命题逻辑

- **(论域)定义：论域是一个数学系统，记为 D。它由三部分组成：**
  - **(1)一个非空对象集合 S，每个对象也称为个体；**
  - **(2) 一个关于 D 的函数集合 F；**
  - **(3)一个关于 D 的关系集合 R。**
- （逻辑连接词）定义
  - 设 $n>0$,称为$\{0,1\}^n$到$\{0,1\}$的函数为 n 元函数，真值函数也称为联结词。
  - 若 $n=0$，则称为 0 元函数。
- （命题合式公式）定义：
  - (1).常元 0 和 1 是合式公式；
  - (2).命题变元是合式公式；
  - (3).若 Q,R 是合式公式，则$(\neg Q)$、$(Q\wedge R)$ 、$(Q\vee R)$ 、$(Q\rightarrow R)$ 、$(Q\leftrightarrow R)$ 、$(Q\oplus R)$是合式公式；
  - (4).只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是合式公式。
- （生成公式）定义 1.5 设 S 是联结词的集合。由 S 生成的公式定义如下：
  - ⑴若 c 是 S 中的 0 元联结词，则 c 是由 S 生成的公式。
  - ⑵原子公式是由 S 生成的公式。
  - ⑶若 $n\geq 1$，F 是 S 中的 n 元联结词，$A_1,\ldots,A_n$是由 S 生成的公式，则 $FA_1\ldots A_n$是由 S 生成的公式。
- （复杂度）公式 A 的复杂度表示为 FC(A)
  - 常元复杂度为 0。
  - 命题变元复杂度为 0，如果 P 是命题变元，则 $FC(P)=0$。
  - 如果公式 $A=\neg B$，则 $FC(A)=FC(B)+1$。
  - 如果公式 $A=B_1\wedge B_2$，或

    $A=B_1\vee B_2$，或

    $A=B_1\rightarrow B_2$，或

    $A=B_1\leftrightarrow B_2$，或

    $A=B_1\oplus B_2$，或

  则 $FC(A)=\max\{FC(B_1), FC(B_2)\}+1$。

- 命题合式公式语义
  - 论域：研究对象的集合。
  - 解释：用论域的对象对应变元。
  - 结构：论域和解释称为结构。
  - 语义：符号指称的对象。公式所指称对象。合式公式的语义是其对应的逻辑真值。
- （合式公式语义）设 S 是联结词的集合是$\{\neg,\wedge,\vee,\oplus,\rightarrow,\leftrightarrow\}$。由 S 生成的合式公式 Q 在真值赋值 v 下的真值指派 v(Q)定义如下：
  - ⑴$v(0)=0$, $v(1)=1$。
  - ⑵若 Q 是命题变元 p，则 $v(A)=p^v$。
  - ⑶若 Q1,Q2 是合式公式
    - 若 $Q=\neg Q_1$，则 $v(Q)=\neg v(Q_1)$
    - 若 $Q=Q_1\wedge Q_2$，则 $v(Q)=v(Q_1)\wedge v(Q_2)$

    - 若 $Q=Q_1\vee Q_2$，则 $v(Q)=v(Q_1)\vee v(Q_2)$
    - 若 $Q=Q_1\rightarrow Q_2$，则 $v(Q)=v(Q_1)\rightarrow v(Q_2)$
    - 若 $Q=Q_1\leftrightarrow Q_2$，则 $v(Q)=v(Q_1)\leftrightarrow v(Q_2)$
    - 若 $Q=Q_1\oplus Q_2$，则 $v(Q)=v(Q_1)\oplus v(Q_2)$
- （真值赋值）由 S 生成的公式 Q 在真值赋值 v 下的真值 v(Q)定义如下：
  - ⑴若 Q 是 S 中的 0 元联结词 c，则 v(Q)=c。
  - ⑵若 Q 是命题变元 p，则 v(Q)= pv。
  - ⑶若 Q 是 FQ1…,Qn，其中 $n\geq 1$， F 是 S 中的 n 元联结词， Qi 是公式，则 v(Q)=v(FQ1…Qn)=Fv(Q1)…v(Qn)。
- （可满足与有效）定义 1.7 设 Q 是公式。
  - ⑴如果真值赋值 v 使得 v(Q)=1，则称 v 满足 Q。
  - ⑵如果每个真值赋值都满足 Q，则称 Q 为有效式，或称为永真式，也称为重言式。
  - ⑶如果每个真值赋值都不满足 Q，则称 Q 为永假式，也称为矛盾式，不可满足式。
  - ⑷如果至少有一个真值赋值满足 Q，则称 Q 为可满足式。
- 定理 1.5（对偶定理）
  - 设 A,B 是由$\{0,1,\neg,\vee,\wedge\}$生成的公式，A*与 A 互为对偶式，B*与 B 互为对偶式。如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$。
- （完全集）定义：
  - 定义 1.12 设 F 是 n 元联结词，p1,p2,…,pn 是不同的命题变元。如果公式 A 中不出现除 p1,p2,…,pn 之外的命题变元，并且 A⇔Fp1,p2,…,pn，则称 A 定义 F。
  - 设 S 是联结词集合。如果每个 n(n>0)元的联结词都可由 S 定义，则称 S 为完全集。
  - 如果完全集 S1 中的每个联结词都可由联结词集合 S2 定义，则 S2 也是完全集。
  - 如果从完全集 S 中去掉任何一个联结词就成为不完全的了，就称 S 为极小完全集。
- (范式)定义：
  - 原子公式和原子公式的否定统称为文字。如果一个文字恰为另一个文字的否定，则称它们为相反文字。
  - 设 n 是正整数，A1,……,An 都是文字，称 $A1\vee\ldots\vee An$ 为简单析取式，称 $A1\wedge\ldots\wedge An$ 为简单合取式。
  - 定义 1.1 6 设 n 是正整数。若 B1,……,Bn 都是简单合取式，则称 $B1\vee\ldots\vee Bn$ 为析取范式。若 B1,……,Bn 都是简单析取式，则称 $B1\wedge\ldots\wedge Bn$ 为合取范式。
- （逻辑推论）定义：
  - 若真值赋值 v 满足公式集合Γ中的每个公式，则称 v 满足Γ。若有真值赋值满足Γ，则称Γ是可满足的，否则称Γ是不可满足的。
  - 设Γ是公式的集合，A 是公式。如果每个满足Γ的真值赋值都满足 A，则称 A 是Γ的逻辑推论， 记为$\Gamma\models A$。若$\Gamma\models A$ 不成立，记为$\Gamma\not\models A$。

谓词逻辑

- （论域）定义：论域是一个数学系统，记为 D。它由三部分组成：
  - (1)一个非空对象集合 D;
  - (2) 一个关于 D 的函数集合,也称运算;
  - (3)一个关于 D 的关系集合。
- （一阶谓词逻辑语言）简称一阶逻辑语言
  - 逻辑符号：包括变元、联接词、量词;
  - 非逻辑符号：包括常元、函词、谓词;
  - 仅有个体变元;
  - 按形成规则构成的合式公式集合
  - （字符集）定义：
    - 逻辑符号，包括变元、联接词、量词、逗号以及括号等，表示如下：
      - 变元：x1, x2, …
      - 联接词：$\wedge,\vee,\neg,\rightarrow,\leftrightarrow,\oplus$;
      - 量　　词：$\forall, \exists$;
      - 逗　　号：, ;
      - 括　　号：(,)
    - 非逻辑符号，包括常元、函词、谓词等，表示如下：
      - 常　　元：c1, c2 , …
      - 函　　词：f11, f21,......；f12, f22,......;
      - 谓　　词：P11,P 21,......；　P 12, P 22,....。

- （项）定义：
  - (1).个体常元是项;
  - (2).个体变元是项;
  - (3).若是 t1,…,tn 项，f in 是 n 元函词，则是 f i (t1,…,tn)项。
- （合式公式）定义：合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串。
  - (1).若是 $t_1,\ldots,t_n$ 项，Q_i^n 是 n 元谓词，则 $Q_i^n(t_1,\ldots,t_n)$是合式公式。
  - (2).若 Q 是合式公式，则$(\neg Q)$是合式公式;
  - (3).若 Q 和 R 是合式公式，则$(Q\wedge R)$、$(Q\vee R)$、$(Q\rightarrow R)$ 、$(Q\leftrightarrow R)$及$(Q\oplus R)$是合式公式;
  - (4).若 Q 是合式公式，x 是变元，则$(\forall xQ)$及$(\exists xQ)$是合式公式。
  - (5).只有有限次应用(1)—(4)构成的公式是合式公式。
- （约束变元）定义：
  - 若$(\forall xQ)$(或$\exists xQ$)是公式，则称变元 x 在公式$(\forall xQ)$ (或$\exists xQ$)中为约束出现，称 x 是约束变元，并称 x 出现的辖域为 Q。
- （自由变元）定义：
  - 如果变元 x 在公式 Q 中的出现不是约束出现，则称 x 在 Q 中为自由出现。在公式 Q 中有自由出现的变元称为 Q 的自由变元，将 Q 中自由变元的集合记为 Var(Q)。
- 定义：不出现变元的项称为基项。
- 定义：没有自由变元的公式称为语句。
- 解释（定义）：设 D 是论域，一个解释 I 由以下四部分组成：
  - (1) 对于每个常元 c，指派 D 中一个元素 c。

    - (2) 对于每个 n 元函词 f，指派一个 D 上的一个 n 元运算 f。
    - (3) 对于每个 n 元谓词 Q，指派一个 D 上的一个 n 元关系 Q。
- （结构）定义：
    - 给定一阶语言 L 以及论域 D 和解释 I，偶对<D, I>称为 L 的结构，记为 S=<D, I>。
- （赋值）定义：
    - 从变元到论域 D 的函数称为 I 中的赋值，记为$\sigma: V \to D$。
- （模型）定义：
    - 给定一阶语言 L 以及它的结构 S 和赋值σ，偶对<S,σ>称为 L 的模型，记为 M=<S,σ>。
- （项的语义）定义：设 L 是一阶语言，U 是论域，I 是解释，语言 L 的项 t 的语义是 D 中一个对象，记为$\sigma_I(t)$，简记为σ(t) 。
    - (1) 若 t 是常元 a，则σ(t) =aI。
    - (2) 若 t 是变元 x，则σ(t) = σ(x)。
    - (3) 若 t 是 f (t1, t2, …, tn)，则σ(t) = f I(σ(t1), σ(t2), …, σ(tn))。
- （谓词合式公式意义）定义 给定一阶语言 L，结构 S=<D, I>和赋值函数$\sigma: V \to D$，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是项。在模型 M=<S, σ>下，公式 P,Q,R 的语义是确定的逻辑真值。
    - (1) 若 P 是 Q(t1, t2, …, tn)，则σ(P) = QI(σ(t1), σ(t2), …, σ(tn))。
    - (2) 若 P 是¬Q，则σ(¬Q) = ¬σ(Q)。
    - (3) 若 P 是 Q∧R，则σ(Q∧R) =σ(Q) ∧σ(R)。
    - (4) 若 P 是 Q∨R，则σ(Q∨R) =σ(Q) ∨σ(R)。
    - (5) 若 P 是 Q→R，则σ(Q→R) =σ(Q) →σ(R)。
    - (6) 若 P 是 Q↔R，则σ(Q↔R) =σ(Q) ↔σ(R)。
    - (7) 若 P 是 Q⊕R，则σ(Q⊕R) =σ(Q) ⊕σ(R)。
    - (8) 若 P 是∀xQ(x)，则

$$\sigma(\forall x Q(x)) = \begin{cases} 1 & \text{若对于每个}\mathrm{d} \in \mathrm{D}_\mathrm{I}\text{，有}\sigma(x) = d\text{，使得}Q^I(x)[x/d] = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

    - (9) 若 P 是∃xQ(x)，则

$$\sigma(\exists x Q(x)) = \begin{cases} 1 & \text{若存在}\mathrm{d} \in \mathrm{D}_\mathrm{I}\text{，有}\sigma(x) = d\text{，使得}Q^I(x)[x/d] = 1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

- （可满足性）定义：
    - 定义：给定一阶语言 L 和它的公式 Q，如果存在模型 M=<S, σ>，使得σ(Q)=1 成立，则称公式 Q 关于模型<S, σ>是可满足的，简称 Q 可满足，也称模型<S, σ>满足 Q，记为$\models_M Q$。
    - 定义：给定一阶语言 L 和它的公式 Q，如果不存在模型 M=<S, σ>，使得σ(Q)=1 成立，则称公式 Q 关于模型<S, σ>是不可满足的，也称模型<S, σ>不满足 Q，记为|≠M Q。
    - 定义：给定一阶语言 L 和它的公式集合Γ= {Q1,...,Qn}，如果存在模型 M=<S, σ>，使得对于每个公式 Qk，Qk∈Γ，有σ(Qk)=1 成立，则称公式集合Γ关于模型<S, σ>是可满足的，简称Γ可满足，也称模型<S, σ>满足Γ，记为$\models_M \Gamma$，也记为σ(Γ)=1。
- （有效性）定义

- 定义：若合式公式 Q 对于一阶语言 L 的任意模型 M=<S, σ>均可满足，即对任意结构 S 和任意赋值σ成立，则称公式集合 Q 是永真的或有效的，记为$\models$Q。
- 定义：若合式公式集合Γ对于一阶语言 L 的任意模型 M=<S, σ>均可满足，即对任意结构 S 和任意赋值σ成立，称公式集合Γ是永真的或有效的，记为$\models$Γ。
- 定义：若公式 Q 对于一阶语言 L 的任意模型 M=<S, σ>均不可满足，即对任意结构 S 和任意赋值σ都不成立，称公式集合 Q 是永假的，记为$\not\models$Q。

▪ （相等关系与推论关系）定义：

- 定义：给定一阶语言 L 及它的两个公式 Q,R，如果存在模型 M=<S, σ>，使得σ(Q) = σ(R), 则称 Q 与 R 是在模型 M 等值，记为 Q$\Leftrightarrow$MR。
- 定义：如果对于任意模型模型 M=<S, σ>，都有 σ(Q) = σ(R), 则称 Q 与 R 是逻辑等价，记为 Q$\Leftrightarrow$R。
- 定义：给定一个语言 L , Γ是一个公式集合, Q 是一个公式。若存在模型 M=<S, σ>，使得当σ(Γ)=1 时有σ(Q)=1，则称 Q 是Γ关于模型的逻辑推论，记为Γ$\models$MQ。
- 定义：给定一个语言 L , Γ是一个公式集合, Q 是一个公式。若对于任意模型 M=<S, σ>，使得当σ(Γ)=1 时有σ(Q)=1，则称 Q 是Γ逻辑推论，或称Γ语义推出 Q，记为Γ$\models$Q。

▪ （代入与可带入）定义：

- 定义：设 L 是一阶语言，t 和 t '是 L 的项，x 是 t 中自由变元，若 t 中 x 的任何自由出现都替换为 t ' ，则称项 t 中的自由变元 x 被项 t '代入(substitution)。
- 定义：设 L 是一阶语言，t 是 L 的项， Q 是合式公式，x 是 Q 中自由变元，若 Q 中 x 的任何自由出现都替换为 t，则称公式 Q 中的自由变元 x 被项 t 代入 (substitution)。

- 定义：设 t 是项，y 是 t 中任一自由变元，Q 是合式公式，x 是 Q 中自由变元，如果 Q 中 x 的任何自由出现都不在∀y(∃y)的辖域内，则称项 t 是对 Q 中自由变元 x 可代入的(substitutable)。
- 定理：设 L 是一阶语言，M=<S, σ>是模型，若 t 和 t '是 L 的项，则σ(t[x/t'])= σ(t[x/σ(t')])。
- 定理：设 L 是一阶语言，模型 M=<S, σ>，设 t 是 L 的项，Q 是 L 的公式，若对于公式 Q 中的 x 是 t 可代入的，则σ(Q[x/t])= σ(Q[x/σ(t)])。

▪ （对偶性）定义：

- 定义：设合式公式 Q 是由原子公式、联结词（¬ ,∧,∨）、量词（∀, ∃）生成的公式，并且在 Q 中联结词∧和∨互换，量词∀和∃互换，原子公式和它的否定式互换，而得到公式 Q'，则公式 Q 和 Q'互为对偶式。
- 定理：设合式公式 Q 和 Q'互为对偶式，则σ(Q) ↔ σ(¬Q')。

公理系统

▪ （形式系统）一个形式系统应当包括以下几部分。

- (1)各种初始符号。初始符号是一个形式系统的“字母”，经解释后其中一部分是初始概念。
- (2)形成规则。规定初始符号组成各种合适符号序列的规则。经解释后合式符号序列是一子句，称为系统里的合式公式或命题。
- (3)公理。把某些所要肯定的公式选出，作为推导其它所要肯定的公式的出

  发点，这些作为出发点的公式称为公理。
  - (4)变形规则。变形规则规定如何从公理和已经推导出的一个或几个公式经过符号变换而推导出另一公式。经过解释，变形规则就是推理规则。

- （公理系统）定义：
  - 从一些公理出发，根据演绎法，推导出一系列定理，形成的演绎体系叫作公理系统。
  - 公理系统的组成：
    - 符号集；
    - 公式集：公式是用于表达命题的符号串；
    - 公理集：公理是用于表达推理由之出发的初始肯定命题；
    - 推理规则集：推理规则是由公理及已证定理得出新定理的规则；
    - 定理集：表达了肯定的所有命题。
- 定义：命题逻辑的公理系统定义：
  - (1).符号集合：
    - 1).命题变元 $Q_1,Q_2,\ldots Q_n$
    - 2).联结词符号：$\neg$，$\rightarrow$;
    - 3).括号：(,)
  - (2).形成规则(公式定义)：
    - 1).若 Q 是命题变元，则 Q 是公式；
    - 2).若 Q 是公式，则$(\neg Q)$是公式；
    - 3).若 Q,R 是公式，则$(Q\rightarrow R)$是公式。
  - (3).公理：公理模式中 P,Q,R 为任意公式
    - 1).公理模式 A_1： $R\rightarrow (Q\rightarrow R)$
    - 2).公理模式 A_2： $(P\rightarrow (Q\rightarrow R)) \rightarrow ((P\rightarrow Q) \rightarrow (P\rightarrow R))$
    - 3).公理模式 A_3： $(\neg Q\rightarrow \neg R) \rightarrow (R\rightarrow Q)$
  - (4).变形规则：推理规则(分离规则 MP 规则)
    - 若 Q 和 $Q\rightarrow R$ 成立，则 R 成立。其中， Q 和 $Q\rightarrow R$ 称为前提，R 称为结论。
- 谓词逻辑的公理系统定义：
  - (1).符号集合：
    - 1).个体变元：$x_1, x_2, \ldots$
    - 2).个体常元：$c_1, c_2, \ldots$
    - 3).函词符号：$f_1^1, f_2^1,\ldots\ldots$； $f_1^2, f_2^2,\ldots\ldots$;
    - 4).谓词符号：$Q_1^1,Q_2^1,\ldots\ldots$； $Q_1^2, Q_2^2,\ldots.$;
    - 5).运算符号：$\forall, \neg, \rightarrow$;
    - 6).逗　　号：, ;
    - 7).括　　号：(,)
  - (2).项定义：
    - 1).个体常元是项；
    - 2).个体变元是项；
    - 3).若是 $t_1,\ldots,t_n$ 项，则是 $f_k^n (t_1,\ldots,t_n)$项。
  - (3).公式集合：
    - 1).若是 $t_1,\ldots,t_n$ 项，则 $Q_k^n (t_1,\ldots,t_n)$是公式。
    - 2).若 Q 是公式，则$(\neg Q)$是公式；

    - 3).若 Q 和 R 是公式，则 $(Q\to R)$ 是公式；
    - 4).若 Q 是公式，则 $(\forall xQ)$ 是公式。
  - (4).公理集合：
    - 1).公理模式 A_1： $Q\to (R\to Q)$
    - 2).公理模式 A_2： $(P\to (Q\to R)) \to ((P\to Q) \to (P\to R))$
    - 3).公理模式 A_3： $(\neg Q\to \neg R) \to (R\to Q)$
    - 4). 公理模式 A_4： $\forall xQ(x) \to Q(x)[x/t]$ 其中，项 t 对于 Q 中的 x 是可代入的。
    - 5). 公理模式 A_5： $\forall x(Q \to R(x)) \to (Q \to \forall xR(x))$ 其中 x 不是 Q 中自由变元。
  - (5).推理规则
    - 1).分离规则（简称 MP 规则）：从 Q 和 $Q\to R$ 推出 R。
    - 2).概括规则（简称 UG 规则）：从 Q(x)推出 $(\forall xQ)$。
- 常用定理
  - $\vdash (P\to(Q\to R)) \to(Q\to(P\to R))$
  - $\vdash(Q \to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$
  - $\vdash(P\to Q)\to((Q\to R)\to(P\to R))$
  - $\vdash((P\to Q)\to(P\to R))$
  - $\to(P\to(Q \to R)$
  - $\vdash Q\to Q$
  - $\vdash\neg\neg Q\to Q$
  - $\vdash Q\to\neg\neg Q$
  - $\vdash Q\vee Q \to Q$
  - $\vdash\neg(Q\wedge\neg Q)$
  - $\vdash(Q\vee\neg Q)$
  - $\vdash (\neg\neg Q\to\neg\neg R)\to(Q\to R)$
  - $\vdash (Q\to R)\to(\neg\neg Q\to\neg\neg R)$
  - $\vdash(Q\to R)\to(\neg R\to\neg Q)$
  - $\vdash(\neg Q\to R)\to(\neg R\to Q)$
  - $\vdash(Q \to\neg R)\to(R\to\neg Q)$
  - $\vdash \neg Q\to(Q\to R)$
  - $\vdash(\neg Q\to Q)\to(R\to Q)$
  - $\vdash(\neg Q\to Q)\to Q$
  - $\vdash(Q\to R) \vee (R\to Q)$
  - $\vdash(Q\to R)\vee(Q \to\neg R)$
  - $\vdash Q\to((Q\to R)\to R)$
  - $\vdash Q\wedge(Q\to R)\to R$
  - $\vdash(P\to Q) \to((Q \to R) \to(P \to R))$
  - $\vdash(\neg Q\to R) \to((\neg Q\to\neg R) \to Q)$
  - $\vdash(Q\to R) \to((Q\to\neg R) \to\neg Q)$
  - $\vdash(\neg Q\to R \wedge\neg R) \to Q$
  - $\vdash(P\wedge Q \to R) \to(P \to(Q \to R))$
  - $\vdash Q\to(R\to(Q\wedge R))$
  - $\vdash (P\to Q) \wedge(P\to R) \to(P\to Q \wedge R)$

- $\vdash (P\to R)\to((Q\to R)\to((P\lor Q)\to R))$
- $\vdash \forall xR(x)\leftrightarrow \forall y\, R(y)$
- $\vdash \exists xR(x)\leftrightarrow \exists y\, R(y)$
- $\vdash Q(c)\to\exists xQ(x)$
- $\vdash \neg Q(c)\to\neg\forall xQ(x)$
- $\vdash \forall xR(x)\to \exists xR(x)$
- $\vdash \forall x\forall y\, R(x,y)\leftrightarrow \forall y\forall xR(x,y)$
- $\vdash \exists x\exists y\, R(x,y)\leftrightarrow \exists y\exists xR(x,y)$
- $\vdash \exists x\forall yR(x,y)\to \forall y\exists x\, R(x,y)$
- $\vdash \forall x\forall yR(x,y)\to \forall xR(x,x)$
- $\vdash \exists xR(x,x)\to \exists x\exists yR(x,y)$
- $\vdash \forall x(P(x)\to Q(x))\to(\forall xP(x)\to\forall x\, Q(x))$
- $\vdash \forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to \exists x\, Q(x))$
- $\vdash \forall x(P(x)\land Q(x))\leftrightarrow(\forall xP(x)\land\forall xQ(x))$
- $\vdash \forall xP(x)\lor \forall xQ(x))\to\forall x(P(x)\lor Q(x))$
- $\vdash \exists x(P(x)\land Q(x))\to(\exists xP(x)\land\exists xQ(x))$
- $\vdash \exists x(P(x)\lor Q(x))\leftrightarrow(\exists xP(x)\lor\exists xQ(x))$
- $\vdash \forall xP(x)\leftrightarrow\neg\exists x\neg P(x)$
- $\vdash \exists xP(x)\leftrightarrow\neg\forall x\neg P(x)$
- $\vdash \exists x\neg P(x)\leftrightarrow \neg\forall xP(x)$
- $\vdash \neg\exists x\neg P(x)\leftrightarrow\forall xP(x)$

- 可靠性定理：若$\Gamma\vdash Q$ ，则$\Gamma\models Q$。
- 完备性定理：若$\Gamma\models Q$ ，则$\Gamma\vdash Q$。
- （理论与模型)定义：
  - 理论
    - 设 **L** 是一个形式语言，**L** 的理论 **Th** 就是作为公理的语句集合
    - 公理包括：逻辑公理和专用公理
    - 专用公理定义特定函词和谓词性质
  - 模型
    - 设 **Th** 是形式语言 **L** 的理论，若 **Th** 的所有语句都在 **L** 结构 **M** 中为真，则说 **M** 是 **Th** 的模型。
    - 在给定论域上，关于 **Th** 的一个解释和赋值，构成 **Th** 的一个模型 **M**。