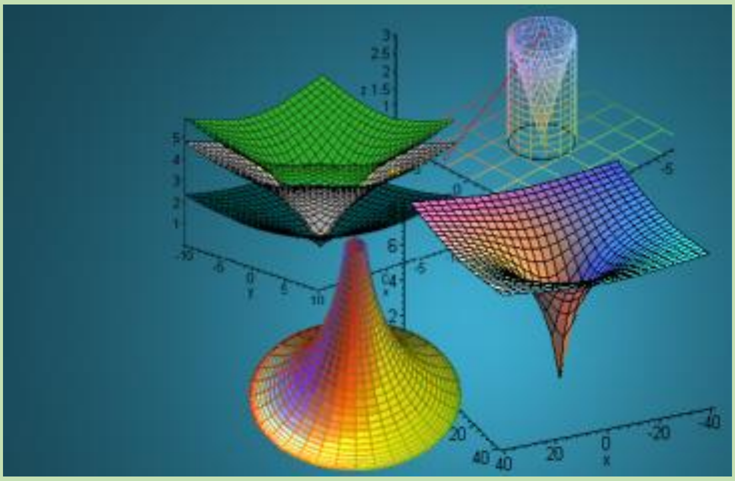
TÓPICOS DE MATEMÁTICA

UIA2 | FUNÇÕES



UNIDADE DE INTERAÇÃO E APRENDIZAGEM | UIA 2 FUNÇÕES

- Aula 5 | Funções
- Aula 6 | A forma analítica da reta
- Aula 7 | Função do 1º grau
- Aula 8 | Função do 2º grau

AULA 05 | FUNÇÕES

INTRODUÇÃO

No dia a dia é comum nos depararmos com situações onde duas ou mais grandezas (variáveis) estão se relacionando de alguma forma. Por exemplo:

- Relação entre o preço de um produto e o custo da mão de obra.
- Relação entre inflação e o preço dos alimentos.
- Relação entre o valor do IPTU e a área construída.
- Relação entre a temperatura do corpo e a frequência de pulsação de uma pessoa.
- Relação entre a pressão arterial e frequência cardíaca.
- Relação entre tempo de sono e estresse.
- Relação entre o volume de água nos reservatórios e o volume de chuvas.
- Relação entre aumento no nível do colesterol ruim e doenças cardíacas.
- O preço de um medicamento nas farmácias está em função do seu custo de produção pelo laboratório, dos impostos, da margem de lucro, etc.
- Sua compra no supermercado está em função da quantidade de produtos que você compra.
- A poluição do ar nas cidades, por exemplo, está em função do número de carros em circulação, dentre outros fatores, é claro.
- A sobrevivência de um certo inseto está em função da temperatura.
- O número populacional em uma cultura de bactérias depende dos nutrientes disponíveis.
- Relação entre taxa de analfabetismo e taxa de violência.
- Relação entre tempo de estudos dos pais e tempo de estudos dos filhos.
- Relação entre tempo de estudo e renda.

Assim, podemos ver através desses poucos exemplos que as relações entre duas grandezas permeiam nosso dia a dia, e estudar a forma como elas se relacionam se torna o principal ponto de estudo. A esta relação entre duas ou mais grandezas, damos o nome de função. ***Neste curso nos limitaremos ao estudo de relações entre duas grandezas.***

Para compreender melhor o conceito de função, tomaremos o exemplo seguinte.

Exemplo 1 - Para produzir uma caixa de determinado produto, uma indústria tem um custo de R$ 35,00 por caixa produzida. Qual o custo de produção de 500 caixas?

-Solução-

Vamos estabelecer símbolos para representar a situação acima. Considere

- R$ 35,00 o custo de cada caixa do produto.
- X a quantidade de caixas produzidas.
- Vamos chamar de C o custo total de produção.

Notamos, então, que o custo total C de produção depende da quantidade X de caixas do produto produzidas, o que pode ser verificado pela tabela abaixo:

CAIXAS (X)	CUSTO TOTAL (C)
1	35×1
2	35×2
3	35×3
4	35×4
$\vdots$	$\vdots$

Pela tabela, observamos que:

- a quantidade X de caixas é uma grandeza variável.
- O Custo final C é uma grandeza variável que depende do número X de caixas produzidas.
- a todos os valores de X estão associados valores de C.
- a cada valor de X está associado um único valor de C.

Podemos estabelecer uma relação entre X e C, da seguinte fórmula matemática:

$$\boxed{C(X) = 35.X}$$

onde C(X) é uma notação matemática para dizer que o custo C está em função da quantidade X.

Agora que já conhecemos a função que relaciona quantidade de caixas produzidas e custo, podemos responder a pergunta do exemplo: qual o custo de produção de 500 caixas? Em outras palavras, se X = 500 caixas, qual o valor do custo total C(500)?

Basta calcular

$$C(500) = 35\times 500 = 17500$$

Portanto, o custo é de R$ 17.500,00.

Dizemos, então:

1- O custo total C é dado ***em função*** da quantidade X de caixas produzidas;
2- A relação C(X) = 35.X chama-se ***lei de associação*** ou ***fórmula matemática*** desta função.

Exemplo 2 – Para produzir um determinado medicamento, uma indústria farmacêutica tem um custo fixo de R$ 28,00 mais R$ 2,00 por caixa produzida. Qual o custo de produção de 500 caixas?

-Solução-

Vamos estabelecer símbolos para representar a situação acima. Considere

- R$ 28,00 o custo fixo.
- X a quantidade de caixas produzidas.
- Vamos chamar de C o custo total de produção.

Notamos, então, que o custo total C de produção depende da quantidade X de caixas de medicamentos produzidas.

CAIXAS (X)	CUSTO TOTAL (C)
1	$2 \times 1 + 28$
2	$2 \times 2 + 28$
3	$2 \times 3 + 28$
4	$2 \times 4 + 28$
$\vdots$	$\vdots$

A relação entre X e C pode ser modelada da seguinte forma:

$$\boxed{C(X) = 2X + 28}$$

Se X = 500 caixas, qual o valor do custo total?

Basta calcular

$$C(500) = 2\times 500 + 28 = 1028$$

Portanto, o custo total é de R$ 1028,00.

Exemplo 3 - Um taxista cobra um valor fixo de R$ 6,20 mais R$ 0,50 por quilômetro rodado.

(a) Escreva a função que determina o valor de uma corrida.
(b) Qual o valor que uma pessoa irá pagar por ter usado os serviços do taxista após rodar 20 km.
(c) Para uma pessoa que pagou R$ 30,00, qual foi a quilometragem que o taxista teve que percorrer?

-Solução-

(a) Observe que o **valor final** a ser pago pelo cliente está dependendo de quantos quilômetros o taxista vai rodar. Considere então V o valor final que depende da quilometragem **x**. Podemos escrever a função como

$$V(x) = 0{,}50x + 6{,}20$$

como a função que descreve o valor final de uma corrida em função da quilometragem.

(b) Para encontrar o valor final de uma corrida de 20 km, basta substituir 20 no lugar do x em V(x).

$$V(x) = 0{,}50x + 6{,}20$$
$$V(20) = 0{,}50.(20) + 6{,}20$$
$$V(20) = 16{,}20$$

Logo, a pessoa irá pagar R$ 16,20 pelo serviço prestado.

(c) Observe que aqui, não foi dado o valor de x (quilometragem) e sim o valor final da corrida: R$ 30,00 O exercício pede esse valor de x. Logo, não podemos substituir 30 no lugar do x, pois o significado de 30 é o valor final V. Bom, então ele deve entrar no lugar de V(x), isto é, V(x) = 30.

$$V(x) = 0{,}50x + 6{,}20$$
$$0{,}50x + 6{,}20 = 30 \quad \Rightarrow \quad 0{,}50x = 30 - 6{,}20 \quad \Rightarrow \quad 0{,}50x = 23{,}8$$
$$x = \frac{23{,}8}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad x = 47{,}6$$

Portanto, se o cliente pagou R$ 30 reais, o taxista percorreu 47,6 km.

Exemplo 4 - Em algumas condições, o número de bactérias B de uma cultura, é dado pela função exponencial $B(t)=2^{\frac{t}{12}}$, onde t representa o número de horas. Sabendo que o número de bactérias cresce em função do tempo t, qual o número de bactérias após 72 horas?

-Solução-

Uma vez que o número de bactérias após t horas é dado por $B(t)=2^{\frac{t}{12}}$, para t = 72 obtemos:

$$B(72)=2^{\frac{72}{12}}=2^{6}=64$$

Portanto, o número de bactérias após 72 horas será de 64.

Exemplo 5 (matemabio.blogspot.com) - Considere um experimento de laboratório cujo objetivo é compreender a reação de um cultivo de bactérias a uma determinada toxina. Neste sentido, foi então introduzida a toxina na cultura cuja população, no momento de introdução da toxina, era estimada em 8 milhões.

No desenvolvimento do experimento estimou-se que **t** horas após a introdução da toxina a população era de

$$P(t)=\frac{34t+40}{t^{2}+5t}$$

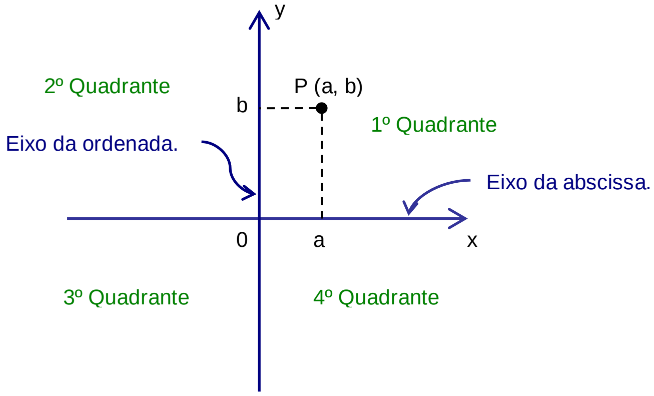
A Tabela 1 sintetiza alguns dos dados obtidos com o experimento e destaca a relação de dependência existente entre o tempo (**t**) transcorrido após a introdução da toxina e a população (**P**) **t** horas após a introdução desta toxina. Vale destacar ainda que o experimento teve duração de 48 horas, pois este período foi suficiente para os propósitos do estudo desejado.

Tempo (t) transcorrido após a introdução da toxina.	**População de bactérias após t horas da introdução da toxina (P).**
0 (início do experimento)	8 milhões
1/2 (meia hora após a introdução)	10,86 milhões
1 (uma hora após a introdução)	12,33 milhões
3 (três horas após a introdução)	10,14 milhões
t (t horas após a introdução)	$P(t)=\frac{34t+40}{t^{2}+5t}$

Antes de definirmos funções, vamos relembrar o sistema cartesiano de coordenadas, já estudado na Aula 02 – UIA1.

1 SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

É um sistema constituído por dois eixos **x** e **y** perpendiculares entre si, como representado abaixo.



Este sistema é utilizado para localizar um ponto no plano, P(*a*, b), denominado ***par ordenado*** e representam as ***coordenadas*** do ponto P.

2 PRODUTO CARTESIANO

Dados dois conjuntos não vazios *A* e *B*, denomina-se *produto cartesiano de A por B* o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) nos quais o primeiro elemento pertence a *A* e o segundo elemento pertence a *B* e indicamos **A x B** (lê-se: **A cartesiano B**).

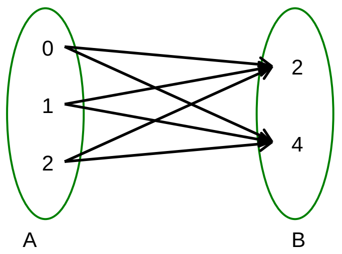
Sejam os conjuntos A = {0, 1, 2} e B = {2, 4}. Vamos formar o conjunto dos pares ordenados:

A x B = {(0, 2), (0,4), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)}

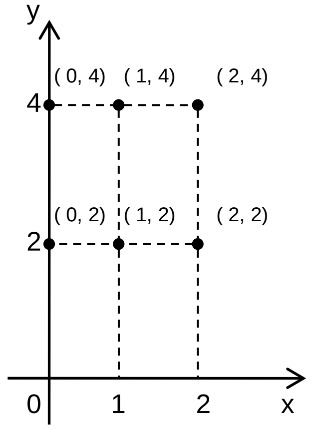
3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2} e B = {2, 4}, o produto cartesiano A x B = {(0, 2), (0,4), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)} pode ser representado de duas formas:

- Representação por meio de Flechas.



- Representação no plano cartesiano

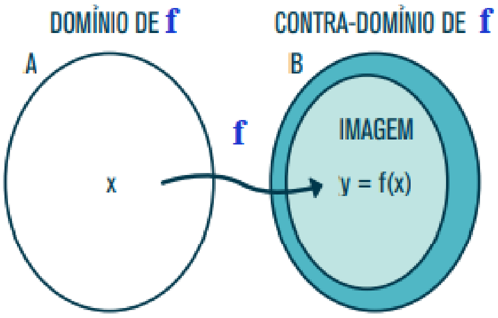


Cada par ordenado A x B é representado por um ponto no plano cartesiano.

4 CONCEITO MATEMÁTICO DE FUNÇÃO

DEFINIÇÃO 1 - Função é uma lei ou regra que associa cada elemento de um conjunto **A** a um único elemento de um conjunto **B**. O conjunto **A** é chamado de **domínio da função**, enquanto que o conjunto **B** é denominado de **contradomínio da função**. Ao conjunto formado pelos elementos do contradomínio B que estão associados a algum elemento de A, damos o nome de **imagem**.

Podemos representar essa relação entre x e y através do diagrama de Venn.



- O conjunto A é chamado **DOMÍNIO** da função f .
  NOTAÇÃO: D(f)

- O conjunto B é chamado **CONTRADOMÍNIO** de f .
  NOTAÇÃO: CD(f)

- O elemento em B que corresponde a x de A é chamado a **IMAGEM** de x e é representado por y = $f(x)$.
  NOTAÇÃO: Im(f) ou I(f).

  O conjunto imagem está contido no conjunto B.

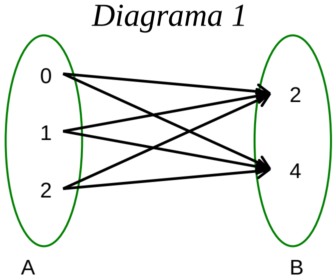
A definição 1 mostra duas condições para que uma relação seja uma função:

- Todo elemento de A tem que está associado a algum elemento em B. Não ode sobrar elementos em A.
- E essa associação deve ser única, ou seja, nenhum elemento de A deve estar associado a dois elementos em B

Por exemplo, considere os diagramas 1 e 2 de Venn abaixo com as suas associações.

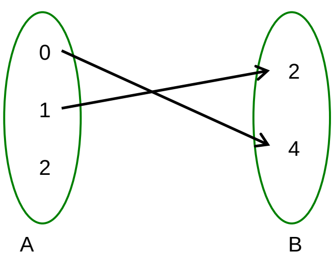
- No Diagrama 1 observe que o elemento 0 pertencente a A está associado a dois elementos de B (2 e 4). O mesmo acontece com os elementos 1 e 2 de A. Neste caso, a relação que está definindo esta associação não pode ser uma função.

Diagrama 1



- No Diagrama 2 observe que o elemento 2 pertencente a A não está associado a nenhum elemento de B. Neste caso, a relação que está definindo esta associação não pode ser uma função.

Diagrama 2



Quando temos uma função de A em B, podemos representá-la da seguinte forma:

NOTAÇÃO:

$f : A \rightarrow B$ (lê-se: função de A em B)

$x \rightarrow f(x) = y$ (lê-se: a cada valor de $x \in A$ associa-se um só valor $y \in B$)

A variável *x* é chamada ***variável independente*** e y a ***variável dependente*** (que depende de x).

A letra f , em geral, dá o nome às funções, mas podemos ter também a função g , h , p, etc. O importante é saber que a função tem um valor de entrada no qual irá gerar um valor de saída bem específico.

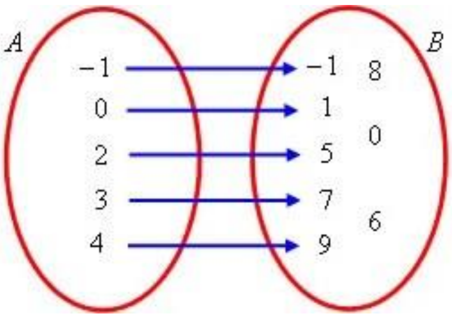
A definição 1 diz que função é uma forma de verificar como dois elementos se associam, isto é, mostra a lei que vai definir quem está relacionado com quem. Matematicamente podemos dizer que função é uma relação de duas grandezas *x* e y, onde o y vai depender sempre do *x*. Podemos denotar essa dependência entre *x* e y por:

$$\boldsymbol{f(x) = y}$$

onde *x* está no **domínio** da função e y é um valor que depende do valor de e está no **contradomínio**. Por exemplo, considere a lei que define a relação entre x e y, dada por

$$f(x) = 2x + 1$$

onde *x* está no conjunto A e y está no conjunto B. O conjunto A é formado pelos elementos {–1, 0, 2, 3, 4} e B formado pelos elementos {–1, 0, 1, 5, 6, 7, 8, 9}.



Observe que os elementos de A estão relacionados com os elementos de B através da função $f(x) = 2x + 1$, pois:

- o -1 de A está relacionado com o -1 de B, pois:

$$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$$

- o 0 de A está relacionado com o 1 de B, pois:

$$f(1) = 2(0) + 1 = 1$$

- o 2 de A está relacionado com o 5 de B, pois:

$$f(2) = 2(2) + 1 = 5$$

- o 3 de A está relacionado com o 7 de B, pois:

$$f(3) = 2(3) + 1 = 7$$

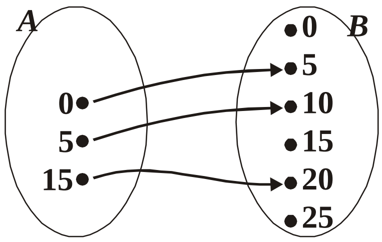
- o 4 de A está relacionado com o 9 de B, pois:

$$f(4) = 2(4) + 1 = 9$$

Observe que o conjunto imagem é formado pelos elementos de B que estão associados a algum elemento de A. A imagem é o conjunto I = {–1, 1, 5, 7, 9}.

Pela definição 1, para que a relação ***f*** seja uma função, é necessário todos os elementos de A estejam associados a algum elemento em B, ou seja, não pode sobrar elemento em A. Mas em B, pode sobrar elementos, ou seja, nem todos de B precisam estar associados a algum elemento de A. No diagrama acima, podemos observar que 0, 6 e 8 pertencentes a B não estão associados a nenhum elemento de A, o que é permitido.

Exemplo 2 - Dados os conjuntos $A=\{0,5,15\}$ e $B=\{0,5,10,15,20,25\}$, seja a relação de A em B expressa pela fórmula $f(x)=x+5$, com $x \in A$ e $y \in B$.



- o conjunto A é o ***domínio***,
- B é o ***contradomínio***
- e a ***imagem*** é o conjunto formado pelos elementos de B (contradomínio) que estão associados a algum elemento de A, que neste exemplo é formada pelo conjunto I = {5, 10, 20} , que são os únicos elementos de B que estão associados a elementos 0, 5 e 15 de A.

5 COMO DETERMINAR O DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

O **domínio de uma função** é o conjunto de todas as entradas possíveis da **função**, ou seja, o domínio é o conjunto de todos os valores de ***x*** que tornam possíveis o cálculo de y = f(x).

Quando definimos uma função, o domínio, que é o conjunto de todos os possíveis valores da variável independente x, pode ser dado explicitamente ou implicitamente. Assim,

- Se é dado apenas $f(x) = 4x - 5$, sem explicitar o domínio D, está implícito que x pode ser qualquer número real, ou seja, D = IR = Reais.

- Se é dado $f(x) = 4x - 5$, com $3 \leq x \leq 12$, está explícito que o domínio da função dada consiste em todos os números reais entre 3 e 12, incluindo-os, pois o intervalo é fechado, ou seja: D = { $x \in R \ / \ 3 \leq x \leq 12$ }.

- Se é dado apenas $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$, sem explicitar o domínio D, está implícito que x pode ser qualquer número real, com exceção de 2, pois se x = 2, teremos uma divisão por zero, o que não é possível. Vejamos:

$$f(2)=\frac{2.(2)-3}{2-2}=\frac{4-3}{0}=\frac{1}{0} \quad e \quad \frac{1}{0} \text{ , que não existe.}$$

Logo, D = { $x \in R \ / \ x \neq 2$ }

- Se é dado apenas $f(x)=\sqrt{x-2}$, sem explicitar o domínio D, está implícito que x - 2 pode ser qualquer número real não negativo, ou seja, $x - 2 \geq 0$ ou $x \geq 2$, pois se $x < 2$, obtém–se a raiz quadrada de um número negativo e, portanto, não existe um número real *f(x)* correspondente. Logo, D = { $x \in R \ / \ x \geq 2$ }.

Assim, quando o domínio de uma função não está explícito, devemos considerar para esse domínio todos os valores reais de x que tornam possíveis em IR as operações indicadas na fórmula matemática.

Em geral, temos que considerar dois casos:

1- **RAIZ QUADRADA** – Não existe raiz quadrada de número negativo.

   Logo, o radicando (termo que está dentro da raiz) tem que ser maior ou igual a zero (≥ 0).

2- **DENOMINARDOR DE UMA DIVISÃO (Função quociente)** – Não se divide um número por zero.

   Logo, o termo que está no denominador tem que ser diferente de zero ($\neq 0$).

Exemplos – Determinar o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x)=\dfrac{5x+3}{x-16}$

- Solução -

➔ $\dfrac{5x+3}{x-16}$ só é possível em IR se $x - 16 \neq 0$, pois não podemos dividir um número por zero.

Assim,

$x - 16 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 16$

Logo, D = $\{ x \in IR \;/\; x \neq 16 \}$.

(b) $f(x)=\dfrac{2x+7}{x^2-25}$

- Solução -

➔ $\dfrac{2x+7}{x^2-25}$ só é possível em IR se $x^2 - 25 \neq 0$, pois não podemos dividir um número por zero.

Assim,

$x^2 - 25 \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 \neq 25 \;\Rightarrow\; x \neq 5 \quad e \quad x \neq -5$

Logo, D = $\{ x \in IR \;/\; x \neq 5 \; e \; x \neq -5 \}$.

(c) $f(x)=\sqrt{x+5}$

- Solução -

➔ $\sqrt{x+5}$ só é possível em IR se $x + 5 \geq 0$, pois não existe raiz quadrada de números negativos.

Assim,

$x + 5 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -5$

Logo, D = $\{ x \in IR \;/\; x \geq -5 \}$.

(d) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x-6}}$

- Solução -

Observe neste exemplo que, além de uma função quociente (divisão), temos também uma raiz quadrada no denominador. Neste caso temos que considerar dois casos: ***divisão e raiz quadrada***.

➔ $\dfrac{2x}{\sqrt{x-6}}$ só é possível em R se

- $x - 6 \geq 0$ (pois está dentro de uma raiz e não pode ser negativo) e
- $x - 6 \neq 0$ (pois está no denominador e não pode ser zero).

A princípio teríamos que analisar estes dois casos pra calcular o domínio de $f(x)$. Mas podemos resumi-los em apenas um.

Observe que o primeiro caso diz que **zero é possível** $(\geq)$ e o segundo caso diz que **zero não é possível** $(\neq)$**.** Se excluirmos o igual do primeiro caso teríamos então (>) e assim excluiríamos o zero, e o segundo caso continuaria da mesma forma. Agora os dois casos estão em total acordo. Assim, basta estudar o seguinte caso:

$x - 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 6$

Logo, D = $\{ x \in IR \ / \ x > 6 \}$.

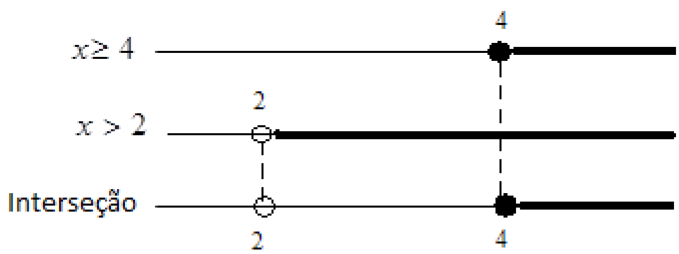
(e) $f(x) = \sqrt{x-4} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

- Solução -

➔ $\sqrt{x-4}$ só é possível em R se $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$.

➔ $\sqrt{x-2}$ só é possível em R se $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

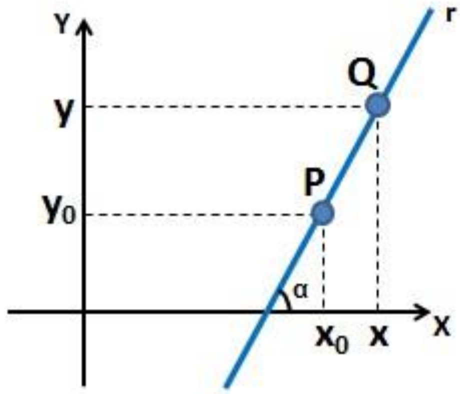
Para determinar o domínio, temos que fazer a interseção das duas soluções acima, já que os valores possíveis de ***x*** têm que atender os dois casos ao mesmo tempo. Fazendo a interseção, teremos:



Logo, D = $\{ x \in R \ / \ x \geq 4 \}$.

AULA 06 | FORMA ANALÍTICA DA RETA

Podemos determinar a equação fundamental de uma reta utilizando o ângulo **α** (alfa) formado pela reta com o eixo das abscissas (x) e as coordenadas de um ponto pertencente à reta. O coeficiente angular da reta, associado à coordenada do ponto, facilita a representação da equação da reta.



Considerando uma reta r passando pelos pontos $P(x_0, y_0)$ e Q(x, y). Com dois pontos pertencentes a reta r, um real e outro genérico, podemos calcular o seu coeficiente angular **m** pela tangente do ângulo **α.**

$$m = tg(\alpha) = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

Exemplo – Calcule a equação da reta que passa pelos pontos P(2, 7) e Q(-1, -5).

-Solução-

Primeiro devemos calcular o coeficiente angular m.

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{-5 - 7}{-1 - 2} = \frac{-12}{-3} = 4$$

Substituindo na equação da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, juntamente com um dos pontos dados, temos:

$$y - 7 = 4(x - 2) \ \Rightarrow \ y - 7 = 4x - 8 \ \Rightarrow \ y = 4x - 8 + 7 \ \Rightarrow y = 4x - 1$$

Logo, a equação da reta que passa pelos pontos P e Q, e tem coeficiente angular 4 é y = 4x – 1.

OBSERVAÇÕES

1. O ponto escolhido para substitui na equação foi o ponto P, mas se tivéssemos escolhido o ponto Q, o resultado seria o mesmo, como tem que ser.

$$y - (-5) = 4(x - (-1)) \ \Rightarrow \ y + 5 = 4(x + 1) \ \Rightarrow \ y + 5 = 4x + 4 \ \Rightarrow y = 4x + 4 - 5 \Rightarrow y = 4x - 1$$

2. Caso queira saber se a sua resposta está correta, basta substituir o valor de x de cada ponto na equação encontrada. O resultado tem que ser o valor da coordenada y.

- P(2, 7) → y = 4.2 – 1 = 7
- Q(-1, -5) → y = 4.(-1) – 1 = -5

TIPOS DE FUNÇÕES

Na matemática temos diversos tipos de funções. As mais conhecidas são

1. Função constante
2. Função Polinomial do 1º grau ou Função Afim
3. Função linear
4. Função Polinomial do 2º grau ou Função Quadrática
5. Função modular
6. Função exponencial
7. Função logarítmica
8. Função trigonométrica
9. Função raiz

entre outras. Vamos estudar apenas algumas delas. Vamos estuda-las já acompanhadas de seus gráficos.

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

O gráfico é uma das formas mais comuns de se representar uma função. Dados dois conjuntos não vazios A e B contidos nos números reais, o gráfico de uma função $f: A \to B$ é um subconjunto do ***plano cartesiano*** dado pelos pontos (x, y) nos quais se tem $x \in A$, domínio da função, e $y = f(x) \in$ B, imagem de f.

1. FUNÇÃO CONSTANTE

É toda função do tipo ***f(x)* = c**, que associa qualquer número real *x* a um número real constante c.

Exemplo:

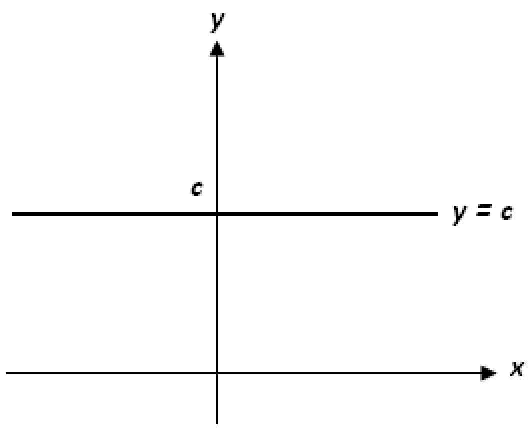
(a) f(x) = 5 (b) f(x) = $\sqrt{2}$ (c) f(x) = -10 (d) f(x) = 0

Domínio e imagem da função constante

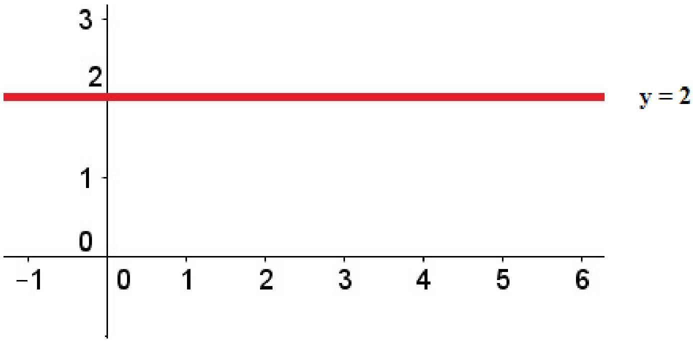
- O domínio de uma função constante é D(f) = IR (conjunto dos números reais, ou seja, qualquer número).
- O conjunto imagem é o conjunto unitário Im(f)= {c}.

Gráfico de uma função constante

A representação gráfica será sempre uma reta paralela ao eixo x, passando por y = c.



Exemplo - Função Constante **f(x) = 2.**



Podemos observar que, para qualquer valor de x, o valor de y = f(x) é sempre o mesmo. Por isso o nome função constante.

$$\begin{array}{l} f(1)=2 \\ f(2)=2 \\ f(0)=2 \\ f(-1)=2 \\ \vdots \end{array}$$

2. FUNÇÃO DO 1º GRAU OU FUNÇÃO AFIM

Uma função é chamada de função do 1º grau (ou função afim) se sua sentença for dada por

$f(x)=ax+b$, sendo $\boldsymbol{a}$ e **b** constantes reais com $\boldsymbol{a \neq 0}$,

onde:

- **x** é a variável independente.
- **y** = f(x) é a variável que dependente de ***x***.

Além disso,

- A constante ***a*** é chamada de **coeficiente angular** e representa a variação de y correspondente a um aumento do valor de x;
- A constante **b** é chamada de **coeficiente linear** e representa, no gráfico, o ponto de intersecção da reta com o eixo y;

Exemplos

(a) $f(x) = 5x - 2 \quad \Rightarrow \quad a=5 \ e \ b=-2$

(b) $f(x) = x + 7 \quad \Rightarrow \quad a=1 \ e \ b=7$

(c) $f(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad a=3 \ e \ b=0$

RAIZ DE UMA FUNÇÃO

Dizemos que α (alfa) é uma raiz de uma função se, e somente se, $f(\alpha)=0$.

Exemplo

(a) $\alpha = 2$ é raiz da função $f(x) = 3x - 6$, pois $f(2) = 3.2 - 6 = 6 - 6 = 0$

COMO CALCULAR A RAIZ DE UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU

A raiz da função do 1.º grau $f(x) = ax + b$ é o valor de x para o qual f(x) = 0, ou seja,

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Logo, a raiz de uma função do 1º grau é calculara por:

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

Exemplo – Determine a raiz da função $f(x) = 5x - 10$.

Como f(x) = ax + b, temos: a = 5 e b = -10. Assim, $x = -\frac{b}{a} = -\frac{(-10)}{5} = -(-2) = 2$

Logo, a raiz de f(x) é x = 2, pois f(2) = 0

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU

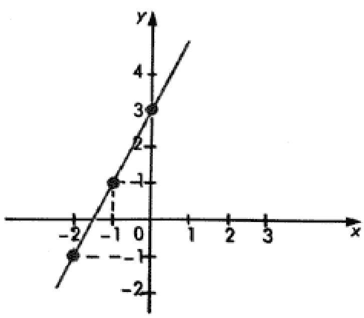
O gráfico de uma função polinomial do 1.º grau é uma reta não-paralela nem ao eixo x nem ao eixo y. Seu domínio é D(f) = IR (reais) e sua imagem é Im(f) = IR.

- O gráfico corta o eixo x na sua raiz e
- Corta o eixo y em b.

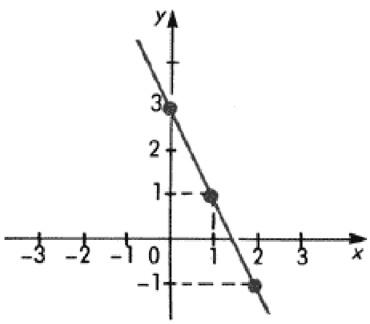
Exemplo - Construir o gráfico da função y = 2x + 3 ($a = 2 > 0$)

Sabendo que o gráfico da função y = 2x + 3 é do 1.º grau, precisamos somente conhecer dois de seus pontos para traçá-lo. Esses dois pontos podem ser obtidos atribuindo-se dois valores arbitrários para *x* e determinando suas imagens (y).

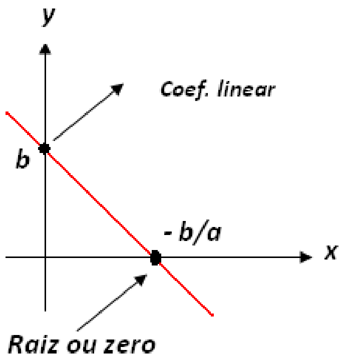
x	y = f(x)
Se x = 0	y = 3
Se x = – 2	y = -1
Se x = – 1	y = 1



Exemplo: Construir o gráfico da função f (x) = – 2x + 3 ($a = -2 < 0$)



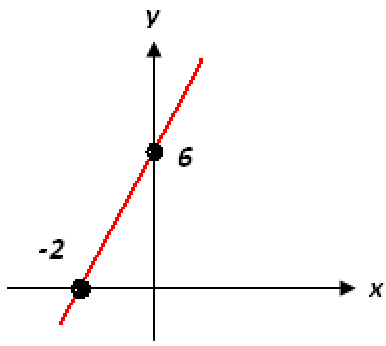
A reta corta o eixo *x* na raiz de sua função. A constante **b** é o ponto de intersecção da reta com o eixo y.



Determinar a raiz e fazer a representação gráfica das funções:

(a) $f(x) = 3x + 6$

Resolução: $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$ (raiz)



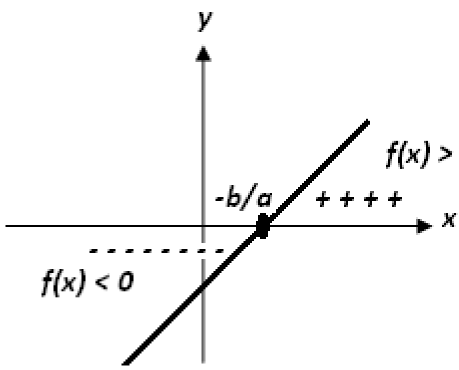
ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO DO 1º GRAU

Estudar o sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem **negativa** e os intervalos nos quais a função tem imagem **positiva**.

1º CASO: a > 0

- **Função crescente -** Se os valores de x crescem então os valores de y = *f(x)* também crescem.

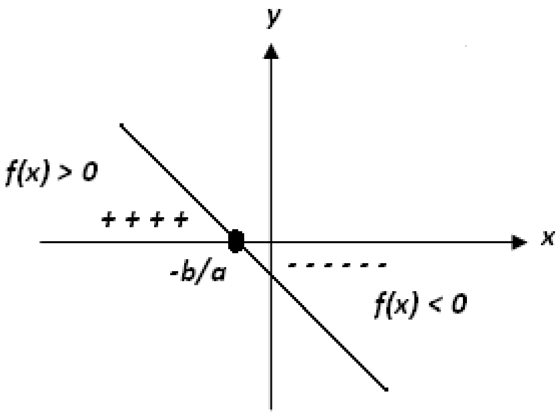
A função f(x) é sempre positiva para valores de x acima da raiz –b/a e negativa para valores abaixo da raiz.



2º CASO? a < 0

- **Função decrescente -** Se os valores de x crescem então os valores de y = *f(x)* decrescem.

A função *f(x)* é sempre negativa para valores de x acima da raiz –b/a e positiva para valores abaixo da raiz.

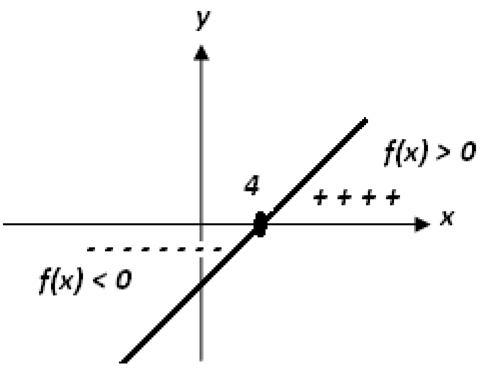


Exemplo: Estudar o sinal das funções:

(a) y = x - 4

Resolução: x - 4 = 0 $\Rightarrow$ x = 4 (Raiz)

Como a = 1 > 0, a função é crescente, logo:



Observe que se tomarmos valores acima da raiz 4, os valores de *f(x)* são sempre positivos.

- considere x = 5 (por exemplo)

  f(5) = 5 – 4 = 1 (positivo)

E para valores abaixo da raiz 4, *f(x)* tem valores negativos.

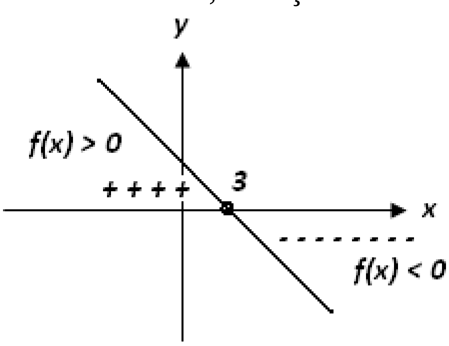
- considere x = 3 (por exemplo)

  f(3) = 3 – 4 = -1 (negativo)

(b) y = -2x + 6

Resolução: -2x + 6 = 0 $\Rightarrow$ -2x = -6 (-1) $\Rightarrow$ 2x = 6 $\Rightarrow$ x = 3

Como a = -2 < 0, a função é decrescente, logo:



Observe que se pegarmos valores acima da raiz 3, os valores de f(x) são sempre <u>negativos</u>.

- considere x = 4 (por exemplo)

  f(3) = -2.4 + 6 = -2 (negativo)

E para valores abaixo da raiz 2, f(x) tem valores <u>positivos</u>.

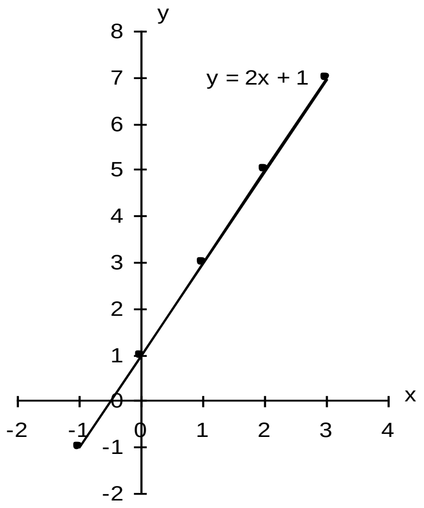
- considere x = 1 (por exemplo)

  f(1) = -2.1 + 6 = 4 (positivo)

A tabela abaixo fornece mais informações a respeito de uma função do 1º grau.

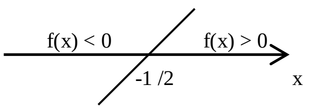
Função do 1º grau: f(x) = ax + b

a > 0 → f(x) = ax + b



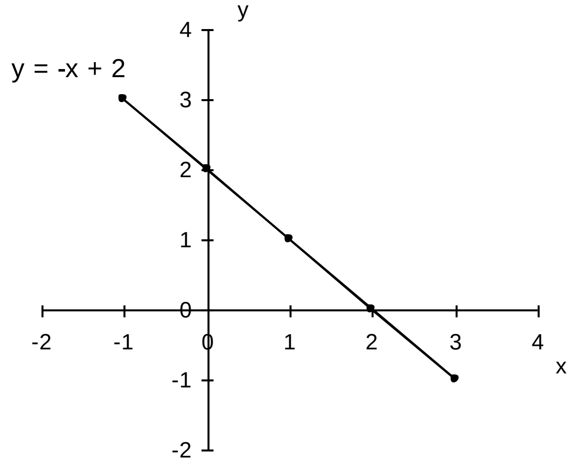
- a = 2
- A função é *crescente*, pois **a** > 0
- b = 1 (o ponto de intersecção da reta com o eixo y)
- <u>Raiz da função</u> é o valor de x para qual a função se anula.

  f(x) = 0 → x = $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$;
- Estudo do sinal:



f(x) < 0 → imagem negativa
f(x) = 0 → imagem nula
f(x) > 0 → imagem positiva

a < 0 → f(x) = - ax + b

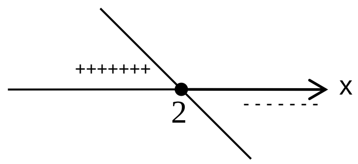


- A função é de*crescente*, pois a < 0;
- Coeficiente angular é **a = -1**;
- Coeficiente linear é **b = 2**;
- Raiz da função é 2, pois –x + 2 = 0

  -x = - 2 x (-1)

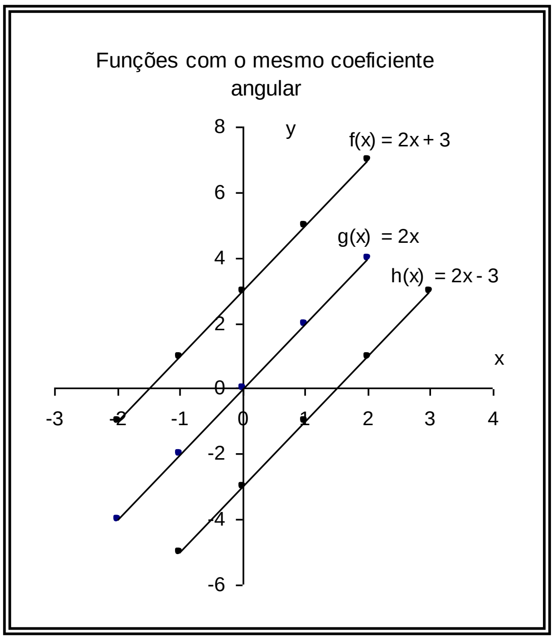
  x = 2

  S = {2}
- Estudo do sinal:



f(x) < 0 $\{x \in IR \mid x > 2\}$
f(x) = 0 $\{x \in IR \mid x = 2\}$
f(x) > 0 $\{x \in IR \mid x < 2\}$

- **OUTROS EXEMPLOS DE FUNÇÕES DO 1º GRAU E SEUS GRÁFICOS**



Podemos perceber que as funções f, g e h possuem o mesmo coeficiente angular:

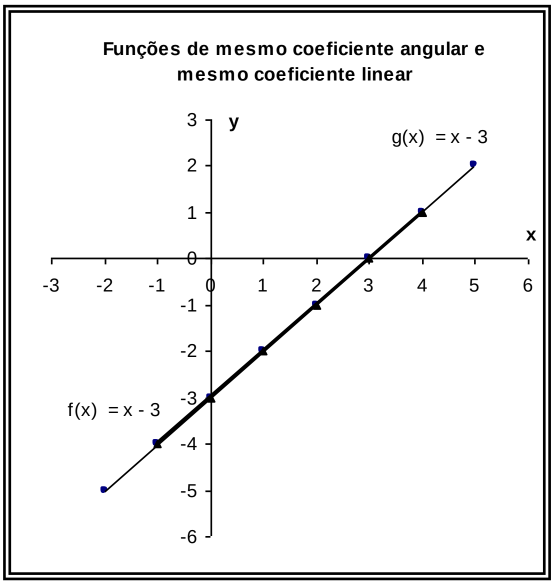
$f(x) = 2x + 3 \quad \rightarrow \quad a = 2$
$g(x) = 2x \quad \rightarrow \quad a = 2$
$h(x) = 2x - 3 \quad \rightarrow \quad a = 2$

Então, as funções têm como gráficos, retas paralelas.

Definição:

Se f: IR → IR é tal que f(x) = ax + b e g: IR → IR é tal que g(x) = a’x + b’, segue

a = a’ e b ≠ b’ ⇔ as retas serão **paralelas.**



Podemos perceber que as funções f e g possuem o mesmo coeficiente angular e mesmo coeficiente linear:

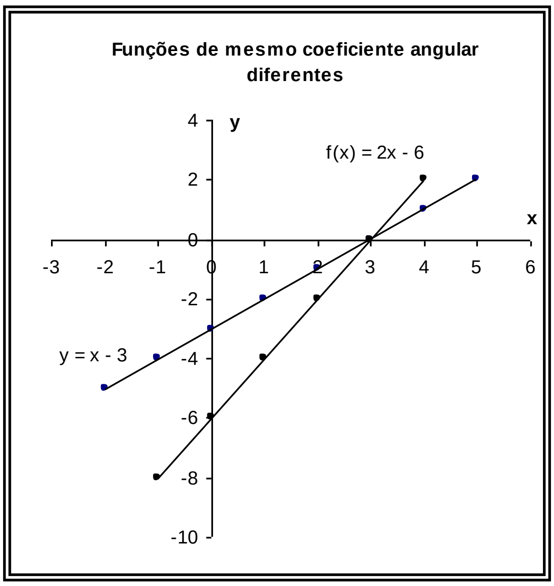
$f(x) = x - 3 \quad \rightarrow \quad a = 1$ e $b = 3$
$g(x) = x - 3 \quad \rightarrow \quad a = 1$ e $b = 3$

Então, as funções têm como gráfico, retas coincidentes.

Definição:

Se f: IR → IR é tal que f(x) = ax + b e g: IR → IR é tal que g(x) = a’x + b’, segue

a = a’ e b = b’ ⇔ as retas serão **coincidentes.**



Podemos perceber que as funções f e g possuem o coeficiente angular diferente:

$f(x) = 2x - 6 \quad \rightarrow \quad a = 2$
$g(x) = x - 3 \quad \rightarrow \quad a = 1$

Então, as funções têm como gráficos, retas concorrentes, ou seja, possuem um só ponto em comum P(3, 0).

Definição:

Se f: IR → IR é tal que f(x) = ax + b e g: IR → IR é tal que g(x) = a’x + b’, segue

a ≠ a’ ⇔ as retas serão **concorrentes.**

Uma função linear é um caso particular de uma função do 1º grau. A diferença é que na função linear, o coeficiente linear é zero (b = 0). Portanto, uma função é chamada de função linear se sua sentença for dada por

$f(x) = ax$, sendo $\boldsymbol{a}$ constante real com $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$.

Exemplos

(a) $f(x) = 5x \quad \Rightarrow \quad a = 5$

(b) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad a = 1$

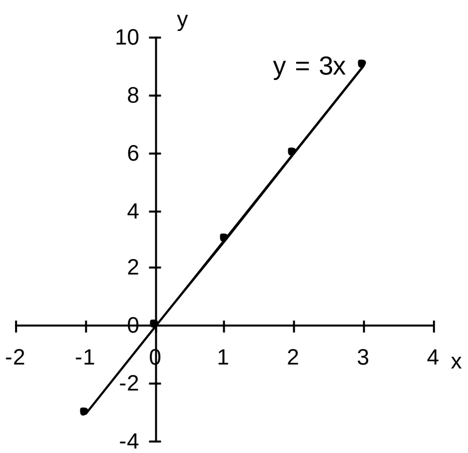
(c) $f(x) = 3x \quad \Rightarrow \quad a = 3$

Isso quer dizer, que o gráfico de uma função linear é sempre uma reta que passa pela origem.

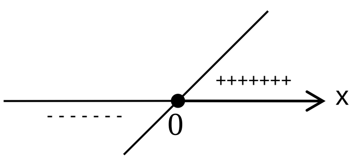
Exemplos:

Função Linear: f(x) = ax

a > 0

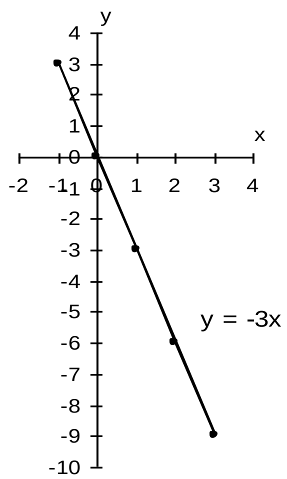


- A função é crescente, pois a > 0;
- Coeficiente angular é **a = 3**;
- Coeficiente linear é **b = 0** (neste caso);
- Zero da função é 0;
- Estudo do sinal:

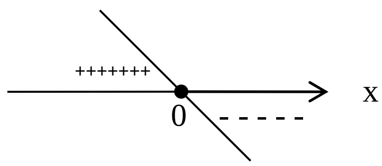


f(x) < 0 {x ∈ IR | x < 0}
f(x) = 0 {x ∈ IR | x = 0}
f(x) > 0 {x ∈ IR | x > 0}

a < 0



- A função é decrescente, pois a < 0;
- Coeficiente angular é **a = - 3;**
- Coeficiente linear é **b = 0**;
- Zero da função é 0;
- Estudo do sinal:



f(x) < 0 {x ∈ IR | x > 0}
f(x) = 0 {x ∈ IR | x = 0}
f(x) > 0 {x ∈ IR | x < 0}

4- FUNÇÃO DO 2º GRAU

Uma função f: IR → IR chama-se quadrática quando existem números reais **a, b** e **c,** com **a** $\neq$ **0**, tais que

$f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo x $\in$ IR.

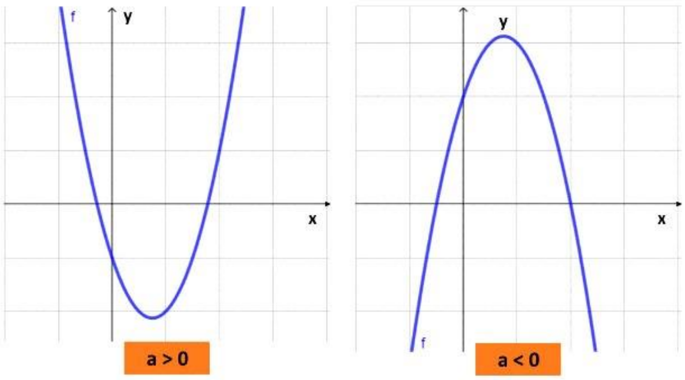
Além disso,

- A constante ***a*** é chamada de **coeficiente angular** .
- A constante **c** é chamada de **coeficiente linear** e representa, no gráfico, o ponto de intersecção da reta com o eixo y;

Exemplo A função $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ é de grau 2, pois é a maior potência de x. Além disso, a = 2, b = 3 e c = 5

O gráfico da função quadrática é uma parábola, cuja **concavidade** é determinada de acordo com o sinal de ***a***:

- Se a > 0, a concavidade da parábola estará voltada para cima.
- Se a < 0, a concavidade da parábola estará voltada para baixo.



RAÍZES DE UMA FNÇÃO DO 2º GRAU

As raízes da função do 2º grau representam aos valores de x tais que f(x) = 0. As raízes da função são determinadas pela resolução da equação de segundo grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Para resolver a equação do 2º grau podemos utilizar vários métodos, sendo um dos mais utilizados é aplicando a Fórmula de Bhaskara, ou seja:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \ onde \ \Delta = b^2 - 4ac \ \ (Delta)}$$

Exemplo - Encontre os zeros da função $\mathbf{f(x) = x^2 - 5x + 6}$**.**

-Solução-

Sendo a = 1, b = – 5 e c = 6 e substituindo esses valores na fórmula de delta, temos:

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6 = 1$

$\Delta = 1$

Substituindo na Fórmula de Baskhara.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad e \quad x'' = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, as raízes são 2 e 3.

NÚMERO DE RAÍZES DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Observe que a quantidade de raízes de uma função quadrática vai depender do valor obtido pela expressão:

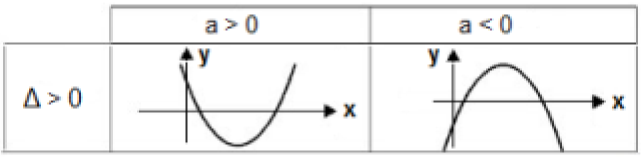
$\mathbf{\Delta = b^2 - 4.ac}$, o qual é chamado de discriminante.

Assim,

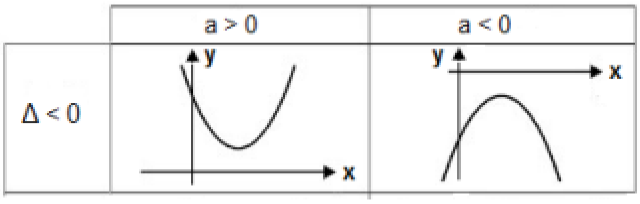
- Se **Δ > 0**, a função terá duas raízes reais e distintas ($x' \neq x''$);
- Se **Δ < 0 ,** a função não terá uma raiz real;
- Se **Δ = 0**, a função terá duas raízes reais e iguais ($x' = x''$).

A curva de uma função quadrática ***corta o eixo x nas raízes da função***, em no máximo dois pontos, dependendo do valor do discriminante (**Δ)**. Assim, temos:

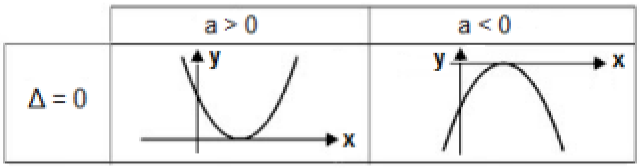
- Se Δ > 0, o gráfico cortará o eixo x em dois pontos, a saber nas suas duas raízes.



- Se Δ < 0, o gráfico não corta o eixo x, pois a função não tem raiz.



- Se Δ = 0, a parábola tocará o eixo x em apenas um ponto, na única raiz.

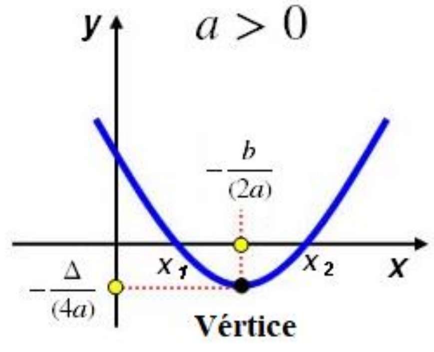


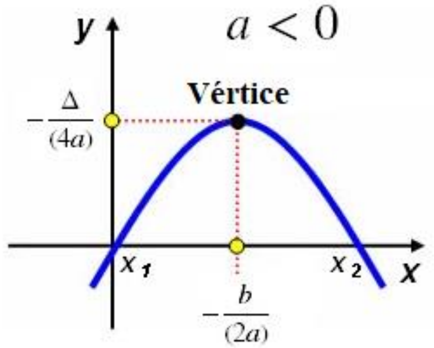
VÉRTICES DE UMA PARÁBOLA

Existe ainda um outro ponto, denotado por (x_v, y_v), chamado de vértice da parábola, que é o valor máximo ou mínimo da função. Este ponto é encontrado usando-se a seguinte fórmula:

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a} \quad e \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

O vértice irá representar o ponto de valor máximo da função quando a parábola estiver voltada para baixo e o valor mínimo quando estiver para cima.

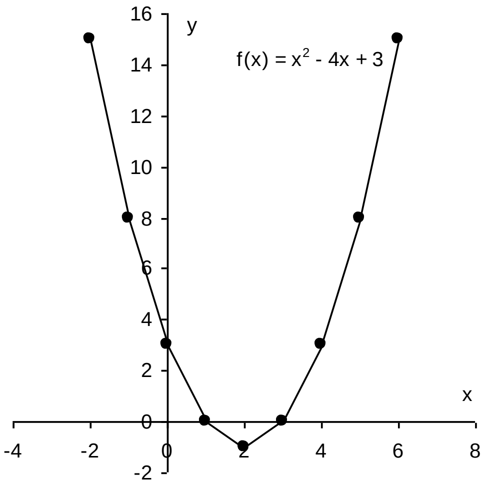


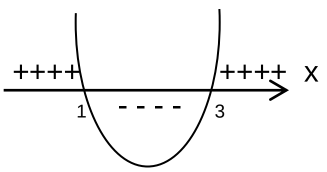


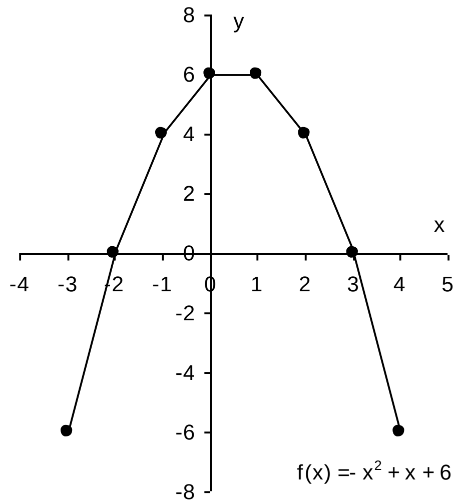
x_1 e x_2 são raízes.

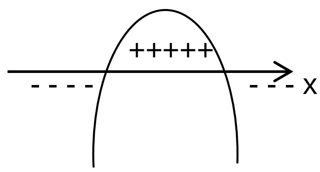
Vejamos alguns exemplos.

Função Completa: f(x) = ax^2 + bx + c

<table>
<tr><th>a > 0 Concavidade para cima</th><th>a < 0 Concavidade para baixo</th></tr>
<tr><td>


- f(x) é uma curva chamada parábola;
- Coeficiente angular é a = 1;
- Coeficiente linear é c = 3;
- Zero da função: x' = 1 e x'' = 3
- Fórmula de Bhaskara:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a};\ \Delta = b^2 - 4.a.c$$
- D(f) = IR
- Im(f) = {y ∊ IR | y ≥ -1}
- Vértice V(x$_v$, y$_v$): $x_v = \frac{-b}{2a}$ = 2
$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ = -1
- Valor Mínimo da função: y$_v$ = -1
- Estudo do sinal:


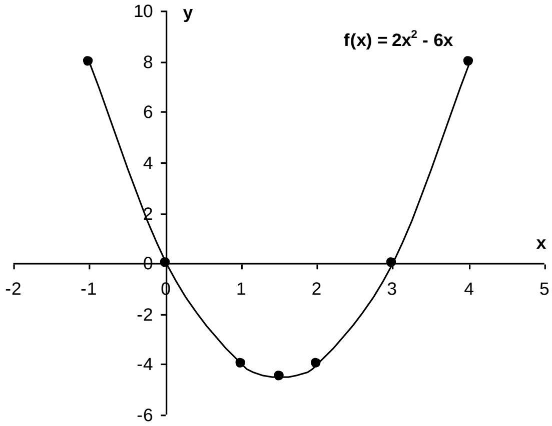
f(x) < 0 : 1 < x < 3}
f(x) = 0 : {1, 3}
f(x) > 0 : x < 1 ou x > 3
</td><td>


- f(x) é uma curva chamada parábola;
- Coeficiente angular é a = ___;
- Coeficiente linear é c = _____;
- Zero da função: x' = ___ e x'' = ___;
- Fórmula de Bhaskara:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a};\ \Delta = b^2 - 4.a.c$$
- D(f) = _______
- Im(f) = ______________________________
- Vértice: V(x$_v$, y$_v$): $x_v = \frac{-b}{2a}$ = _____
$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ = ______
- Valor Máximo da função: y$_v$ = ___;
- Estudo do sinal:


f(x) < 0
f(x) = 0
f(x) > 0
</td></tr>
</table>

Função Incompleta: $f(x) = ax^2 + bx$

a > 0 Concavidade para cima



- f(x) é uma curva chamada **parábola**;

- *Coeficiente angular* é **a** = 2

- *Coeficiente linear* é **c** = 0

- *Zero da função:* **x’** = 0 e **x’’** = 3

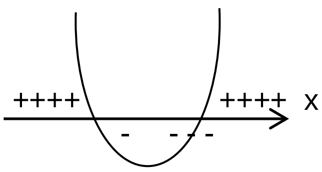
- Vértice $V(x_v,y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a}$ =

$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ =

- D(f) = IR
- Im(f) = _______________

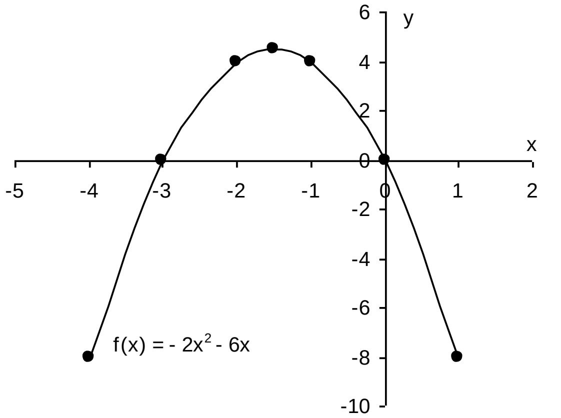
- *Valor Mínimo* da função: y_v;

- *Estudo do sinal*:



f(x) < 0
f(x) = 0
f(x) > 0

a < 0 Concavidade para baixo



- f(x) é uma curva chamada **parábola**;

- *Coeficiente angular* é **a** = - 2

- *Coeficiente linear* é **c** = 0

- *Zero da função*: **x’** = - 3 e **x’’** = 0

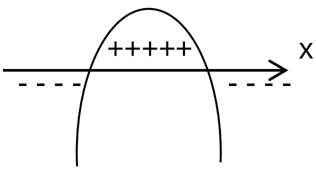
- Vértice $V(x_v,y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a}$ =

$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ =

- D(f) = IR
- Im(f) = _______________

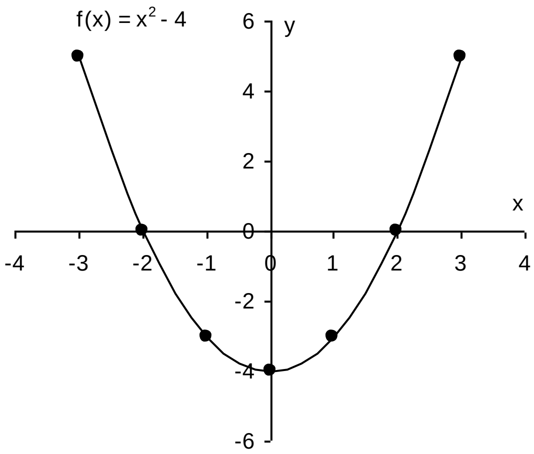
- *Valor Máximo* da função: y_v;

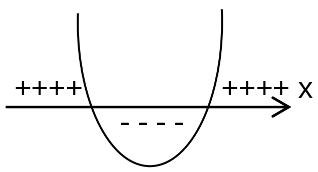
- *Estudo do sinal*:

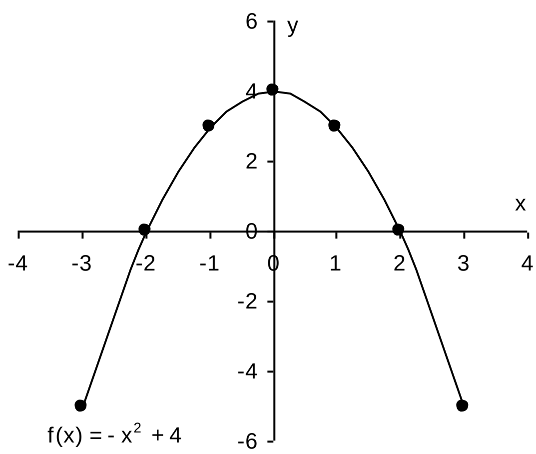


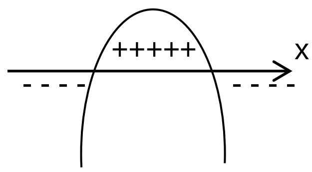
f(x) < 0
f(x) = 0
f(x) > 0

Função Incompleta: $f(x) = ax^2 + c$

<table>
<tr><th>a > 0 Concavidade para cima</th><th>a < 0 Concavidade para baixo</th></tr>
<tr><td>


- f(x) é uma curva chamada parábola;
- Coeficiente angular é a = 1
- Coeficiente linear é c = - 4
- Zero da função: x’ = - 2 e x’’ = 2
- Vértice V(x_v,y_v): $x_v = \frac{-b}{2a}$ = 0
$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ = - 4
- D(f) = IR
- Im(f) = _______________
- Valor Mínimo da função: y_v;
- Estudo do sinal:


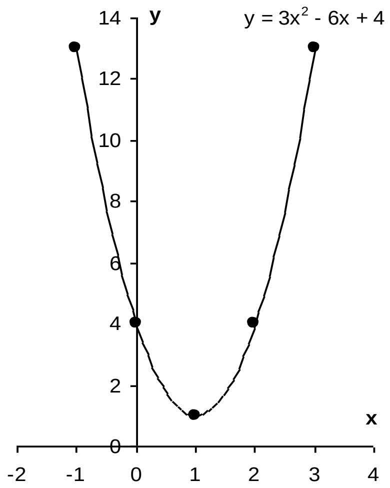
f(x) < 0
f(x) = 0
f(x) > 0
</td><td>


- f(x) é uma curva chamada parábola;
- Coeficiente angular é a = -1
- Coeficiente linear é c = 4
- Zero da função: x’ = - 2 e x’’ = 2
- Vértice V(x_v,y_v): $x_v = \frac{-b}{2a}$ =
$y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ =
- D(f) = IR
- Im(f) = _______________
- Valor Máximo da função: y_v;
- Estudo do sinal:


f(x) < 0
f(x) = 0
f(x) > 0
</td></tr>
</table>

$f(x) = ax^2 + bx + c$ com $\Delta < 0$

a > 0 Concavidade para cima



- f(x) é uma curva chamada **parábola**;

- *Coeficiente angular* é **a** = 3;

- *Coeficiente linear* é **c** = 4;

- *Zero da função:* **Não possui $\in$ IR.**

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$
$$\Delta = 36 - 48$$
$$\Delta = -12$$

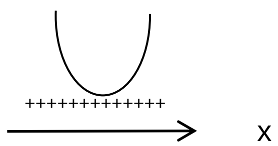
- D(f) = IR
- Im(f) = $\{y \in IR \mid y \geq 1\}$

- Vértice $V(x_v, y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2.3} = \frac{6}{6} = 1$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-12)}{4.3} = \frac{12}{12} = 1$$

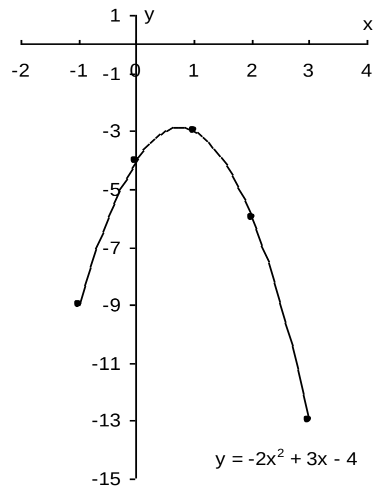
- *Valor Mínimo* da função: $y_v = 1$;

- *Estudo do sinal*:



f(x) < 0 não possui
f(x) = 0 não possui
f(x) > 0 $\{x \in IR\}$

a < 0 Concavidade para baixo



- f(x) é uma curva chamada **parábola**;

- *Coeficiente angular* é **a =** ___ ;

- *Coeficiente linear* é **c =** ___ ;

- *Zero da função*: **Não possui $\in$ IR.**

$$\Delta = (3)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4)$$
$$\Delta = 9 - 32$$
$$\Delta = -23$$

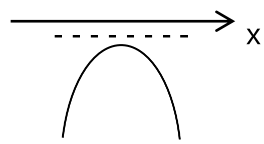
- D(f) = ___
- Im(f) = ____________________

- Vértice: $V(x_v, y_v)$: $x_v = \frac{-b}{2a} =$ ___

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \_\_\_\_$$

- *Valor Máximo* da função: y_v = ___;

- *Estudo do sinal*:



f(x) < 0 $\{x \in IR\}$
f(x) = 0 não possui
f(x) > 0 não possui

EXERCÍCOS

1- Seja a função f : IR → IR, dada por f(x) = $x^2 - 5x + 7$. Determine:

(a) a imagem para x = 4;
(b) o domínio para y = 1.

Resposta: (1) (a) 3 (b) x = 2 ou x = 3 **(2)** a = 1

2- As funções ***f*** e ***g*** são dadas por f(x) = 2x – 3 e g(x) = 3x + ***a***. Determine o valor de **a** sabendo que f(2) + g(2) = 8.

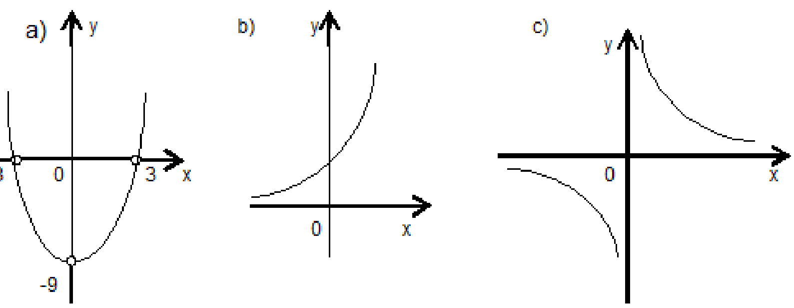
Resposta: a = 1

3- Construa cada função em um sistema de coordenadas cartesianas:

(a) f(x) = $x^2 - 9$ (b) f(x) = 2^x (c) f(x) = $\frac{4}{x}$

Respostas:

(3)



4- Calcule x e y de modo que (5x + 2y, 2x + y) = (12, 5).

Resposta: x = 2 e y = 1

5- Calcule a e b de modo que ($a^2 + 2$, $4b^2 - 1$) = (2, 7).

Resposta: a = 1 e b = $\sqrt{2}$ ou a = 1 e b = $-\sqrt{2}$ ou a = - 2 e b = $\sqrt{2}$ ou a = - 2 e b = $-\sqrt{2}$

6- Sejam as funções definidas por f(x) = 2x + a e g(x) = 5x – b. Calcule o valor de **a** e **b** de modo que se tenha f(3) = 9 e g(1) = 3.

Resposta: a = 3 e b = 2

7- Seja a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$. Calcule:

(a) $f(3)$ (b) $f(-2)$ (c) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ (d) $f(0)$ (e) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ (f) $f(a + h)$

Respostas:

(a) $f(3) = 13$ (b) $f(-2) = 23$ (c) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$ (d) $f(0) = 1$ (e) $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1/3$

(f) $f(a + h) = 3a^2 + 6ah + 3h^2 - 5a - 5h + 1$

8- Dada a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = x - 8$, determine o valor de x para que:

(a) $f(x) = 4$ (b) $f(x) = -4$ (c) $f(x) = 0$ (d) $f(x) = \sqrt{2}$

Respostas:
(a) x = 12 (b) x = 4 (c) x = 8 (d) x = $\sqrt{2}$ + 8

9- Considere as funções definidas por $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = \frac{4}{5}x + a$. Sabendo que

$f(1) - g(1) = \frac{2}{3}$, calcule o valor de a.

Resposta: $a = \frac{38}{15}$

10- Seja a função f de D = {1, 2, 3, 4, 5} em *R* definida por f(x) = (x – 2)(x – 4). Determine o seu conjunto imagem.

11 – (Brasil Escola) Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

Condições dos planos:

- Plano A: cobra um valor fixo mensal de R$ 140,00 e R$ 20,00 por consulta num certo período.
- Plano B: cobra um valor fixo mensal de R$ 110,00 e R$ 25,00 por consulta num certo período.

O gasto total de cada plano é dado em função do número de consultas x dentro do período pré-estabelecido.

Determinar:

(a) A função correspondente a cada plano.
(b) Em qual situação o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois se equivalem.

12- Na produção de um fármaco, um laboratório tem um custo fixo de R$ 25,00 mais um custo variável de R$ 3,50 por unidade produzida. Sendo x o número de fármacos unitários produzidos, determine:

(a) A lei da função que fornece o custo da produção de x fármacos.
(b) Calcule o custo de produção de 450 fármacos.

13- Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = 4x - 5$ **(b)** $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ **(c)** $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+3}}$ **(d)** $f(x) = 3x - 1$

(e) $h(x) = 2x$ **(f)** $g(x) = x^2 - 1$ **(g)** $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ **(h)** $g(x) = \sqrt{-x}$

(i) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$ **(j)** $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x + 1}$ **(m)** $f(x) = \frac{x^2}{x + 5}$

RESPOSTAS

(a) D = R **(b)** $D = \left\{x \in R \mid x \le \frac{1}{2}\right\}$ **(c)** $D = \{x \in R \mid x > -3\}$ **(d) D = R** **(e) D = R**

(f) D = R **(g)** $D = \{x \in R \mid x \le -2\}$ **(h)** $D = \{x \in R \mid x \le 0\}$ **(i)** $D = \{x \in R \mid x \ne 1\}$

(j) $D = \left\{x \in R \mid x \ne -\frac{1}{2}\right\}$ **(m)** $D = \{x \in R \mid x \ne -5\}$

FUNÇÕES DO 1º GRAU

Respostas no fim.

1- Identifique as funções f: IR → IR abaixo em afim, linear ou constante:

a) $f(x) = 5x + 2$
b) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$
c) $f(x) = 7$
d) $f(x) = 3x$
e) $f(x) = -x + 3$
f) $f(x) = \frac{1}{7}x$
g) $f(x) = x$
h) $f(x) = 2 – 4x$

2- Escreva a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que:

(a) $f(1) = 5$ e $f(-3) = - 7$ (b) $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$ (c) $f(1) = 5$ e $f(-2) = - 4$

3- Considere a função f: IR → IR definida por $f(x) = 5x – 3$ determine:

(a) a raiz da função.
(b) o ponto onde a função intersecta o eixo **y**.
(c) faça o estudo do sinal (onde $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $F(x) < 0$).
(d) o gráfico da função.

4- Dadas às funções **f** e **g**, construa o gráfico das funções e descubra o ponto de intersecção dessas retas:

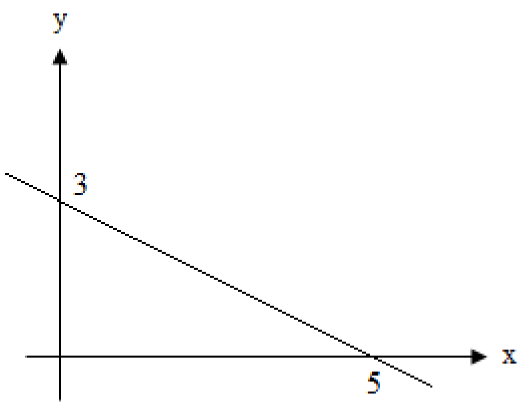
(b) $f(x) = -2x + 5$ e $g(x) = 2x + 5$
(c) $f(x) = 4x$ e $g(x) = -x + 3$

5- Um comerciante teve uma despesa de R$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R$ 5,00, o lucro final **L** será dado em função das **x** unidades vendidas. Responda:

(a) Qual a lei dessa função **f**;
(b) Para que valores de **x** têm $f(x) < 0$? Como podemos interpretar esse caso?
(c) Para que valores de **x** haverá um lucro de R$ 315,00?
(d) Para que valores de **x** o lucro será maior que R$ 280,00?

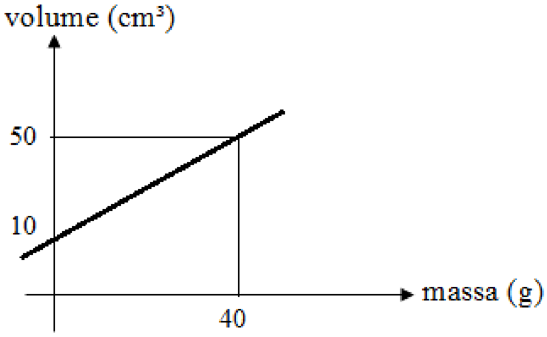
6- Dada a função $y = f(x) = ax + b$ cujo gráfico é apresentado abaixo,

(a) obter a sua lei de formação.
(b) Se x = 3, então quanto vale f(3)?
(c) Se f(x) = 2, então quanto vale x?

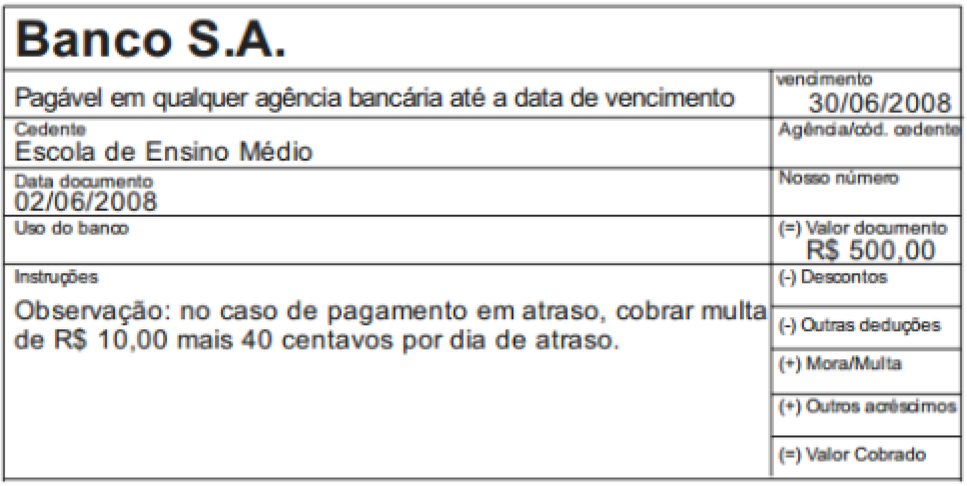


7- (Vunesp – SP) Apresentamos o volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa. Baseado nos dados do gráfico, determine:

- **(a)** a lei da função apresentada no gráfico;
- **(b)** qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool?



8- (ENEM-2008) A figura a seguir representa o boleto de cobrança da mensalidade de uma escola, referente ao mês de junho de 2008.



Banco S.A.

Pagável em qualquer agência bancária até a data de vencimento	vencimento 30/06/2008
Cedente Escola de Ensino Médio	Agência/cód. cedente
Data documento 02/06/2008	Nosso número
Uso do banco	(=) Valor documento R$ 500,00
Instruções Observação: no caso de pagamento em atraso, cobrar multa de R$ 10,00 mais 40 centavos por dia de atraso.	(-) Descontos
	(-) Outras deduções
	(+) Mora/Multa
	(+) Outros acréscimos
	(=) Valor Cobrado

Se M(x) é o valor, em reais, da mensalidade a ser paga, em que x é o número de dias em atraso, então:

- **(a)** $M(x) = 500 + 0{,}4x$
- **(b)** $M(x) = 500 + 10x$
- **(c)** $M(x) = 510 + 0{,}4x$
- **(d)** $M(x) = 510 + 40x$
- **(e)** $M(x) = 500 + 10{,}4x$

9- A academia “Fique em Forma” cobra uma taxa de inscrição de R$ 80,00 e uma mensalidade de R$ 50,00. A academia “Corpo e Saúde” cobra uma taxa de inscrição de R$ 60,00 e uma mensalidade de R$ 55,00.

- **(a)** Determine as expressões algébricas das funções que representam os gastos acumulados em relação aos meses de aulas, em cada academia.
- **(b)** Qual academia oferece menor custo para uma pessoa que pretende “malhar” durante 1 ano? Justifique, explicitando seu raciocínio.

10- (UFLAVRAS – 2000 alterada) Em relação a função $f(x) = 3x + 2$, assinale a alternativa INCORRETA:

- **(a)** $f(4)-f(2) = 6$.
- **(b)** O gráfico da f(x) é uma reta.
- **(c)** O gráfico de f(x) corta o eixo y no ponto (0,2).
- **(d)** f(x) é uma função crescente.
- **(e)** A raiz da função é -3/2

RESPOSTAS

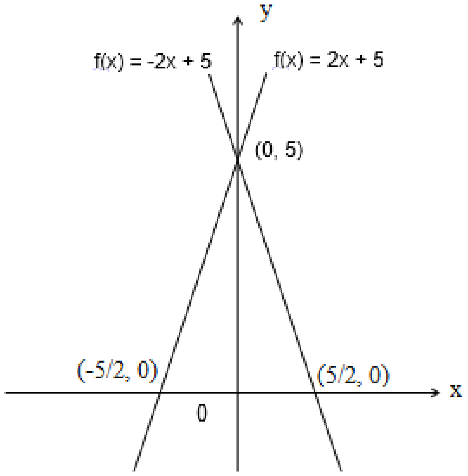
(1) (a) afim (b) afim (c) constante (d) linear (e) afim (f) linear (g) identidade (h) afim.

(2) (a) $f(x) = 3x + 2$ (b) $f(x) = - 2x + 5$ (c) $f(x) = 3x + 2$

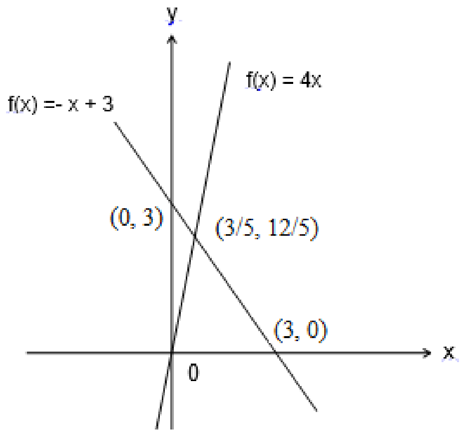
(3) (a) $x = 3/5$ **(b)** $b = - 3$ **(c)** $\left(\frac{3}{5}, \infty\right)$, $x = \frac{3}{5}$, $\left(- \infty, \frac{3}{5}\right)$

(4)

(a) Potno de interseção: (0, 5)



(b) Ponto de interseção: (3/5, 12/5)



5- (a) $f(x) = 5x - 230$ (b) para $x < 46$ (c) para $x = 109$ (d) para $x > 102$

6- (a) $f(x) = -\frac{3}{5}x + 3$ (b) $f(3) = -6/5$ (c) $x = 5/3$

7- (a) $f(x) = x + 10$ (b) x = 20 g **8-** (c) $M(x) = 510 + 0{,}4x$ **10-** Letra (e)

FUNÇÃO DO 2º GRAU

Respostas no fim.

1- Seja a função f: IR → IR, dada por $f(x) = 5x^2 + 10x - 15$. Determine:

(a) a imagem para $x = - 4$.
(b) o domínio para $y = 0$.
(c) $f(x) = 25$.
(d) $f(-3)$.

2- Dada a função $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, determine:

a) $f(1)$ b) $f(-2)$ c) x de modo que $f(x) = 1$ d) x de modo que $f(x) = -1$

3- Considere a função f: IR → IR, dada por $f(x) = - 2x^2 - 6x - 4$, determine:

(a) as raízes da função;
(b) o coeficiente linear;
(c) verifique a concavidade da função;
(d) o vértice da função ou vértice da parábola;
(e) faça um esboço do gráfico;

4- O Lucro mensal de uma empresa é dado por $L(x) = -x^2 + 10x - 16$, em que x é a quantidade vendida. Responda:

(a) Para que valores de x o lucro é nulo?
(b) Para que valores de x o lucro é positivo?
(c) Para que valores de x o lucro é igual a 9?

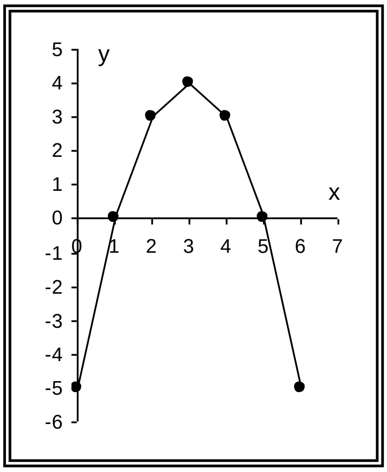
5- Determine o vértice da parábola que representa a função quadrática:

(a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
(b) $f(x) = x^2 - 6x$
(c) $f(x) = x^2 - 4$
(d) $f(x) = -4x^2 + 1$

6- Faça o esboço do gráfico das seguintes funções quadráticas:

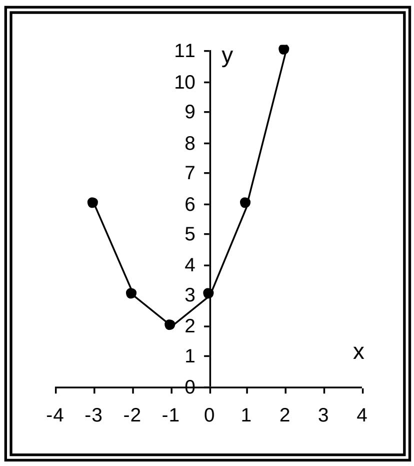
(a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$
(b) $f(x) = 2x^2 - 8$
(c) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$
(d) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

7- Considere f: IR → IR é uma função quadrática cujo gráfico está ao lado. Responda:



(a) Quais são as raízes da função?
(b) Qual é o vértice da parábola?
(c) A função tem valor máximo ou mínimo? Qual é o valor?
(d) Em que ponto a função corta o eixo y?
(e) Em que ponto a função corta o eixo x?

8- Considere f: IR → IR é uma função quadrática cujo gráfico está ao lado. Responda:



(a) Qual é o vértice da parábola?
(b) A função tem valor máximo ou mínimo? Qual é o valor?
(c) Em que ponto a função corta o eixo y?
(d) Em que ponto a função corta o eixo x?
(e) Quais são as raízes reais da função?

9- Considere **f** e **g** são funções de IR em IR definidas por $f(x) = x^2 - 3x + 10$ e $g(x) = x^2 - 5x$. Determine o valor de $r \in$ IR tal que $f(r) = g(r)$.

10- O custo para se produzir x unidades de um produto é dado por $C(x) = 2x^2 - 100x + 5000$. Determine o valor do custo mínimo.

11- Uma indústria farmacêutica tem sua produção diária P, em caixas de medicamentos, variando com o número de trabalhadores em serviço n, de acordo com a função P(n) = $n^2 + 50n + 20000$. Calcule:

(a) a produção se o número de trabalhadores for 40.
(b) o número de trabalhadores para produzir 25000 caixas de medicamentos.

12- A temperatura t de uma estufa (em graus Celsius) é determinada, em função da hora h do dia, pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$. Responda:

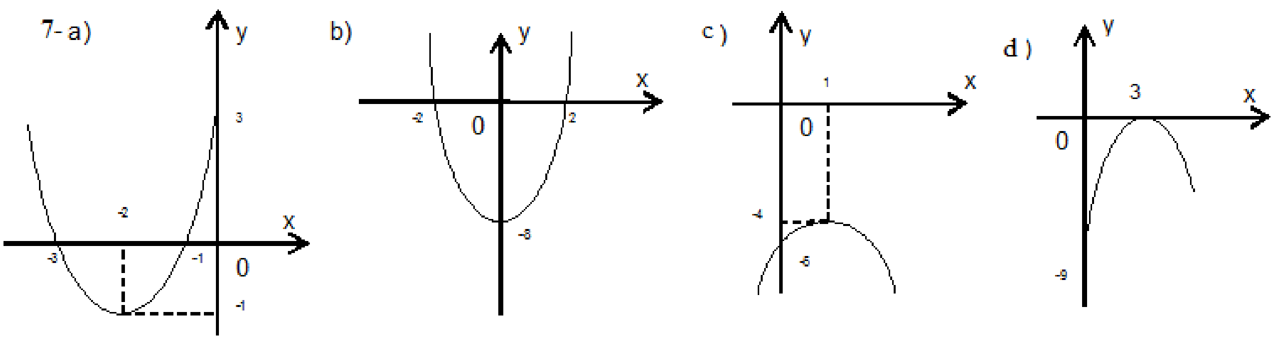
(a) Em quais horários a temperatura é 0 ºC?
(b) Em que período (s) do dia a temperatura é positiva? E negativa?
(c) Em que período (s) do dia a temperatura é crescente? E decrescente?
(d) Em que horário a temperatura é máxima?
(e) Qual é a temperatura máxima?

13- Uma pessoa começa a receber um medicamento através de um soro e a quantidade Q (em mg) do mesmo em sua corrente sanguínea varia de acordo com a função $Q(t) = -t^2 + 6t + 20$, sendo t o tempo em horas desde o início da aplicação do soro.

(a) Após quanto tempo do início da aplicação do soro, a quantidade do medicamento na corrente sanguínea é máxima?
(b) Qual é essa quantidade máxima de medicamento?

RESPOSTAS

1- (a) 25 (b) x\` = 1; x" = -3 (c) x\` = - 4; x" = 2 (d) 0
2- (a) 0; (b) 21; (c) 0 ou 4/3 (d) não existe
3- (a) x\` = -1; x" = -2 **(b)** c = -4 **(c)** Para baixo (d) $x_v = -\frac{3}{2}$ $y_v = \frac{1}{2}$
4- (a) x = 8 ou x = 2 (b) 2 < x < 8 (c) x = 5
5- (a) V(1, -4) (b) V(3, -9) (c) V(0, -4) (d) V(0, 1)



7- (a) x' = 1 e x" = 5 (b) V(3, 4) (d) Máximo = 4 (e) y = – 5 (f) x = 1 e x = 5
8- (a) V(-1,2) (b) Mínimo = 2 (c) y = 3 (d) Não corta (e) não possui raízes reais 3
9- r = - 5 **10-** C_{min} = R$ 3750,00 **11-** (a) 23600 (b) n = 50 trabalhadores

12- (a) 5 horas e 17 horas
(b) Positiva: entre 5 e 17 horas Negativa: Antes das 5 horas e depois das 17 horas
(c) Até 11 horas a temperatura cresce e depois das 11 a temperatura decresce.
(d) 11 horas
(e) 36ºC

13- (a) 3 horas (b) 29 mg