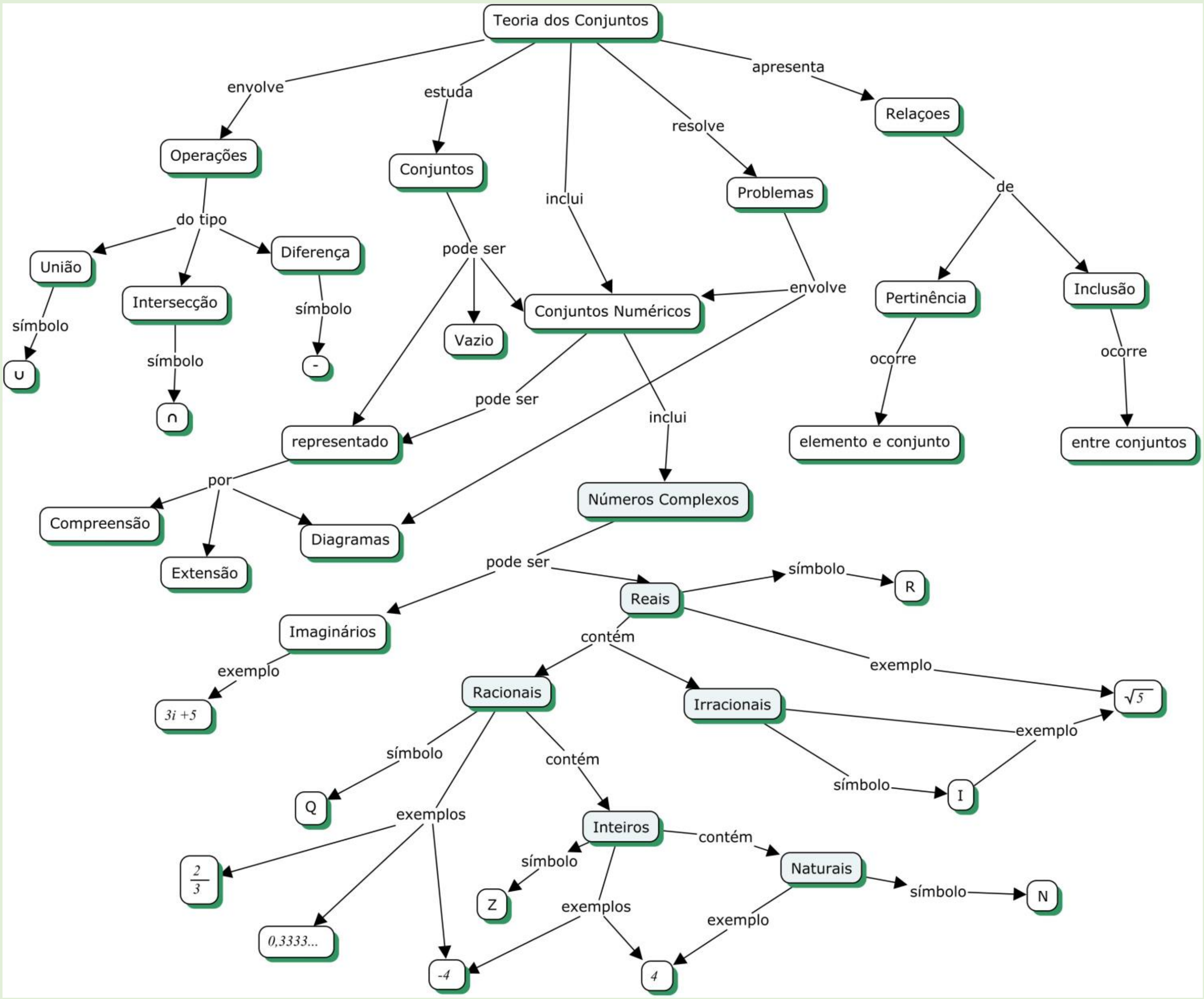
TÓPICOS DE MATEMÁTICA

UIA1 | CONJUNTOS E INTERVALOS



Fonte Imagem: www.fisicamariaines.com

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Por Prof. *Sidney Leal da Silva*

PRIMEIROS TEMPOS

Já nos primeiros tempos da raça humana, noções primitivas relacionadas aos conceitos de números, grandezas e forma já faziam parte da vida diária do homem. Se há validade no princípio biológico da "sobrevivência dos mais aptos", a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Os egípcios, cerca de 5000 anos atrás, começaram a utilizar a matemática através da astronomia para observar que a inundação anual do rio Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, levantava-se a leste, logo antes do sol. Dado que esses surgimentos helíacos de Sirius, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito de doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa, que é a base de nosso calendário atual. Este calendário foi fundamental para a agricultura dos povos que viviam à beira do rio Nilo. Além da astronomia, os egípcios nos deixaram grandes escritos sobre construção civil, arquitetura, arte, etc., todos fundamentados em conceitos matemáticos.

As civilizações babilônicas da Mesopotâmia, que viveram por volta de 2000 a 600 a. C, foram consideradas de alto nível por terem apresentado notável progresso cultural. Os sumérios, por exemplo, construíram casas e templos decorados com cerâmicas e mosaicos artísticos em desenhos geométricos. Governantes poderosos uniram os principados locais num império que realizou vastas obras públicas, como por exemplo, o sistema de cavas, que irrigava a terra e controlava as inundações, tudo a partir de princípios matemáticos.

PERÍODO ÁUREO (600 a.C. a 600 d.C.)

A partir de 600 a.C. a civilização grega assumiu a hegemonia cultural. No período helênico, que se estende aproximadamente de 600 a 323 a. C, destacam-se Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, entre outros. Segundo a escola Pitagórica "Tudo é número", ou seja, o mundo pode ser explicado pela matemática. Pitágoras foi o responsável por tornar a matemática literal e Platão tornou-a parte da educação dos homens de estado, fato que contribuiu para o desenvolvimento das ciências políticas e econômicas.

O início do desenvolvimento formal da aritmética e geometria data deste período. Isto foi fundamental para as ciências astronômicas e, mais tarde, para a física. O fim deste período aconteceu com as mortes do Imperador Alexandre, o Grande, e Aristóteles (discípulo de Platão), considerado o maior erudito de todos os tempos e precursor da lógica.

A fase seguinte deu início a uma nova era da matemática, chamada Idade Áurea da Matemática Grega, Período Helenístico, ou ainda período Alexandrino e se estendeu de aproximadamente 324 a.C a 600 d.C. Alguns destaques deste período são Euclides, Arquimedes, Apolônio, Aristarco, entre outros.

Arquimedes, também conhecido como pai da física, com as leis da alavanca, trouxe uma grande contribuição para a construção civil, mas seu maior feito está relacionado aos princípios da hidrostática, utilizados até os dias de hoje como base para a construção de navios, submarinos, etc. Nesta fase houve também um grande desenvolvimento da geometria e trigonometria. O fim do período Alexandrino deu-se com a morte de Boécio, filósofo, matemático e homem de Estado, em 524 ou 525. A partir desta data, o homem passou um grande período voltado ao estudo do espírito e na busca pela salvação.

A IDADE DAS TREVAS

Com a queda de Roma em 476, iniciou-se um período designado "Idade Média" que durou até a queda de Constantinopla em 1453. Para a história da matemática, este intervalo de tempo vai do ano 529, quando Justiniano, imperador do oriente, fechou as escolas filosóficas pagãs de Atenas, até 1436, com a morte do matemático Al-Kash. Durante a Idade Média, o mundo ocidental esteve concentrado na salvação do homem e os estudos voltaram-se ao espírito, deixando de lado a evolução das ideias sobre a razão. Este período foi classificado como "A idade das trevas". A esse respeito, Roger Bacon disse:

"O abandono da matemática traz dano a todo o conhecimento, pois aquele que a ignora não pode conhecer as outras ciências ou as coisas do mundo".

O único centro de estudos da razão estava concentrado no que restava do império Romano. No entanto, o mundo oriental deu continuidade ao desenvolvimento da matemática. A China, Índia, Arábia e Império Bizantino tornaram-se os novos centros de estudos. Muito se fez, como a expansão dos numerais Indo-Arábicos, estudo das sequências (como a de Fibonacci), soluções de equações críticas, a cinemática medieval, séries infinitas, etc. Os esforços dos povos medievais produziram grandes contribuições para o mundo do pensamento, mas nada se compara à produção dos povos gregos.

RENASCIMENTO

O renascimento, a partir de 1453, foi o período de retomada para o desenvolvimento da cultura. Os grandes destaques desta época são Leonardo da Vinci, Robert Recorde, Nicolau Copérnico, entre outros. Leonardo da Vinci é frequentemente considerado um matemático, mas sua mente inquieta não se fixou na aritmética, na álgebra ou na geometria por tempo suficiente para que fizesse alguma contribuição importante nesta área. Em seus cadernos de notas, encontram-se quadraturas de lunas, construções de polígonos regulares e ideias sobre centros de gravidade e curvas de dupla curvatura; mas tornou-se mais conhecido por sua aplicação da matemática à ciência e à teoria da perspectiva. Da Vinci é citado como o típico homem da Renascença, com conhecimentos sobre tudo.

A MATEMÁTICA MODERNA

A transição do Renascimento para a Idade Moderna fez-se através de homens, na Itália, como Galileu Galilei (1564-1642) e Boaventura Cavalieri (1598-1647), na Inglaterra, Thomas Harriot (1560-1621) e Willian Oughtred (1574-1660), em outros países, Simon Stevin (1548-1620), Albert Girard (1590-1633), Johann Kepler (1571-1630), etc. Grandes ideias surgiram nesta época, como a arte analítica, o conceito de parâmetro, relação entre raízes e coeficientes, os logaritmos, etc.

Galileu Galilei inicialmente tinha tido a intenção de se graduar em medicina, mas seu gosto pelas obras de Euclides e Arquimedes levou-o a tornar-se professor de matemática, primeiro em Pisa e depois em Pádua. Num panfleto de 1606, com o título "Le operazioni del compasso geométrico et militare", ele descreveu detalhadamente o modo pelo qual o instrumento podia ser usado para efetuar uma variedade de computações rapidamente sem pena, papel ou ábaco. Utilizando seus conhecimentos de matemática e observando os céus com um telescópio, Galileu criou dois tratados importantes: Os dois principais sistemas (1632) e As duas novas ciências (1638).

Uma nova geração de matemáticos começou a surgir, entre eles René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662) e o centro da matemática passou a ser a França. Descartes, além de ser considerado o pai da filosofia moderna, apresentou uma nova visão científica transformada do mundo e estabeleceu um novo ramo da matemática, a geometria analítica. Em seu trabalho "Discours de la méthode pour bien conduire as raison et chercher la vérité dans lês sciences" (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências) de 1637, ele anunciou seu programa de pesquisa filosófica. Ele esperava, por dúvida sistemática, chegar a idéias claras e precisas a partir das quais seria possível deduzir inúmeras conclusões válidas. Essa visão de ciência levou-o a admitir que tudo fosse explicável em termos da matéria (ou extensão) e movimento. A ciência cartesiana gozou de grande popularidade por quase um século, mas depois cedeu lugar ao raciocínio matemático de Newton. Ironicamente, foi em grande parte a matemática de Descartes que mais tarde possibilitou a derrota da ciência cartesiana. As demais contribuições de Descartes concentram-se no

desenvolvimento da álgebra geométrica, classificação das curvas, identificação das cônicas, definição de normais e tangentes, etc.
Outro destaque deste período foi Fermat, que segundo Laplace, foi o verdadeiro inventor do cálculo diferencial e integral. Entre suas contribuições está o conceito de diferenciação e integração. Esse período encerrou-se com as mortes de Pascal e Fermat.

Um período importante para a matemática foi aquele compreendido entre o final do século XVII e início do século XVIII. Dois grandes cérebros viveram nesta época, Issac Newton e Leibniz. Dentre as contribuições de Newton estão: o teorema binomial, séries infinitas, método dos fluxos e o cálculo diferencial e integral. Leibniz também organizou, independentemente, um tratado sobre o cálculo e escreveu vários trabalhos que trazem a idéia de lógica matemática.

Durante o século XVIII e XIX, a lógica tomou uma importância efetiva. Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a representação gráfica das relações entre sentenças ou proposições - mais tarde ampliada por John Venn (1834-1923), E. W. Veitch (1952) e M. Karnaugh (1953). Outros destaques deste período são Augustus De Morgan (1806-1923), que escreveu um tratado sobre a lógica formal, George Boole (1815-1864), que desenvolveu a álgebra booleana, entre outros.

Após este período, a matemática seguiu por um caminho de desenvolvimento, sempre aliada a ciências como a física, química, biologia, ciências econômicas, etc. Durante o século XX, os avanços tecnológicos começavam a apontar para uma era onde a matemática passaria a ter mais importância ainda do que já figurava na história da humanidade.

- **Aula 01 | Conjuntos**
- Aula 02 | Plano Cartesiano e Módulo
- Aula 03 | Expressões Algébricas
- Aula 04 | Frações Algébricas, Racionalização e Frações Parciais

AULA 01 | CONJUNTOS

INTRODUÇÃO

Porque estudar Teoria de Conjuntos? Porque conjuntos são um conceito recorrente na computação:

- Bancos de dados são formalmente descritos como conjuntos e operações sobre estes especificadas como operações sobre conjuntos.
- Diversos algoritmos utilizam estruturas de dados que representam conjuntos.
- Tipos em linguagens de programação podem ser vistos como um conjunto de valores que compartilham um determinado conjunto de operações.

1.1 TEORIA DOS CONJUNTOS

A teoria dos conjuntos é base do pensamento matemático. **Todos os** objetos matemáticos podem ser definidos em termos de conjuntos.

A Teoria dos Conjuntos, criada pelo Matemático russo GEORGE CANTOR (1845-1918), tornou-se o elemento central da estruturação do conhecimento matemático. Como a ideia era muito abstrata e difícil de ser representada, o lógico inglês JOHN VENN idealizou uma forma simplificada para demonstrar, que são os diagramas.

O início da teoria dos conjuntos como um ramo da matemática é frequentemente marcado pela publicação do trabalho de Cantor de 1874, ***"Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen"*** **("Sobre uma Propriedade da Coleção de Todos os Números Algébricos Reais")**. Este trabalho foi o primeiro a fornecer uma prova rigorosa de que havia mais de um tipo de infinito. Anteriormente, todas as coleções infinitas tinham sido implicitamente assumidas como equinumerosas (isto é, de "o mesmo tamanho" ou com o mesmo número de elementos). Cantor provou que a coleção de números reais e a coleção de números inteiros positivos não são equinumeráveis. Em outras palavras, não é possível contar os números reais.

O conjunto é um conceito fundamental em todos os ramos da matemática. Intuitivamente, um conjunto é uma lista, coleção ou classe de objetos bem definidos. Os objetos em um conjunto, como veremos nos exemplos, podem ser qualquer coisa:

- números, pessoas, letras, rios, etc.

Esses objetos são chamados os elementos ou membros de um conjunto.

Exemplo:

1- Os números 1, 3, 7 e 10;
2- As soluções da equação $x^2 - 3x - 2 = 0$

1- As vogais do alfabeto a, e, i, o, u.
2- Os países da Europa.

DEFINIÇÃO 1 - Conjunto é uma coleção de objetos (ou coisas) bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto. É a reunião de elementos que formam um todo, e nos dá ideia de coleção.

Em um conjunto, a ordem dos elementos não importa e cada elemento deve ser listado apenas uma vez.

1.2 NOTAÇÃO DE CONJUNTOS E ELEMENTOS

Os conjuntos serão designados em geral por letras maiúsculas:

Notação: A, B, X, Y, ...

Os elementos dos conjuntos serão geralmente representados por letras minúsculas:

Notação: *a*, *b*, *x*, *y*,.....

Exemplo de um determinado conjunto e seus elementos: A = {*a*, *b*, *c*, *d*}

Assim, nos exemplos abaixo, temos os conjuntos formados por seus elementos.

Exemplos:

(a) Conjunto das vogais.

A = {a, e, i, o, u}

(b) Conjunto dos números naturais.

P = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …}

(c) Conjunto das cidades do DF.

S = {Taguatinga, Ceilândia, Samambaia, Águas Claras, Guará, ….}

(d) Conjunto países da América do Sul.

I = {Brasil, Argentina, Chile, Uruguai, Paraguai, ...}

(e) Conjunto dos números inteiros negativos.

M = {..., -5, -4, -3, -2, -1}

(f) Conjunto de empresas do ramo automobilístico.

A = {Volkswagen, Toyota, GM, Mercedes-Benz, Honda, Renault, Ford, Mitsubishi, Peugeot}

Observe que um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, etc.

1.3 DESCRIÇÃO DE UM CONJUNTO

Os conjuntos são representados de três formas:

- por forma tabular (ou por extensão);
- por compreensão (ou descrição por uma propriedade);
- por diagrama.

1.3.1 FORMA TABULAR OU POR EXTENSÃO

Quando um conjunto é dado pela enumeração (ou enumeração parcial) de seus elementos, ou seja, quando os elementos são separados por vírgulas e compreendidos entre chaves { }.

Exemplos:

(a) Conjunto das vogais: A = {a, e, i, o, u}
(b) Conjunto dos algarismos romanos: B = {I, V, X, L, C, D, M}

Podemos utilizar a representação por extensão, mesmo que o conjunto seja infinito ou finito, mas com um número elevado de elementos.

Exemplos:

(a) Conjunto dos números ímpares.

A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...} → A reticência no fim indica um conjunto infinito

(b) Conjunto dos números pares positivos, menores que 200.

i = {2, 4, 6, 8, 10, . . . , 198} → A reticência entre os elementos indica que ali existem elementos de conjunto finito

1.3.2 POR COMPREENSÃO OU DESCRIÇÃO POR UMA PROPRIEDADE

O conjunto será representado por meio de uma propriedade P (também chamado de predicado) que caracteriza seus elementos. Chamamos esta forma de ***"forma de construção de um conjunto"***. Neste caso, usamos uma letra, geralmente ***x***, para representar um elemento arbitrário, e escrevemos:

$$A = \{x/\ x \text{ tem a propriedade } P\}$$

Exemplo:

- A = {*x* / *x* é par}

"A é o conjunto dos números x tal que x tem a propriedade de ser par".

Ou seja, só pertence ao conjunto A os números pares 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

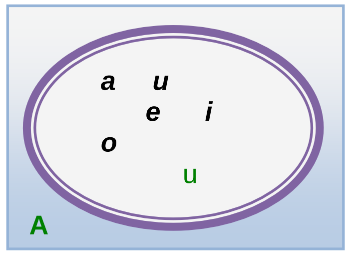
- F = {*x* | *x* é Estado da região Sudeste do Brasil}
- $G = \{x \mid x \in R \text{ e } 4 < x < 7\}$
- H = {x | x é um divisor inteiro de 6}
- $I = \{x \mid (\exists y)\ (y \in N \text{ e } x = 2y)\}$

Observe que não descrevemos os elementos dos conjuntos. Apenas a propriedade que define quem faz parte do conjunto.

1.3.3 POR DIAGRAMA DE VENN (JHON VENN, LÓGICO INGLÊS, 1834-1923)

O Diagrama de Venn é uma representação gráfica utilizada na matemática para apresentar elementos, propriedades ou problemas de um conjunto. É caracterizado por circunferências oval. Dentro dos círculos são inseridos os elementos dos conjuntos e, para representar o **Universo**, os círculos são inseridos dentro de um retângulo.

Exemplo - Seja A o conjunto das vogais



O diagrama recebe esse nome em homenagem ao matemático e filósofo britânico **John Venn** (1834-1923). A representação gráfica de Venn era uma atualização melhorada dos sistemas produzidos pelos matemáticos: Leibniz, George Boole e Augustus De Morgan.

O diagrama de Venn é muito utilizado não somente na matemática e na lógica, mas também por diversas áreas do conhecimento como logística, pesquisas de mercado, ciência da computação, etc.

OBSERVAÇÃO

Um conjunto é sempre definido por uma ***propriedade*** que o caracteriza. A recíproca, no entanto, nem sempre é verdadeira. Em outras palavras, é possível enunciar uma propriedade que não determine um conjunto. O famoso "**paradoxo do barbeiro**", a seguir, ilustra essa ideia.

- **Suponha-se que exista uma cidade com apenas um barbeiro. Nesta cidade, todos os homens se mantêm bem barbeados e eles fazem isso apenas de duas maneiras:**

  1. **Barbeando-se**
  2. **Frequentando o barbeiro**

Outra maneira de definir isso é:

- **O barbeiro é um homem da cidade que faz a barba de todos aqueles, e somente dos homens da cidade que não barbeiam a si mesmos.**

Tudo isso parece perfeitamente lógico, até que se coloca a questão paradoxal:

- ***Quem barbeia o barbeiro?***

Esta questão leva a um paradoxo porque, de acordo com a afirmação acima, ele pode ser barbeado por:

1. Ele mesmo, ou
2. O barbeiro (que passa a ser ele mesmo)

No entanto, *nenhuma* destas possibilidades são válidas, porque:

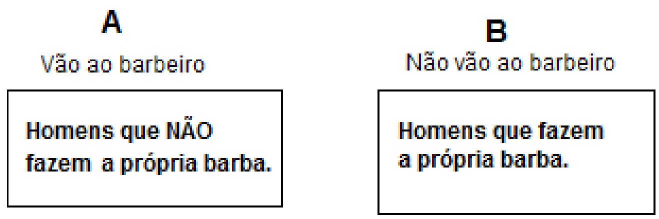
1. Se o barbeiro barbeia a si mesmo, então o barbeiro (ele mesmo) não deve barbear a si mesmo.
2. Se o barbeiro não barbeia a si mesmo, então ele (o barbeiro) deve barbear a si mesmo.

Se você pensar um pouquinho, irá concluir que esse barbeiro não existe. Basta considerar o que aconteceria em cada uma das duas únicas alternativas possíveis:

- ele fazer ou não a própria barba.

Nesta cidade, nem todos os homens da cidade vão ao barbeiro. Assim, a população masculina da cidade pode ser dividida em dois grupos:

- *os que se barbeiam sozinhos* e
- *os que vão ao barbeiro (não faz a própria barba).*



Logo,

Conjunto A - Assumimos que o barbeiro faz a barba de todos os homens que não barbeiam a si mesmos, certo?

Porém, o barbeiro faz ou não faz a sua própria barba?

- Se ele faz, então ele pertence ao conjunto B.
- Se ele não faz, ele pertence ao conjunto A.

Mas se não fizer (**pertence ao conjunto A**), então, ele como "consumidor" deve fazer a própria barba. Logo ele também **pertence ao conjunto B**.

Mas se ele faz a própria barba (**pertence ao conjunto B**), como consumidor, ele entra no grupo dos que não fazem a própria barba e por isso vão ao barbeiro (**pertence ao conjunto A**).

Assim, se ele faz a própria barba, ele não faz a própria barba, o que é uma contradição.

Então, foi dada uma propriedade: “fazer a barba apenas de quem não faz a própria barba” e, no entanto, não conseguimos determinar um conjunto de barbeiros que corresponda a essa propriedade.

Para evitar esse tipo de problema, sempre se define o ***conjunto universo*** e trabalhamos apenas com subconjuntos desse conjunto. O conjunto universo será definido mais a frente.

APLICAÇÃO DE CONJUNTOS NA COMPUTAÇÃO

- **Alfabeto** - Um alfabeto é um conjunto finito, ou seja, um conjunto que pode ser denotado por extensão. Os elementos de um alfabeto são chamados de símbolos ou caracteres.

- **Palavra** - Uma palavra sobre um alfabeto é uma sequência finita de símbolos do alfabeto, justapostos (sem espaços entre os símbolos).

- **LINGUAGEM FORMAL** - Chamamos de ***Linguagem Formal*** a um conjunto de palavras sobre um alfabeto. Portanto, podemos entender que uma ***linguagem de programação*** é o conjunto de todos os seus possíveis programas e que um programa é uma palavra da linguagem de programação.

Exemplos:

- $\varnothing$ é um alfabeto;
- {a, b, c, d} é um alfabeto;
- IN não é um alfabeto (pois não é finito);
- ε é uma palavra sobre {a, b, c], onde ε é a palavra vazia;
- ε é uma palavra sobre $\varnothing$.

1.4 RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Se A é um conjunto e *x* é um objeto então escrevemos:

- $\boldsymbol{x \in A}$, se *x* **é um elemento** de A (lê-se: *x* **pertence** a A)
- $\boldsymbol{x \notin A}$, se *x* **não é um elemento** de A (lê-se: *x* **não pertence** a A)

EXEMPLO: Considere o conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Então dizemos que $2 \in A$, $5 \in A$, mas $10 \notin A$.

1.5 IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dois conjuntos A e B são iguais, se eles possuírem os ***mesmos elementos***. Ou seja, todos os elementos de A pertencem a B e vice-versa.

NOTAÇÃO: A = B

Por exemplo, se A = {*x*/ *x* é vogal do alfabeto} e B = {*a, e, i, o, u*}, então A = B.

Se $A \neq B$ (A é diferente de B), então uns desses conjuntos possui pelo menos um elemento que não pertence ao outro.

1.6 CONJUNTO VAZIO

O conjunto vazio ***não possui elementos***.

NOTAÇÃO: $\varnothing$ ou { }

EXEMPLO

A = {*x*/ $x^2 = 4$ e *x* é ímpar}

A é um conjunto vazio, pois não existe nenhum número ímpar que elevado ao quadrado dê 4.

Exemplos de conjuntos vazios.

1. B = {x | x é inteiro maior que 10 e menor que 5}.
2. C = {x | x é um homem com mais de 200 anos}.
3. D = {x | x + 3 = 0 e x é inteiro positivo}.

OBSERVAÇÃO: A notação $\{\emptyset\}$ não é uma notação correta para representar conjunto vazio. Apenas $\emptyset$ ou $\{\ \ \}$ estão corretas.

1.7 CONJUNTO UNITÁRIO

O conjunto unitário é formado por um ***único elemento***. Por exemplo, o conjunto Q = { x | x é número natural par e primo}, Logo Q = { 2 }.

1.8 CONJUNTO UNIVERSO

O conjunto universo é formado por ***todos os elementos com os quais estamos trabalhando num determinado assunto***.

NOTAÇÃO: U

2 SUBCONJUNTOS

Se cada elemento do conjunto A é também um membro do conjunto B, dizemos que A é um subconjunto de B. Mais especificamente,

- *A um subconjunto de B se* $x \in A$ *implica em* $x \in B$.

Neste caso dizemos que "*A está contido em B*".

NOTAÇÃO: $A \subset B$

A ⊂ B lê-se:
- **A é subconjunto de B.**
- **A está contido em B.**
- **A é parte de B.**

2.1 RELAÇÃO DE INCLUSÃO

A relação A ⊂ B chama-se relação de inclusão. São alguns casos particulares de inclusão:

- A ⊂ A, pois qualquer elemento de A, pertence a A.
- ∅ ⊂ A, para qualquer conjunto A, ou seja, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
- Se A ⊂ B e B ⊂ A, então A = B.

Se existe algum elemento de A que não está em B, então dizemos que "*A não está contido em B*".

NOTAÇÃO: $A \not\subset B$

Exemplo: Considere os conjuntos A = { 1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

Como cada elemento de A é membro do conjunto B, A é um subconjunto de B. Neste caso, $A \subset B$.

Exemplo: Considere os conjuntos X = {1, 2, 3, 4} e Y = {1, 2, 4 , 6, 8}.

Observe que o elemento 3 de X não é membro de Y. Neste caso $X \not\subset Y$.

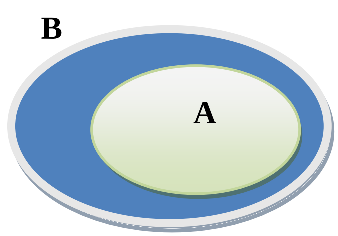
OBSERVAÇÕES

1. O conjunto vazio é considerado como um subconjunto de qualquer conjunto, isto é, $\Phi \subset$ A, qualquer que seja A.
2. $\subset$ significa ***"Contido em"***, $\subseteq$ significa ***"Contido em ou igual a".***
3. Os elementos de um conjunto podem ser conjuntos. Portanto, preste atenção nos conceitos de pertinência e inclusão.

Exemplos: Considere o conjunto S = {a, b, c, d, ∅, {0}, {1, 2}}. Então:

- $\{a\} \notin S$
- $\{a\} \subseteq S$
- $\emptyset \in S$
- $\emptyset \subseteq S$
- $\{0\} \in S$
- $\{1,2\} \in S$
- $\{a, b, c, d\} \notin S$
- $\{a, b, c, d\} \subseteq S$

2.2 EM FORMA DE DIGRAMA DE VENN



A $\subset$ B

OBS: A relação A $\subset$ B também pode ser escrita como $B \supset A$ (B contém A). A relação A $\subset$ B é do menor conjunto para o maior, enquanto a relação $B \supset A$ é do maior para o menor.

Por exemplo, sejam A = {2, 4, 6, 8, 10} e B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}. Assim, dizemos que:

- A $\subset$ B e $B \supset A$

OBS.: Os símbolos de pertinência $\in$ e $\notin$ são utilizados para relacionarem somente elementos com conjuntos, enquanto que os símbolos $\subset$ e $\supset$ são utilizados para relacionarem somente conjunto com conjunto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1- Considere os conjuntos:

A = { 6, 8, 10, 12}
B = { 8, 9,10,11,12,13}
C = { 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
D = ∅

Estabeleça as relações de $\in, \notin, \subset, \not\subset, \supset$.

(a) 10 $\underline{\in}$ A (c) C $\underline{\supset}$ A (e) {9, 10, 11} $\underline{\subset}$ B (g) D $\underline{\subset}$ A
(b) 13 $\underline{\notin}$ C (d) {9, 11} $\underline{\not\subset}$ A (f) C $\underline{\not\subset}$ A (h) D $\underline{\subset}$ $\varnothing$

2- Dados os conjuntos A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = { 2, 4, 6}, C = { 1, 3, 5} e D = $\varnothing$, marque verdadeiro ou Falso.

(a) B $\in$ A ➔ Falso, pois B não é elemento. O correto seria $\subset$.
(b) 0 $\in$ D ➔ Falso, pois D é o conjunto vazio, portanto não pode ter nenhum elemento, nem mesmo o zero.
(c) 5 $\subset$ C ➔ Falso, pois 5 é elemento. O correto seria o símbolo $\in$.
(d) D $\subset$ B ➔ Verdadeiro, pois o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
(e) C $\subset$ A ➔ Verdadeiro, pois o símbolo de $\subset$ está relacionando conjunto com conjunto e além disso, todos os elementos de C são também elementos de A.

3- Sejam os conjuntos: A = {1, 7, 9, 15}, B = {7, 9}, C = {7, 9, 15, 20}. Observe que:

$B \subseteq C$ $15 \in C$
$B \subseteq A$ $\{7, 9\} \subseteq B$
$B \subset A$ $\{7\} \subset A$
$A \not\subset C$ $\varnothing \subseteq C$

4- Seja A um conjunto e seja B = {A, {A}}. Temos:

$A \in B$ e $\{A\} \in B$
$\{A\} \subseteq B$ e $\{\{A\}\} \subseteq B$
$A \not\subset B$

3 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Em aritmética, aprendemos a somar, subtrair e multiplicar, isto é, atribuímos a cada par de números *x* e *y*,

- um número x + y, chamado a soma de x e y;
- um número x – y chamado de diferença de x e y;
- um número x.y chamado o produto de x e y.

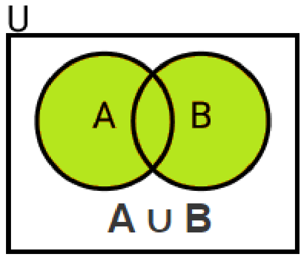
Esses atributos são chamados as operações de adição, subtração e multiplicação de números.

Nesta seção, definem-se as operações de união, interseção e diferença de conjuntos. Estas operações comportam-se de uma maneira similar às operações de números.

3.1 REUNIÃO OU UNIÃO DE CONJUNTOS

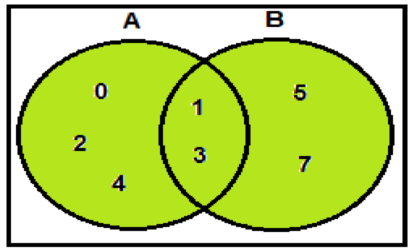
A união de dois conjuntos A e B é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou pertencem a B. Ou seja, pertence a pelo menos um dos conjuntos.

NOTAÇÃO: $A \cup B = \{ x \,/\, x \in A$ **ou** $x \in B\}$

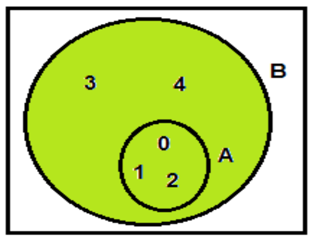


No diagrama a cima, a união $A \cup B$ está colorida.

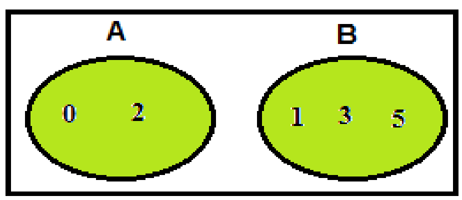
EXEMPLO: A = {0,1,2,3,4} e B = {1,3,5,7} e **A ∪ B** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}



EXEMPLO: A = {0,1,2} e B = {0,1, 2, 3, 4} e **A ∪ B** = {0, 1, 2, 3, 4}



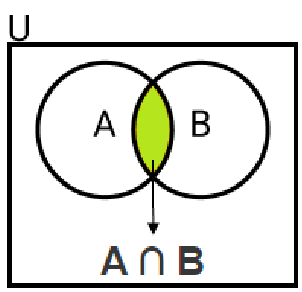
EXEMPLO: A = {0, 2} e B = {1, 3, 5} e **A ∪ B** = {0, 1, 2, 3, 5}



3.2 INTERSEÇÃO DE CONJUNTO

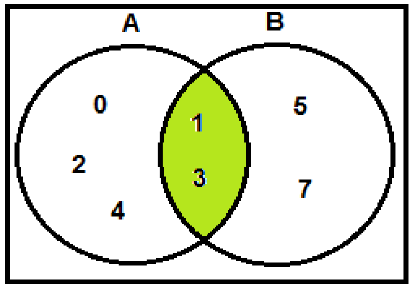
A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que são comuns a A e B, isto é, pelos elementos pertencentes a A e também a B.

NOTAÇÃO: A ∩ B = $\{x \, / \, x \in A$ ***e*** $x \in B\}$

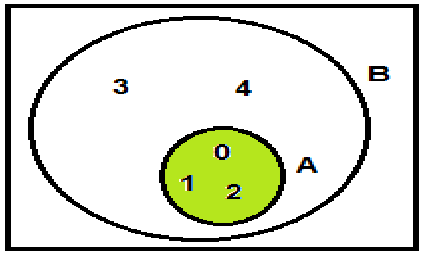


No diagrama a cima, a união $A \cap B$ está colorida.

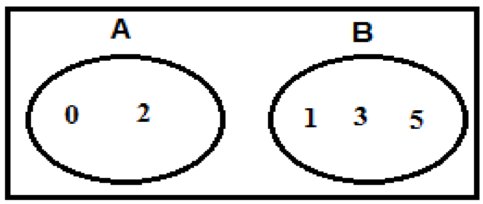
EXEMPLO: A = {0,1,2,3,4} e B = {1,3,5,7} e **A** ∩ **B** = {1, 3}



EXEMPLO: A = {0, 1, 2} e B = {0,1, 2, 3, 4} e **A** ∩ **B** = {0, 1, 2}



EXEMPLO: A = {0, 2} e B = {1, 3, 5} e A ∩ B = ∅



OBSERVAÇÃO: Quando A ∩ B = Φ, os conjuntos A e B são chamados **DISJUNTOS**.

3.3 DIFERENÇA DE CONJUNTOS

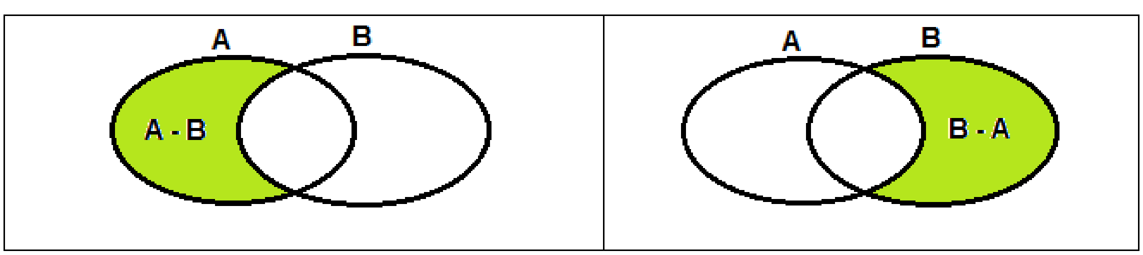
A diferença de dois conjuntos A e B é um conjunto dos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.

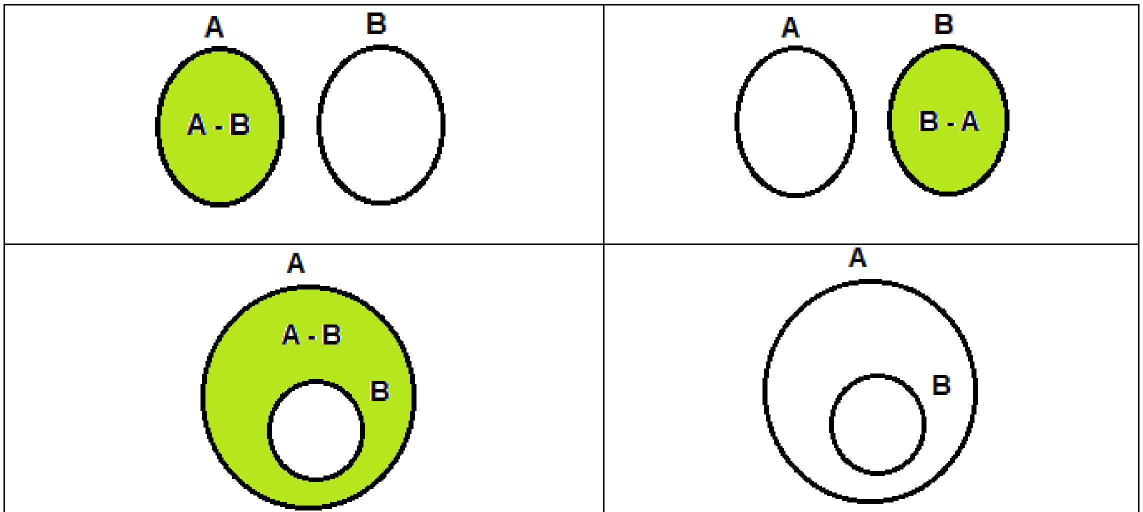
NOTAÇÃO: A – B = $\{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin B\}$

EXEMPLO: A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5, 7}

Os elementos que estão em A, mas não estão em B são: 0, 2 e 4. Logo, A – B = {0, 2, 4}

O quadro abaixo resume todas as possibilidades para diferença de conjuntos (região colorida).



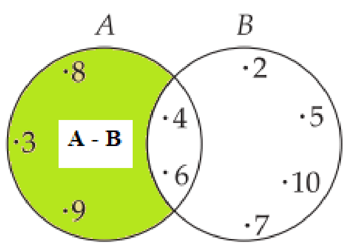


Se B ⊂ A, então B – A é conjunto vazio, pois todo elemento de B pertence a A.

Exemplo 2- Calcular A – B, sabendo que A = {3, 4, 6, 8, 9} e B = {2, 4, 5, 6, 7, 10}.

-Solução-

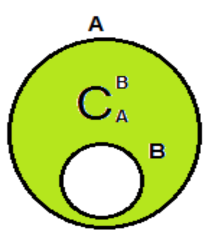
A – B = {3, 8, 9}, elementos que estão em A mas não estão em B.
Graficamente:



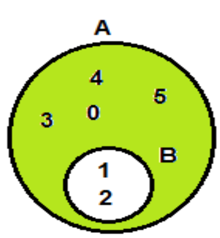
3.4 CONJUNTO COMPLEMENTAR

Se A e B são conjuntos tais que B ⊂ A, então o complementar de B em relação a A é a diferença A – B, ou seja, o complementar de B em relação a A é formado pelos elementos de A que não estão em B.

NOTAÇÃO: C_A^B = A – B = {x/ x ∈ A e x ∉ B}



EXEMPLO: Se A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e B = {1, 2}, então C_A^B = A – B = {0, 3, 4, 5}.



Se A é um conjunto, então também podemos usar a notação $\overline{A}$ para denotar o complementar de A.

PROPRIEDADES

Suponha U um conjunto universo qualquer. Então para qualquer conjunto A $\subset$ U, tem-se:

1. **Lei complementar**

   - A $\cup$ A^C **= U**
   - A $\cap$ A^C **=** $\varnothing$
   - $U^C = \varnothing$
   - $\varnothing^C = U$
   - Se A $\subset$ B, então $A^C \subset B^C$**.**

2. **Involução ou lei do duplo complementar.**

   - $\left(A^C\right)^C = A$

   O complementar do complementar de A é o próprio A.

3. **Leis de Morgan**

   - $(A \cup B)^C = A^C \cup B^C$
   - $(A \cap B)^C = A^C \cap B^C$

3.5 CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO OU CONJUNTO DE POTÊNCIAS

Dado o conjunto A, o conjunto das partes de A, é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A.

NOTAÇÃO: P(A)

OBS.: Se A possui ***n*** elementos, então o número de subconjuntos de A (partes de A) é dado por 2^n.

EXEMPLOS:

1 - Seja A = {a, b}

Como o conjunto A tem dois elementos, n = 2. Logo, $2^n = 2^2 = 4$subconjuntos. São eles: ∅, {a}, {b} e {a, b}, ou seja,

P(A) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}

OBS.: Conjunto vazio e o próprio conjunto A sempre farão parte do conjunto das partes P(A).

2 - Seja B = {1, 2, 3}

Como o conjunto B tem 3 elementos, n = 3. Logo, $2^n = 2^3 = 8$ subconjuntos. São eles:

∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}, ou seja,

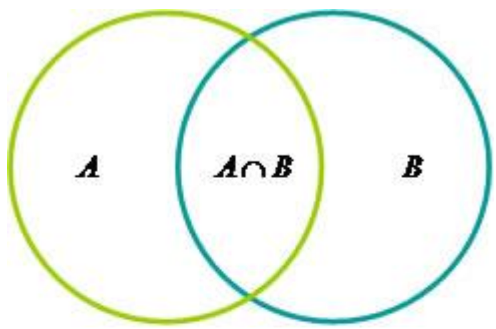
P(A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

Portanto, observe que um conjunto $X \in P(A)$ se, e somente se $X \subset A$.

6 NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO ENTRE DOIS CONJUNTOS

Consideremos dois conjuntos A e B, iremos determinar os elementos de A por n(A), os elementos de B por n(B), a união de A com B por n(A U B) e a intersecção de A com B por n(A ∩ B). O número de elementos da união de A e B é dada por:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$



Exemplo 1 – Dados os conjuntos A = {1,4,5,6,8} e B = {2,6,8,13,17,20}, determine o número de elementos da união entre A e B:

Observe que:

- o número de elementos de A é n(A) = 5.
- o número de elementos de B é n(B) = 6.
- o número de elementos de $A \cap B$ é $n(A \cap B) = 2$.

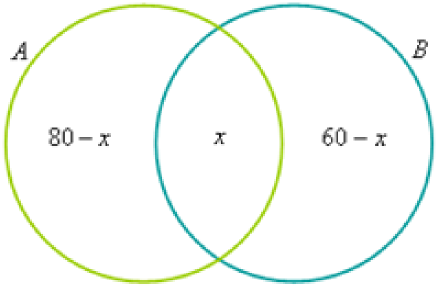
Logo,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ elementos.

Observe que o termo $n(A \cap B)$ impede que dois elementos iguais de A e B sejam contados mais de uma vez. Por exemplo, os elementos 6 e o 8 são contados uma única vez cada.

Exemplo 2 - (Unifap) O dono de um canil vacinou todos os seus cães, sendo que 80% contra parvovirose e 60% contra cinomose. Determine o porcentual de animais que foram vacinados contra as duas doenças.

-Resolução-



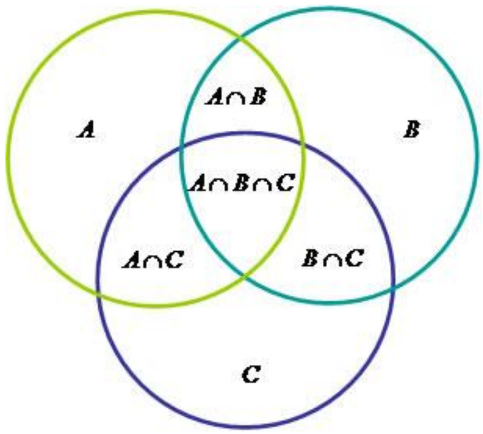
$80 - x + x + 60 - x = 100$
$140 - 2x + x = 100$
$-x = 100 - 140$
$-x = -40$
$x = 40$

O porcentual de animais vacinados contra as duas doenças é de 40%.

7 NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO ENTRE TRÊS CONJUNTOS

Consideremos dois conjuntos A, B e C, teremos a seguinte relação na determinação do número de elementos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cup B \cup C)$$



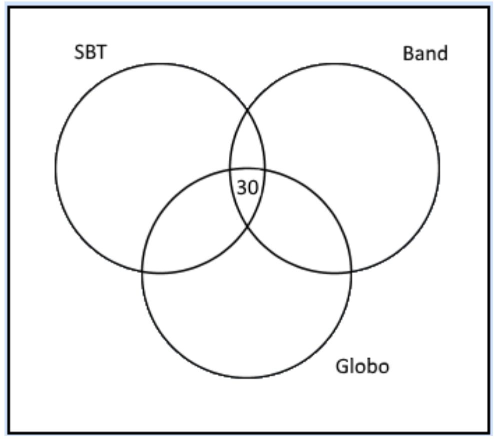
Exemplo - Uma pesquisa com 1000 pessoas conclui que:

- 450 pessoas gostam de ver a GLOBO,
- 430 o SBT,
- 340 a BAND,
- 200 pessoas gostam da GLOBO e do SBT,
- 180 gostam da GLOBO e da BAND,
- 100 gostam da BAND e do SBT,
- 30 gostam dos três canais.

(A) quantas pessoas não gostam de nenhum dos canais?
(B) quantas pessoas gostam de apenas um canal?

- Solução-

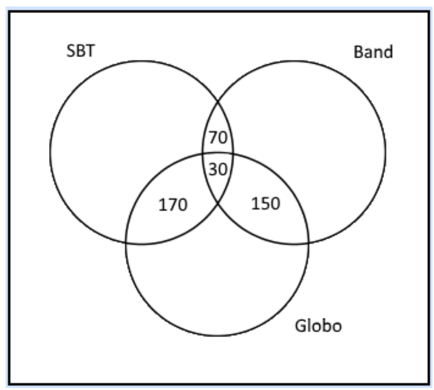
Para resolver este problema, inicia-se por completar os conjuntos de dentro para fora, descontando-se o valor da interseção. Pelo enunciado, 30 pessoas gostam dos 3 canais ao mesmo tempo. Logo, este valor é a quantidade de pessoas na interseção dos 3 conjuntos, que acontece no centro.



Completando a interseção dos outros conjuntos, dois a dois, subtraímos 30 de cada valor apresentado no enunciado:

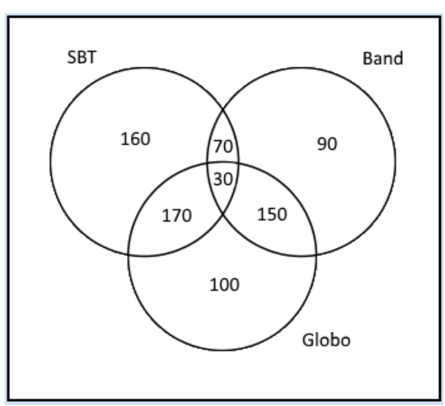
- Gostam da Globo e SBT: 200 – 30 = 170
- Gostam da Globo e Band: 180 – 30 = 150
- Gostam da Band e SBT: 100 – 30 = 70

Completando as interseções, temos:



Completando com aquelas pessoas que gostam apenas da Globo, apenas do SBT e apenas da Band, vamos subtrair o total de cada canal, das interseções:

- Gostam apenas da Globo: 450 – 170 – 150 - 30 = 100
- Gostam apenas do SBT: 430 – 170 – 70 - 30 = 160
- Gostam apenas da Band: 340 – 150 – 70 - 30 = 90



Logo, respondendo as perguntas:

(A) quantas pessoas não gostam de nenhum dos canais?

Como 1000 pessoas foram entrevistadas, o total de pessoas que não gostam de nenhum canal é:

1000 – 160 – 70 – 90 – 170 – 30 – 150 – 100 = 230 pessoas

(B) quantas pessoas gostam de apenas um canal?

Aqui queremos saber quantas pessoas gostam somente da Globo, somente do SBT e somente da BAND, que corresponde:

160 + 90 + 100 = 350 pessoas gostam apenas de um dos canais.

8 CONJUNTO DE NÚMEROS

8.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Uma exposição sistemática dos conjuntos numéricos, utilizados na Matemática, pode ser feita a partir dos números usados para contar, chamados de *números naturais*. Estes números são conhecidos há tantos milênios que o famoso matemático Kronecker disse:

“Deus criou os números naturais, todo o resto é obra do homem.”

A ideia do número *zero* só apareceu mais tarde, tendo sido introduzido pelos hindus. Uma notação para o mesmo surgiu a partir do século XI quando foi difundido e adotado o sistema de numeração decimal hindu. Este fato foi extremamente importante para a universalização da Matemática na sua forma escrita, uma vez que os seus símbolos são hoje lidos e compreendidos em quase toda parte do mundo. Apesar de historicamente o *zero* não ser um número “natural” (no sentido de usado para contar), incluir ou não o zero como número natural é uma questão de preferência pessoal ou então, de conveniência.

O conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$. São os números positivos inteiros

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$$

O conjunto dos números naturais não-nulos (sem o elemento zero) , é representado por $\mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}$$

Os números naturais foram o primeiro sistema de números desenvolvidos e foram usados primitivamente, para contagem.

8.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

A subtração nem sempre é possível no conjunto dos naturais $\mathbb{N}$. Por exemplo, não existe número natural que represente a diferença 3 - 5. Por isso, foi criado o conjunto dos números inteiros. Nesse conjunto a diferença 3 – 5 é representada por -2.

Indica-se por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e por $\mathbb{Z}$

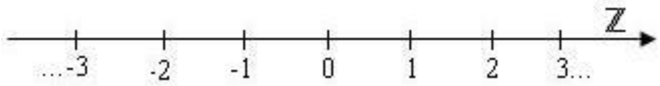
- O conjunto dos números não-nulos, isto é, o zero não faz parte do conjunto:

  $\mathbb{Z} = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$

$\mathbb{Z}^* = \{...,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,...\}$

Podemos ver que todo número natural é inteiro. Por isso, escrevemos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (lê-se “está contido em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$").

Uma forma de representar geometricamente o conjunto $\mathbb{Z}$ é construir uma reta numerada, considerar o número 0 como a origem, e o número 1 em algum lugar, tomar a unidade de medida como a distância entre 0 e 1 e por os números inteiros da seguinte maneira:



Observando ainda na reta numerada, podemos afirmar que todos os números inteiros possuem um e somente um antecessor e também um e somente um sucessor.

Indicamos o ***conjunto dos números inteiros não negativos*** por

$$\mathbb{Z}_+ = \{ 0, 1, 2, 3, 4, . . . \}$$

e o ***conjunto do números inteiros não positivos*** por

$$\mathbb{Z}_- = \{ 0, -1, -2, -3, -4, . . . \}$$

8.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

A divisão nem sempre é possível em $\mathbb{Z}$, por exemplo, não existe número inteiro que represente o quociente -3 : 2.

Por isso, foi criado o conjunto dos números racionais. Nesse conjunto o quociente -3 : 2 é indicado por $\frac{-3}{2}$ ou por –1,5. Indica se por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e por $\mathbb{Q}^*$ o conjunto dos números racionais não-nulos:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

$$\mathbb{Q}^* = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in \mathbb{Z}^* \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

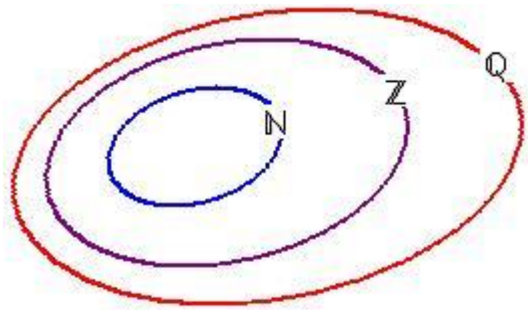
Observe, portanto que número racional é todo aquele que pode ser representado com a razão entre dois números inteiros, com o segundo não-nulo.

A condição $b \in Z^*$, significa que b é um número inteiro diferente de zero, já que não podemos dividir um número por zero.

Assim, entendemos que todo número inteiro também é racional, pois pode ser considerado como uma razão de denominador 1.

Por exemplo: $5 = \frac{5}{1}$; por isso, escrevemos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, temos também que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Essas relações entre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ podem ser resumidas pelo diagrama:



8.4 CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Dentre os números decimais existem as dízimas não-periódicas, que são números com infinitas casas decimais e não-periódicos.

Exemplo:

1/3 = 0,333333333....... que é uma dízima periódica.

π = 3,141592654 ….. que é uma dízima não periódica.

Esses números são chamados de irracionais, e o conjunto formado por eles é indicado por Π ou $\mathbb{Q}'$, isto é:

$$\Pi = \{x \;/\; x \text{ é dízima não} - \text{periódica}\}$$

Os irracionais são números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$.

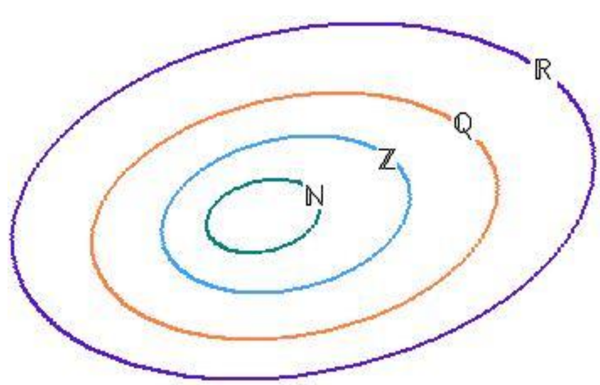
8.5 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Qualquer número racional ou irracional é chamado de número real. Podemos dizer, portanto que um número real é todo número decimal, finito ou infinito. Indica-se por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}^*$ o conjunto dos números reais não-nulos, isto é:

$$\mathbb{R} = \{x | x \text{ e numero racional ou irracional}\}$$

$$\mathbb{R}^* = \{x | x \text{ e numero real diferente de zero}\}$$

As relações entre os conjuntos numéricos até agora apresentados podem ser feitos em um diagrama:



Pelo diagrama, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Veja a seguir as notações para representar alguns subconjuntos especiais de $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R}_+ = \{x | x \text{ é número real positivo ou nulo}\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x | x \text{ é número real positivo}\}$

$\mathbb{R}_- = \{x | x \text{ é número real negativo ou nulo}\}$

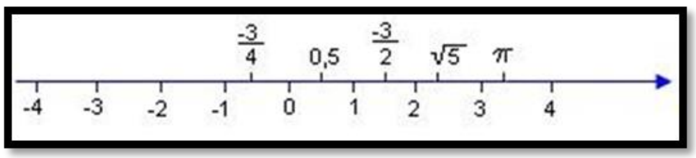
$\mathbb{R}_-^* = \{x | x \text{ é número real negativo}\}$

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE $\mathbb{R}$

A cada ponto de uma reta, podemos associar um único número real, e a cada número real podemos associar um único ponto na reta.

Dizemos que o conjunto $\mathbb{R}$ é denso, pois entre dois números reais existem infinitos números reais (ou seja, na reta, entre dois pontos associados a dois números reais, existem infinitos pontos).

Veja a representação na reta de $\mathbb{R}$:



9 INTERVALOS REAIS

Considere as seguintes afirmações:

- A faixa salarial da Empresa XYZ está entre 2 e 7 salários mínimos.
- O tempo de espera da fina do banco está acima de 10 minutos.
- A idade produtiva está entre 18 e 50 anos.
- A faixa de idade que mais preocupa está a cima dos 60 anos.
- O cliente espera mais de dois dias para receber a mercadoria.

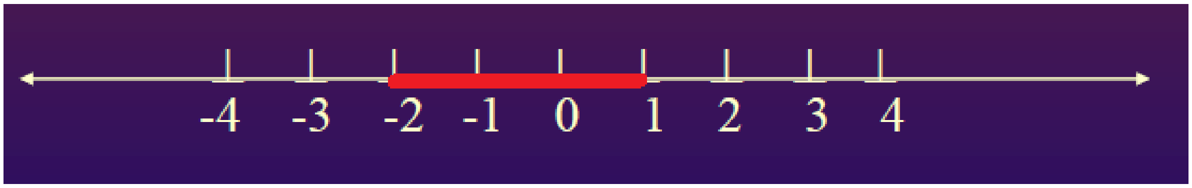
Todas as afirmações nos dão a ideia subjetiva de intervalo.

9.1 INTERVALOS NUMÉRICOS

Alguns subconjuntos de IR podem ser representados de uma maneira bastante simplificada. São os chamados intervalos reais.

Exemplo - Considere a reta dos números Reais. A distância entre dois pontos quaisquer sobre a reta real representa um intervalo numérico.

A linha vermelha acima representa um intervalo numérico que vai de -2 a 1.

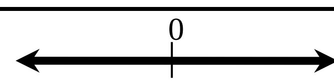


9.2 REPRESENTAÇÃO DOS INTERVALOS NUMÉRICOS

Considere a reta dos números Reais

Por compreensão (ou descrição): $\{x \in IR / -2 \leq x \leq 2\}$.

Usaremos as seguintes notações para representar tipos especiais de subconjuntos reais chamados ***intervalos.*** Logo abaixo cada conjunto tem sua representação na reta real.

TIPOS DE INTERVALOS	REPRESENTAÇÃO	GRÁFICO	OBSERVAÇÃO
Fechado	$[a, b] = \{x \in IR / a \leq x \leq b\}$		Inclui os limites *a* e *b*.
Fechado à esquerda	$(a, b] = \{x \in IR / a < x \leq b\}$		Exclui *a* e inclui *b*.
Fechado à direita	$[a, b) = \{x \in IR / a \leq x < b\}$		Inclui *a* e exclui *b*.
Aberto	$(a, b) = \{x \in IR / a < x < b\}$		Exclui os limites a e *b*.
Semi-fechado	$(-\infty, b] = \{x \in IR / x \leq b\}$		Valores menores ou iguais a *b*.
Semi-aberto	$(-\infty, b) = \{x \in IR / x < b\}$		Valores menores que *b*.
Semi-fechado	$[a, +\infty) = \{x \in IR / x \geq a\}$		Valores maiores ou iguais a *a*.
Semi-aberto	$(a, +\infty) = \{x \in IR / x > a\}$		Valores maiores que *a*.
Reais	$(-\infty, +\infty) = IR$		Todos os valores, inclusive *a* e *b*.

Exemplos

(a) [2; 8] 

(b) (2; 8] 

(c) [2; 8) 

(d) (2; 8) 

(e) $(-\infty, 8]$ 

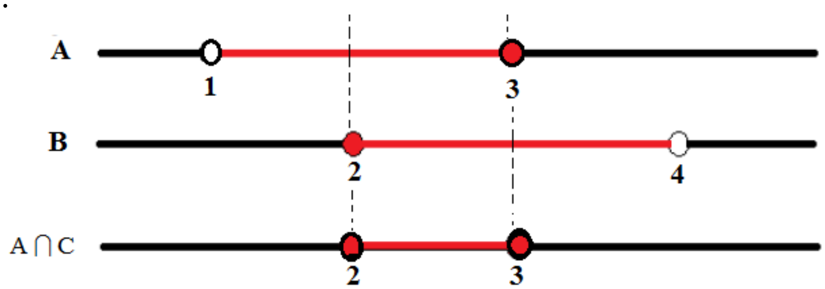
(f) $(-\infty, 8)$ 

(g) $[2,+\infty)$ 

(h) $(2,+\infty)$ 

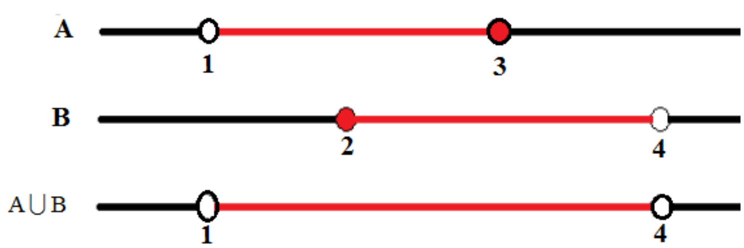
Exemplo - Considere os conjuntos (1, 3) e [2, 4). Utilize a reta real para representar os intervalos formados pela

(a) interseção de A e B.



$$A \cap B = [2,3] \text{ ou } A \cap B = \{x \in IR / 2 \leq x \leq 3\}.$$

(b) união de A e B.



$$A \cup B = (1,4) \text{ ou } A \cap B = \{x \in IR / 1 < x < 4\}$$

10 INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Inequação é uma expressão matemática que possui a propriedade de expressar desigualdades, diferente da equação que expressa igualdade. Na inequação se usam os símbolos que aparecem são:

- **> : maior que**
- **< : menor que**
- **≥ : maior que ou igual a**
- **≤ : menor que ou igual a**

A forma de resolver uma inequação é semelhante ao de uma equação, onde tentamos isolar a variável das constantes.

Exemplo: A desigualdade 10 + 2x < 100, é um exemplo de inequação cuja incógnita é **x**.

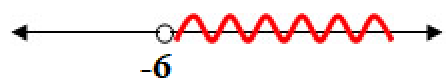
As soluções de uma inequação podem ser representadas na reta real de acordo com o que foi apresentado na seção anterior **INTERVALOS REAIS**.

Exemplo – Resolver a inequação $5x+11>3x-1$ e representar na reta real.

$$\begin{aligned}
&5x+11 > 3x-1\\
&5x-3x > -1-11\\
&2x > -12\\
&x > \frac{-12}{2}\\
&x > -6
\end{aligned}$$

Logo, os números reais maiores do que -6 são as soluções da inequação. Ou seja, qualquer número acima de -6 satisfaz a inequação dada.

O conjunto solução é representado por $S=(-6,+\infty)$ e a representação na reta é



OBSERVAÇÕES:

1. Observe que na posição do -6 na reta, colocamos uma "bolinha aberta", já que a desigualdade aqui é o "maior que" (>). Qualquer dúvida, volta na seção anterior, **INTERVALOS REAIS**.

2. O conjunto solução é $S=(-6,+\infty)$ pode ser escrito também como $S=\{x \in IR \,/\, x > -6\}$.

Exemplo - Resolver a inequação $\dfrac{2x-1}{10}-\dfrac{3x-2}{5} \geq \dfrac{1}{5}$ e representar na reta real.

-Solução-

$$\frac{2x-1}{10}-\frac{3x-2}{5} \geq \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{(2x-1)-2(3x-2)}{10} \geq \frac{1}{5}$$

$$\frac{2x-1-6x+4}{10} \geq \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{-4x+3}{10} \geq \frac{1}{5}$$

$$-20x+15 \geq 10 \quad \Rightarrow \quad -20x \geq 10-15$$

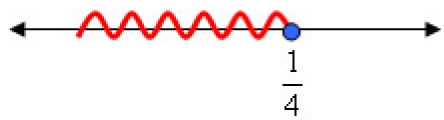
$-20x \geq -5$ (multiplicar por -1)

$20x \leq 5$ (Observe que ao multiplicar por -1, o sinal $\geq$ muda para $\leq$)

$$x \leq \frac{5}{20} \quad \Rightarrow \quad x \leq \frac{1}{4}$$

Logo, os números reais menores ou igual a 1/4 são as soluções da inequação. Ou seja, qualquer número abaixo ou igual 1/4 satisfaz a inequação dada.

O conjunto solução é representado por $S = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ ou $S = \{x \in IR \,/\, x \leq \frac{1}{4}\}$ e a representação na reta é



OBSERVAÇÃO:

1. Observe que na posição do 1/4 na reta, colocamos uma **"bolinha fechada"**, já que a desigualdade aqui é o "menor ou igual a" ($\leq$).

Exemplo - Resolver a inequação $5x+11>3x-1$ e representar na reta real.

- Solução-

$4 < 2x - 4 < 10$
$4 + 4 < 2x < 10 + 4$
$8 < 2x < 14$
$8/2 < x < 14/2$
$4 < x < 7$

Logo, $S = (4, 7)$ ou $S = \{x \in IR \,/\, 4 < x < 7\}$ e a representação na reta é

Exemplo - Resolver o sistema de inequações abaixo e represente na reta real.

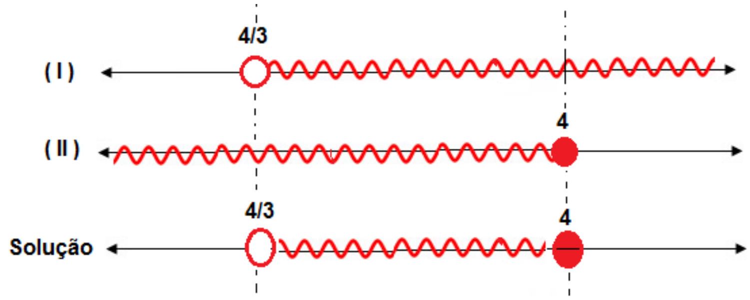
$$\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ -x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

-Solução-

Devemos resolver cada inequação separadamente, e depois analisar os conjuntos soluções encontrados para cada uma das desigualdades.

Inequação I		**Inequação II**
$3x - 4 > 0$	e	$-x + 4 \geq 0$
$3x > 4$		$-x \geq -4$ (-1)
$x > 4/3$		$x \leq 4$

Representar cada solução em uma reta separada. A terceira reta é a reta solução do sistema de inequações.



O conjunto solução de um sistema de inequações é um conjunto que é a interseção entre dois intervalos. Ou seja, o conjunto solução é dado pelos **valores reais que pertencem a ambos os intervalos (I e II)**.

Assim, como a interseção entre os intervalos I e II, está entre 4/3 e 4, incluindo o 4, a terceira reta é pintada entre esses dois valores.

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \left(\frac{4}{3}, 4\right]$ ou $S = \{x \in IR / 4/3 < x \leq 4\}$

Exemplo - Resolver o sistema de inequações abaixo e represente na reta real.

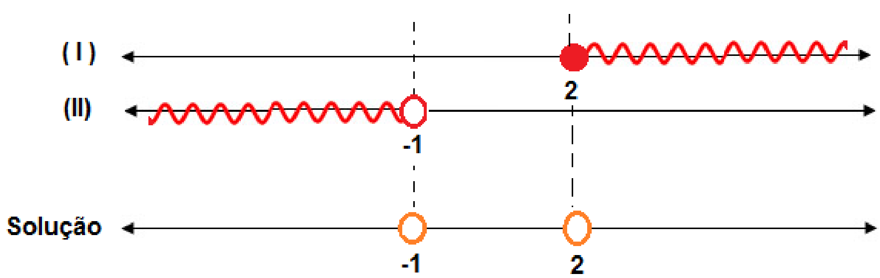
$$\begin{cases} 2x + 6 \geq 2 \\ x + 3 < 2 \end{cases}$$

-Solução-

Devemos resolver cada inequação separadamente, e depois analisar os conjuntos soluções encontrados para cada uma das desigualdades.

Inequação I		**Inequação II**
$2x + 6 \geq 2$	e	$x + 3 < 2$
$2x \geq 2 - 6$		$x < 2 - 3$
$2x \geq -4$		$x < -1$
$x \geq -4/2$		
$x \geq -2$		

Representar cada solução em uma reta separada. A terceira reta é a reta solução do sistema de inequações.



O conjunto solução de um sistema de inequações é um conjunto que é a interseção entre dois intervalos. Ou seja, o conjunto solução é dado pelos **valores reais que pertencem a ambos os intervalos (I e II)**. Não basta que um valor pertença **apenas a um dos intervalos. P**ara que faça parte do conjunto intersecção, ele deve ser comum a **todas os intervalos**.

Assim, como não existe interseção entre os intervalos I e II, a terceira reta não é pintada em faixa alguma, indicando que não há solução que satisfaça o sistema de inequações

Portanto, o conjunto solução do sistema é: **S =** $\varnothing$

11 DESIGUALDADES

Para podermos dizer que um número real é maior ou menor que outro, devemos introduzir o conceito de número real positivo e uma relação de ordem.

1. AXIOMA DE ORDEM

No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que:

i. Se $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$, exatamente uma das três afirmações ocorre:

- $\boldsymbol{a} = 0$
- $\boldsymbol{a}$ é positivo
- $\boldsymbol{a}$ é negativo

ii. A soma de dois números positivos é positiva;
iii. O produto de dois números positivos é positivo.

2. Os símbolos < (menor que), ≤ (menor ou igual a), > (maior que) e ≥ (maior ou igual a):

- $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo
- $a \leq b \Leftrightarrow b - a$ é positivo ou $a = b$
- $a > b \Leftrightarrow a - b$ é positivo
- $a \geq b \Leftrightarrow a - b$ é positivo ou $a = b$

3. Expressões dos tipos $x < y$, $x \leq y$, $x > y$, $x \geq y$ são chamadas de ***desigualdades***.
4. A expressão $a \leq x \leq b$ significa que $x \geq a$ e $x \leq b$, assim como, $a < x < b$ significa $x > a$ e $x < b$.
5. Quando $a = b$ o intervalo fechado $[a, b]$ reduz-se a um único elemento e chama-se *intervalo degenerado.*

PROPRIEDADES - Sejam $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$

i. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.
ii. Se $a > b$ e $c > 0$, então $a.c > b.c$.
iii. Se $a > b$ e $c > 0$, então $a.c < b.c$.
iv. Se $a > b$, então $a + c > b + c$, para todo real c.
v. Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.
vi. Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$. Então $a.c > b.d$.

12 SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

Alguns símbolos matemáticos:

$\neq$	diferente	$\sim$	proporcional	Σ	somatória
$=$	igual	$\cong$	aproximado	$\cup$	união
$\supset$	contém	$\Leftrightarrow$	se e somente se	$\cap$	interseção
$\subset$	contido	$\Rightarrow$	implicação	∇	nabla
$!$	fatorial	$\exists$	existe	∇^2	laplaciano
$<$	menor que	$\in$	pertcence	$\int$	integral
$>$	maior que	$\notin$	não pertence	$\vec{A}$	vetor
$\leq$	menor ou igual	$\forall$	qualquer	$\lim$	limite
$\geq$	maior ou igual	$\therefore$	portanto	Z	complexo
$+$	adição	$\perp$	ortogonal	$\bar{Z}$	conjugado
$-$	subtração	$\wedge$	e	$/$	tal que
$\div$	divisão	$\vee$	ou	∞	infinito
$\times$	multiplicação	i	imaginário		

O ALFABETO GREGO

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula	Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
alfa	α	A	ni	ν	N
beta	β	B	ksi	ξ	Ξ
gama	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
épsilon	ε	E	rho	ρ	P
dzeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
teta	θ	Θ	upsilon	υ	Y
iota	ι	I	phi	φ	Φ
capa	κ	K	khi	χ	X
lâmbda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mi	μ	M	ômega	ω	Ω

EXERCÍCIOS

1- Dado o conjunto **P =** {0, 2, 4, 6, 8, 10, ...} dos números pares, **IN, Z, Q** e **IR** os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais respectivamente, estabeleça as relações de $\in, \notin, \subset, \not\subset, \supset$, continência ou convenientes:

a) **P____N** d) 1____**P** g) **Z____Q**
b) **P____Z** e) 200____**P** h) **R____N**
c) **P____R** f) **Q ____P** i) **N____R**

2- Seja U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 3, 5, 7, 9}, B = {0, 2, 4, 6}, e C = {9, 10}. Obtenha os seguintes conjuntos:

a) $A \cap B$
b) $(A \cap B) \cap C$
c) $B \cup C$
d) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
e) $A \cap C$
f) $B \cap C$
g) $A \cup \varnothing$
h) $(A \cup C) \cap B$

3 - Considere os seguintes conjuntos: A ={1,2}; B = {2,3}; C = {1,3,4} e D = {1,2,3,4}. Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) $A \subset D$
(b) $A \subset B$
(c) $B \subset C$
(d) $D \subset B$

4- Considere os conjuntos:

$A = \{x \in R / -3 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \in R / -3 < x \leq 10\}$, $C = \{x \in R / 4 < x < 9\}$, $D = \{x \in R / -2 < x < 3\}$,
$E = \{x \in R / x \geq 1\}$ e $F = \{x \in R / x < -5\}$.

Represente na reta e determine o conjunto solução.

a- $A \cap B$ b- $A \cap E$ c- $B \cap D$ d- $F \cap C$ e- $A \cup C$ f- $D \cup A$ g- $F \cup D$
h- $E \cap F$ i- $E \cup F$ j- $B \cap F$ k- $D \cap C$ l- $D \cup C$ m- $(E \cap F) \cap C$

5- Se A é um conjunto com x elementos e B é um conjunto com y elementos, sendo x um número maior que y, então

(a) $A \cup B$ terá, no máximo quantos elementos?
(b) $A \cup B$ terá, no mínimo quantos elementos?

6- Sendo A um conjunto com 15 elementos e B um conjunto com 8 elementos.

(a) podemos concluir que $A \cup B$ tem exatamente 23 elementos?
(b) é possível $A \cap B$ ter 9 elementos.

7- Represente graficamente a **interseção** dos seguintes intervalos:

a- $(3,6) \cap [2,8]$ b- $(-4,7) \cap [3,7]$ c - $(4,7] \cap [3,7)$ d- $(0,6) \cap (1,7]$
e- $(-2,2] \cap [2,3]$ f- $(-\infty,0) \cap [0,+\infty)$ g- $(-\infty,0] \cap [0,+\infty)$

8- Sendo A= {0, 1, 2, 3}, B = {0, 2, 3, 5} e C= {x | x é número natural par menor que 10}, D = {x |x é número natural ímpar compreendido entre 4 e 10}, determine:

(a) $A \cup B$
(b) $(A \cap C) \cup D$
(c) $(A \cap B) \cap C$
(d) $(A \cap B) \cap D$

9- Considere o conjunto A = {3, 5, 7, 9, 11, 15}. Para cada subconjunto abaixo, escreva os elementos, se possível.

(a) {x ∈ A / x é ímpar} (b) {x ∈ A / x é múltiplo de 5}
(c) {x ∈ A / x é divisor de 60} (d) {x ∈ A / x é divisível por 2}

10- Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {2, 4, 6}, obtenha:

(a) A – B (b) B – A

11- Se A = {x natural, menor que 10 / x é par} e B = {x natural, menor que 10 / x é primo}.

Determine A – B e B – A.

Observação: número primo é aquele que é divisível por ele mesmo ou por 1. Por exemplo, 17 é um número primo, pois só quem divide 17 é ele mesmo ou 1.

12- Sejam A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} e B = {4, 5, 6, 7, 8, 9}. Calcule $n(A \cup B)$.

13- Reescreva as seguintes proposições usando a notação de conjunto:

(a) x não pertence a A. (d) F não é um subconjunto de G.
(b) R é um subconjunto de S. (e) H não inclui D.
(c) d é um membro de E.

14 – Seja $A=\{x/2x=6\}$ e seja b = 3. É possível b = A?

15 – Quais destes conjuntos são iguais?

(a) {x / x é uma letra na palavra "aroma"}
(b) As letras que aparecem na palavra "amor"
(c) {x/x é uma letra na palavra "Roma"
(d) As letras a, r, o, m.

16- Quais dos seguintes conjuntos são diferentes: Φ , $\{0\}$,$\{\Phi\}$?

17- Dados os conjuntos, indicar, para cada um deles, uma propriedade que o especifique completamente.

A = {5, 10, 15, 20, . . .}
B = {7, 17, 27, 37, . . .}

C = {300, 301, 302, . . . , 399, 400}
D = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . .}

18 – Quais desses conjuntos são conjuntos vazios?

(1) A = {x/ x é uma letra antes de a no alfabeto}
(2) $B=\{x /\ x^2=9\ e\ 2x=4\}$
(3) $C=\{x /\ x \neq x\}$
(4) $D=\{x /\ x+8=8\}$

19 – Seja $A=\{20,30,40\}$. Quantos subconjuntos contém A e quais são eles (conjunto das partes)?

20 – Se A um subconjunto de B, e seja B um subconjunto de C, isto é, seja $A \subset B\ e\ B \subset C$. Suponha que $a \in A,\ b \in B,\ c \in C$ e suponha que $d \notin A,\ e \notin B,\ f \notin C$.

Qual ou quais proposições precisam ser verdadeiras?

(a) $a \in C$ (b) $b \in A$
(c) $c \notin A$ (d) $d \in B$
(e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

21- Considere os conjuntos A = {5, 7, 9, 11, 13} e B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}. Assinale a alternativa correta:

(a) $\emptyset \not\subset A$
(b) $A \subset B$
(c) $A \supset B$
(d) $B \not\supset A$
(e) $15 \notin B$

22 - Sejam os conjuntos A = {a, b, c, d} , B={c, d, e, f, g} e C={b, d, e, g}. Determinar:

(a) B – A
(b) A – C
(c) A – B
(d) C – B

23- Dado o conjunto A = {0, 1, 2, {1,2}, 3, {3,4}}, assinale V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas.

( ) $\varnothing \in A$ ( ) $4 \in A$ ( ) $\{\} \subset A$ ( ) $\{\{1,2\}\} \subset A$

( ) $\{3,4\} \subset A$ ( ) $\{1,2\} \in P(A)$ ( ) $(\{1,2\} \cup \{3,4\}) \subset A$

( ) Se N é o conjunto dos números naturais, então A – N não tem elementos numéricos.

24- Represente graficamente na reta real o conjunto determinado por cada uma das seguintes inequações:

(a) $7x + 3 > 2x – 3$
(b) $2x + 8 < 0$
(c) $x - 3 < 3x + 5$
(d) $5 – x < 7 + 3x$
(e) $6 + 2x > 12 + 5x$
(f) $x - 8 > 0$
(g) $3+7x < 8x + 9$
(h) $5 > -2 + 5x \geq -10$

25- Resolva os seguintes sistemas de inequações e represente na reta real.

(a) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leq 2x - 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2 > -3 \\ x + 2 \leq 5 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -2x + 3 \leq x + 6 \\ x + 6 < 2x \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2(5x - 1) \geq 4 \\ 2(3x + 4) < 2x + 10 \end{cases}$

Respostas: (a) $S = \{x \in IR \,/\, x < -3\}$ (b) $S = \{x \in IR \,/\, -5 < x \leq 3\}$ (c) $S = \{x \in IR \,/\, x > 6\}$ (d) S = $\varnothing$

26- Numa pesquisa em que foram ouvidas crianças, constatou-se que:

- 15 crianças gostavam de refrigerante.
- 25 crianças gostavam de sorvete
- 5 crianças gostavam de refrigerante e de sorvete

(A) Quantas crianças foram pesquisadas? **Resposta: 35**
(B) Quantas crianças gostam apenas de refrigerantes? **Resposta: 10**
(C) Quantas crianças gostam apenas de sorvete? **Resposta: 20**

27 – Foram instaladas 66 lâmpadas para iluminar as ruas A e B, que se cruzam. Na rua A foram colocadas 40 lâmpadas e na rua B 30 lâmpadas.

(A) Quantas lâmpadas foram instaladas no cruzamento? **Resposta: 4**
(B) Quantas lâmpadas foram instaladas apenas na rua A? **Resposta: 36**
(C) Quantas lâmpadas foram instaladas apenas na rua B? **Resposta: 26**

28 – Numa concentração de atletas há 42 que jogam basquetebol, 28 voleibol e 18 voleibol e basquetebol, simultaneamente. Qual é o número de atletas na concentração?

Resposta: 52 jogadores

29- Dez mil aparelhos de TV foram examinados depois de um ano de uso e constatou-se que 4.000 deles apresentavam problemas de imagem, 2.800 tinham problemas de som e 3.500 não apresentavam nenhum dos tipos de problema citados. Então o número de aparelhos que apresentavam somente problemas de imagem é:

(A) 4 000
(B) 3 700
(C) 3 500
(D) 2 800
(D) 2 500

Resposta: (b)

30 - Uma avaliação contendo duas questões foi dada a 200 alunos. Sabendo que:

- 50 alunos acertaram as duas questões.
- 100 alunos acertaram a primeira questão.
- 99 alunos acertaram a segunda questão.

Quantos alunos erraram as duas questões?

Resposta: 51

31- Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações Helena, Senhora e A Moreninha. Para isto, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que em cada 1000 pessoas consultadas:

- 600 leram A Moreninha;
- 400 leram Helena;
- 300 leram Senhora;
- 200 leram A Moreninha e Helena;
- 150 leram A Moreninha e Senhora;
- 100 leram Senhora e Helena;
- 20 leram as três obras.

Calcule:

(A) O número de pessoas que leu apenas uma das obras. **Resposta: 460 pessoas**
(B) O número de pessoas que não leu nenhuma das três obras. **Resposta: 130 pessoas**
(C) O número de pessoas que leu duas ou mais obras. **Resposta: 410 pessoas**

32 - Considere o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$. Construa o conjunto das partes de A.

33- Dado o conjunto A, que possui 7 elementos, determine o número de elementos do conjunto das partes de A, que contém pelo menos dois elementos.

34- Considere os conjuntos $A = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$. Assinale a alternativa correta:

(f) $\emptyset \not\subset A$
(g) $A \subset B$
(h) $A \supset B$
(i) $B \not\supset A$
(j) $15 \notin B$

35 - Sejam os conjuntos A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, f, g} e C = {b, d, e, g}. Determinar:

(e) B – A
(f) A – C
(g) A – B
(h) C – B

36- Dado o conjunto A = {0, 1, 2, {1,2}, 3, {3,4}}, assinale V para as afirmativas verdadeiras e F para as falsas.

( ) $\emptyset \in A$

( ) $4 \in A$

( ) $\{\} \subset A$

( ) $\{\{1,2\}\} \subset A$

( ) $\{3,4\} \subset A$

( ) $\{1,2\} \in P(A)$

( ) Se N é o conjunto dos números naturais, então A – N não tem elementos numéricos.

( ) $(\{1,2\} \cup \{3,4\}) \subset A$