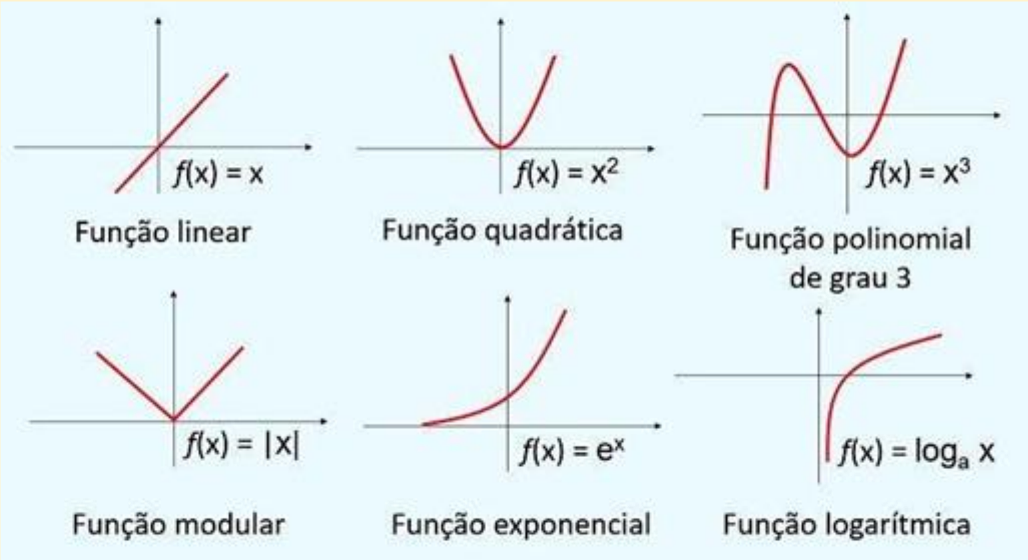
TÓPICOS DE MATEMÁTICA

UIA3 – ALGUMAS FUNÇÕES ESPECIAIS



Unidade de Interação e Aprendizagem 3 | UIA 3

Algumas Funções Especiais

- Aula 09 | Funções Elementares
- Aula 10 | Outras Funções Elementares
- Aula 11 | Funções Inversíveis
- Aula 12 | Função Logarítmica e Exponencial

AULA 09 | FUNÇÕES ELEMENTARES

1- FUNÇÕES MODULARES

MÓDULO

DEFINIÇÃO

Em todo número x podemos associar um valor absoluto de x ou um número real denominado módulo de x representado por $|x|$ e obtido do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{ll} |x| = x & se\, x \geq 0 \\ |x| = -x & se\, x < 0 \end{array}}$$

1º) Se x é positivo ou nulo, o seu módulo é ele mesmo.

Exemplos:

a) O módulo de 5 é igual a 5, isto é $|5| = 5$
b) O módulo de 0 é igual a 0, isto é $|0| = 0$
c) O módulo de $\sqrt{4}$ é igual a $\sqrt{4}$, isto é $|\sqrt{4}| = \sqrt{4}$
d) O módulo de 21 é igual a 21, isto é $|21| = 21$

2º) Se x é negativo, o seu módulo é obtido trocando o seu sinal.

Exemplos:

a) O módulo de –2 é igual a +2, isto é $|-2| = -(-2) \Rightarrow |-2| = 2$
b) O módulo de $-\sqrt{4}$ é igual a $\sqrt{4}$, isto é $|-\sqrt{4}| = -(-\sqrt{4}) \Rightarrow |-\sqrt{4}| = \sqrt{4}$
c) O módulo de -10 é igual a 10, isto é $|-10| = -(-10) \Rightarrow |-10| = 10$

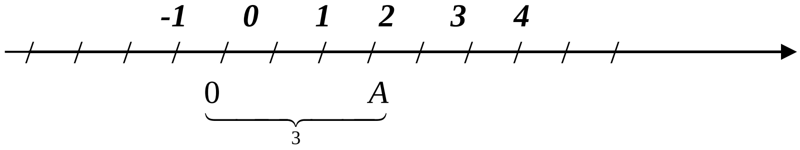
O módulo ou valor absoluto de um número real é sempre positivo

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

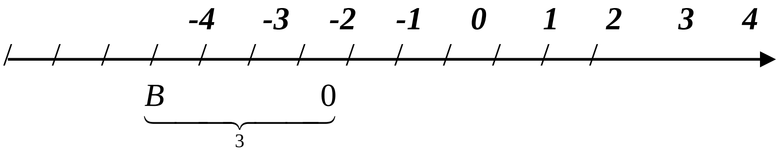
Sabemos que um número real x está associado a um ponto da reta. Podemos interpretar o *módulo de x* como sendo a distância do ponto que representa x ao ponto que representa o número 0.

Exemplos:

(a) No esquema abaixo, o número real 3 está associado ao ponto A. O módulo de 3 é igual à distância entre A e 0.



(b) No próximo esquema abaixo, o número real é –3 e está associado ao ponto B. O módulo de -3 é igual à distância entre B e 0.



FUNÇÃO MODULAR

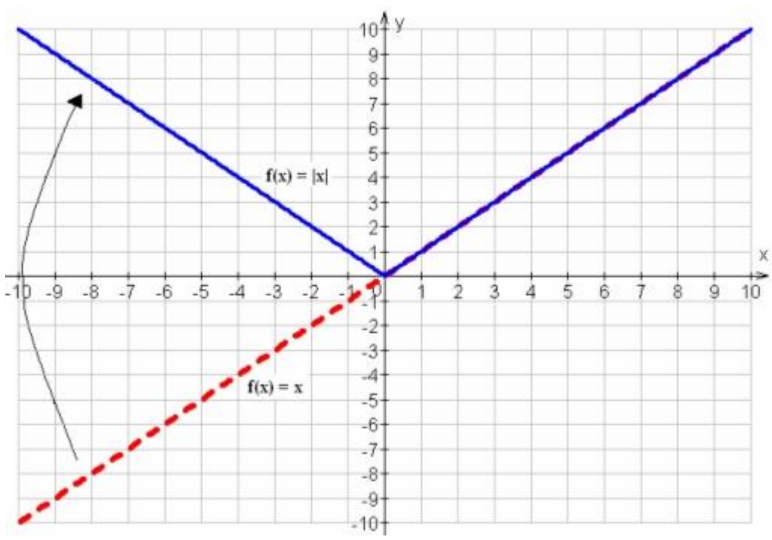
Função Modular é aquela que associa a cada elemento x real um elemento $|x| \in IR$, ou seja,

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ou seja, a função só assume valores no seu eixo (y) positivo.

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO MODULAR

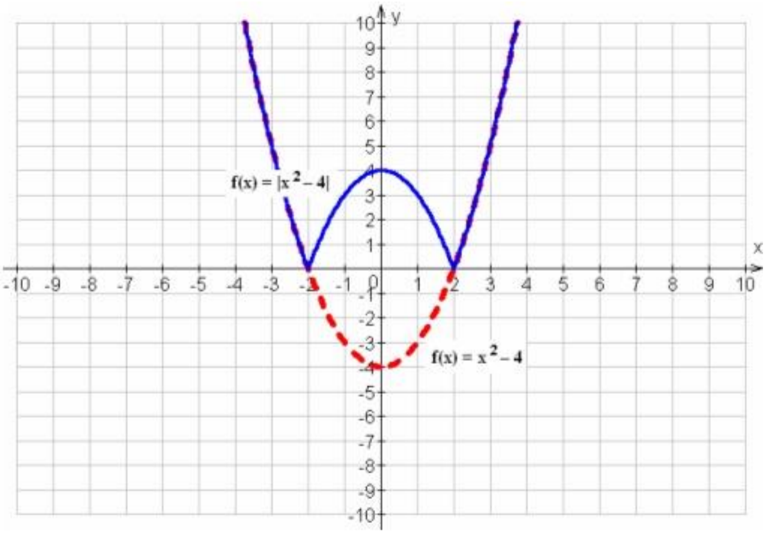
A função é uma reta decrescente (a bissetriz dos quadrantes pares) até x = 0 e uma reta crescente (a bissetriz dos quadrantes ímpares) após esse ponto. Ou seja, o gráfico de f(x) = |x| é semelhante ao gráfico de f(x) = x, sendo que a parte negativa do gráfico será “refletida” sempre para um f(x) positivo.



Um outro exemplo para uma função modular seria a função modular do 2º grau, sendo f(x) = $|x^2 - 4|$ assim:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & se\ x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4), & se\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}, \text{ ou seja, } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & se\ x \leq -2\ ou\ x \geq 2 \\ -x^2 + 4, & se\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

, assim temos o gráfico:



Exemplos:

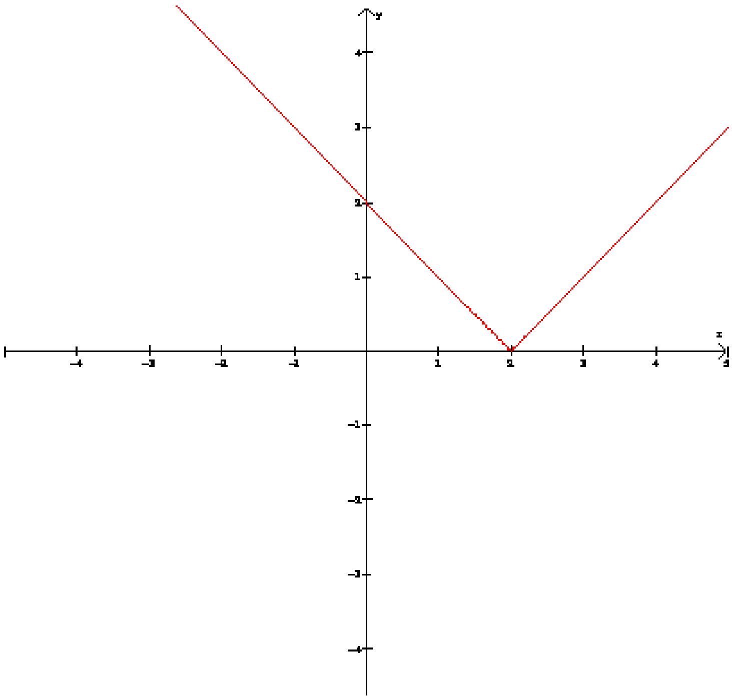
1- Construir o gráfico da função $f(x) = |x-2|$.

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, se \ \ x-2 \geq 0 \\ -x+2, se \ \ x-2 < 0 \end{cases}$$

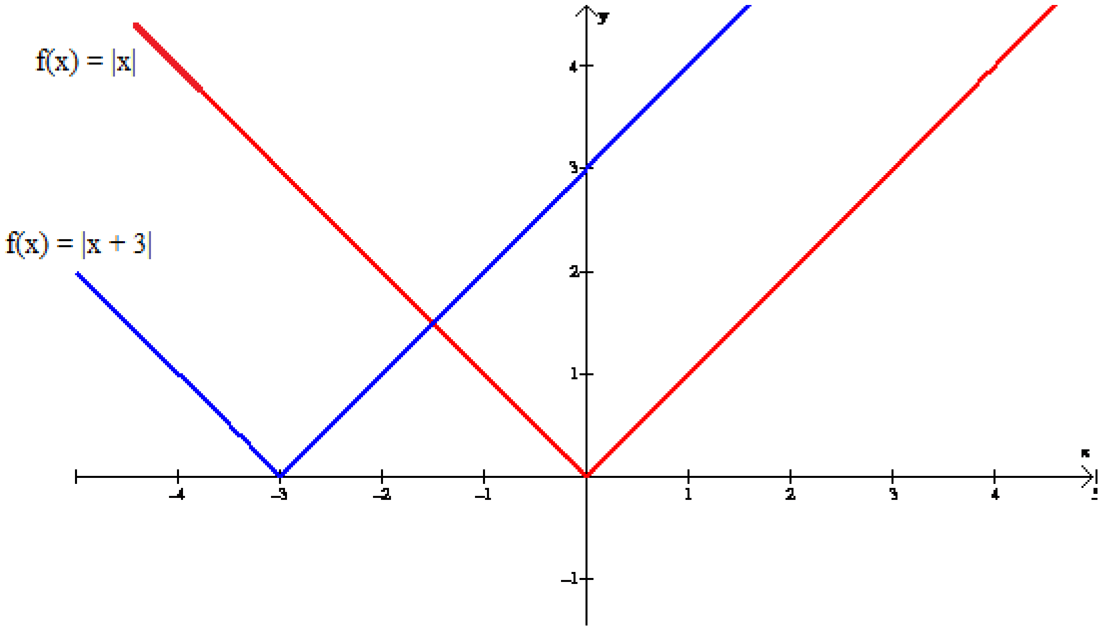
ou seja,

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, se \ \ x \geq 2 \\ -x+2, se \ \ x < 2 \end{cases}$$

Assim, a função é a reta y = -x + 2, antes do ponto x = 2, e a reta y = x - 2, após esse ponto.



Compare esse gráfico com o anterior. Vamos, novamente, traçar os dois no mesmo plano:



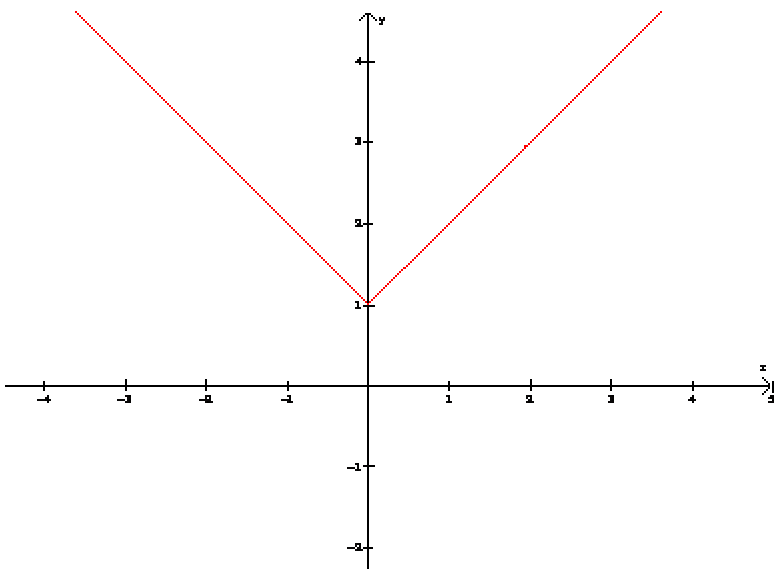
O segundo gráfico representa um deslocamento do primeiro, na horizontal, de três unidades para a esquerda, ou seja, um deslocamento de -3 unidades.

Podemos concluir que um gráfico da forma $f(x)=|x+a|$ representa um deslocamento na horizontal de + a unidades (se a for negativo) e de -a unidades (se a for positivo), em relação ao gráfico da função $f(x)=|x|$.

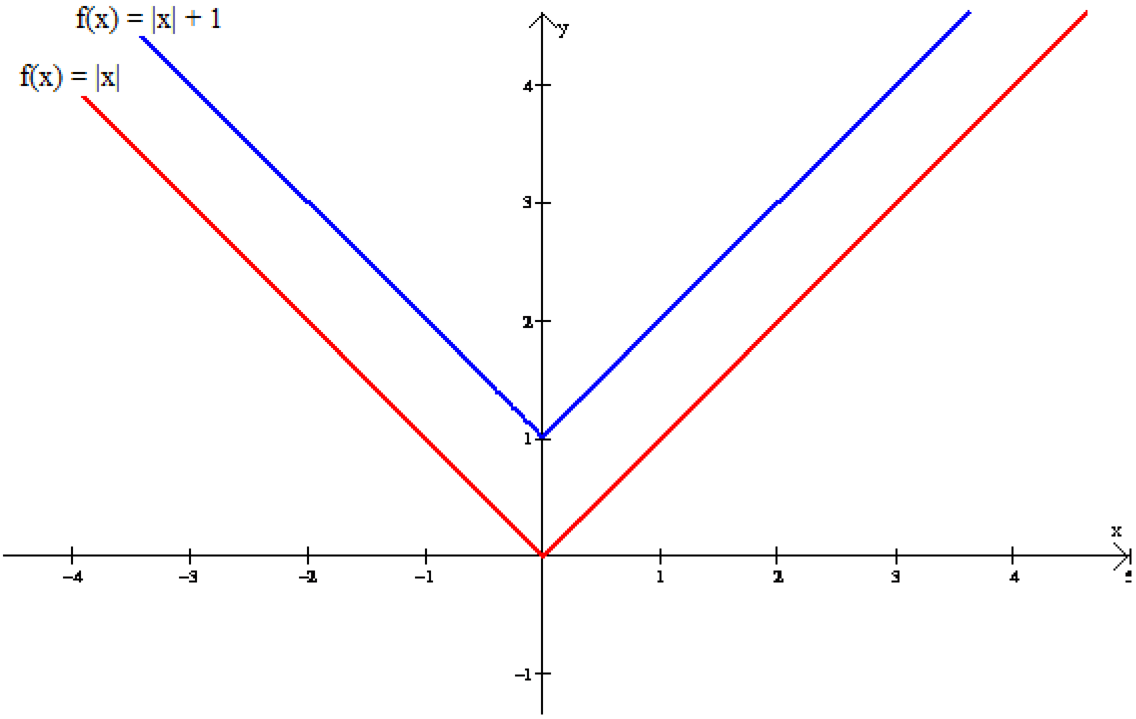
3) Construir o gráfico da função $f(x)=|x|+1$.

$$f(x)=|x|+1=\begin{cases} x+1, se \;\; x\geq 0 \\ -x+1, se \;\; x<0 \end{cases}$$

Assim, a função é a reta y = x + 1, antes do ponto x = 0, e a reta y = -x + 1, após esse ponto.



Vamos traçar os gráficos de $f(x)=|x|+1$ e $f(x)=|x|$ no mesmo plano:



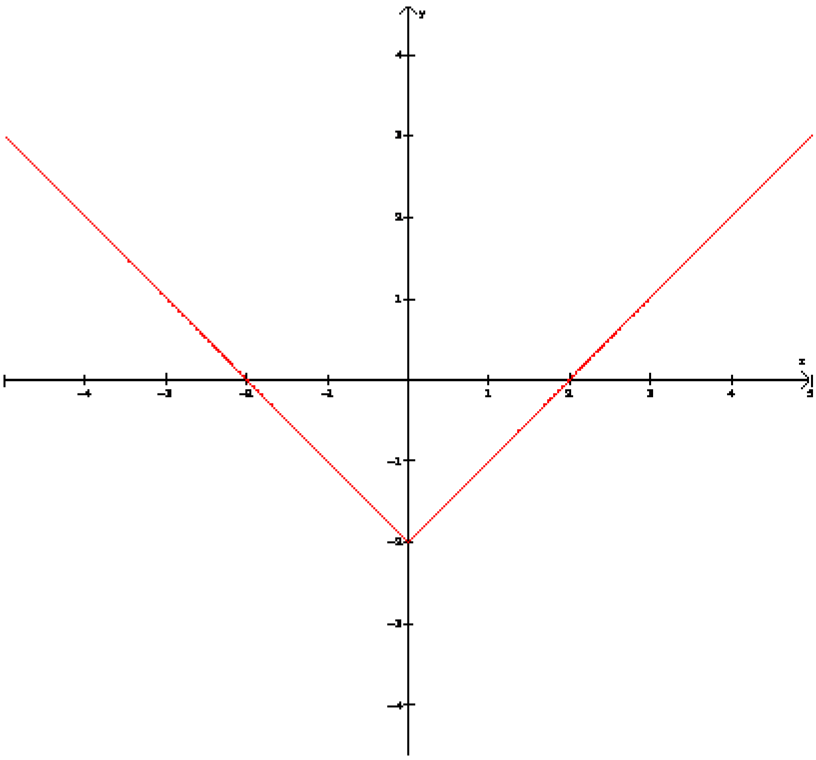
O segundo gráfico representa um deslocamento do primeiro, na vertical, de +1 unidade.

4) Construir o gráfico da função $f(x)=|x|-2$.

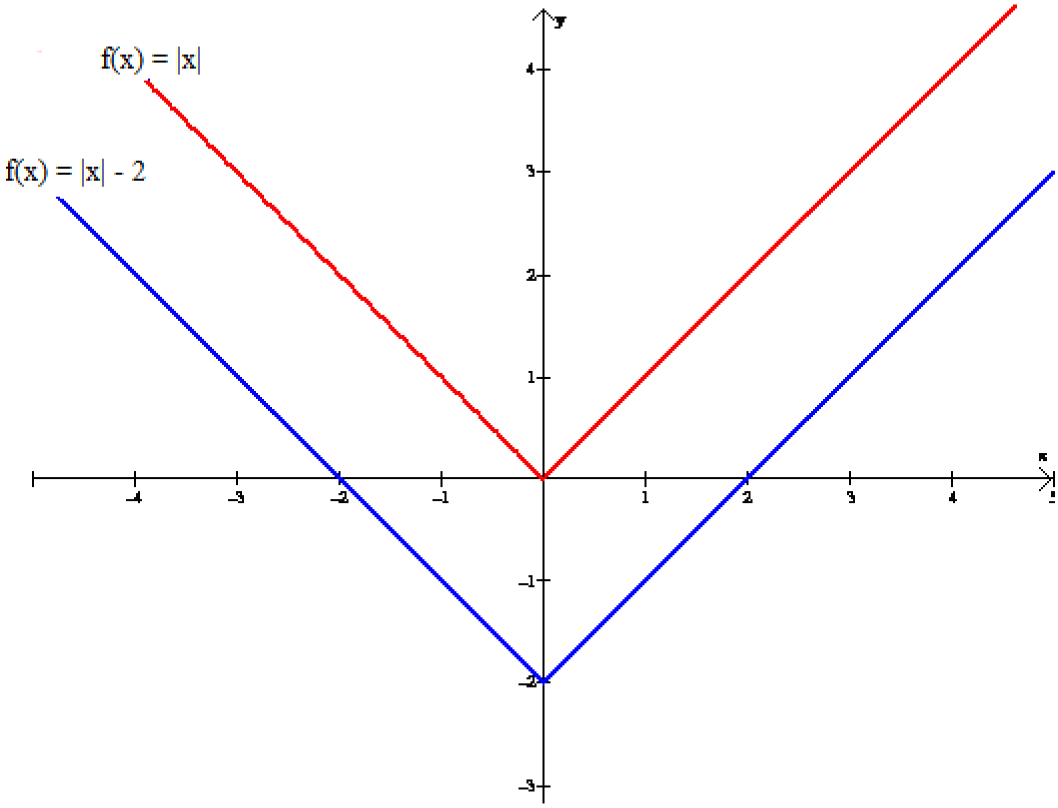
$$f(x)=|x|-2=\begin{cases} x-2, se \;\; x \geq 0 \\ -x-2, se \;\; x < 0 \end{cases}$$

Assim, a função é a reta y = x - 2, antes do ponto x = 0, e a reta y = -x - 2, após esse ponto.

E o gráfico:



Vamos traçar os gráficos de $f(x)=|x|-2$ e $f(x)=|x|$ no mesmo plano:



O segundo gráfico representa um deslocamento do primeiro, na vertical, de -2 unidades.

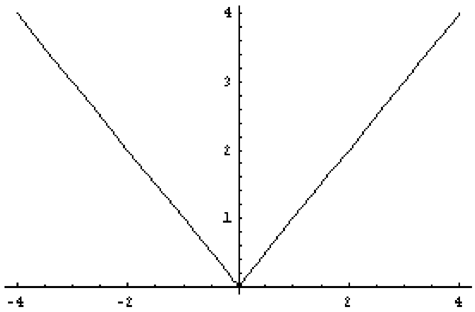
Podemos concluir que um gráfico da forma $f(x)=|x|-a$ representa um deslocamento na vertical de +a unidades (se a for positivo) e de -a unidades (se a for negativo), em relação ao gráfico da função $f(x)=|x|$.

Para construir o gráfico da função modular procedemos assim:

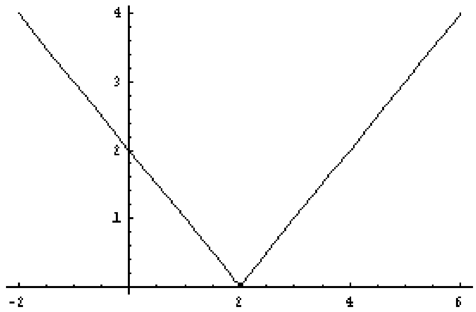
- 1º passo: construímos o gráfico da função onde f(x)> 0
- 2º passo: onde a função é negativa, construímos o gráfico de – f(x) ("rebate" para o outro lado na vertical).
- 3º passo: une-se os gráficos

Exemplos:

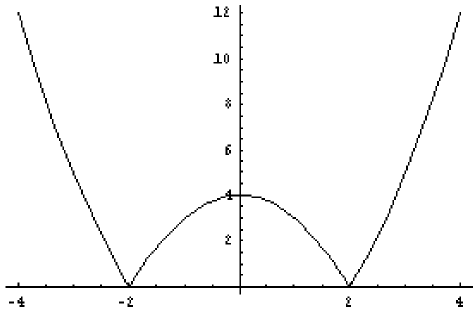
f(x) = |x|



f(x) = |x – 2|



f(x) = $|x^2 – 4|$



EXERCÍCIOS

OBS – Os próximos 6 exercícios pedem para traçar o gráfico da função modular. Não foi tratado acima, mas uma outra maneira de traçar o gráfico de uma função modular é dar valores para x e encontrar o valor de y, como foi feito na UIA2 – Funções. Talvez esse método seja mais simples, já que todos conhecem.

1- Esboce o gráfico da função $f(x) = |x + 1| – 3$.

2- Esboce o gráfico da função $f(x) = |x + 2| + |2x + 1| + x – 6$.

3- Esboce o gráfico da função $f(x) = |x^2 + 4x – 5|$.

4- Esboce o gráfico da função $f(x) = |x^2 – 5x| + 6$.

5- Esboce o gráfico da função $f(x) = |x + 1| + x$.

6- Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 – 3|x| + 2$.

7- O gráfico da função f de R em R, dada por $f(x) = |1 – x| – 2$, intersecta o eixo das abscissas nos pontos (a, b) e (c, d), com a < c. Nestas condições calcule o valor de (d + c - b – a).

Resposta: 4

2- FUNÇÃO POLINOMIAL DE GRAU 3 (CÚBICA)

1- Representemos graficamente as funções:

(a) $f(x) = x^3 + x$ (b) $g(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

2- No exercício anterior, observando seu gráfico, obtenha as raízes de cada função polinomial.

3- Considere as funções cúbicas abaixo.

(A) Descreva como transformar o gráfico de uma função monomial $f(x)=ax^3$ em um gráfico da função dada.

(B) Calcule a localização do intercepto (valor por onde o gráfico passa no eixo vertical y).

(a) $g(x)=4(x+1)^3$ (b) $g(x)=-(x-2)^3+5$ (c) $g(x)=4(x-1)^3$

Resposta: (a) intercepto 4 (b) intercepto 13 (c) intercepto 4

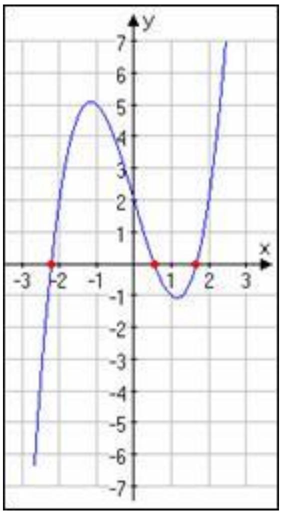
4- Calcule as raízes das funções abaixo, algebricamente.

(a) $g(x)=x^3-x^2-6x$ (b) $g(x)=x^3-4x$ (c) $g(x)=3x^3-5x^2+2x$

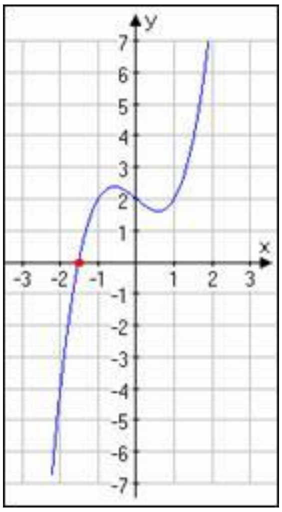
(d) $g(x)=x^3-25x$ (e) $g(x)=3x^3-x^2-2x$ (f) $g(x)=5x^3-5x^2-10x$

Resposta: (a) 0, 3 e -2 (b) 0, -2 e 2 (c) 0, 1 e 2/3 (d) 0 e 25 (e) 0, 1, -2/3 (f) 0, 2 e -1

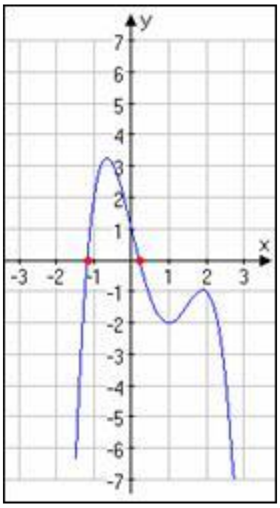
5- Observe os gráficos abaixo. Diga quantas raízes cada função apresenta. Justifique.



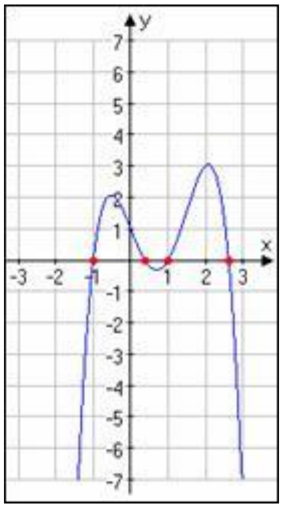
Função 1



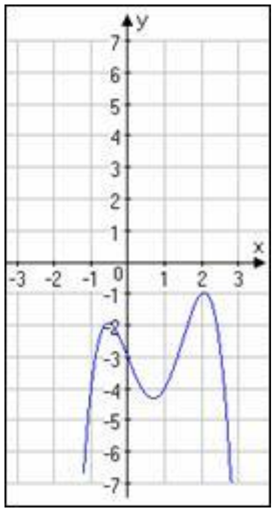
Função 2



Função 3



Função 4



Função 5

6- Qual é o valor por onde o gráfico de $f(x)=2(x-1)^3+5$ passa pelo eixo vertical y (intercepto)? Desenhe a gráfico.

Resposta: 3

AULA 10 | OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

1- FUNÇÃO RECÍPROCA

1- Determine os domínios e esboce os gráficos das funções a seguir.

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

2- Pela definição de função recíproca f(x) = 1/x, podemos verificar pelo gráfico que:

i- À medida que x cresce indefinidamente, temos que f (x) tende para 0;
ii- À medida que x decresce indefinidamente, temos que f (x) tende para 0;
iii- À medida que x se aproxima de 0 pela direita, f (x) cresce indefinidamente;
iv- À medida que x se aproxima de zero pela esquerda, f (x) decresce indefinidamente.

Faça a mesma análise dos itens i, ii, iii e iv para as funções abaixo (analise o domínio delas):

(a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$

(b) $f(x)=\frac{1}{x-1}$

(c) Faça um esboço do gráfico para cada uma das funções.

3- Considere a função recíproca definida por $f(x)=\frac{1}{x}$ no intervalo [1, 5] . Dividindo-se o intervalo [1, 5] em quatros parte iguais e calculando-se a área de cada retângulo, como na figura abaixo, a soma das áreas dos retângulos é:

Lembre-se: a área (A) do retângulo é a multiplicação da base (b) pela altura (h) (A = b x h), onde b é o comprimento da base do retângulo no eixo x e h é a altura do retângulo no eixo y.

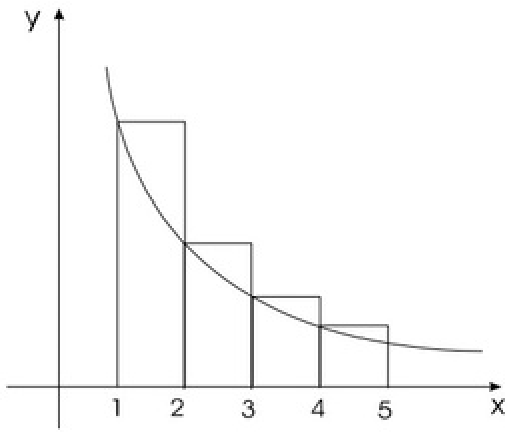
a) $\frac{77}{60}$

b) $\frac{25}{12}$

c) $\frac{25}{24}$

d) $\frac{77}{120}$

e) $\frac{77}{30}$



2- FUNÇÃO RAIZ

4- Resolva as seguintes equações:

(a) $\sqrt[3]{x+4}=2$

(b) $\sqrt{x+2}=x$

(c) $\sqrt[4]{x^2+4x+3}=\sqrt[4]{x+1}$

(d) $\sqrt{x}+1=\sqrt{2x+1}$

5- Calcule

(a) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}}\times\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}$ (b) $\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$

6- Faça o gráfico das funções

(a) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ (b) $g(x)=x^{\frac{3}{2}}$

RESPOSTAS

3- 25/12 4- (a) x = 4 (b) x = 2 (c) x = -1 (d) x = 0 ou x = 4 5- (a) $\sqrt[12]{3^{19}}$ (b) ¼