实变函数第十次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

8.1

5

(i) *Proof.*

当 $1 \leq p < \infty$ 时，对于任意的 $f \in L^p(E)$。定义有限支集函数 g_n 满足在 $E \cap [-n, n]$ 上 $g_n = |f|$，在 $E \setminus [-n, n]$ 上 $g_n = 0$，所以 $\{g_n\}$ 点态收敛到 $|f|$。并且 $\int_E g_n^p \leq \int_E |f|^p < \infty$，所以 $g_n \in L^p(E)$。此外

$$|g_n - f|^p \leq (|g_n| + |f|)^p \leq 2^p |f|^p$$

由控制收敛定理 $\|g_n - f\|_p \to 0$，所以是稠密的 □

(ii) *Proof.*

若 $f = sin(x)$，那么 $f \in L^\infty(R)$，但是对于任意的有限支集函数 g，$\left\|sin(x) - g\right\|_\infty > \frac{1}{2}$，所以不是稠密的 □

6

Proof.

$\Phi(x) = T(\chi_{[a,b]})$，对于 $[c, d] \subset [a, b]$

$$\left|\Phi(d) - \Phi(c)\right| = \left|T(\chi_{[c,d]})\right| \leq \|T\|_* \left\|\chi_{[c,d]}\right\| = \|T\|_* (d - c)$$

由于 T 是有界线性泛函所以 $\|T\|_* < M$，所以 $\Phi(x)$ 是满足 Lipschitz 条件的，从而绝对连续。那么 $\Phi(x) = \int_a^x g$，$T(\chi_{[c,d]}) = \int_a^b g \cdot \chi_{[c,d]}$，即 $T(f) = \int_a^b g \cdot f$ 对于所有 $L^1[a, b]$ 上的示性函数 f 成立，从而对于阶梯函数成立。

进一步，如果 $f \in L^1[a, b]$ 是简单函数，由于阶梯函数在 $L^1[a, b]$ 上是稠密的，所以在 $L^1[a, b]$ 下存在一列阶梯函数一致有界 $\{\varphi_n\} \to f$，由于 T 是线性有界泛函，根据 T 的连续性 $\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(f)$。另一方面，$\varphi_n$ 有界，g 可积，由控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \cdot g = \int_a^b f \cdot g$$

因此，$T(f)=\int_a^b g\cdot f$ 对于 $L^1[a,b]$ 上的简单函数 f 成立。对于 $L^1[a,b]$ 上的简单函数 f

$$\left|\int_a^b g\cdot f\right| = \left|T(f)\right| \le \|T\|_* \cdot \|f\|_p$$

那么根据 Lemma 4，$g\in L^\infty$。从而对于任意的 $f\in L^1[a,b]$，线性泛函 $f\to\int_a^b f\cdot g$ 是有界的。那么根据 proposition 9，T 和 $f\to\int_a^b f\cdot g$，对于 $f\in L^1[a,b]$ 有界的，并且在 $L^1[a,b]$ 上的稠密子集中相等，从而 $L^1[a,b]$ 上相等。 □

17.1

2

Proof.

$\Rightarrow$

μ 满足有限可加性，

$$\mu(\emptyset)=\mu(\emptyset\cup\emptyset)=\mu(\emptyset)+\mu(\emptyset)$$

所以 $\mu(\emptyset)=0$，对于任意一列不相交集合 $\{E_k\}$，令 $A_n=\cup_{k=1}^n E_k$，那么 $\{A_n\}$ 是一列递增的集合

$$\mu(\cup_{k=1}^\infty E_k)=\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n)=\lim_{n\to\infty} A_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \mu(E_k)=\sum_{k=2}^\infty \mu(E_k)$$

$\Leftarrow$

令 $E_1=A_1$，$E_k=A_k\setminus A_{k-1}$，这样 $\{E_k\}$ 是不相交的集合，根据可列可加性

$$\mu(\cup_{k=1}^\infty A_k)=\mu(\cup_{k=1}^\infty E_k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \mu(E_k)$$

其中 $\mu(E_k)=\mu(A_k)-\mu(A_{k-1})$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \mu(E_k)=\mu(A_1)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^n \mu(A_k)-\mu(A_{k-1})=\lim_{n\to\infty}\mu(A_k)$$

□

5

(i) *Proof.*

$\mu(E_1\Delta E_2)=\mu(E_1\setminus E_2)+\mu(E_2\setminus E_1)=0$，由于测度都是非负的，所以 $\mu(E_1\setminus E_2)=\mu(E_2\setminus E_1)=0$。由可列可加性

$$\mu(E_1)=\mu(E_1\cap E_2)+\mu(E_1\setminus E_2)=\mu(E_2\cap E_1)+\mu(E_2\setminus E_1)=\mu(E_2)$$

□

(ii) *Proof.*

由于 μ 是完备的，如果 $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$，因为 $E_1 \setminus E_2 \subset E_1 \Delta E_2$，所以 $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{M}$。那么 $E_2 \cap E_1 = E_1 \setminus (E_1 \setminus E_2) \in \mathcal{M}$，从而 $E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \setminus E_1) \in \mathcal{M}$ □

6

Proof.

首先证明 $\mathcal{M}_0$ 是 σ 代数。(1) 显然 $\emptyset \in \mathcal{M}_0$，$X_0 \in \mathcal{M}_0$。(2) 对于任意的 $A \in \mathcal{M}_0$，因为 $A \in \mathcal{M}$，$X_0 \in \mathcal{M}$，所以 $X_0 \setminus A \in \mathcal{M}$，并且 $X_0 \setminus A \subset X_0$，所以 $X_0 \setminus A \in \mathcal{M}_0$。即 $\mathcal{M}_0$ 对取余集封闭。(3) 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathcal{M}_0$ 中的一列集合，由于 $E_k \in \mathcal{M}$ 并且 $\mathcal{M}$ 对可列并封闭，所以 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$。另一方面由于 $\{E_k\}$ 都是 X_0 的子集，所以 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \subset X_0$，从而 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}_0$

下面证明 μ_0 是一个测度。(1)$\mu(\emptyset) = \mu_0(\emptyset) = 0$。(2) 对于 $\mathcal{M}_0$ 中可列不相交的集合 $\{E_k\}$，由于 $\mathcal{M}_0$ 对于可列并封闭，所以 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$

$$\mu_0(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k)$$

综上 $(X_0, \mathcal{M}_0, \mu_0)$ 是一个测度空间 □

9

Proof.

首先证明 $\mathcal{M}_0$ 是一个 σ 代数。(1)$\emptyset \in \mathcal{M}_0$，$X \in \mathcal{M}_0$ (2) 任取 $E \in \mathcal{M}_0$，$E = A \cup B$，其中 $B \in \mathcal{M}$，$A \subseteq C \in \mathcal{M}$，$\mu(C) = 0$。

$$\begin{aligned} X \setminus E &= (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \\ &= [(X \setminus C) \cup (C \setminus A)] \cap (X \setminus B) \\ &= [(X \setminus C) \cap (X \setminus B)] \cup [(C \setminus A) \cap (X \setminus B)] \end{aligned}$$

其中 $[(X \setminus C) \cap (X \setminus B)] \in \mathcal{M}, [(C \setminus A) \cap (X \setminus B)] \subseteq C$, 并且 $\mu(C) = 0$, 所以 $X \setminus E \in \mathcal{M}_0$, 即 $\mathcal{M}_0$ 对取余集封闭 (3) 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathcal{M}_0$ 中的一列子集, 其中 $E_k = A_k \cup B_k$, 这里设 $B_k \in \mathcal{M}, A_k \subseteq C_k$, 并且 $\mu(C_k) = 0$，那么 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = (\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \cup (\cup_{k=1}^{\infty} B_k)$。其中根据 $\mathcal{M}$ 对于可列并的封闭性，$\cup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}$；同样的，$\cup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} C_k \in \mathcal{M}$，并且 $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} C_k) = 0$。由此 $\mathcal{M}_0$ 对于可列并封闭。

接下来证明，μ_0 是良定义的，若 $E = A \cup B = A' \cup B'$，其中 $B, B' \in \mathcal{M}$；$A \subseteq C, A' \subseteq C', \mu(C) = \mu(C') = 0$ 并且 $\mu(B) \neq \mu(B')$。不妨设 $\mu(B) > \mu(B')$，那么 $B \setminus B' = A' \setminus A$，有 $0 < \mu(B \setminus B') = \mu(A' \setminus A) \leq \mu(C') = 0$，矛盾。所以 $\mu_0(E) = \mu(B) = \mu(B')$

对于 $E \in \mathcal{M}_0, E = A \cup B, A \subset C, \mu(C) = 0$，满足 $\mu_0(E) = \mu(B) = 0$，所以对于 E 的任意子集 $S = S \cup \emptyset$，其中 $\emptyset \in \mathcal{M}$，$S \subseteq E \subseteq (C \cup B) \in \mathcal{M}$，并且 $\mu(C \cup B) = \mu(B) + \mu(C) = 0$，所以 $S \in \mathcal{M}_0$

$\mathcal{M}_0$ 是包含 $\mathcal{M}$ 的最小的完备测度空间，设 $\{\mathcal{N}\}$ 为所有包含 $\mathcal{M}$ 的完备测度空间。对于任意的 $E = A \cup B \in \mathcal{M}_0$，根据 A, B 的定义，$A \in \mathcal{N}, B \in \mathcal{N} \Rightarrow E \in \mathcal{N}$，所以 $\mathcal{M}_0 \subseteq \bigcap \mathcal{N}$。另一方面，$\bigcap \mathcal{N} = \mathcal{M}_0 \bigcap (\bigcap_{\mathcal{N} \neq \mathcal{M}_0} \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}_0$。因此 $\mathcal{M}_0 = \bigcap \mathcal{N}$，即包含 $\mathcal{M}$ 的最小完备测度空间 □

17.2

12

Proof.

$A = \{x \in E : f(x) > 0\}$ □

13

(i) *Proof.*

设 $X = A \cup B$，$\mu = \mu_1 - \mu_2$，满足 $\mu_1(A) = \mu_2(B) = 0$；

(1) 若 $E \subset B$，由于 μ_2 是测度，由单调性 $0 = \mu_(B) \geq \mu_2(E) \geq 0$，因此 $\mu_2(E) = 0$

(2) 若 $E \subset A$，$\mu_2(E) = -\mu(E)$，由于 μ, μ_2 都是测度，所以 $0 \geq -\mu(E) = \mu_2(E) \geq 0$，因此 $\mu_2(E) = 0$。

那么对于任意的 E，根据测度的可列可加性 $\mu_2(E) = 0$ □

(ii) *Proof.*

下面证明 Jordan 分解的唯一性，设 $\{A, B\}$ 是一个 Hahn 分解，$v = v^+ - v^-, v^+(E) = v(E \cap A) \quad v^-(E) = -v(E \cap B)$，其中 $v^+(B) = v^-(A) = 0$。若除此之外还可以分解为 $v = v_1^+ - v_1^-, v_1^+(B') = v_1^-(A') = 0$。由于测度非负 $v(A') = v_1^+(A') \geq 0$，$v(B') = -v_1^-(B') \leq 0$，那么 $\{A', B'\}$ 也是一个 Hahn 分解。由于两个 Hahn 分解之间相差一个零集 N，不妨设 $A' = A \setminus N, B' = B \cup N$。对于集合 E

(1) 若 $E \subset N$，由于 $E \subset A, v^-(E) = 0$，$v^+(E) = v(E) = 0$；另一方面 $E \subset B', v_1^+(E) = 0$，$v_1^-(E) = v(E) = 0$

(2) 若 $E \subset A' \cup B$，$0 = v - v = [v^+ - v_1^+] - [v^- - v_1^-] = \mu_1 - \mu_2$。可以验证 μ_1, μ_2 都是恒为 0 的测度，并且在 $A' \cup B$ 上 $\mu_1(B) = \mu_2(A') = 0$，根据 (i) 的结论，$\mu_2 = 0$，即 $v^- = v_1^-$；那么 $\mu_1 = v^+ - v_1^+ = 0$，即 $v^+ = v_1^+$

综上，对于任意的集合 E 都有 $v^- = v_1^-, v^+ = v_1^+$，所以分解是唯一的

注：这道题第二问不太会 □

16

Proof.

设 $\{A,B\}$ 是 X 的一个 Hahn 分解,令 $K=\{\sum_{k=1}^{n}\left|v(E_k)\right|:\{E_k\}_{k=1}^{m}$是有限个不相交的可测子集$\}$,由于 $\{A,B\}$ 是 X 的两个可测子集，并且 $v^+(B)=v^-(A)=0$

$$|v|(X)=v^+(X)+v^-(X)=v^+(A)+v^-(B)=v(A)+v(B)\in K$$

所以 $|v|(X)\leq\sup K$。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left|v(E_k)\right| &= \sum_{k=1}^{n}\left|v^+(E_k)-v^-(E_k)\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\left|v^+(E_k)\right|+\left|v^-(E_k)\right| \\ &= \sum_{k=1}^{n}v^+(E_k)+v^-(E_k) \\ &= v^+(\cup_{k=1}^{n}E_k)+v^-(\cup_{k=1}^{n}E_k) \quad \text{测度可列可加} \\ &\leq v^+(A)+v^-(B) \quad \text{测度单调性} \\ &= |v|(X)\end{aligned}$$

因此 $\sup K\leq|v|(X)$，综上 $|v|(X)=\sup K$ $\square$