que não seja imagem de elemento algum de A, então a função não é sobrejetora.

Exemplo - Sejam os conjuntos A = {a, b, c, d} e o conjunto B = {x, y, z}, dizemos que a aplicação f = {(a, x); (b, y); (c, y); (d, z)} é sobrejetora de A em B.

Observe que todo elemento de B é imagem de algum elemento de A e a imagem é o próprio conjunto B.



Já a função representada no diagrama abaixo não é sobrejetora, pois o elemento y = 3 em B não está associado a nenhum valor de x de A.

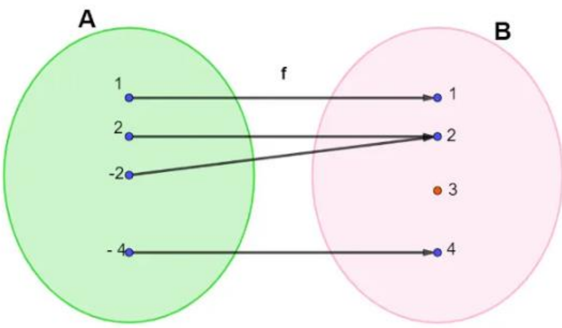
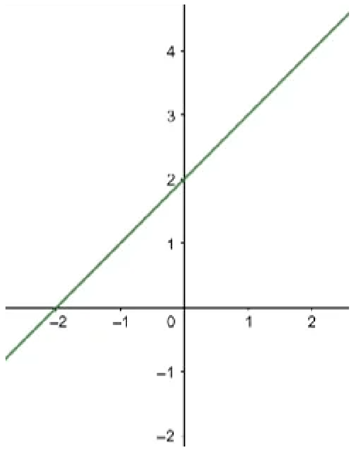


GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO SOBREJETORA

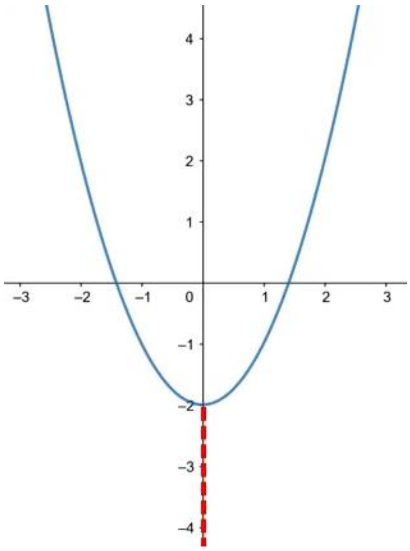
Ao analisar o gráfico de uma função, é possível perceber que ela é sobrejetora quando sua imagem é igual ao contradomínio.

Exemplo 1 - Vejamos, por exemplo, o gráfico desta reta definida por $f(x)=x+2$, sendo $f: IR \to IR$, ou seja, o contradomínio é o conjunto dos números reais.



Como não há descontinuidades na função e o domínio e o contradomínio se estendem por toda reta real, a imagem será sempre igual ao contradomínio, ou seja CD(f) = Im(f) = IR

Exemplo 2 - O gráfico da função $f(x)=x^2-2$, sendo $f: IR \to IR$, ou seja, o contradomínio é o conjunto dos números reais.



A linha pontilhada abaixo do vértice mostra uma parte do contradomínio que não é imagem da função. Percebe-se que -3 faz parte do contradomínio, mas não faz parte da imagem. Assim, $CD(f) \neq \text{Im}(f)$.

Exemplos

- A função f : IR$\longrightarrow$ IR definida por f(x) = 3x+2 é sobrejetora, pois todo elemento de IR é imagem de um elemento de IR pela função.
- A função f : IR$\longrightarrow$ IR_+ definida por f(x) = x^2 é sobrejetora, pois todo elemento de R_+ é imagem de pelo menos um elemento de IR pela função.
- A função f : IR$\longrightarrow$ IR definida por f(x) = 2^x não é sobrejetora, pois o número –1 é elemento do contradomínio IR e não é imagem de qualquer elemento do domínio.

Definição 3 - Função bijetora ou bijetiva - Uma função f : A → B é bijetora se for, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora.

A função bijetiva é um tipo de função que reúne características da função sobrejetora e a injetora. Portanto, uma função é bijetora quando é sobrejetora e injetora, simultaneamente. Ou seja, as definições de injeção e sobrejeção funcionam para as mesmas funções, podendo ser chamadas de bijetivas.

EXERCÍCIOS: FUNÇÕES COMPOSTAS

1- Sendo dados f (x) = x^2 + 2 e g (x) = 3x, calcular g (f (x)) e f (g (x)).

2- Dadas as funções f (x) = x^2 – 5x + 6 e g (x) = x +1, pede-se:

a) f(g(x)); b) x de modo que f(g(x)) = 0.

3- Sejam as funções f(x) = x^2 – 2x + 1 e g(x) = 2x + 1. Calcule:

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(f \circ g)(x)$ c) f(g(1)) d) g(f(2)) (e) f(f(1))

4- Sendo f(x) = $2x^2$ e g(x) = x + 1, calcule f(g(2)) + g(f(2)).

5- Dadas as funções f(x) = 8x + 1, g(x) = 2x – 5 e h(x) = x^2 + 3, calcule x de modo que f(g(h(x))) = g(x) + 28.

6- Sejam f : IR → IR e g : IR → IR definidas por f(x) = x^2 – 2x – 3 e g(x) = 4x + m. Sabendo que f(g(-1)) = 12, calcule o valor de m.

7- Sejam f e g funções reais, sendo que ***f(x) = 4x – 2*** e ***f(g(x)) = 2x + 10***. Determine a lei de formação da função ***g(x)***.

8- Seja ***f(x) = x² + 2x + 1*** e ***g(x) = – 2x – 1***, determine a lei que define ***f[g(x)]*** e ***g[f(x)]***.
9-Sejam ***f*** e ***g*** funções reais tais que ***f[g(x)] = – 10x – 13*** e ***g(x) = 2x + 3***. Determine qual é a lei que define ***f(x)***.

10- (Acafe – SC) Dadas as funções reais ***f(x) = 2x – 6*** e ***g(x) = ax + b***, se ***f[g(x)] = 12x + 8***, o valor de ***a + b*** é:

11- Sejam as funções reais f(x) = 2x + 1, g(x) = x² + 1 e h(x) = 3x + 2 . Obtenha a lei que define (h o g) o f.
12- Dadas as funções f(x) = 2x + *m* e g(x) = *a*x + 2, qual é a relação que ***a*** e ***m*** devem satisfazer para que se tenha (f o g)(x) = (g o f)(x)?

13- Dada a aplicação f: Q → Q definida por f(x) = x² - 2 , qual é o valor de ***x*** tal que f(x) = f (x – 1)?

RESPOSTAS

(1) g(f(x)) = $3x^2$ + 6 f(g(x)) = $9x^2$ + 2 **(2)** a. f(g(x)) = x^2 – 3x + 2 b. {1, 2}

(3) a. $2x^2$ – 4x + 3 b. $4x^2$ c. 4 d. 3 e. 1 **(4)** 27 **(5)** $\left\{-\frac{7}{8}, 1\right\}$ **(6)** {1, 9}

(7) g(x) = $\frac{x}{2} + 3$ **(8)** f[g(x)] = 4x² **e** g[f(x)] = – 2x² – 4x – 3**.** **(9)** f(x) = – 5x + 2**.** **(10)** 13

(11) ((h o g) o f)(x) = 12x² + 12x + 2 **(12)** *a* = (m + 2)/m **(13)** 1/2

EXERCÍCIOS: FUNÇÕES INVERSAS

1- A função inversa da função bijetora f : IR- {-4} e IR-{2} definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x+4}$ é:

a) $f^{-1}(x) = (x + 4)/(2x +3)$

b) $f^{-1}(x) = (x - 4)/(2x - 3)$

c) $f^{-1}(x) = (4x + 3)/(2 - x)$

d) $f^{-1}(x) = (4x + 3)/(x - 2)$

e) $f^{-1}(x) = (4x + 3)/(x + 2)$

2- Sendo f^{-1} a função inversa de $f(x) = \frac{x}{2} + 1$, então $f^{-1}(4)$ é igual a :

(a) -4 (b) 1/4 (c) 4 (d) -3 (e) 6

3- Se f^{-1} é a função inversa da função f ,com R em R, definida por f(x) = 3x - 2, então $f^{-1}(-1)$ é igual a :

a)-1 b)-1/3 c)-1/5 d)1/5 e)1/3

4- Seja f uma função de R em R, definida por f(x) = 2x + 1. Se f^{-1} é a função inversa de f, então

$f(f(1/2)) - f^{-1}(5)$ é igual a :

(a) f(1) (b) f(-2) (c) 2.f(1/2) (d) 3.f(-1/2) (e) 1/2.f(-1)

5- Seja a função f : R em R definida por f(x) = ax - 2 e g a função inversa de f. Se f(-2) = 10, então g será definida por :

(a) g(x) = -x + 1/3
(b) g(x) = -1/6x -1/3
(c) $g(x) = \frac{6}{x-2}$
(d) g(x) = 6x - 1/2
(e) g(x) = -12x + 1/2

6- Sejam as funções f e g , de R em R, definidas por f(x) = 2x - 1 e g(x) = kx + t. A função g será inversa de f se, e somente se,

a) $\frac{k}{t} = \frac{1}{4}$ b)k - t = 1 c)k = 2t d) k + t = 0 e) k = t = 1/2

7- Determine a função inversa de $f(x) = \frac{x-1}{x}$

a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-x}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x}$ c) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$ d) $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$ e) $f^{-1}(x) = x+1$

RESPOSTAS

(1) C (2) E (3)E (4)A (5)B (6)E (7) A

EXERCÍCIOS: FUNÇÕES INJETORAS, SOBREJETORAS E BIJETORAS

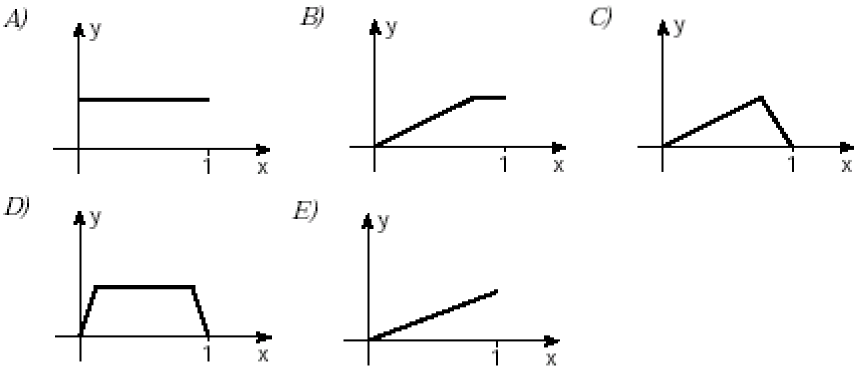
1- A função inversa da função bijetora $f: R - \{4\} \rightarrow R - \{2\}$ definida por $f(x) = (2x-3)/(x+4)$ é:

(a) $f^{-1}(x) = (x + 4)/(2x + 3)$ (b) $f^{-1}(x) = (x - 4)/(2x - 3)$ (c) $f^{-1}(x) = (4x + 3)/(2 - x)$

(d) $f^{-1}(x) = (4x + 3)/(x - 2)$ (e) $f^{-1}(x) = (4x + 3)/(x + 2)$

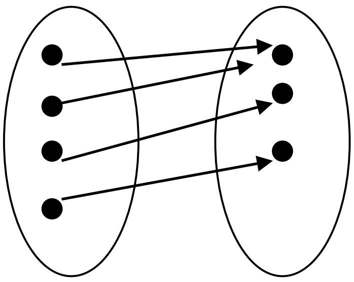
2- Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de x correspondem valores distintos de y". Tais funções são chamadas injetoras. Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

DICA: Uma forma de determinar se uma função é injetora, graficamente, é traçar retas paralelas ao eixo x e ao eixo y. Se as retas tocarem o gráfico em apenas um único ponto, então a função é injetora. Se tocarem em mais de um ponto então não será injetora.

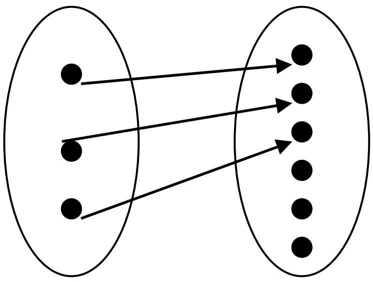


2- Determine se as funções abaixo são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, justificando

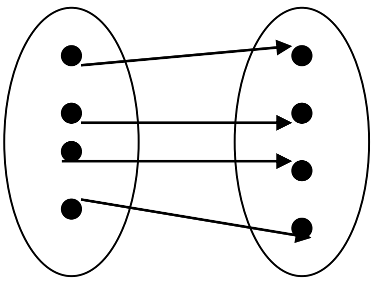
A)



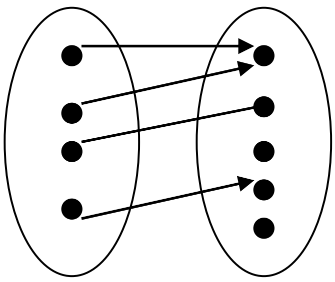
B)



C)



D)



3- Dados os conjuntos A = { -2, -1, 0, 1} e B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3} e a função f: A → B, definida por
f(x) = x + 2,determine: D(f) , Im(f) e Cd(f). Verifique se a função é injetora, sobrejetora ou bijetora:

4- Verificar se f: R→ R, definida por f(x) = 3x+2, é bijetora. Justifique:

5- Seja D = {1, 2 ,3, 4, 5} e f: D →R a função definida por f(x) = (x – 2).(x – 4). Então:

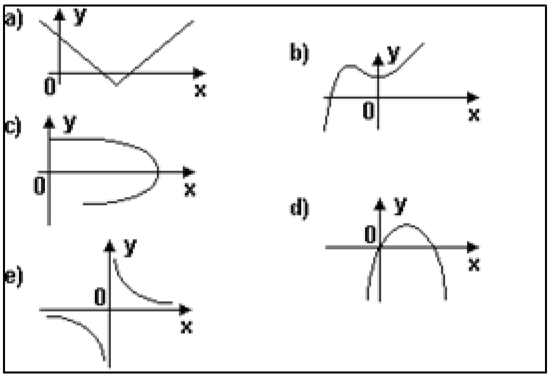
(a) f é sobrejetora (b) f é injetora (c) f é bijetora

(d) o conjunto imagem de f possui 3 elementos somente (e) Im (f) = {–1,0,1}

6- Sejam f e g funções de R em R, definidas por f(x) = 2x + 1 e g(x) = x² + 3. É correto afirmar que a função fog, composta de g em f , é :

(a) bijetora (b) ímpar (c) par
(d) decrescente para todo x $\in$ R (e) injetora e não sobrejetora.

7- Dentre as curvas a seguir, qual pode ser o gráfico de uma função injetora y = f(x)?



8- Verifique se a função f : R − {1} → R – {2} definida por $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ é injetora.
DICA: Basta verificar se f(x1) = f(x2), então x1 = x2.

9- Ao analisar a função real f definida por f (x) = x² + 4x − 12, podemos afirmar que f é injetora?
Justifique a resposta.

10- Verifique se a função f: Q → Q f(x) = x² + 1 é injetora.

11- Determine se a função f: Z → Z definida por f(x) = x² é sobrejetora.

12- Determine se a função f: Z → Z definida por f(x) = x + 8 é bijetora.

13- Considere três funções f, g e h, tais que:

A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade.
A função g atribui a cada país, a sua capital
A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Podemos afirmar que, das funções dadas, são injetoras:

(a) f, g e h (b) f e h (c) g e h (d) apenas h (e) nenhuma delas

RESPOSTAS

1) C 5) D 6)C 13) C

AULA 12 | LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

1. POTENCIAÇÃO

A potenciação indica multiplicações de fatores iguais. Por exemplo, o produto $3.3.3.3$ pode ser indicado na forma 3^4. Assim, o símbolo a^n, sendo a um número inteiro e n um número natural maior que 1, significa o produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a.a.a. \quad ... \quad .a}_{n\ fatores}$$

- a é a **base**;
- n é o **expoente**;
- o resultado é a **potência**.

EXEMPLO

(a) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \rightarrow 3^4 = 81$

(b) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

(c) $(-2)^2 = -2 \cdot -2 = 4$

(d) $(-2)^3 = -2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$

(e) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

CASOS PARTICULARES

1- A potência de expoente 1 é igual à base.

EXEMPLO: $3^1 = 3$

2- Toda potência de base 1, para qualquer potência o resultado é sempre 1

EXEMPLO: $1^7 = 1$

3- Toda potência de 0 é igual a 0:

EXEMPLO: $0^3 = 0$

4- Toda potência de expoente par é positiva.

EXEMPLO: $(-3)^4 = 81$ e $3^4 = 81$

5- Toda potência de base negativa e expoente ímpar é negativa.

EXEMPLO: $(-3)^5 = -243$

Caso particular: os parênteses devem ser usados, porque o sinal negativo não dever ser elevado ao quadrado, somente o número da base.

$-2^2 = -4$
Apenas o 2 está elevado ao quadrado e o sinal negativo não.

PROPRIEDADES

Sendo ***a*** e ***b*** números reais e positivos, com ***m*** e ***n*** números racionais, são válidas as seguintes propriedades:

PROPRIEDADES	DESCRIÇÃO
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	Na multiplicação, base igual, conserva-se a base e soma os expoentes.
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Na divisão, base igual, conserva-se a base e subtrai os expoentes.
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	
$a^0 = 1$	Todo número diferente de zero, elevado a zero é 1.
$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$	

EXEMPLOS

(1) $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

(2) $\dfrac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4$

(3) $(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4$

(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4}$

(5) $(5^2)^6 = 5^{2\times 6} = 5^{12}$

(6) $\sqrt[3]{25^4} = 25^{\frac{4}{3}}$

(7) $5^0 = 1$

(8) $\dfrac{1}{10^5} = 10^{-5}$

IMPORTANTE

- $-3^2 \neq (-3)^2$, pois $(-3^2) = -(3 \times 3) = -9$ e $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

2. FUNÇÕES EXPONENCIAIS

INTRODUÇÃO (Prof. Laura Aguiar)

A função exponencial é uma das funções matemáticas mais úteis e poderosas em estudos ambientais, aplicável, entre outros exemplos, ao crescimento das populações e das suas necessidades (consumo de recursos) e ao estudo de problemas como a acumulação de poluentes e ainda no crescimento financeiro e suas ações.

Podemos observar que a função exponencial possui uma característica peculiar, de que ao longo do tempo, ela tende a duplicar os seus valores, quando crescente ou reduzirem à metade, quando decrescente.

Função exponencial, um tipo de função que descreve várias situações como, por exemplo, o crescimento populacional de bactérias, os rendimentos obtidos em uma aplicação a juros compostos, entre outras.

Veja a seguir uma situação relacionada a uma função exponencial. Durante determinado período de seu desenvolvimento, a altura de certo tipo de planta **dobra** a cada mês.

Sabendo que a altura da planta no início desse período é 1 cm, calcularemos a altura dessa planta ao final do 4º mês. Ao final do:

- 1º mês, a altura dessa planta será 2 cm, pois 2.1=2
- 2º mês, a altura dessa planta será 4 cm, pois 2.2=4
- 3º mês, a altura dessa planta será 8 cm, pois 2.2.2=8
- 4º mês, a altura dessa planta será 16 cm, pois 2.2.2.2=16

Podemos escrever a altura da planta, a partir do final do 2º mês, da seguinte maneira:

- 2º mês: 2.2= 2^2 =4
- 2º mês: 2.2= 2^2 =4
- 2º mês: 2.2= 2^2 =4

Portanto, a altura da planta ao final do 4º mês será 16 cm.

E qual será a altura dessa planta no final do mês x do período?

Utilizando um raciocínio semelhante, podemos calcular a altura da planta por meio da fórmula $A=2^x$.

Observando essa fórmula, note que A é dado em função de x, e que a variável independente está em um expoente. Essa é uma função exponencial.

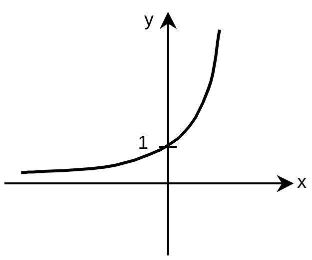
DEFINIÇÃO 1 - Função exponencial é toda função da forma f(x) = a^x, com a > 0 e a ≠ 1.

A Função Exponencial será:

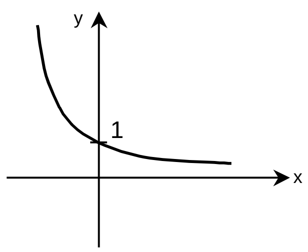
- Crescente quando a > 1 e
- Decrescente quando 0 < a < 1.

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

1º CASO) a > 1 (crescente)



2º CASO) 0 < a < 1 (decrescente)



DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

O domínio da função exponencial é o conjunto dos números reais e o conjunto imagem Im é o conjunto dos números reais positivos $\left(\mathbf{D} = \mathbf{IR} \ \ \mathbf{e} \ \ \mathbf{Im} = \mathbf{IR}_+^*\right)$.

3. EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equação fundamental: Sendo a base a > 0 e a ≠ 1:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

Outras equações exponenciais: Equações exponenciais sofisticadas se transformam na equação fundamental, através de algum artifício algébrico:

- propriedades das potências e raízes;
- fatoração;
- substituição de variáveis.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Encontre os valores de x e y.

1) $8^x = 0,25 \Rightarrow \left(2^3\right)^x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{3x} = \frac{1}{2^2} \Rightarrow 2^{3x} = 2^{-2}$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$

2) $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

$\Rightarrow \left(2^3\right)^{x^2-x} = \left(2^2\right)^{x+1} \Rightarrow 2^{3(x^2-x)} = 2^{2(x+1)}$

$\Rightarrow 3(x^2-x) = 2(x+1) \Rightarrow 3x^2 - 3x = 2x + 2$

$\Rightarrow 3x^2 - 3x - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau vem:

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

$\boxed{S = \{2, -\frac{1}{3}\}}$

3) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 306$

Colocando 3^{x-1} em evidência:

$\Rightarrow 3^{x-1}(1 - 3 + 3^2 + 3^3) = 306$

$\Rightarrow 3^{x-1}.34 = 306 \Rightarrow 3^{x-1} = \frac{306}{34} \Rightarrow 3^{x-1} = 9$

$3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

Explicação da evidência acima com 3^{x+1}:

$\frac{3^{x+1}}{3^{x-1}} = 3^{x+1-(x-1)} = 3^{x+1-x+1} = 3^2$

4) $4^x - 20.2^x + 64 = 0$

$\Rightarrow \left(2^2\right)^x - 20.2^x + 64 = 0$

$\Rightarrow \left(2^x\right)^2 - 20.2^x + 64 = 0$

Fazendo $y = 2^x$ obtemos:

$y^2 - 20y + 64 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400-256}}{2}$

$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2}$

$\Rightarrow y_1 = 16 = 2^4 \text{ e } y_2 = 4 = 2^2$

Substituindo y_1 e y_2 na equação acima vem:

a) $2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$

b) $2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$\boxed{S = \{2, 4\}}$

5) $4^x + 2.14^x = 3.49^x$

Dividindo por 49^x, temos:

$$\Rightarrow \frac{4^x}{49^x} + \frac{2.14^x}{49^x} = \frac{3.49^x}{49^x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4}{49}\right)^x + 2.\left(\frac{14}{49}\right)^x = 3$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{2}{7}\right)^2\right]^x + 2.\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3$$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{2}{7}\right)^x\right]^2 + 2.\left(\frac{2}{7}\right)^x - 3 = 0$$

Fazendo $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ vem:

$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = 1$ e $y_2 = -3$ (não convém. Porque?)

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$\boxed{S = \{0\}}$$

4. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

1ª Hipótese: Se a > 1, então

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$$

2ª Hipótese: Se 0 < a < 1, então

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$$

APLICAÇÕES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

1- Decaimento radioativo

A radioatividade é um fenômeno que ocorre em núcleos de átomos instáveis por emitirem partículas e radiações. Núcleos instáveis em geral são grandes e, por isso, emitem partículas e radiação para tornarem-se estáveis. A medida de tempo na qual metade do material radioativo se desintegra é denominada meia-vida ou período de semidesintegração (*P*). O valor da meia-vida é sempre constante para um mesmo elemento químico radioativo. Assim, a cada período de tempo *P* a quantidade de material radioativo reduz-se à metade da anterior, sendo possível relacionar a quantidade de material radioativo a qualquer tempo com a quantidade inicial por meio de uma função do tipo exponencial:

$$N(t) = N_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{P}}$$

Onde

- N_0 é a quantidade inicial de material radioativo,
- t é o tempo decorrido e
- P é o valor da meia-vida do material radioativo considerado.

2- Crescimento populacional

O crescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais. No entanto, de modo geral não se apresenta na forma a^x, mas sim modificado por constantes características do fenômeno, como em

$$f(x) = C.a^{kx}.$$

De um modo geral, a população, ou seja, o número de bactérias, mosquitos, cavalos, etc, existentes num instante t é dado por uma lei exponencial. Ai também se inclui o crescimento ou decrescimento do dinheiro, da produção de uma indústria, etc.

3- Datação por carbono 14

Um dos métodos mais apurados para datar achados arqueológicos, ou seja, determinar a idade de objetos muito antigos, é o Método do Carbono 14 ($C14$), descoberto em 1949.

O método é bem simples. Todos os dias, raios cósmicos entram na atmosfera terrestre em grandes quantidades. Para se ter uma ideia, cada pessoa é atingida por cerca de meio milhão de raios cósmicos por hora. Assim, é comum um raio cósmico colidir com outro átomo na atmosfera e criar um raio cósmico secundário na forma de um nêutron energizado, e que esses nêutrons energizados, por sua vez, acabem colidindo com átomos de nitrogênio. Quando o nêutron colide, um átomo de nitrogênio 14 (com 7 prótons e 7 nêutrons) se transforma em um átomo de carbono 14 (6 prótons e 8 nêutrons) e um átomo de hidrogênio (1 próton e nenhum nêutron).

Os átomos de $C14$ criados por raios cósmicos combinam-se com o oxigênio para formar dióxido de carbono, que as plantas absorvem naturalmente e incorporam às suas fibras por meio da fotossíntese. A quantidade de $C14$ presente nos tecidos de animais provém da ingestão de vegetais. Em qualquer tecido vivo, a quantidade de ingestão de $C14$ é igual à quantidade de $C14$ desintegrado (o $C14$ é uma molécula instável que se desintegra espontaneamente numa taxa proporcional ao número de moléculas de $C14$ presentes na amostra).

Quando um organismo morre, para de ingerir $C14$, portanto, sua concentração nos tecidos diminui, devido à desintegração. O carbono 14 é radioativo e tem meia-vida de cerca de 5.700 anos. Acontece que, como a meia-vida do $C14$ é de apenas 5.700 anos, ela só é confiável para datar objetos de até 60 mil anos. No entanto, o princípio usado na datação do carbono 14 também se aplica a outros isótopos.

O potássio 40, por exemplo, tem meia-vida de 1,3 bilhão de anos, o urânio 235 tem meia-vida de 704 milhões de anos, o urânio 238 tem meia-vida de 4,5 bilhões de anos, o bório 232, com meia-vida de 14 bilhões de anos e o rubídio com meia-vida de 49 bilhões de anos.

O uso de radioisótopos diferentes permite que a datação de amostras biológicas e geológicas seja feita com um alto grau de precisão. Contudo, a datação por esse processo pode não funcionar tão bem no futuro, já que qualquer coisa que tenha morrido após os anos 40, poderá sofrer alteração devido às bombas nucleares, reatores nucleares e testes nucleares a céu aberto.

4- Pressão atmosférica

A Terra está envolvida por uma camada de ar, denominada atmosfera, constituída por uma mistura gasosa cujos principais componentes são o oxigênio e o nitrogênio. A espessura dessa camada não pode ser perfeitamente determinada, porque à medida que aumenta a altitude, o ar se torna muito rarefeito, isto é, com pouca densidade.

O ar, sendo composto por moléculas, é atraído pela força da gravidade da Terra, e portanto, em peso. Se não o tivesse, escaparia da Terra, dispersando-se pelo espaço. Devido ao seu peso, a atmosfera exerce uma pressão, chamada pressão atmosférica, sobre todos os objetos nela imersos.

Assim, a pressão atmosférica é a força por unidade de área, exercida pelo ar contra uma superfície. Se a força exercida pelo ar aumenta num determinado ponto, a pressão também aumentará nesse ponto. A pressão atmosférica é medida através de um equipamento conhecido como barômetro.

As unidades de medidas de pressão utilizadas são:

- polegada ou milímetros de mercúrio (mmHg)
- quilopascal (kPa) – O pascal (Pa) é a unidade padrão de pressão e tensão no S.I. Equivale à força de 1N (1 Newton) aplicada sobre a superfície de 1 m². O nome dessa unidade é uma homenagem ao matemático e filósofo francês Blaise Pascal.
- hectopascal (hPa)
- milibar (bar) – O bar é uma unidade de pressão e equivale 100.000 (105) Pa
- atmosfera (atm) – 1 atm corresponde a 101.325 Pa ou 101,325 kPa

5- Ruídos

Um som de nível A de decibéis está relacionado com a sua intensidade i, através de uma equação exponencial.

Fonte: Wikipédia

5. FUNÇÕES LOGARITMICAS

INTRODUÇÃO (Prof. Laura Aguiar)

Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550 – 1617), no início do século XVIII. Seu objetivo era obter uma forma menos trabalhosa de fazer cálculos. Antes do seu desenvolvimento, efetuar cálculos como, por exemplo, a multiplicação 1,45786 x 2,38761 era, em geral, trabalhoso e demorado.

Contudo, após a descoberta de Napier, operações deste tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que na maioria dos casos era muito mais simples e rápido.


John Napier

A palavra **Logaritmo** de origem grega formada de *lógos* (*razão, evolução, discurso*) e *arithmós* (*número*). *Logarithmo* significa, literalmente, *a evolução de um número*.

O símbolo *log*, contração de *logarithm*, é devido ao astrônomo Kepler.

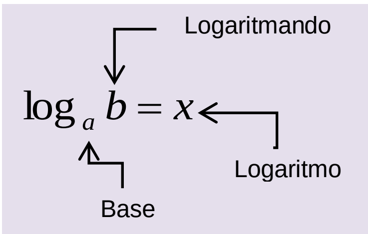
DEFINIÇÃO DE LOGARITMO DE UM NÚMERO

Dados os números reais positivos **a** e **b**, com **a ≠ 1**, chamamos de logaritmo de **b**, na base **a**, o número real **x,** que deve ser o expoente de **a** para que a potência seja igual ao número **b**.

Simbolicamente:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \text{ com } b > 0,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Nomenclatura:



Lê-se: logaritmo de b na base a é igual a x.

Exemplos:

(a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

(b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

(c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

(d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

De acordo com as restrições impostas (b > 0, a > 0 e a ≠ 1), não são identificados os seguintes casos:

(a) $\log_3 (-81) \Leftrightarrow b > 0$ ($\nexists x \in$ IR que satisfaz a sentença)
(b) $\log_{10} 0 \Leftrightarrow b > 0$
(c) $\log_{-2} 8 \Leftrightarrow a > 0$ ($\nexists x \in$ IR que satisfaz a sentença)
(d) $\log_1 6 \Leftrightarrow a \neq 1$ ($\nexists x \in$ IR que satisfaz a sentença)
(e) $\log_0 8 \Leftrightarrow a \neq 0$

SISTEMA DE LOGARITMOS

Aos logaritmos que se indicam $\log_a b$ chamamos de sistema de logaritmos de **base a.** Existe uma infinidade de sistemas de logaritmos. Dentre todos os sistemas, dois se destacam por sua importância.

- Sistema de Logaritmos decimais

É o sistema de base 10 ou sistema de Briggs.

Indica-se: $\log_{10} b$ **ou** $\log b$ (quando não aparece a base, está subintendida que é a base 10)

- Sistema de logaritmos neperianos

É o sistema de base ***e*** (exponencial) ou sistema de logaritmos naturais.

O **logaritmo natural** é o logaritmo de base *e*, no qual, ***e*** é um número irracional aproximadamente igual a 2,71828...

O logaritmo de base **'*e*'** é indicado por ℓn, assim, $\ell n\, x = \ell og_e\, x$. Então

$$\boxed{y = \ell n\, x \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$$

Exemplos

(a) y = ln 5 = $\log_e 5 \quad \Rightarrow \quad$ y ≅ 1,61
(b) $e^{1,61}$ = x ⇒ x = 5 (aproximadamente)

PROPRIEDADES DE LOGARITMOS

P1- $\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$

P2- $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

P3- $\log_a M^N = N.\log_a M$

P4- $\log_a \sqrt[N]{M} = \log_a M^{\frac{1}{N}} = \dfrac{1}{N}.\log_a M$

P5- (Mudança de base) $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

P6- O logaritmo de 1 em qualquer base é sempre igual a zero.

$$\log_a 1 = 0$$

P7- Quando a base e o logaritmando são iguais, o logaritmo é sempre igual a 1.

$$\log_a a = 1$$

P8- Quando o logaritmando for uma potência da base, o logaritmo é o expoente do logaritmando.

$$\log_a a^m = m$$

P9- A potencia de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b$$

P10- A igualdade de dois logaritmos em uma mesma base se verifica quando os logaritmandos forem iguais.

$$\log_a b = \log_a c \qquad \Leftrightarrow \qquad b = c$$

Exemplos:

(1) Escrever $\log_2 8$ usando logaritmo na base 10.

(2) Dado que $\log_a m = 11$ e $\log_a n = 6$, qual é o valor de $\log_a (m^3 \sqrt{n})$?

(3) Determine o desenvolvimento logaritmo da expressão $\log \frac{a\sqrt{b}}{c^3}$.

6. EQUAÇÕES LOGARITMICAS

São equações que envolvem logaritmos. Resolver uma equação logarítmica é determinar o valor ou os valores da incógnita que tornam a sentença verdadeira.

Resolução:

(i) Indicar as condições de existência;
(ii) Resolver a equação
(iii) Fazer a verificação com as soluções da equação nas condições de existência.

Exemplos de equações logaritmicas

(1) Determinar o conjunto verdade da equação $\log_4(x^2 + 3x - 1) = \log_4(5x - 1)$.

(2) Resolver a equação $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$.

(3) Resolver a equação $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$.

Exemplos resolvidos

1- Resolva a equação $3^x = 5$.

$$3^x = 5 \quad \Rightarrow \quad \log 3^x = \log 5 \quad \overset{P3}{\Longrightarrow} \quad x.\log 3 = \log 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\log 5}{\log 3} \quad \Rightarrow \quad x \cong 1,45$$

2- Determine o valor da equação $2^{4x-1} = 7$.

$$2^{4x-1} = 7 \quad \Rightarrow \quad \log(2^{4x-1}) = \log 7 \quad \overset{P3}{\Longrightarrow} \quad (4x-1).\log 2 = \log 7$$

$$\Rightarrow \quad 4x - 1 = \frac{\log 7}{\log 2} \quad \Rightarrow \quad 4x = \frac{\log 7}{\log 2} + 1$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{0,8451}{0,3010} + 1 = 2,8076 + 1 = 3,8076$$

$$\Rightarrow 4x = 3,8076 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3,8076}{4}$$

$$\Rightarrow x = 0,9519$$

3- Resolva a equação $2^{x-1} = 3^{2x-3}$.

$$2^{x-1} = 3^{2x-3} \quad \Rightarrow \quad \log(2^{x-1}) = \log(3^{2x-3}) \quad \overset{P3}{\Longrightarrow} \quad (x-1).\log 2 = (2x-3).\log 3$$

$$\Rightarrow (x-1).0,3010 = (2x-3).0,4771$$
$$\Rightarrow 0,3010.x - 0,3010 = 0,9542x - 1,4313$$
$$\Rightarrow 0,3010.x - 0,9542x = 0,3010 - 1,4313$$
$$\Rightarrow -0,6532x = -1,1303 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1,1303}{0,6532}$$
$$\Rightarrow x = 1,7304$$

Também poderíamos resolver da seguinte forma:

$$2^{x-1} = 3^{2x-3} \quad \Rightarrow \quad 2^x \times 2^{-1} = 3^{2x} \times 3^{-3}$$
$$\Rightarrow \; 2^x \times \frac{1}{2} = \left(3^2\right)^x \times \frac{1}{3^3} = \left(3^2\right)^x \times \frac{1}{3^3}$$
$$\Rightarrow \; 3^3 \times 2^x = 2 \times \left(3^2\right)^x$$
$$\Rightarrow \frac{2^x}{\left(3^2\right)^x} 2^x = \frac{2}{3^3}$$
$$\Rightarrow \; \left(\frac{2}{3^2}\right)^x = \frac{2}{3^3}$$
$$\Rightarrow \; \log \; \left(\frac{2}{3^2}\right)^x = \log\left(\frac{2}{3^3}\right) \quad \overset{P3}{\Longrightarrow} \; x\log \; \left(\frac{2}{3^2}\right) = \log\left(\frac{2}{3^3}\right)$$

$$\overset{P2}{\Longrightarrow} \; x.\left(\log \; 2 - \log \; 3^2\right) = \log 2 - \log \; 3^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{\log(2) - 3\log(3)}{\log \; (2) - 2\log(3)} =$$
$$\Rightarrow x = 1,7304$$

7. FUNÇÕES LOGARITMICAS

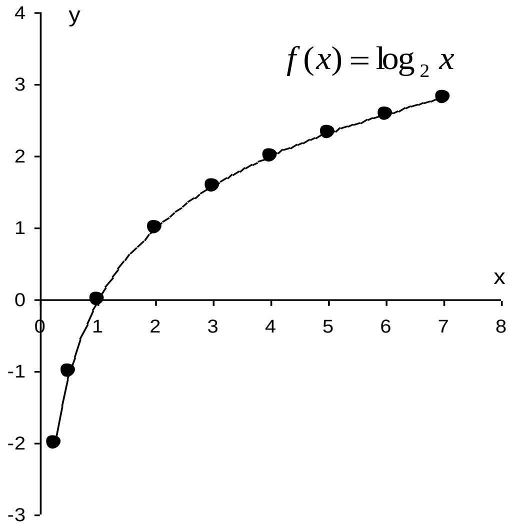
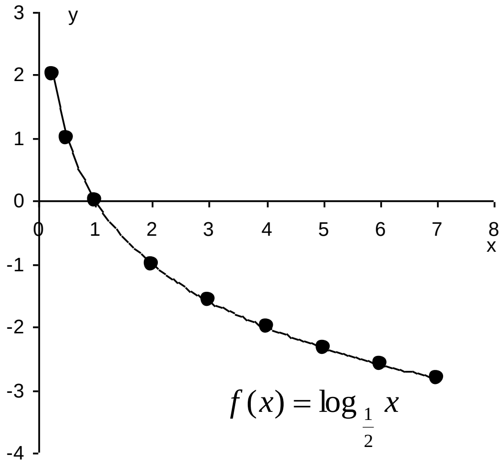
DEFINIÇÃO 1 - A função **f** que associa a cada número real **x > 0** o número real $\log_a x$, com **a > 0** e **a ≠ 1**, é chamada *de função logarítmica de base **a***, e é indicado por:

$$\mathbf{f(x)} = \log_a x$$

São exemplos de função logarítmica as funções de $\mathbb{R}_+^*$ em IR definidas por:

(a) $f(x) = \log_5 x$
(b) $g(x) = \log_3 x$

Gráfico da função logarítmica

a (base) > 1	**0 < a < 1**
	
- f(x) é *crescente*, pois **a** > **1**; - O gráfico não toca o eixo y e não tem pontos nos quadrantes II e III; - D = IR_+^* - Im = IR	- f(x) é de*crescente*, pois **0** < **a** < **1**; - O gráfico não toca o eixo y e não tem pontos nos quadrantes II e III; - D = IR_+^* - Im = IR

Exemplos

1- Dada f(x) = $\log_3$ (x + 1), determine:

(a) f(2) = $\log_3$ (2 + 1) = $\log_3$ (3) = 1 (pela propriedade P7)

(b) f(1) = $\log_3$ (1 + 1) = $\log_3$ (2) = (propriedade P5) = $\dfrac{\log 2}{\log 3}$ = 0,6309

2- Dada a função g(x) = $\log_4$ x, determine o valor de *x* tal que g(*x*) = 4.

-Solução-

$$g(x) = 4$$

$$\log_4 x = 4 \iff 4^4 = x \iff x = 256$$

3- Na equação $Q = Q_0.e^{-rt}$,

- Q representa a massa final da substância,
- **Q_0**, a massa inicial,
- r a taxa de variação e
- t, o tempo em anos.

Note que nessa equação, a massa final está em função do tempo t. Com base nessa equação, vamos determinar em quantos anos 50 g de uma substância se reduz a 5 g, obedecendo a uma taxa de variação de 8% ao ano.

-Solução-

$$Q = Q_0 . e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad 5 = 50 . e^{-0,08t} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,08t} = \frac{5}{50} \quad \Rightarrow \quad e^{-0,08t} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(e^{-0,08t}\right) = \ln \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad -0,08t = \ln 10^{-1} \quad \Rightarrow \quad -0,08t = -\ln 10 \quad \Rightarrow \quad 0,08t = \ln 10$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln 10}{0,08}$$

$$\Rightarrow \quad t = 28,78$$

O tempo para que ocorra a redução é de aproximadamente 28 anos e 9 meses.

EXERCÍCIOS

1- Resolva as seguintes equações exponenciais (R = a resposta):

a) $2^{x^2} . 4^{4x} . 8^4 = 1$ R= -2 ou -6 b) $10^{1-x} = \frac{1}{10}$ R= 2 c) $9^{x-2} = \sqrt{27}$ R = $\frac{11}{4}$

d) $5^{2x-1} = 1$ R = $\frac{1}{2}$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \frac{125}{8}$ R= -2 f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \sqrt[3]{4}$ R= - $\frac{2}{3}$

g) $10^{1-4x} = 0,001$ R = 1 h) $6 . 7^{-x+2} = 294$ R = 0 i) $2 . \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} = 4$ R = $\frac{5}{4}$

2- (PUCCAMP) Considere a sentença $\mathbf{a^{2x+3} > a^8}$, na qual **x** é uma variável real e **a** é uma constante real positiva. Essa sentença é verdadeira se, por exemplo:

a) x = 3 e a = 1
b) x = -3 e a > 1
c) x = 3 e a < 1
d) x = -2 e a < 1
e) x = 2 e a > 1

RESPOSTA: D

3- As funções $\mathbf{y = a^x}$ e $\mathbf{y = b^x}$ com **a > 0** e **b > 0** e a ≠ b têm gráficos que se interceptam em:

a) nenhum ponto;
b) 2 pontos;
c) 4 pontos;
d) 1 ponto;
e) infinitos pontos.

RESPOSTA: D

4- (U. E. LONDRINA) Supondo que exista, o logaritmo de **a** na base **b** é:

a) o número ao qual se eleva **a** para se obter **b**.
b) o número ao qual se eleva **b** para se obter **a**.
c) a potência de base **b** e expoente **a**.
d) a potência de base **a** e expoente **b**.
e) a potência de base **10** e expoente **a**.

RESPOSTA: B

5- (PUC) Assinale a propriedade válida sempre:

a) log (a **.** b) = log a **.** log b
b) log (a + b) = log a + log b
c) log m **.** a = m **.** log a
d) log a^m = log m **.** a
e) log a^m = m **.** log a

(Supor válidas as condições de existências dos logaritmos)

6- Encontrar um número x > 0 tal que: $\log_5 x + \log_5 2 = 2$.
RESPOSTA: 12,5

7- (ITA-SP) Calcule o valor de $\log_2 16 - \log_4 32$.

RESPOSTA: 3/2

8- Qual o conjunto solução da equação exponencial.

(a) $5^{x-3} = 7$
(b) $7^{x+6} = 4$
(c) $3^{-2x+10} = 2$
(d) $8^{2x+3} = 3$

RESPOSTAS:
(a) $S = \{3 + \log_5 7\}$ **(b)** $S = \{\log_7 4 - 6\}$ **(c)** $S = \left\{\dfrac{10 - \log_3 2}{2}\right\}$ **(d)** $S = \left\{\dfrac{\log_8 3 - 3}{2}\right\}$

9- (Brasil Escola) O anúncio de certo produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após ***t*** dias do início da exposição (***t*** exposições diárias), o número de pessoas (***y***) que ficam conhecendo o produto é dado por $\mathbf{y = 3 - 3.(0,95)^t}$, em que ***y*** é dado em milhões de pessoas.

(a) Para que valores de ***t*** teremos pelo menos 1,2 milhões de pessoas conhecendo o produto?

(b) Faça o gráfico de ***y*** em função de ***t***.

Resposta: (a) 10 dias

10- Descubra o valor de **x** para que a igualdade abaixo seja válida.

$$\log_2 (3x + 10) - \log_2 x = \log_2 5$$

Resposta: x = 5

11- Resolva a equação logarítmica $\mathbf{\log_{x+3} (5x - 1) = 1}$.
Resposta: x = 1

12- (Fuvest) O número real **x** que satisfaz a equação $\mathbf{\log_2 (12 - 2^x) = 2x}$ é**:**

(a) $\log_2 5$
(b) $\log_2 \sqrt{3}$
(c) 2
(d) $\log_2 \sqrt{5}$
(e) $\log_2 3$

Resposta: letra (e)

13 - (UEL) A solução real da equação $-1 = \log_5\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ é:

(a) $^1/_9$
(b) $-^1/_5$
(c) – 1
(d) – 5
(e) – 9

Resposta: letra (a)

14- Os valores de x que satisfazem log x + log (x – 5) = log 36 são:

(a) 9 e -4
(b) 9 e 4
(c) -4
(d) 9
(e) 5 e -4

Resposta: letra (a)

15- A idade de Elisa é dado pelo valor de x na equação: $2.\log_3(x+1)=\log_3(21+21x)$
Encontre a idade de Elisa.

Resposta: 20 anos

16- O **deciBel** é uma medida muito popular para medição do nível sonoro (NS). Ela possui uma relação direta com a **intensidade sonora** (I), medida em W/m², e pode ser calculada a partir da seguinte relação:

$$NS = 10.\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

sendo que I_0 é a intensidade de comparação. O mais comum é que se utilize $I_0 = 10^{-12}\,W/m^2$, que é a mínima intensidade sonora percebida pelo ouvido humano. A partir desta fórmula, determine:

(a) Qual é o nível sonoro de um som com intensidade I = $10^{-7}\,W/m^2$? **Resposta:** 50 decibéis.
(b) Um som com nível de 90 decibéis possui que intensidade? **Resposta:** I = 0,001

17- Qual é a alternativa que descreve corretamente o conjunto solução da equação:

$$\log(x-1)+\log\ (x+1) = 3.\log(2)+\log(x-2)\ ?$$

a) S=∅
b) S={3}
c) S={5}
d) S={3,5}
e) S={5,6}

Resposta: letra (d)