数理逻辑考题

1. 简答题（20）

(1).给出一组逻辑联结词完备集。

$\{\wedge,\vee,\neg\},\{\wedge,\neg\},\{\vee,\neg\}\{\neg,\rightarrow\}$

(2).在自然数论域，Q(x)表示 x 是自然数，在整数论域，Q(x)，表示 x 是整数。在自然数论域和整数论域上分别求下列命题的逻辑真值。

$\forall x(Q(x)\rightarrow 0\leqslant x)$ (自然数论域：1，整数论域：0)

$\exists x\,(Q(x)\wedge\forall y(Q(y)\rightarrow x\leqslant y))$ (自然数论域：1，整数论域：0)

$\forall x\forall y(Q(x)\wedge Q(y)\rightarrow x+y=y+x)$ (自然数论域：1 ，整数论域：1)

$\forall x\forall y(Q(x)\wedge Q(y)\rightarrow x+y\leqslant y)$ (自然数论域：0，整数论域：0)

(3). 定义：对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，对于任何 n，当 $n>N$ 时，都有$|x_n-b|<\varepsilon$，则称序列$\{x_n\}$的极限是 b，记为 $\lim x_n=b$

用谓词合式公式表示定义（谓词符号，运算符：| |和-）

$\forall\varepsilon(\varepsilon>0\rightarrow\exists N(N>0\wedge\forall n(n>N\rightarrow|x_n-b|<\varepsilon)))$

(4).给出可靠性和完备性定理

可靠性定理：若$\Gamma\vdash Q$，则$\Gamma\vDash Q$。

完备性定理：若$\Gamma\vDash Q$，则$\Gamma\vdash Q$。

(5).在自然数理论中，仅保持等谓词（=），后继函数和数学归纳法，是否是完备的？

是

2.论述题（20）

(A).命题逻辑合式公式

(1).符号 0 和 1 是合式公式；

(2).原子公式是合式公式；

(3).若 Q,R 是合式公式，则$(\neg Q)$、$(Q\wedge R)$、$(Q\vee R)$、$(Q\rightarrow R)$、$(Q\leftrightarrow R)$、$(Q\oplus R)$是合式公式；

(4).只有有限次应用(1)—(3)构成的公式是合式公式。

(B).谓词逻辑合式公式

合式公式是按如下规则构成的有穷长符号串。

(1).若是 $t_1,\cdots,t_n$ 项，Q_i^n 是 n 元谓词，则 $Q_i^n(t_1,\cdots,t_n)$是合式公式。

(2).若 Q 是合式公式，则$(\neg Q)$是合式公式；

(3).若 Q 和 R 是合式公式，则$(Q\wedge R)$、$(Q\vee R)$、$(Q\rightarrow R)$、$(Q\leftrightarrow R)$及$(Q\oplus R)$是合式公式；

(4).若 Q 是合式公式，x 是变元，则$(\forall xQ)$及$(\exists xQ)$是合式公式。

(5).只有有限次应用(1)—(4)构成的公式是合式公式。

(C).谓词合式公式意义

给定一阶语言 L，结构 S=<D, I>和赋值函数 $\sigma:V\to D$，$t_1, t_2, \cdots, t_n$是项。在模型 $M=<S,\ \sigma>$下，公式 P,Q,R 的语义是确定的逻辑真值。

(1) 若 P 是 $Q(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，则 $\sigma(P) = Q^I(\sigma(t_1), \sigma(t_2), \cdots, \sigma(t_n))$。

(2) 若 P 是$\neg Q$，则 $\sigma(\neg Q) = \neg\sigma(Q)$。

(3) 若 P 是 $Q\wedge R$，则 $\sigma(Q\wedge R) = \sigma(Q)\wedge\sigma(R)$。

(4) 若 P 是 $Q\vee R$，则 $\sigma(Q\vee R) = \sigma(Q)\vee\sigma(R)$。

(5) 若 P 是 $Q\to R$，则 $\sigma(Q\to R) = \sigma(Q)\to\sigma(R)$。

(6) 若 P 是 $Q\leftrightarrow R$，则 $\sigma(Q\leftrightarrow R) = \sigma(Q)\leftrightarrow\sigma(R)$。

(7) 若 P 是 $Q\oplus R$，则 $\sigma(Q\oplus R) = \sigma(Q)\oplus\sigma(R)$。

(8) 若 P 是$\forall xQ(x)$，则

$$\sigma(\forall xQ(x)) = \begin{cases} 1 & \text{若对于每个}\mathrm{d}\in \mathrm{D}_1,\text{有}\sigma(x)=d,\text{使得}Q^I(x)[x/d]=1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(9) 若 P 是$\exists xQ(x)$，则

$$\sigma(\exists xQ(x)) = \begin{cases} 1 & \text{若存在}\mathrm{d}\in \mathrm{D}_1,\text{有}\sigma(x)=d,\text{使得}Q^I(x)[x/d]=1 \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(D).表述可满足性与有效性

给定一阶语言 L 和它的公式 Q，如果存在模型 $M=<S,\ \sigma>$，使得 $\sigma(Q)=1$ 成立，则称公式 Q 关于模型$<S,\ \sigma>$是可满足的，简称 Q 可满足，也称模型$<S,\ \sigma>$满足 Q，记为 $\models_M Q$。

若合式公式 Q 对于一阶语言 L 的任意模型 $M=<S,\ \sigma>$均可满足，即对任意结构 S 和任意赋值 σ 成立，则称公式集合 Q 是永真的或有效的，记为 $\models Q$。

(E).表述谓词公理证明

定义 设 Γ是合式公式集, Q 是合式公式, 有推理步骤 $A_1,A_2,\ldots A_n$, 公式序列 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$，其中

$A_1=\alpha_1$

$A_2=\alpha_2$

....

$A_n=\alpha_n$ $(\alpha_n=Q)$

每个 α_k 满足以下条件之一，

(1) α_k 是公理；

(2) $\alpha_{k}{}_{k}\in\Gamma$；

(3) 有 $i,j<k$ $\alpha_k=\alpha_i\to\alpha_j$ 由 α_i, α_j 用 MP 规则推出。

则称它为 Q 的从 Γ的一个推演(演绎),记为 $\Gamma\vdash Q$。

如果$\Gamma\vdash Q$，并且有推理步骤 $A_1,A_2,\ldots A_n$，则 $A_1,A_2,\ldots A_n$ 称为的一个证明。

3. （10）

(1).求命题合式公式$(P \vee Q \rightarrow R) \rightarrow P$ 主合取范式。

$\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r) \rightarrow p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg r \vee p$

$\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg r \vee p)$　　合取范式

(2).设下面是数字逻辑部件译码器功能真值表，给出输出 $y_7 \sim y_0$ 的逻辑表达式。

使能	输入			输出							
E	x_2	x_1	x_0	y_7	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	y_0
0	×	×	×	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

$y_0 = E \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0$

$y_1 = E \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0$

$y_2 = E \wedge \neg x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0$

$y_3 = E \wedge \neg x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$

$y_4 = E \wedge x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0$

$y_5 = E \wedge x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0$

$y_6 = E \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0$

$y_7 = E \wedge x_2 \wedge x_1 \wedge x_0$

4 （20）

(1). 用命题逻辑语义方法判断下列推论是否成立？若命题成立，给出证明；若命题不成立给出反例。

$((p \rightarrow q) \wedge p) \models q$

证明：

若真值赋值 v,使 $v(p)=1$，并且 $v(p \rightarrow q)=1$，　则 $v(p) \rightarrow v(q)=1$，所以,$v(q)=1$。

所以，$((p \rightarrow q) \wedge p) \models q$

$((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \models \neg q$

(2).用谓词逻辑语义方法判断下列推论是否成立？

$\exists x \forall y Q(x, y) \models \forall y \exists x Q(x, y)$

因为 $v(\exists x \forall y Q(x, y))=1$，所以 $v(\forall y Q(c, y))=1$，因此，对于所有 y，有 $v(Q(c, y))=1$。

所以，对于所有 y，有 $v(\exists x Q(x, y))=1$。

所以，有 $v(\forall y \exists x Q(x, y))=1$。

因此, $\exists x \forall y Q(x, y) \models \forall y \exists x Q(x, y)$

$\forall x\exists yQ(x, y) \models \exists y\forall xQ(x, y)$

5.用公理方法证明（20）

(1). $P\to(Q \to R), Q \vdash P \to R$

证明：

$A_1 = P\to(Q \to R)$

$A_2 = (P\to(Q \to R)) \to((P\to Q)\to (P\to R))$

$A_3 = (P\to Q)\to (P\to R)$

$A_4 = Q \to(P \to Q)$

$A_5 = Q$

$A_6 = P\to Q$

$A_7 = P \to R$

(2).选择

$\vdash \forall xQ(x)\to\forall y\, Q(y)$ (y 不在 Q 中出现)

证明：

$A_1 = \forall xQ(x) \to Q(y)$

$A_2 = \forall y(\forall xQ(x) \to Q(y))$

$A_3 = \forall y(\forall xQ(x) \to Q(y))\to(\forall xQ(x) \to\forall y\, Q(y))$

$A_4 = \forall xQ(x) \to\forall y\, Q(y)$

$\vdash\forall x\forall yR(x,y)\to\forall xR(x,x)$

证明：

$A_1 = \forall x\forall yR(x,y)\to\forall yR(x,y)$

$A_2 = \forall yR(x,y) \to R(x,x)$

$A_3 = \forall x\forall yR(x,y)\to R(x,x)$

$A_4 = \forall x\, (\forall x\forall yR(x,y)\to R(x,x))$

$A_5 = \forall x\, (\forall x\forall yR(x,y)\to R(x,x)) \to(\forall x\forall yR(x,y)\to\forall xR(x,x))$ A_4

$A_6 = \forall x\forall yR(x,y)\to\forall xR(x,x)$

6.归结法求证（10）

$P\wedge Q\to R \vdash(P\to R) \vee (Q\to R)$

证明：

$(P\wedge Q\to R) \wedge\neg((P\to R) \vee (Q\to R))$

$\Leftrightarrow(\neg(P\wedge Q) \vee R) \wedge\neg(\neg P\vee R\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q\vee R) \wedge P\wedge Q\wedge\neg R$

因为$(P\wedge Q\to R)\wedge\neg((P\to R)\vee(Q\to R))$的合取范式$(\neg P\vee\neg Q\vee R) \wedge P\wedge Q\wedge\neg R$

所以子句集合

$\Omega=\{P,Q, \neg R ,\neg P\vee\neg Q\vee R \}$

$Q_1=\neg P\vee\neg Q\vee R$	$Q_1\in \Omega$
$Q_2=P$	$Q_2\in \Omega$
$Q_3=\neg Q\vee R$	$Q_3= (Q_1-\neg P) \vee (Q_2-P)$
$Q_4=Q$	$Q_4\in \Omega$
$Q_5=R$	$Q_5= (Q_3-\neg Q) \vee (Q_4-Q)$
$Q_6=\neg R$	$Q_6\in \Omega$
$Q_7=\square$	$Q_7= (Q_5-R) \vee (Q_6-\neg R)$

因此 $P\wedge Q\to R \vdash(P\to R) \vee (Q\to R)$

证毕