实变函数第七次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

6.4

37

(i) *Proof.*

考虑讲义例 3.2 的函数

$$f(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{\pi}{2x}) & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f 在 $[0,1]$ 上是连续的，并且对于任意的 $\epsilon > 0$，f 在 $[\epsilon, 1]$ 上有导数

$$f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2x}) - \frac{\pi}{2x}\sin(\frac{\pi}{2x})$$

并且导数有界

$$|f'(x)| \le |\cos(\frac{\pi}{2x})| + |\frac{\pi}{2x}\sin(\frac{\pi}{2x})| \le 1 + \pi/2\epsilon$$

所以 f 在 $[\epsilon, 1]$ 上是 Lipschitz 函数，所以绝对连续。

由于 $x\cos(\pi/2x)$ 在 $[0,1]$ 上，对任意的 n，$P_n = [0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \cdots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1]$，$V(f,p) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{2}$，是发散的，所以 $x\cos(\pi/2x)$ 不是有界变差函数，由定理 4.5 闭区间绝对连续函数是有界变差的，所以 $x\cos(\pi/2x)$ 在 $[0,1]$ 上不绝对连续 □

(ii) *Proof.*

对于任意的 $\epsilon > 0$，由于 f 是连续的，存在 η，使得 $f(\eta) - f(0) < \epsilon/2$。

取上述 η，根据题设 f 在 $[\eta, 1]$ 绝对连续，取 $\epsilon/2$ 时候的参数 δ，即对于 $[\eta, 1]$ 内的不相交区间 $\{c_k, d_k\}_{k=1}^{n}$，当 $\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k) < \delta$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n} f(d_k) - f(c_k) < \epsilon/2$$

另一方面对于 $[0,\eta]$ 上的不相交区间 $\{c_k,d_k\}_{k=1}^n$，由于函数是单调递增的，有

$$\sum_{k=1}^n f(d_k)-f(c_k)<f(\eta)-f(0)<\epsilon/2$$

综上对于 $[0,1]$ 上面的任意的不相交区间 $\{a_k,b_k\}$，满足 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$，若 $\eta\notin\cup_{k=1}^n(a_k,b_k)$，那么由上面两条，可知绝对连续；若 $\eta\in(a_i,b_i)$，那么这个区间分成 (a_i,η) 和 (η,b_i)，上面两条仍然成立，所以是绝对连续的。 □

(iii) *Proof.*

首先证明绝对连续，对于任意的 $\epsilon>0$，存在 $\delta=\epsilon^2$，对于任意的不相交区间 $\{c_k,d_k\}_{k=1}^n$，当 $\sum_{k=1}^n(d_k-c_k)<\delta$ 时，根据函数的性质。

$$\sum_{k=1}^n f(d_k)-f(c_k)\le f(\delta)-f(0)=f(\epsilon^2)=\epsilon$$

对于任意的 $M>0$，当 $n>M$ 时有，

$$f(1/n)-f(0)=\sqrt{1/n}>M/n$$

所以不满足 Lipschitz 条件

□

38

Proof.

注：In the displayed equation of Problem 38, replace the first '<' with '$<\epsilon$ if'

$\Rightarrow$

对于任意的 $\epsilon>0$，存在 δ，对于任意的可列不相交的 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^\infty$，若 $\sum_{k=1}^\infty b_k-a_k<\delta$，对于任意的 n

$$D_n=\sum_{k=1}^n b_k-a_k<\sum_{k=1}^\infty b_k-a_k<\delta$$

由原定理，可以推出

$$S_n=\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$$

根据 n 的任意性，$lim_{n\to\infty}S_n<\epsilon$，即

$$\sum_{k=1}^\infty|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$$

$\Leftarrow$

对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 δ，对于任意的有限不相交的 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$，若 $\sum_{k=1}^{n} b_k - a_k < \delta$，那么可以将上述有限区间扩充成一列收敛的可列区间 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$，取 (a_{n+1}, b_{n+1}) 满足

$$b_{n+1} - a_{n+1} < 1/3(\delta - \sum_{k=1}^{n} b_k - a_k)$$

由此可知扩充后的可列区间满足 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k < \delta$，那么可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k) < \sum_{k=1}^{\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

因此原定理成立

□

39

Proof.

$\Rightarrow$

对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 δ，当 $m(E) < \delta$，由 Borel 正则性，存在一个开集 O 与 E 使得 $m(O \setminus E)$ 任意小，所以只需对 E 是开集的情形证明。若 E 是开集，则它是可列个不相交的开区间 $\{(c_k, d_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 的并

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty}(d_k - c_k) < \delta$$

由 38 题的结论得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| < \epsilon$$

由于 f 是单调递增函数所以 $f(E) = \cup_{k=1}^{\infty}(f(c_k), f(d_k))$，根据次可列可加性

$$m^*(f(E)) < \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| < \epsilon$$

$\Leftarrow$

对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 δ，对于有限个不相交的开区间 $\{(c_k, d_k)\}_{k=1}^{n}$，由于开区间是可测的，所以他们的并也是可测的，若 $\sum_{k=1}^{n}(d_k - c_k) = m(\cup_{k=1}^{n}(c_k, d_k)) < \delta$，那么

$$m^*(f(\cup_{k=1}^{n}(c_k, d_k))) < \epsilon$$

同样根据 f 是单调函数 $f(\cup_{k=1}^{n}(c_k, d_k)) = \cup_{k=1}^{n}(f(c_k), f(d_k))$，所以

$$\sum_{k=1}^{n} |f(d_k) - f(c_k)| = m^*(f(\cup_{k=1}^{n}(c_k, d_k))) < \epsilon$$

□

44

Proof.

由函数 g 的绝对连续性，对于任意的 $\epsilon/L>0$，其中 L 是 f 函数的 Lipschitz 常数，存在 δ，对于任意有限的不相交的开区间 $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$，若 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$，那么

$$\sum_{k=1}^n |g(b_k)-g(a_k)|<\epsilon/L$$

由于 f 是 Lipshitz 函数，那么对于任意的 $a,b\in g([a,b])$，$|f(a)-f(b)|<L|a-b|$，那么

$$\sum_{k=1}^n |f\circ g(b_k)-f\circ g(a_k)|<L\sum_{k=1}^n |g(b_k)-g(a_k)|<\epsilon$$

所以 $f\circ g$ 是绝对连续的 □