实变函数第九次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

7.2

6

Proof.

若函数 $f \in L^p(E)$ 和 $g \in L^q(E)$ 是一般函数 (非规范化)，即 $\|f\|_p \neq 1$，$\|g\|_q \neq 1$。根据题设 Holder 不等式对于标准函数成立，那么将 f 和 g 规范化后

$$\int_E \left| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} \right| \leq \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p \left\| \frac{g}{\|g\|_q} \right\|_q$$

根据积分的性质和范数的齐次性，两边可以把分母中的 $\|f\|_p$ 和 $\|g\|_q$ 约去，得到

$$\int_E |f \cdot g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

□

10

Proof.

$\Leftarrow$

首先证明存在非零常数 α 和 β，这里和 Holder 不等式证明类似，假设 $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$，根据 Young 不等式

$$\int_E |f \cdot g| \leq \int_E (\frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}) = 1$$

若 Holder 中等式成立，即 $\int_E |f \cdot g| = 1$，那么 Young 不等式中的等号也成立

$$|f \cdot g| = \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

根据第 9 题的结论，Young 不等式中的等号成立当且仅当 $a^p = b^q$，所以

$$|f|^p = |g|^q$$

这时 $\alpha=\beta=1$，如果 f 和 g 不是规范化的函数，上面的证明规范化 f 和 g 之后成立，即

$$\left|\frac{f}{\|f\|_p}\right|^p=\left|\frac{g}{\|g\|_q}\right|^q$$

综上可以得出

$$\alpha=\|g\|_q^q \quad \beta=\|f\|_p^p$$

$\Rightarrow$

由上面得到的 α 和 β，有

$$\begin{aligned}\int_E|f\cdot g| &= \int_E(|f|^p)^{\frac{1}{p}}|g| \\ &= \int_E(\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\|f\|_p^p)^{\frac{1}{p}}|g| \\ &= \int_E\frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}|g|^{\frac{q}{p}+1} \\ &= \frac{\|f\|_p}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}}\int_E|g|^q \\ &= \|f\|_p\|g\|_q\end{aligned}$$

□

18

Proof.

首先，对于任意的 p 和 ϵ，令 $E'=\{x\in E:\left|f(x)\right|\geq\|f\|_\infty-\epsilon\}$，那么

$$\|f\|_p\geq(\int_{E'}|f|^p)^{\frac{1}{p}}\geq(\int_{E'}(\|f\|_\infty-\epsilon)^p)^{\frac{1}{p}}=(\|f\|_\infty-\epsilon)m(E')^{\frac{1}{p}}$$

由于 $\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$ 的可能不存在，根据 $m(E')<m(E)<\infty$，可以得出

$$\lim_{p\to\infty}\inf\|f\|_p\geq\|f\|_\infty-\epsilon$$

另一方面, 由 $\|f\|_\infty$ 是有限的, 根据推论 2.8, 对于任意 $r<p<\infty$, 存在 M, 使得 $\|f\|_r<M$

$$\|f\|_p=(\int_E|f|^p)^{\frac{1}{p}}\leq(\int_E|f|^r\|f\|_\infty^{(p-r)})^{\frac{1}{p}}=\|f\|_\infty^{\frac{p-r}{p}}(\int_E|f|^r)^{\frac{1}{p}}=\|f\|_\infty^{\frac{p-r}{p}}\|f\|_r^{\frac{r}{p}}$$

类似地，可以得到

$$\lim_{p\to\infty}\sup\|f\|_p\leq\|f\|_\infty$$

综上可以得到

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$$

□

19

Proof.

根据 Holder 不等式

$$\max_{g\in L^q(E),\|g\|_q\le 1}\int_E f\cdot g\le \max_{g\in L^q(E),\|g\|_q\le 1}\|f\|_p\|g\|_q=\|f\|_p$$

另一方面，如果 $f=0$，等式成立；如果 $f\neq 0$，函数 $f^*\in L^q(E)$，并且 $\|f^*\|_q=1$，那么

$$\|f\|_p=\int_E f\cdot f^*\le \max_{g\in L^q(E),\|g\|_q\le 1}\int_E f\cdot g$$

综上

$$\|f\|_p=\max_{g\in L^q(E),\|g\|_q\le 1}\int_E f\cdot g$$

□

7.2

25

Proof.

首先令 $c=\min\{[m(E)]^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}},[m(E)]^{\frac{1}{p_1}}\}$，由于 $\{f_n\}\to f$ 在 $L^{p_2}(E)$ 中收敛，那么对于任意的 $\frac{\epsilon}{c}>0$，存在 N，当 $n_0>N$ 时

$$\|f_{n_0}-f\|_{p_2}<\frac{\epsilon}{c}$$

由于 L^{p_2} 是完备的，所以对任意的 n，$f_n-f\in L^{p_2}(E)$，根据推论 2.8

$$\|f_{n_0}-f\|_{p_1}\le c\|f_{n_0}-f\|_{p_2}<\epsilon$$

所以 $\{f_n\}\to f$ 在 $L^{p_1}(E)$ 中收敛 □

28

Proof.

首先由 $\{f_n\}\to f$ a.e.，根据 Fatou 引理

$$\int_E|f-f_n|^p\le\lim_{k\to\infty}\inf\int_E|f_{n+k}-f_n|^p$$

根据推论 2.8，由 $f_{n+k}-f_n\in L^{p+\theta}$，并且 $p+\theta<\infty$ 所以

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\inf\int_E|f_{n+k}-f_n|^p&\le[m(E)]^{\frac{\theta}{p(p+\theta)}}\lim_{k\to\infty}\inf\int_E|f_{n+k}-f_n|^{p+\theta}\\&=[m(E)]^{\frac{\theta}{p(p+\theta)}}\lim_{k\to\infty}\inf\|f_{n+k}-f_n\|_{p+\theta}^{p+\theta}\end{aligned}$$

根据题设 $\{f_n\}$ 在 $L^{p+\theta}(E)$ 是有界的，所以存在 M 满足，对于任意的 n

$$\int_E |f_n|^{p+\theta} = \|f_n\|_{p+\theta}^{p+\theta} < M$$

综上可以得到

$$\begin{aligned}\int_E |f-f_n|^p &\leq [m(E)]^{\frac{\theta}{p(p+\theta)}} \lim_{k\to\infty}\inf\|f_{n+k}-f_n\|_{p+\theta}^{p+\theta} \\ &\leq 2[m(E)]^{\frac{\theta}{p(p+\theta)}} M\end{aligned}$$

由此 $\{(f-f_n)^p\}$ 在 E 上一致可积，根据 Vitali 收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f-f_n|^p = 0$$

所以在 $L^p(E)$ 上 $\{f_n\} \to f$ □

29

Proof.

考虑 $[a,b]$ 上 e^{x-a} 的泰勒展开，令

$$f_n = 1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}$$

并且

$$\|f_{n+1} - f_n\|_{max} = \frac{(b-a)^n}{n!}$$

由于 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-a)^k}{k!} = e^{b-a}$，所以 f_n 是快速柯西列，从而是柯西列，已知 f_n 是一致收敛到 e^x，所以在 $\|\|_{max}$ 下 $\{f_n\} \to e^x$。假如 $e^x \in Poly[a,b]$，那么存在 m 使得，$e^x = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k$，那么 $(e^x)^{(m+1)} = 0$，矛盾。所以 $e^x \notin Poly[a,b]$ □

7.4

37

Proof.

由于 $\mathcal{G}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是稠密的，对于任意的 $h \in \mathcal{H}$，$\epsilon/2 > 0$，存在 $g \in \mathcal{G}$ 使得，$\|g-h\| < \epsilon/2$；同样地，由于 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{G}$ 中是稠密的，对于上述中的 g 和 $\epsilon/2$，存在 $f \in \mathcal{F}$，使得 $\|f-g\| < \epsilon/2$。由于 $\|f-h\| \leq \|f-g\| + \|g-h\| < \epsilon$，所以 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是稠密的 □

39

Proof.

由于 $\mathcal{S}$ 在 $L^q(E)$ 中是稠密的，所以对于任意的 $\epsilon > 0$，以及任意的 $h \in L^q(E)$，存在 $f \in \mathcal{S}$

$$\|h - f\|_q < \frac{\epsilon}{\|g\|_p + 1}$$

因此，由 Holder 不等式，以及任意 $f \in \mathcal{S}$，$\int_E f \cdot g = 0$

$$\begin{aligned}
\left|\int_E h \cdot g\right| &\leq \left|\int_E f \cdot g\right| + \left|\int_E (h - f) \cdot g\right| \\
&= \left|\int_E (h - f) \cdot g\right| \\
&\leq \int_E \left|(h - g) \cdot g\right| \\
&\leq \|h - f\|_q \|g\|_p \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性，可知对于任意的 $h \in L^q(E)$，$\int_E h \cdot g = 0$。接下来使用反证法，若 $g \neq 0$，根据 Holder 不等式推论

$$\int_E g \cdot g^* = \|g\|_p \neq 0 \quad \text{其中} g^* \in L^q(E)$$

与任意 h，$\int_E h \cdot g = 0$ 矛盾，所以 $g = 0$ □

41

Proof.

令 $\mathcal{S}_1 = (L^{p_2}(E), \|\cdot\|_{p_1})$，$\mathcal{S}_2 = (L^{p_2}(E), \|\cdot\|_{p_2})$。若 $\mathcal{S}_1$ 是完备的，考虑 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 之间的恒等映射 $\Phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$。由完备性可知 Φ 是连续映射，而且是满射。根据开映射定理的结论 ($\|\cdot\|_{p_1}$ 和 $\|\cdot\|_{p_2}$ 等价)，存在 $c > 0$ 使得

$$\|f\|_{p_1} \geq c\left\|\Phi(f)\right\|_{p_2} = c\|f\|_{p_2} \quad \forall f \in L^{p_2}(E)$$

考虑 E 中一列集合 A_i，满足 $\lim_{i\to\infty} m(A_i) = 0$。令 χ_i 为 A_i 的示性函数。由于 E 是有限的，所以 $\|\chi_i\|_{p_2} < \infty$，从而 $\chi_i \in L^{p_2}(E)$。由上面的不等式可以得到，对于任意的 i

$$m(A_i)^{\frac{1}{p_1}} = \|\chi_i\|_{p_1} \geq c\|\chi_i\|_{p_2} = cm(A_i)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$m(A_i)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \geq c$$

这与 $\lim_{i\to\infty} m(A_i) = 0$ 矛盾，所以 $\mathcal{S}_1$ 不是完备的

□

43

(i) *Proof.*

证明 ℓ^p 是可分的，与无界区间 $L^p(E)$ 的证明类似。令 $A_n = (r_0, r_1, \dots, r_n, 0, \dots)$，其中 r_i 是有理数，令 $A = \cup A_i$，由于有理数可数，A_n 中由有限个可数的有理数组成，所以也是可数的，A 由可数个 A_i 组成，所以 A 也是可数的。

对于任意的 $x = (x_0, x_1, \dots) \in \ell^p$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

所以，对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $n > N$

$$\sum_{k=n}^{\infty} |x_i|^p < \epsilon/2$$

此外，由于有理数在 $\mathbb{R}$ 上是稠密的，对于任意的 $k < n$，存在 r_k 使得 $|r_k - x_k|^p < \frac{\epsilon}{2n}$，所以存在 A 中的数列 $a = (r_0, \dots, r_{n-1}, 0 \dots)$，满足 $\|a - x\|_p < \epsilon$ □

(ii) *Proof.*

由 Cantor 定理，一个集合的幂集的势严格大于其本身的势，所以自然数的幂集一定不是可数的

考虑自然数集 $\mathbb{N}$ 的一个子集 I，并定义 $\chi_I = (x_0, x_1, \dots)$，其中

$$x_i = \begin{cases} 1 & i \in I \\ 0 & i \notin I \end{cases}$$

根据上面的定义 $\chi_I \in \ell^\infty$，那么对于 $\mathbb{N}$ 的两个不相同的子集 I 和 J，$\|\chi_I - \chi_J\|_\infty = 1$。考虑 $\mathbb{N}$ 所有的子集，定义 $\mathcal{B} = \{B(\chi_I, \frac{1}{2}) : I \subset \mathbb{N}\}$，其中 $B(\chi_I, \frac{1}{2})$ 是以 χ_I 为球心，$\frac{1}{2}$ 为半径的球，并且根据定义 $\mathcal{B}$ 中的球都是不相交的。

对于 ℓ^p 中任意的稠密子集 $\mathcal{S}$，每个球中一定存在 $\mathcal{S}$ 中的元素 e。由于球是不相交的，所以 $\mathcal{S}$ 中至少有 $\#\mathcal{B}$ 个元素，由于 $\#\mathcal{B} = \#2^{\mathbb{N}}$，所以 $\mathcal{S}$ 是不可数的。所以 ℓ^p 是不可分的

□

8.1

5

(i) *Proof.*

当 $1 \le p < \infty$ 时，对于任意的 $f \in L^p(E)$。定义有限支集函数 g_n 满足在 $E \cap [-n, n]$ 上 $g_n = |f|$，在 $E \setminus [-n, n]$ 上 $g_n = 0$，所以 $\{g_n\}$ 点态收敛到 $|f|$。并且 $\int_E g_n^p \le \int_E |f|^p < \infty$，所以 $g_n \in L^p(E)$。此外

$$|g_n - f|^p \le (|g_n| + |f|)^p \le 2^p |f|^p$$

由控制收敛定理 $\|g_n - f\|_p \to 0$，所以是稠密的 □

(ii) *Proof.*

若 $f = sin(x)$，那么 $f \in L^{\infty}(R)$，但是对于任意的有限支集函数 g，$\left\|sin(x) - g\right\|_{\infty} > \frac{1}{2}$，所以不是稠密的 □

6

Proof.

$\Phi(x) = T(\chi_{[a,b]})$，对于 $[c, d] \subset [a, b]$

$$\left|\Phi(d) - \Phi(c)\right| = \left|T(\chi_{[c,d]})\right| \leq \|T\|_{*}\left\|\chi_{[c,d]}\right\| = \|T\|_{*}(d - c)$$

由于 T 是有界线性泛函所以 $\|T\|_{*} < M$，所以 $\Phi(x)$ 是满足 Lipschitz 条件的，从而绝对连续。那么 $\Phi(x) = \int_a^x g$，$T(\chi_{[c,d]}) = \int_a^b g \cdot \chi_{[c,d]}$，即 $T(f) = \int_a^b g \cdot f$ 对于所有 $L^1[a, b]$ 上的示性函数 f 成立，从而对于阶梯函数成立。

进一步，如果 $f \in L^1[a, b]$ 是简单函数，由于阶梯函数在 $L^1[a, b]$ 上是稠密的，所以在 $L^1[a, b]$ 下存在一列阶梯函数一致有界 $\{\varphi_n\} \to f$，由于 T 是线性有界泛函，根据 T 的连续性 $\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(f)$。另一方面，$\varphi_n$ 有界，g 可积，由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \cdot g = \int_a^b f \cdot g$$

因此，$T(f) = \int_a^b g \cdot f$ 对于 $L^1[a, b]$ 上的简单函数 f 成立。对于 $L^1[a, b]$ 上的简单函数 f

$$\left|\int_a^b g \cdot f\right| = \left|T(f)\right| \leq \|T\|_{*} \cdot \|f\|_p$$

那么根据 Lemma 4，$g \in L^{\infty}$。从而对于任意的 $f \in L^1[a, b]$，线性泛函 $f \to \int_a^b f \cdot g$ 是有界的。那么根据 proposition 9，T 和 $f \to \int_a^b f \cdot g$，对于 $f \in L^1[a, b]$ 有界的，并且在 $L^1[a, b]$ 上的稠密子集中相等，从而 $L^1[a, b]$ 上相等。 □