离散数学试卷

西安电子科技大学

考试科目：________离 散 数 学________

考试日期：2010 年 12 月 2 日　　考试时间 120 分

考试方式：(开卷、闭卷)　　任课教师 ____________

学生姓名：________________ 学　　号：____________

一、　填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．设 $S=\{\Phi,\{a\}\}$，则 $S\times\rho(S)=$ ______________________，其中 $\rho(S)$ 表示集合 A 的幂集. $\{a\}$ ____ S,($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\not\subset$);

$\{(\{a\},\{a\})\}$ ____ $S\times\rho(S)$ ($\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\not\subset$)

2．A={1，2，3，4，5，6}，A 上二元关系

$T=\{(x,y)\mid x\div y$ 是素数$\}$，则用列举法

T= ____;

T 的关系图为

____

;

T 具有 ________________________ 性质。

3．设（{a,b,c}, * ）为代数系统，“*”的运算如下：

离散数学试卷

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则它的单位元素为 ______________ ；零元素为 __________ ；

a、b、c 的逆元分别为 ______________________________.

4．P，Q 真值为 0 ；R，S 真值为 1.

$(P \wedge (R \vee S)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$ 的真值

为 _______________.

5．命题“如果你不看电影，那么我也不看电影”（P：你看电影，Q：我看电影）的符号化________________________

二．单项选择题（每题 3 分，共 15 分）

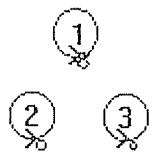
1．N 是自然数集，定义 $f: N \rightarrow N$，$f(x) = (x) \bmod 3$（即 x 除以 3 的余数），f 是（　　）.

A、满射不是单射；B、单射不是满射；C、双射；D、不是单射也不是满射。

2．设 $A = \Phi$，$B = \{\Phi, \{\Phi\}\}$，则 B－A 是（　　）.

A、$\{\{\Phi\}\}$；　　B、$\{\Phi\}$；　　C、$\{\Phi, \{\Phi\}\}$；　　D、Φ

3．设 S={1，2，3}，R 为 S 上的关系，其关系图为：

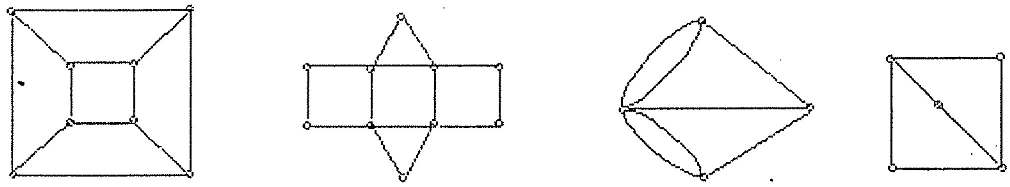


则 R 具有（　　）的性质。

A 自反、对称、传递；　　　　B、什么性质也没有；

C、反自反、反对称、传递；　D、自反、对称、反对称、传递。

4．在如下各图中（　）是欧拉图。



[A]　　[B]　　[C]　　[D]

5．下面哪个命题公式是重言式（　　）。

A、$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$；　　　　B、$(P \wedge Q) \to P$；

C、$(\neg P \vee Q) \wedge \neg (P \wedge \neg Q)$；　　D、$\neg (P \vee Q) \wedge P$。

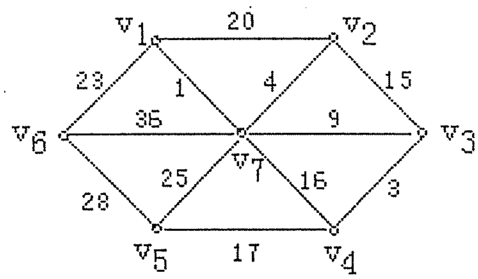
三．（10 分）　集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的关系

$R = \{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <3,3>, <3,1>, <3,4>, <4,3>, <4,4>\}$

写出关系矩阵 M_R，画出关系图并讨论 R 的性质。

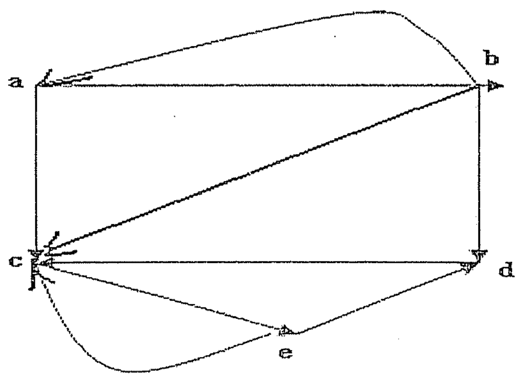
四．（10 分）　如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信成路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小并计算其最小值.

离散数学试卷



五.（10 分）用范式方法判断公式 $(P \to Q) \wedge (P \to R)$ 与 $P \to Q \wedge R$ 是否等价.

六.（15 分） 有向图如下，



试求:

1. 每个节点的引入次数和引出次数;
2. 邻接矩阵和可达矩阵;
3. 判断其连通性;
4. 求从 a 到 c 的长度小于或等于 3 的连通路数.

七.（15 分）集合 $C^* = \{a + bi \mid i^2 = -1, a, b\text{是任意实数}, a \neq 0\}$，C* 上定义关系 $R = \{< a + bi, c + di > \mid ac > 0\}$，证明 R 是 C*上的一个等价关系，并给出 R 等价类的几何说明。

八.（10 分） 证明：我夫人过生日，我送一束鲜花给她，除非我

工作很忙，今天我没有送鲜花给夫人，今天是夫人的生日，由此是否可推得："今天我很忙".

离散数学试卷

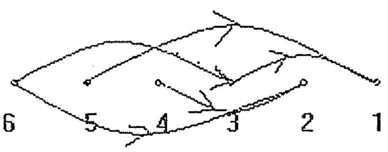
一 （15 分）填空

1. (1) $S\times\rho(S)=\{(\Phi,\Phi),(\Phi,\{\Phi\}),(\Phi,\{\{a\}\}),(\Phi,\{\Phi,\{a\}\})$
$(\{a\},\Phi),(\{a\},\{\Phi\}),(\{a\},\{\{a\}\}),(\{a\},\{\Phi,\{a\}\})\}$

(2) $\{a\}\notin\rho(S),\{(\{a\},\{a\})\}\not\subset S\times\rho(S)$

2. (1) $\{<2,1>,<3,1>,<5,1>,<4,2>,<6,2>,<6,3>\}$；

(2)



(3)反对称性、反自反性

3. a，c，a、b、没有

4. 1.

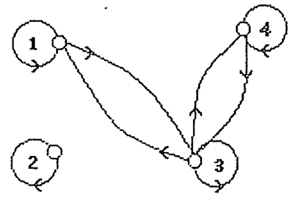
5. $\neg P\to\neg Q$.

二.（15 分）单项选择题

1(D) 2(C) 3(D) 4(b) 5(b)

三.（10 分）

(1) $M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$



(2) R 的关系图为

(3) R 是自反、对称的。

四. （10 分）答案解：可以用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1,v_7)=1$　　选$e_1=v_1v_7$

$w(v_7,v_2)=4$　　选$e_2=v_7v_2$

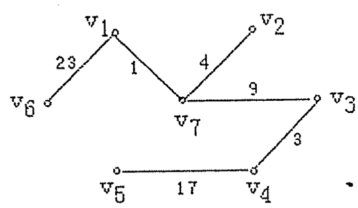
$w(v_7,v_3)=9$　　选$e_3=v_7v_3$

$w(v_3,v_4)=3$　　选$e=v_3v_4$

$w(v_4,v_5)=17$　　选$e=v_4v_5$

$w(v_1,v_6)=23$　　选$e=v_1v_6$

结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造

五.（10 分）

$(P\to Q)\wedge(P\to R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

$\Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\vee(R\wedge\neg R))\wedge((\neg P\vee R)\vee(Q\wedge\neg Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$=M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}$

$P\to Q\wedge R\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\wedge(\neg P\vee R)$

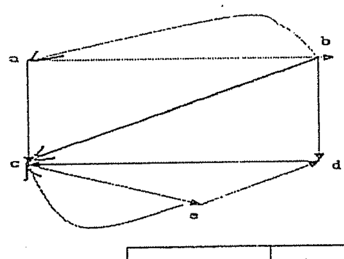
$\Leftrightarrow((\neg P\vee Q)\vee(R\wedge\neg R))\wedge((\neg P\vee R)\vee(Q\wedge\neg Q))$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$

$=M_{100}\wedge M_{101}\wedge M_{110}$

六..（15 分）



(1)

	a	b	c	d	e
引出次	2	3	1	1	2

离散数学试卷

数					
引入次数	1	1	4	2	1

（　　　　　　　　　　　　2　　　　　　　　　　　　）

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\end{pmatrix}A^2(G)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&2&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1\end{pmatrix}A^3(G)=\begin{pmatrix}0&1&3&1&1\\1&0&2&2&2\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^4(G)=\begin{pmatrix}1&0&3&2&3\\0&1&5&2&2\\0&0&1&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&2&1&1\end{pmatrix}A^5(G)=\begin{pmatrix}0&1&6&2&3\\1&0&5&3&5\\0&0&2&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&2&1&2\end{pmatrix}$$

（3）$P^{'}=A+A^2+A^3+A^4+A^5=\begin{pmatrix}2&3&14&7&8\\3&2&15&8&10\\0&0&5&3&4\\0&0&4&2&3\\0&0&7&4&5\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}\qquad P(+)P^T=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

所以此图是单连通图

（4）

离散数学试卷

$$A+A^2+A^3=\begin{bmatrix}1&2&5&2&2\\2&1&5&3&3\\0&0&2&1&2\\0&0&2&1&1\\0&0&3&2&2\end{bmatrix}$$

从 a 到 c 的长度小于或等于 3 的连通路数为 5.

七. （15 分）证明：

(1) 自反性： $\forall a+bi\in C^*(a\neq 0)$, $aa>0$ $\therefore <a+bi,a+bi>\in R$

(2) 对称性： $\forall a+bi\in C^*, c+di\in C^*$且$<a+bi,c+di>\in R$, $ac>0$

$\Rightarrow ca>0, \therefore <c+di,a+bi>\in R$。

(3) 传递性：若$\forall a+bi\in C^*$， $c+di\in C^*$， $e+fi\in C^*$

(4) 当$<a+bi,c+di>\in R$且$<c+di,e+fi>\in R$ 则
$ac>0, ce>0$, $\therefore acce>0$ 即$ae>0$ $\therefore <a+bi, e+fi>\in R$

所以 R 是 C*上等价关系。

(5) R 两等价类： $\pi_1=\{z\mid z=a+bi, a>0\}$ 右半平面；

$\pi_2=\{z\mid z=a+bi, a<0\}$ 左半平面。

八. （10 分）证明： 设 P:我夫人过生日 Q: 我送一束鲜花给她 R:
我工作很忙

则 $\neg(P\to Q)\to R$,
$\neg Q\wedge P$

而 $\neg(P\to Q)\to R=\neg(\neg P\vee Q)\to R$
$\neg Q\wedge P=P\wedge\neg Q$

则由假言推理：

$P\wedge\neg Q, \neg(\neg P\vee Q)\to R\mapsto R$

故 R 成立。

西安电子科技大学

考试科目： 离散数学

考试日期： 年 月 日 考试时间 120 分

考试方式：(开卷、闭卷) 任课教师：

学生姓名： 学 号：

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分

1．设 A= {{Φ，{Φ}}}，则 A×$\rho(\rho(\Phi))$=________________，

其中 $\rho(A)$ 表示集合 A 的幂集.

2．设 $X=\{a,b,c\}$，X 上的关系 R 的关系矩阵是 $M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，则

$M_{R\circ R}=$

________________.

3．设< {a,b,c}, * >为代数系统，* 运算如下：

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	c	c

则它的幺元为 ________；零元为 ________；

a、b、c 的逆元分别为 ________________.

4．P，Q 真值为 0 ；R，S 真值为 1。

$(P \wedge (R \vee S)) \rightarrow ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$ 的真为 ________.

5．算式 $((a+(b*c)*d) \div (e*f)$ 的二叉树表示为

____

二．单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

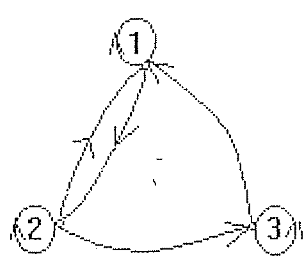
1．N 是自然数集，定义 $f:N \rightarrow N$， $f(x)=(x)$ mod3（即 x 除以 3 的余数），f 是（　　）.

A、满射不是单射；B、单射不是满射；C、双射；D、不是单射也不是满射。

2．设 $A=\Phi$， $B=\{\Phi,\{\Phi\}\}$，则 B—A 是（　　）.

A．$\{\{\Phi\}\}$ ；　　B、$\{\Phi\}$ ；　　C、$\{\Phi,\{\Phi\}\}$ ；　　D、Φ

3．设 $S=\{1,2,3\}$，S 上关系 R 的关系图为



则 R 具有（　　）性质.

A．自反性、对称性、传递性；　　B．反自反性、反对称性；

C．反自反性、反对称性、传递性；　　D．自反性

4．一棵无向树 T 有 7 片树叶，3 个 3 度顶点，其余顶点均为 4 度。则 T 有

（　　）4 度结点.

A、1；　　B、2；　　C、3；　　D、4

5．命题公式 $P \to (Q \vee P)$ 是（　　）。

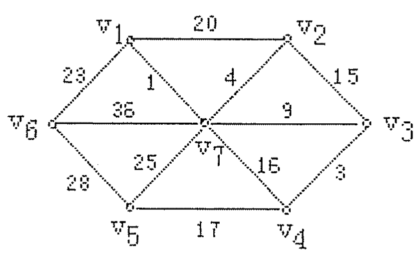
A、矛盾式；　B、可满足式；　C、重言式；　D、等价式

三．（10 分）．设集合 A={ a ,b , c , d }上关系 R={< a, b > , < b ,a > , < b , c > , < c , d >} 求

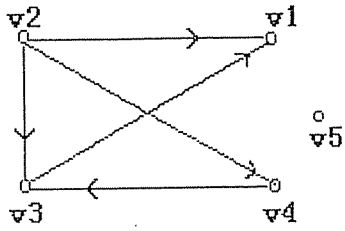
1.写出 R 的关系矩阵和关系图.

2.用矩阵运算求出 R 的对称闭包，自反闭包，传递闭包.

四．（10 分） 如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信成路造价（单位：万元），试给出一个设计方案，使得各城市之间既能够通信又使总造价最小.



五．（10 分）用范式方法判断公式 $(P \to Q) \wedge (P \to R)$，$P \to Q \wedge R$ 等价.（10 分）

六.（15 分） 有向图  ,试求:

1.每个节点的引入次数和引出次数；

2.邻接矩阵和可达矩阵；

3.判断其连通性；

4.求从 V2 到 V4 的长度小于等于 3 的连通路数.

七.（15 分）设 S＝R-{-1}（R 为实数集），$a*b=a+b+ab$。

1.说明 $<S,*>$ 是否构成群；

2.在 S 中解方程 $2*x*3=7$.

八.（10 分）证明：我夫人过生日，我送一束鲜花给她，除非我工作很忙，今天我没有送鲜花给夫人，今天是夫人的生日，由此是否可推得："今天我很忙"

离散数学试卷

一．填空题

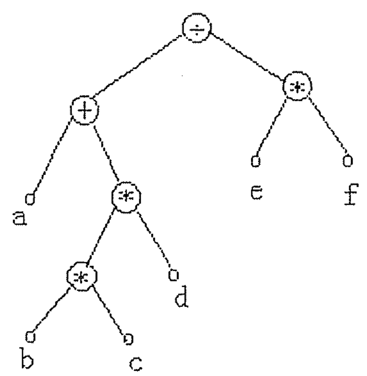
答案 1 { ⟨{ Φ，{ Φ }}，Φ⟩，⟨{ Φ，{ Φ }}，{ Φ }⟩ } 。

答案；2、$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

答案 3:、a，c，a、b、没有

答案 4：1；

答案 5：

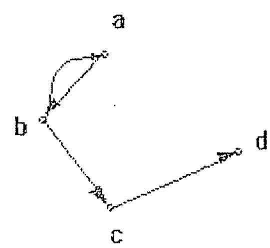


二，

1(D)2(C) 3(D)4(A)5(c)

三答案(15)

1、$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；　　关系图



2、对称，对称，传递闭包矩阵：

$$R_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

离散数学试卷

$$M_{R^2}=M_R\circ M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^3}=M_{R^2}\circ M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=M_{R^2}\quad M_{R^5}=M_{R^3}\ ,M_{R^6}=M_{R^4}\ ,\cdots$$

$$M_{t(R)}=M_R+M_{R^2}+M_{R^3}+M_{R^4}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

四 （10）答案解：用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法为：

$w(v_1,v_7)=1$　　选$e_1=v_1v_7$

$w(v_7,v_2)=4$　　选$e_2=v_7v_2$

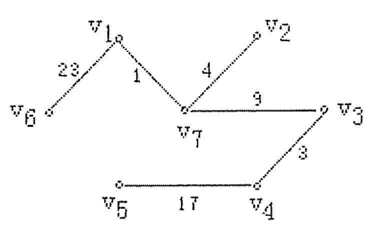
$w(v_7,v_3)=9$　　选$e_3=v_7v_3$

$w(v_3,v_4)=3$　　选$e=v_3v_4$

$w(v_4,v_5)=17$　　选$e=v_4v_5$

$w(v_1,v_6)=23$　　选$e=v_1v_6$

结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57（万元）即为总造

五（10）

$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$

案: $P \to Q \wedge R \Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

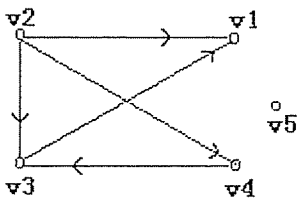
$\Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \vee (R \wedge \neg R)) \wedge ((\neg P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$

$= M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110}$

六（15）



(1)

	V1	V2	V3	V4	V5
引 出 次数	0	3	1	1	0
引 入 次数	2	0	2	1	0

(2)

$$A(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^2(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$A^3(G)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad A^4(G)=O_{5\times5}。$$

可达矩阵 $P = A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4 = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$A(+)A^T=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以此图是非连通图。

则 V2 到 V4 长度为 1 的通路个数为 1，长度为 2 的为 1，长度为 3 的为 1。

七

解：（1）1）$\forall a,b\in S$ 易证 $a*b=a+b+ab\in S$，即运算*是封闭的。

2）$\forall a,b,c\in S$

$$\begin{aligned}\because (a*b)*c&=(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+(a+b+ab)c\\&=a+b+c+ab+ac+bc+abc,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=a*(b+c+bc)=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)\\&=a+b+c+bc+ab+ac+abc,\end{aligned}$$

$\therefore$ $(a*b)*c=a*(b*c)$，即*可结合。

3）设 S 关于*有幺元 e，则 $\forall a\in S$，$e*a=a*e=a$。

而 $a*e=e*a=a+e+ea=a$，$\therefore$ $e=0$。

4）$\forall a\in S$ 设有逆元 a^{-1} 。则 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$，

即 $a+a^{-1}+aa^{-1}=0$，$\therefore$ $a^{-1}=\dfrac{-a}{1+a}$，即 S 中任意元都有逆元，综上得出，$<S,*>$构成群。

（2）由 $2*x*3=2+x+3+2x+3x+6+6x=12x+11=7$，

$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{3}$。

（1）说明$<S,*>$是否构成群；　（2）在 S 中解方程 $2*x*3=7$ 。

解：（1）1）$\forall a,b\in S$ 易证 $a*b=a+b+ab\in S$，即运算*是封闭的。

2）$\forall a,b,c\in S$

$$\because (a*b)*c=(a+b+ab)*c=a+b+ab+c+(a+b+ab)c$$
$$=a+b+c+ab+ac+bc+abc,$$

而

$$a*(b*c)=a*(b+c+bc)=a+(b+c+bc)+a(b+c+bc)$$
$$=a+b+c+bc+ab+ac+abc,$$

$\therefore$ $(a*b)*c=a*(b*c)$，即*可结合。

3）设 S 关于*有幺元 e，则 $\forall a\in S$，$e*a=a*e=a$。

而 $a*e=e*a=a+e+ea=a$，$\therefore$ $e=0$。

4）$\forall a\in S$ 设有逆元 a^{-1}。则 $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$，

即 $a+a^{-1}+aa^{-1}=0$，$\therefore$ $a^{-1}=\dfrac{-a}{1+a}$，即 S 中任意元都有逆元，综上得出，$<S,*>$构成群。

（2）由 $2*x*3=2+x+3+2x+3x+6+6x=12x+11=7$，

$\therefore$ $x=-\dfrac{1}{3}$

八

证明：设 P:我夫人过生日 Q: 我送一束鲜花给她 R:我工作很忙

则 $\neg(P\to Q)\to R,$
$\neg Q\wedge P$

而 $\neg(P\to Q)\to R=\neg(\neg P\vee Q)\to R$
$\neg Q\wedge P=P\wedge\neg Q$

则由假言推理：

$P\wedge\neg Q,\neg(\neg P\vee Q)\to R\mapsto R$

故 R 成立。

离散数学试卷

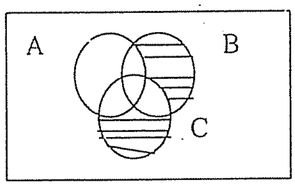
离散数学试题与答案试卷一

一、填空　20%（每小题2分）

1．设 $A=\{x\mid(x\in N)且(x<5)\},B=\{x\mid x\in E^{+}且x<7\}$（N：自然数集，$E^{+}$ 正偶数）则 $A\cup B=$ ______________________。

2．A，B，C 表示三个集合，文图中阴影部分的集合表达式为

__________________________。



3．设 P，Q 的真值为 0，R，S 的真值为 1，则

$\neg(P\vee(Q\to(R\wedge\neg P)))\to(R\vee\neg S)$ 的真值= ________________。

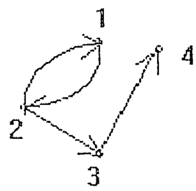
4．公式 $(P\wedge R)\vee(S\wedge R)\vee\neg P$ 的主合取范式为

__________________________________。

5．若解释 I 的论域 D 仅包含一个元素，则 $\exists xP(x)\to\forall xP(x)$ 在 I 下真值为

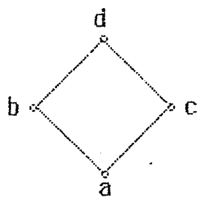
_______________________________。

6．设 A={1，2，3，4}，A 上关系图为

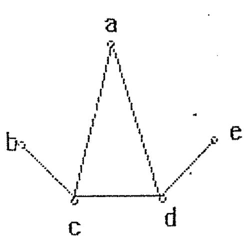


则 $R^2=$ ____。

7．设 A={a，b，c，d}，其上偏序关系 R 的哈斯图为



则 R= ____。

8．图 

的补图为 ________________________________。

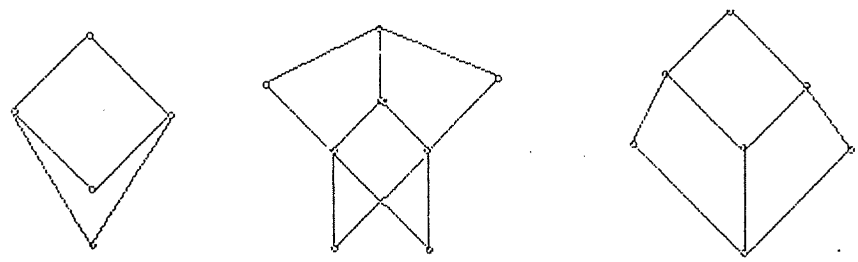
9．设 A={a，b，c，d}，A 上二元运算如下：

离散数学试卷

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

那么代数系统<A，*>的幺元是 ________，有逆元的元素为________________，它们的逆元分别为 ________________________________ 。

10．下图所示的偏序集中，是格的为 ____________________________ 。



[a]　　[b]　　[c]

二、选择 20%　（每小题 2 分）

1、下列是真命题的有（　　）

A．$\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$；　　B．$\{\{\Phi\}\}\in\{\Phi,\{\Phi\}\}$；

C．$\Phi\in\{\{\Phi\},\Phi\}$；　　D．$\{\Phi\}\in\{\{\Phi\}\}$。

2、下列集合中相等的有（　　）

A．{4，3}$\cup\Phi$；B．{Φ，3，4}；C．{4，Φ，3，3}；D．{3，4}。

3、设 A={1，2，3}，则 A 上的二元关系有（　　）个。

A．2^3；　B．3^2；　C．$2^{3\times3}$；　D．$3^{2\times2}$。

4、设 R，S 是集合 A 上的关系，则下列说法正确的是（　　）

A．若 R，S 是自反的，则 $R\circ S$ 是自反的；

B．若 R，S 是反自反的，则 $R\circ S$ 是反自反的；

C．若 R，S 是对称的，则 $R\circ S$ 是对称的；

D．若 R，S 是传递的，则 $R\circ S$ 是传递的。

离散数学试卷

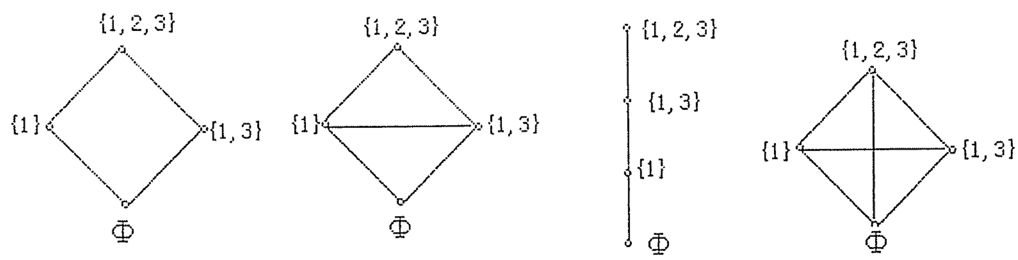
5、设 A={1，2，3，4}，P（A）（A 的幂集）上规定二元系如下

$R=\{<s,t>|\, s,t\in p(A)\wedge(|s|=|t|)\}$ 则 P（A）/ R=（　　　）

A. A ；B. P(A) ；C. {{{1}}，{{1，2}}，{{1，2，3}}，{{1，2，3，4}}}；

D. {{Φ}，{2}，{2，3}，{{2，3，4}}，{A}}

6、设 A={Φ，{1}，{1，3}，{1，2，3}}则 A 上包含关系"⊆"的哈斯图为（　　　）



[A]　　[B]　　[C]　　[D]

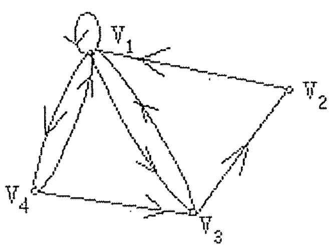
7、下列函数是双射的为（　　　）

A. $f: I\rightarrow E$, $f(x)=2x$ ；　B. $f: N\rightarrow N\times N$, $f(n)=<n, n+1>$ ；

C. $f: R\rightarrow I$, $f(x)=[x]$ ；　D. $f: I\rightarrow N, f(x) = |x|$ 。

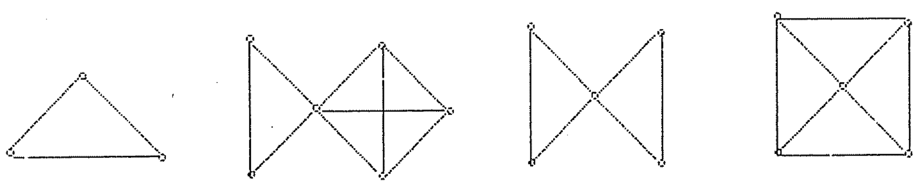
（注：I—整数集，E—偶数集，　N—自然数集，R—实数集）

8、图 中 从 v_1 到 v_3 长度为 3 的通路有（　　）条。



A. 0;　B. 1;　C. 2;　D. 3。

9、下图中既不是 Eular 图，也不是 Hamilton 图的图是（　　）



[A]　　[B]　　[C]　　[D]

10、在一棵树中有 7 片树叶，3 个 3 度结点，其余都是 4 度结点则该树有（　　）个 4 度结点。

A. 1；B. 2；　C. 3；　D. 4 。

三、证明 26%

1、R 是集合 X 上的一个自反关系，求证：R 是对称和传递的，当且仅当 < a, b> 和<a , c>在 R 中有<b , c>在 R 中。（8 分）

2、f 和 g 都是群<G_1 ,★>到< G_2, *>的同态映射，证明<C，★>是<G_1, ★>的一个子群。其中 C=$\{x \mid x \in G_1 \text{且} f(x) = g(x)\}$　(8 分)

3、G=<V, E>　(|V| = v，|E|=e) 是每一个面至少由 k（k≥3）条边围成的连通平面图，则 $e \le \dfrac{k(v-2)}{k-2}$，由此证明彼得森图（Peterson）图是非平面图。（11 分）

四、逻辑推演 16%

用 CP 规则证明下题（每小题 8 分）

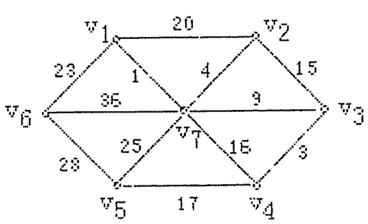
1、$A \vee B \to C \wedge D, D \vee E \to F \Rightarrow A \to F$

2、$\forall x(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow \forall xP(x) \to \forall xQ(x)$

五、计算 18%

1、设集合 A={a，b，c，d}上的关系 R={<a , b > ,< b , a > ,< b, c > , < c , d >}用矩阵运算求出 R 的传递闭包 t (R)。　　（9 分）

2、如下图所示的赋权图表示某七个城市 $v_1, v_2, \cdots, v_7$ 及预先算出它们之间的一些直接通信线路造价，试给出一个设计方案，使得各城市之间能够通信而且总造价最小。　（9 分）



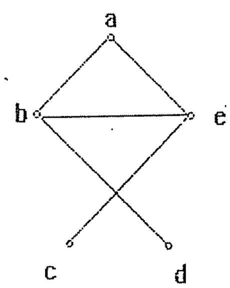
离散数学试卷

试卷一答案：

一、填空 20%（每小题 2 分）

1、{0，1，2，3，4，6}； 2、$(B \oplus C)-A$；3、1； 4、$(\neg P \vee S \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg S \vee R)$；

5、1； 6、{<1,1>, <1,3>, <2,2>, <2,4> }； 7、{<a.b>,<a,c>,<a,d>,<b,d>,<c,d>} $\cup$ I_A ； 8、



9、a ； a , b , c ,d ； a , d , c , d ； 10、c;

二、选择 20%（每小题 2 分）

题日	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C D	B、C	C	A	.D	C	A	D.	B	A

三、证明 26%

1、证：

"$\Rightarrow$" $\forall a,b,c \in X$ 若 $<a,b>,<a,c> \in R$ 由 R 对称性知 $<b,a>,<c,a> \in R$，由 R 传递性得 $<b,c> \in R$

"$\Leftarrow$" 若 $<a,b> \in R$，$<a,c> \in R$ 有 $<b,c> \in R$ 任意 $a,b \in X$，因 $<a,a> \in R$ 若 $<a,b> \in R$ $\therefore$ $<b,a> \in R$ 所以 R 是对称的。

若 $<a,b> \in R$，$<b,c> \in R$ 则 $<b,a> \in R \wedge <b,c> \in R$ $\therefore$ $<a,c> \in R$ 即 R 是传递的。

2、证 $\forall a,b \in C$，有 $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，又

$f(b^{-1})=f^{-1}(b)$， $g(b^{-1})=g^{-1}(b)$ $\therefore f(b^{-1})=f^{-1}(b)=g^{-1}(b)=g(b^{-1})$

$\therefore f(a \star b^{-1})=f(a)*f^{-1}(b)=g(a)*g(b^{-1})=g(a \star b^{-1})$

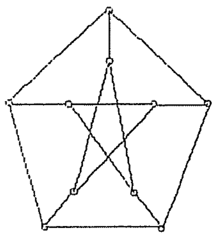
$\therefore a \star b^{-1} \in C$ $\therefore$ <C，☆> 是 <G_1，☆>的子群。

3、证：

①设 G 有 r 个面，则 $2e=\sum_{i=1}^{r}d(F_i)\ge rk$，即 $r\le\frac{2e}{k}$。而 $v-e+r=2$ 故

$2=v-e+r\le v-e+\frac{2e}{k}$ 即得 $e\le\frac{k(v-2)}{k-2}$。（8 分）

②彼得森图为 $k=5,e=15,v=10$，这样 $e\le\frac{k(v-2)}{k-2}$ 不成立，



所以彼得森图非平面图。（3 分）

二、 逻辑推演 **16%**

1、 证明：

① A	P（附加前提）
② $A\vee B$	T①I
③ $A\vee B\to C\wedge D$	P
④ $C\wedge D$	T②③I
⑤ D	T④I
⑥ $D\vee E$	T⑤I
⑦ $D\vee E\to F$	P
⑧ F	T⑥⑦I
⑨ $A\to F$	CP

2、证明

① $\forall xP(x)$	P（附加前提）
② $P(c)$	US①
③ $\forall x(P(x)\to Q(x))$	P
④ $P(c)\to Q(c)$	US③
⑤ $Q(c)$	T②④I

⑥ $\forall x Q(x)$ UG⑤

⑦ $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ CP

三、计算 18%

1、解:

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

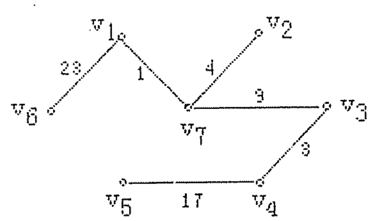
$$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \circ M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{t(R)} = M_R + M_{R^2} + M_{R^3} + M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴ t(R)={<a, a>, <a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, a>, <b, b>, <b, c>, <b, d>, <c, d>}

2、解：用库斯克（Kruskal）算法求产生的最优树。算法略。结果如图：



树权 C(T)=23+1+4+9+3+17=57 即为总造价。

离散数学试卷

试卷二试题与答案

一、填空 20% （每小题 2 分）

1、P：你努力，Q：你失败。"除非你努力，否则你将失败"的翻译为 ____________；"虽然你努力了，但还是失败了"的翻译为 ____________。

2、论域 D={1，2}，指定谓词 P

P (1,1)	P (1,2)	P (2,1)	P (2,2)
T	T	F	F

则公式 $\forall x \exists y P(y,x)$ 真值为 ____________。

2、设 S={a_1，a_2，…，a_8}，B_i 是 S 的子集，则由 B_{31} 所表达的子集是 ____________。

3、设 A={2，3，4，5，6}上的二元关系 $R=\{<x,y>| x<y \vee x$是质数$\}$，则 R=

____________（列举法）。

R 的关系矩阵 M_R=

____________。

5、设 A={1，2，3}，则 A 上既不是对称的又不是反对称的关系 R= ____________；A 上既是对称的又是反对称的关系 R= ____________。

6、设代数系统<A，*>，其中 A={a，b，c}，

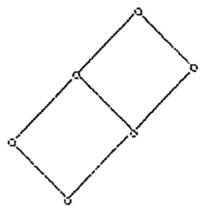
*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	b

则幺元是 ____________；是否有幂等性 ______；是否有对称性________。

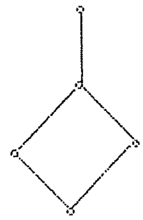
7、4 阶群必是 ____________ 群或 ____________ 群。

8、下面偏序格是分配格的是 ____________。

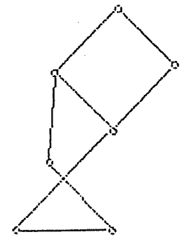
离散数学试卷



(A)



(B)



(C)

9、n 个结点的无向完全图 K_n 的边数为 ______________，欧拉图的充要条件是 ____。

10、公式 $(P\vee(\neg P\wedge Q))\wedge((\neg P\vee Q)\wedge\neg R$ 的根树表示为

____。

二、选择 20% （每小题 2 分）

1、在下述公式中是重言式为（　　　　）

A. $(P\wedge Q)\to(P\vee Q)$； B. $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\to Q)\wedge(Q\to P))$；

C. $\neg(P\to Q)\wedge Q$； D. $P\to(P\vee Q)$。

2、命题公式 $(\neg P\to Q)\to(\neg Q\vee P)$ 中极小项的个数为（　　　），成真赋值的个数为（　　　）。

A. 0； B. 1； C. 2； D. 3 。

3、设 $S=\{\Phi,\{1\},\{1,2\}\}$，则 2^S 有（　　　）个元素。

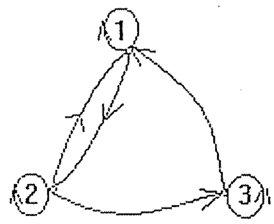
A. 3； B. 6； C. 7； D. 8 。

4、设 $S=\{1,\ 2,3\}$，定义 $S\times S$ 上的等价关系

$R=\{<<a,b>,<c,d>|<a,b>\in S\times S,<c,d>\in S\times S,a+d=b+c\}$ 则由 R 产生的 $S\times S$ 上一个划分共有（　　　　）个分块。

A. 4； B. 5； C. 6； D. 9 。

5、设 $S=\{1,\ 2,3\}$，S 上关系 R 的关系图为



则 R 具有（　　　）性质。

A．自反性、对称性、传递性；　　　　B．反自反性、反对称性；

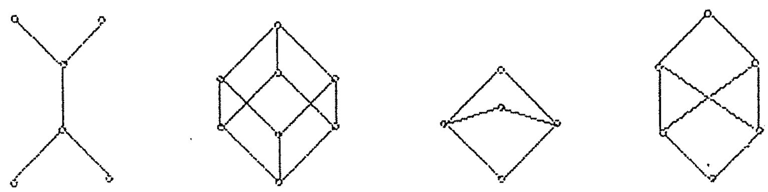
C．反自反性、反对称性、传递性；　　D．自反性 。

6、设 $+,\circ$ 为普通加法和乘法，则（　　　）$<S,+,\circ>$ 是域。

A．$S=\{x \mid x=a+b\sqrt{3},\quad a,b\in Q\}$　　B．$S=\{x \mid x=2n,\quad a,b\in Z\}$

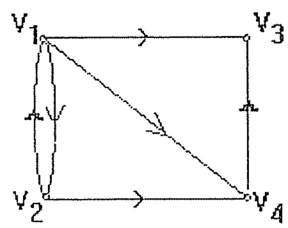
C．$S=\{x \mid x=2n+1,\quad n\in Z\}$　　D．$S=\{x \mid x\in Z \wedge x\geq 0\}=\mathrm{N}$ 。

7、下面偏序集（　　）能构成格。



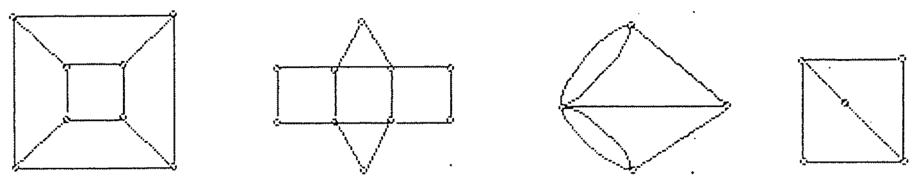
[A]　　[B]　　[C]　　[D]

8、在如下的有向图中，从 V_1 到 V_4 长度为 3 的道路有（　　　）条。



A．1；　　B．2；　　C．3；　　D．4 。

9、在如下各图中（　　）欧拉图。



[A]　　[B]　　[C]　　[D]

10、设 R 是实数集合，“×”为普通乘法，则代数系统<R ，×> 是（　　　）。

A．群；　　B．独异点；　　C．半群 。

离散数学试卷

三、证明 46%

1、设 R 是 A 上一个二元关系，

$S=\{<a,b>|(a,b\in A)\wedge(\text{对于某一个}c\in A,\text{有}<a,c>\in R\text{且}<c,b>\in R)\}$ 试证明若 R 是 A 上一个等价关系，则 S 也是 A 上的一个等价关系。（9 分）

2、用逻辑推理证明：

所有的舞蹈者都很有风度，王华是个学生且是个舞蹈者。因此有些学生很有风度。（11 分）

3、若 $f:A\rightarrow B$ 是从 A 到 B 的函数，定义一个函数 $g:B\rightarrow 2^A$ 对任意 $b\in B$ 有 $g(b)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b)\}$，证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是从 B 到 2^A 的单射。（10 分）

4、若无向图 G 中只有两个奇数度结点，则这两个结点一定连通。（8 分）

5、设 G 是具有 n 个结点的无向简单图，其边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，则 G 是 Hamilton 图（8 分）

四、计算 14%

1、设$<Z_6,+_6>$是一个群，这里$+_6$是模 6 加法，Z_6={[0]，[1]，[2]，[3]，[4]，[5]}，试求出$<Z_6,+_6>$的所有子群及其相应左陪集。（7 分）

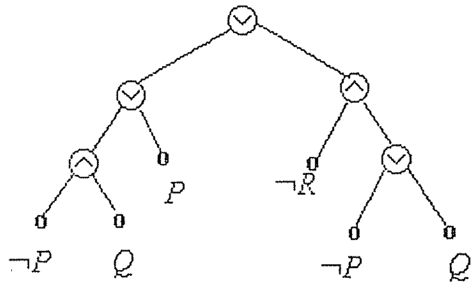
2、权数 1，4，9，16，25，36，49，64，81，100 构造一棵最优二叉树。（7 分）

离散数学试卷

试卷二答案：

一、 填空 20%（每小题 2 分）

1 、 $\neg P \to Q$ ； $P \wedge Q$ 2 、 T 3 、 $B_{31} = B_{00011111} = \{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ 4 、 R={<2,2>,<2,3>,<2,4>,<2,5>,<2,6>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<3,5>,<3,6>,<4,5>,<4,6>,<5,2>,<5,3>,<5,4>,<5,5>,<5,6>} ； $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 5 、 R={<1,2>,<1,3>,<2,1>} ； R={<1,1>,<2,2>,<3,3>} 6、a ；否；有 7、Klein 四元群；循环群 8、 B 9、 $\frac{1}{2}n(n-1)$ ；图中无奇度结点且连通 10 、



二、 选择 20%（每小题 2 分）

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B、D	D；D	D	B	D	A	B	B	B	B、C

三、 证明 46%

1、（9 分）

（1） S 自反的

$\forall a \in A$，由 R 自反，$\therefore (<a,a> \in R) \wedge (<a,a> \in R)$，$\therefore <a,a> \in S$

（2） S 对称的

$\forall a, b \in A$

$<a,b> \in S \Rightarrow (<a,c> \in R) \wedge (<c,b> \in R)$ $\cdots S$ 定义

$\Rightarrow (<a,c> \in R) \wedge (<c,b> \in R)$ $\cdots R$ 对称

$\Rightarrow <b,a> \in S$ $\cdots R$ 传递

（3） S 传递的

$\forall a, b, c \in A$

$<a,b> \in S \wedge <b,c> \in S$

$\Rightarrow (<a,d> \in R) \wedge (<d,b> \in R) \wedge (<b,e> \in R) \wedge (<e,c> \in R)$

$\Rightarrow (<a,b> \in R) \wedge (<b,c> \in R)$ $\cdots R$ 传递

$\Rightarrow <a,c> \in S$ $\cdots S$ 定义

由（1）、（2）、（3）得；S 是等价关系。

2、11 分

证明：设 P(x)：x 是个舞蹈者； Q(x) ：x 很有风度； S(x)：x 是个学生； a：王华

离散数学试卷

上述句子符号化为：

前提：$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$、$S(a)\wedge P(a)$　结论：$\exists x(S(x)\wedge Q(x))$　……3 分

① $S(a)\wedge P(a)$　　P

② $\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$　　P

③ $P(a)\rightarrow Q(a)$　　US②

④ $P(a)$　　T①I

⑤ $Q(a)$.　　T③④I

⑥ $S(a)$　　T①I

⑦ $S(a)\wedge Q(a)$　　T⑤⑥I

⑧ $\exists x(S(x)\wedge Q(x)$　　EG⑦　　……11 分

3、10 分

证明：$\forall b_1,b_2\in B,(b_1\neq b_2)\because f$ 满射　$\therefore \exists a_1,a_2\in A$

使$f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2$，且 $f(a_1)\neq f(a_2)$，由于f是函数，$\therefore a_1\neq a_2$

又 $g(b_1)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b_1)\}$，　$g(b_2)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b_2)\}$

$\therefore\ a_1\in g(b_1),a_2\in g(b_2)$　但 $a_1\notin g(b_2),a_2\notin g(b_1)$　$\therefore g(b_1)\neq g(b_2)$

由b_1,b_2任意性知，g为单射。

4、8 分

证明：设 G 中两奇数度结点分别为 u 和 v，若 u，v 不连通，则 G 至少有两个连通分支 G_1、G_2，使得 u 和 v 分别属于 G_1 和 G_2，于是 G_1 和 G_2 中各含有 1 个奇数度结点，这与图论基本定理矛盾，因而 u，v 一定连通。

5、8 分

证明：证 G 中任何两结点之和不小于 n。

反证法：若存在两结点 u，v 不相邻且 $d(u)+d(v)\leq n-1$，令 $V_1=\{u,v\}$，则 $G-V_1$ 是具有 n-2 个结点的简单图，它的边数 $m'\geq\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-(n-1)$，可得 $m'\geq\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$，这与 $G_1=G-V_1$ 为 n-2 个结点为简单图的题设矛盾，因而 G 中任何两个相邻的结点度数和不少于 n。

所以 G 为 Hamilton 图.

四、　计算 14%

1、7 分

解：子群有<{[0]},$+_6$>：<{[0],[3]},$+_6$>；<{[0],[2],[4]},$+_6$>；<{Z_6},$+_6$>

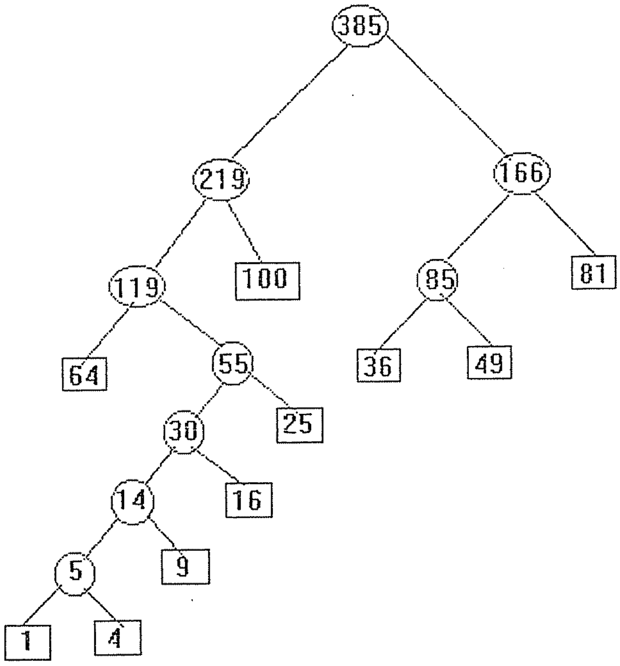
{[0]}的左陪集：{[0]}，{[1]}；{[2]}，{[3]}；{[4]}，{[5]}

{[0]，[3]}的左陪集：{[0]，[3]}；{[1]，[4]}；{[2]，[5]}

{[0]，[2]，[4]}的左陪集：{[0]，[2]，[4]}；{[1]，[3]，[5]}

Z_6的左陪集：Z_6。

2、7 分


385
219
166
119
100
85
81
64
55
36
49
30
25
14
16
5
9
1
4