# 实变函数第十二次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

## 17.4

### 19

*Proof.*

设 $\mu^*$ 是 $2^X$ 上的外测度，$\mathcal{M}$ 是关于 $\mu^*$ 的全体可测集。$\overline{\mu}$ 是 $\mu^*$ 在 $\mathcal{M}$ 上面的限制。$(X, \mathcal{M}, \overline{\mu})$ 是一个由外测度诱导的测度空间。

首先证明零测集是可测的。假设 $\mu^*(E) = 0$，那么，任取集合 $A \subseteq 2^X$，$A \cap E \subseteq E$，$A \cap E^c \subseteq A$，根据外测度的有限单调性 $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$。所以零测集是可测的

下面证明零测集的子集都是可测的，设 $\mu^*(E) = 0$，任取 $A \subseteq E$，根据外测度的有限单调性，$0 \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(E) = 0$，所以 $\mu^*(A) = 0$，因此 $A$ 是可测的 $\square$

### 21

*Proof.*

由 $\mu$ 确定的外测度 $\mu^*$，根据诱导的外测度的定义，对于任何非空集合 $A \subseteq X$，只能由 $X$ 来覆盖，所以 $\mu^*(A) = 1$；$\mu^*(\emptyset) = 0$。

根据可测的定义，如果 $E$ 是 $\emptyset$ 或者 $X$，那么对于 $X$ 中的任意子集 $A \subseteq X$，$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ 成立。如果 $E$ 是 $X$ 中的非空子集，并且 $X \setminus E \neq \emptyset$，那么存在 $X$ 中的非空子集 $A$

$$1 = \mu^*(A) \neq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = 2$$

所以可测集只有 $\{\emptyset, X\}$，他们是一个 $\sigma$ 代数。 $\square$

### 23

*Proof.*

由 $\mu$ 确定的外测度 $\mu^* = \mu$。$\mathcal{S}$ 中所有的元素，即 $\mathbb{R}$ 的所有子集都是可测的。这里使用反证法，若存在 $\mathbb{R}$ 中的子集 $E$ 不可测，那么存在 $\mathbb{R}$ 中的子集 $A$，满足 $\mu^*(A) < \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$，那么由此可知存在整数 $n$ 同时属于 $E$ 和 $E^c$，矛盾。因此 $\mathbb{R}$ 的子集都是可测的，并且是一个 $\sigma$ 代数 $\square$

## 17.5

### 25

*Proof.*

由于不存在不相交的集合所以有限可加性成立；分别对 $A$ 和 $X$ 验证，可列单调性是成立的，因此 $\mu$ 是一个预测度。$\mu$ 可以扩张为一个测度，考虑 $\mathcal{S}' = \{\emptyset, A, X, X \setminus A\}$，并且定义 $\mu'(\emptyset) = 0$，$\mu'(X \setminus A) = 1$，这样可以验证 $\mathcal{S}$ 中的集合都是 $\mu'$ 可测的，并且在 $\mathcal{S}$ 上 $\mu = \mu'$。

首先由 $\mu$ 诱导的外测度 $\mu^*$，若 $E \subseteq A$，$\mu^*(E) = 1$；若 $E \setminus A \neq \emptyset$，$\mu^*(E) = 2$。容易知道对于任意集合 $B \subseteq X$，若 $E = \emptyset$ 或者 $E = X$ 都有

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E)$$

除此之外，$X$ 中的集合 $E$ 还有可能是以下三种情况，(1)$E \subseteq A$ (2)$E \subseteq X \setminus A$ (3)$E \cap A \neq \emptyset$ 并且 $E \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$。可以验证，上述三种情况下的集合都不是可测的，因为对于情况 (1) 和情况 (2), 可以取 $B$ 为情况 (3)；对于情况 (3)，可以取 $B$ 为满足情况 (3) 并且 $E \subset B$。综上都有

$$\mu^*(B) \neq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \setminus E)$$

所以可测集只有 $X$ 和 $\emptyset$ □

### 30

**(i)** *Proof.*

首先说明对于可列封闭，设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathcal{S}_\sigma$ 中的任意一列集合，并且每个 $E_k = \cup_{i=1}^{\infty} E_{ki}$，其中 $E_{ki} \in \mathcal{S}$。由于可列个可列集合仍是可列的，所以 $\{E_{ki}\}_{i,k=0}^{\infty}$ 是可列的，所以 $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = \cup_{i,k=0}^{\infty} E_k i \in \mathcal{S}_\sigma$。

对于有限交，考虑有限个集合 $\{E_k\}_{k=1}^{n}$，其中 $E_k = \cup_{i=1}^{\infty} E_{ki}$，

$$\cap_{k=1}^{n} E_k = \cap_{k=1}^{n} \cup_{i=1}^{\infty} E_{ki} = \cup_{j=1}^{\infty} \cap_{k=1}^{n} E_{ki}$$

其中 $A_j = \cap_{k=1}^{n} E_{ki}$, 这里 $j = \sum i$。由于 $\mathcal{S}$ 对有限交封闭, 所以 $A_j \in \mathcal{S}$, 所以 $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{S}_\sigma$, 因此 $\mathcal{S}_\sigma$ 对有限交封闭 □

**(ii)** *Proof.*

设 $\cap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{S}_{\sigma\delta}$，其中 $E_k \in \mathcal{S}_\sigma$。令 $A_n = \cap_{k=1}^{n} E_k$，由于 $\mathcal{S}_\sigma$ 对有限交封闭，所以 $A_n \in \mathcal{S}_\sigma$，并且有 $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \cap_{k=1}^{\infty} E_k$，$A_{n+1} \subseteq A_n$。因此 $\{A_n\}$ 即为 $\mathcal{S}_\sigma$ 中所求的递降序列。 □

### 33

**(i)** *Proof.*

任意两个有界区间的交是一个有界区间，差可能是有界区间或者两个有界区间的并，并且这些区间属于 $\mathcal{S}$，所以是一个 semi-ring □

**(ii)** *Proof.*

交是一个二维的有界区域，并且横纵坐标所组成的区间属于 $\mathcal{S}$，因此该区域属于 semi-ring 的二维乘积，差可能一个或者两个或者四个有界区域的并，这些有界区域的横纵坐标构成的区间同样属于 $\mathcal{S}$，因此并也属于 semi-ring 的二维乘积

□

**(iii)** *Proof.*

将二维换成 n 维即可 □