实变函数第八次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

6.5

53

Proof.

$\Rightarrow$

设 Lipschitz 常数为 $M > 0$

$$|f'(x)| = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \le \lim_{h\to 0} \frac{M|x+h-x|}{|h|} = M$$

那么 M 即为 c，$|f'| < c$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立

$\Leftarrow$

对于任意的 $E = (x_1, x_2) \subset [a,b]$，由于 f 是绝对连续的，根据定理 5.1 有

$$\int_E f' = f(x_2) - f(x_1)$$

由于在 E 上 $|f'| \le c$ a.e.，设在 $E' \subset E$ 上 $|f'| \le c$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\int_E f'| \le \int_E |f'| = \int_{E'} |f'| \le cm(E') \le c|x_2 - x_1|$$

所以 f 是 Lipschitz 连续的

$\square$

54

(i) *Proof.*

与引理 4.1 的证明类似，由 f 是奇异的，令 $E_c = \{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$

对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 N，使得 $\epsilon > \frac{b-a}{N}$；对于任意的 $\delta > 0$，令 $\mathcal{F}$ 为所有包含在 $[a,b]$ 中满足 $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{N}(y-x)$ 的闭区间 $[x,y]$ 构成的集族，则 $\mathcal{F}$ 是 E_c 的 Vitali 覆盖，由 Vitali 覆盖引理，存在 $\mathcal{F}$ 中不相交的区间列 $\{[x_k, y_k]\}_{k=1}^n$

$$m^*(E_c \setminus \cup_{k=1}^n [x_k, y_k]) < \delta$$

不妨设 $a = y_0 < x_1 < y_1 < x2 < \cdots < y_n < x_{n+1} = c$。由 $[x_k, y_k] \in \mathcal{F}$，我们有

$$\sum_{k=1}^n f(y_k) - f(x_k) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n (y_k - x_k) \leq \frac{b-a}{N} < \epsilon$$

对于区间列 $\{(y_k, x_{k+1})\}_{k=1}^n$

$$\sum_{k=1}^n (x_{k+1} - y_k) = m([a, b] \setminus \cup_{k=1}^n [x_k, y_k]) = m^*(E_c \setminus \cup_{k=1}^n [x_k, y_k]) < \delta$$

由于 f 是单调递增的

$$\sum_{k=1}^n f(x_{k+1}) - f(y_k) + \sum_{k=1}^n f(y_k) - f(x_k) = f(b) - f(a)$$

令 $a_k = y_k$，$b_k = x_{k+1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n f(b_k) - f(a_k) &= \sum_{k=1}^n f(x_{k+1}) - f(y_k) \\
&= f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n f(y_k) - f(x_k) \\
&> f(b) - f(a) - \epsilon
\end{aligned}$$

□

(ii) *Proof.*

首先因为 f 是单调的，所以 f 是有界变差的

其次，对于任意的 ϵ，根据 δ 的任意性，当 $\delta \to 0$，上面的结论变成，存在 $E \subset [a, b]$

$$m(E) = 0 \quad \int_E f' > f(b) - f(a) - \epsilon$$

另外，对于 $[a, b]$ 上的单调递增函数有

$$\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$$

那么根据上面两个不等式，对于任意的 $\epsilon > 0$，令 $E_c = [a, b] \setminus E$

$$\int_E f' + \epsilon > \int_a^b f'$$

$$\int_{E_c} f' < \epsilon$$

根据 ϵ 的任意性

$$\int_{E_c} f' = 0$$

所以 f' 在 E_c 上几乎处处为 0，由于 E 是一个零测集，那么 f' 在 E 上几乎处处为 0，所以 f 是奇异的

□

55

(i) *Proof.*

考虑 $[u,v] \subset [a,b]$，$P = \{u,v\}$ 是 $[u,v]$ 的一个分划，那么

$$|f(u) - f(v)| = V(f,P) \le TV(f_{[u,v]}) = TV(f_{[a,v]})) - TV(f_{[a,u]})$$

那么，

$$\frac{|f(v) - f(u)|}{v-u} \le \frac{TV(f_{[a,v]}) - TV(f_{[a,u]})}{v-u}$$

由于 f 是有界变差的, 所以 $TV(f_{[a,x]})$ 在 $[a,b]$ 上单调有界, 根绝 Lebesgue 定理, $TV(f_{[a,x]})$ 几乎处处可微。所以当 $u \to v$ 时，左侧极限几乎处处成立。因此 $|f'| \le v'$ a.e.

另外根据有界闭区间单增函数的性质

$$\int_a^b |f'| \le \int_a^b v' \le v(b) - v(a) = TV(f)$$

□

(ii) *Proof.*

$\Rightarrow$

首先对于 $x \in [a,b]$，f 在 $[a,x]$ 和 $[x,b]$ 上有界变差，利用 (i) 中同样的方式可以证明

$$\int_a^x |f'| \le TV(f_{[a,x]}) \quad \int_x^b |f'| \le TV(f_{[x,b]})$$

由于在整个区间上 $\int_a^b |f'| = TV(f)$ 所以有

$$\int_a^x |f'| = TV(f_{[a,x]}) = v(x)$$

那么 $v(x)$ 是 $[a,x]$ 上的一个不定积分，所以 $v(x)$ 是绝对连续的

由 $v(x)$ 的绝对连续性，对于任意的 $\epsilon > 0$，取 δ 为 $v(x)$ 在 ϵ 下的参数，对于任意有限个不相交的开区间 $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$，当 $\sum_{k=1}^n b_k - a_k < \delta$ 时

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| \le \sum_{k=1}^n TV(f_{[a_k,b_k]}) = \sum_{k=1}^n |v(b_k) - v(a_k)| < \epsilon$$

因此 f 是绝对连续的

$\Leftarrow$

证明 $TV(f) \le \int_a^b |f'|$ 成立，即可证明等式成立

若 f 在 $[a,b]$ 上绝对连续，那么对于任意的 $(u,v) \subset [a,b]$ 有

$$\int_u^v f' = f(v) - f(u)$$

那么，对于 $[a,b]$ 的任意分划 P

$$V(f,P) = \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| = \sum_{k=1}^n |\int_{b_k}^{a_k} f'| \le \sum_{k=1}^n \int_{b_k}^{a_k} |f'| = \int_a^b |f'|$$

由分划的任意性

$$TV(f) \le \int_a^b |f'|$$

所以等式成立

□

(iii) *Proof.*

Corollary 4 和 12 中函数 f 都是单调递增的，所以本题中相当于对 Corollary 4 和 12 的推广。当 f 是单调递增函数时，part(i) 中和 part(ii) 中左侧 f' 的绝对值都可以去掉；右侧 $TV(f) = f(b) - f(a)$，与 Corollary 4 和 12 是一致的。 □

7.2

1

Proof.

三角不等式性：$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f+g| \le \int_a^b |f| + |g| \le \|f\|_1 + \|g\|_1$

正齐次性：$\|\alpha f\|_1 = \int_a^b |\alpha f| = |\alpha| \int_a^b |f| = |\alpha| \|f\|_1$

非负归一性：由于 $|f| \ge 0$，$\|f\|_1 = \int_a^b |f| \ge 0$。若 $f = 0$ a.e.，那么 $|f| = 0$ a.e.，$\|f\|_1 = \int_a^b |f| = 0$；反之若 $\|f\|_1 = 0$，根据积分性质 $|f| = 0$ a.e.，所以 $f = 0$ a.e.

对于第一种情况, 考虑讲义例 2.10 中的函数, 令 $f_n(x):[a,b]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=0$, $x\geq a+\frac{2(b-a)}{n}$, $f_n(a)=0$, $f_n(\frac{b-a}{n})=n$, 并且 f_n 在 $[a,\frac{b-a}{n}]$ 和 $[\frac{b-a}{n},\frac{2(b-a)}{n}]$ 上线性, 则 f_n 连续, $\|f_n\|_1=\int_a^b f_n=1$

但是对于任意的 $c>0$，存在 $n_0>c$，$\|f_{n_0}\|_{max}>c$，所以不存在 c 满足 $\|f\|_{max}\leq c\|f\|_1$

对于第二种情况，根据积分的性质

$$\|f\|_1=\int_a^b |f|\leq\int_a^b \max_{x\in[a,b]}|f(x)|\leq(b-a)\|f\|_{max}$$

取 $c=b-a$ 即可 □

4

Proof.

$$\min\{M:m\{x\in[a,b]:|f(x)|>M\}=0\}=\min\{M:\|f\|_{max}\leq M\}$$

上面等式右端表示的就是本性上界的最小值，与 $\|f\|_\infty$ 的定义一致，所以 $\|f\|_\infty=\min\{M:m\{x\in[a,b]:|f(x)|>M\}=0\}$

如果 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有最大最小值，并且最大最小值的绝对值等于 $\|f\|_{max}$，那么上面等式右端中的 $\min M=\|f\|_{max}$，所以 $\|f\|_\infty=\|f\|_{max}$ □