

**CENTRO UNIVERSITÁRIO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR DE BRASÍLIA – IESB**



Probabilidade e Estatística aula 02

Rodrigo Gonçalves.



O que são séries estatísticas?

- São conjuntos de dados **organizados** em forma de **tabelas**, listas, ou gráficos com o objetivo de analisar e compreender informações ou fenômenos.
- Elas ajudam a visualizar a **distribuição** dos dados e **identificar padrões**, **tendências** e características importantes.
- Em uma série estatística observa-se 3 elementos ou fatores: tempo, espaço e espécie.

O que são séries estatísticas?

Exemplo usando o número de vendas mensais de um produto.

- Tempo: As observações são feitas ao longo dos meses do ano.
- Espaço: Os dados são coletados em diferentes filiais da mesma loja.
- Espécie: O produto em questão é um smartphone específico.

O que são séries estatísticas?

O acompanhamento de vendas de um smartphone em várias lojas de uma rede.

- Tempo: São 12 observações (um para cada mês).
- Espaço: As observações são feitas em várias filiais da loja.
- Espécie: O produto em análise é um modelo específico de smartphone.

O que são séries estatísticas?

Históricas, cronológicas, temporais ou marchas.

→ Referem-se a conjuntos de dados coletados ao longo do tempo para analisar mudanças, tendências e padrões em uma determinada variável ou fenômeno.

→ Essas séries são usadas para estudar como uma característica específica que evolui ao longo de períodos distintos.

O que são séries estatísticas?

Históricas, cronológicas, temporais ou marchas.

Exemplo:

FRANGO — PREÇOS MÉDIOS EM SÃO PAULO — 2003-2008	
ANOS	PREÇO MÉDIO (R\$)
2003	2,56
2004	2,64
2005	2,67
2006	2,53
2007	3,20
2008	3,64
FONTE: Associação Paulista de Avicultura.	

CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística Fácil*.
19. ed. São Paulo: Saraiva, 2016

Rodrigo Gonçalves

O que são séries estatísticas?

Geográficas, espaciais ou territoriais.

Exemplo:

DURAÇÃO MÉDIA DOS ESTUDOS SUPERIORES 1994	
PAÍSES	NÚMERO DE ANOS
Itália	7,5
Alemanha	7,0
França	7,0
Holanda	5,9
Inglaterra	Menos de 4
FONTE: Revista <i>Veja</i> .	

CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística Fácil*.
19. ed. São Paulo: Saraiva, 2016

Rodrigo Gonçalves

O que são séries estatísticas?

Séries conjugadas ou de dupla entrada

Exemplo:

TERMINAIS TELEFÔNICOS EM SERVIÇO 1991-93			
REGIÕES	1991	1992	1993
Norte	342.938	375.658	403.494
Nordeste	1.287.813	1.379.101	1.486.649
Sudeste	6.234.501	6.729.467	7.231.634
Sul	1.497.315	1.608.989	1.746.232
Centro-Oeste	713.357	778.925	884.822

FONTE: Ministério das Comunicações.

CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística Fácil*.
19. ed. São Paulo: Saraiva, 2016

Rodrigo Gonçalves

Dados absolutos e dados relativos

Dados absolutos

→ São dados coletados de forma direta, sem qualquer manipulação ou medida.

Produto	Quantidade de Vendas
Smartphone	150
Laptop	80
Tablet	50
Smart TV	30
Fones de Ouvido	120

Dados absolutos e dados relativos

Dados relativos

→ São o resultado de **comparações** por quociente (razões) que se estabelecem entre dados absolutos e têm por finalidade **realçar ou facilitar as comparações entre quantidades.**

Dados absolutos e dados relativos

Dados relativos

Exemplo: $(\text{quantidade de vendas} / \text{total de vendas}) * 100$

Produto	Quantidade de Vendas	Percentual de Vendas
Smartphone	150	37.5%
Laptop	80	20.0%
Tablet	50	12.5%
Smart TV	30	7.5%
Fones de Ouvido	90	22.5%
Total	400	100.0%

→ A tabela nos diz que do total de 400 produtos vendidos, smartphones e fones de ouvidos são os itens mais vendidos!

Dados absolutos e dados relativos

Dados relativos → exercício

Matriculas nas escolas das cidades A e B.

Categorias	Numero de Alunos A	Numero de alunos B
Ensino fundamental	19.286	38.660
Ensino médio	1.681	3.399
Ensino superior	234	4.24
Total	21.201	42.483

Pergunta: qual das cidades tem comparativamente maior número de alunos em cada nível?

Dados absolutos e dados relativos

Dados relativos → exercício

Matriculas nas escolas das cidades A e B.

Categorias	Numero de Alunos A	Dados relativos A %	Numero de alunos B	Dados relativos B %
Ensino fundamental	19.286	91,0	38.660	91,0
Ensino médio	1.681	7,9	3.399	8,0
Ensino superior	234	1,1	4.24	1,0
Total	21.201	100	42.483	100

Índices. O que são?

- Índices são razões entre duas grandezas tais que uma não inclui a outra.
- Exemplos:
 - Índice cefálico = $(\text{diâmetro transverso do crânio} / \text{diâmetro longitudinal do crânio}) \times 100$.
 - Quociente intelectual = $(\text{idade mental} / \text{idade cronológica}) \times 100$.
 - Produção per capita = $(\text{valor total da produção} / \text{população}) \times 100$.
 - Renda per capita = $(\text{receita} / \text{população}) \times 100$.

Índices. O que são?

→ Índice densidade demográfica = população total /superfície.

Coeficientes. O que são?

→ São razões entre o número de ocorrências e o total de ocorrências.

→ Exemplos:

- Coeficiente de natalidade = número de nascimento / população total.
- Coeficiente de mortalidade = número de óbitos / população total.
- Coeficiente de evasão escolar = número de alunos evadidos / número inicial de matrículas.
- Coeficiente de aproveitamento escolar = número de alunos aprovados / número final de matrículas.

Coeficientes. O que são?

→ Exemplos:

- Coeficiente de aproveitamento escolar = $\frac{\text{número de alunos aprovados}}{\text{número final de matrículas}}$.
- Coeficiente de recuperação = $\frac{\text{número de alunos recuperados}}{\text{número de alunos em recuperação}}$.

Taxas

- Taxas são coeficientes multiplicados por uma potência de 10 (10, 100, 1000.)
- Taxa de natalidade = coeficiente de natalidade * 1000.
- Taxa de mortalidade = coeficiente de mortalidade * 1000.
- Taxa de evasão escola = coeficiente de evasão escolar * 100.
- Taxa de aproveitamento escolar = coeficiente de evasão escolar * 100

Distribuição de Frequências?

- Uma distribuição de frequências é uma forma de **organizar** e resumir dados em uma tabela, **mostrando a frequência** com que **cada valor** ou intervalo de valores ocorre em um conjunto de dados.
- Uma distribuição de frequências geralmente é usada quando os dados são numerosos.

Distribuição de Frequências?

- **Tabela primitiva** → é uma tabela onde a coleta de dados encontra-se desorganizada:
- Exemplo: suponha que vamos coletar a estatura dos alunos desta sala:

166	160	161	150	162	160	165	167	164	160
162	161	168	163	156	173	160	155	164	168
155	152	163	160	155	169	151	170	164	170
154	161	153	172	153	157	156	158	158	161

Distribuição de Frequências?

- **ROL** → Quando a tabela de estaturas é organizada em ordem crescente:

150	154	155	157	160	161	162	164	166	169
151	155	156	158	160	161	162	164	167	170
152	155	156	158	160	161	163	164	168	172
153	155	156	160	160	161	163	165	168	173

- **ROL** → após ordenado , pode-se verificar qual a **menor** e a **maior** estatura e podemos definir a amplitude: Amplitude (maior – menor).

Distribuição de Frequências?

→ Exemplo:

→ Suponha que estamos coletando dados sobre as **alturas** de estudantes dessa turma. Podemos organizar os dados em intervalos de altura, como "150-160 cm", "160-170 cm", etc. A distribuição de frequências resultante pode ser apresentada em uma tabela abaixo:

Intervalo de Altura	Frequência
150-160 cm	10
160-170 cm	15
170-180 cm	8
180-190 cm	5

Distribuição de Frequências?

→ Frequência:

→ Número de repetições ou de ocorrência de uma variável aleatória x . Ou seja, quantas vezes aparecem aquele valor em um determinado intervalo. Torna-se inviável tabelas grandes! Como fazer?

Altura cm	Frequência
150	1
151	1
152	1
153	1
154	1
...	...

Distribuição de Frequências?

→ Intervalos de classes → tabela utilizada na teoria a seguir.

i=classe

i	ESTATURAS (cm)	TABULAÇÃO	FREQUÊNCIA
1	150 - 154	☐	4
2	154 - 158	☑ ☐	9
3	158 - 162	☑ ☑	11
4	162 - 166	☑ ☐	8
5	166 - 170	☑	5
6	170 - 174	☐	3
	Total		40

Desenhar na lousa essa tabela e ir anotando a teoria

Distribuição de Frequências?

Classe

- Classes de frequência ou simplesmente classes são intervalos de variação da variável.
- São representadas por i , sendo $i = 1, 2, 3 \dots k$ (onde k é o número total de classes da distribuição).
- Assim: na tabela anterior temos o intervalo: 154 | -- 158 que é a segunda classe ($i=2$).
- Como a distribuição é formada por 6 classes, podemos afirmar que $k = 6$.

Distribuição de Frequências?

Limite de classe

- Denomina-se limite de classe **os extremos** de cada classe
- O menor número é o limite inferior da classe (**li**) e o maior número, é o limite superior da **classe (Li).**
- Na segunda classe da tabela acima tem-se.
- **$l_2 = 154$ e $L_2 = 158$.**
- Note: o indivíduo que tem a estatura de 158, estará na terceira classe (**$i=3$**), pois a determinação do IBGE diz que para se enquadrar na classe, **temos o limite superior -1.**
Logo, **o valor máximo dentro da classe é 157cm.**

Distribuição de Frequências?

→ Amplitude de um Intervalo de Classe (h):

É a diferença entre os limites superior e inferior da classe indicada por h_i

$$h_i = Li - li.$$

Na tabela: temos: $158 - 154 = 4$ portanto $h = 4$ cm de amplitude.

→ Amplitude Total da Distribuição (AT)

A amplitude total da distribuição é a diferença entre o limite superior da última classe (**limite superior máximo**) e o limite inferior da primeira classe (**limite inferior mínimo**)

$$AT = L(\max) - l(\min). \rightarrow \text{no exemplo temos: } 174 - 150 = 24 \rightarrow AT = 24\text{cm.}$$

Distribuição de Frequências?

→ Observação:

É evidente que, se as classes possuem o mesmo intervalo, é possível verificar a relação através da fórmula da amplitude total. Veja:

Demonstração

- Amplitude total = $AT = 24$
- Amplitude dos intervalos de classe = $hi = 4$.

$$24/4 = 6$$

Portanto: Quantidade total de classes = $k = 6$.

Distribuição de Frequências?

→ Amplitude Amostral:

A amplitude amostral é a **diferença** entre o **maior e o menor valor nos dados** de uma amostra. Ela fornece uma medida da variação nos valores da amostra.

Demonstração

Em nosso exemplo: Temos

- Valor máximo coletado = 173cm (173, porque o limite superior -1, conforme IBGE)
- Valor mínimo coletado = 150 cm

$$AA = 173 - 150 = 23 \rightarrow AA = 23\text{cm}$$

Distribuição de Frequências?

→ Ponto médio de uma classe(x_i)

É o ponto que divide o intervalo em duas partes iguais.

→ Para calcular, utiliza-se a média aritmética, onde: $x_i = l_i + L_i / 2$.

→ Para a tabela na segunda classe, onde $i=2$, temos:

Demonstração

$$x_2 = l_2 + L_2 / 2 \rightarrow 154 + 158 / 2 = 312 / 2 \rightarrow 156 \text{ cm} .$$

$$\therefore X_2 = 156 \text{ cm}$$

O ponto médio, representa a tendência central da classe!

Distribuição de Frequências?

→ Frequência simples ou absoluta

É o número de observações correspondentes a uma classe ou um valor.

→ É conhecida simplesmente como frequência de uma classe ou valor individual.

→ A frequência simples, é simbolizada por f_i , lê-se: **f índice i ou frequência da classe i**

→ a soma de todas as frequências é representada pelo símbolo de somatório:

$$\sum_{i=1}^k f_i$$

É evidente que:

$$\sum_{i=1}^k f_i = n$$

... Continua ...

Distribuição de Frequências?

→ Para a tabela em estudo temos:

$$\sum_{i=1}^6 f_i = 40$$

Para não ocorrer equívocos, vamos utilizar uma forma simplificada:

$$\sum f_i = 40$$

... fim ...

Distribuição de Frequências?

→ Número de classes / Intervalo de classes

Para se construir uma distribuição de frequências, primeiramente, deve-se determinar o número de classes. Consequentemente, da amplitude e limites dos intervalos de classe.

→ Regra de Sturges → nos dá o número de classes em função de valores da variável.

Demonstração

$k \cong 1 + \lfloor 3,3 \cdot \log_{10}(n) \rfloor$, onde,

k é o número de classe,

n é o número total de frequência

... Continua ...

Distribuição de Frequências?

→ ... Continuação ...

.para 40 alunos (n), temos:

$K \approx 1 + 3.3 \times \log 40 = 6.2 \rightarrow 6$ classes.

→ **Observação:** além da regra de sturges existem outras fórmulas empíricas que pretendem resolver o problema da determinação do número de classe que deve ter a distribuição. Entretanto, não é visível nessas fórmulas uma decisão exata de classes, e sim uma aproximação. Essa aproximação deve ser interpretada a depender da realidade, de um **julgamento pessoal**, que deve estar ligado a natureza dos dados, da unidade utilizada para expressá-los e, ainda, do objetivo que se tem em vista.

... Fim..

Distribuição de Frequências?

→ Após a utilização da regra de Sturges para decidirmos empiricamente a quantidade de classes, devemos encontrar em seguida a amplitude do intervalo de classe: dividindo AT por Qtde de classes i

$h \cong \frac{AT}{i}$. Quando o resultado não é exato devemos arredonda-lo para mais.

→ **Outro problema:** escolher os limites dos intervalos, os quais deverão ser tais que forneçam, na medida do possível, para pontos médios, números que facilitem os cálculos → ex. números naturais.

No exemplo da tabela temos : $n = 40$; $i = 6$. Logo

$$h \cong \frac{173 - 150}{6} = \frac{23}{6} = 3,833 = 4$$

ISTO é: 6 classes de intervalos iguais a 4.

Distribuição de Frequências?

→ Após a regra de Sturges, encontrar a amplitude do intervalo de classe: dividindo AT por Qtde de classes i

$h \approx AT / i$. Quando o resultado não é exato devemos arredonda-lo para mais.

No exemplo da tabela temos : $n = 40$; $i = 6$. Logo

$H \approx 173-150 / 6 \rightarrow 23/6 = 3,8$ e portanto 4.

ISTO é: 6 classes de intervalos iguais a 4.

→ Vamos fazer exercícios?

Exercícios.

Exercícios para fixação

1) As notas obtidas por 50 alunos de uma classe foram.

1	2	3	4	5	6	6	7	7	8
2	2	3	4	5	6	6	7	8	8
2	2	4	4	5	6	6	7	8	9
2	3	4	5	5	6	6	7	8	9
2	3	4	5	5	6	7	7	8	9

a) Complete a distribuição de frequência abaixo:

i	NOTAS	x_i	f_i
1	0-2	1	1
2	2-4
3	4-6
4	6-8
5	8-10
			$\sum f_i = 50$

Exercícios para fixação

b) Responda

1. Qual amplitude amostral?
2. Qual a amplitude da distribuição?
3. Qual o número de classes da distribuição?
4. Qual é o limite inferior da quarta classe?
5. Qual o limite superior da classe de ordem 2?
6. Qual a amplitude do segundo intervalo de classe?

Tipos de frequências.

→ Frequência simples ou absoluta(f_i)

São os valores que realmente representam o número de dados cada classe.

O número das frequências simples é igual ao número total de dados. Representado pela fórmula:

$$\sum f_i = n$$

Logo, a frequência relativa da terceira classe, na tabela exemplo é: $fr_3 = \frac{f_3}{\sum f_i} \rightarrow 11/40 = 0,275 \times 100 = 27,5\%$.

Evidentemente $\sum f_{ri} = 100\%$ ou $= 1$.

OBS) o propósito das frequências relativas é o de permitir a análise ou facilitar as comparações.

Tipos de frequências.

→ Frequência Acumulada (F_i)

- É o total das frequências de todos os valores inferiores ao limite superior do intervalo de uma dada classe.
- É a quantidade total de vezes que um valor ou um intervalo de valores ocorreu até o valor atual na distribuição $\rightarrow F_i = \sum f_i (i = 1, 2, \dots, k)$

Para a tabela exemplo, a frequência acumulada correspondente à terceira classe é:

$$F_3 = \sum_{i=1}^3 f_i = f_1 + f_2 + f_3 = 4 + 9 + 11 = 24$$

Tipos de frequências.

→ Frequência Acumulada Relativa(Fr)

- É a frequência acumulada da classe dividida pela frequência total da distribuição.

- $$\frac{Fi}{\sum fi}$$

Assim, para a tabela exemplo na terceira classe temos:

$$Fr3 = \frac{F3}{\sum fi} \rightarrow 24 / 40 = 0,600 .$$

Tipos de frequências.

→ A tabela resultante após a teoria ficou assim: → x_i = ponto médio.

i	ESTATURAS (cm)	f_i	x_i	fr_i	F_i	Fr_i
1	150 - 154	4	152	0,100	4	0,100
2	154 - 158	9	156	0,225	13	0,325
3	158 - 162	11	160	0,275	24	0,600
4	162 - 166	8	164	0,200	32	0,800
5	166 - 170	5	168	0,125	37	0,925
6	170 - 174	3	172	0,075	40	1,000
		$\Sigma = 40$		$\Sigma = 1,000$		

TABELA 5.8

CRESPO, Antônio Arnot. *Estatística Fácil*.
19. ed. São Paulo: Saraiva, 2016

Tipos de frequências.

Para que utilizamos essa teoria?

→ Para responder perguntas, como:

- a) Quantos alunos tem estatura entre 154 cm, inclusive, e 158 cm?
- b) Qual a porcentagem de alunos cujas as estaturas são inferiores a 154 cm? → resposta na primeira classe: $0,100 = 10\%$.
- c) Quantos alunos tem estatura abaixo de 162 cm? 24 alunos. Somatório das frequências, classes 1,2e3.

Tipos de frequências.

Para que utilizamos essa teoria?

→ Para responder perguntas, como:

- a) Quantos alunos tem estatura entre 154 cm, inclusive, e 158 cm?
- b) Qual a porcentagem de alunos cujas as estaturas são inferiores a 154 cm? → resposta na primeira classe: $0,100 = 10\%$.
- c) Quantos alunos tem estatura abaixo de 162 cm? 24 alunos. Somatório das frequências, classes 1,2e3.

Exercícios.

Exercícios

1. O Estado A apresentou 733.986 matrículas na 1 série, no início do ano de 1994, e 683.816 no fim do ano. O Estado B apresentou, respectivamente, 436.127 e 412.457 matrículas. Qual o Estado que apresentou maior evasão escolar?

Exercícios

2. Uma escola registrou em março, na 1ª série a matrícula de 40 alunos e a matrícula efetiva, em dezembro, de 35 alunos. A taxa de evasão foi de?
3. Calcule a taxa de aprovação de um professor de uma classe de 45 alunos, sabendo que obtiveram aprovação 36 alunos.

Exercícios

4. Considere a série estatística.

Séries	Alunos matriculados	%
1º	546	
2º	328	
3º	280	
4º	120	
Total	1.274	

Complete-a determinando as porcentagens com uma casa decimal apenas.

Exercícios

5. Um escola apresentava, no final do ano o seguinte quadro

	Matrículas	
Séries	Março	Novembro
1º	480	475
2º	458	456
3º	436	430
4º	420	420
Total	1.794	1.781

- Calcule a taxa de evasão por séries.
- Calcule a taxa de evasão da escola.

Exercícios

6. Considere a tabela abaixo:

Evolução das receitas do café industrializado jan/abr -2008

Meses	Valor (US\$ milhões)
Janeiro	33,3
Fevereiro	54,1
Março	44,5
Abril	52,9
Total	184,8

- Complete-a com uma coluna de taxas percentuais.
- Como se distribuem as receitas em relação ao total?

Exercícios

6. continuação....

c. Qual o desenvolvimento das receitas de um mês para o outro?

d. Qual o desenvolvimento das receitas em relação ao mês de janeiro?

7. São Paulo tinha em 1992 uma população de 32,000,182.7 mil habitantes. Sabendo que sua área terrestre é de 248.256 km², calcule a sua densidade demográfica.

Exercícios

8. Considerando que Minas Gerais em 1992 apresentou: população 15,957.6 mil habitantes; superfície 586.624 km²; nascimentos 292.036; óbitos 99,281.0. Calcule.

- a) O índice da densidade demográfica.
- b) A taxa de natalidade.
- c) A taxa de mortalidade.

Exercícios

9. Considere os dados abaixo.

SÉRIE E TURMA	Nº DE ALUNOS 30.03	Nº DE ALUNOS 30.11	PROMO-VIDOS SEM RECUPE-RAÇÃO	RETIDOS SEM RECUPE-RAÇÃO	EM RECUPE-RAÇÃO	RECU-PERADOS	NÃO RECU-PERADOS	TOTAL GERAL	
								PROMO-VIDOS	RETIDOS
1ª B	49	44	35	03	06	05	01	40	04
1ª C	49	42	42	00	00	00	00	42	00
1ª E	47	35	27	00	08	03	05	30	05
1ª F	47	40	33	06	01	00	01	33	07
Total	192	161	137	09	15	08	07	145	16

Exercícios

9. continuação. Calcule:

- a) Taxa de evasão escolar por classe;
- b) Taxa de evasão escolar total;
- c) Taxa de aprovação por classe;
- d) Taxa de aprovação geral;
- e) Taxa de recuperação por classe;
- f) Taxa de recuperação geral;
- g) Taxa de reprovação na recuperação geral;
- h) Taxa de aprovação sem recuperação.
- i) Taxa de retidos sem recuperação.

Exercícios

10. As notas obtidas por 50 alunos de uma classe foram:

1	2	3	4	5	6	6	7	7	8
2	3	3	4	5	6	6	7	8	8
2	3	4	4	5	6	6	7	8	9
2	3	4	5	5	6	6	7	8	9
2	3	4	5	5	6	7	7	8	9

- a) Faça a distribuição de frequência.
- b) Qual a amplitude amostral.
- c) Qual a amplitude da distribuição.
- d) Qual o número de classes da distribuição

Exercícios

- e) Qual é o limite inferior da quarta classe?
- f) Qual é o limite superior da classe 2?
- g) Qual a amplitude do segundo intervalo de classe?

Exercícios

11) Considere as notas de um teste de inteligência aplicado a 120 alunos. Sabe-se que as notas variam de 60 a 90. Sua tarefa é criar uma tabela com a distribuição de frequências usando intervalos de classe para analisar os resultados.

60, 61, 62, 63, 63, 64, 65, 66, 67, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 69, 69, 69, 69, 69, 70, 70, 70, 70, 70, 71, 71, 71, 71, 71, 71, 71, 71, 71, 71, 72, 72, 72, 72, 72, 73, 73, 73, 73, 74, 74, 74, 74, 74, 75, 75, 75, 75, 75, 76, 76, 76, 76, 76, 76, 77, 77, 77, 77, 77, 77, 78, 78, 78, 78, 78, 78, 78, 79, 79, 79, 79, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 81, 81, 81, 81, 81, 82, 82, 82, 82, 82, 82, 82, 83, 83, 83, 83, 84, 84, 84, 84, 84, 84, 85, 85, 85, 85, 85, 85, 87, 87, 87, 87, 87, 87, 90, 92, 97



By the way.....



OBRIGADO!

[illegible]

A close-up photograph of a textured, brown surface, possibly leather or a similar material. The word "OBRIGADO" is embossed in large, capital letters across the center of the frame. The texture of the material is visible, with small pits and variations in color. The lighting is even, highlighting the embossed letters.



**Thanks
Folks!**



Thank You!