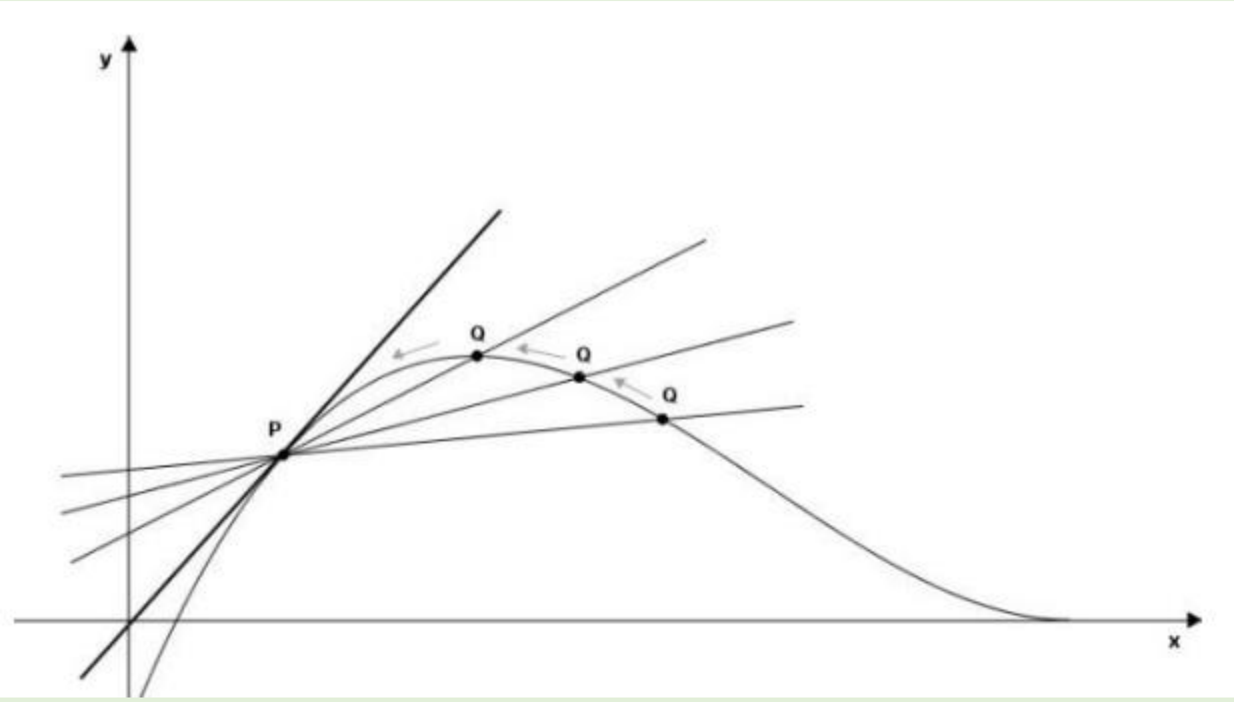
TÓPICOS DE MATEMÁTICA

UIA4 – Trigonometria, Limites e Derivadas



UNIDADE DE INTERAÇÃO E APRENDIZAGEM 4 | UIA 4

TRIGONOMETRIA, LIMITES E DERIVADAS

- Aula 13 | Funções Trigonométricas
- Aula 14 | Funções Trigonométricas
- Aula 15 | Limites
- Aula 16 | Derivadas

AULA 15 | LIMITES

Palavra de uso comum no cotidiano, por exemplo, limite de velocidade, limite de peso de um lutador, limite de uma mola, limite de altura, etc.

A primeira vez que limites foram necessários foi para a resolução dos quatro paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.). No primeiro paradoxo, a Dicotomia, Zenão colocou um objeto se movendo uma distância finita entre dois pontos fixos A e B em uma série infinita de intervalos de tempo (o tempo necessário para se mover metade da distância, em seguida o tempo necessário para se mover metade da distância restante, etc.) durante o qual o movimento deve ocorrer, isto é, o paradoxo da dicotomia, procura interpretar o movimento de um ponto A a um ponto B como uma sequência infinita de movimentos:

- antes de se chegar ao ponto B é preciso chegar ao ponto C tal que $AC = CB$ (figura 1); mas, antes de se chegar a C, é preciso chegar ao ponto D tal que $AD = DC$; e assim por diante, indefinidamente.

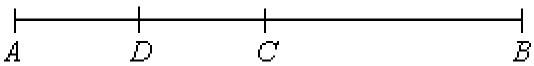


figura 1

A conclusão surpreendente de Zenão foi que o movimento era impossível, pois sequer se iniciará! Aristóteles (384-322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Em matemática, uma aplicação cuidadosa do conceito de limite resolverá as questões levantadas pelos paradoxos de Zenão.

Informalmente, o estudo do limite de uma função visa determinar o que acontece (estudo do comportamento) com os valores da **imagem de uma função** quando, no **domínio dessa função**, tomamos valores em torno de um determinado ponto (número). Ou seja, em limites, não interessa saber o valor exato da função ***f*** para um valor exato de *x*. Interessa saber o que acontece com a função ***f*** quando se está muito próximo de um ponto ***x*** e não exatamente em "cima dele".

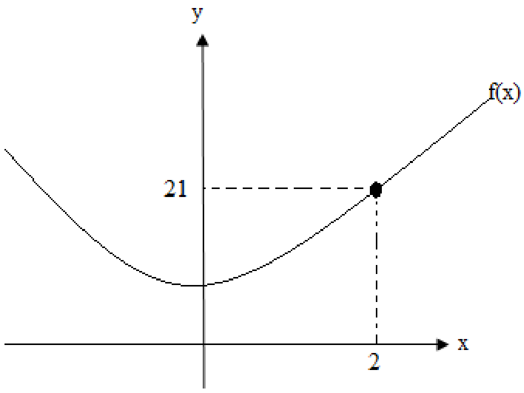
Por exemplo, suponha $f(x) = 5x^2 + 1$. Quando calculamos, por exemplo, f(2) estamos intuitivamente perguntando:

- Se *x* é <u>*exatamente*</u> 2 (ou seja, *x* = 2), f(2) é <u>*exatamente*</u> quanto?

Para responder essa pergunta, calculamos:

$$f(2) = 5(2)^2 + 1 = 5.4 + 1 = 21$$

Ou seja, se *x* é exatamente 2, então a função *f* tem valor exatamente igual a 21.



Já em limites, essa palavra "exatamente" não faz mais parte do estudo de funções. Ela é substituída pela palavra "se aproximando" ou "nas proximidades" ou ainda "se aproxima".

Agora a pergunta que se quer responder é:

- Se x está *se aproximando* 2, f(2) está *se aproximando* de quem?

A resposta desta pergunta será dada mais adiante quando definirmos limites de uma função.

Observe que as palavras "*se aproximando*" remete à uma ideia de movimento, de algo que está em constante mudança. ***E esse é o principal detalhe para se entender o conceito de limites***.

Por exemplo, sabemos que a água ferve a 100º C, ao nível do mar em um recipiente aberto. Observe que aqui podemos dar uma boa ideia de movimento, ou mais adequadamente, uma boa ideia de mudança de temperatura:

- À medida que a temperatura aumenta, ou seja, à medida que a temperatura se aproxima de 100ºC, a água vai esquentando e em algum momento ela vai entrar em ebulição (ferver).

Então, veja que a temperatura não está parada. Ela está em constante mudança de temperatura e o limite dela é 100º C. Isso significa que depois que a água ferve, ela não passará de 100º C e você estará apenas gastando seu gás. Não adianta deixar mais tempo no fogo. De 100º C não passa. É o limite de temperatura.

Exemplo: Suponhamos que uma mola se romperá apenas se lhe for apenso um peso de 10Kg ou mais. Para sabermos quanto a mola se distenderá sem romper, vamos anexando pesos cada vez maiores e medindo o comprimento (s) de cada peso (w).

Informalmente, o estudo do limite de uma função visa determinar o que acontece (estudo do comportamento) com os valores da imagem de uma função quando, no domínio dessa função, tomamos valores em torno de um determinado ponto (número)

Resumindo, o objetivo de se estudar limites é verificar o comportamento de funções nas proximidades de um ponto x e não exatamente no próprio ponto.

COMPORTAMENTO DE UMA FUNÇÃO NAS PROXIMIDADES DE UM PONTO

Considere a função:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

Observe que $f(x)$ existe para todo x, exceto $x = 1$ (não podemos substituir o x por 1, pois vamos obter uma indeterminação do tipo 0/0). Já que não podemos substituir o x por 1, o que estudaremos aqui é o comportamento da função quando x está próximo de 1, porém excluindo o 1. Vamos atribuir valores a x, acima e abaixo de 1, mas bem próximos de 1 e observar o que acontece. Considere as tabelas abaixo.

Tabela 1- Para valores de *x* abaixo de 1, mas nunca igual a 1.

X	*f(x)*
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,999999	1,999999

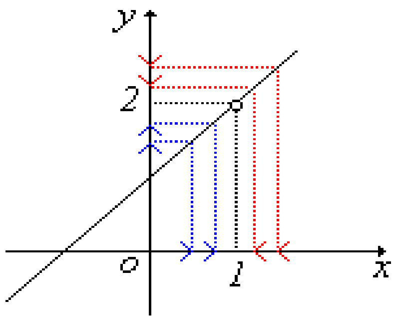
Tabela 2- Para valores de *x* acima de 1, mas nunca igual a 1.

X	*f(x)*
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
1,000001	2,000001

Observem, em ambas as tabelas, que à medida que *x* fica cada vez mais próximo de 1 , *f(x)* torna-se cada vez mais próximo de 2 e quando mais próximo *x* estiver de 1, mais próximo de 2 estará *f(x)*.

Analisando a situação de outra maneira, consideraremos os valores de *f(x)* primeiro, observe que podemos tornar os valores de *f(x)* tão próximos de 2 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos *x* suficientemente próximo de **1**.

- GRÁFICO –



Observe que a linha pontilhada que liga 1 (no eixo x) e 2 (no eixo y) tem em sua interseção (quina) uma bolinha aberta, indicando que x = 1 não faz parte do domínio da função *f*. Ou seja,

- a função *f* não existe se *x* é <u>*exatamente*</u> 1 (x = 1).

Por isso a necessidade de se estudar o comportamento de uma função nas proximidades de um ponto, pois neste exemplo, se *x* é exatamente 1, então f(x) não existe.

Neste caso, dizemos que ***f(x)* fica arbitrariamente próximo de 2 conforme *x* se aproxima de 1** ou, simplesmente, que *f(x)* se aproxima do limite 2 quando *x* se aproxima de 1.

Em notação matemática de limites, escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

A expressão "**arbitrariamente próximo**" é imprecisa. Seu significado depende do contexto. Para um metalúrgico que fabrica um pistão, próximo pode significar alguns milésimos de centímetro. Para um astrônomo que estuda galáxias distantes, próximo pode significar alguns milhares de anos-luz.

DEFINIÇÃO DE LIMITE

Intuitivamente, dizemos que uma função *f(x)* tem limite L (no exemplo acima, L = 2) quando *x* tende para a (ou se aproxima de *a*), se é possível tornar *f(x)* arbitrariamente próximo de L, desde que tomemos valores de *x*, suficientemente próximo de a, mas $x \neq a$. Ou seja,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

EXEMPLO – Calcular o limite do exemplo no início da apostila.

$$\lim_{x \to 2} 5x^2 + 1 = 5.2^2 + 1 = 21$$

Observe que o resultado é o mesmo calculado no início. Para funções cujo o domínio é o conjunto dos números reais, basta substitui o valor de *x* e calcular o resultado, como fazemos em funções.

Exemplo – Calcular o limite abaixo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+2}$$

Observe que 2 faz parte do domínio desta função, ou seja, podemos substitui o valor 2 no lugar do *x* e calcular normalmente, sem nos preocuparmos se vamos chegar numa indeterminação do tipo 0/0 ou numa inexistência do tipo K/0, onde K é um número qualquer diferente de zero. Mais abaixo falaremos destes dois casos.
Calculando o limite, temos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$$ (basta substituir o valor de *x*, desde que o denominador não se iguale a zero)

OBS.:

1- O limite de uma constante é a própria constante

$$\lim_{x \to a} k = k$$

Exemplo: $\lim_{x \to 3} 6 = 6$

2- O limite da variável *x* quando *x* se aproxima de **a** é o próprio **a**

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Exemplo: $\lim_{x \to 2} x = 2$

INDETERMINAÇÕES DO TIPO $\frac{0}{0}$

Para calcular limites utilizando as regras acima, substituímos o valor de **a** na função (quando possível) e obtemos o valor do limite. É como se estivéssemos calculando *f(a)*.

Em alguns casos vamos ter que racionalizar e simplificar a função para que seja possível substituir o valor de **a**.

Exemplo - Calcular o limite.

(a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1}$

Observe que neste exemplo, não podemos substituir $x = 1$, pois estaremos dividindo zero por zero, isto é, $\frac{0}{0}$, o que é indeterminado.

Vejamos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \frac{1^2 - 1}{1-1} = \frac{0}{0}$$, que é um resultado indeterminado.

Neste caso, vamos ter que, de alguma forma, racionalizar e simplificar a função do limite, para que *1* possa ser substituído.

Aqui será importante relembrar algumas propriedades matemáticas das **AULAS 03 e 04**. Busque por produtos notáveis. É uma ferramenta muito utilizada no cálculo de limites.

Voltando ao exercício, observe que:

$$\frac{x^2 - 1}{x-1} = \frac{(x+1).(x-1)}{x-1} = x+1$$

Escrevemos $x^2 - 1$ como $(x – 1).(x + 1)$

OBSERVAÇÃO - Toda função do tipo $f(x) = x^2 + bx + c$ pode ser escrita como $(x - x').(x - x'')$, desde que $\Delta \geq 0$, onde x' e x'' são as raízes de $f(x)$.

Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1).(x-1)}{x-1}$$

Simplificamos o $x – 1$ que está no numerador e denominador, e escrevemos o que sobrou.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1).(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

Logo, $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} = 2$.

Observe que depois da simplificação do x – 1, a indeterminação 0/0 acabou e assim podemos substituir o 1 no lugar do x.

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2}$

Observe que o denominador é zero se x for substituído por 2. Neste caso temos novamente a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Vamos racionalizar e simplificar.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2).(x - 3)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x-3) = 2 – 3 = -1$$

(c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9x + 14}$

Se substituir x por 2, obtemos a indeterminação $\frac{0}{0}$. Vamos racionalizar e simplificar.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9x + 14} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-7)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)}{(x-7)} = \frac{2+3}{2-7} = \frac{5}{-5} = -1$$

(d) $\lim_{h \to 2} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 + h = 2 + 0 = 2$$

(e) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

Neste limite, não temos funções do 2º grau. O método de racionalização será a multiplicação e divisão pelo conjugado.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} \times \frac{(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x + \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1}{(x-1).(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x-1).(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Observe que o denominar permanece sem aplicar a distributividade, pois o objetivo é encontra o termo x – 1 no numerador para eliminar com o x – 1 do denominar.

(f) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 4x + 5}{x - 4}$

Em alguns limites a substituição é direta, não precisando se preocupar com uma indeterminação do tipo 0/0 ou uma inexistência do tipo k/0, onde k é um número qualquer diferente de zero. Neste caso, o valor de x está no domínio de *f*. Este exemplo é um deles.

Vejamos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 4x + 5}{x + 4} = \frac{1^3 + 4.1 + 5}{1 + 4} = \frac{10}{5} = 2$$

Algumas fórmulas que auxiliam as simplificações nos cálculos dos limites.

Produtos notáveis:

1º) Quadrado da soma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2º) Quadrado da diferença: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3º) Produto da soma pela diferença: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

4º) Cubo da soma: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

5º) Cubo da diferença: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Fatorações:

6º) Fator comum: $ax \pm ay = a(x \pm y)$.

7º) Diferença de quadrados: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

8º) Trinômio do 2º grau: $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$, onde x' e x'' são as raízes obtidas pela fórmula de Bháskara $\left(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{onde } \Delta = b^2 - 4ac \right)$.

9º) Soma de cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

10º) Diferença de cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Conjugado de radicais:

11º) Conjugado de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ é $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, pois $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

12º) Conjugado de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ é $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$, pois $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$.

Proposição (unicidade do limite).

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$. Se o limite de uma função num ponto existe, então ele é **único**.

Principais propriedades dos limites.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existem, e k é um número real qualquer, então:

a) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

b) $\lim\limits_{x \to a} k.f(x) = k.\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

c) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \ \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

e) $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

EXERCÍCIOS

(1) $\lim_{x\to 5}(2x+4)$ (2) $\lim_{x\to 2}(10-x^2)$ (3) $\lim_{z\to -3}(2z^3+z^2+5z-2)$

(4) $\lim_{x\to \frac{1}{4}}\frac{2x-3}{6x+1}$ (5) $\lim_{x\to -1}\frac{11x+2}{2x^3-1}$ (6) $\lim_{x\to -3}\frac{9-x^2}{3+x}$ (7) $\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-17x+20}{4x^2-25x+3}$

(8) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{(x-1).(x-3)}$ (9) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ (10) $\lim_{x\to 2}\frac{4x+1}{2x-1}$ (11) $\lim_{x\to 0}\frac{5x-3}{10x+1}$

12) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$ (13) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{2x^2+7x+5}$ (14) $\lim_{t\to 6}8(t-5)(t-7)$

(15) $\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$ (16) $\lim_{y\to 5}\frac{y-5}{y^2-25}$ (17) $\lim_{y\to -5}\frac{-y-5}{y+5}$

(18) $\lim_{x\to -3}\sqrt{\frac{x^2-9}{2x^2+7y+4}}$ (19) $\lim_{x\to \frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x^2-1}$ (20) $\lim_{y\to 2}\frac{-y+2}{y^2-4}$

(21) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ (22) $\lim_{t\to 9}\frac{3-\sqrt{t}}{9-t}$ (23) $\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\sqrt{y+3}-2}$

(24) $\lim_{y\to 0}\frac{3}{\sqrt{3y+1}+1}$ (25) $\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^4+2x^2}$ (26) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2-2x-5}{-x^2+3x+4}\right)^3$

(27) $\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{3x^3-5x^2-x+3}{4x+3}}$

- RESPOSTAS -

(1) 14 (2) 6 (3) -62 (4) -1 (5) 3 (6) 6 (7) 0

(8) 3 (9) 2 (10) 3 (11) -3 (12) -4 (13) 0 (14) -8

(15) 1/5 16) 1/10 (17) -1 (18) 0 (19) 0 (20) -1/4 (21) 2x (22) 1/6

(23) 4 (24) 3/2 (25) 0 (26) 1/8 (27) $\sqrt[3]{\frac{39}{5}}$

AULA 16 | DERIVADAS

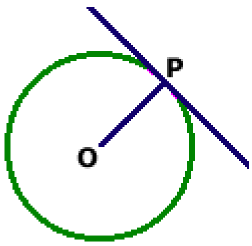
Boa parte do desenvolvimento dos estudos matemáticos veio acompanhado da necessidade do ser humano de conhecer melhor o universo físico do qual ele faz parte. E o estudo de limites e derivadas tiveram uma participação fundamental nessa jornada, quando teve sua aplicação direcionada aos fenômenos físicos como eletricidade, ondas de rádio, som, luz, calor e gravitação, ou ainda na área econômica, como taxas de variação de preço de um produto, taxa de custo de mão de obra, etc

O conceito de derivada está intimamente relacionado à **taxa de variação instantânea de uma função**, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento.

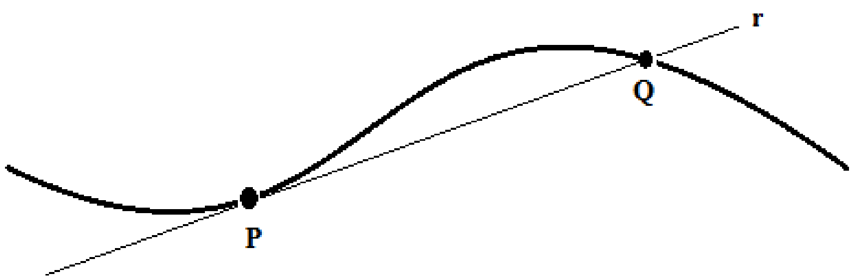
Sendo assim, as derivadas são muito usadas em Engenharia, Ciência, Economia, Medicina, Ciência da Computação, para calcular a velocidade e aceleração, para explicar o funcionamento de máquinas, para explicar a diminuição do nível de água quando ela é bombeada para fora de um tanque, para prever as consequências de erros cometidos durante as medições, entre muitas outras aplicações.

Os principais conceitos sobre derivadas foram introduzidos por Newton e Leibniz, no século XVIII. Tais ideias, já estudadas antes por Fermat, estão fortemente relacionadas com a noção de ***reta tangente a uma curva no plano***.

Muitos dos problemas importantes do Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Uma ideia simples do que significa a reta tangente em um ponto P de uma circunferência, é uma reta que toca a circunferência em exatamente em um ponto P e é perpendicular ao segmento OP, como vemos na figura ao lado.



Mas essa definição não é válida para uma curva em geral, como podemos verificar no gráfico abaixo. A reta r é tangente no ponto P, mas ela também corta a curva no ponto Q. Neste caso, a reta r é chamada ***reta secante*** (reta que passa por dois pontos de uma curva).



Para definir adequadamente reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto P pertencente ao gráfico, começamos por definir a **inclinação da reta tangente no ponto**. Assim, a reta tangente é definida pela sua inclinação e pelo ponto de tangência P. Lembre-se da matemática básica que a inclinação da reta tangente é dada pelo **coeficiente angular** da reta. Ou seja, se $y = ax + b$, então o valor de ***a*** é coeficiente angular da reta. Mede o grau de inclinação da reta y.

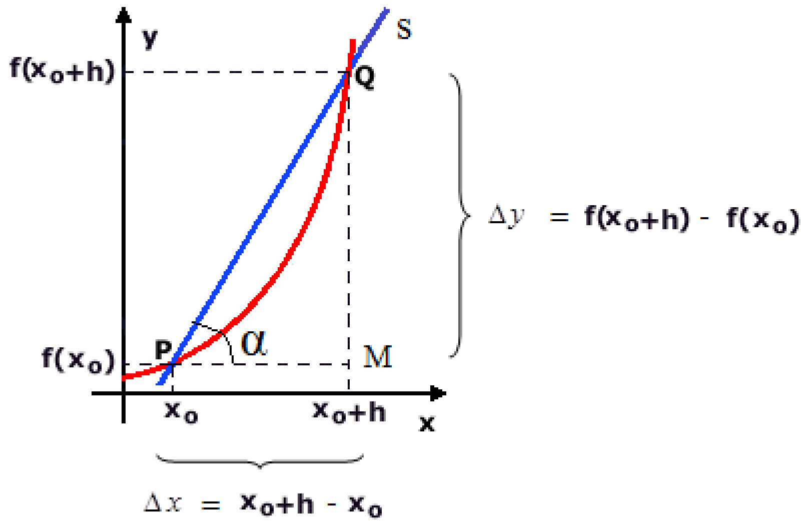
A DERIVADA DO PONTO DE VISTA GOMÉTRICO

1. RETA TANGENTE

A derivada de uma função *f* em um ponto a fornece o ***coeficiente angular*** (grau de inclinação) da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto **(x_o, f(x_o))**.

Consideremos a curva que é o gráfico de uma função contínua *f* e (x_o, f(x_o)) serão as coordenadas do ponto P, onde se deseja traçar uma reta tangente. Seja agora outro ponto Q do gráfico de *f*, descrito por (x_o+ h, f(x_o + h)), onde h é o deslocamento no eixo das abscissas, ocorrido do ponto P ao ponto Q.

A reta que passa por P e Q é secante (reta que corta o gráfico em dois pontos) à curva *y = f(x), representada por s.*

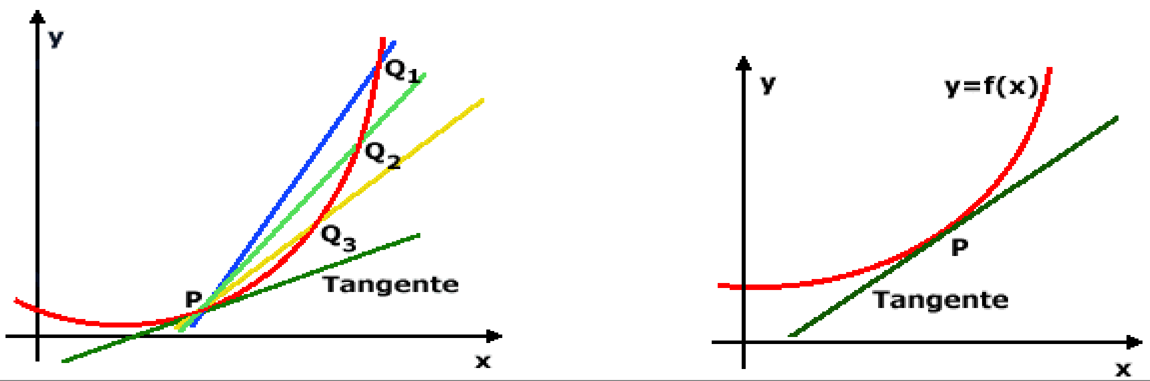


Considerando o triângulo PMQ, na figura acima, a inclinação da reta **s** (ou coeficiente angular de s) é dado por

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

$$tg(\alpha) = \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

Considerando P um ponto fixo e Q um ponto que se aproxima de P, ocupando as posições sucessivas Q_1, Q_2, Q_3, ..., as declividades (inclinações) dessas retas secantes ficarão cada vez mais próximas da declividade da reta tangente em P, tendendo para um valor limite constante. Esse valor limite é chamado **<u>inclinação da reta tangente</u>** à curva no ponto P.



Esperamos que a razão incremental (Δy/Δx), se aproxime de um valor finito ***a***, à medida que o ponto **Q se aproxima do ponto P**, independentemente do fato de que a abscissa de Q seja maior ou menor do que a abscissa de P.

O recurso analítico para fazer **Q** se aproximar de **P**, consiste em fazer o número **h tender a zero**, isto é, tomar os valores de ***h*** arbitrariamente próximos de **0**. Quando **h $\longrightarrow$ 0** e a razão incremental se aproxima do valor finito ***a***, dizemos que ***a*** é o limite da razão incremental com **h tendendo a zero** e denotamos isto por:

$$\boxed{a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}}$$

O limite ***a*** destas taxas médias de variação, quando h → 0, é chamado de **taxa de variação instantânea de y em relação a x**, em x = x_o.

$a(x_0) =$ taxa de variação instantânea de y em relação a *x*, em $x = x_0$.

2. EQUAÇÃO DA RETA TANGENTE

Conhecendo o coeficiente angular da reta, podemos construir a equação da reta tangente em um ponto P.

Se a função *f(x)* é contínua (a função existe) em x_1, então a reta tangente à curva *y* = *f(x)* em P(x_0 , $f(x_0)$) é:

(I) $y - f(x_0) = a(x - x_0)$, se o limite abaixo existir

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ou seja, para calcularmos o coeficiente angular da reta tangente num ponto P, temos que calcular o limite acima, segundo à função dada. É uma fórmula para o cálculo do coeficiente angular.

Exemplo

(a) Ache a inclinação da reta tangente à curva *f*(x) = x^2 no ponto (3, 9).
(b) Escreva a equação da reta, tangente em P.

- Solução-

(a) Inclinação da reta tangente, ou seja, o coeficiente ***a***

$$a = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Assim, *a = 2x e queremos a inclinação no ponto P* = (3, 9). Substituindo *x* = 3, temos:

***a* = 2.3 = 6**

Portanto, a inclinação da reta tangente à curva *f(x)* = x^2 no ponto (3, 9) é 6.

(b) equação da reta tangente à curva *f(x)* = x^2 no ponto (3, 9).

A equação da reta é dada por:

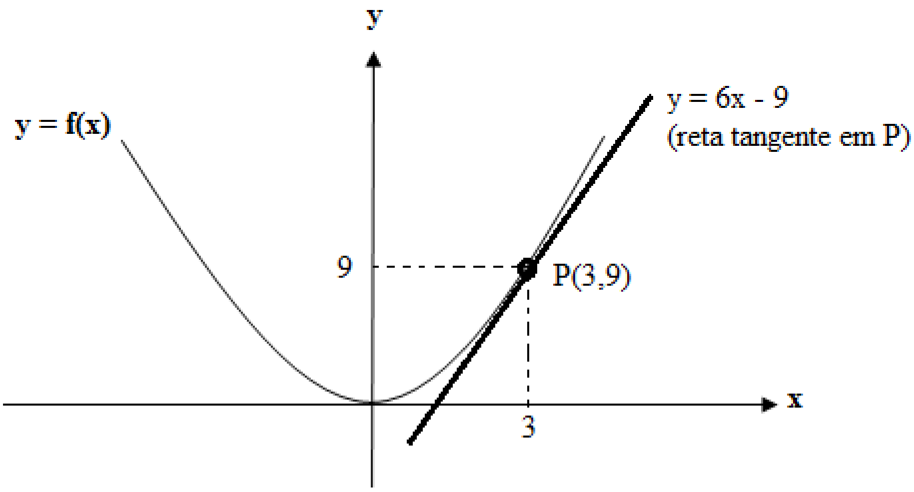
$$y - f(x_0) = a(x - x_0)$$

$$y - 9 = 6(x - 3)$$

$$y - 9 = 6x - 18$$

$y = 6x - 9$, que é a equação da reta tangente ao ponto P(3, 9).

- Gráfico –



DEFINIÇÃO DE DERIVADA USANDO LIMITES

A palavra **"d*erivadas*"**, como o próprio nome indica, traduz de onde provêm uma função qualquer ou de onde ela deriva/ou, o que lhe deu origem, etc...

Assim a adoção deste segundo conceito pode levar a escolha certa do cálculo em causa, dependendo, da interpretação que lhe é atribuída.

A derivada de uma função *f(x)* é a função denotada por $f'(x)$, tal que seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

desde que o limite exista.

Lê-se: a derivada de *f(x)* em relação a *x*.

OBSERVAÇÕES

1. Apenas por uma questão de simbologia matemática, vamos trocar o símbolo do coeficiente angular ***a*** por $f'(x)$ e a palavra ***coeficiente angular*** pela palavra ***derivada.***

Isso é devido ao fato de que *o principal objetivo em estudos de derivadas não é encontrar o coeficiente angular de uma reta tangente em um ponto P, mas sim encontrar a função de onde se deriva o coeficiente angular*, pois este é um processo mais difícil. No exemplo anterior, observe que para encontrar a função derivada $a = 2x$ foi a parte mais difícil. Foi um caminho mais longo. Depois ficou fácil encontrar o valor de <u>a</u>, bastando substituir o x por 3.

2. Além da notação $f'(x)$, as notações $y', \frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}, D_x f$ podem ser encontradas nos livros.

Exemplo – Encontre a derivada da função $f(x)=3x^2+12$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2+12]-(3x^2+12)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[3(x^2+2xh+h^2)+12]-(3x^2+12)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2+12-3x^2-12)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

Logo, a derivada de f(x) é a função $f'(x)$, definida por $f'(x)=6x$.

Observe que para encontrar a função derivada $a = 6x$ foi a parte mais difícil. Depois disso podemos calcular o coeficiente angular para qualquer valor de x. Por isso vamos nos concentrar mais no cálculo da função derivada $f'(x)$.

Exemplos - Encontre a derivada da função

(a) $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = \mathbf{2x}$$

Logo, a derivada de $f(x)=x^2$ é $f'(x)=2x$.

(b) $f(x)=x+2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)+2-(x+2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h+2-x-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = \mathbf{1}$$

Logo, a derivada de $f(x)=x+2$ é $f'(x)=1$.

(c) $f(x)=5x+7$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)+7-(5x+7)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{5x+5h+7-5x-7}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} \frac{5h}{h} = \lim_{h \to 0} 5 = \mathbf{5}$

Logo, a derivada de $f(x) = 5x + 7$ é $f'(x) = 5$.

TEOREMAS SOBRE DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES

O processo de derivação através de limites é um extremamente lento e difícil. Nesta seção serão anunciados alguns teoremas que possibilitam determinar derivadas das funções com mais facilidade e agilidade, se usar limites.

Entendam muito bem essas regras, pois elas é que serão utilizadas por vocês e não o cálculo de derivadas por limites.

1 – REGRA DA POTÊNCIA

Se *n* for um número inteiro qualquer, positivo ou negativo e se *f* é da forma $f(x) = x^n$, então

$$\boxed{f'(x) = n.x^{n-1}}$$

A potência ***n*** do ***x*** passa a multiplicar o ***x*** e, ao mesmo tempo, é subtraído 1 da potência.

Exemplo

(a) $f(x) = x^8 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$. Logo, $f'(x) = 8x^7$.

(b) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = x^{1-1} = x^0 = 1$. Logo, $f'(x) = 1$. A derivada de *x* é sempre 1.

2- DERIVADA DE UMA FUNÇÃO CONSTANTE

Se ***C*** é uma constante e se ***f(x) = C***, então $f'(x) = 0$. Isto significa que a derivada de qualquer constante é sempre zero.

Exemplo:

(a) $f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
(b) $f(x) = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
(c) $f(x) = \pi \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
(d) (a) $f(x) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

3- REGRA DA MULTIPLICAÇÃO POR CONSTANTE

Se $g(x)$ for uma função, ***c*** uma constante e $f(x)$ a função definida por $f(x) = c.g(x)$**,** então

$$\boxed{f'(x) = c.g'(x)}$$

Ou seja, se temos uma constante multiplicando uma variável ou função, repetimos a constante e derivamos apenas a função ou variável.

Cuidado para não confundir esta regra 3 com a regra 2. Na regra 2, a constante não está acompanhada de nenhuma variável x, enquanto que na regra 3, a constante tem uma variável x acompanhando.

Exemplo

(a) $g(x)=5x^8 \quad \Rightarrow \quad g'(x)=5(8x^{8-1}) = 40x^7$. Logo, $g'(x)=40x^7$.
(b) $g(x)=2x^5 \quad \Rightarrow \quad g'(x)=2(5x^{5-1}) = 10x^4$. Logo, $g'(x)=10x^4$.

4 - REGRA DA SOMA DE FUNÇÕES

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções e $h(x)$ é definida por *h(x) = f(x) + g(x)*, então

$$\boxed{h'(x)=f'(x)+g'(x)}$$

Exemplo

(a) $h(x)=3x^5+4x^2 \quad \Rightarrow \quad h'(x)=3.5.x^{5-1}+4.2.x^{2-1} = 15x^4+8x$

Logo, $h'(x)=15x^4+8x$

Ou seja, se temos soma de várias funções, derivamos cada uma separadamente e depois somamos os resultados.

(b) $h(x)=-2x^7+\frac{5}{2}x^2+x-8 \quad \Rightarrow \quad h'(x)=-2.7.x^{7-1}+\frac{5}{2}.2.x^{2-1}+1-0 = -14x^6+5x+1$

Logo, $h'(x)=-14x^6+5x+1$

5 - REGRA DO PRODUTO

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções e $h(x)$ é definida por *h(x) = f(x). g(x)*, então

$$\boxed{h'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)}$$

Exemplo

(a) $h(x)=(10x^2+2).(x+5)$

Se $f(x)=10x^2+2$ e $g(x)=x+5$, então:

$$h'(x)=(10x^2+2)'\,.\,(x+5)+(10x^2+2)\,.\,(x+5)'$$
$$h'(x)=20x.(3x+5)+(10x^2+2).3$$
$$h'(x)=60x^2+100x+30x^2+6$$
$$h'(x)=90x^2+100x+6$$

Logo, h’(x) = $90x^2+100x+6$

(b) $h(x)=(3x^4+x).(x^2-2)$

Se $f(x)=3x^4+x$ e $g(x)=x^2-2$, então:

$h'(x)=(3x^4+x)'\,.\,(x^2-2)\,+\,(3x^4+x)\,.\,(x^2-2)'$
$h'(x)=(12x^3+1).(x^2-2)+(3x^4+x).2x$
$h'(x)=12x^5-24x^3+x^2-2+6x^5+2x^2$
$h'(x)=18x^5-24x^3+3x^2-2$

6- REGRA DO QUOCIENTE

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções e $h(x)$ é definida por

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\text{, onde } g(x)\neq 0\text{, então}$$

$$h'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Exemplo

(a) $h(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+1}$

Se $f(x)=2x^2+3$ e $g(x)=x^2+1$, então:

h’(x) = $\dfrac{(2x^2+3)'.\,(x^2+1)-(2x^2+3).\,(x^2+1)'-}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x(x^2+1)-(2x^2+3).2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x^3+4x-4x^3-6x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

Logo, h’(x) = $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

(b) $h(x)=\dfrac{2x+1}{x}$

Se $f(x)=2x+1$ e $g(x)=x$, então:

h’(x) = $h'(x)=\dfrac{(2x+1)'.\,x-(2x+1).\,(x)'-}{(x)^2}=\dfrac{(2+0).x-(2x+1).1}{x^2}=\dfrac{2x-2x-1}{x^2}=\dfrac{-1}{x^2}$

Logo, $h'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$.

DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1- $f(x) = sen\,(x) \Rightarrow f'(x) = \cos\,(x)$
2- $f(x) = \cos\,(x) \Rightarrow f'(x) = -sen\,(x)$
3- $f(x) = tg\,(x) \Rightarrow f'(x) = \sec^2\,(x)$
4- $f(x) = \cos ec\,(x) \Rightarrow f'(x) = -\cos ec\,(x).\cot g\,(x)$
5- $f(x) = \sec\,(x) \Rightarrow f'(x) = \sec\,(x).tg\,(x)$
6- $f(x) = \cot g\,(x) \Rightarrow f'(x) = -\cos ec^2\,(x)$

EXERCÍCIOS

1- Calcular as derivadas utilizando limites.

(a) $f(x)=5x+2$ (b) $f(x)=3x+1$ (c) $f(x)=2x^2+7$ (d) $f(x)=x^2+2x$

Respostas: (a) $f'(x) = 5$ (b) $f'(x) = 3$ (c) $f'(x) = 4x$ (d) $f'(x) = 2x + 2$

2- Encontre a derivada $f'(x)$ das funções abaixo, usando as **regras de derivação**

(1) $f(x)=5x+2$ (2) $f(x)=3x^4$ (3) $f(x)=5x^2+2$ (4) $f(x)=10x^{\frac{1}{3}}+7$

(5) $f(x)=(5x+2).(3x^2+1)$ (6) $f(x)=(x^3+4).(x^2+3)$

(7) $f(x)=(x^4+2).(x^2+1)$ (8) $f(x)=(x^5+1).(x^2+1)$

(9) $f(x)=9\sqrt[3]{x^2}$ (10) $f(x)=4\sqrt[3]{x^5}$ (11) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ (12) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$

(13) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ (14) $f(x)=\dfrac{x^4+2x}{x^2+2}$ (15) f(x) = 3sen(x) (16) f(x) = 3x.cos(x)

(17) $f(x)=$ sen(x) + cos(x) (18) $f(x)=4x^2$.cos(x) (19) $f(x)=\dfrac{tg(x)}{\cos(x)-4}$ (20) f(x) = tg(x)

RESPOSTAS:

(1) $f'(x) = 5$ (2) $f'(x) = 12x^3$ (3) $f'(x) = 10x$ (4) $f'(x)=\dfrac{10}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

(5) $f'(x) = 45x^2 + 12x + 5$ (6) $f'(x)=5x^4+9x^2+8x$ (7) $f'(x)=6x^5+4x^3+4x$

(8) $f'(x)=7x^6+5x^4+2x$ (9) $f'(x)=6x^{-\frac{1}{3}}$ (10) $f'(x)=\dfrac{20}{3}x^{\frac{2}{3}}$ (11) $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x}{x^4}$

(12) $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$ (13) $f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$ (14) $f'(x)=\dfrac{2x^5+8x^3-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$ (15) $f'(x)=$ 3cose(x)

(16) $f'(x)=$ 3cos(x) - 3x.sen(x) (17) $f'(x)=$ cos(x) – sem(x) (18) $f'(x)=$ 8x.cos(x) – 4x².sen(x)

(19) $f'(x)=\dfrac{\sec^2(x).(\cos(x)-4)+\text{tg}(x).\text{sen}(x)}{(\cos(x)-4)^2}$ (20) $f'(x)=\sec^2(x)$