实变函数第十三次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

20.1

2

Proof.

由于 N 的子集都是关于计数测度可测的，所以定义在 N 上的函数都是可测的。

充分性：如果 f 是 N 上的可积函数，那么根据一般函数的积分，f^+ 和 f^- 是可积的，即

$$\int_E f^+ dc = \sum_{k, f(k) \geq 0} \left|f(k)\right| < \infty$$

$$\int_E f^- dc = \sum_{k, f(k) < 0} \left|f(k)\right| < \infty$$

因此 $\int_E f^+ dc + \int_E f^- dc = \sum_k \left|f(k)\right| < \infty$ 是绝对收敛的，并且 $\int_E f dc = \int_E f^+ dc - \int_E f^- dc = \sum_k f(k)$

必要性：由绝对收敛性，那么 $\int_E f^+ < \sum_k \left|f(k)\right| < \infty$ 和 $\int_E f^- < \sum_k \left|f(k)\right| < \infty$ 是可积的，所以 f 是可积的 □

3

Proof.

首先计数测度 c 是完备的，因为只有 $\emptyset$ 的测度为 0。

Fubini 定理：f 在 N×N 上关于 $c \times c$ 是可积的，对于任意的 $x \in X$，x-截函数 $f(x, \cdot)$ 在 N 上关于 c 是可积的，并且

$$\int_{N \times N} f d(c \times c) = \int_N [\int_N f(x, y) dc(y)] dc(x)$$

Tonelli 定理：由于计数测度是 σ-有限的，所以 $(N, \mathcal{M}, c)$ 是 σ-有限的测度空间，并且 c 是完备的。f 是 N×N 上的关于 $c \times c$ 的可测函数，那么对于任意的 $x \in X$，x-截函数 $f(x, \cdot)$ 是 c 可测的，并且 $x \to \int_Y f(x, \cdot)$ 是关于 c 可测的，并且

$$\int_{N \times N} f d(c \times c) = \int_N [\int_N f(x, y) dc(y)] dc(x)$$

□

13

Proof.

首先证明 $R^{(k)}$ 是一个半环，由数学归纳法，当 $k=1$ 时，由测度空间的性质可知是半环；假设 $k=n-1$ 时该性质成立，当 $k=n$ 时，两个矩形的交还是矩形；对于 $A\times C, B\times D\in R$，其中 $A,B\in R^{(n-1)}$，$C,D\in R^{(1)}$。那么

$$(A\times C)\setminus(B\times D)=[(A\setminus B)\times C]\cup[(A\cap B)\times(C\setminus D)]$$

因此对于相对补是封闭的，所以是一个半环。

下面证 $\mu(R^{(n)})$ 是一个预测度。固定点 $x_1\in A_1,\dots,x_{n-1}\in A_{n-1}$，对于任意的 $y\in A_n$，$(x_1,\dots,x_n)$ 属于唯一一个 $A_{1i}\times\dots\times A_{ni}$。因此我们有下面的不交并

$$A_n=\cup_{\{i:x_1\in A_{1i},\dots,x_{n-1}\in A_{(n-1)i}\}}A_{ni}$$

由 μ_n 的可列可加性知

$$\mu_n(A_n)=\sum_{\{i:x_1\in A_{1i},\dots,x_{n-1}\in A_{(n-1)i}\}}\mu_n(A_{ni})$$

从而有

$$\mu_n(A_n)\times\chi_{A_1}(x_1)\times\dots\times\chi_{A_{n-1}}(x_{n-1})=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(A_{ni})\times\chi_{A_{1i}}(x_1)\times\dots\times\chi_{A_{(n-1)i}}(x_{n-1})$$

上式对整个 $X_1\times\dots X_{n-1}$ 成立，那么

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\mu_k(A_k)&=\int_{X_{n-1}}\dots\int_{X_1}\mu_n(A_n)\times\chi_{A_{1i}}(x_1)\times\dots\times\chi_{A_{(n-1)i}}(x_{n-1})d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{n-1}(x_{n-1})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{X_{n-1}}\dots\int_{X_1}\mu_n(A_{ni})\times\chi_{A_{1i}}(x_1)\times\dots\times\chi_{A_{(n-1)i}}(x_{n-1})d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{n-1}(x_{n-1})\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\mu_k(A_{ki})\end{aligned}$$

因此，有限可加性成立。假设可测矩形 E 可被可列个不相交矩形 $\{E_k\}_k$ 盖住。由于 $R^{(n)}$ 是半环，所以 $E=\cap_{k=1}^{\infty}(E\cap E_k)$，其中 $E\cap E_k$ 是可测矩形，根据上面证明的可列可加性，有 $\mu(E)=\sum_k\mu(E\cap E_k)\le\sum_k\mu(E_k)$，因此满足可列单调性，所以 μ 是一个预测度。

首先定义外测度

$$\mu^*(E)=\inf\{\sum_k\mu(E_k):E_k\in R^{(n)},E\subseteq\cup_kE_k\}$$

之后定义可测集，若 E 满足，对于任意的 $A\in X_1\times\dots\times X_n$

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$$

由所有可测集构成的集合 $\mathcal{M}$，由 Caratheodory-Hahn 定理，$\overline{\mu}$ 是 μ 的扩张

不太明白这里的拆分，感觉不是显然的么？ □