实变函数第六次作业

16231057 王延鹏

June 25, 2020

6.2

2

Proof.

令 $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是所有在 $[0,1]$ 上面的有理数，并将他们从小到大进行排列，其中 $q_0=0$。令

$$f(x)=\frac{1}{n} \quad q_n \leq x < q_{n+1}$$

若 r 是 $[0,1]$ 上面的有理数，那么取 $a=r-1/n$，有 $lim_{n\to\infty}f(a)-f(r)>1/2$，所以在有理数处不是连续的。对于任意的 $0\leq x<y\leq 1$，x 和 y 中间至少存在一个有理数，根据定义 $f(y)-f(x)>1$ 所以 f 是严格单调的。 □

3

Proof.

相比开区间需要考虑在边界处利用 sup 和 inf 定义导致的跳跃区间重合问题。

对于单点集，本书认为是连续的，那么考虑 E 中除去原来的单点集，剩下集合的问题。

若 $x\in E$ 的内点，那么左右极限的定义与开区间相同。

若 $x\in E$ 的边界点，对于任意的 ϵ，若 $x+\epsilon\in E$，那么令 $f(x^-)=f(x)$，若 $x-\epsilon\in E$，那么令 $f(x^+)=f(x)$ 其他不变。

上述操作将 E 上的跳跃间断点重新分成了不相交的区间。并且 $f(x^-)\leq f(x^+)$，定义不连续点的跳跃区间为 $J(x_0)=(f(x_0^-),f(x_0^+))$，不连续区间不相交并且包含有理数，由于有理数是可列的，所以跳跃间断区间是至多可列的，从而不连续点是至多可列的。 □

14

Proof.

设题目中的闭区间的并为 O，并且令 $E_n=O\cap[-n,+n]$，根据 Vitali 覆盖引理，E_n 具有有限外测度，设 F_n 是 E_n 的一个 Vitali 覆盖，则对任意的 $epsilon>0$，存在 F_n 中有限个不相交的闭区域 $\{I_k\}$，使得 $m(E_n\setminus\cup_{k=1}^{n})<\epsilon$。根据 Borel 正则性，$E_n$ 是可测的。又 $O=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$，因为可数个可测集的并任然是可数的，所以 O 是可测的。 □

15

Proof.

$$
\begin{aligned}
\overline{D}f(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\sup_{0\le|t|\le h}\frac{f(t)}{t}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\sup_{0\le|t|\le h} sin(1/t) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\underline{D}f(x) &= \lim_{h\to 0}\left[\inf_{0\le|t|\le h}\frac{f(t)}{t}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\inf_{0\le|t|\le h} sin(1/t) \\
&= -1
\end{aligned}
$$

□

19

Proof.

题设中上导数非负改成下导数非负。

对于满足 $\underline{D}g(x) \ge \epsilon > 0$ 的函数 g，取任意一个区间 $(x,y) \subset (a,b)$，令 $\mathcal{F}$ 为所有包含在 (x,y) 中且满足 $g(d)-g(c) > \epsilon(d-c)$ 的闭区间 $[c,d]$ 构成的集族。则 $\mathcal{F}$ 是 E 的 Vitali 覆盖。由 Vitali 覆盖定理，存在至多可列个 $\mathcal{F}$ 中的不相交区间 $[c_k,d_k]$ 使得

$$m((a,b)\setminus \cup_{k=1}^{\infty}[c_k,d_k]) = 0$$

由于 $[c_k,d_k] \in \mathcal{F}$，有

$$g(y)-g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[g(d_k)-g(c_k)] > \epsilon[\sum_{k=1}^{\infty}(d_k-c_k)] > \epsilon(y-x)$$

取 $g(x) = f(x)+\epsilon x$，满足 $\underline{D}g(x) \ge \epsilon > 0$，因此有对于任意的 $a \le x < y \le b$

$$f(y)-f(x) = g(y)-g(x)-\epsilon(y-x) > 0$$

所以 f 是 $[a,b]$ 上面的递增函数。 □

23

Proof.

由于上下导数有界，不妨设存在 $L > 0$ 满足

$$-L \leq \underline{D}f(x) \leq \overline{D}f(x) \leq L$$

对于任意的 $(c,d) \subset (x,y)$，设

$$g(x) = f(x) - (x-c)\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

满足 $g(c) = g(d)$，那么根据极值定理，存在 ξ 取得 (c,d) 上面的极值，并且左侧导数一定是大于等于 0 的，那么根据上导数的定义取左右导数的上界

$$\overline{D}g(\xi) = \lim_{h\to 0}\sup_{0\leq t\leq h}\frac{g(\xi)-g(\xi-h)}{h} \geq 0$$

那么

$$\overline{D}g(\xi) = \overline{D}f(\xi) - \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leq L - \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

因此

$$|\frac{f(d)-f(c)}{d-c}| \leq L$$
$$|f(d)-f(c)| \leq L|d-c|$$

□

1 6.3

27

Proof.

令 $h = sin(x) + x$,$g = x$ □

30

(i) *Proof.*

如果函数 f 和函数 g 都是有界变差函数，那么对于任意的 α 和 β 有

$$TV(\alpha f) = |\alpha|TV(f) < \infty$$

$$TV(\beta g) = |\beta|TV(g) < \infty$$

所以 αf 和 βg 都是有界变差函数，那么线性组合

$$TV(\alpha f + \beta g) \leq TV(\alpha f) + TV(\beta g) \leq \infty$$

也是有界变差函数 □

(ii) *Proof.* 由于 f 和 g 是有界变差函数，所以 f 和 g 是有界函数，存在 $M>0$，$|f|<M$ 且 $|g|<M$

$$\begin{aligned}V(f\cdot g,P)&=\sum_{i=0}^{k}|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\\&=\sum_{i=0}^{k}|f(x_i)||g(x_i)-g(x_{i-1})|+|g(x_{i-1})||f(x_i)-f(x_{i-1})|\\&\leq M(\sum_{i=0}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|g(x_i)-g(x_{i-1})|)\end{aligned}$$

所以 $V(f\cdot g,P)$ 是有界的，那么 $TV(f\cdot g)=\sup V(f\cdot g)$ 是有界的，所以 $f\cdot g$ 是有界变差函数。 □

32

Proof.

由 $TV(f)=\sup_q V(f,q)$，对于任意的 $\epsilon>0$，存在 q 使得 $TV(f)-V(f,q)<\epsilon$，取这样的 $\epsilon=1/n$，那么有分划 q_n 满足 $V(f,q_n)-TV(f)<1/n$，从而可以得到一列这样的分划 $\{q_n\}$，满足 $\lim_{n\to\infty}V(f,q_n)=TV(f)$。

另外，若分划 $q\subset p$，那么根据三角不等式 $V(f,q)\leq V(f,p)$，那么可以令 $p_n=\cup_{k=1}^{n}q_k$，这样满足 $V(f,p_n)\geq V(f,p_k)$，对于 $k<n$，所以 $V(f,p_n)$ 是递增的。

根据构造 $V(f,q_n)\leq V(f,p_n)<TV(f)$，根据夹逼定理，$lim_{n\to\infty}V(f,p_n)=TV(f)$ □

33

Proof.

对于 $[a,b]$ 上的任意一个分划 $P=\{x_0,\cdots,x_m\}$，由于 f_n 是点态收敛的

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f_n(x_{k-1})|$$

根据 TV 的定义，对于任意的 f_n 有

$$\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f_n(x_{k-1})|\leq TV(f_n)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{k=1}^{m}|f_n(x_k)-f_n(x_{k-1})|\leq\lim_{n\to\infty}\inf TV(f_n)$$

因为左侧极限是收敛的，所以根据第一个等式

$$\sum_{k=1}^{m}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leq\lim_{n\to\infty}\inf TV(f_n)$$

由分划 P 的任意性，取 sup 得到 TV 即

$$TV(f) \leq \lim_{n\to\infty} \inf TV(f_n)$$

$\square$