

**武汉大学计算机学院 2015-2016 学年第一学期
2014 级《离散数学》考试试题 (A 卷)**

注意：所有答 请一律写在试卷纸上并注明题目序号！计算题要求有计算过程！

一. 求下列命题公式的主析取范式和主合取范式： $\neg P \wedge Q \rightarrow R$ (10 分)

二. 将下列语句用谓词公式进行符号化, 并构造下面推理的形式证明 (写出证明序列, 论域为实数集): (12 分)

“如果存在偶数, 则所有的有理数都可以表示为分数。如果存在素数, 则存在有理数。因此, 如果存在偶素数, 则存在分数。”

『提示: 使用如下的谓词符号:

$E(x)$: x 为偶数; $Q(x)$: x 为有理数;
 $D(x)$: x (可表示) 为分数; $P(x)$: x 为素数』

三. 设 A 为非空集合, 集合 $A^A = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$ 为 A 上的函数的集合, 完成下列各题: (3+3+6+4=16 分)

- (1) 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 构造函数 $g \in A^A$, 满足 $g \neq I_A$, 且 $g \circ g = I_A$ (I_A 为 A 上的恒等函数);
- (2) 若 A 为有限集, $|A| = n (n \in \mathbb{N}^+)$, 分别求 A^A 中的单射、满射、双射的个数;
- (3) 若 A 为有限集, $f: A \rightarrow A$, 证明: f 为单射, 当且仅当 f 为满射;
- (4) 证明: 若对任何 $f: A \rightarrow A$, 均存在 B , $\emptyset \neq B \subset A$, 使得 $f(B) \subseteq B$, 则 A 是无限集。

四. 设群 $\langle H, * \rangle$ 是群 $\langle G, * \rangle$ 的子群, 二元关系 $R \subseteq G \times G$ 定义为:

$$\forall a, b \in G, a R b, \text{ 当且仅当 } \exists h \in H, \text{ 使得 } a = b * h,$$

证明: R 为等价关系。

(15 分)

五. 设代数系统 $\langle A, * \rangle$, 其中集合 $A = \{a, b, c, d\}$, 二元运算 $*$ 的运算表如下, 完成下列各题: (4+4+4+4=16 分)

$*$	a	b	c	d
a	b	a	c	d
b	a	b	c	d
c	c	c	c	c
d	d	d	c	d

- (1) 判断运算 $*$ 是否为可结合的、可交换的?
- (2) 指出关于运算 $*$ 的幺元、零元、幂等元;
- (3) 哪些元素有逆元? 并求出其逆元;
- (4) 代数系统 $\langle A, * \rangle$ 是否是半群? 是否是群? 并说明 因。

设 h 是群 $\langle G_1, * \rangle$ 到群 $\langle G_2, \circ \rangle$ 的同态, 完成下列各题: (6+6=12 分)

- (1) 设 H 是 G_1 的子群 $H \leq G_1$, 证明: $h(H) \leq G_2$
- (2) 设 $H \leq G_1, K \leq G_1$, 证明: $h(H \cap K) \leq G_2$

七. 设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} (n \geq 2)$, R 是 A 上的拟序关系, 图 G 为关系 R 的关系图, 证明: 图 G 中不存在回路。 (10 分)

八. 设 G 是连通的简单无向赋权图, T 是 G 的最小生成树, C 是图 G 中的任意一条基本回路, 证明: C 中权值最大的边 e 一定不在 T 中。 (9 分)