实变函数第五次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

4.3

17

Proof.
证明与命题 4.3 的必要性类似。对于任意 E 上的有界可测函数 h，使得 $0 \leq h \leq f$，以及任意 E 上的有界可测函数 φ, 使得 $0 \leq \varphi \leq h$。$\int_E \varphi = 0$，从而 $\int_E h = 0$，根据积分的定义 $\int_E f = \sup_{h \leq f} \int_E h$，可知 $\int_E f = 0$。 □

21

(i) *Proof.*
首先根据积分的定义 $\int_E f = \sup_{0 \leq h \leq f} \int_E h$，由上极限的定义对于任意 $\epsilon > 0$，存在 h 使得 $\int_E f - \int_E h < \epsilon$，由于 f 和 h 都是非负函数所以 $\int_E f - \int_E h = \int_E |f - h| < \epsilon/2$。

根据简单逼近定理，存在简单函数 φ_n 满足 $|\varphi_n| \leq h$ 递增，且 φ_n 点态收敛到 h，为了保证非负性可以取 $\varphi_n = |\varphi_n|$，根据单调收敛定理，$\lim_n \int_E \varphi_n = \int_E h$，即对于任意 $\epsilon > 0$，存在 N 当 $n_0 > N$ 时，$\int_E \varphi_{n_0} - \int_E h < \epsilon$，即 $\int_E |h - \varphi_{n_0}| < \epsilon/2$。

综上，存在简单函数 $\eta = \varphi_{n_0}$，满足 $\int_E |f - \eta| < \int_E |f - h| + \int_E |h - \varphi_{n_0}| < \epsilon$，其中由于 h 是有有限支集的可测函数，由 $0 \leq \eta < h$，所以 eta 也是有有限支集，因为是简单函数，所以可测。 □

(ii) *Proof.*
根据上一问，显然在有界闭集 E 上存在简单函数 $\eta = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$，满足 $\int_E |f - \eta| < \epsilon/2$，根据简单函数的定义 E_k 是可测的，对于 E_k 由 Borel 正则性和开区间构成定理，存在一列不相交的开区间列 $\{I_i^k\}_{i=1}^{n_k}$，满足 $m(\cup_{i=1}^{n_k} I_i^k \setminus E_k)$ 是任意小的，由于示性函数的取值就是 0 和 1，那么区间的差可以通过积分来表示，为了能够积分，不妨取上面的 $I_i^k \subset E$，那么在 E 上面有

$$\int_E |\chi_{E_k} - \sum_{i=1}^{n_k} \chi_{I_i^k}| = m(\cup_{i=1}^{n_k} I_i^k \setminus E_k) < \epsilon/2n$$

上面的做法，将所有的 E_k 分成了小区间，之后将小区间组合就可以得到阶梯函数。定义阶梯函数 ϕ 为如下的形式

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_k} c_k \chi_{I_i^k}$$

那么定义在小区间上的阶梯函数 ϕ 和简单函数 η 的差别等于在每个 E_k 上面差别的和，即

$$\int_E |\eta - \phi| = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_E |\chi_{E_k} - \sum_{i=1}^{n_k} \chi_{I_i^k}| \le \epsilon/2$$

那么阶梯函数 ϕ 和原来的函数 f 之间的差距为

$$\int_E |f - \phi| < \int_E |f - \eta| + \int_E |\eta - \phi| < \epsilon$$

ϕ 即为题中所求的 h

注: 证明阶梯函数需要说明阶梯函数是定义在区间的示性函数的组合, 而简单函数是定义在可测集上面的, 这里是有区别的, 所以需要将可测集利用区间外逼近, 然后分解再组合。 □

22

Proof.

由积分区域的可加性

$$\int_{\boldsymbol{R}} f = \int_E f + \int_{\boldsymbol{R}\setminus E} f$$

根据 Fatou 引理，在两个区域上有

$$\int_E f \le \liminf_n \int_E f_n$$

$$\int_{\boldsymbol{R}\setminus E} f \le \liminf_n \int_{\boldsymbol{R}\setminus E} f_n$$

那么

$$\begin{aligned}\int_E f &= \int_{\boldsymbol{R}} f - \int_{\boldsymbol{R}\setminus E} f_n \\ &\ge \int_{\boldsymbol{R}} f - \liminf_n \int_{\boldsymbol{R}\setminus E} f_n \\ &\ge \limsup_n \int_E f_n\end{aligned}$$

综上，$\int_E f = \lim_n \inf \int_E f_n$ □

25

Proof.

仍可按照单调收敛来证明由 Fatou 引理

$$\int_E f \le \liminf_n \int_E f_n$$

另一方面由于 $f \geq f_n$

$$\int_E f \geq \limsup_n \int_E f_n$$

□

4.4

28

Proof.

由于 f 在 E 上可积，可以推出 f^+ 和 f^- 在 E 上可积。那么原问题等价于证明

$$\int_C f^+ - f^- = \int_E f^+\chi_C - f^-\chi_C$$

由线性那么分别证明 $\int_C f^+ = \int_E f^+\chi_C$ 和 $\int_C f^- = \int_E f^-\chi_C$ 即可，由于证明 f^+ 和 f^- 是等价的，那么就选择 f^+ 来证明.

首先 $f^+\chi_C$ 是定义在 E 上的非负可测函数，那么根据非负可测函数的积分定义，$\int_E f^+\chi_C = \sup_{0\leq h\leq f^+\chi_C} \int_E h$，其中 h 是有有限支集的有界可测函数。对于上述任意的 $0 \leq h \leq f^+\chi_C$ 由非负函数的积分区域可加性有，$\int_C h = \int_E h + \int_{E\setminus C} h$，由于在 $E \setminus C$ 上面 $h \leq f^+\chi_C = 0$，所以 $\int_{E\setminus C} h = 0$，所以 $\int_C h = \int_E h$。由 h 的任意性，$\int_E f^+\chi_C = \int_C f^+\chi_C \leq \int_C f^+$。

另一方面，由于 f^+ 在 E 上面可积，那么根据非负函数的积分线性可以得出 f^+ 在 C 上面也可积。那么同样根据非负函数积分定义 $\int_C f^+\chi_C = \sup_{0\leq h\leq f^+} \int_C h$。将 h 从 C 上延拓至 E 上，在 $E \setminus C$ 上令 $h^{'} = 0$，在 C 上 $h^{'} = h$，那么 $\int_E f^+\chi_E \geq \int_E h^{'} = \int_C h$。由 h 的任意性，$\int_E f^+\chi_E \geq \int_C f^+$。 □

34

Proof.

设 $f_n = f\chi_{[-n,+n]}$，由于 $\{f_n\}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的一列单调递增的非负函数列，并且有 f_n 点态收敛到 f，那么根据单调收敛定理

$$\lim_n \int_{-n}^{n} f = \lim_n \int_{\boldsymbol{R}} f_n = \int_{\boldsymbol{R}} f$$

□

35

(i) *Proof.*

任取一个点列 $\{y_n\}$ 并且 $\{y_n\} \subset [0,1]$，那么 $\{f(x,y_n)\}$ 是 Q 上的一列可测函数，并且存在函数 g 控制住了 $\{f(x,y_n)\}$，因为对于任意 y，$\{f(x,y)\} \leq g(x)$。因为对于固定的 x，$\lim_{y\to 0} f(x,y) = f(x)$，所以 $\{f(x,y_n)\}$ 点点收敛到 f。

由上面点列的任意性，和控制收敛定理

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1 f(x,y)dx = \lim_{y_n\to 0}\int_0^1 f(x,y_n)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

□

(ii) *Proof.*

若 $f(x,y)$ 是连续的，那么对于任意的 y_0

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = f(x,y_0)$$

相应的上面的结论

$$\lim_{y\to y_0}\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 f(x,y_0)dx$$

那么

$$\lim_{y\to y_0} h(y) = \lim_{y\to y_0}\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 f(x,y_0)dx = h(y_0)$$

所以是连续的

问题：这里为啥题目里头 y 在 0 处连续，就不写了 $y=0$，空着是咋回事呢 □

4.5

37

Proof.

考虑集列 $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$，显然 $\cup_{n=0}^{\infty}E_n = E$，令 $A_n = E_n \setminus E_{n+1}$，那么 $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是互不相交的集列。并且同样满足 $\cup_{n=0}^{\infty}A_n = E$，根据可列可加性有

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f$$

由于函数 f 是可积的，所以上面的表达式是收敛的，那么对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n_0 > N$ 时

$$|\int_E f - \sum_{n=0}^{n_0}\int_{A_n} f| = |\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_{A_n} f| < \epsilon$$

再次根据积分的可列可加性，$E_{n_0} = \cup_{n=n_0}^{\infty}A_n$ 所以

$$|\int_{E_{n_0}} f| < \epsilon$$

□

39

(i) *Proof.*

书：利用积分的可列可加性来证明积分的连续性

可列可加性需要不相交的集合，所以采用上面类似的方法，令 $A_n = E_{n+1} \setminus E_n$，那么由于 E_n 是递增的有

$$\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} E_n$$

根据积分的可列可加性

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f$$

□

(ii) *Proof.*

令 $E_n^C = E \setminus E_n$，那么根据上面的结论

$$\int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n^C} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^C} f$$

由于 f 在 E 上可积，根据积分区域的可加性 $E = (\cap_{n=1}^{\infty}) E_n \cup (\cup_{n=1}^{\infty} E_n^C)$ 有

$$\int_{\cap_{n=1}^{\infty} E_n} f = \int_E f - \int_{\cup_{n=1}^{\infty} E_n^C} f = \int_E f - \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^C} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f$$

□

4.6

40

Proof.

首先 f 在 $\boldsymbol{R}$ 上面是可积的，所以 $\int_{\boldsymbol{R}} f$ 是有限的，那么 $F(x) < \int_{\boldsymbol{R}} f$ 对于任意的 $x \in \boldsymbol{R}$ 成立，所以 $F(x)$ 是 properly-defined 的。

对于连续性即证明

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \int_{-\infty}^{x} f = F(x_0)$$

由于可积，根据积分的绝对连续性有，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 δ，当 $|x - x_0| < \epsilon$ 时，$\int_x^{x_0} |f| < \epsilon$，所以 $F(x)$ 是连续的。

f 不一定满足 Lipschitz 条件，对于既在某点处无界并且积分区间无界的可积函数，比如

$$f = \begin{cases} 0 & (-\infty, 0] \\ x^{-1/2} & (0, 1) \\ x^{-3/2} & [1, +\infty] \end{cases} \tag{1}$$

f 是可积的，但是在 0 处，导数无界，所以不满足 Lipschitz 条件 □

48

Proof.

由于 g 有界，不妨设 $|g| < M$

$$\int_E |f \cdot g| = \int_E |f| \cdot |g| \leq M \int_E |f| < \infty$$

所以 $f \cdot g$ 是可积的 $\square$

50

Proof.

$\Rightarrow$

若满足一致可积性，那么如果对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得，对于任意的 $f \in \mathcal{F}$，若 $m(A) < \delta$，那么 $|\int_A f| < \int_A |f| < \epsilon$

$\Leftarrow$

那么如果对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得，对于任意的 $f \in \mathcal{F}$，若 $m(A) < \delta$，那么 $|\int_A f| < \epsilon$，可以将强条件中的函数按照正负拆分，令 $A^+ = \{x \in A | f(x) \geq 0\}$ 和 $A^- = \{x \in A | f(x) < 0\}$，由于 f 是可测函数，所以 A^+ 和 A^- 是可测集，并且 $m(A^+)$ 和 $m(A^-)$ 都小于 δ

$$\int_A |f| = \int_{A^+} |f| + \int_{A^-} |f| = |\int_{A^+} f| + |\int_{A^-} f| < 2\epsilon$$

所以 $\mathcal{F}$ 在 E 上是一致可积的。 $\square$