

P. C. MATTHIESSEN

TEORETISK DEMOGRAFI

KØBENHAVNS UNIVERSITETS FOND
TIL TILVEJEBRINGELSE AF LÆREMIDLER

I kommission hos
G. E. C. GADS FORLAG . KØBENHAVN
1970

STATENS TRYKNINGSKONTOR
Un 02,1-449

ISBN 87 505 0092 9

FORORD

Nærværende bog er en stærkt revideret udgave af min lærebog i teoretisk demografi for sociologi- og politstuderende fra 1967. Ud over de rent typografiske ændringer, er der især foretaget en væsentlig forenkling af symbolikken.

Den teoretiske demografi har til formål at definere målene for de demografiske komponenter (dødsfald, fødsler, vandringer, vielser og skilsmisser) samt angive, hvorledes disse mål skal beregnes. Endvidere har den teoretiske demografi til opgave at fastlægge den funktionelle sammenhæng mellem de demografiske komponenter og befolkningens størrelse, struktur og vækst.

Også i denne udgave er der søgt gennemført en konsekvent adskillelse mellem de rent matematiske befolkningsmodeller og beskrivelsen af konkrete befolkninger. Endvidere er der lagt vægt på at vise, hvorledes den demografiske metodik for måling af dødeligheden i uændret eller lidt modifieret form kan anvendes ved målingen af de øvrige demografiske komponenter.

Til bogen knytter sig en eksemplersamling og en opgavesamling.

Manuskriptet til bogen er blevet gennemlæst af undervisningsassistent i demografi, cand.polit. Søren Hostrup-Pedersen, sekretærne i Danmarks Statistikks befolkningsafdeling, cand.polit. Bo Simonsen og cand.polit. F. Spieker, lektor i statistik, cand.polit. J. Wedebye, videnskabelig assistent på Statistisk Institut, cand. mag. Hans Oluf Hansen, instruktor i demografi, stud.mag.scient.soc. Mette Mønsted og beregnerassisterne på Statistisk Institut, stud.stat. Henrik Bülow-Hansen, stud.mag.scient.soc. Peter Krygell og stud.mag.scient.soc. Jesper Bruus Pedersen. Deres kommentarer har givet anledning til adskillige forbedringen af fremstillingen. Specielt har stud.stat. Henrik Bülow-Hansen på en række punkter medvirket til en mere korrekt og tilfredsstillende matematisk

fremstilling. Det skal også nævnes, at stud.mag.scient.soc. Jesper Bruus Pedersen har udarbejdet figurgrundlaget og suppleret begningerne i appendiks I og II, som til udgaven fra 1967 blev udarbejdet af daværende beregnerassistent på Statistisk Institut, stud.polit. E. Landgreen. Endvidere har bogens stikordsregister sorteret under ham.

Figurene er fremstillet af tegner Henry Jensen. Den endelige skrivning af manuskriptet er på meget dygtig og selvstændig måde blevet varetaget af assistent på Statistisk Institut, fru Inge Hallgren.

Jeg er alle disse personer megen tak skyldig.

Det Statistiske Institut, juni 1970.

P.C.Matthiessen

INDHOLDSFORTEGNELSE

KAPITEL 1	DEMOGRAFIENS OMRÅDE	9
KAPITEL 2	OVERLEVELSESTAVLEN	11
	2.1 Teorien for overlevelsestavlen	11
	2.2 Approximationsformlerne	19
KAPITEL 3	KONSTRUKTION AF OVERLEVELSESTAVLEN	27
	3.1 Tilgangen centreret i et tidspunkt	27
	3.1a Lukket befolkning	27
	3.1b Åben befolkning	31
	3.2 Tilgangen jævnt fordelt gennem en tidsperiode	36
	3.2a Lukket befolkning	36
	3.2b Åben befolkning	46
KAPITEL 4	KALENDERÅRSPRINCIPPET	49
KAPITEL 5	OVERLEVELSESTAVLER FOR SPECIELLE BEFOLKNINGSGRUPPER	55
KAPITEL 6	ANDRE DØDELIGHEDSMÅL	62
KAPITEL 7	DØDELIGHEDSSAMMENLIGNINGER	64
	7.1 Direkte standardisering	64
	7.2 Indirekte standardisering	71
KAPITEL 8	VIELSER, SKILSMISSE OG VANDRINGER	75
	8.1 Vielser	75
	8.2 Skilsmisser	76
	8.3 Vandringer	77

KAPITEL 9	FERTILITETEN	79
9.1	Fertilitetsmåling	79
9.1a	Teorien for fertilitetsmålingen	79
9.1b	Approximationsformlerne	85
9.2	Konstruktionen af fertilitetsmålene	88
9.3	Afsluttende bemærkninger om fertiliteten ..	89
KAPITEL 10	BEOFOLKNINGSMODELLER	93
10.1	Konkrete befolkningsstrukturer	93
10.2	Den stationære befolkning	94
10.3	Den stabile befolkning	98
10.3a	Teorien for den stabile befolkning ..	98
10.3b	Konstruktionen af den stabile befolkning	105
10.3c	Anvendelsen af den stabile befolkning	108
KAPITEL 11	BEFOLKNINGENS VÆKST	109
11.1	Reproduktion	109
11.2	Prognoser	110
11.2a	Komponentmetoden	111
11.2b	Den matematiske metode	113
11.2c	Den økonomiske metode	116
APPENDIKS I	119
APPENDIKS II	123
LITTERATURHENVISNINGER	130
STIKORDSREGISTER	131
SYMBOLLISTE	134

1 DEMOGRAFIENS OMRÅDE

Demografiens genstand er befolkningens størrelse, struktur (dvs. fordeling efter køn, alder, civilstand, hjemsted mv.) og vækst, de demografiske komponenter (dødsfald, fødsler, vandringer, vielser og skilsmisses) og deres sammenhæng med befolkningens størrelse, struktur og vækst. Endvidere søger demografien at klarlægge den gensidige forbindelse mellem de demografiske variable og økonomske, sociale, psykologiske, biologiske og medicinske faktorer og træder derved i forbindelse med en lang række andre videnskabelige discipliner.

Den demografiske videnskab kan deles op i en række forskellige områder med forskelligt formål og indhold.

Den tekniske demografi omhandler metoder til indsamling, bearbejdelse og tabellering af demografiske data. Indsamling af demografiske data foretages først og fremmest gennem følgende tre kilder, nemlig:

- a) folketællingerne,
- b) den løbende registrering af de demografiske komponenter,
- c) særlige undersøgelser, f.eks. interviewundersøgelser.

Den teoretiske demografi beskæftiger sig med definitionen og konstruktionen af målene for de demografiske komponenter samt en klarlæggelse af den funktionelle sammenhæng mellem de demografiske komponenter og befolkningens størrelse, struktur og vækst.

Den deskriptive demografi omfatter befolkningsbeskrivelser, som kun inddrager demografiske variable.

Medens den teoretiske demografi beskæftiger sig med de demografiske variable frigjort fra de økonomske og sociale omgivelser,

søger den sociale demografi at finde frem til de bestemmende økonomiske og sociale faktorer og at kvantificere disse sammenhænge, ligesom man også undersøger den indflydelse, som udgår fra de demografiske variable. Ved løsningen af disse opgaver betjener demografien sig i vid udstrækning af metoder fra den matematiske statistik.

I forbindelse med den deskriptive og den sociale demografi plejer man at foretage en tidsmæssig opspaltnings, således at demografiske beskrivelser og undersøgelser, som vedrører tidsperioder før påbegyndelsen af folketællingerne og den pålidelige registrering og centrale tabellægning af de demografiske komponenter, betegnes historisk demografi. De kilder, som den historiske demografi må bygge på, består f.eks. af kirkebøger, mandtalslister, inskriptioner på gravmonumenter og arkæologiske fund. Det særlige kildegrundlag nødvendiggør en anvendelse af specielle demografiske metoder.

Befolkningssteorierne er generelle teorier om årsagerne til og konsekvenserne af befolkningsudviklingen. Disse teorier repræsenterer således en slags syntese af en række enkeltstående demografiske forskningsresultater.

Et væsentligt område inden for demografien er befolkningspolitikken, som omfatter undersøgelser af de forskellige mål, som statsmagten kan opstille for befolkningens størrelse, struktur og vækst, konsekvenserne heraf, samt de midler der kan bringes i anvendelse for at realisere disse mål.

Befolkningsgenetikken undersøger fordelingen og overførslen af arvelige egenskaber i befolkningen.

2 OVERLEVELSESTAVLEN

I demografien sker opbygningen af alle mål for dødeligheden i en befolkning på grundlag af den såkaldte overlevelsestavle.

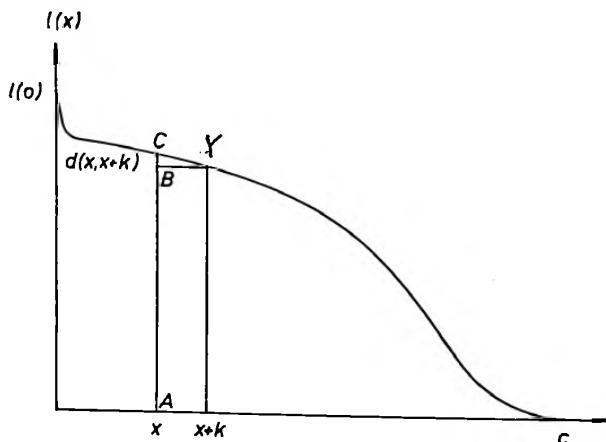
Overlevelsestavlen er en matematisk model, som kvantificeres ved hjælp af konkrete demografiske data, hvorefter modellen giver en udtømmende beskrivelse af dødelighedsforholdene i den pågældende befolkning.

De forskellige mål for dødeligheden bygges således op på grundlag af overlevelsestavlen. Det samme gælder målene for forekomsten af vielser, skilsmisser og vandringer samt til en vis grad de forskellige fertilitets- og reproduktionsmål. Derfor kunne overlevelsestavlen udmarket gennemgås på helt abstrakt vis og derefter fortolkes på forskellig måde, afhængig af om den skulle anvendes til en beskrivelse af dødeligheden, vielser, skilsmisser mv. I det følgende vil vi imidlertid bygge modellen op omkring målingen af befolkningens dødelighed for at gøre det lettere for læseren at indse modellens umiddelbare anvendelighed.

Men modellens generelle karakter medfører, at vi i kapitlerne om de andre demografiske komponenter kan overtage modellen i uændret eller lidt modificeret form og blot give symbolerne et andet indhold.

2.1 Teorien for overlevelsestavlen

Vi tænker os en bestand af nyfødte individer, $l(0)$, (dvs., at alle individerne er i eksakt alder 0), som følges fremover, indtil hele bestanden er uddød. Bestandens størrelse kan da konstateres i hver eneste alder x , når x måles i år. Det forudsættes, at bestanden ikke får tilgang udefra gennem indvandring, og at dødsfald optræder som eneste afgangsårsag.



Figur 2.1 Overlevelseskurven.

Vi forestiller os endvidere en kontinuert funktion, $l(x)$, som for enhver værdi af x giver størrelsen af bestanden. Denne funktion vil naturligvis være stadig aftagende og spænde over aldersintervallet fra 0 til c , hvor c er den højeste alder, der opnås af noget individ i bestanden (den maksimale levealder).

I figur 2.1 er der givet en grafisk illustration af $l(x)$ (overlevelseskurven).

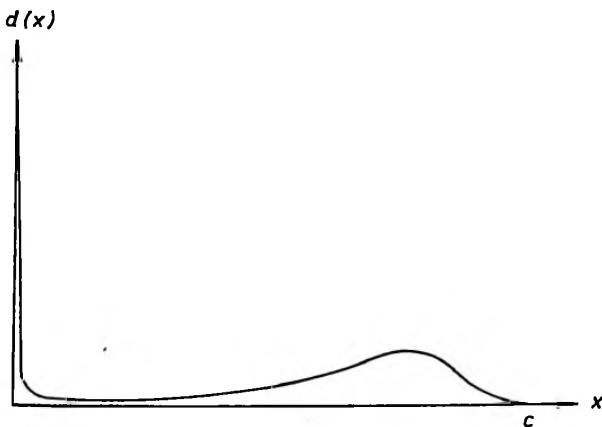
Ud fra $l(x)$ -funktionen er det en enkel sag at finde antallet af døde i aldersintervallet fra x til $x+k$, $d(x, x+k)$, hvor k f.eks. kan være en bestemt brøkdel af et år, 1 år eller 5 år, idet k måles i år. Da dødsfald repræsenterer den eneste afgang fra bestanden, må antallet af døde mellem x og $x+k$ være identisk med differencen mellem bestandens størrelse i eksakt alder x og $x+k$.

Dvs.

$$d(x, x+k) = l(x) - l(x+k) \quad (2.1)$$

hvilket også fremgår af figur 2.1.

Ønsker vi imidlertid et udtømmende billede af, hvorledes antallet af døde ændrer sig med alderen, er størrelsen $d(x, x+k)$ utilstrækkelig, fordi vi ikke får at vide, hvordan antallet af døde varierer mellem x og $x+k$. Det kan vi opnå ved at beregne antallet af døde pr. aldersenhed for enhver værdi af x , hvilket sker ved hjælp af følgende størrelse



Figur 2.2 Dødelighedskurven.

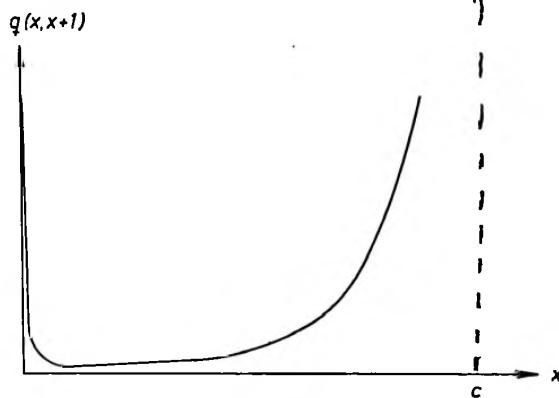
$$d(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{l(x) - l(x+k)}{k} = - \frac{dl(x)}{dx} = - l'(x) \quad (2.2)$$

Størrelsen $d(x)$ er lig med differentiaalkvotienten af $l(x)$ med modsat fortegn, og således identisk med hældningskoefficienten med modsat fortegn for tangenten i det pågældende punkt af kurven. Størrelsen $d(x)$ eksisterer for alle værdier af x mellem 0 og c . Da $l(x)$ er en stadig aftagende funktion, bliver $l'(x)$ negativ, hvorfor vi multiplicerer med -1 .

I figur 2.2 er der givet en grafisk afbildning af $d(x)$.

Når man er interesseret i en måling af dødelighedens "styrke" i de forskellige aldre, er $d(x)$ imidlertid ikke noget godt mål. Antallet af døde for en bestemt værdi af x afhænger nemlig ikke blot af den "styrke", hvormed dødeligheden gør sig gældende, men også af hvor mange individer, der er udsat for at dø, dvs. størrelsen af $l(x)$. Medens det voldsomme fald i $d(x)$ i de første leveår skyldes en stærk formindskelse af dødelighedens "styrke", fremkommer nedgangen i $d(x)$ for værdier af x i nærheden af c udelukkende ved, at $l(x)$ nu er af ringe størrelse, idet næsten hele bestanden er uddød.

En vurdering af den "styrke", hvormed dødeligheden gør sig gældende i de forskellige aldre, kræver derfor, at antallet af døde sammenholdes med den bestand, som er udsat for at dø i den pågæld-



Figur 2.3 Den étårige dødshyppighed.

dende alder. Dette opnås f.eks. ved at indføre dødshyppigheden $q(x, x+k)$

$$q(x, x+k) = \frac{l(x+k) - l(x)}{l(x)} \quad (2.3)$$

som viser, hvor stor en andel af bestanden $l(x)$ der afgår ved døden fra eksakt alder x til $x+k$.¹⁾ Også her kan størrelsen k f.eks. være en bestemt brøkdel af et år, 1 år eller 5 år.

Geometrisk (se figur 2.1) er $q(x, x+k)$ lig med forholdet mellem længden af liniestykket BC og liniestykket AC . Størrelsen $q(x, x+k)$ eksisterer for samtlige værdier af x fra 0 til c . I figur 2.3 er der givet en grafisk fremstilling af $q(x, x+k)$ for $k = 1$. (Den étårige dødshyppighed).

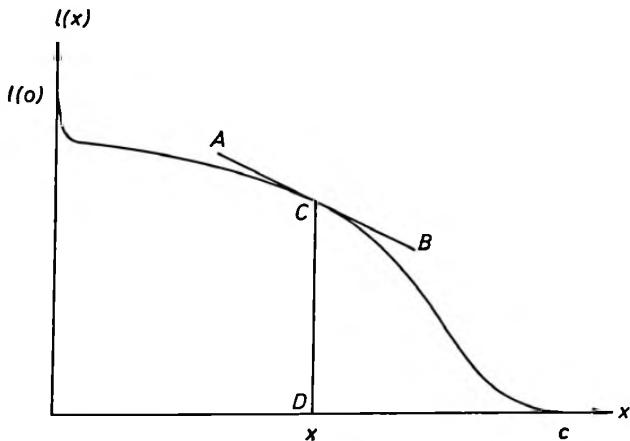
Komplementært til $q(x, x+k)$ indfører vi overlevelseshyppigheden

$$p(x, x+k) = 1 - q(x, x+k) = \frac{l(x)}{l(x+k)} \quad (2.4)$$

som mäter, hvor stor en andel af bestanden $l(x)$, der endnu er i live ved eksakt alder $x+k$. Af (2.4) fremgår umiddelbart, at

$$p(x, x+k) + q(x, x+k) = 1 \quad (2.5)$$

1) I de gængse fremstillinger anvendes betegnelsen dødssandsynlighed. Da nærværende fremstilling er rent deterministisk, vil vi afstå fra at bruge betegnelsen sandsynlighed.



Figur 2.4 Overlevelseskurven.

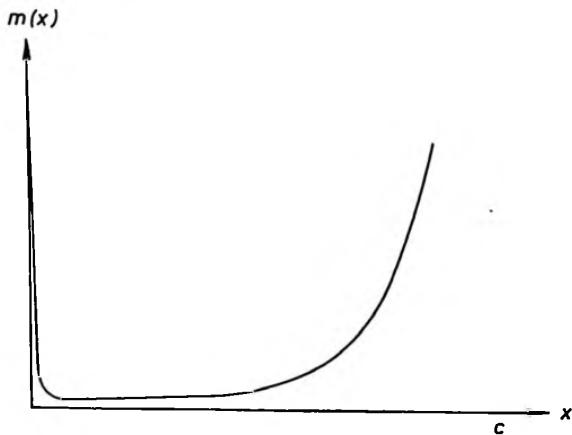
Ligesom ved størrelsen $d(x, x+k)$ er vi i forbindelse med størrelsen $q(x, x+k)$ interesseret i at få kendskab til dødelighedsforholdene mellem x og $x+k$. Også her sker det ved at introducere en ny størrelse dødsintensiteten

$$m(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d(x, x+k)}{k} = -\frac{l'(x)}{l(x)} = \frac{d(x)}{l(x)} \quad (2.6)$$

$m(x)$ mäter for enhver værdi af x mellem 0 og c antallet af døde pr. aldersenhed i forhold til bestandens størrelse. Geometrisk er størrelsen identisk med hældningskoefficienten for tangenten i punktet med modsat fortegn divideret med ordinatværdien. I figur 2.4 er $m(x)$, i det betragtede punkt, lig med hældningskoefficienten for linjen AB med modsat fortegn divideret med længden af liniestykket DC. Kurven for $m(x)$ er afbildet i figur 2.5.

I stedet for, som i forbindelse med $q(x, x+k)$, at måle antallet af døde i forhold til $l(x)$, kan $d(x, x+k)$ også sættes i forhold til den gennemlevede tid for bestanden fra x til $x+k$. Betegnes gennemlevet tid med $a(x, x+k)$ fås følgende udtryk for den nye størrelse, $m(x, x+k)$, dødkvotienten

$$m(x, x+k) = \frac{d(x, x+k)}{a(x, x+k)} \quad (2.7)$$



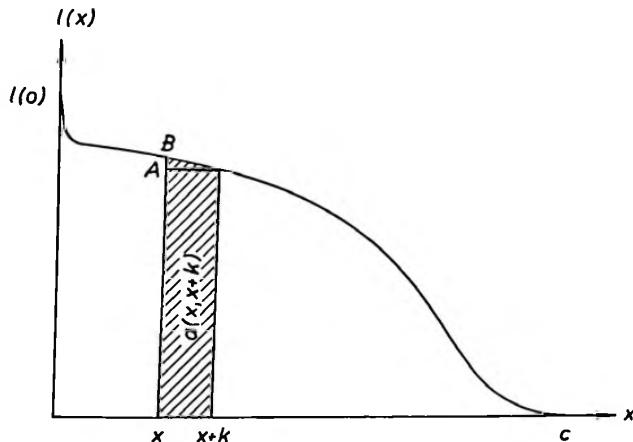
Figur 2.5 Dødsintensiteten.

Størrelsen $a(x, x+k)$ kan udtrykkes ved hjælp af $l(x)$ på følgende måde. I alderen $x+h$, hvor $0 \leq h \leq k$, vil bestanden have størrelsen $l(x+h)$ og i løbet af et uendeligt lille aldersinterval, dh , gennemleve $l(x+h)dh$ aldersenheder. Hvert enkelt af bidragene til gennemlevet tid summeres nu op fra x til $x+k$ ved hjælp af integrationen

$$a(x, x+k) = \int_{h=0}^k l(x+h)dh \quad (2.8)$$

Da integralet af $l(x)$ fra x til $x+k$ er identisk med arealet under overlevelseskuren mellem ordinaterne for x og $x+k$, kan $m(x, x+k)$ i geometrisk henseende udtrykkes ved forholdet mellem længden af liniestykket AB og størrelsen af det skraverede areal under kurven mellem x og $x+k$ (se figur 2.6).

Gennemlevet tid mellem x og $x+k$ kan også udtrykkes på en anden måde, som bliver særlig relevant for os i forbindelse med behandlingen af ind- og udvandringen (afsnit 3.1b). Hvis der ikke forekom dødsfald fra x til $x+k$, ville gennemlevet tid for bestanden være identisk med $k \cdot l(x)$. Det nye udtryk for gennemlevet tid fremkommer ved at foretage et fradrag for det tab i gennemlevet tid, der skyldes afgangen på grund af dødsfald. Antallet af døde i et uendelig kort aldersinterval, dh , er $d(x+h)dh$, som giver en reduktion af gennemlevet tid på $d(x+h)(k-h)dh$. Ved at opsummere



Figur 2.6 Gennemlevet tid fra x til $x+k$.

alle fradragene mellem x og $x+k$ og subtrahere disse fra $l(x) \cdot k$ fås følgende udtryk for gennemlevet tid

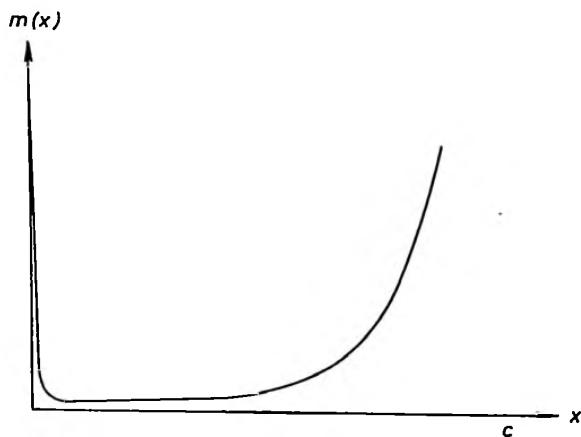
$$a(x, x+k) = k \cdot l(x) - \int_{h=0}^k d(x+h)(k-h)dh \quad (2.9)$$

Da værdien af dødshyppigheden, overlevelseshyppigheden, dødsintensiteten og dødkvotienten er betinget af alderen, kan man hæfte betegnelsen aldersbetinget på hvert af målene, således at man f.eks. taler om de aldersbetingede dødkvotienter.

Det sidste mål, som skal indføres, er middellevetiden for x-årige, $e(x)$. Dette mål defineres som den gennemsnitlige restlevetid for den del af bestandens individer, som har opnået eksakt alder x . Dvs.

$$e(x) = \frac{\int_{h=0}^{\infty} l(x+h)dh}{l(x)} = \frac{b(x)}{l(x)} \quad (2.10)$$

Tælleren består af en opsummering af de enkeltebidrag til gennemlevet tid, som bestanden giver fra alder x til c . For $h = c-x$ vil bestanden være uddød, således at bidragene herefter bliver 0. Da integralet er identisk med arealet under overlevelseskuren fra x til c , er middellevetiden for x -årige lig med arealet $b(x)$ divideret med længden af liniestykket AB. (Se figur 2.7).



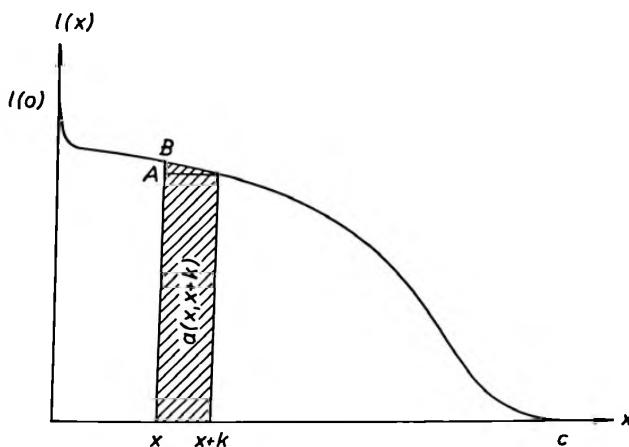
Figur 2.5 Dødsintensiteten.

Størrelsen $a(x, x+k)$ kan udtrykkes ved hjælp af $l(x)$ på følgende måde. I alderen $x+h$, hvor $0 \leq h \leq k$, vil bestanden have størrelsen $l(x+h)$ og i løbet af et uendeligt lille aldersinterval, dh , gennemleve $l(x+h)dh$ aldersenheder. Hvert enkelt af bidragene til gennemlevet tid summeres nu op fra x til $x+k$ ved hjælp af integrationen

$$a(x, x+k) = \int_{h=0}^k l(x+h)dh \quad (2.8)$$

Da integralet af $l(x)$ fra x til $x+k$ er identisk med arealet under overlevelseskurven mellem ordinaterne for x og $x+k$, kan $m(x, x+k)$ i geometrisk henseende udtrykkes ved forholdet mellem længden af liniestykket AB og størrelsen af det skraverede areal under kurven mellem x og $x+k$ (se figur 2.6).

Gennemlevet tid mellem x og $x+k$ kan også udtrykkes på en anden måde, som bliver særlig relevant for os i forbindelse med behandlingen af ind- og udvandringen (afsnit 3.1b). Hvis der ikke forekom dødsfalder fra x til $x+k$, ville gennemlevet tid for bestanden være identisk med $k \cdot l(x)$. Det nye udtryk for gennemlevet tid fremkommer ved at foretage et fradrag for det tab i gennemlevet tid, der skyldes afgangen på grund af dødsfalder. Antallet af døde i et uendelig kort aldersinterval, dh , er $d(x+h)dh$, som giver en reduktion af gennemlevet tid på $d(x+h)(k-h)dh$. Ved at opsummere



Figur 2.6 Gennemlevet tid fra x til $x+k$.

alle fradragene mellem x og $x+k$ og subtrahere disse fra $l(x) \cdot k$ fås følgende udtryk for gennemlevet tid

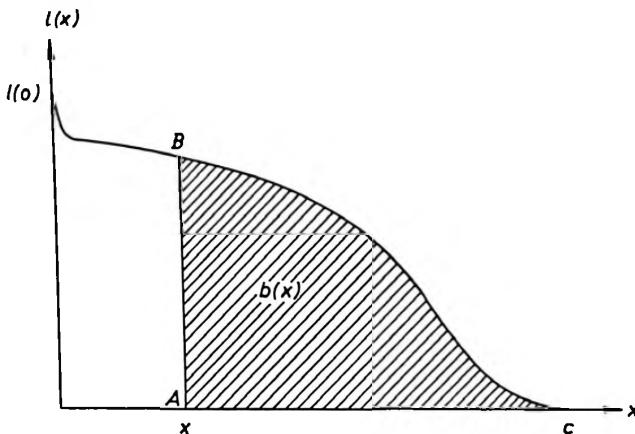
$$a(x, x+k) = k \cdot l(x) - \int_{h=0}^k d(x+h)(k-h)dh \quad (2.9)$$

Da værdien af dødshyppigheden, overlevelseshyppigheden, dødsintensiteten og dødskvotienten er betinget af alderen, kan man hæfte betegnelsen aldersbetinget på hvert af målene, således at man f.eks. taler om de aldersbetingede dødskvotienter.

Det sidste mål, som skal indføres, er middellevetiden for x-årige, $e(x)$. Dette mål defineres som den gennemsnitlige restlevetid for den del af bestandens individer, som har opnået eksakt alder x . Dvs.

$$e(x) = \frac{\int_{h=0}^{\infty} l(x+h)dh}{l(x)} = \frac{b(x)}{l(x)} \quad (2.10)$$

Tælleren består af en opsummering af de enkeltebidrag til gennemlevet tid, som bestanden giver fra alder x til c . For $h = c-x$ vil bestanden være uddød, således at bidragene herefter bliver 0. Da integralet er identisk med arealet under overlevelseskuren fra x til c , er middellevetiden for x-årige lig med arealet $b(x)$ divideret med længden af liniestykket AB. (Se figur 2.7).



Figur 2.7 Gennemlevet tid efter alder x .

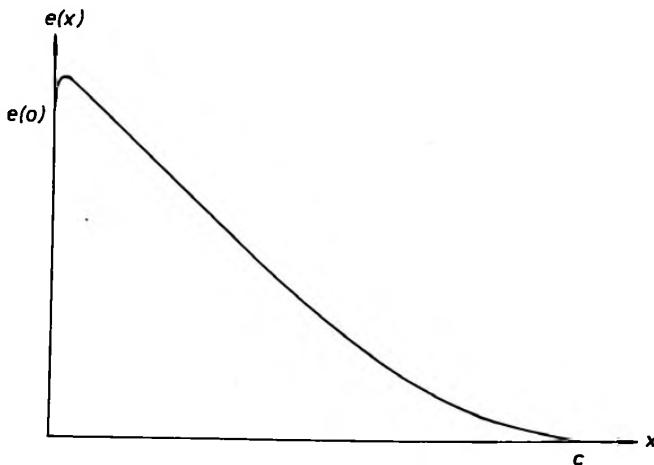
Specielt med hensyn til middellevetiden for 0-årige har vi

$$e(0) = \frac{b(0)}{l(0)} \quad (2.11)$$

$e(x)$ giver et sammenfattende mål for dødelighedsniveauet fra alder x til c . Jo højere værdi af $e(x)$ jo lavere er dødeligheden for aldrerne mellem x og c , idet et større areal under kurven mellem x og c er ensbetydende med en langsommere reduktion af bestanden.

Figur 2.8 giver en grafisk afbildning af middellevetiden fra alder 0 til c .

Overlevelsestavlen, $l(x)$, og de dødelighedsmål, som kan udledes på grundlag af tavlen, sætter os i stand til at beskrive og analysere dødeligheden i en bestemt befolkning. Ved hjælp af skønnene over $q(x, x+k)$, $m(x)$ og $m(x, x+k)$ kan vi bestemme og sammenligne den relative dødelighed i forskellige aldersklasser, idet vi mht. $q(x, x+k)$ og $m(x, x+k)$ må vælge en bestemt værdi af k . Hvis vi lader k antage værdien 1 og samtidig vælger heltallige værdier af x (dvs. $x = 0, 1, 2, \dots$), vil dødshyppighederne angive andelen af døde fra en fødselsdag til den næste. Dødkvotienterne vil i dette tilfælde måle antallet af døde fra en fødselsdag til den næste i forhold til den gennemlevede tid mellem to på hinanden følgende fødselsdage.



Figur 2.8 Middellevetiden.

Størrelsen $e(x)$ giver, som tidligere nævnt, en sammenfattende måling af dødeligheden efter alder x , idet specielt $e(0)$ inddrager samtlige aldre.

Men herudover giver overlevelsestavlen mulighed for at sammenligne dødeligheden i to eller flere befolkningsgrupper. Ved hjælp af skønnene over $q(x, x+k)$, $m(x)$ og $m(x, x+k)$ kan gruppernes dødelighed sammenlignes fra alder til alder, og gennem anvendelsen af middellevetiden kan der opnås mere sammenfattende beskrivelser og vurderinger.

2.2 Approximationsformlerne

Når man på grundlag af konkrete demografiske data for en bestemt befolkning skal konstruere overlevelsestavlen og de hertil knyttede mål, opstår der en række estimationsproblemer.

Som det vil fremgå af kapitel 3 må konstruktionen af overlevelsestavlen for en konkret befolkning altid foregå ved, at man først estimerer $q(x, x+k)$. Herefter vil skønnet over $l(x)$ let kunne beregnes, da vi ifølge (2.4) har sammenhængen

$$l(x+k) = l(x) \cdot p(x, x+k) = l(x)[1 - q(x, x+k)] \quad (2.12)$$

idet $l(0)$ fastlægges på forhånd, f.eks. til 100000.

Imidlertid vil $q(x, x+k)$ i mange konkrete situationer ikke kunne estimeres direkte (se afsnit 3.1b), men derimod kun $m(x, x+k)$. Vi er derfor interesseret i at afsløre den funktionelle sammenhæng mellem de to størrelser, således at man ved hjælp af de estimerede værdier af $m(x, x+k)$ kan finde de tilsvarende værdier af $q(x, x+k)$ og på grundlag heraf nå frem til et skøn over $l(x)$.

Bortset fra det første leveår er estimationen af $m(x, x+k)$ og dermed af $q(x, x+k)$ som regel kun mulig for heltallige værdier af x og for $k = 1$ eller $k = 5$, således at vi i bedste fald kun får estimeret $l(x)$ for $x = 0, 1, 2, \dots$ ²⁾

Når vi kun kan estimere udvalgte punkter på $l(x)$ kurven, kan dødelighedsmålene $m(x)$ og $e(x)$ ikke estimeres direkte på basis af formlerne (2.6) og (2.10), som forudsætter kendskab til hele overlevelseskuren. Formlerne må derfor omformes for at muliggøre en beregning.

Vi vil i det følgende først finde en approximationsformel for $e(x)$. Derefter vil vi fastlægge den approximative sammenhæng dels mellem $m(x)$ og $m(x, x+k)$ og dels mellem $q(x, x+k)$ og $m(x, x+k)$.

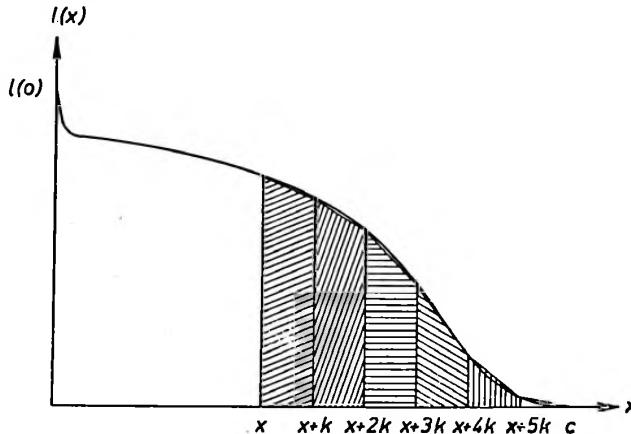
Med udgangspunkt i (2.10) kan $e(x)$ skrives

$$e(x) = \frac{b(x)}{l(x)} = \frac{\sum_{h=0}^{\infty} a(x+h \cdot k, x+(h+1) \cdot k)}{l(x)} ; h = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Formlen udtrykker middellevetiden for præcis x -årige som summen af en række delarealer under overlevelseskuren fra x til c divideret med udgangsbestanden. I det øjeblik, at $x+h \cdot k \geq c$ ophører summationen med at modtage positive arealbidrag.

Vort mål er at få udtrykt tælleren ved hjælp af $l(x)$ for discrete værdier af x . Hvis overlevelseskuren kan betragtes som nogetlunde lineær mellem x og $x+k$, vil hvert af arealerne approximativt kunne fremstilles som arealet af et trapez (se figur 2.9).

2) I det første leveår har man på grund af dødelighedens stærke ændring gennem dette aldersinterval ofte indsamlet data, som muliggør estimeret af dødelighedsmålene for værdier af $k = 1/12$. Når det gælder dødeligheden i den første uge, kan oplysningerne være så detaljerede, at $l(x)$ kan estimeres for $k = 1/365$ eller endnu mindre værdier af k .



Figur 2.9 Approximation af gennemlevet tid.

Dvs.

$$a(x, x+k) \approx \frac{k}{2}[l(x) + l(x+k)] \quad \text{trapézformel} \quad (2.14)$$

således at

$$\begin{aligned} b(x) &\approx \frac{k}{2}[l(x) + l(x+k)] + \frac{k}{2}[l(x+k) + l(x+2k)] \\ &+ \dots + \frac{k}{2}[l(x+(n-1)k) + l(x+nk)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

idet $x+nk = c$.³⁾

$$b(x) \approx k \cdot [\frac{1}{2}l(x) + l(x+k) + \dots + l(x+(n-1)k)] \quad (2.16)$$

da $\frac{1}{2}l(x+nk) = \frac{1}{2}l(c) = 0$.

Ved at tillægge og fradrage $\frac{k}{2}l(x)$ på højre side af lighedstegnet fås

$$b(x) \approx k[l(x) + l(x+k) + \dots + l(x+(n-1)k) - \frac{1}{2}l(x)] \quad (2.17)$$

$$= k \left[\sum_{h=0}^{\infty} [l(x+hk)] - \frac{1}{2}l(x) \right]; \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

3) Det forudsættes hele tiden, at k går et helt antal gange op i $c-x$.

Approximationsformlen for $e(x)$ bliver da

$$e(x) \approx k \left[\frac{\sum_{h=0}^{\infty} [l(x+hk)] - \frac{1}{2}l(x)}{l(x)} \right] = k \left[\frac{\sum_{h=0}^{\infty} l(x+hk)}{l(x)} - \frac{1}{2} \right] \quad (2.18)$$

Forudsætningen for, at (2.18) giver en akceptabel approximation er, som tidligere nævnt, at man overalt fra x til c kan betragte kurven som nogenlunde lineær i de enkelte delarealer. Det er klart, at man med god tilnærmelse kan anvende større værdier af k for de aldersintervaller, hvor kurven falder jævnt. Rent matematisk er dette ensbetydende med, at overlevelseskurvens differentialkvotient kun ændrer sig lidt.⁴⁾ For de aldersintervaller, hvor differentialkvotienten ændrer sig kraftigt, vil arealerne under kurven kun kunne fremstilles ved hjælp af trapezformlen, hvis man vælger små værdier af k .

For hvilke dele af overlevelseskurven det ene eller det andet gør sig gældende, kan vi på helt eksakt måde få afgjort ved hjælp af kurven for $d(x)$ (se figur 2.2). Spørgsmålet kan naturligvis ikke besvares generelt, men kun således at man for den konkrete befolkning, hvis overlevelsesstavle skal konstrueres, undersøger dødelighedens variation med alderen og derefter afgør, hvilke værdier af k , der skal anvendes i de forskellige aldre. Indgående undersøgelser af dødelighedens aldersvariation blandt befolkninger med meget forskelligt dødelighedsniveau har imidlertid vist, at dødelighedens aldersvariation i det væsentlige fremviser den i figur 2.2 angivne form. Denne forudsætning ligger iøvrigt også til grund for den senere udledelse af den approximative sammenhæng mellem $m(x, x+k)$, $m(x)$ og $q(x, x+k)$.

Det fremgår af figur 2.2, at $d(x)$ ændrer sig betydeligt i de første år efter fødslen og i de højere aldre. Kurvens form tilsiger os derfor at vælge små k -værdier i de første leveår samt i de højere aldre. Rent faktisk vælger man kun små k -værdier for de første leveår. I de højere aldre, hvor ændringen iøvrigt sker langt mere gradvis, er bestanden blevet mindre, hvorfor en eventuel over- eller undervurdering af gennemlevet tid i disse aldre får mindre indflydelse på middellevetiden for 0-årige.

4) En konstant differentialkvotient over et bestemt aldersinterval betyder, at arealet under kurven helt eksakt kan fremstilles ved hjælp af et trapez.

Som eksempel på en praktisk brugbar beregningsformel for gennemlevet tid for 0-årige kan anføres nedenstående formel, hvor man har valgt følgende værdier af k i forbindelse med de forskellige værdier af x (c sættes til 100)

$$0 \leq x \leq 1 \quad k = \frac{1}{12} \quad 5)$$

$$1 \leq x \leq 5 \quad k = 1 \quad 6)$$

$$5 \leq x \leq 100 \quad k = 5 \quad 7)$$

$$\begin{aligned} b(0) \simeq & \frac{1}{12} [\frac{1}{2}l(0) + l(\frac{1}{12}) + \dots + l(\frac{11}{12}) + \frac{1}{2}l(\frac{12}{12})] \\ & + [\frac{1}{2}l(1) + l(2) + \dots + l(4) + \frac{1}{2}l(5)] \\ & + 5[\frac{1}{2}l(5) + l(10) + \dots + l(95) + \frac{1}{2}l(100)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mellem $m(x)$ og $m(x, x+k)$ gælder følgende approximative relation

$$m(x+\frac{k}{2}) \simeq m(x, x+k) \quad (2.20)$$

således at skønnet over $m(x)$ udøves ved hjælp af estimateet over $m(x, x+k)$.

Vi vil undlade at bringe den matematiske udledning, som fører frem til (2.20) og indskrænke os til at give et geometrisk plausibilitetsbevis, som tillige fortæller, under hvilke betingelser approximationen er akceptabel.

5) Hvis $a(0,1)$ skal approximeres alene på grundlag af $l(0)$ og $l(1)$, har forskellige undersøgelser vist, at følgende formel giver en akceptabel approximation

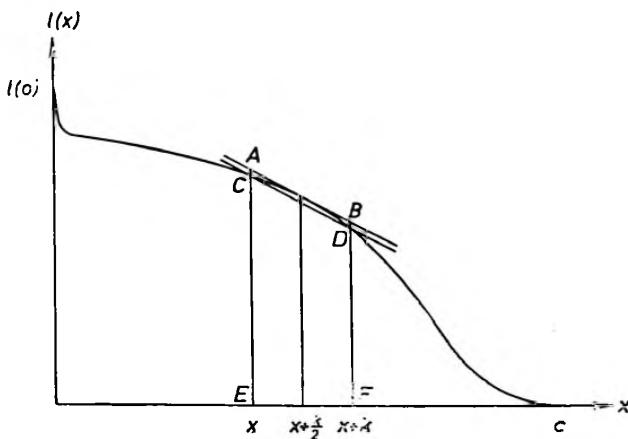
$$a(0,1) \simeq 0.25 \cdot l(0) + 0.75 \cdot l(1).$$

6) Skal $a(1,5)$ approximeres alene ved hjælp af $l(1)$ og $l(5)$, kan følgende formel anvendes

$$a(1,5) \simeq 1.9 \cdot l(1) + 2.1 \cdot l(5).$$

7) Ofte tillader materialet ikke beregninger udeover $l(85)$. I disse tilfælde plejer man at anvende følgende formel, som også er empirisk begrundet

$$b(85) \simeq l(85) \cdot \log_{10}(10^5 \cdot \frac{l(85)}{l(0)}):$$



Figur 2.10 Overlevelseskurven.

Formel (2.20) er naturligvis identisk med

$$\frac{d(x+\frac{k}{2})}{l(x+\frac{k}{2})} \approx \frac{d(x, x+k)}{a(x, x+k)} \quad (2.21)$$

Ved at dividere på begge sider af lighedstegnet med k fås

$$\frac{d(x+\frac{k}{2})}{k \cdot l(x+\frac{k}{2})} \approx \frac{\frac{1}{k} \cdot d(x, x+k)}{a(x, x+k)} \quad (2.21a)$$

Rigtigheden af (2.21a) vises nu gennem en geometrisk dokumentation af, at

$$d(x+\frac{k}{2}) \approx \frac{1}{k} \cdot d(x, x+k) \quad (2.22)$$

og at

$$k \cdot l(x+\frac{k}{2}) \approx a(x, x+k) \quad (2.23)$$

Den approximative identitet mellem tællerne indsies ved hjælp af figur 2.10. Pr. definition er $d(x+\frac{k}{2})$ identisk med $-l'(x+\frac{k}{2})$, dvs. hældningskoefficienten med modsat fortegn for tangenten til kurven i punktet: $[x+\frac{k}{2}, l(x+\frac{k}{2})]$. Endvidere er $\frac{1}{k} \cdot d(x, x+k)$ lig med hældnings-

koefficienten med modsat fortegn for linien, som forbinder punkterne $[x, l(x)]$ og $[x+k, l(x+k)]$. Bortset fra de første leveår vil disse to linier (AB og CD) med god tilnærmelse være parallelle.

Den approximative identitet mellem de to nævnere indsæs ved hjælp af figur 2.10 gennem følgende arealbetragtning. Størrelsen $k \cdot l\left(\frac{x+k}{2}\right)$ er lig med arealet af det trapez, som afgrænses af punkterne EABF. Bortset fra de første leveår vil trapezarealet falde tæt sammen med arealet under kurven mellem x og $x+k$.

Dvs., at vi f.eks. ved hjælp af $m(x, x+1)$ kan skaffe os et skøn over $m(x)$ for

$$x = 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \dots$$

Den approximative relation mellem $m(x, x+k)$ og $q(x, x+k)$ ⁸⁾ fås frem på følgende måde. Ifølge (2.14) er

$$a(x, x+k) \approx \frac{k}{2}[l(x) + l(x+k)] \quad (2.14)$$

hvorfor (2.7) kan omformes til

$$\begin{aligned} m(x, x+k) &\approx \frac{d(x, x+k)}{\frac{k}{2}[l(x) + l(x+k)]} \\ &= \frac{d(x, x+k)}{\frac{k}{2}[l(x) + l(x) - d(x, x+k)]} \\ &= \frac{d(x, x+k)}{k[l(x) - \frac{1}{2}d(x, x+k)]} \end{aligned} \quad (2.24)$$

idet

$$l(x+k) = l(x) - d(x, x+k) \quad (2.25)$$

Ved division i tæller og nævner med $l(x)$ fås

8) Relationen mellem $m(x, x+k)$ og $q(x, x+k)$ bliver i vort tilfælde approximativ, fordi vi sætter $a(x, x+k) \approx k/2[l(x) + l(x+k)]$, hvorfor approximationens nøjagtighed for forskellige værdier af x afhænger af k .

$$m(x, x+k) \approx \frac{q(x, x+k)}{k[1 - \frac{1}{2}q(x, x+k)]} \quad (2.26)$$

Dvs.

$$q(x, x+k) \approx \frac{2 \cdot k \cdot m(x, x+k)}{2 + k \cdot m(x, x+k)} \quad (2.27)$$

For $k = 1$ antager (2.27) den enklere form

$$q(x, x+1) \approx \frac{2 \cdot m(x, x+1)}{2 + m(x, x+1)} \quad (2.28)$$

Efter udledelsen af disse approximationsformler vil vi i næste kapitel vise, hvorledes man ved brug af konkrete demografiske data kan konstruere overlevelsestavlen for en given befolkning.

3 KONSTRUKTION AF OVERLEVELSESTAVLEN

3.1 Tilgangen centreret i et tidspunkt

3.1a Lukket befolkning

Vi stiller os nu den opgave at konstruere en overlevelsestavle for en bestemt et-års generation, dvs. samlingen af individer med samme fødselsår. Endvidere antager vi, at hele generationen fødes umiddelbart ved begyndelsen af år T , ligesom det forudsættes, at der hverken forekommer ind- eller udvandring (en lukket befolkning). Dødsfald repræsenterer således den eneste afgang fra generationen.

Dette fødselskuld af levendefødte¹⁾ ($G^{(T)} = T^B_0$)²⁾ følges nu fremover, således at vi hele tiden registrerer antallet af døde. Antallet af døde fra fødselstidspunkt T til $T+k$ betegnes således $T_{0,k}^{D(T,T+k)}$, hvor eksponenttegnet i parentes angiver den tidsperiode, hvori dødsfaldene er indtruffet, medens fodtegnet til højre betegner dødsaldrerne og fodtegnet til venstre fødselstidspunktet.

1) Ved konstruktion af overlevelsestavler tager man altid udgangspunkt i levendefødte; dødfødte indgår ikke i de almindelige overlevelsestavler.

2) G = antallet af levendefødte. B = antallet af individer i en nøjere afgrænset gruppe.

Eksponenttegnet i parentes angiver observationstiden. Observationen kan være foretaget ved begyndelsen af en bestemt tidsperiode (T) eller gennem en bestemt tidsperiode ($T, T+k$). Fodtegnet til højre for hovedsymbolet angiver alderen, som enten kan være eksakt (x) eller en bestemt aldersklasse ($x, x+k$). Fodtegnet til venstre for hovedsymbolet betegnet fødselstidspunktet (T) eller fødselsperioden ($T, T+k$) for den pågældende gruppe.

Dvs.

$$[\text{hovedsymbol}] \begin{matrix} \text{observationstidsnotation} \\ \text{generationsnotation} \end{matrix}$$

Fodnoten fortsættes næste side.

På grund af forudsætningen om koncentration af fødslerne i begyndelsen af år T , vil der være en enkel lineær sammenhæng mellem tid og eksakt alder, idet

$$x = (T+k) - T = k \quad (3.1)$$

dvs. differencen mellem døds- og fødselstidspunkt. Takket være denne entydige sammenhæng mellem eksakt alder og den tid, som er forløbet siden fødselstidspunktet, kan vi nøjes med at påføre symbolerne en aldersangivelse.

Generationens størrelse til tidspunktet $T+k$ vil således være

$$T^B_k = T^B_0 - T^D_{0,k} \quad (3.2)$$

nemlig udgangsbestanden minus afgangen af døde.

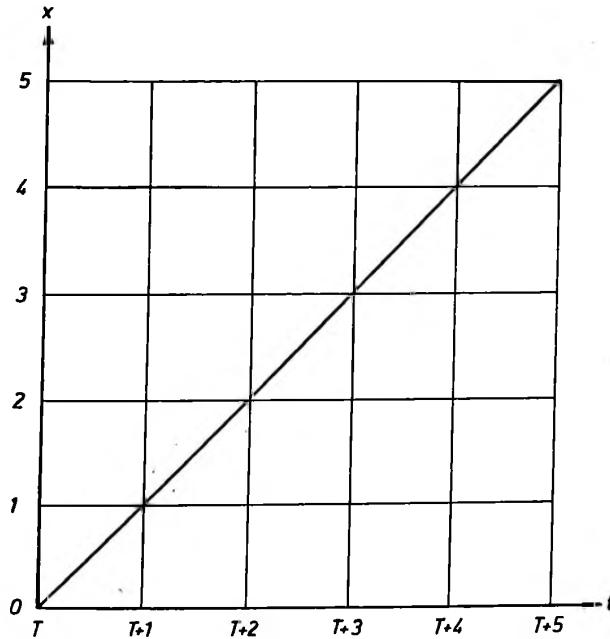
Sammenhængen mellem tid og alder for generationen kan illustres ved hjælp af et koordinatsystem, hvor vi afsætter tiden ud ad abcisseaksen og alderen op ad ordinataksen. (Se figur 3.1).

Når der vælges samme længde på de to akser for henholdsvis tids- og aldersenheder, vil en ret linie med en hældning på 45° og begyndelsespunkt i $(T, 0)$ repræsentere sammenhængen mellem tid og eksakt alder for denne generation. Ordinatværdien for $T+1$ er nøjagtig 1, svarende til at hele den tilbageværende del af generationen på det tidspunkt er nøjagtig 1 år gamle. Vælger vi tidsrummet mellem T og $T+1$, fremstiller det tilsvarende stykke på ordinataksen aldrerne mellem 0 og 1. Dvs., at alle, som dør i løbet af år T , er i aldersklassen mellem 0 og 1 år.

Tænkte man sig en fremstilling af livsforløbet for hver eneste levendefødt fra generationen ved en ret linie (individets livslinie), der startede i punktet $(T, 0)$ med en hældning på 45° , og som først blev afbrudt, når det pågældende individ afgik ved døden, ville tykkelsen af det herved fremkomne liniebundt på ethvert tidspunkt repræsentere generationens størrelse. For større værdier af

2) Fortsat fra forrige side.

Hvor store bogstaver anvendes som hovedsymboler refereres normalt til direkte eller indirekte registrerede størrelser, medens små bogstaver angiver normerede størrelser. F.eks. vil alle de dødelighedsmål, som beregnes i forbindelse med en overlevelsestabte for $l_0 = 1$, være normerede størrelser.



Figur 3.1 Lexis skema.

t og dermed af x bliver liniebundtet tyndere, fordi det hele tiden mister linier, som afbrydes på grund af dødsfald. 3)4)

Under disse forudsætninger følger beregningen af dødshyppigheden direkte efter (2.3). For de étårige dødshyppigheder fås

$$q_{0,1}^{5)} = \frac{T^D_{0,1}}{T^E_0} \quad (3.3a)$$

$$q_{1,2} = \frac{T^D_{1,2}}{T^E_1} \quad (3.3b)$$

$$q_{2,3} = \frac{T^D_{2,3}}{T^E_2} \quad (3.3c)$$

3) Da alle livslinjer skal begynde i et punkt $(T, 0)$ er en grafisk illustration af dette forhold ikke mulig.

4) Se næste side.

5) Se næste side.

Generelt haves

$$q_{x,x+1} = \frac{T_{x,x+1}^D}{T_x^B} \quad (3.3d)$$

Ud fra fremstillingen af de enkelte individers livsforløb ved hjælp af en livslinie kan f.eks. $q_{0,1}$ defineres som forholdet mellem antallet af afbrudte livslinier mellem 0 og 1 år og samtlige fra $(T, 0)$ udgåede linier.

Ved hjælp af (3.3d) og (2.12) kan overlevelsesstavlen beregnes for heltallige værdier af x , idet størrelsen af l_0 fastlægges på forhånd.

$$l_1 = l_0(1-q_{0,1}) = l_0 \cdot p_{0,1} \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} l_2 &= l_1(1-q_{1,2}) = l_0(1-q_{0,1})(1-q_{1,2}) \\ &= l_0 \cdot p_{0,1} \cdot p_{1,2} \end{aligned} \quad (3.4b)$$

$$\begin{aligned} l_3 &= l_2(1-q_{2,3}) = l_0(1-q_{0,1})(1-q_{1,2})(1-q_{2,3}) \\ &= l_0 \cdot p_{0,1} \cdot p_{1,2} \cdot p_{2,3} \end{aligned} \quad (3.4c)$$

4) Principperne i denne afbildungsteknik, som vi skal beskæftige os indgående med i det følgende, skyldes bl.a. den tyske statistiker Wilhelm Lexis, efter hvem koordinatsystemet bærer navnet Lexis' skema. Fremstillingen af skemaet her adskiller sig fra de hidtidige fremstillinger på dansk, om end principperne naturligvis er uændrede. Den nye fremstillingsform tilsigter større enkelhed, ligesom det har været afgørende at bringe sig i overensstemmelse med international praksis gennem de seneste årtier.

5) Når vi beskæftiger os med konstruktion af overlevelsesstavler og beregninger af dødelighedsrålene - hvør kontinuitetsforudsætningen må opgives - vil vi anvende følgende betegnelser: l_x ,

$q_{x,x+k}$, $p_{x,x+k}$, m_x , $m_{x,x+k}$ og e_x . Samtidig erstatter vi overalt approximationstegnene med lighedstegn. Små bogstaver betegner normalt normerede størrelser, medens store bogstaver anvendes for konkrete, observerede størrelser, f.eks. antallet af døde i et bestemt år. Af hensyn til overskueligheden vil vi strype generationsbetegnelsen i forbindelse med normerede størrelser.

Generelt haves

$$\begin{aligned} l_{x+1} &= l_x(1-q_{x,x+1}) = l_0(1-q_{0,1}) \dots (1-q_{x,x+1}) \\ &= l_0 \cdot p_{0,1} \cdot \dots \cdot p_{x,x+1} \end{aligned} \quad (3.4d)$$

Heresfter kan $m_{x,x+k}$, $m_{x+k/2}$ og e_x beregnes.

3.1b Åben befolkning

Vi lader nu forudsætningen om en lukket befolkning falde og tænker os, at generationen gennem sit livsforløb hele tiden modtager en tilgang af indvandrere og afgiver et vist antal individer på grund af udvandring. Alle ind- og udvandrede forudsættes at være født i begyndelsen af år T , således at vi også her har en entydig sammenhæng mellem tid og eksakt alder. Ind- og udvandrings størrelse f.eks. i løbet af året T betegnes med henholdsvis $T_{0,1}^{(T,T+1)}$ og $T_{0,1}^{U(T,T+1)}$, idet alle ind- og udvandrede i dette tilfælde vil være mellem 0 og 1 år gamle.

Sammenhængen mellem generationens størrelse i to efter hinanden følgende heltallige eksakte aldre er følgende

$$T_{x+1}^B = T_x^B - T_{x,x+1}^D + T_{x,x+1}^I - T_{x,x+1}^U \quad (3.5)$$
$$x = 0, 1, 2, \dots$$

eller generelt

$$T_{x+k}^B = T_x^B - T_{x,x+k}^D + T_{x,x+k}^I - T_{x,x+k}^U \quad (3.6)$$

Også for den åbne befolkning kan vi med fordel bruge Lexis' skema til at fremstille generationens livsforløb. Ligesom et dødsfald medfører en afbrydelse af en livslinie på dødstidspunktet, gælder det samme en udvandring på udvandingstidspunktet. En indvandring medfører derimod, at en ny linie starter på indvandringstidspunktet og derefter fortsætter, indtil individet enten udvander eller dør.

Forekomsten af ind- og udvandring betyder, at beregningen af f.eks. $q_{x,x+k}$ ikke mere kan foregå efter formel (2.3). Formlen

forudsætter nemlig fuldstændig korrespondance mellem tæller og nævner, således at alle dødsfald blandt nævnerens individer indgår i tælleren, og at dødsfaldene i tælleren kun hidrører fra individer, som er medregnet i nævneren. Sætter man for en given aldersklasse dødsfaldene i forhold til bestanden ved begyndelsen af aldersåret samtidig med, at der foregår en ind- og udvandring, er betingelsen om fuldstændig korrespondance mellem tæller og nævner ikke længere opfyldt. Dødsfald blandt udvandrede efter udvandringstidspunktet indgår ikke i tælleren, skønt de udvandrede indgår i nævneren, og dødsfald blandt indvandrede indgår blandt dødsfaldene i tælleren, selv om de indvandrede ikke indgår i nævneren.

Foreligger der f.eks. en kraftig nettoindvandring, dvs., at indvandringen overstiger udvandringen, vil tælleren blive belastet med dødsfald blandt en stor gruppe af individer, som ikke indgår i nævneren. En sammenstilling af døde gennem aldersåret med bestanden ved aldersårets begyndelse vil i denne situation give et overdrevet billede af dødelighedsniveauets højde, og dermed umuliggøre korrekte sammenligninger med en eller flere andre befolkninger, som ikke er genstand for nettoindvandring.

Formuleringen af de regler, der skal gælde for behandlingen af ind- og udvandringen, kan umiddelbart ske ved at basere sig på $m(x, x+k)$, idet vi griber tilbage til den teoretiske overlevelsesstavle, som blev behandlet i kapitel 2⁶⁾

$$m(x, x+k) = \frac{d(x, x+k)}{a(x, x+k)} \quad (3.7)$$

Denne størrelses definition indebærer, at antallet af døde skal sættes i forhold til gennemlevet tid fra x til $x+k$. Vi har tidligere vist (2.9), at for en lukket befolkning kunne nævneren udtrykkes på følgende måde

$$a(x, x+k) = k \cdot l(x) - \int_{h=0}^k d(x+h)(k-h)dh \quad (3.8)$$

6) Når vi ikke inddrog ind- og udvandringen i forbindelse med udledningen af teorien for overlevelsesstavlen, og allerede der fandt frem til adækvate formler, skyldes det, at den teoretiske overlevelsesstavle i sin rene form nødvendigvis må forudsætte en lukket befolkning.

Formlen udtrykker gennemlevet tid ved at reducere $k \cdot l(x)$ med tabet på grund af dødsfald. For så vidt angår gennemlevet tid er udvandringen en afgang af samme karakter som dødsfaldene, idet udvandringen medfører, at en yderligere del af de $l(x)$ -individer ikke bidrager til gennemlevet tid med k aldersår. Hvis $u(x)$ betegner udvandringen pr. aldersenhed, bliver fradraget på grund af udvandringen følgende

$$\int_{h=0}^k u(x+h)(k-h)dh$$

Indvandringen repræsenterer derimod et tilskud til gennemlevet tid, idet ethvert individ, som indvandrer, giver et bidrag, som er lig med den tid, der hengår fra indvandingstidspunktet og indtil $x+k$. Betegner $i(x)$ indvandringen pr. aldersenhed, medfører indvandringen følgende bidrag

$$\int_{h=0}^k i(x+h)(k-h)dh$$

For en åben befolkning kan gennemlevet tid derfor udtrykkes på følgende måde

$$a(x, x+k) = k \cdot l(x) - \int_{h=0}^k d(x+h)(k-h)dh \quad (3.9)$$

$$+ \int_{h=0}^k i(x+h)(k-h)dh - \int_{h=0}^k u(x+h)(k-h)dh$$

Hvis $d(x)$, $i(x)$ og $u(x)$ forudsættes at være konstante fra x til $x+k$, nemlig af størrelsen d , i og u pr. aldersenhed,⁷⁾ kan formel (3.9) omformes til følgende

7) Dette indebærer, at ingen af de tre størrelser er underkastet aldersvariationer i det betragtede aldersinterval, dvs.

$$\left. \begin{array}{l} d(x) = d \\ i(x) = i \\ u(x) = u \end{array} \right\} \text{i intervallet mellem } x \text{ og } x+k$$

$$\begin{aligned}
 a(x, x+k) &= k \cdot l(x) - d \int_{h=0}^k (k-h)dh + i \int_{h=0}^k (k-h)dh - u \int_{h=0}^k (k-h)dh \\
 &= k \cdot l(x) - d[kh - \frac{h^2}{2}]_0^k + i[kh - \frac{h^2}{2}]_0^k - u[kh - \frac{h^2}{2}]_0^k \\
 &= k \cdot l(x) - kd(k - \frac{k}{2}) + ki(k - \frac{k}{2}) - ku(k - \frac{k}{2}) \\
 &= k \cdot l(x) - \frac{k}{2} \cdot d(x, x+k) + \frac{k}{2} \cdot i(x, x+k) - \frac{k}{2} \cdot u(x, x+k) \\
 &= k[l(x) - \frac{1}{2}d(x, x+k) + \frac{1}{2}i(x, x+k) - \frac{1}{2}u(x, x+k)] \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

idet $k \cdot d$, $k \cdot i$ og $k \cdot u$ er identisk med summen af henholdsvis døde, ind- og udvandrede fra x til $x+k$. Disse størrelser betegner vi i-følge den hidtidige konvention som $d(x, x+k)$, $i(x, x+k)$ og $u(x, x+k)$.

For en åben teoretisk befolkning, hvor bevægelserne pr. aldersenhed er konstante i det betragtede aldersinterval, bliver formlen for $m(x, x+k)$

$$m(x, x+k) = \frac{d(x, x+k)}{k[l(x) - \frac{1}{2}d(x, x+k) + \frac{1}{2}i(x, x+k) - \frac{1}{2}u(x, x+k)]} \quad (3.12)$$

Formel (3.12) sætter os i stand til at beregne $m_{x, x+k}$ for konkrete åbne befolkninger og dermed overlevelsestavlen og de resterende dødeligheds mål. Den konkrete anvendelse af formlen forudsætter, at bevægelsene (dødsfald, ind- og udvandring) foregår nogenlunde jævnt gennem den pågældende aldersperiode. Opfyldelsen af dette krav sikres gennem valget af forskellige k -værdier i forbindelse med de forskellige aldre. Hermed er vi tilbage i diskussionen i afsnit 2.2, om end vi for åbne befolkninger også må tage hensyn til ind- og udvandingens aldersvariation.

For $k = 1$ består korrektionen til $l(x)$ således af et fradrag for halvdelen af afgangene (døde + udvandrede) plus et tillæg på halvdelen af de indvandrede.

Vender vi os til vor generation fra år T , vil f.eks. dødskvotienten for $x = 4$ og $k = 1$ under forudsætning af jævn bevægelse kunne beregnes på følgende måde

$$m_{4,5} = \frac{T^D_{4,5}}{T^B_4 + \frac{1}{2}(T^I_{4,5} - T^U_{4,5} - T^D_{4,5})} \quad (3.13)$$

Ved hjælp af relationen (se ligning 2.28)

$$q_{4,5} = \frac{2m_{4,5}}{2 + m_{4,5}} \quad (3.14)$$

kan dødshyppigheden beregnes og derefter principielt hele overlevelsesstavlen.⁸⁾ For en åben befolkning viser overlevelsesstavlen, hvorledes generationen reduceres, hvis dødeligheden er eneste afgangsårsag.

Til slut skal vi se på den situation, hvor vi for en åben befolkning har oplysninger om bestandens størrelse i forskellige aldre og antallet af dødsfald mellem disse aldre, men savner kendskab til ind- og udvandringens størrelse. I dette tilfælde kan vi under forudsætning af, at bevægelserne (dødsfald, ind- og udvandring) foregår jævnt gennem den pågældende aldersperiode, beregne gennemlevet tid alene på grundlag af bestandsoplysninger.

Den gennemlevede tid fra x til $x+k$ for generationen fra år T kan ved hjælp af (3.11) beregnes på følgende måde

$$T^A_{x, x+k} = k(T^B_x - \frac{1}{2}T^D_{x, x+k} + \frac{1}{2}T^I_{x, x+k} - \frac{1}{2}T^U_{x, x+k}) \quad (3.15)$$

Da

$$T^B_{x+k} = T^B_x - T^D_{x, x+k} + T^I_{x, x+k} - T^U_{x, x+k} \quad (3.16)$$

8) Rent faktisk er det muligt at beregne dødshyppigheden uden først at beregne dødskvotienten. Ved en kombination af (2.27) og (3.12) fås følgende formel for dødshyppigheden

$$q(x, x+k) = \frac{d(x, x+k)}{I(x) + \frac{1}{2}i(x, x+k) - \frac{1}{2}u(x, x+k)}$$

Denne formel kan anvendes, når der er fuldstændig korrespondance mellem bestand og bevægelser. Som det vil fremgå af det følgende, er dette krav opfyldt ved B- og C-grupper. I nærværende fremstilling har vi dog overalt anvendt dødskvotienten ved beregningen af dødshyppigheden.

finnes ved indsætning i (3.15)

$$T_{x,x+k}^A = k[T_x^B - \frac{1}{2}(T_x^B - T_{x+k}^B)] \quad (3.17)$$

$$= \frac{k}{2}(T_x^B + T_{x+k}^B) \quad (3.18)$$

Dødskvotienten kan da beregnes efter følgende formel

$$m_{x,x+k} = \frac{T_{x,x+k}^D}{\frac{k}{2}(T_x^B + T_{x+k}^B)} \quad (3.19)$$

3.2 Tilgangen jævnt fordelt gennem en tidsperiode

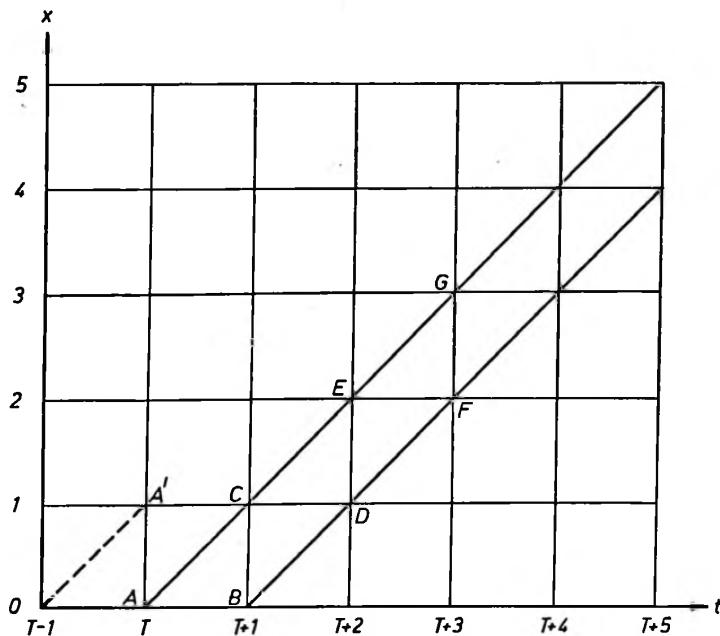
3.2a Lukket befolkning

Vi betragter igen vor generation fra år T, men under en ny kombination af forudsætninger. Vi lader tilgangen til generationen, dvs. fødslerne, foregå jævnt gennem hele året T i modsætning til tidligere, hvor vi samlede fødslerne i begyndelsen af året. Ind- og udvandringen antages at være lig med 0.

Som det vil fremgå af det følgende, er Lexis' skema et uvurderligt hjælpemiddel i den nuværende situation, hvor tilgangen ikke mere er samlet i et enkelt tidspunkt. (Se figur 3.2).

Afbildningsteknikken i forbindelse med Lexis' skema er i dette tilfælde ganske den samme, idet livsforløbet for ethvert individ fra generationen fremstilles ved en ret linie, der begynder i fødselstidspunktet og - hvor det som her drejer sig om en lukket befolkning - afsluttes i dødstidspunktet. Livsliniernes begyndelsespunkter for generationens individer vil nu fordele sig jævnt ud over hele liniestykket AB. Punkterne A og B er begyndelsespunkterne for de af generationens individer, som fødes henholdsvis i begyndelsen og slutningen af år T. Da samtlige livslinier har ens hældning (i vort tilfælde 45°), vil alle generationens livslinier forløbe mellem de to rette linier, som starter i henholdsvis A og B med en hældning på 45° .

Indtræden af levendefødte gennem hele året T medfører, at den tidligere enkle lineære sammenhæng mellem tid og eksakt alder går



Figur 3.2 Lexis skema.

tabt. Medens den tidlige centring af fødslerne i begyndelsen af året medførte, at vi på ethvert tidspunkt havde en generation af nøjagtig lige gamle individer i en alder, der på enkel måde var knyttet sammen med tiden, gælder det nu, at vi på ethvert opgørelsestidspunkt fra og med begyndelsen af år $T+1$ har en generation, som aldersmæssigt spænder over et år. Betragter vi generationens alder ved begyndelsen af år $T+1$, er alle individer fra generationen nu mellem 0 og 1 år.⁹⁾

Derfor kan vi ikke længere umiddelbart anvende definitionsformlerne for dødsmålene, da disse formler forudsætter bestante, hvor alle individerne er i nøjagtig alder x . Denne forskel begrunder resten af indeværende afsnit, hvor vi undersøger, hvilke observationer det rent faktisk er muligt at fremskaffe (først og fremmest

9) Det er vigtigt at bemærke, at kun ved årsskiftet vil alle individerne fra generationen befinde sig i samme étårige aldersklasse. Ved en opgørelse, f.eks. midt i året $T+1$, vil omkring halvdelen af generationens individer være mellem $\frac{1}{2}$ og 1 år og den anden halvdel mellem 1 og $1\frac{1}{2}$ år.

fra den officielle statistik), og hvorledes vi skal behandle disse observationer for at konstruere overlevelsesstavlen.

Ned hensyn til det første punkt vil vi foreløbig forudsætte en observationsteknik, der indebærer en opgørelse af bestandens størrelse ved begyndelsen af hvert år, og dermed af det årlige antal dødsfald. Det svarer til, at vi observerer

$$T, T+1^B_0, 1, T, T+1^B_1, 2, \dots, T, T+1^B_x, x+1, \dots$$

dvs. antallet af livslinier, der overskærer henholdsvis BC, DE, ... Endvidere observeres

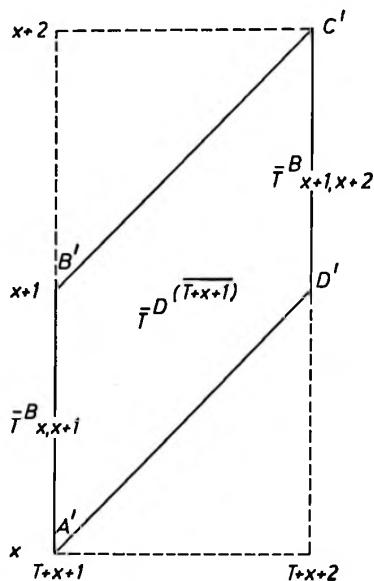
$$T, T+1^D(T+1, T+2), T, T+1^D(T+2, T+3), \dots, T, T+1^D(T+x+1, T+x+2), \dots$$

dvs. antallet af afbrudte livslinier i parallelogrammerne BCED, DEGF, ..., idet vi foreløbig ser bort fra dødsfaldene i trekant ACB.¹⁰⁾ Af figur 3.2 fremgår, at dødsfaldende i disse parallelogrammer kan afgrænses ved hjælp af fødselsåret og dødsåret, idet dødsfaldene i et givet parallelogram rent aldersmæssigt spænder over to étårige aldersklasser. En gruppe af døde, som afgrænses på denne måde, kaldes en B-gruppe af døde.

Mellem $\bar{T}^D(T+x+1)$ og $\bar{T}^B_{x, x+1}$ (se figur 3.3) er der fuldstændig korrespondance, fordi alle generationens livslinier befinder sig mellem de to linier, der udspringer fra A og B med en hældning på 45° (se figur 3.2). Forholdet mellem de to størrelser er i figur 3.3 identisk med antallet af afbrudte livslinier i parallelogrammet A'B'C'D' og antallet af livslinier, som udgår fra A'B'. Der vil derfor gælde følgende sammenhæng

$$\bar{T}^B_{x+1, x+2} = \bar{T}^B_{x, x+1} - \bar{T}^D(T+x+1) \quad (3.20)$$

10) For at lette symbolsproget vil vi i det følgende skrive $T, T+1^B_{x, x+1}$ som $\bar{T}^B_{x, x+1}$ og $T, T+1^D(T+x+1, T+x+2)$ som $\bar{T}^D(T+x+1)$, således at \bar{T} og $\bar{T}+x+1$ betegner henholdsvis hele året T og $T+x+1$. Denne enklere symbolik vil også blive anvendt i forbindelse med ind- og udvandring i det følgende afsnit. Det skal bemærkes, at symbolikken kun kan bruges, når der er tale om tidsperioder på 1 år. Fsv. angår alderen kunne en lignende symbolik anvendes.



Figur 3.3 B-gruppe af døde.

På trods af den fuldstændige korrespondance mellem tæller og nævner er

$$\frac{T^D^{(T+x+1)}}{T^B_{x,x+1}}$$

ikke nogen ren dødshyppighed, da individerne i bestanden ikke er nøjagtig lige gamle. Størrelsen giver derimod udtryk for andelen af døde i løbet af et år blandt en bestand, som ved årets begyndelse befinner sig i aldersklassen x til $x+1$. Hvis vi imidlertid kan forudsætte, at livslinierne fordeler sig jævnt over liniestykke $A'B'$, således at bestandens gennemsnitsalder er $x+\frac{1}{2}$, samt at $q_{x,x+1}$ ændrer sig jævnt fra x til $x+1$, vil brøken kunne anvendes til et skøn over følgende størrelse

$$q_{x+\frac{1}{2}, x+1\frac{1}{2}} = \frac{T^D^{(T+x+1)}}{T^B_{x,x+1}} \quad (3.21)$$

Medens den første forudsætning stort set altid er opfyldt på grund af fødsernes begrænsede sæsonvariation, er den anden forudsætning i hvert fald ikke opfyldt for $x \leq 1$, idet dødeligheden, som tidligere omtalt, ændrer sig meget stærkt gennem det første leveår. På grund af den store dødelighed lige efter fødslen ville en beregning af $q_{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}}$ ved hjælp af denne metode give en for stor værdi af $q_{\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}}$.

For de øvrige aldre vil beregningsmetoden imidlertid kunne anvendes, hvorefter man ved lineær interpolation kan nå frem til dødshyppigheden for heltallige værdier af x gennem anvendelsen af formlen

$$q_{x, x+1} = \frac{1}{2}(q_{x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}} + q_{x+\frac{1}{2}, x+1\frac{1}{2}}) \quad (3.22)$$

Da $q_{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}}$ i hvert fald er den første værdi, hvor metoden kan anvendes, kan vi ved hjælp af denne beregningsmetode (Van de Peech's metode) kun få beregnet dødshyppigheden for aldrerne $x = 2, 3, 4, \dots$

For aldrerne mellem 0 og 2 år er vi derfor henvist til at base- re os på en anden sammenstilling af bevægelsesmassen (dødsfalde- ne) og bestandsmassen (generationens størrelse på et bestemt tids- punkt eller under andre nærmere fastlagte omstændigheder). Sammen- holder vi f.eks. i figur 3.2 antallet af afbrudte livslinier i pa- rallelogrammet ACDB med antallet af udgåede livslinier fra linie- stykket AB (dvs. levendeføde i år T), følger beregningen af den étårige dødshyppighed for 0-årige individer direkte af formel (2.3). Alle individer i udgangsbestanden har eksakt alder 0 (om end på forskellige tidspunkter) og antallet af døde befinder sig i aldersklassen 0 til 1 år. Endvidere er der fuld korrespondance mellem tæller og nævner.

Dvs.

$$q_{0,1} = \frac{\overline{T}_{0,1}^D}{\overline{T}_0^B} \quad 11) \quad (3.23)$$

11) Denne metode kaldes den Zeuner-Beckerske metode.

Betegnelsen for antallet af døde viser, at gruppen af døde afgrænses ved hjælp af fødselsår og dødsalder. Opgørelsen af $\bar{T}_{0,1}^D$ vil ikke volde vanskeligheder, da den blot kræver oplysning om alderen ved dødsfaldets indtræden for generationens individer. Denne samling af døde kaldes en C-gruppe af døde. \bar{T}_0^B kræver blot en opgørelse af antallet af levendefødte i år T.

Beregningen af $q_{1,2}$ sker efter følgende formel

$$q_{1,2} = \frac{\bar{T}_{1,2}^D}{\bar{T}_1^B} \quad (3.24)$$

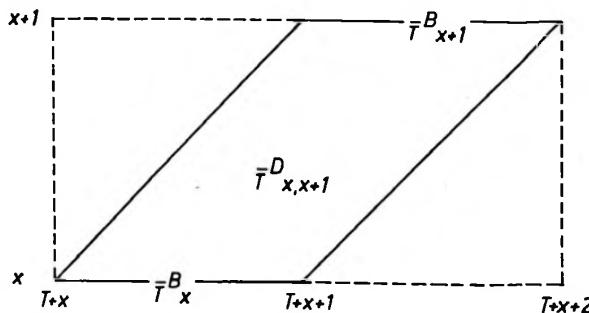
Størrelsen af $\bar{T}_{1,2}^D$ omfatter alle døde fra generationen mellem 1 og 2 år (antallet af afbrudte livslinier i parallelogrammet CEF). Opgørelsen af nævneren, som er identisk med det antal individer fra generationen, der opnår étårs fødselsdagen (antallet af livslinier, som overskærer liniestykket CD), foretages ved hjælp af relationen

$$\bar{T}_1^B = \bar{T}_0^B - \bar{T}_{0,1}^D \quad (3.25)$$

dvs. antallet af udgåede livslinier fra liniestykket AB minus antallet af afbrudte livslinier i parallelogrammet ACDB (dvs. alle dødsfald, som indtræffer inden 1-års fødselsdagen).

\bar{T}_1^B kan imidlertid opgøres på en anden måde. Denne metode bruges, når C-gruppabetragtningen anvendes i forbindelse med aldre, som ligger ud over de første leveår. Samtidig indføres ved den anden metode en yderligere opspaltning af dødsfaldene, der senere vil vise sig at være af stor betydning.

I overensstemmelse med vores oprindelige forudsætning om observation af generationens størrelse ved hvert årsskifte, har vi kendskab til antallet af levende individer ved begyndelsen af året $T+1$, (dvs. antallet af livslinier, som skærer liniestykket BC i figur 3.2). Vi ønsker nu på grundlag heraf at beregne, hvor mange af generationens individer, der opnår at fylde et år (dvs. antallet af livslinier, som skærer linjen CD). Denne størrelse er identisk med antallet af livslinier, som overskærer liniestykket BC minus antallet af afbrudte linier i trekant BCD. Dødsfaldene i trekanten afgrænses på grundlag af fødselsår, dødsår og dødsalder og betegnes på følgende måde



Figur 3.4 C-gruppe af døde.

$$\overline{\pi}_{0,1}^{D(\overline{T+1})}$$

nemlig de individer fra generationen fra år T , som døde i alderen mellem 0 og 1 år i kalenderåret $T+1$.

Antal étårs fødselsdage for generationen kan da beregnes som

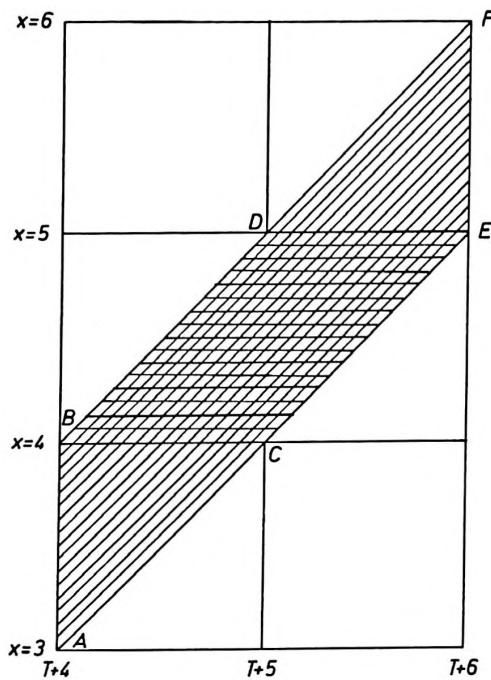
$$T^B_1 = \overline{\pi}_{0,1}^B - \overline{\pi}_{0,1}^{D(\overline{T+1})} \quad (3.26)$$

Den nævnte trekant benævnes en elementartrekant og kræver alt-så til sin afgrænsning tre oplysninger om dødsfaldet i modsætning til B- og C-grupper, der kun krævede to oplysninger. B-gruppen krævede oplysning om fødselsår og dødsår, medens C-gruppen blev afgrænset ved hjælp af fødselsår og dødsalder. Da elementartrekantens døde har påhæftet alle disse oplysninger, er man i stand til at fordele dødsfaldene på B- og C-grupper, hvis dødsfaldene i forvejen er splittet op på elementartrekanter.

Her har vi kun betragtet anvendelsen af C-gruppen af døde i forbindelse med generationens to første leveår. Men C-gruppen kan naturligvis anvendes i forbindelse med samtlige aldre, således at beregningen af samtlige dødshyppigheder finder sted på grundlag af C-gruppen.

Den generelle formel for beregningen af dødshyppigheden for $k = 1$ bliver (se figur 3.4)

$$a_{x,x+1} = \frac{\overline{\pi}_{x,x+1}^D}{\overline{\pi}_x^B} \quad (3.27)$$



Figur 3.5 B- og C-grupper af døde.

Hvilken forskel er der nu mellem de dødshyppigheder, som base-
res på henholdsvis B- og C-grupper af døde?

Ud over at anvendelsen af B-grupper medfører en vis unøjagtig-
hed på grund af interpolationen, adskiller de to dødshyppigheder
sig fra hinanden, fordi observationsperioden er forskellig. Det
kan let indsese ved hjælp af ovenstående udsnit af Lexis' skema,
som viser generationens livsforløb fra $T+4$ til $T+6$, hvor vi bereg-
ner $q_{4,5}$ på grundlag af henholdsvis en B- og en C-gruppe af døde.
(Se figur 3.5).

Dødshyppighedens beregning ved hjælp af B-gruppen sker ved at
udregne dels forholdet mellem antallet af døde i parallelogrammet
ABDC og bestandens størrelse ved begyndelsen af året $T+4$ og dels
forholdet mellem antallet af døde i parallelogrammet CDFE og be-
standens størrelse ved begyndelsen af året $T+5$ og derefter tage
middeltallet af disse to brøker. Beregningen af dødshyppigheden
sker således på grundlag af dødsfaldene i parallelogrammet ABFE.

Fastlæggelsen af dødshyppigheden ved hjælp af C-gruppen foretages gennem en beregning af forholdet mellem antallet af døde i parallelogrammet BDEC og antallet af individer fra generationen, som opnår 4-års fødselsdagen (dvs. antallet af livslinier, som overskærer liniestykket BC). Beregningen af denne dødshyppighed baseres således på begivenhedsforløbet i parallelogrammet BDEC, der kun omfatter en del af parallelogrammet ABFE, som fandt anvendelse ved beregningen på grundlag af B-grupperne. De to parallelogrammer har således kun det dobbeltskraverede areal til fælles.

Da de to metoder for samme alder baseres på dødsfald fra hver sit begivenhedsfelt, vil de resultater, som de to metoder fører frem til, i almindelighed afvige lidt fra hinanden.

Foruden B- og C-grupper af døde kan man danne en tredie gruppe af døde, nemlig den såkaldte A-gruppe. Introduktionen af A-gruppen sker lettest i forbindelse med beregningen af dødshyppigheden for præcis 0-årige.

Hvis der f.eks. for dødsfaldenes vedkommende ikke foreligger oplysning om fødselsår, men kun om dødsår og dødsalder, ville vi i forbindelse med beregningen af $q_{0,1}$ blot være i stand til at placere dødsfaldene i firkant AA'CB (se figur 3.2), dvs. $D_{0,1}^{(T)}$. Dette betegnes som en A-gruppe af døde.¹²⁾ Under disse forudsætninger er der kun mulighed for at anvende følgende relation til et skøn over $q_{0,1}$

$$q_{0,1} = \frac{D_{0,1}^{(T)}}{T_0^B} \quad (3.28)$$
13)

Relationen opfylder imidlertid ikke kravet om fuldstændig korrespondance mellem tæller og nævner. Døde i trekant AA'C vil hidrøre fra generationen fra år T-1, som jo ikke indgår i nævneren, medens døde i trekant BCD ikke indgår i tælleren, selv om de medregnes i nævneren. Derfor kan relationen kun under bestemte forudsætninger anvendes til at give et akceptabelt skøn over dødelighed.

12) A-gruppen repræsenterer blot den sidste parvise kombination af de tre kriterier; fødselsår, dødsalder og dødsår.

13) Denne relation anvendes næsten altid til årlige beregninger af dødeligheden i det første leveår (spædbørnsdødeligheden).

den i det første leveår. Hvis relationen skal give et akceptabelt skøn over spædbørnsdødeligheden i det første leveår, forudsætter det, at $\underline{T}_{-1}B_0$ og $\overline{T}B_0$ er af nogenlunde samme størrelse. Hvis f.eks. $\underline{T}_{-1}B_0$ er væsentlig større end $\overline{T}B_0$, vil der alene af den grund optræde et betydeligt antal døde i trekant AA'C i forhold til nævneren ($\overline{T}B_0$), hvorfor beregningen vil overvurdere dødeligheden.

Det er klart, at vi ikke ved hjælp af denne metode kan få et billede af spædbørnsdødeligheden for generationen fra år T, da vort observationsfelt ikke er parallelogrammet ACDB, men derimod firkant AA'CB.

A-gruppebetragtningen kan naturligvis udstrækkes til andre aldre. Det er imidlertid først og fremmest aktuelt i forbindelse med konstruktionen af overlevelsestavler på kalenderårsbasis, hvorfor en mere indgående behandling af A-gruppen vil blive udkudt til kapitel 4.

Lad os til slut resumere, hvilke kendeteogn der knytter sig til de tre forskellige grupper af døde:

A-gruppen: Dødsår og dødsalder



B-gruppen: Fødselsår og dødsår



C-gruppen: Fødselsår og dødsalder



I det foregående har vi hele tiden arbejdet med årsgenerationer og dødsfald i enkelte alders- eller kalenderår. Disse betragtninger kan umiddelbart udstrækkes til at gælde for en samling af generationer, f.eks. alle levendefødte i et 5-år, ligesom man kan anvende A-, B- og C-grupper, der baseres på tidsperioder og aldre som er større eller mindre end 1 år.

3.2b Åben befolkning

Her skal endelig behandles den situation, hvor generationen fødes jævnt over året og gennem hele sit livsforløb modtager indvandring og afgiver udvandring. Hermed er vi nået frem til forudsætninger, som ligger op ad dem, vi møder i virkelighedens verden.

Ligesom vi i sidste afsnit definerede A-, B- og C-grupper af døde samt døde fordelt på elementartrekanter, kan nøjagtig det samme gøres for ind- og udvandrede, således at vi for generationen fra år T kan fordele såvel døde som ind- og udvandrede på A-, B- og C-grupper samt elementartrekanter.

Da vi forudsætter en åben befolkning, er det - som vist i afsnit 3.1b - ikke muligt at beregne dødshyppighederne direkte efter (2.3), hvorfor vi først må beregne $m_{x, x+k}$. Beregningen af $m_{x, x+k}$ og dermed af $q_{x, x+k}$ finder sted ved en kombination af resultaterne i afsnit 3.1b og 3.2a. Under forudsætning af, at bevægelserne foregår jævnt i de betragtede perioder, sker beregningen af $m_{x, x+k}$ på grundlag af henholdsvis B- og C-grupper for $k = 1$ efter følgende formler:

B-gruppen (se figur 3.6)

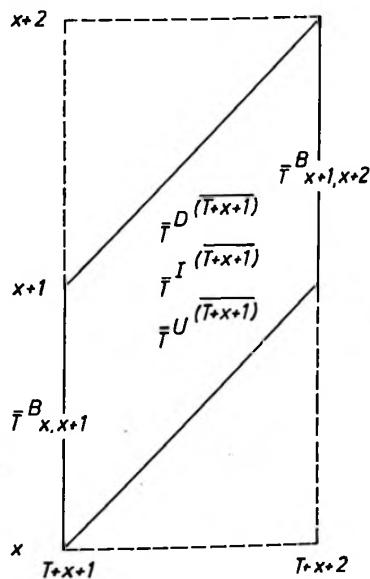
$$m_{x+\frac{1}{2}, x+1\frac{1}{2}} = \frac{\bar{T}^D^{(\bar{T}+x+1)}}{\bar{T}^B_{x, x+1} + \frac{1}{2}(\bar{T}^I^{(\bar{T}+x+1)} - \bar{T}^U^{(\bar{T}+x+1)} - \bar{T}^D^{(\bar{T}+x+1)})} \quad (3.29)$$

C-gruppen (se figur 3.7)

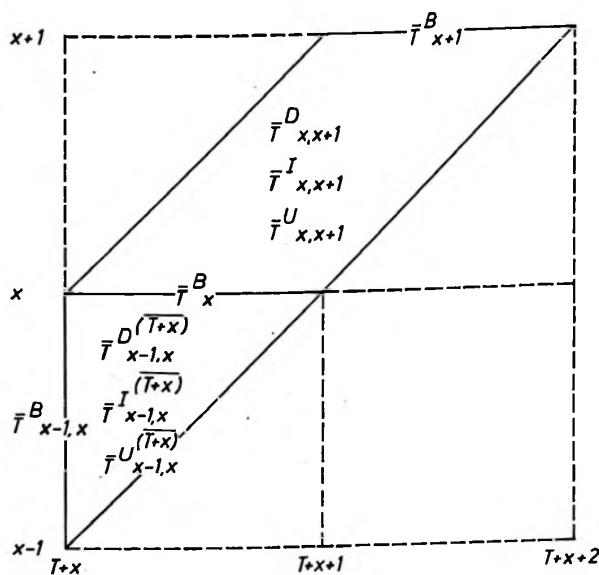
$$m_{x, x+1} = \frac{\bar{T}^D_{x, x+1}}{\bar{T}^B_x + \frac{1}{2}(\bar{T}^I_{x, x+1} - \bar{T}^U_{x, x+1} - \bar{T}^D_{x, x+1})} \quad (3.30)$$

idet \bar{T}^B_x beregnes efter formlen

$$\bar{T}^B_x = \bar{T}^B_{x-1, x} - \bar{T}^D_{x-1, x} + \bar{T}^I_{x-1, x} - \bar{T}^U_{x-1, x} \quad (3.31)$$



Figur 3.6 B-gruppe af døde, ind- og udvandrede.



Figur 3.7 C-gruppe og elementartrekant af døde, ind- og udvandrede.

Behandlingen af A-gruppen udskydes til næste kapitel, der omhandler kalenderårsprincippet.

I afsnit 3.1b blev det påvist, at gennemlevet tid for en bestand i løbet af et år er identisk med gennemsnittet af bestandens størrelse ved periodens begyndelse og slutning, hvis samtlige bevægelser foregår jævnt gennem perioden (3.18). Dette kan udnyttes i forbindelse med (3.29), og vi får da

$$m_{x+\frac{1}{2}, x+1\frac{1}{2}} = \frac{\bar{T}^D(\bar{T}+x+1)}{\frac{1}{2}(\bar{T}^B_{x,x+1} + \bar{T}^B_{x+1,x+2})} \quad (3.32)$$

På denne måde kan gennemlevet tid for B-gruppen beregnes uden kendskab til bevægelserne, hvis blot man har sikkerhed for, at bevægelserne foregår nogenlunde jævnt gennem den betragtede periode.

Efter beregningen af $m_{x,x+k}$ transformeres denne til $q_{x,x+k}$, hvorefter overlevelsesstavlen og de øvrige mål for generationens dødelighed kan beregnes.

Da forudsætningen om, at bevægelserne foregår jævnt gennem perioden, ikke er opfyldt for $0 \leq x \leq 1$, kan man ikke anvende formlerne i indeværende afsnit i det første leveår. I stedet for anvendes (3.23) eller (3.28) til en direkte beregning af $q_{0,1}$, idet man undlader at tage hensyn til vandringerne. Dette er i almindelighed tilladeligt, fordi nettvandringer er af ringe betydning i det første leveår.

4 KALENDERÅRSPRINCIPPET

I hele kapitel 3 har vi baseret vore betragtninger på en enkelt generation, hvis livsforløb vi fulgte, og hvis overlevelsestavle vi søgte at konstruere. I stedet for at vælge en enkelt generation, kan man lægge et enkelt kalenderår til grund for konstruktionen af overlevelsestavlen. I det første tilfælde taler vi om generationsprincippet og i det andet tilfælde om kalenderårsprincippet. Forskellen mellem de to principper vil fremgå ved en betragtning af Lexis' skema (figur 4.1).

Skemaet er givet et konkret indhold, idet skemaet dækker tidsperioden 1.1.1940 - 1.1.1960 samt aldrerne 0 til 20 år, således at vi får livsforløbet for den del af befolkningen, som i nævnte tidsperiode befandt sig i aldrerne 0 - 19 år.

Hvis vi på grundlag af indsatte oplysninger i dette skema beregner dødshyppighederne og overlevelsestavlen for den generation, som er født i 1940, vil det ske på grundlag af begivenhedsforløbet i trapez AIJB.¹⁾ Det betyder, at beregningen af dødshyppigheden for hver enkeltalder sker på basis af dødelighedsforholdene i forskellige tidsperioder. F.eks. vil beregningen af dødshyppigheden for 0-årige være baseret på dødelighedsforholdene i 1940 og 1941 (C-gruppen ACDB), medens dødshyppigheden for 10-årige fastlægges på grundlag af dødelighedsforholdene i 1950 og 1951 (C-gruppen EGHF). Forskellen mellem $q_{0,1}$ og $q_{10,11}$ kan derfor både skyldes dødelighedens ændring med alderen og tiden. Ønsket om at eliminere tidsvariationen (dødelighedens sekulærvariation) og dermed isolere dødelighedens aldersvariation, fører til konstruktion af en overlevelsestavle, som baseres på kalenderårsprincippet.

1) På grund af periodeafgrænsningen er vi naturligvis kun i stand til at konstruere overlevelsestavlen for den første del af generationens livsforløb. En afsluttet overlevelsestavle for generationen vil for $c = 100$ først kunne konstrueres efter år 2040.

Behandlingen af A-gruppen udskydes til næste kapitel, der omhandler kalenderårsprincippet.

I afsnit 3.1b blev det påvist, at gennemlevet tid for en bestand i løbet af et år er identisk med gennemsnittet af bestandens størrelse ved periodens begyndelse og slutning, hvis samtlige bevægelser foregår jævnt gennem perioden (3.18). Dette kan udnyttes i forbindelse med (3.29), og vi får da

$$m_{x+\frac{1}{2}, x+1\frac{1}{2}} = \frac{\bar{T}^D^{(\overline{T+x+1})}}{\frac{1}{2}(\bar{T}^B_{x, x+1} + \bar{T}^B_{x+1, x+2})} \quad (3.32)$$

På denne måde kan gennemlevet tid for B-gruppen beregnes uden kendskab til bevægelserne, hvis blot man har sikkerhed for, at bevægelserne foregår nogenlunde jævnt gennem den betragtede periode.

Efter beregningen af $m_{x, x+k}$ transformeres denne til $a_{x, x+k}$, hvorefter overlevelsestavlen og de øvrige mål for generationens dødelighed kan beregnes.

Da forudsætningen om, at bevægelserne foregår jævnt gennem perioden, ikke er opfyldt for $0 \leq x \leq 1$, kan man ikke anvende formlerne i indeværende afsnit i det første leveår. I stedet for anvendes (3.23) eller (3.28) til en direkte beregning af $a_{0,1}$, idet man undlader at tage hensyn til vandringerne. Dette er i almindelighed tilladeligt, fordi nettovandringer er af ringe betydning i det første leveår.

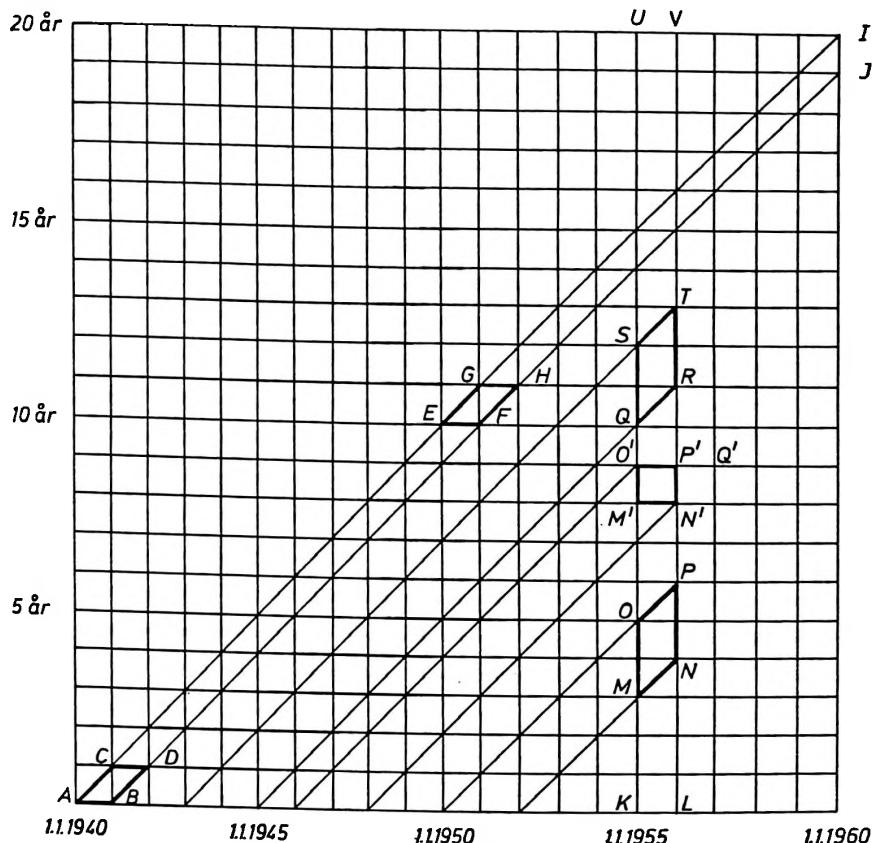
4 KALENDERÅRSPRINCIPPET

I hele kapitel 3 har vi baseret vore betragtninger på en enkelt generation, hvis livsforløb vi fulgte, og hvis overlevelsestavle vi søgte at konstruere. I stedet for at vælge en enkelt generation, kan man lægge et enkelt kalenderår til grund for konstruktionen af overlevelsestavlen. I det første tilfælde taler vi om generationsprincippet og i det andet tilfælde om kalenderårsprincippet. Forskellen mellem de to principper vil fremgå ved en betragtning af Lexis' skema (figur 4.1).

Skemaet er givet et konkret indhold, idet skemaet dækker tidsperioden 1.1.1940 - 1.1.1960 samt aldrerne 0 til 20 år, således at vi får livsforløbet for den del af befolkningen, som i nævnte tidsperiode befandt sig i aldrerne 0 - 19 år.

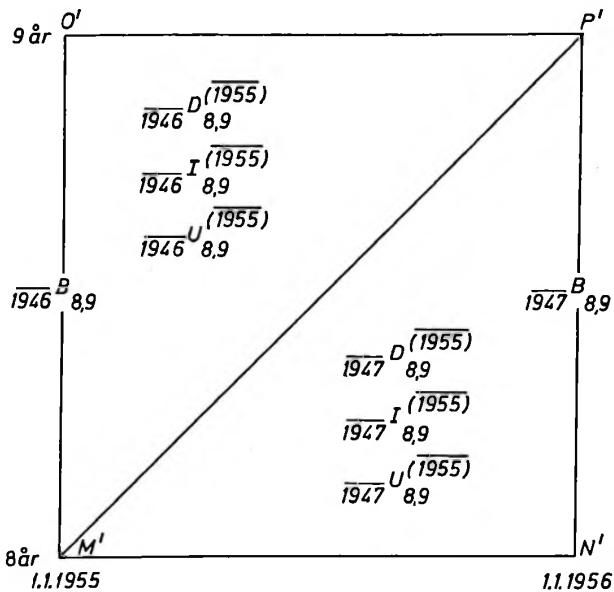
Hvis vi på grundlag af indsatte oplysninger i dette skema beregner dødshyppighederne og overlevelsestavlen for den generation, som er født i 1940, vil det ske på grundlag af begivenhedsforløbet i trapez AIJB.¹⁾ Det betyder, at beregningen af dødshyppigheden for hver enkelt alder sker på basis af dødelighedsforholdene i forskellige tidsperioder. F.eks. vil beregningen af dødshyppigheden for 0-årige være baseret på dødelighedsforholdene i 1940 og 1941 (C-gruppen ACDB), medens dødshyppigheden for 10-årige fastlægges på grundlag af dødelighedsforholdene i 1950 og 1951 (C-gruppen EGHF). Forskellen mellem $q_{0,1}$ og $q_{10,11}$ kan derfor både skyldes dødelighedens ændring med alderen og tiden. Ønsket om at eliminere tidsvariationen (dødelighedens sekulærvariation) og dermed isolere dødelighedens aldersvariation, fører til konstruktion af en overlevelsestavle, som baseres på kalenderårsprincippet.

1) På grund af periodeafgrænsningen er vi naturligvis kun i stand til at konstruere overlevelsestavlen for den første del af generationens livsforløb. En afsluttet overlevelsestavle for generationen vil for $c = 100$ først kunne konstrueres efter år 2040.



Figur 4.1 Generations- og kalenderårsprincipippet.

Kalenderårsprincipippet indebærer, at man konstruerer sin overlevelsestavle på grundlag af observationer, som f.eks. alle hidrører fra et enkelt kalenderår. Hvis f.eks. vi skal konstruere en overlevelsestavle for året 1955, vil dette ske på grundlag af begivenhederne i rektanglet KUVL. Alle dødshyppighederne er dermed baseret på dødelighedsforholdene i samme tidsperiode, således at vi principielt skulle få dødelighedens rene aldersvariation frem. Men nu foretages konstruktionen af overlevelsestavlen ved at stykke erfaringerne fra forskellige generationer sammen. Hvis vi f.eks. baserer os på B-grupper af døde, bliver dødshyppigheden for 4-årige beregnet på grundlag af generationerne fra 1950 og 1951 (B-grup-



Figur 4.2 A-gruppe og elementartrekant af døde, ind- og udvandrede.

perne i parallelogrammet MOPN), medens dødshyppigheden for 11-årigge bestemmes ved hjælp af dødsfaldene blandt generationerne fra 1943 og 1944 (B-grupperne i parallelogrammet QSTR).

Det indses umiddelbart, at kalenderårsprincippet intet nyt medfører med hensyn til konstruktionsteknikken.

I stedet for at anvende B-grupper af døde kan man i forbindelse med kalenderårsprincippet anvende A-grupper af døde i situationer, hvor man for dødsfaldenes vedkommende kun besidder oplysninger om dødsår og dødsalder.

I figur 4.2 er vist den A-gruppe, som omfatter bevægelserne for 8-årige i 1955. (Firkant M'O'P'N' i figur 4.1).

Det samlede antal døde i A-gruppen

$$\overline{1946}^D(1955)_{8,9} + \overline{1947}^D(1955)_{8,9} = \overline{n}^{(1955)}_{8,9}$$

skal i lighed med anvendelse af B- og C-gruppen af døde i forbindelse med åbne befolkninger, sættes i forhold til gennemlevet tid. Men på grund af den manglende korrespondance mellem antallet af

døde, ind- og udvandrede og bestanden ved periodens begyndelse ($\overline{1946}^B_{8,9}$)²⁾ er den gennemlevede tid i A-gruppen - selv under forudsætning af jævn til- og afgang fra bestanden - ikke identisk med

$$\overline{1946}^B_{8,9} - \frac{1}{2}\overline{D}_{8,9}^{(1955)} + \frac{1}{2}\overline{I}_{8,9}^{(1955)} - \frac{1}{2}\overline{U}_{8,9}^{(1955)} \quad 3)$$

Hvis f.eks. generationen fra 1947 er væsentlig større end generationen fra 1946, vil bidraget til gennemlevet tid fra det større antal levendefødte i 1947 (trekant M'P'N') kun i meget begrænset omfang indgå i beregningen, nemlig blot gennem størrelserne

$$\overline{1947}^D_{8,9}^{(1955)}, \overline{1947}^I_{8,9}^{(1955)} \text{ og } \overline{1947}^U_{8,9}^{(1955)}$$

Da hver af disse størrelser for næsten alle aldre er ret ubetydelige i forholdet til bestanden, bliver indflydelsen på gennemlevet tid temmelig begrænset, hvorfor en anvendelse af formlen kan føre til misvisende resultater. Derimod vil gennemsnittet af 8-årigé ved periodens begyndelse og slutning under ret generelle betingelser give et godt skøn over gennemlevet tid, fordi begge de generationer, som bidrager til gennemlevet tid i A-gruppen, indgår med samme vægt.

Formlen for beregningen af dødskvotienten ved hjælp af en A-gruppe af døde bliver da

$$m_{8,9} = \frac{\overline{D}_{8,9}^{(1955)}}{\frac{1}{2}(\overline{1946}^B_{8,9} + \overline{1947}^B_{8,9})} \quad (4.1)$$

Endelig kan man også anvende C-gruppen af døde til konstruktion af overlevelsesstavler efter kalenderårsprincippet. Men i så tilfælde kan det ikke ske for kalenderåret 1955 alene, men må baseres

2) F.eks. hidrører alle døde i trekant M'P'N' fra levendefødte fra 1947.

3) Se formel (3.29) og (3.30).

på observationer, som hidrører både fra 1955 og 1956. Hvis vi fortsat holder os til de 8-årige, bliver der således tale om C-gruppen M'P'Q'N'. (Se figur 4.1).

Konstruktionen af overlevelsestavler efter kalenderårsprincippet kan naturligvis ske for andre værdier af k end $k = 1$ (f.eks. $k = 5$), ligesom observationsperioden kan omfatte flere på hinanden følgende kalenderår, f.eks. 5 år.

Generelt gælder det, at kalenderårsprincippet indebærer en kort observationsperiode, hvor observationerne hidrører fra alle i befolkningen forekommende generationer, dvs. omkring 100. Den overlevelsestavle, som konstrueres på grundlag af kalenderårsprincippet, er en ren abstraktion. En sådan overlevelsestavle viser, hvorledes en bestand af nyfødte vil uddø, hvis de uddør i overensstemmelse med dødshyppighederne i en given periode, og dødeligheden er den eneste afgangsårsag.

Motsat gælder det om generationsprincippet, at observationerne her hidrører fra en enkelt eller få generationer, medens observationsperioden er lang, idet den nemlig strækker sig over de pågældende generationers levetid, dvs. ca. 100 år. Den generationsbetingede overlevelsestavle viser, hvorledes en bestemt generation ville reduceres, hvis den under sit livsforløb kun var utsat for afgang på grund af dødelighed.

Man ser ofte, at de to principper sammenlignes og vurderes, hvorefter det ene generelt foretrækkes frem for det andet. Dette er principielt forkert. Det ene princip kan ikke generelt foretrækkes frem for det andet, da de to principper giver svar på forskellige spørgsmål og derfor er relevante i forbindelse med hvert sæt af problemer. Ofte er man nødt til at anvende dem begge for at opnå en udtømmende beskrivelse af dødelighedsforholdene, idet en anvendelse af kalenderårsprincippet ikke altid giver dødelighedens rene aldersvariation.

Lad os nu tænke os, at vi på grundlag af kalenderårsprincippet finder en særlig lav dødelighed i en bestemt aldersgruppe. Dette behøver imidlertid ikke at være ensbetydende med, at den pågældende aldersgruppe generelt set optræder med en lille dødelighed i forhold til de omkringliggende aldersgrupper. De generationer, som har dannet grundlag for beregningen af den lave dødelighed i den pågældende observationsperiode, kan nemlig i en tidligere pe-

døde, ind- og udvandrede og bestanden ved periodens begyndelse ($\overline{1946}^B_{8,9}$)²⁾ er den gennemlevede tid i A-gruppen - selv under forudsætning af jævn til- og afgang fra bestanden - ikke identisk med

$$\overline{1946}^B_{8,9} - \frac{1}{2}\overline{D}_{8,9}^{(1955)} + \frac{1}{2}\overline{I}_{8,9}^{(1955)} - \frac{1}{2}\overline{U}_{8,9}^{(1955)} \quad ^3)$$

Hvis f.eks. generationen fra 1947 er væsentlig større end generationen fra 1946, vil bidraget til gennemlevet tid fra det større antal levendefødte i 1947 (trekant M'P'N') kun i meget begrænset omfang indgå i beregningen, nemlig blot gennem størrelserne

$$\overline{1947}^D_{8,9}^{(1955)}, \overline{1947}^I_{8,9}^{(1955)} \text{ og } \overline{1947}^U_{8,9}^{(1955)}$$

Da hver af disse størrelser for næsten alle aldre er ret ubetydelige i forholdet til bestanden, bliver indflydelsen på gennemlevet tid temmelig begrænset, hvorfor en anvendelse af formlen kan føre til misvisende resultater. Derimod vil gennemsnittet af 8-årigе ved periodens begyndelse og slutning under ret generelle betingelser give et godt skøn over gennemlevet tid, fordi begge de generationer, som bidrager til gennemlevet tid i A-gruppen, indgår med samme vægt.

Formlen for beregningen af dødskvotienten ved hjælp af en A-gruppe af døde bliver da

$$m_{8,9} = \frac{\overline{D}_{8,9}^{(1955)}}{\frac{1}{2}(\overline{1946}^B_{8,9} + \overline{1947}^B_{8,9})} \quad (4.1)$$

Endelig kan man også anvende C-gruppen af døde til konstruktion af overlevelsestavler efter kalenderårsprincippet. Men i så tilfælde kan det ikke ske for kalenderåret 1955 alene, men må baseres

2) F.eks. hidrører alle døde i trekant M'P'N' fra levendefødte fra 1947.

3) Se formel (3.29) og (3.30).

på observationer, som hidrører både fra 1955 og 1956. Hvis vi fortsat holder os til de 8-årige, bliver der således tale om C-gruppen M'P'Q'N'. (Se figur 4.1).

Konstruktionen af overlevelsestavler efter kalenderårsprincippet kan naturligvis ske for andre værdier af k end $k = 1$ (f.eks. $k = 5$), ligesom observationsperioden kan omfatte flere på hinanden følgende kalenderår, f.eks. 5 år.

Generelt gælder det, at kalenderårsprincippet indebærer en kort observationsperiode, hvor observationerne hidrører fra alle i befolkningen forekommende generationer, dvs. omkring 100. Den overlevelsestavle, som konstrueres på grundlag af kalenderårsprincippet, er en ren abstraktion. En sådan overlevelsestavle viser, hvorledes en bestand af nyfødte vil uddø, hvis de uddør i overensstemmelse med dødshyppighederne i en given periode, og dødeligheden er den eneste afgangssårsag.

Motsat gælder det om generationsprincippet, at observationerne her hidrører fra en enkelt eller få generationer, medens observationsperioden er lang, idet den nemlig strækker sig over de pågældende generationers levetid, dvs. ca. 100 år. Den generationsbetingede overlevelsestavle viser, hvorledes en bestemt generation ville reduceres, hvis den under sit livsforløb kun var utsat for afgang på grund af dødelighed.

Man ser ofte, at de to principper sammenlignes og vurderes, hvorefter det ene generelt foretrækkes frem for det andet. Dette er principielt forkert. Det ene princip kan ikke generelt foretrækkes frem for det andet, da de to principper giver svar på forskellige spørgsmål og derfor er relevante i forbindelse med hvert sæt af problemer. Ofte er man nødt til at anvende dem begge for at opnå en udtømmende beskrivelse af dødelighedsforholdene, idet en anvendelse af kalenderårsprincippet ikke altid giver dødelighedens rene aldersvariation.

Lad os nu tænke os, at vi på grundlag af kalenderårsprincippet finder en særlig lav dødelighed i en bestemt aldersgruppe. Dette behøver imidlertid ikke at være ensbetydende med, at den pågældende aldersgruppe generelt set optræder med en lille dødelighed i forhold til de omkringliggende aldersgrupper. De generationer, som har dannet grundlag for beregningen af den lave dødelighed i den pågældende observationsperiode, kan nemlig i en tidligere pe-

riode have været utsat for særligt vanskelige levevilkår (krige, hungersnød og epidemier), hvorved alle svagelige individer i de pågældende generationer er blevet revet bort, samtidig med at de tiloversblevne er upåvirkede af fortidens dårlige levevilkår. Når de pågældende generationer derfor når frem til vor observationsperiode, vil disse bestå af unormalt få svagelige individer, hvorfor dødeligheden bliver meget lav (døden har taget på forskud).

I dette og lignende tilfælde må begge principper bringes i anvendelse for at sikre en tilstrækkelig dybtgående analyse af dødeligheden, men som det vil blive omtalt i kapitel 9, spiller anvendelsen af generationsprincippet en langt større rolle i forbindelse med fertilitetsanalyser.

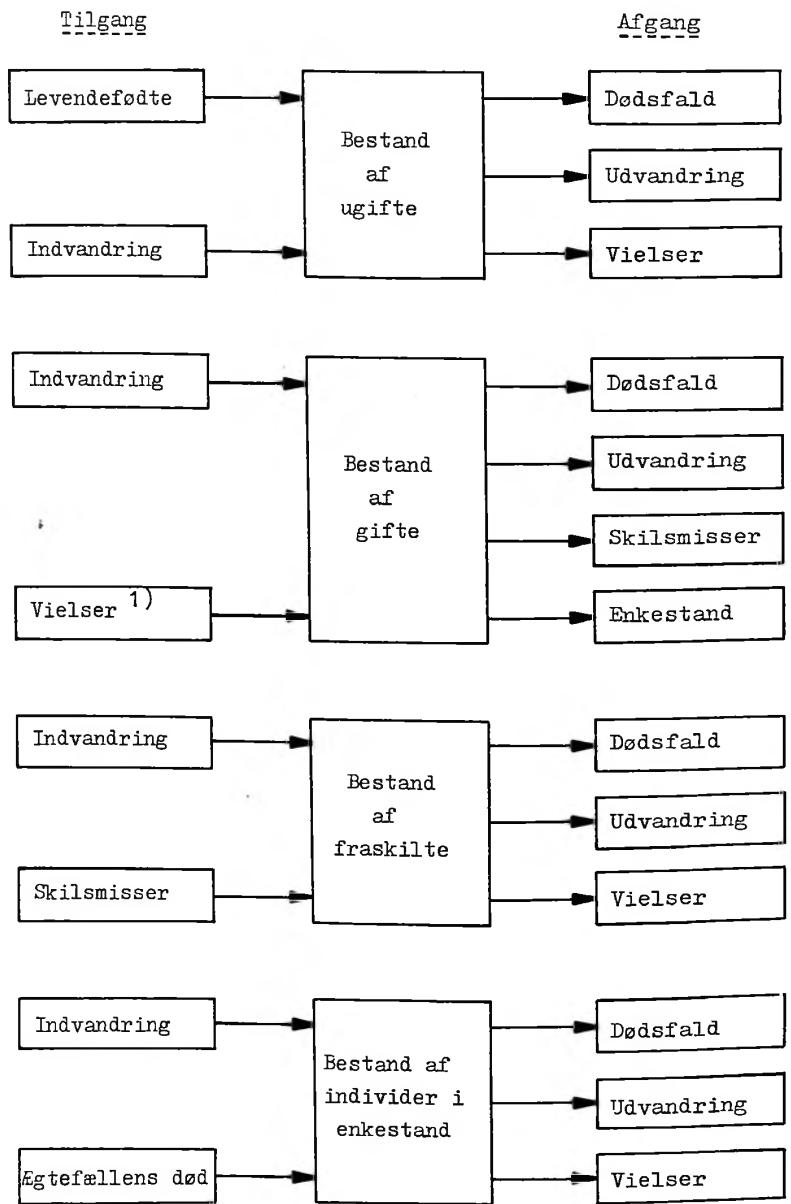
5 OVERLEVELSESTAVLER FOR SPECIELLE BEFOLKNINGSGRUPPER

Hidtil har vi betragtet overlevelsestavlen og konstruktionen af denne i forbindelse med hele befolkningen inden for et givet geografisk område, idet befolkningen var genstand for ind- og udvandring (åben befolkning). Vi vil nu undersøge, hvorledes vi kan konstruere overlevelsestavler for bestemte segmenter af befolkningen, hvilket er aktuelt i det omfang, dødeligheden er forskellig i de forskellige dele af befolkningen.

Den første opdeling, som trænger sig på, er en deling efter køn, idet alle erfaringer viser, at dødeligheden er forskellig for mænd og kvinder. En sådan opdeling volder ingen konstruktionsmæssige problemer, fordi der ikke er nogen overgang mellem de to grupper. En overlevelsestavle for såvel mænd som kvinder kræver blot en fordeling af bestante og bevægelser efter køn, hvorefter behandlingen følger den tidlige skitserede fremgangsmåde.

Det er imidlertid ikke tilfældet, når der foretages en opdeling af befolkningen i grupper, mellem hvilke der sker bevægelser. Som eksempel herpå kan vi tage en opdeling af befolkningen efter civilstand (ugifte, gifte, fraskilte og enker). Mellem disse grupper foregår der bevægelser, idet individer forlader gruppen af ugifte og indgår i gruppen af gifte, som igen afgiver til og modtager fra de to sidste grupper. Bestanden af f.eks. gifte ved begyndelsen af en bestemt periode vil derfor i løbet af perioden ændres ikke alene som følge af dødsfald og geografisk ind- og udvandring, men også på grund af tilgangen af viede samt afgangsen af fraskilte og individer, som overgår i enkestand på grund af ægtefællens død.

Nedenstående oversigt viser de bevægelser, der foregår gennem en periode i forbindelse med hver af de fire civilstandsgrupper.



1) Omfatter naturligvis både vielser blandt ugifte, fraskilte og personer i enkestand.

Kendskab til antallet af individer i de forskellige til- og afgangskategorier i løbet af f.eks. ét år, samt bestandens størrelse ved årets begyndelse, vil for alle 4 civilstandsgrupper muliggøre en nøjagtig bogholderimæssig opgørelse af bestandens størrelse ved begyndelsen af det næste år.

Hvis vi f.eks. i forbindelse med bestanden af gifte indfører følgende symboler:

$BG^{(T)}$	Bestanden af gifte ved begyndelsen af året T.
$BG^{(T+1)}$	Bestanden af gifte ved begyndelsen af året T+1.
$IG^{(\bar{T})}$	Gifte individer, som indvandrer i løbet af året T.
$UG^{(\bar{T})}$	Gifte individer, som udvandrer i løbet af året T.
$DG^{(\bar{T})}$	Gifte individer, som afgår ved døden i løbet af året T.
$v^{(\bar{T})}$	Antal viede i løbet af året T.
$s^{(\bar{T})}$	Antal fraskilte i løbet af året T.
$e^{(\bar{T})}$	Antal individer, som overgår til enkestand i løbet af året T.

fås

$$BG^{(T+1)} = BG^{(T)} + [IG^{(\bar{T})} + v^{(\bar{T})}] - [DG^{(\bar{T})} + UG^{(\bar{T})} + s^{(\bar{T})} + e^{(\bar{T})}] \quad (5.1)$$

Samme forbindelse vil naturligvis også eksistere i de forskellige aldersklasser i forbindelse med en opdeling af bevægelserne på B- og C-grupper.

Når vi på grundlag af disse observationer skal konstruere overlevelsestavlen for gruppen af gifte, kan vi ikke beregne dødshypigheden direkte ved at anvende $DG^{(\bar{T})}$ som tæller og $BG^{(T)}$ som nævner på grund af den manglende korrespondance mellem de to størrelser. $DG^{(\bar{T})}$ vil nemlig indeholde dødsfald blandt indvandrede og viede i årets løb, størrelser som ikke indgår i nævneren. Omvendt vil tælleren mangle dødsfald blandt de individer, som udtræder af bestanden i årets løb, nemlig udvandrede, fraskilte og individer, som overgår i enkestand. Helt analogt med fremgangsmåden for befolkninger, som er genstand for geografisk ind- og udvandring,

lægger vi også her gennemlevet tid til grund for beregningen af dødelighedsmålene, således at vi først beregner dødkvotienten og derefter dødshyppigheden. Beregningen af gennemlevet tid sker ved at betragte tilgangen af viede på linie med den geografiske indvandring og afgangen på grund af skilsmisser og overgang til enekstand på samme måde som dødsfald og udvandring. Under forudsætning af, at til- og afgangen foregår jævnt gennem året, skal halvdelen af tilgangen medregnes i nævneren, medens halvdelen af afgangen skal fradrages.

For en bestand af gifte fås da følgende formel til beregning af dødkvotienten

$$\begin{aligned} m(\bar{T}) &= \frac{DG(\bar{T})}{BG(T) + \frac{1}{2}[IG(\bar{T}) + V(\bar{T})] - \frac{1}{2}[DG(\bar{T}) + UG(\bar{T}) + S(\bar{T}) + E(\bar{T})]} \\ &= \frac{DG(\bar{T})}{\frac{1}{2}[BG(T) + BG(T+1)]} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Selv beregningen af overlevelsestavlen for gifte personer på grundlag af konkrete demografiske data følger nøje de retningslinier, som vi anvender ved beregningen af overlevelsestavlen for befolkningen som helhed. Hvis vi stadig baserer os på kalenderår og 1-års aldersklasser, kræves en fordeling af bestanden af gifte ved begyndelsen af hvert år på 1-års aldersklasser og en opdeling af samtlige til- og afgangskategorier på elementartrekanter ved hjælp af oplysninger om fødselsår, begivenhedsår og alder for hver enkelt bevægelseskategori. På grundlag heraf kan der dannes A-, B- og C-grupper, som hver for sig kan anvendes til en beregning af overlevelsestavlen, som igen kan baseres på såvel generations- som kalenderårsprincippet.

For de øvrige grupper, nemlig ugifte, fraskilte og personer i enekstand, sker beregningen af dødkvotienterne også ved at anvende antallet af døde som tæller og gennemlevet tid som nævner. Hvis perioden omfatter ét år, er gennemlevet tid lig bestandens størrelse ved årets begyndelse plus halvdelen af tilgangen (geografisk + anden) minus halvdelen af afgangen (geografisk + anden). Kravene til de konkrete demografiske data samt beregningsteknikken er i

disse tilfælde ganske de samme som i forbindelse med gifte, lige-som man også her kan anvende såvel generations- som kalenderårs-principippet.

I denne forbindelse kan der være grund til at omtale den så-kaldte enkestandstavle, som viser, hvorledes en bestand af gifte reduceres, hvis overgangen til enkestand på grund af ægtefællens død er eneste afgangsårsag. I modsætning til de tavler, som vi indtil nu har omtalt, sker reduktionen i dette tilfælde altså ikke på grund af dødeligheden blandt selve den betragtede bestand, men derimod som følge af en ændring af civilstanden for nogle af bestandens individer. Antallet af disse individer sættes i forhold til gennemlevet tid for bestanden.

Med anvendelse af det tidligere betegnelsessystem beregnes en-kestandskvotienten således på følgende måde

$$\begin{aligned} m(\bar{T}) &= \frac{E(\bar{T})}{BG(T) + \frac{1}{2}[IG(\bar{T}) + V(\bar{T})] - \frac{1}{2}[DG(\bar{T}) + UG(\bar{T}) + S(\bar{T}) + E(\bar{T})]} \\ &= \frac{E(\bar{T})}{\frac{1}{2}[BG(T) + BG(T+1)]} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Konstruktionen af enkestandstavlen kan først påbegyndes ved en alder, hvor gruppen af gifte har nået en vis størrelse, og overgangen til enkestand forekommer med en vis hyppighed. Da meget få personer kommer i enkestand inden 30-års alderen, vil konstruktionen af enkestandstavlen i almindelighed først kunne ske for $x \geq 30$ år.

Vi vil nu gå lidt ind på de problemer, som opstår ved fortolkningen af overlevelsesstavlen, problemer, som er særlig aktuelle i forbindelse med overlevelsesstavler for specielle grupper i befolkningen.

Når vi f.eks. konstruerer en overlevelsesstavle for danske mænd baseret på dødelighedserfaringerne i et givet kalenderår, ønsker vi at få et udtryk for dødelighedsniveauet, som det er bestemt af

levevilkårene²⁾ i Danmark i det pågældende år, således at der kan foretages sammenligninger med andre lande. Hvis befolkningen var lukket, ville overlevelsestavlen fuldt ud opfylde disse krav. Men hvis der foregår en meget betydelig indvandring af individer, som er opvokset under f.eks. ringere levevilkår og således fremtræder med en dårligere sundhedstilstand og dermed større dødelighedsrisiko, vil overlevelsestavlen ikke give et entydigt billede af sammenhængen mellem levevilkår og dødelighed i Danmark. Under disse forudsætninger ville en sammenligning af dødelighedsniveauet med andre lande blive af mere tvivlsom værdi som et middel til at vurdere og sammenligne levevilkårene ved hjælp af dødelighedsniveauets højde. Nu er vandringsomfanget mellem de forskellige lande i dag af ret ringe omfang, ligesom vandringer i det væsentlige foregår mellem lande med nogenlunde samme levevilkår, hvorfor den forstyrrende indflydelse fra denne faktor må antages at være af begrænset størrelse. Men problemet kan være særdeles relevant ved konstruktion af overlevelsestavler for befolkninger i små geografiske områder, hvor den befolkningsmæssige udveksling med naboområderne er betydelig.

Overgangen mellem grupperne er imidlertid af stor betydning i forbindelse med overlevelsestavler for civilstandsgrupperne: gifte, fraskilte og individer i enkestand, da alle disse grupper modtager tilgang udefra. Lad os f.eks. betragte gifte personer. Ved hjælp af konkrete demografiske data kan vi beregne dødskvotienten i hver alder og via transformationen til dødshyppigheder konstruere overlevelsestavlen. Tavlen prætenderer at give udtryk for, hvorledes en bestand af f.eks. gifte kvinder fra en given alder (f.eks. 18 år) vil reduceres, hvis dødeligheden er eneste afgangsårsag. Tanken bag en sådan tavle er jo, at den pågældende civilstand medfører levevilkår, som adskiller sig fra de levevilkår, hvorunder f.eks. ugifte lever. De forskellige levevilkårs indflydelse på dødelighedsniveauet søger man da at vurdere gennem en sammenligning af de to overlevelsestavler.

Overfor en sådan anvendelse af de to overlevelsestavler, må der gøres to vigtige forbehold:

2) I denne forbindelse skal levevilkårene tages i videste forstand, nemlig omfattende næringsveje, kultur, sundhedslovgivning, forsyning med læger og hospitaler m.v.

- a) Når man overalt finder en højere dødelighed blandt ugifte, kan det for en del hænge sammen med, at der finder en udvælgelse sted gennem ægteskabets indgåelse, således at det fortrinsvis er de sundeste individer, som indgår ægteskab.
- b) Overlevelsesstavlen for gifte viser ikke, hvordan en faktisk bestand af personer, som indgår ægteskab f.eks. i 18-års alderen, vil uddø,³⁾ men derimod hvorledes en tænkt bestand vil uddø på basis af dødelighedsniveauet for gifte i forskellige aldre, idet bestanden af gifte i de forskellige aldre er sammensat af individer, som netop har indgået ægteskab, og individer som har været i ægteskab siden deres 18. år. Dødshyppigheden blandt gifte, f.eks. fra det 28. til det 29. år, angiver således ikke slutresultatet af levevilkårene som gift siden 18-års alderen, men derimod slutresultatet for en bestand, hvis individer har været i ægteskab i forskellig tid. Nogle af individerne har levet som ugifte næsten helt frem til dødstidspunktet. Derfor har en del af individerne næsten ikke været underkastet de levevilkår, som følger i ægteskabets kølvand. Dødshyppigheden for en given alder bliver med andre ord et gennemsnit, der blandt andet afhænger af, hvor lang tid de forskellige individer har været i bestanden af gifte i den pågældende alder.

Lignende forhold gør sig gældende for de to andre civilstandsgrupper, altsammen fordi dødelighedens højde i en given alder og så afhænger af levevilkårene i den forudgående periode.

Også for socio-økonomiske grupper, forskellige racer inden for samme land osv., kan det være aktuelt at konstruere overlevelsstavler.

Gennem disse eksempler har vi berørt en af de begrænsninger, som gælder for konstruktionen af overlevelsstavler for givne bestande af individer, nemlig at bestanden ikke må være for åben. Hvor åben den må være afhænger af, hvorledes levevilkårene har været for de individer, som udgør tilgangen i forhold til levevilkårene for den betragtede bestand.

3) Dette gælder, hvad enten man anvender kalenderårs- eller generationsprincippet.

6 ANDRE DØDELIGHEDSMÅL

Når der skal beregnes talmæssige udtryk for dødeligheden i en bestemt befolkningsgruppe, er det meget ofte, at man ikke konstruerer en overlevelsestavle, men indskrænker sig til at beregne de aldersbetingede dødskvotienter.

Den manglende beregning af overlevelsestavlen kan skyldes de forhold, som er nævnt i slutningen af sidste kapitel. Men det kan også hænge sammen med, at den pågældende gruppe kun optræder i så lille et aldersinterval, at en beregning af overlevelsestavlen ville være meningsløs. Hvis man f.eks. undersøger dødeligheden blandt universitetsstuderende, vil en sådan undersøgelse kun omfatte et begrænset antal aldersklasser.

Når man fortrinsvis anvender dødskvotienten som mål, hænger det jo sammen med, at beregningen af denne størrelse kræver så få oplysninger, nemlig blot antallet af døde og bestandens størrelse ved begyndelsen og slutningen af perioden. Dette gælder også selv om bestandens størrelse ved periodens slutning er fremgået af en hel række af til- og afgangskategorier gennem perioden, hvis størrelse vi ikke kender, blot vi kan forudsætte, at bevægelserne er foregået jævnt gennem perioden.

Foruden at beregne de aldersbetingede dødskvotienter, kan vi også beregne dødskvotienter, der er betinget af såvel alder som dødsårsag. Dvs., at man fra alder til alder beregner dødskvotienter ved kun at inddrage de dødsfald, som er forårsaget af en bestemt dødsårsag. Ved hjælp af disse dødskvotienter kan man herefter konstruere en overlevelsestavle, som viser, hvorledes en givne bestand vil uddø, hvis den alene blev reduceret på grund af den pågældende dødsårsag. Man kan naturligvis også beregne de aldersbetingede dødskvotienter og dermed en overlevelsestavle på grundlag af alle dødsårsager under et minus en enkelt (f.eks. can-

cer) og derigennem beregne, hvilken stigning der ville fremkomme i middellevetiden, hvis den pågældende dødsårsag blev afskaffet.

I forbindelse med dødfødte anvender man ofte dødfødtes andel af fødte (levendefødte + dødfødte)¹⁾ som et mål for forekomsten af dødfødte. Dette mål kan i virkeligheden opfattes som en døds- hyppighed for de fødte for $k = 0$.²⁾

I forbindelse med dødeligheden i det første leveår foretages ofte en opsplitning af dødsfaldene efter alder (døde under 24 timer, døde mellem 24 timer og 1 uge osv.). Alle disse størrelser sættes i relation til antallet af levendefødte og vil kunne opfattes som et skøn over $q_{x,x+k}$ for $0 \leq x \leq 1-k$. Hvis dødeligheden i det første leveår er af begrænset størrelse, er approximationen akceptabel. En opdeling af døde i det første leveår efter såvel alder som dødsårsag og en beregning af de samme mål kan blot opfattes som approximationer over dødshyppigheder i forbindelse med overlevelsestavler for hver enkelt dødsårsag.

Specielt i forbindelse med analysen af dødeligheden i det første leveår (spædbørnsdødeligheden) anvendes en lang række opspaltninger af fødte eller levendefødte, f.eks. efter moderens alder eller barnets svangerskabsnummer, hvorefter man for hver af disse kategorier foretager en beregning af dødelighedsniveauet. Dette svarer til, at man påbegynder konstruktionen af en overlevels tavle for hver af de pågældende kategorier.

1) I dette tilfælde vil korrespondancen mellem tæller og nævner være fuldstændig.

2) Målingen af dødeligheden under svangerskabet kan naturligvis også foretages ved at konstruere en overlevelsestavle, der som udgangsbestand har antallet af konceptioner, og hvor den maksimale levealder er ca. 9 måneder.

7 DØDELIGHEDSSAMMENLIGNINGER

7.1 Direkte standardisering

En sammenligning af dødeligheden mellem to forskellige befolkninger, for hvilke der ikke er beregnet en overlevelsesstavle og dermed middellevetiden for 0-årige, kan naturligvis foretages ved, at man alder for alder sammenligner dødkvotienterne.

Da en sådan sammenligning medfører en sammenstilling af et stort antal tal, nemlig et talpar for hver alder, føres man frem til ønsket om at blive i stand til at foretage sammenligningen ved hjælp af blot to tal, der hver for sig giver en karakteristik af dødelighedsniveauet i de to befolkninger.

Den mest nærliggende mulighed er at beregne den summariske dødkvotient for hver af de to befolkninger, dvs. det samlede antal døde divideret med gennemlevet tid for hele bestanden.

Vi vil nu ved hjælp af tabel 7.1 afsløre indholdet af den summariske dødkvotient og på grundlag heraf vurdere målets udsagnskraft og anvendelighed ved dødeligheds sammenligninger.

Tabel 7.1 viser middelfolketallet¹⁾ og antallet af døde i et givet kalenderår fordelt på 1-års aldersklasser for to befolkninger (A-grupper af døde), idet vi sætter den maksimale levealder til 100 år. De følgende ræsonnementer bliver ganske de samme, selv om vi anvender f.eks. 5-års aldersklasser og en anden øvre og nedre aldersgrænse, ligesom også tidsperioden kan vælges helt vilkårligt.

1) Ved middelfolketallet forstås befolkningens gennemsnitlige størrelse i den tidsperiode, som man behandler. Størrelsen beregnes ved at tage middeltallet af befolkningens størrelse ved begyndelsen og slutningen af perioden. Når tidsperioden er 1 år, er middelfolketallet identisk med gennemlevet tid for bestanden.

Tabel 7.1 Direkte standardisering.

Aldersklasse	Befolknings 1				Befolknings 2			
	Middel-folketal (1)	Døde (2)	Dødskyntient (3)	Vægte ²⁾ (4)	Middel-folketal (5)	Døde (6)	Dødskyntient (7)	Vægte ⁴⁾ (8)
0-årlige	$\hat{m}_{0,1}$	$\hat{d}_{0,1}$	$\hat{m}_{0,1}$	$\hat{\alpha}_{0,1}$	$\hat{m}_{0,1}$	$\hat{d}_{0,1}$	$\hat{m}_{0,1}$	$\hat{\alpha}_{0,1}$
1-årlige	$\hat{m}_{1,2}$	$\hat{d}_{1,2}$	$\hat{m}_{1,2}$	$\hat{\alpha}_{1,2}$	$\hat{m}_{1,2}$	$\hat{d}_{1,2}$	$\hat{m}_{1,2}$	$\hat{\alpha}_{1,2}$
:	:	:	:	:	:	:	:	:
99-årlige	$\hat{m}_{99,100}$	$\hat{d}_{99,100}$	$\hat{m}_{99,100}$	$\hat{\alpha}_{99,100}$	$\hat{m}_{99,100}$	$\hat{d}_{99,100}$	$\hat{m}_{99,100}$	$\hat{\alpha}_{99,100}$
Talt	\hat{M}	\hat{D}	\hat{m}	1	\hat{M}	\hat{D}	\hat{m}	1

$$\begin{aligned}
 1) \quad \hat{m}_{x,x+1} &= \frac{\hat{d}_{x,x+1}}{\hat{m}_{x,x+1}} \\
 2) \quad \hat{\alpha}_{x,x+1} &= \frac{\hat{d}_{x,x+1}}{\hat{m}_{x,x+1}} \\
 3) \quad \hat{m}_{x,x+1} &= \frac{\hat{d}_{x,x+1}}{\hat{m}_{x,x+1}} \\
 4) \quad \hat{\alpha}_{x,x+1} &= \frac{\hat{d}_{x,x+1}}{\hat{m}_{x,x+1}}
 \end{aligned}$$

Den summariske dødskvotient for befolkning 1 er identisk med

$$\hat{m} = \frac{\hat{D}}{\hat{M}} = \frac{\hat{D}_{0,1} + \hat{D}_{1,2} + \dots + \hat{D}_{99,100}}{\hat{M}} \quad (7.1)$$

Da

$$\hat{m}_{x,x+1} = \frac{\hat{D}_{x,x+1}}{\hat{M}_{x,x+1}} \quad (7.2)$$

således at

$$\hat{D}_{x,x+1} = \hat{m}_{x,x+1} \cdot \hat{M}_{x,x+1} \quad (7.3)$$

kan (7.1) skrives som følger

$$\hat{m} = \frac{\hat{m}_{0,1} \cdot \hat{M}_{0,1} + \hat{m}_{1,2} \cdot \hat{M}_{1,2} + \dots + \hat{m}_{99,100} \cdot \hat{M}_{99,100}}{\hat{M}} \quad (7.4)$$

$$= \frac{\hat{m}_{0,1}}{\hat{M}} \cdot \hat{M}_{0,1} + \frac{\hat{m}_{1,2}}{\hat{M}} \cdot \hat{M}_{1,2} + \dots + \frac{\hat{m}_{99,100}}{\hat{M}} \cdot \hat{M}_{99,100}$$

Sættes

$$\hat{\alpha}_{x,x+1} = \frac{\hat{M}_{x,x+1}}{\hat{M}} \quad (7.5)$$

fås

$$\hat{m} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{M}_{0,1} + \hat{\alpha}_{1,2} \cdot \hat{M}_{1,2} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{M}_{99,100} \quad (7.6)$$

$$= \sum_{x=0}^{99} \hat{\alpha}_{x,x+1} \cdot \hat{M}_{x,x+1}$$

hvor

$$\sum_{x=0}^{99} \hat{\alpha}_{x,x+1} = 1 \quad (7.7)$$

Dvs., at den summariske dødskvotient er et vejet gennemsnit af de aldersbetingede dødskvotienter, hvor vægtene for de forskellige

aldersklasser er identisk med den andel, som befolkningen i den pågældende aldersklasse udgør af den samlede befolkning. Størrelsen af den summariske dødskvotient afhænger derfor ikke blot af de aldersbetingede dødskvotienter, men også af vægtene størrelse i de forskellige aldre, dvs. befolkningens aldersfordeling.

Sammenligningen af dødelighedsniveauet i de to befolkninger ved hjælp af den summariske dødskvotient sker ved at sammenholde værdien af følgende to udtryk

$$\hat{m} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{m}_{0,1} + \hat{\alpha}_{1,2} \cdot \hat{m}_{1,2} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{m}_{99,100} \quad (7.8)$$

og

$$\hat{\bar{m}} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{\bar{m}}_{0,1} + \hat{\alpha}_{1,2} \cdot \hat{\bar{m}}_{1,2} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{\bar{m}}_{99,100} \quad (7.9)$$

Vi vil i det følgende undersøge, hvilke udsagn sammenligningen af de to summariske dødskvotienter fører til under forskellige forudsætninger.

Lad os antage, at

$$\hat{m} > \hat{\bar{m}} \quad (7.10)$$

Dette resultat kan fremkomme selv om

$$\hat{m}_{x,x+1} < \hat{\bar{m}}_{x,x+1} \quad (7.11)$$

for alle værdier af x . Hvis f.eks. $\hat{m}_{x,x+1}$ og $\hat{\bar{m}}_{x,x+1}$ øges med stigende alder, og en langt større del af befolkning 1 end befolkning 2 befinder sig i de ældre aldersklasser (dvs. $\hat{\alpha}_{x,x+1} > \hat{\alpha}_{x,x+1}$ f.eks. for $x \geq 50$) vil de større dødskvotienter i de højere aldre indgå med langt større vægt i den summariske dødskvotient for befolkning 1. I dette tilfælde vil en sammenligning af de to summariske dødskvotienter således give et helt misvisende billede af forholdet mellem dødelighedsniveauet i de to befolkninger.

Da det er den forskellige aldersfordeling i de to befolkninger, som medfører ovennævnte misvisende resultat, prøver man at elimi-

nere den forstyrrende indflydelse herfra ved at anvende samme sæt af α -værdier for de to befolkninger, dvs. samme aldersfordeling (direkte standardisering). Her kan man enten vælge aldersfordelingen i befolkning 1 eller 2 eller eventuelt fra en helt tredie befolkning (standardbefolkningen).

Vi viser nu de summariske dødkvotienter for de to befolkninger under forudsætning af, at vi anvender aldersfordelingen fra befolkning 1.

$$\hat{m} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{m}_{0,1} + \hat{\alpha}_{1,2} \cdot \hat{m}_{1,2} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{m}_{99,100} \quad (7.12)$$

$$\hat{\frac{m}{m}} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{\frac{m}{m}}_{0,1} + \hat{\alpha}_{1,2} \cdot \hat{\frac{m}{m}}_{1,2} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{\frac{m}{m}}_{99,100} \quad (7.13)$$

Den summariske dødkvotient for befolkning 1 er naturligvis den samme som før. $\hat{\frac{m}{m}}$ udsiger, hvor stor den summariske dødkvotient i befolkning 2 ville være, hvis aldersfordelingen var som i befolkning 1.

Hvis

$$\hat{m}_{x,x+1} > \hat{\frac{m}{m}}_{x,x+1} \quad (7.14)$$

for alle værdier af x , vil også

$$\hat{m} > \hat{\frac{m}{m}}^2 \quad (7.15)$$

I denne situation giver forholdet mellem de standardiserede summariske dødkvotienter et korrekt udsagn om forholdet mellem dødelighedsniveauet i de to befolkninger. Naturligvis får vi ikke noget at vide om, hvorledes overdødeligheden, dvs.

$$\frac{\hat{m}_{x,x+1}}{\hat{\frac{m}{m}}_{x,x+1}}$$

varierer med x .

2) $\hat{m} - \hat{\frac{m}{m}} = \sum \hat{\alpha}_{x,x+1} (\hat{m}_{x,x+1} - \hat{\frac{m}{m}}_{x,x+1}) > 0$ for $\hat{m}_{x,x+1} > \hat{\frac{m}{m}}_{x,x+1}$ da
 $\hat{\alpha}_{x,x+1} \geq 0$.

Hvis derimod f.eks.

$$\hat{m}_{x,x+1} > \hat{m}_{x_1,x+1} \quad \text{for } 0 \leq x \leq x_1 \quad (7.16)$$

og

$$\hat{m}_{x,x+1} < \hat{m}_{x_1,x+1} \quad \text{for } x_1 < x \leq 100 \quad (7.17)$$

vil ingen standardberegning kunne give et korrekt og objektivt billede af, i hvilken befolkning dødeligheden er størst, fordi forholdet mellem de to standardiserede summariske dødskvotienter helt afhænger af aldersfordelingen i den valgte standardbefolkning. Vælges f.eks. en standardbefolkning, hvor en meget stor del af individerne befinner sig under alderen x_1 år, vil det trække i retning af, at den standardiserede summariske dødskvotient for befolkning 1 bliver størst, fordi overdødeligheden i befolkning 1 under denne alder vil indgå med stor vægt i dødskvotienten, medens underdødeligheden over alder x_1 indgår med tilsvarende ringe vægt. Valget af standardbefolkning kan ikke foretages på objektiv måde.

Sammenfattende kan det om summariske dødeligheds sammenligninger siges, at hvor man har kendskab til de aldersbetingede dødskvotienter, bør man altid basere sin analyse på en sammenligning af disse for derved at opnå information om over- eller underdødelighedens aldersvariation. En sammenligning ved hjælp af den summariske dødskvotient må kun foretages, når man i forvejen har sikret sig mod at begå fejlslutninger.³⁾

Princippet med den direkte standardisering har imidlertid en langt mere generel anvendelse. Når som helst man sammenligner to befolkningers dødelighed, og de to befolkninger adskiller sig fra hinanden mht. egenskaber, som øver indflydelse på dødelighedsnive-

3) Der kan på dette sted være grund til at erindre om, at brugen af middellevetiden for 0-årige som sammenligningsgrundlag for to befolkninger indebærer en sammenligning af den gennemsnitlige levetid ved det givne dødelighedsniveau. En højere middellevetid i befolkning 1 end i befolkning 2 indebærer ikke nødvendigvis, at dødelighedsniveaet i den første befolkning er lavere i samtlige aldersklasser.

Den helt eksakte sammenhæng mellem e_0 og m vil fremgå af afsnit 10.2 om den stationære befolkning.

auet, gælder de betragtninger, der netop er redegjort for i forbindelse med aldersfordelingen. Der tænkes her på egenskaber som f.eks. kon, civilstand, hjemsted mv.

I forbindelse med dødeligheden i det første leveår (spædbørnsdødeligheden) kan der ved en sammenligning mellem to tidsperioder blive tale om at tage hensyn til forskelle på de levendefødtes fordeling efter moderens alder, civilstand mv., alt sammen faktorer som øver indflydelse på spædbørnsdødelighedens størrelse.

En anden vigtig anvendelse af principperne i forbindelse med direkte standardisering finder sted, når man skal vurdere, i hvilket omfang ændringer i en række faktorer kan forklare en given ændring af dødelighedsniveauet. Vi kan illustrere denne teknik ved hjælp af tabel 7.1.

Befolkning 1 kan f.eks. være den danske befolkning i år 1900, medens befolkning 2 står for den danske befolkning i 1960. Gennem disse 60 år er der sket et fald i den summariske dødskvotient, således at

$$\hat{\bar{m}} > \hat{\bar{m}}$$

(7.18)

Faldet vil være et resultat af højere levestandard, lægevidenskabens fremskridt osv. Men nedgangen i den summariske dødskvotient vil også være påvirket af de ændringer, som befolkningens aldersfordeling er undergået, idet aldersstrukturens ændring kan have påvirket den summariske dødskvotient i såvel opad som nedadgående retning, alt efter om andelen af ældre er vokset eller aftaget. For at vurdere størrelsen af denne påvirkning, beregner vi, hvad den summariske dødskvotient ville have været i 1960, hvis man havde bibeholdt aldersfordelingen fra år 1900 og sammenligner derpå denne størrelse med den faktiske summariske dødskvotient i 1960. Forskellen mellem de to størrelser vurderer indflydelsen fra aldersstrukturens ændring.

Dvs. en sammenligning af

$$\hat{\bar{m}} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{\bar{m}}_{0,1} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{\bar{m}}_{99,100} \quad (7.19)$$

og

$$\hat{\bar{m}} = \hat{\alpha}_{0,1} \cdot \hat{\bar{m}}_{0,1} + \dots + \hat{\alpha}_{99,100} \cdot \hat{\bar{m}}_{99,100} \quad 4) \quad (7.20)$$

Mere generelt kan man sige, at gennem denne metode søger man at måle de to faktorers (sundhedsfaktoren og aldersstrukturen) effekt hver for sig ved at holde den ene konstant og lade den anden variere.

Dette princip kan også anvendes i forbindelse med andre opdelinger af befolkningen efter kriterier, som øver indflydelse på dødelighedsnivealets højde.

7.2 Indirekte standardisering

Indirekte standardisering bringes i anvendelse, når dødeligheden i to befolkninger skal sammenlignes på grundlag af oplysninger, som kun omfatter de pågældende befolkningers størrelser og aldersfordeling samt det totale antal døde. Man er således uden kendskab til de faktiske aldersbetingede dødkvotienter i de to befolkninger. Gennem den indirekte standardisering foretages reelt en sammenligning af dødelighedsniveaet ved at sammenholde et sæt af beregnede aldersbetingede dødkvotienter for hver af de to befolkninger.

I tabel 7.2, kol. 1-2 og 5-6 er anført de oplysninger, som vi har til rådighed for de to befolkninger, idet forudsætningerne mht. observationsperiode, aldersklasser og maksimale levealder er de samme som i tabel 7.1.

Fra en tredie befolkning hentes nu et sæt af aldersbetingede dødkvotienter ($m'_{x,x+1}$), som multipliceres med middelfolketallet i de respektive aldersklasser i de to befolkninger, hvorved man finder det forventede antal døde (kol. 4 og 8), dvs. det antal døde, som ville fremkomme, hvis de to befolkninger var underkastet den dødelighed, som kommer til udtryk gennem det anvendte sæt af aldersbetingede dødkvotienter.

Vi vil i det følgende vise, hvorledes man kan nå frem til et skøn over de faktiske aldersbetingede dødkvotienter for de to be-

4) Det bemærkes, at vi her har de samme aldersbetingede dødkvotienter for de to befolkninger, medens vi i forbindelse med det første princip havde samme aldersfordeling; se (7.12) og (7.13).

Tabel 7.2 Indirekte standardisering.

Aldersklasse	Befolknings 1			Befolknings 2				
	Middel-folketal (1)	Faktiske antal døde (2)	Standard dødskvo- tient (3)	Forventet antal døde (4)	Middel-folketal (5)	Faktiske antal døde (6)	Standard dødskvo- tient (7)	Forventet antal døde (8)
0-årlige	$\hat{M}_{0,1}$	$m'_{0,1}$	$\hat{d}'_{0,1}$	$\hat{M}'_{0,1}$	$m'_{0,1}$	$\hat{d}'_{0,1}$	$\hat{M}'_{0,1}$	$\hat{d}'_{0,1}$
1-årlige	$\hat{M}_{1,2}$	$m'_{1,2}$	$\hat{d}'_{1,2}$	$\hat{M}'_{1,2}$	$m'_{1,2}$	$\hat{d}'_{1,2}$	$\hat{M}'_{1,2}$	$\hat{d}'_{1,2}$
:	:	:	:	:	:	:	:	:
99-årlige	$\hat{M}_{99,100}$	$m'_{99,100}$	$\hat{d}'_{99,100}$	$\hat{M}'_{99,100}$	$m'_{99,100}$	$\hat{d}'_{99,100}$	$\hat{M}'_{99,100}$	$\hat{d}'_{99,100}$
I alt	\hat{M}	\hat{d}	\hat{d}'	\hat{M}'	\hat{d}'	\hat{d}'	\hat{M}'	\hat{d}'

$$1) \hat{D}'_{x,x+1} = \hat{M}_{x,x+1} \cdot m'_{x,x+1}$$

$$2) \hat{D}'_{x,x+1} = \hat{M}_{x,x+1} \cdot m'_{x,x+1}$$

folkninger ($\hat{m}_{x, x+1}$ og $\hat{m}'_{x, x+1}$) ved at anvende forholdet mellem det faktiske og det forventede antal døde i alt.

Vi forudsætter for befolkning 1, at

$$\frac{\hat{m}_{x, x+1}}{m'_{x, x+1}} = k_1 \quad (7.21)$$

dvs., at forholdet mellem de faktiske (men ukendte) dødskvotienter og de fra den tredie befolkning anvendte dødskvotienter er det samme i alle aldersklasser. Ligning (7.21) er ensbetydende med, at

$$\hat{m}_{0,1} = k_1 \cdot m'_{0,1} \quad (7.22)$$

$$\hat{m}'_{1,2} = k_1 \cdot m'_{1,2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{m}'_{99,100} = k_1 \cdot m'_{99,100}$$

Ved multiplikation med $\hat{m}_{x, x+1}$ på begge sider af lighedstegnet fås

$$\hat{D}_{0,1} = k_1 \cdot \hat{D}'_{0,1} \quad (7.23)$$

$$\hat{D}'_{1,2} = k_1 \cdot \hat{D}'_{1,2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\hat{D}'_{99,100} = k_1 \cdot \hat{D}'_{99,100}$$

$$\hat{D} = k_1 \cdot \hat{D}'$$

da

$$\hat{D}_{x, x+1} = \hat{m}_{x, x+1} \cdot \hat{m}'_{x, x+1} \quad (7.24)$$

og

$$\hat{D}'_{x, x+1} = \hat{m}'_{x, x+1} \cdot m'_{x, x+1} \quad (7.25)$$

Da både \hat{D} og \hat{D}' er kendt, kan k_1 let beregnes og dermed $\hat{m}_{x,x+1}$ (se ligning (7.21)).

For befolkning 2 følger beregningen helt analogt, når vi forudsætter, at

$$\frac{\hat{m}_{x,x+1}}{\hat{m}'_{x,x+1}} = k_2 \quad (7.26)$$

Sammenligningen mellem de to befolkninger kan nu foretages ved at sammenholde $\hat{m}_{x,x+1}$ og $\hat{m}'_{x,x+1}$.

Men da

$$\frac{\hat{m}_{x,x+1}}{\hat{m}'_{x,x+1}} = \frac{\hat{m}'_{x,x+1} \cdot k_1}{\hat{m}'_{x,x+1} \cdot k_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{\hat{D}/\hat{D}'}{\hat{D}'/\hat{D}} \quad (7.27)$$

indskrænkes sammenligningen til blot at sammenligne to tal, nemlig forholdet mellem det faktiske og det forventede antal døde i alt i de to befolkninger. Dette forhold er identisk med forholdet mellem de aldersbetingede dødskvotienter i de to befolkninger. Er tallet f.eks. større end 1, må vi slutte, at dødeligheden er størst i befolkning 1.

Men det skal til slut pointeres, at hele sammenligningen er baseret på de forudsætninger, som er nedfældet i (7.21) og (7.26). Ikke alene skal forholdet mellem de aldersbetingede dødskvotienter i de to befolkninger være uafhængige af alderen, men det samme skal gælde om forholdet mellem de aldersbetingede dødskvotienter fra den tredje befolkning og befolkning 1 og befolkning 2.⁵⁾ Indirekte standardisering bør i principippet kun anvendes, når der foreligger en forhåndsformodning om, at disse forudsætninger tilnærmelsesvis er opfyldt. Ofte anvendes indirekte standardisering som et foreløbigt orienteringsredskab i situationer, hvor man ikke har en sikker forhåndsviden om, at forudsætningerne er opfyldt.

5) Undertiden kendes $m_{x,x+1}$ for den ene befolkning. I så fald anvendes disse værdier til en beregning af det forventede antal døde i den anden befolkning.

8 VIELSER, SKILSMISSE OG VANDRINGER

8.1 Vielser

Målingen af vielser i en befolkning følger nøje de retningslinier, som er beskrevet i kapitlerne om dødelighedsmåling. I formel henseende er en vielse og et dødsfald en begivenhed af samme art, idet begge hændelser medfører, at det pågældende individ udtræder af en bestemt befolkningsgruppe. Vielsen medfører en afgang fra gruppen af ugifte (førstegangsvielsen), fraskilte eller i enkestand (flergangsvielsen), medens et dødsfald bevirket en afgang fra befolkningen som helhed.¹⁾

Målingen af forekomsten af f.eks. førstegangsvielser i en befolkning ved hjælp af de aldersbetingede vielseskvotienter, sker således ved at sætte antallet af førstegangsvielser i en bestemt periode i forhold til gennemlevet tid for den pågældende gruppe af ugifte, idet gennemlevet tid beregnes ved hjælp af de tidlige udledte formler. Beregningen af vielseskvotienterne kan foretages på grundlag af A-, B- eller C-grupper af viede efter såvel generations- som kalenderårsprincippet. Vielseskvotienterne kan transformeres til vielseshyppigheder²⁾, som igen danner grundlag for konstruktionen af vielsestavlen. Hvis vielsestavlen f.eks. baseres på kalenderårsprincippet, viser den, hvorledes en nærmere defineret bestand vil reduceres i overensstemmelse med vielseshyppighederne i det pågældende kalenderår, hvis indgåelse af ægteskab

1) I-reel-henseende er der naturligvis den forskel, at en vielse kun forårsager en ændring af befolkningens fordeling efter civilstand, hvorimod et dødsfald både påvirker befolkningens alders- og civilstandsfordeling samt størrelse.

2) F.eks. vil vielseshyppigheden for 20-årige for $k = 1$ angive den andel af individer i eksakt alder 20 år, som indgår ægteskab inden 21-års fødselsdagen, hvis indgåelse af ægteskab er eneste afgangssårsag.

er eneste afgangsårsag. Da en vis del af bestandens individer forbliver ugifte, vil vielsestavlen, til forskel fra overlevelsestavlen for de døde,³⁾ aldrig antage værdien 0, idet bestandens størrelse vil være konstant efter den alder, hvor indgåelse af ægte-skab ophører. Derfor kan vi ikke beregne middellevetiden som ugift, da middellevetiden jo er identisk med arealet under kurven divideret med udgangsbestanden. Arealet under vielseskurven er principielt uden afslutning. Derimod er det naturligvis muligt at beregne den gennemsnitlige vielsesalder for personer, som ifølge vielsestavlen indgår ægeskab.

Videre gælder principielt de samme begrænsninger som i forbindelse med dødelighedstavler mht. konstruktion af vielsestavler for specielle befolkningsgrupper, f.eks. fraskilte og individer i enkestand. Også i forbindelse med sammenligninger af vielsesniveauer mellem forskellige befolkningsgrupper, kan direkte og indirekte standardisering anvendes. Den summariske vielseskotient vil afhænge både af befolkningens alders- og civilstandsfordeling.

8.2 Skilsmisser

Ligesom forekomsten af vieler i en befolkning måles ved hjælp af vielseskotienter, vielseshyppigheder og en vielsestavle, beregner vi efter samme retningslinier og under de samme begrænsninger skilsmissekvotienter, skilsmissehyppigheder og skilsmissetavler for gifte individer. Skilsmissetavlen viser, hvorledes en bestand af gifte vil reduceres i overensstemmelse med et givet sæt af skilsmissehyppigheder, hvis oplosning af ægeskabet på grund af skilsmisse er eneste afgangsårsag. Den uafhængige variabel i forbindelse med skilsmissetavlen kan enten være alder, ægeskabs varighed eller en kombination af begge faktorer. Også ved sammenligninger af skilsmisseniveauer i to eller flere befolkningser, kan det være aktuelt at anvende direkte og indirekte standar-

3) Ligesom vi her indfører udtrykket vielsestavle for en bestand af individer, som alene reduceres gennem indgåelse af ægeskab, kan vi på tilsvarende måde anvende betegnelsen dødelighedstavle i stedet for overlevelsestavle om en bestand af individer, hvor dødeligheden optræder som eneste afgangsårsag.

disering, da den summariske skilsmissecvotient både afhænger af befolkningens alders- og civilstandsfordeling. Ligesom vielsen medfører skilsmissen kun en ændring af befolkningens civilstandsstruktur.

8.3 Vandringer

Målingen af vandringer til og fra et bestemt geografisk område sker ved at beregne de aldersbetingede ind- og udvandringeskvoteinter, idet områdets befolkning danner grundlag for beregningen af gennemlevet tid.⁴⁾ I dette tilfælde beregner man ikke vandringshyppigheder og en vandringstavle, om end noget sådant kunne være aktuelt for udvandringens vedkommende. En udvandingstavle ville vise, hvorledes en bestand af individer blev reduceret i overensstemmelse med et givet sæt af aldersbetingede udvandringshyppigheder, hvis udvandringen optrådte som eneste afgangsårsag. Da kun en vis andel af befolkningen udvander, vil en beregning af middellevetiden som fastboende i det pågældende område principielt ikke kunne foretages. Beregningen af vandringskvoteinter og sammenligninger af vandringsniveauet i forskellige befolkninger sker efter de samme retningslinier, som er omtalt i forbindelse med de foregående demografiske komponenter.

I forbindelse med vandringer skal til slut nævnes to metoder, som kan anvendes til at opnå et skøn over vandringsomfanget i de tilfælde, hvor der ikke foretages en direkte registrering af antallet af ind- og udvandrede.

Vi har tidligere vist, at der består følgende sammenhæng mellem befolkningens størrelse på to forskellige tidspunkter, f.eks. ved begyndelsen af år T og år T+k

$$B^{(T+k)} = B^{(T)} + G^{(T, T+k)} - D^{(T, T+k)} + (I^{(T, T+k)} - U^{(T, T+k)}) \quad (8.1)$$

4) Vandringer påvirker både befolkningens størrelse og struktur.

Med kendskab til $B^{(T+k)}$, $B^{(T)}$, $G^{(T, T+k)}$ og $D^{(T, T+k)}$ vil den sidste størrelse, nemlig nettoindvandringen, kunne beregnes resdraulst. En sådan situation vil f.eks. foreligge, når man har kendskab til befolkningens størrelse ved to på hinanden følgende folketællinger samt antallet af levendefødte og døde mellem de to tællinger. Ovennævnte sammenhæng gælder også for hver enkelt af de generationer, hvoraf befolkningen er sammensat, således at man har mulighed for at foretage en opsplitning af nettovandringen efter alder.⁵⁾

Den anden metode giver mulighed for at skønne over vandringsstrømmene mellem en række geografiske områder i perioden mellem to folketællinger. Metoden består blot i, at man i forbindelse med den seneste folketælling fremskaffer oplysning om hvert individ s bopæl f.eks. ved den forudgående folketælling. Ved denne fremgangsmåde fås dog kun et ufuldstændigt billede af de geografiske vandringsstrømme mellem de to folketællinger. Personer, som har skiftet bopæl flere gange i løbet af perioden, vil optræde, som om de har foretaget en enkel flytning direkte til det seneste bopælssted. En person, som flytter tilbage til bopælen ved første folketælling, vil blive registreret som fastboende mellem de to folketællinger.⁶⁾

5) Selv uden kendskab til antallet af døde, vil metoden kunne anvendes, da antallet af døde kan estimeres ved hjælp af en dødelighedstavle, der dækker forholdene i den pågældende periode. Vedrørende denne beregning, se kapitel 11.

6) Befolkningens mobilitet kan også belyses gennem oplysninger om fødested i stedet for eller i forbindelse med oplysninger om bopælen ved den forudgående folketælling.

9 FERTILITETEN

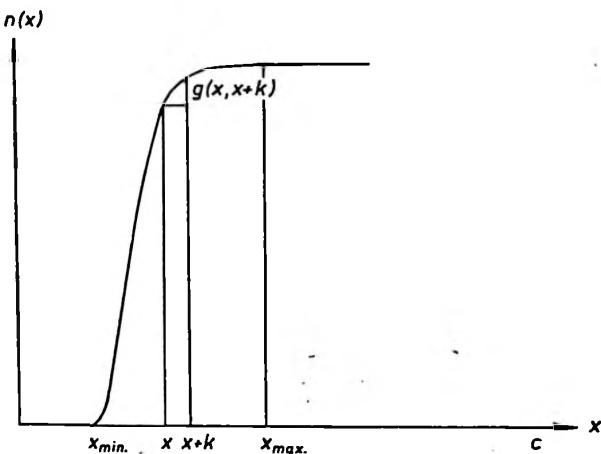
9.1 Fertilitetsmåling

Behandlingen af den sidste af de fem demografiske komponenter adskiller sig på forskellige punkter fra omtalen af de øvrige. Det skyldes først og fremmest, at en fødsel indebærer en tilgang af præcis 0-årige individer til befolkningen, medens dødsfald, vieler osv. repræsenterer en afgang fra en bestemt befolkningsgruppe. Da fødslerne kun hidrører fra den kvindelige del af befolkningen, foretages de fleste målinger af fertilitetsniveaet i en befolkning ved at sætte fødsler, fødte og levendefødte¹⁾ i relation til den kvindelige del af befolkningen. Teorien for fertilitetsmålingen er derfor baseret på overlevelsestablen for kvinder.

9.1a Teorien for fertilitetsmålingen

Vi betragter en bestand af kvinder, hvor dødeligheden er eneste afgangsårsag. Bestandens maksimale levealder er c. Størrelsen af bestanden for enhver værdi af x tænkes beskrevet gennem den kontinuerte funktion $I(x)$. Vi måler nu det antal levendefødte, som denne bestand af kvinder frembringer indtil eksakt alder x , således

1) Ved de fleste fertilitetsmålinger anvendes antallet af levendefødte. Forskellen mellem de tre størrelser er iøvrigt ret begrænset. I visse tilfælde ville det være af interesse at anvende antallet af konceptioner (fødte + aborter) som tæller. Noget sådant ville ikke rejse principielle problemer mht. fertilitetsmålingen, men medføre store problemer, når det gælder den statistiske registrering. I de følgende betragtninger anvendes overalt antallet af levendefødte til målingen af fertiliteten med mindre andet udtrykkeligt bemærkes.



Figur 9.1 Den kumulerede fertilitetsfunktion.

at det kumulerede antal levendefødte konstateres i hver eneste alder x . Vi forestiller os endvidere en kontinuert funktion, $n(x)$, som for enhver værdi af x giver os det således kumulerede antal levendefødte. Hvis x_{min} og x_{max} repræsenterer henholdsvis begyndelsen og afslutningen af den reproduktive periode (dvs. fødedygtige periode) vil funktionen antage værdien 0 indtil x_{min} og derefter være stadig voksende indtil x_{max} for derefter at blive konstant.²⁾

I figur 9.1 er der givet en grafisk fremstilling af $n(x)$.

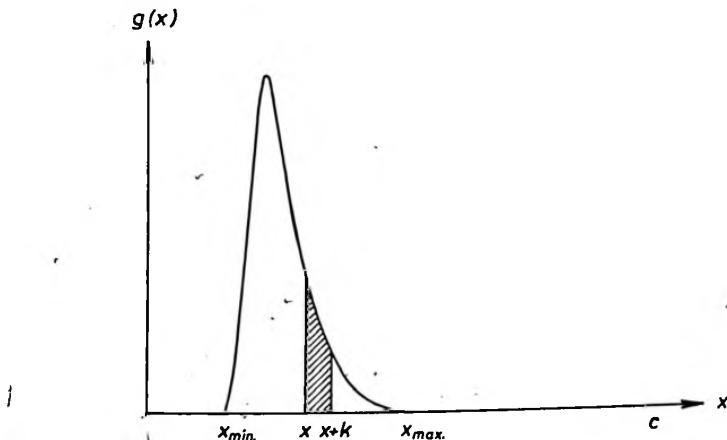
Ud fra $n(x)$ -funktionen er det en enkel sag at finde antallet af levendefødte i aldersintervallet fra x til $x+k$, $g(x, x+k)$, hvor k f.eks. kan være en bestemt brøkdel af et år, 1 år eller 5 år. Antallet af levendefødte mellem x og $x+k$ må være identisk med tilsvæksten i $n(x)$ og således lig med

$$g(x, x+k) = n(x+k) - n(x) \quad (9.1)$$

hvilket også fremgår af figur 9.1.

Ønsker vi imidlertid et udtymmende billede af, hvorledes antallet af levendefødte varierer med kvindens alder, er størrelsen

2) Man kan i almindelighed sætte $x_{min} = 15$ år og $x_{max} = 50$ år.



Figur 9.2 Antal levendefødte pr. aldersenhed.

$g(x, x+k)$ utilstrækkelig, fordi vi ikke får oplysning om, hvordan antallet af levendefødte varierer mellem x og $x+k$. Det kan vi opnå ved at beregne antaliet af levendefødte pr. aldersenhed for enhver værdi af x , hvilket sker gennem følgende størrelse

$$g(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{n(x+k) - n(x)}{k} = \frac{dn(x)}{dx} = n'(x) \quad (9.2)$$

Denne størrelse giver udtryk for antallet af levendefødte pr. aldersenhed for enhver værdi af x .

$$g(x) \geq 0 \text{ for } x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

da $n(x)$ er en voksende funktion i dette interval.

$$g(x) = 0 \text{ for } x < x_{\min} \text{ eller } x > x_{\max}$$

da $n(x)$ er en konstant funktion uden for intervallet.

I figur 9.2 er der givet en grafisk afbildning af $g(x)$.

Af (9.1) og (9.2) følger umiddelbart, at

$$g(x, x+k) = \int_{h=0}^k g(x+h)dh \quad (9.3)$$

Formlen viser, at det samlede antal levendefødte mellem x og $x+k$ kan beregnes ved at opsummere de enkelte bidrag af levendefødte, der fremkommer i uendelig korte aldersintervaller af længden dh , idet h går fra 0 til k . $g(x, x+k)$ kan således fremstilles ved det skraverede areal under $g(x)$ -kurven i figur 9.2.

Når man er interesseret i en måling af fertilitetens "styrke" i de forskellige kvindealdre, er $g(x)$ imidlertid ikke noget anvendeligt mål. Antallet af levendefødte for en bestemt værdi af x afhænger nemlig ikke blot af den "styrke", hvormed fertiliteten gør sig gældende, men også af hvor mange kvinder, der er under risiko for at føde, dvs. størrelsen af $\bar{I}(x)$.

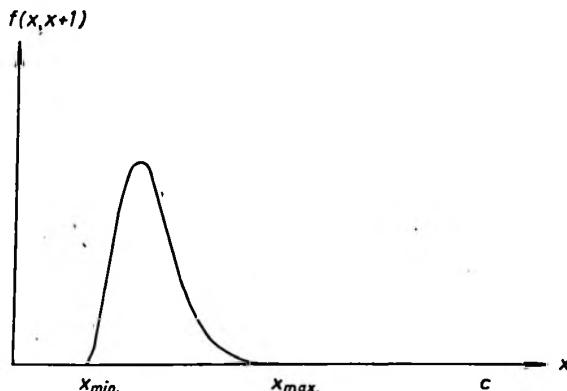
De lavere værdier af $g(x)$ i de sidste år af den reproduktive periode, skyldes for en del, at $\bar{I}(x)$ er blevet mindre på grund af dødelighedens reduktion af bestanden i løbet af den reproduktive periode.

En vurdering af den "styrke", hvormed fertiliteten gør sig gældende i de forskellige aldre, kræver derfor, at antallet af levendefødte sammenholdes med den bestand, som er under risiko for at føde i det pågældende aldersinterval. Dette kan opnås ved at indføre fertilitetskvotienten $f(x, x+k)$

$$f(x, x+k) = \frac{g(x, x+k)}{\bar{a}(x, x+k)} \quad (9.4)$$

der viser, hvor stor en andel levendefødte af mødre mellem x og $x+k$ år udgør i forhold til den gennemlevede tid for bestanden af kvinder mellem disse aldre. Også her kan størrelsen k f.eks. være en bestemt brøkdel af et år, 1 år eller 5 år. I figur 9.3 er der givet en grafisk afbildning af $f(x, x+k)$ for $k = 1$. (Den étårige fertilitetskvotient).

I forbindelse med fertilitetsmålinger anvendes i nævneren altid gennemlevet tid, $\bar{a}(x, x+1)$, og ikke $\bar{I}(x)$. Da $g(x, x+k)$ ikke alene afhænger af bestandens størrelse i eksakt alder x , men også af hvor mange af bestandens individer, som er til stede i aldersintervallet fra x til $x+k$, vil en anvendelse af $\bar{I}(x)$ som nævner medføre, at man ikke tager hensyn til afgang fra bestanden i løbet af aldersintervallet. Derfor vil en kvindebæstand for en stor værdi af $\bar{q}(x, x+k)$, alt andet lige, frembringe færre levendefødte fra x til $x+k$ end en kvindebæstand, som er underkastet en mindre værdi



Figur 9.3 Den étårige fertilitetskvotient.

af $\bar{q}(x, x+k)$. Hvis man derfor sammenlignede

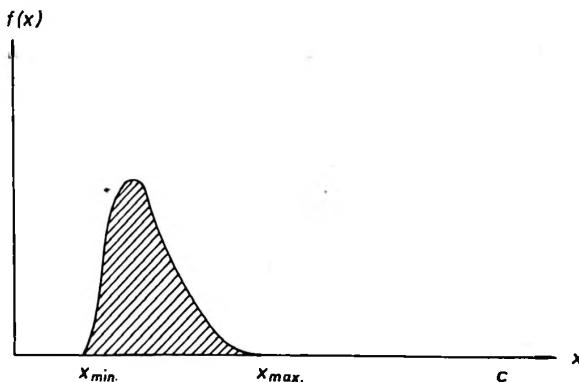
$$\frac{g(x, x+k)}{I(x)}$$

for to bestande med forskellig værdi af $\bar{q}(x, x+k)$ og dermed af $\bar{a}(x, x+k)$, ville en forskel mellem de to befolkninger mht. denne brøk alene kunne skyldes en forskellig dødelighed. Gennem anvendelsen af forholdet mellem $g(x, x+k)$ og $\bar{a}(x, x+1)$ sikrer vi os, at fertilitetsmålingen kan foretages uafhængigt af dødeligheden i bestanden.³⁾

Ligesom ved størrelsen $g(x, x+k)$ er vi i forbindelse med størrelsen $f(x, x+k)$ interesseret i at få kendskab til fertilitetsforholdene mellem x og $x+k$. Det opnås ved at introducere fertilitetsintensiteten

$$f(x) = \frac{g(x)}{I(x)} \quad (9.5)$$

3) Principielt kunne man godt på grundlag af fertilitetskvotienterne konstruere en "fertilitetstavle". Fertilitetstavlen skulle da vise afgangen blandt en given bestand af kvinder gennem den reproduktive periode, når afgangen på grund af børnefødsler er eneste afgangsårsag. En sådan tavle ville dog være uhensigtsmæssig, først og fremmest fordi kvinder føder flere gange, således at "I(x)" bliver negativ over en vis værdi af x . I afsnit 9.3 er der omtalt en speciel anvendelse af overlevelsestavlens principper i forbindelse med fertilitetsmåling.



Figur 9.4 Fertiliterintensiteten.

$f(x)$ mäter for enhver værdi af x antallet af levendefødte pr. aldersenhed i forhold til bestandens størrelse. Kurven for $f(x)$ er således identisk med forholdet mellem ordinatværdierne på henholdsvis $g(x)$ - og $\bar{I}(x)$ -kurven.

I figur 9.4 er der givet en grafisk afbildning af $f(x)$.

Ligesom vi i forbindelse med dødelighedstavlen introducerede et mål, som tilsigtede at give en sammenfattende vurdering af dødelighedsniveauet, nemlig $e(0)$, vil vi også i forbindelse med fertilitetsfunktionen, $f(x)$, indføre et mål, der gør det muligt at udtrykke fertilitetsniveauet i hele bestanden ved hjælp af et enkelt tal, nemlig den samlede fertilitet

$$s_t = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad 4) \tag{9.6}$$

Den samlede fertilitet er således identisk med hele arealet under $f(x)$ -kurven og giver udtryk for det samlede antal levendefødte, som 1 kvinde vil bringe til verden, hvis hun i hver eneste alder føder i overensstemmelse med $f(x)$ -funktionen, og er i levende live indtil afslutningen af den reproduktive periode. $f(x)$ -funktionen giver jo for hver eneste værdi af x antallet af levendefødte pr.

4) Da $f(x)$ er nul uden for aldersintervallet mellem x_{min} og x_{max} vil integrationen kun modtage positive bidrag mellem disse x -værdier.

aldersenhed pr. kvinde. 5) Målet gør det muligt at foretage en enkel sammenligning af fertilitetsniveauer mellem to eller flere befolkninger, uden at sammenligningen påvirkes af en eventuel forskel på aldersstrukturen i de pågældende befolkninger.

9.1b Approximationsformlerne

Når man på grundlag af konkrete demografiske data skal konstruere de i det foregående afsnit udledte fertilitetsmål, opstår der en række estimationsproblemer, som i første række hænger sammen med, at man kun er i stand til at estimere $f(x, x+k)$ for udvalgte værdier af x og k . I forbindelse med fertilitetsmålingen gælder det næsten uden undtagelse, at $f(x, x+k)$ i bedste fald kun kan estimeres for heltallige værdier af x i forbindelse med værdier af $k = 1$.⁶⁾ Derfor kan $f(x)$ og s_t ikke beregnes direkte efter (9.5) og (9.6), som jo bygger på en kontinuert betragtning. Formlerne må derfor omformes for at muliggøre en approximativ beregning ved hjælp af $f(x, x+k)$.

Mellem $f(x)$ og $f(x, x+k)$ gælder følgende relation

$$f(x + \frac{k}{2}) \approx f(x, x+k) \quad (9.7)$$

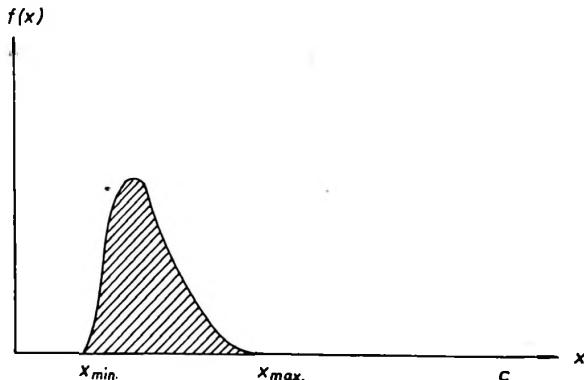
Vi vil undlade at bringe den matematiske udledning, som fører frem til (9.7), men indskrænke os til at give et geometrisk plausibilitetsbevis, som tillige fortæller, under hvilke betingelser approximationen er akceptabel.

Formel (9.7) er naturligvis identisk med

$$\frac{k \cdot g(x + \frac{k}{2})}{k \cdot I(x + \frac{k}{2})} \approx \frac{g(x, x+k)}{\bar{a}(x, x+k)} \quad (9.8)$$

5) I lighed med middellevetiden kan den samlede fertilitet også gøres aldersbetinget, således at man beregner, hvor mange levendefødte 1 kvinde under de givne forudsætninger vil føde indtil eksakt alder x , $s_t(0, x)$.

6) Meget ofte er beregningen kun mulig for $x = 15, 20, 25, \dots, 45$ og $k = 5$.



Figur 9.4 Fertilitetssintensiteten.

$f(x)$ mäter for enhver værdi af x antallet af levendefødte pr. aldersenhed i forhold til bestandens størrelse. Kurven for $f(x)$ er således identisk med forholdet mellem ordinatværdierne på henholdsvis $g(x)$ - og $I(x)$ -kurven.

I figur 9.4 er der givet en grafisk afbildning af $f(x)$.

Ligesom vi i forbindelse med dødelighedstavlen introducerede et mål, som tilsigtede at give en sammenfattende vurdering af dødelighedsniveauet, nemlig $e(0)$, vil vi også i forbindelse med fertilitetsfunktionen, $f(x)$, indføre et mål, der gør det muligt at udtrykke fertilitetsniveauet i hele bestanden ved hjælp af et enkelt tal, nemlig den samlede fertilitet

$$s_t = \int_0^{\infty} f(x) dx \quad 4) \quad (9.6)$$

Den samlede fertilitet er således identisk med hele arealet under $f(x)$ -kurven og giver udtryk for det samlede antal levendefødte, som 1 kvinde vil bringe til verden, hvis hun i hver eneste alder føder i overensstemmelse med $f(x)$ -funktionen, og er i levende live indtil afslutningen af den reproduktive periode. $f(x)$ -funktionen giver jo for hver eneste værdi af x antallet af levendefødte pr.

4) Da $f(x)$ er nul uden for aldersintervallet mellem x_{min} og x_{max} vil integrationen kun modtage positive bidrag mellem disse x -værdier.

aldersenhed pr. kvinde. 5) Målet gør det muligt at foretage en enkel sammenligning af fertilitetsniveauer mellem to eller flere befolkninger, uden at sammenligningen påvirkes af en eventuel forskel på aldersstrukturen i de pågældende befolkninger.

9.1b Approximationsformlerne

Når man på grundlag af konkrete demografiske data skal konstruere de i det foregående afsnit udledte fertilitetsmål, opstår der en række estimationsproblemer, som i første række hænger sammen med, at man kun er i stand til at estimere $f(x, x+k)$ for udvalgte værdier af x og k . I forbindelse med fertilitetsmålingen gælder det næsten uden undtagelse, at $f(x, x+k)$ i bedste fald kun kan estimeres for heltallige værdier af x i forbindelse med værdier af $k = 1$.⁶⁾ Derfor kan $f(x)$ og s_t ikke beregnes direkte efter (9.5) og (9.6), som jo bygger på en kontinuert betragtning. Formlerne må derfor omformes for at muliggøre en approximativ beregning ved hjælp af $f(x, x+k)$.

Mellem $f(x)$ og $f(x, x+k)$ gælder følgende relation

$$f(x + \frac{k}{2}) \approx f(x, x+k) \quad (9.7)$$

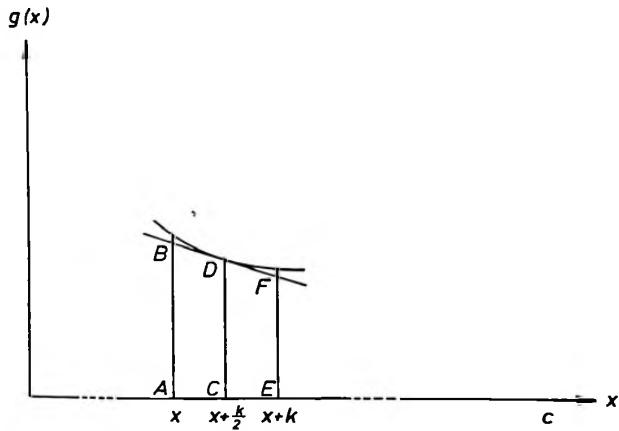
Vi vil undlade at bringe den matematiske udledning, som fører frem til (9.7), men indskrænke os til at give et geometrisk plausibilitetsbevis, som tillige fortæller, under hvilke betingelser approximationen er akceptabel.

Formel (9.7) er naturligvis identisk med

$$\frac{k \cdot g(x + \frac{k}{2})}{k \cdot I(x + \frac{k}{2})} \approx \frac{g(x, x+k)}{\bar{a}(x, x+k)} \quad (9.8)$$

5) I lighed med middellevetiden kan den samlede fertilitet også gøres aldersbetegnet, således at man beregner, hvor mange levendefødte 1 kvinde under de givne forudsætninger vil føde indtil eksakt alder x , $s_t(0, x)$.

6) Meget ofte er beregningen kun mulig for $x = 15, 20, 25, \dots, 45$ og $k = 5$.



Figur 9.5 Antal levendefødte pr. aldersenhed.

Rigtigheden af ovenstående vil vi vise gennem en geometrisk dokumentation af, at

$$k \cdot g(x + \frac{k}{2}) \approx g(x, x+k) \quad (9.9)$$

og

$$k \cdot \bar{I}(x + \frac{k}{2}) \approx \bar{a}(x, x+k) \quad (9.10)$$

I figur 9.5 er $k \cdot g(x + \frac{k}{2})$ identisk med produktet af liniestykket AE og CD og dermed af arealet for trapez'et ABFE. $g(x, x+k)$ vil ifølge (9.3) være identisk med arealet under kurven mellem x og $x+k$. Betingelsen for tællerapproximationens gyldighed er derfor, at trapezet giver en akceptabel approximation til arealet under kurven, hvilket forudsætter, at $g(x)$ ændrer sig nogenlunde lineært, dvs. at antallet af levendefødte pr. aldersenhed ændrer sig nogenlunde jævnt gennem aldersintervallet.

Vi har tidligere vist, at (9.10) kun har gyldighed, når bestanden ændrer sig jævnt. Når dette krav skal være opfyldt, må forudsætningen for, at $g(x)$ ændrer sig jævnt, være en tilsvarende jævn udvikling i $f(x)$.

Approximationen forudsætter således, at såvel bestanden som fertilitetsintensiteten ændrer sig jævnt gennem aldersperioden.⁷⁾

7) Jo større værdier af k , der anvendes, jo dårligere vil approximationen i almindelighed passe.

Før vi udleder approximationsformlen til brug for beregningen af den samlede fertilitet, vil vi skrive (9.6) på en lidt anden form

$$s_t = \int_{x=0}^{\infty} f(x)dx = \sum_{h=0}^{\infty} a_f(h \cdot k, (h+1) \cdot k) \quad (9.11)$$

idet

$$a_f(x, x+k) = \int_{h=0}^k f(x+h)dh \quad (9.12)$$

Formel (9.11) udtrykker blot den samlede fertilitet som summen af arealerne under $f(x)$ -kurven mellem x og $x+k$ fra x_{\min} til x_{\max} , idet summationen kun modtager positive arealbidrag mellem disse to værdier. Vort mål er at få udtrykt de enkelte arealbidrag ved hjælp af $f(x, x+k)$.

Hvis $f(x)$ -kurven kan betragtes som nogenlunde lineær mellem x og $x+k$, vil hvert af arealerne kunne fremstilles som arealet af et trapez, således at

$$a_f(x, x+k) = k \cdot f(x + \frac{k}{2}) \quad (9.13)$$

der ved hjælp af (9.7) kan skrives som

$$a_f(x, x+k) = k \cdot f(x, x+k) \quad (9.14)$$

Under denne forudsætning antager beregningsformlen for den samlede fertilitet følgende form:

$$s_t \approx k \sum_{h=0}^{\infty} f(h \cdot k, (h+1) \cdot k) \quad (9.15)$$

Hvis x antager samtlige heltallige værdier i forbindelse med $k = 1$, og der kun medtages positive bidrag, idet x_{\min} og x_{\max} sættes til henholdsvis 15 og 50 år, bliver (9.15)

$$s_t \approx \sum_{h=15}^{49} f(h, h+1) = f(15, 16) + f(16, 17) + \dots + f(49, 50) \quad (9.16)$$

For $x = 15, 20, 25, \dots, 45$ og $k = 5$ antager (9.15) følgende form

$$s_t \approx 5 \sum_{h=3}^9 f(h \cdot 5, (h+1) \cdot 5) \quad (9.17)$$

$$\approx 5[f(15, 20) + f(20, 25) + \dots + f(45, 50)]$$

9.2 Konstruktionen af fertilitetsmålene

Beregningen af $f_{x, x+k}$ sker ved at sætte et givet antal levendefødte i relation til gennemlevet tid for den bestand af kvinder, hvorfra de levendefødte hidrører. Derfor følger beregningen af $f_{x, x+k}$ nøje de retningslinier, der er gjort rede for i forbindelse med beregningen af $m_{x, x+k}$. Den principielle forskel er blot, at tælleren (antallet af levendefødte) i dette tilfælde ikke påvirker størrelsen af gennemlevet tid for bestanden, som det var tilfældet med dødsfaldene.

Ved beregningen af $f_{x, x+k}$ kan man anvende A-, B- eller C-grupper i forbindelse med kalenderårs- eller generationsprincippet. En anvendelse af f.eks. B-grupper på et-års aldersklasser kræver kendskab til kvindernes fordeling på 1-års aldersklasser (eller fødselsår) ved årets begyndelse, oplysning om fødsels- og begivenhedsår for døde og ind- og udvandrede (nævneren), samt fødselsår (begivenhedsår) og moderens fødselsår i forbindelse med de levendefødte (tælleren). Særlig i forbindelse med fertilitetsmålingen spiller generationsprincippet en fremtrædende rolle, fordi fertilitetsniveauet for en given aldersklasse i et givet kalenderår, udover forholdene i kalenderåret, vil være stærkt afhængig af, hvor mange børn den pågældende kvindegeneration allerede har bragt til verden. Dette skyldes igen, at befolkningen i sin familieplanlægning tillegger det samlede antal børn en afgørende rolle, således at den historiske effekt inden for fødselsområdet bliver af særlig afgørende betydning.

9.3 Afsluttende bemærkninger om fertiliteten

Hidtil har vi kun omtalt fertilitetsmålingen i forbindelse med den kvindelige del af befolkningen under ét, bortset fra aldersopdelingen. Men ligesom i forbindelse med dødeligheden vil en beregning af fertilitetsniveauet for specielle grupper også være relevant i det omfang, der er forskel mellem grupperne. Af sådanne grupper kan nævnes gifte og ikke-gifte kvinder,⁸⁾ ligesom geografiske og socio-økonomiske opdelinger af den kvindelige befolkning også er relevante i denne forbindelse. I visse lande kan en sondring efter religion og race være af betydning. For hver af disse befolkningsgrupper kan man beregne de aldersbetingede fertilitetskvoteinter efter de retningslinier, som er skitseret i kapitel 5. De aldersbetingede fertilitetskvoteinter kan igen sammenfattes til den samlede fertilitet, om end der for dette mål gælder de samme indvendinger og reservationer som i forbindelse med beregningen af middellevetiden⁹⁾ på grund af "vandringer" mellem de forskellige befolkningssgrupper.

Ligesom vi ved dødelighedsmalingen delte dødsfaldene op efter forskellige kriterier (dødsårsag), gælder det samme principielt om levendefødte, hvor opdelingen efter fødselsnummer vil repræsentere det vigtigste kriterium, således at fertilitetsmålene beregnes i forbindelse med hvert enkelt fødselsnummer.¹⁰⁾

Beregnet efter kalenderårsprincippet vil den samlede fertilitet for fødselsnummer 1 således måle den andel af en given kvindebestand, der bringer mindst et levendefødt barn til verden, hvis de gennem hele den reproduktive periode føder i overensstemmelse med fertilitetserfaringerne i det pågældende kalenderår og $\bar{q}(0,50) = 0.$

Ved en opdeling af f.eks. fødslerne efter fødselsnummer, kan der beregnes en fertilitetstavle i forbindelse med hvert enkelt fødselsnummer. Tager man f.eks. førstefødsler, vil en sådan hændelse ifølge sagens natur kun forekomme en gang for hver enkelt

8) For gifte kvinder vil alderen kunne erstattes med ægteskabets varighed.

9) Hvis den pågældende befolkningssgruppe optræder i et begrænset antal aldersklasser, vil det kun være aktuelt at beregne de aldersbetingede fertilitetskvoteinter.

10) Når man anvender levendefødte i forbindelse med en opdeling efter fødselsnummer, bør fødselsnummeret gå på levendefødte.

kvinde. Formelt set på samme måde som et dødsfald. Fertilitetstavlen i forbindelse med førstegangsfødende kvinder vil da fra alder til alder vise afgangen blandt kvinder på grund af førstefødsler i løbet af den reproduktive periode, hvis dette fænomen repræsenterede den eneste afgangsårsag. Forholdet mellem \bar{I}_{50} og \bar{I}_{15} vil angive andelen af infertile kvinder.

Et ret anvendt mål for det samlede fertilitetsniveau i en befolkning er den generelle fertilitetskvotient, der defineres som forholdet mellem det samlede antal levendefødte i en bestemt periode, og den gennemlevede tid for den del af den kvindelige befolkning, som befinder sig i den reproduktive aldersperiode, dvs.

$$f_{15,50} = \frac{G}{\bar{A}_{15,50}} \quad (9.18)$$

Dette mål er et vejet gennemsnit af de aldersbetingede fertilitetskvotienter, idet vægtene er lig med den andel, som den pågældende aldersklasse udgør af den kvindelige befolkning i de reproduktive aldersklasser. (Se kapitel 7). Anvendelsen af dette mål til sammenligninger af fertilitetsniveauet i to eller flere befolkninger er derfor underkastet de begrænsninger, der er rede gjort for i forbindelse med omtalen af den summariske dødkvotient.

Det mest anvendte mål for det samlede fertilitetsniveau i en befolkning er den summariske fertilitetskvotient, der defineres som forholdet mellem det samlede antal levendefødte i en bestemt periode og summen af den gennemlevede tid for kvinder (\bar{A}) og mænd (\bar{A}) i samme periode

$$f = \frac{G}{\bar{A} + \bar{A}} = \frac{G}{\bar{A}} \quad (9.19)$$

Dette mål afhænger udeover de aldersbetingede fertilitetskvotienter og aldersfordelingen blandt kvinderne i den reproduktive periode også af, hvor stor en andel kvinderne i den reproduktive aldersklasse udgør af hele befolkningens størrelse. Den summariske fertilitetskvotient er således behæftet med endnu flere reservatiorer end den generelle fertilitetskvotient.

Ved sammenligninger af fertilitetsniveauet mellem to eller flere befolkninger anvendes derfor både direkte og indirekte standardisering.

Det bør til slut nævnes, at man også kan foretage en måling af befolkningens fertilitetsniveau ved hjælp af oplysninger, som indhentes ved en folketælling. Målingen sker ved at spørge hver kvinde, som var til stede på folketællingstidspunktet, om antallet af børn,¹¹⁾ hvorved man bliver i stand til at beregne antallet af børn pr. kvinde. Hvis der samtidig for hver kvinde foreligger oplysning om hendes fødselsår, civilstand, bopæl, socio-økonomisk stilling (egen og/eller ægtefællens) mv., kan man beregne og sammenligne antallet af børn pr. kvinde i en lang række forskellige befolkningsgrupper for samme fødselsår eller samme vielsesår.

Antallet af børn pr. kvinde er det endelige resultat af fertilitetsforholdene i en vis periode forud for folketællinger, afhængig af kvindens alder på folketællingstidspunktet. For 50-årige kvinder er antallet af børn pr. kvinde et resultat af fertilitetsforholdene indtil 35 år forud for folketællingstidspunktet,¹²⁾ hvorimod f.eks. antallet af børn for 30-årige kvinder er resultatet af fertilitetsforholdene indtil 15 år forud. Denne metode giver således mulighed for at måle det samlede resultat af fertilitetsforholdene i perioder, som strækker sig ret langt tilbage i tiden. Foreligger der også oplysning om fødselsåret for hvert enkelt barn, bliver det muligt at beregne aldersbetingede fertilitetskotienter.¹³⁾

Særlig i lande, hvor de statistiske oplysninger om befolkningens størrelse og antallet af fødsler tilbage i tiden er mangelfulde, repræsenterer denne metode ofte den eneste mulighed for at

11) Kan omfatte fødte (levende- og dødfødte) eller kun levendefødte.

12) Dette mål behøver ikke at være identisk med den samlede fertilitet (baseret på en direkte registrering af levendefødte) for den kvindegeneration, som er født 50 år tidligere. Ved folketællingsopgørelsen fås nemlig kun antallet af levendefødte pr. kvinde, blandt de kvinder som stadig er i live på folketællingstidspunktet, hvorimod fertiliteten for de af generationens kvinder, som er afgået ved døden inden 50-års fødselsdagen, også indgår i beregningen af den samlede fertilitet.

13) For gifte kan ægteskabets varighed træde i stedet for kvindens alder. For samme ægteskabsalder kan der igen sondres efter kvindealder.

skaffe sig et billede af fertilitetsforholdene. Endvidere er metoden velegnet, når man vil undersøge fertilitetsniveaueret i forskellige socio-økonomiske grupper, ligesom den også kan give mulighed for at studere fødselsintervallerne ("spacingen").

10 BEFOLKNINGSMODELLER

10.1 Konkrete befolkningsstrukturer

Når vi betragter en befolkningsstruktur på et givet tidspunkt, vil denne struktur være det endelige resultat af de demografiske komponenters sammenspil i fortiden. Betragter vi specielt befolkningens aldersstruktur, er antallet af personer f.eks. i aldersklassen 60-64 år bestemt af antallet af levendefødte 60-64 år tidligere samt de dødeligheds- og vandringsforhold, den pågældende 5-års generation har været underkastet gennem sin levetid. På samme måde vil det forholde sig med individerne i de øvrige aldersklasser. En forklaring af en befolknings aldersstruktur på et bestemt tidspunkt vil derfor kræve en detaljeret analyse af fødsels-, dødeligheds- og vandringsniveauet langt tilbage i tiden.¹⁾

Da en lukket befolknings vækst i en given tidsperiode fremkommer som forskellen mellem den summariske fertilitets- og dødskvotient, der igen er betinget af befolkningens struktur, vil befolkningens vækst også afhænge af fortidens demografiske hændelser.

Da de demografiske komponenter i mange tilfælde ændrer sig samtidig, ligesom der ofte hengår lang tid, inden virkningen slår igennem på befolkningens struktur og vækst, kan det være vanskeligt at skaffe sig en klar erkendelse af den endelige sammenhæng mellem hver af de demografiske komponenter og befolkningens struktur og vækst, hvis dette alene skal ske ved at observere konkrete befolkninger. Derfor prøver man at opnå denne viden ved at anvende befolkningsmodeller. Ved en befolkningsmodel vil vi her forstå en matematisk model, hvor man gennem opstilling af et passende lig-

1) Her har vi kun betragtet aldersstrukturen. Nøjagtig samme betragtninger gælder naturligvis mht. befolkningens civilstandsstruktur. Også denne vil være resultatet af sammenspillet mellem de demografiske komponenter i fortiden. I dette tilfælde må vi blot også inddrage vielses- og skilsmisseskomponenten.

ningssystem bliver i stand til at beregne, hvilken befolkningsstruktur og befolkningstilvækst, der resulterer af bestemte værdier af de demografiske komponenter. Man "simulerer" en befolkningsudvikling under forudsætning af konstante værdier af de demografiske komponenter. Det grundlæggende forhold bag anvendelse af disse modeller er, at en befolkning, der underkastes konstante værdier af de demografiske komponenter, efter en vis tid går over i en ligevegtstilstand, hvor befolkningens struktur og vækst er konstant. Dvs., at der opstår en entydig sammenhæng mellem de demografiske komponenter og befolkningens struktur og vækst. De to befolkningsmodeller, som skal omtales i det følgende, er baseret på lukkede befolkninger og inddrager således kun fertilitets- og dødelighedskomponenten.

10.2 Den stationære befolkning

Forudsætningerne i forbindelse med den befolkningsmodel, som bærer navnet den stationære befolkning, er følgende

1. En lukket befolkning.
2. Et konstant antal levendefødte pr. tidsenhed, dvs.
$$g(t) = g^2$$
3. Alle levendefødte uddør efter samme dødelighedstavle.
Dødelighedstavlen er således uændret gennem tiden,
dvs. $l^{(t)}(x) = l(x)$.

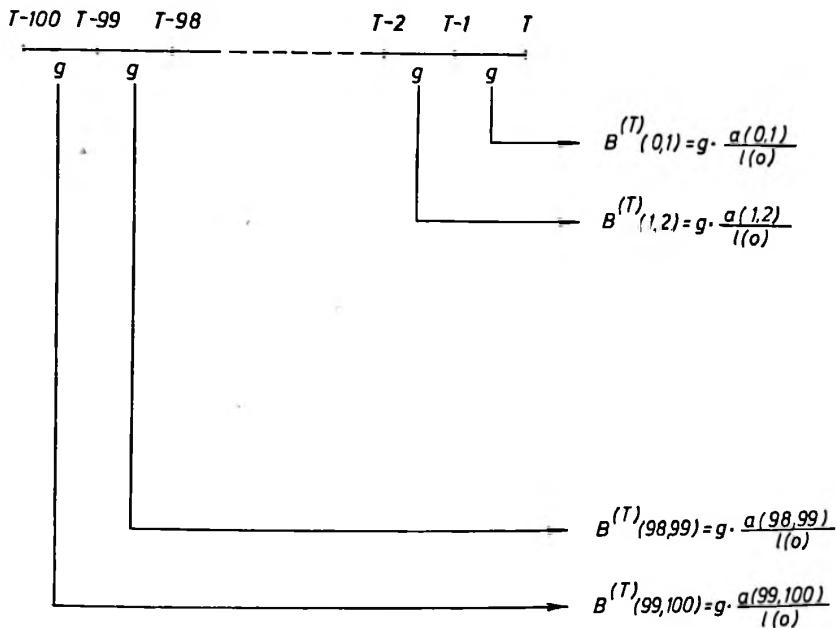
Vi vil nu finde frem til den ligevegtsbefolkning, som resulterer af disse forudsætninger. I det foreliggende tilfælde vil vi anvende 1-års aldersklasser og regne med en maksimal levealder på 100 år.

I det følgende skal det påvises, at med en maksimal levealder på 100 år vil vi nå frem til en stationær befolkning (konstant antal individer og konstant aldersstruktur), når de tre forudsætninger har været opfyldt i præcis 100 år eller mere.

På tidslinien (se figur 10.1), som strækker sig over 100 år har vi anført antallet af levendefødte hvert år. Vi opgør nu be-

-
- 2) I løbet af et år, vil antallet af levendefødte være

$$\int_{t=0}^1 g(t) dt = \int_{t=0}^1 g dt = g$$



Figur 10.1 Stationær befolkning.

folkningsens størrelse og struktur på tidspunkt T ved at føre hvert enkelt af fødselskuldene frem til dette tidspunkt på grundlag af samme dødelighedstavle. Da de enkelte generationer føres frem til et årsskifte, vil alle fra en årsgeneration befinde sig i samme 1-års aldersklasse.

Reduktionen af de enkelte fødselskuld frem til tidspunkt T på grund af dødeligheden sker på følgende måde, idet vi tager fødselskuldet fra år T-1 som eksempel. De af fødselskuldet, som fødes i begyndelsen af år T-1 har været under dødsrisiko 1 år, og af disse vil der være andelen $\frac{l(1)}{l(0)}$ tilbage. Af de, som f.eks. fødes midt i året, vil der være andelen $\frac{l(\frac{1}{2})}{l(0)}$ tilbage. Det antal, som vil være tilbage af hele fødselskuldet, bliver identisk med

$$B^{(T)}_{(0,1)} = \int_{t=0}^1 g(t) \frac{l(t)}{l(0)} dt \quad (10.1)$$

Da $g(t) = g$, og $l(0)$ er en konstant fås

$$B^{(T)}(0,1) = \frac{g}{I(0)} \int_{t=0}^1 l(t) dt = g \cdot \frac{a(0,1)}{I(0)}^3 \quad (10.2)$$

Befolkningsens samlede størrelse på tidspunkt T bliver da

$$B^{(T)} = \frac{g}{I(0)} \sum_{x=0}^{99} a(x, x+1) = g \cdot \frac{b(0)}{I(0)} = g \cdot e(0) \quad (10.3)$$

Dvs., at når alle individerne i befolkningen har været underkastet de mht. fødsel og død gældende forudsætninger, er befolkningens størrelse identisk med produktet af antallet af levendefødte pr. tidsenhed og middellevetiden for 0-årige. Da begge disse størrelser ifølge forudsætningerne er konstante, gælder det samme om befolkningens størrelse.

Ligning (10.2) viser, at antallet af individer i de enkelte aldersklasser også er konstant.

Den relative aldersfordeling bliver identisk med

$$w(x, x+1) = \frac{B^{(T)}(x, x+1)}{B^{(T)}} = \frac{g \cdot \frac{a(x, x+1)}{I(0)}}{\frac{B^{(T)}}{B}} = f \cdot \frac{a(x, x+1)}{I(0)} \quad (10.4)$$

hvor f er den summariske fertilitetskvotient (se 9.19).

En beregning af befolkningen til tidspunkt $T+1$ vil give en befolkning, som i alle henseender er identisk med befolkningen på tidspunkt T.⁴⁾

Hvis vi derimod opgjorde befolkningen til tidspunkt $T-1$ og samtidig forudsatte et andet antal levendefødte pr. tidsenhed før $T-100$, f.eks. g' , ville befolkningen til dette tidspunkt være forskellig fra befolkningen i begyndelsen af år T.⁵⁾

3) Dette resultat kan umiddelbart generaliseres til

$$B^{(T)}(x, x+k) = g \cdot \frac{a(x, x+k)}{I(0)}$$

4) Antallet af individer f.eks. i aldersklassen af 1-årige vil bestå af tilbageværende individer blandt levendefødte i år $T-1$. Dvs.

$$B^{(T+1)}(1,2) = g \cdot \frac{a(1,2)}{I(0)} = B^{(T)}(1,2)$$

5) Antallet af individer i den øverste aldersklasse bliver nemlig

$$B^{(T-1)}(99,100) = g' \cdot \frac{a(99,100)}{I(0)} \neq B^{(T)}(99,100)$$

Ligning (10.2) og (10.3) viser, at arealet under overlevelseskuren giver en grafisk fremstilling af den stationære befolkning, hvis $l(0)$ sættes lig med g . Hele arealet under overlevelseskuren udtrykker det samlede antal individer i befolkningen, og arealet mellem x og $x+k$ giver antallet af individer i den enkelte aldersklasse.

Når befolkningens størrelse er konstant, må antallet af døde pr. tidsenhed være lig med antallet af levendefødte pr. tidsenhed og dermed konstant.

Dvs.

$$d(t) = d = g \quad (10.5)$$

$$\frac{d}{B} = \frac{g}{B} \quad (10.6)$$

$$m = \frac{g}{g \cdot e(0)} = \frac{1}{e(0)} \quad (10.7)$$

Dvs., at i den stationære befolkning er den summariske dødskvotient (m) lig med den reciproke værdi af middellevetiden for 0-årige.

Vi kan således fastslå, at den stationære befolkning er karakteriseret ved, at alle absolutte størrelser (befolkningens størrelse, antallet af individer i de enkelte aldersklasser, antallet af levendefødte og døde) er konstante.

I Appendiks I er vist en beregning af en stationær befolkning med udgangspunkt i en befolkning af vilkårlig størrelse og med en vilkårlig aldersfordeling. Den pågældende befolkning modtager hvert år et konstant antal levendefødte, og alle individer uddør efter samme dødelighedstavle.⁶⁾ Af beregningen fremgår, at i løbet af nøjagtig 100 år går befolkningen over i en stationær ligevægtstilstand, hvor alle absolutte (og dermed også alle relative) variable bliver konstante, idet ligevægtstilstanden er uafhængig af begyndelsestilstanden.

Det skal til slut nævnes, at man ved beregningen af en konkret stationær befolkning kan anvende en dødelighedstavle for såvel mænd som kvinder. Beregningen gennemføres da blot for hvert køn

6) Den tekniske fremgangsmåde ved en sådan befolkningsfremskrivning vil blive omtalt i kapitel 11 om befolkningens vækst.

for sig, idet antallet af levendefødte pr. tidsenhed splittes op mellem drenge og piger på grundlag af en konstant kønsproportion.⁷⁾ Til sidst adderes den mandlige og den kvindelige befolkning fra aldersklasse til aldersklasse.

Den stationære befolkningsmodel kan bl.a. anvendes til at rekonstruere de demografiske relationer i en befolkning, for hvilken man kun besidder fragmentariske oplysninger, forudsat at den pågældende befolkning med god tilnærmelse kan betragtes som stationær, dvs. at den har været konstant gennem en længere periode. Hvis vi f.eks. for en sådan konkret befolkning blot har kendskab til det årlige antal døde fordelt efter alder, er man i stand til at beregne befolkningens størrelse ved hjælp af (10.3) og (10.5).

10.3 Den stabile befolkning

10.3a Teorien for den stabile befolkning

Forudsætningerne i forbindelse med den anden befolkningsmodel, nemlig den stabile befolkning, er følgende

1. En lukket befolkning.
2. Kvinderne føder i overensstemmelse med en fertilitetsfunktion, som er konstant gennem tiden, dvs.
 $f^{(t)}(x) = \bar{f}(x)$.
3. Alle levendefødte uddør efter samme dødelighedsstavle. Dødelighedstavlen er således uændret gennem tiden, dvs. $I^{(t)}(x) = I(x)$.⁸⁾

Det fremgår af forudsætning 2, at til forskel fra den stationære befolkning, er det ikke antallet af levendefødte pr. tidsenhed, som er konstant gennem tiden, men derimod $\bar{f}(x)$.

7) Kønsproportionen er identisk med antallet af levendefødte drenge pr. levendefødt pige.

8) Udledningen af teorien for den stabile befolkning sker på grundlag af den kvindelige del af befolkningen, således at $\bar{f}(x)$ her kun omfatter antallet af levendefødt pige pr. kvinde, og $I(x)$ er en dødelighedstavle for kvinder. Vi vil senere vise, hvorledes den mandlige del af befolkningen inddrages ved beregningen af en konkret stabil befolkning, idet den mandlige befolkning på grund af den konstante kønsproportion udgør en konstant andel af den kvindelige befolkning i ligevægtstilstanden. Dødelighedstavlen for mænd forudsættes også uændret gennem tiden.

Vi søger nu den befolkning, som resulterer af disse forudsætninger, idet vi ligesom i forbindelse med den stationære befolkning vil regne med 1-års aldersklasser og en maksimal levealder på 100 år. Medens vi for den stationære befolkning ved hjælp af enkle matematiske hjælpemidler kunne påvise, at denne gik over i en ligevægtstilstand efter at have været underkastet de pågældende forudsætninger, og samtidig beregne de demografiske relationer i ligevægtstilstanden, gælder det samme ikke om den stabile befolkning. Dette kræver langt mere avancerede matematiske hjælpemidler. Vi vil derfor betjene os af en anden fremgangsmåde.

Først påvises ved et numerisk eksempel, at en vilkårlig befolkning, som er underkastet de specificerede forudsætninger over et længere tidsrum, går over i en ligevægtstilstand, hvor alle relative demografiske variable (befolkningens aldersstruktur, samt den summariske døds- og fertilitetskvotient) er konstante. Størrelsen af de demografiske variable i ligevægtstilstanden er helt igennem bestemt af $\bar{F}(x)$ og $\bar{I}(x)$, således at den stabile befolkningens struktur er ganske uafhængig af befolkningens struktur på begyndelsestidspunktet.

Den numeriske verifikation heraf er foretaget ved at fremskrive to befolkninger med forskellig aldersstruktur på grundlag af de samme værdier af dødelighedstavlen og fertilitetsfunktionen.⁹⁾ (Se appendiks II). Det fremgår heraf, at begge befolkninger efter godt 100 år antager samme aldersstruktur og samme værdier af den summariske fertilitets- og dødkvotient. Det er vigtigt at bemærke, at til forskel fra den stationære befolkning opnås ligevægtstilstanden i dette tilfælde ikke efter et ganske nøje fikseret antal tidsperioder. For den stabile befolkning hengår der - alt andet lige - længere tid, før ligevægtstilstanden indtræder end for den stationære befolkning. Hvor lang tid der hengår, inden ligevægtstilstanden nås, afhænger blandt andet af, hvor meget aldersfordelingen i begyndelsessituationen afviger fra aldersfordelingen i ligevægtstilstanden samt fertilitetsfunktionens form. Jo mere de to aldersstrukturer afviger fra hinanden, og jo mere fertiliteten er koncentreret på få aldersklasser, jo længere tid hengår der, før ligevægtstilstanden indtræder.

9) Den tekniske fremgangsmåde ved disse befolkningsfremskrivninger vil blive omtalt i kapitel 11 om befolkningens vækst.

Den i appendiks II foretagne beregning er imidlertid overordentlige arbejdskrævende. Derfor ønsker vi at blive i stand til at beregne de demografiske variable i ligevægtstilstanden, uden at det er nødvendigt at udføre en omfattende fremregning af befolkningen. Vi må da søge at finde frem til en enkel relation mellem på den ene side $\bar{F}(x)$ og $\bar{I}(x)$ og på den anden side \bar{w} (aldersstrukturen), \bar{F} (den summariske fertilitetskvotient) og \bar{m} (den summariske dødskvotient).

Som vist i det numeriske eksempel er \bar{F} og \bar{m} konstante i ligevægtstilstanden og dermed uafhængig af tiden. Den relative befolkningstilvækst pr. tidsenhed (r^{10}) vil være lig med

$$r = \bar{F} - \bar{m} \quad (10.8)$$

og dermed uafhængig af tiden. Den stabile befolkning vokser således med en konstant relativ tilvækst pr. tidsenhed (eksponentiel vækst).

Dvs.

$$\bar{B}(T+t) = \bar{B}(T) \cdot e^{rt} \quad (10.9)$$

hvor e er grundtallet i den naturlige logaritme.

Det samme gælder antallet af levendefødte pr. tidsenhed, idet vi har, at

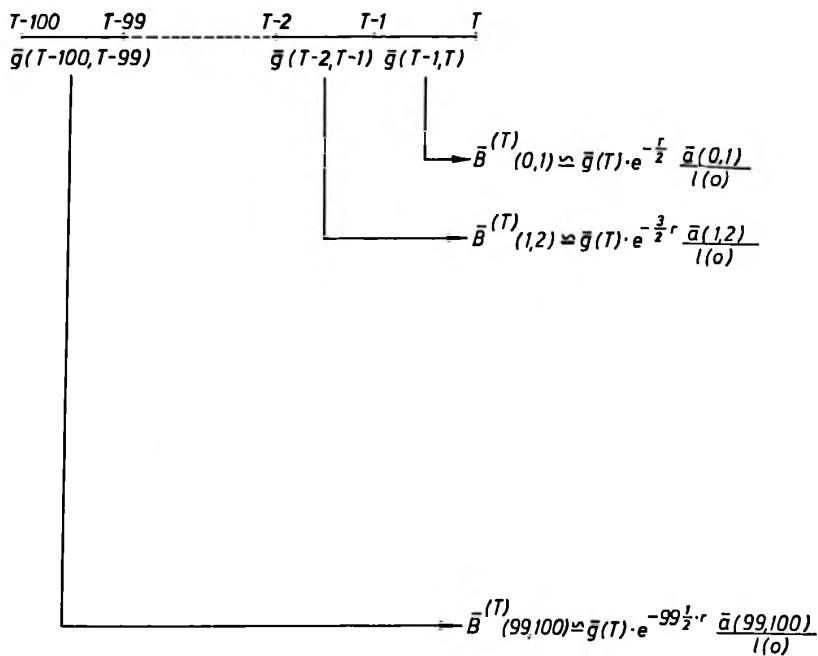
$$\frac{\bar{g}(T+t)}{\bar{B}(T+t)} = \frac{\bar{g}(T)}{\bar{B}(T)} = \bar{F} \quad (10.10)$$

$$\bar{g}(T+t) = \bar{g}(T) \cdot \frac{\bar{B}(T+t)}{\bar{B}(T)} \quad (10.11)$$

Ved hjælp af (10.9) fås

$$\bar{g}(T+t) = \bar{g}(T) \cdot e^{rt} \quad (10.12)$$

10) Da den mandlige befolkning i ligevægtstilstanden udgør en konstant andel af den kvindelige befolkning, vil r være den samme for de to køn.



Figur 10.2 Stabil befolkning.

På tidslinien (se figur 10.2), som strækker sig over 100 år, vil vi på principielt samme måde som i forbindelse med den statinære befolkning beregne den stabile befolknings størrelse og aldersfordeling til tidspunkt T ved at føre hvert enkelt af generationerne fra de sidste 100 år frem til dette tidspunkt.

Det forudsættes, at befolkningen gennem de sidste 100 år har været i den stabile ligevægtstilstand, således at antallet af levende fødte pr. tidsenhed i disse 100 år er vokset eksponentielt.

Antallet af individer i aldersklassen af 0-årige bliver da

$$\bar{B}^{(T)}(0,1) = \int_{t=0}^1 \bar{g}(T-t) \cdot \frac{\bar{l}(t)}{\bar{l}(0)} dt \quad (10.13)$$

Ved hjælp af (10.12) kan (10.13) omformes til følgende

$$\bar{B}^{(T)}(0,1) = \int_{t=0}^1 \bar{g}(T) e^{-rt} \frac{\bar{l}(t)}{\bar{l}(0)} dt \quad (10.14)$$

$$\approx \bar{g}(T) \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \int_{t=0}^{\frac{T}{2}} \frac{\bar{I}(t)}{I(0)} dt \quad (10.15)$$

$$= \bar{g}(T) \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \frac{\bar{a}(0,1)}{I(0)} \quad (10.16)$$

For en vilkårlig 1-års aldersklasse fås da

$$\bar{B}^{(T)}(x, x+1) \approx \bar{g}(T) \cdot e^{-r(x+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\bar{a}(x, x+1)}{I(0)} \quad (10.17)$$

Den relative aldersfordeling bliver

$$\bar{w}(x, x+1) = \frac{\bar{B}^{(T)}(x, x+1)}{\bar{B}^{(T)}} \approx \bar{f} \cdot e^{-r(x+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\bar{a}(x, x+1)}{I(0)} \quad (10.18)$$

Den generelle formel er

$$\bar{w}(x, x+k) \approx \bar{f} \cdot e^{-r(x+\frac{k}{2})} \cdot \frac{\bar{a}(x, x+k)}{I(0)} \quad (10.18a)$$

Som det fremgår af (10.18) er den relative aldersstruktur uafhængig af tiden.

For at beregne $\bar{w}(x, x+1)$ er det nødvendigt at have kendskab til r og $\bar{a}(x, x+1)$. Af disse to størrelser har vi kun direkte kendskab til $\bar{a}(x, x+1)$. Hvis vi kendte r , ville beregningen af $\bar{w}(x, x+1)$ ikke frembyde noget problem, idet vi ud fra en vilkårlig værdi af $\bar{g}(T)$, f.eks. 100000, kunne udregne antallet af individer i hver enkeltaldersklasse ved hjælp af (10.17) og dermed størrelsen af den samlede befolkning ($\bar{B}^{(T)}$), hvorefter beregningen af $\bar{w}(x, x+1)$ følger umiddelbart. \bar{f} beregnes som forholdet mellem $\bar{g}(T)$ og $\bar{B}^{(T)}$.

11) Overgangen fra (10.14) til (10.15) foretages ved hjælp af middelværdisætningen for integraler, som udsiger, at man med god tilnærmede kan foretage integrationen af et produkt af to funktioner over et givet interval ved at sætte den ene funktion uden for integraltegnet og lade den uafhængige variable antage en værdi midt i intervallet, hvis begge funktioner udvikler sig jævnt i det betragtede interval.

Den relative tilvækst pr. tidsenhed (r) i ligevægtssituationen findes på følgende måde

$$\bar{g}(T) \approx \sum_{x=15}^{49} B^{(T)}(x, x+1) \cdot \bar{f}(x+\frac{1}{2}) \quad (10.19)$$

I (10.19) er antallet af levendefødte pr. tidsenhed udtrykt ved en multiplikation af antallet af kvinder i hver 1-års aldersklasse på tidspunkt T med fertilitetsintensiteten midt i aldersklassen, hvorefter alle produkterne summeres. Ved at indsætte udtrykket for $B^{(T)}(x, x+1)$ fra (10.17) i (10.19) fås

$$\bar{g}(T) \approx \bar{g}(T) \sum_{x=15}^{49} e^{-r(x+\frac{1}{2})} \cdot \bar{f}(x+\frac{1}{2}) \cdot \frac{\bar{a}(x, x+1)}{I(0)} \quad (10.20)$$

$$1 \approx \sum_{x=15}^{49} e^{-r(x+\frac{1}{2})} \cdot \bar{f}(x+\frac{1}{2}) \cdot \frac{\bar{a}(x, x+1)}{I(0)} \quad (10.21)$$

Den generelle approximationsformel er

$$1 \approx \sum e^{-r(x+\frac{k}{2})} \cdot \bar{f}(x+\frac{k}{2}) \cdot \frac{\bar{a}(x, x+k)}{I(0)} \quad (10.21a)$$

Denne ligning kan imidlertid ikke løses eksplisit med hensyn til r , således at man ved umiddelbart at indsætte værdierne for $\bar{f}(x+\frac{1}{2})$ og $\bar{a}(x, x+1)$, som vi jo kender, kan finde r . Derimod kan r findes ved at "iterere" sig frem, således at man indsætter en vilkårlig værdi af r og derefter beregner værdien af ligningens højreside. Hvis værdien f.eks. er større end 1, forsøges med en større værdi af r , da $e^{-r(x+\frac{1}{2})}$ er en aftagende funktion af r . Således fortsættes indtil udtrykket under summationstegnet antager værdien 1.

Det er imidlertid muligt at foretage en yderligere omformning af (10.21), der gør det muligt at finde en approximativ ligning, der kan løses eksplisit mht. r . Ved hjælp af denne ligning kan man beregne en foreløbig værdi af r , som kan bruges ved den første indsætning i (10.21). Den pågældende værdi af r ligger imidlertid så tæt op ad den værdi, som findes ved hjælp af "iterationen", at man som regel undlader at foretage denne.

Ligesom der for integraler eksisterer en middelværdisætning, gælder det samme for summer. Anvendt på ligning (10.21) indebærer sætningen, at vi f.eks. kan sætte funktionen $e^{-r(x+\frac{1}{2})}$ uden for summationstegnet som en konstant ved at indsætte en værdi af x , beliggende mellem 15 og 50. Da den ene af de tre funktioner, nemlig $\bar{f}(x)$, ikke udvikler sig jævn for voksende x , kan vi ikke vælge en værdi af x midt i intervallet. En god approximation opnås derimod ved at vælge den gennemsnitlige alder (\bar{x}) for fødende kvinder i en generation, som føder og dør i overensstemmelse med den valgte $\bar{I}(x)$ - og $\bar{f}(x)$ -funktion.

Dvs.

$$\bar{x} = \frac{\int_{x=15}^{50} x \cdot \bar{f}(x) \cdot \frac{\bar{I}(x)}{\bar{I}(0)} dx}{\int_{x=15}^{50} \bar{f}(x) \cdot \frac{\bar{I}(x)}{\bar{I}(0)} dx} \quad (10.22)$$

(10.21) kan derefter skrives

$$e^{r\bar{x}} \approx \sum_{x=15}^{49} \bar{f}(x+\frac{1}{2}) \cdot \frac{\bar{a}(x, x+1)}{\bar{I}(0)} \quad (10.23)$$

eller generelt

$$e^{r\bar{x}} \approx \sum \bar{f}(x+\frac{k}{2}) \cdot \frac{\bar{a}(x, x+k)}{\bar{I}(0)} \quad (10.23a)$$

$$x = 15, 15+k, 15+2k, \dots, 50-k$$

Højresiden af (10.23) kan let beregnes. Denne sum udtrykker, hvor mange levendeføde piger der i løbet af den reproduktive periode fødes pr. kvinde af en generation, som føder i overensstemmelse med den givne fertilitetsfunktion ($\bar{f}(x)$) og uddør efter den givne overlevelsestavle ($\bar{I}(x)$). Denne størrelse kaldes nettoreproduktionstallet og betegnes med s_n .¹²⁾

12) Det eksakte udtryk for nettoreproduktionstallet er

$$s_n = \int_{x=15}^{50} \bar{f}(x) \cdot \frac{\bar{I}(x)}{\bar{I}(0)} dx$$

Fodnoten fortsættes næste side.

Vi får da

$$e^{rx} \approx s_n \quad (10.24)$$

$$r \approx \frac{1}{\bar{x}} \cdot \log_e s_n \quad (10.25)$$

hvorefter r let kan beregnes.

Til slut vil vi vise, at den stationære befolkning er et specielt tilfælde af den stabile befolkning, idet den stationære befolkning er identisk med en stabil befolkning, hvor $r = 0$.

Hvis vi nemlig sætter $r = 0$ i (10.18), fås (10.4), som et udtryk for identiteten mellem aldersfordelingen i de to befolkninger. Sættes endvidere $r = 0$ i (10.24) fås, at nettoreproduktionsstallet i den stationære befolkning naturligvis må være lig med 1. I den stationære befolkning må hver kvindegeneration lige netop være i stand til at reproducere sig selv.

Det er herefter klart, at vi også kan fremstille en stationær befolkning ved at fremskrive en vilkårlig befolkning på grundlag af en fertilitetsfunktion og en dødelighedstavle, der forholder sig således til hinanden, at nettoreproduktionstallet bliver lig med 1.

10.3b Konstruktionen af den stabile befolkning

Ved beregningen af en konkret stabil befolkning vil der foreligger en dødelighedstavle for henholdsvis kvinder (\bar{I}_x) og

12) Fortsat fra forrige side.

Hvis dødeligheden blandt kvinder er nul indtil 50-års alderen ($I(0) = \bar{I}(50)$), antager udtrykket følgende form

$$s_b = \int_{x=15}^{50} \bar{I}(x) dx$$

Denne størrelse (bruttoreproduktionstallet) viser, hvor mange levendefødte piger, der fødes i løbet af den reproduktive periode pr. kvinde, hvis disse føder i overensstemmelse med den givne fertilitetsfunktion, og ingen af kvinderne dør inden 50-års alderen.

mænd ($\bar{I}_{x, \cdot}$) samt de aldersbetingede fertilitetskvotienter ($\bar{F}_{x, x+1}$). I det foreliggende tilfælde tænker vi os, at værdien af de to funktioner kendes for heltallige værdier af x , idet $c = 100$.¹³⁾ Vi kan da beregne $w(x, x+1)$, r samt f og m i den samlede stabile befolkning (mænd og kvinder), som følger af disse forudsætninger.

På grundlag af (10.22) beregnes den gennemsnitlige alder for fødende kvinder (\bar{x}) efter følgende formel

$$\bar{x} = \frac{\sum_{x=15}^{49} (x + \frac{1}{2}) \cdot \bar{F}_{x, x+1} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+1}}{10}}{\sum_{x=15}^{49} \bar{F}_{x, x+1} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+1}}{10}} \quad (10.26)$$

Den generelle beregningsformel er

$$\bar{x} = \frac{\sum (x + \frac{k}{2}) \cdot \bar{F}_{x, x+k} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+k}}{10}}{\sum \bar{F}_{x, x+k} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+k}}{10}} ; \quad x = 15, 15+k, 15+2k, \dots, 50-k \quad (10.26a)$$

Herefter kan r beregnes ved indsætning i (10.27), som er fremkommet på basis af (10.23) og (10.25)

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\bar{x}} \cdot \log_e \sum_{x=15}^{49} \bar{F}_{x, x+1} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+1}}{10} \\ &= \frac{1}{\bar{x}} \cdot \log_e s_n \end{aligned} \quad (10.27)$$

13) I almindelighed vil fertilitetsniveauet være angivet på grundlag af det samlede antal levendefødte i hver aldersklasse, ($f_{x, x+k}$), men på grund af den konstante kønsproportion (z) er det en enkel sag at finde $\bar{F}_{x, x+k}$ og $\bar{f}_{x, x+k}$. Vi har nemlig

$$\bar{F}_{x, x+k} = \frac{1}{1+z} \cdot f_{x, x+k} \quad \text{og} \quad \bar{f}_{x, x+k} = \frac{z}{1+z} \cdot f_{x, x+k}$$

Den generelle formel er

$$r = \frac{1}{x} \cdot \log_e \Sigma \bar{F}_{x, x+k} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+k}}{\bar{l}_0} \quad 14) \quad (10.27a)$$

$$x = 15, 15+k, 15+2k, \dots, 50-k$$

Antallet af kvinder i hver enkelt 1-års aldersklasse beregnes efter følgende beregningsformel, som er udviklet fra (10.17)

$$\bar{B}_{x, x+1}^{(T)} = \bar{g}(T) \cdot e^{-r(x+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+1}}{\bar{l}_0} \quad (10.28)$$

idet $\bar{g}(T)$ f.eks. sættes lig med 100000.

Den generelle formel er

$$\bar{B}_{x, x+k}^{(T)} = \bar{g}(T) \cdot e^{-r(x+\frac{k}{2})} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+k}}{\bar{l}_0} \quad (10.28a)$$

Herefter beregnes antallet af mænd i de enkelte 1-års aldersklasser efter formlen

$$\bar{B}_{x, x+1}^{(T)} = \bar{g}(T) \cdot e^{-r(x+\frac{1}{2})} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+1}}{\bar{l}_0} \quad (10.29)$$

idet

$$\bar{g}(T) = z \cdot \bar{g}(T) \quad (10.30)$$

Den relative aldersfordeling i den samlede stabile befolkning bliver da

14) Medens den generelle beregningsformel for nettoreproduktions-tallet således er

$$s_n = \Sigma \bar{F}_{x, x+k} \cdot \frac{\bar{a}_{x, x+k}}{\bar{l}_0}; x = 15, 15+k, 15+2k, \dots, 50-k$$

bliver beregningsformlen for bruttoreproduktionstallet

$$s_b = \Sigma \bar{F}_{x, x+k}; x = 15, 15+k, 15+2k, \dots, 50-k$$

$$w_{x,x+1} = \frac{\sum_{x=0}^{99} (\bar{B}_{x,x+1}^{(T)} + \bar{\bar{B}}_{x,x+1}^{(T)})}{\sum_{x=0}^{99} (\bar{B}_{x,x+1}^{(T)} + \bar{\bar{B}}_{x,x+1}^{(T)})} \quad (10.31)$$

f findes ved hjælp af følgende formel

$$f = \frac{\sum_{x=0}^{99} (\bar{g}(T) + \bar{\bar{g}}(T))}{\sum_{x=0}^{99} (\bar{B}_{x,x+1}^{(T)} + \bar{\bar{B}}_{x,x+1}^{(T)})} \quad (10.32)$$

Endelig beregnes m som differencen mellem f og r, dvs.

$$m = f - r \quad (10.33)$$

10.3c Anvendelsen af den stabile befolkning

Den stabile befolkning anvendes for det første til at skaffe sig klarhed over sammenhængen mellem på den ene side aldersfordelingen og tilvækstforholdene i en befolkning og på den anden side fertilitets- og dødelighedsniveaueret. Ved beregningen af den stabile befolkning i ligevægtstilstanden for alternative fertilitets- og dødelighedsniveauer, kan man f.eks. undersøge sammenhængen mellem aldersfordelingen og fertilitetsniveauets højde for konstant dødelighedsniveau.¹⁵⁾

En anden vigtig anvendelse af den stabile befolkning finder sted i forbindelse med rekonstruktionen af de demografiske data for befolkninger i lande, hvor registreringen er ufuldkommen. Hvis en befolkning er inde i en ligevægtstilstand, vil man ved hjælp af sporadiske demografiske data kunne rekonstruere andre demografiske variable gennem brugen af den stabile befolkning.¹⁶⁾

15) Se United Nations: The Aging of Population and Its Economic and Social Implications, Population Studies No. 26, New York, 1956.

16) Se United Nations: Methods of Estimating Basic Demographic Measures from Incomplete Data, Manual IV, New York, 1967.

11 BEFOLKNINGENS VÆKST

11.1 Reproduktion

Ved en befolknings reproduktionsevne forstås befolkningens evne til på længere sigt at opretholde eller forøge sin størrelse under bibeholdelse af det pågældende fertilitets- og dødelighedsniveau. I nærværende afsnit vil vi kort gennemgå de mål, som man anvender til at måle befolkningens vækst, og undersøge i hvilket omfang disse mål giver pålidelige udsagn om befolkningstilvækstens størrelse på længere sigt. Ved befolkningsmæssige reproduktionsbetragtninger vil det således altid være forudsat, at befolkningens fertilitetsfunktion og dødelighedstavle forbliver konstante fremover. Alle de følgende betragtninger vedrører en lukket befolkning med mindre andet udtrykkeligt bemærkes.

Den naturlige befolkningstilvækst, som er forskellen mellem den summariske fertilitets- og dødskvotient, er det simpleste mål for tilvækstforholdene i en befolkning. Målet er rent konstaterende og giver blot udtryk for den relative befolkningstilvækst i løbet af den betragtede tidsperiode. Tilvæksten kan være enten negativ, nul eller positiv.

Målet udsiger derimod ikke noget om befolkningstilvæksten på længere sigt, da målet er afhængigt af befolkningens struktur. I forbindelse med udviklingen af de stabile befolkninger i appendiks II så vi, at strukturen kunne undergå store ændringer under en befolkningsfremskrivning med konstant fertilitets- og dødelighedsniveau i de enkelte aldersklasser. Derfor kan en positiv naturlig befolkningstilvækst i løbet af 20-30 år ændres til en negativ befolkningstilvækst, hvis det givne fertilitets- og dødelighedsniveau f.eks. er ensbetydende med en stærkt stigende andel af ældre personer i befolkningen og dermed en øget summarisk dødskvotient.

$$w_{x,x+1} = \frac{\bar{B}_{x,x+1}^{(T)} + \bar{\bar{B}}_{x,x+1}^{(T)}}{\sum_{x=0}^{99} (\bar{B}_{x,x+1}^{(T)} + \bar{\bar{B}}_{x,x+1}^{(T)})} \quad (10.31)$$

f findes ved hjælp af følgende formel

$$f = \frac{\bar{g}(T) + \bar{\bar{g}}(T)}{\sum_{x=0}^{99} (\bar{B}_{x,x+1}^{(T)} + \bar{\bar{B}}_{x,x+1}^{(T)})} \quad (10.32)$$

Endelig beregnes m som differencen mellem f og r, dvs.

$$m = f - r \quad (10.33)$$

10.3c Anvendelsen af den stabile befolkning

Den stabile befolkning anvendes for det første til at skaffe sig klarhed over sammenhængen mellem på den ene side aldersfordelingen og tilvækstforholdene i en befolkning og på den anden side fertilitets- og dødelighedsniveaueret. Ved beregningen af den stabile befolkning i ligevægtstilstanden for alternative fertilitets- og dødelighedsniveauer, kan man f.eks. undersøge sammenhængen mellem aldersfordelingen og fertilitetsniveauets højde for konstant dødelighedsniveau.¹⁵⁾

En anden vigtig anvendelse af den stabile befolkning finder sted i forbindelse med rekonstruktionen af de demografiske data for befolkninger i lande, hvor registreringen er ufuldkommen.

Hvis en befolkning er inde i en ligevægtstilstand, vil man ved hjælp af sporadiske demografiske data kunne rekonstruere andre demografiske variable gennem brugen af den stabile befolkning.¹⁶⁾

15) Se United Nations: The Aging of Population and Its Economic and Social Implications, Population Studies No. 26, New York, 1956.

16) Se United Nations: Methods of Estimating Basic Demographic Measures from Incomplete Data, Manual IV, New York, 1967.

11 BEFOLKNINGENS VÆKST

11.1 Reproduktion

Ved en befolknings reproduktionsevne forstås befolkningens evne til på længere sigt at opretholde eller forøge sin størrelse under bibeholdelse af det pågældende fertilitets- og dødelighedsniveau. I nærværende afsnit vil vi kort gennemgå de mål, som man anvender til at måle befolkningens vækst, og undersøge i hvilket omfang disse mål giver pålidelige udsagn om befolkningstilvækstens størrelse på længere sigt. Ved befolkningstmæssige reproduktionsbetragtninger vil det således altid være forudsat, at befolkningens fertilitetsfunktion og dødelighedstavle forbliver konstante fremover. Alle de følgende betragtninger vedrører en lukket befolkning med mindre andet udtrykkeligt bemærkes.

Den naturlige befolkningstilvækst, som er forskellen mellem den summariske fertilitets- og dødskvotient, er det simpleste mål for tilvækstforholdene i en befolkning. Målet er rent konstaterende og giver blot udtryk for den relative befolkningstilvækst i løbet af den betragtede tidsperiode. Tilvæksten kan være enten negativ, nul eller positiv.

Målet udsiger derimod ikke noget om befolkningstilvæksten på længere sigt, da målet er afhængigt af befolkningens struktur. I forbindelse med udviklingen af de stabile befolkninger i appendiks II så vi, at strukturen kunne undergå store ændringer under en befolkningsfremskrivning med konstant fertilitets- og dødelighedsniveau i de enkelte aldersklasser. Derfor kan en positiv naturlig befolkningstilvækst i løbet af 20-30 år ændres til en negativ befolkningstilvækst, hvis det givne fertilitets- og dødelighedsniveau f.eks. er ensbetydende med en stærkt stigende andel af ældre personer i befolkningen og dermed en øget summarisk dødskvotient.

Under gennemgangen af den stabile befolkning introducerede vi nettorepræduktionstallet. Ved hjælp af dette mål, kombineret med gennemsnitsalderen for fødende kvinder (generationsafstanden) kunne vi beregne tilvæksten pr. tidsenhed i den stabile befolkning. I en aktuel befolkning vil man, på grundlag af fertilitets- og dødelighedsfaringerne i et bestemt år, kunne udregne nettorepræduktionstallet og gennemsnitsalderen for fødende kvinder og derefter beregne en befolkningstilvækst pr. tidsenhed. Denne størrelse udsiger, hvorledes den aktuelle befolkning vil vokse på længere sigt (normalt efter det antal tidsperioder, som hengår, inden den aktuelle befolkning under bibeholdelse af årets fertilitets- og dødelighedsniveau når over i den stabile ligevegtstilstand). Størrelsen af denne tilvækst vil derfor i almindelighed afvige fra den naturlige befolkningstilvækst i det pågældende år.

11.2 Prognoser¹⁾

En befolkningsprognose er en talmæssig vurdering af befolkningsens størrelse til en række fremtidige tidspunkter. Denne vurdering strækkes sjældent mere end 30-40 år frem i tiden. Før i tiden indskrænkte man sig i almindelighed til at beregne den samlede befolknings størrelse, medens man i dag næsten altid beregner antallet af mænd og kvinder i de forskellige aldersklasser.

Befolkningsprognosene danner et uundværligt grundlag for den fysiske og økonomiske planlægning i samfundet. Dette indses særligt tydeligt, når det gælder investeringsplanlægningen. Behovet for vuggestuer, børnehaver, skoler, boliger, sygehuse osv. i fremtiden er jo helt afhængig af det fremtidige antal individer i bestemte aldersklasser. Da alle disse investeringer må igangsættes et godt stykke tid inden behovet melder sig, skal der foretages en vurdering af det fremtidige behov, for at investeringen kan påbegyndes i rette tid. Disse eksempler viser også, at skal befolk-

1) I modsætning til befolkningsprognosene, som tilsigter at vurdere befolkningsens fremtidige størrelse så eksakt som muligt, har man den hypotetiske befolkningsfremskrivning, der blot har til hensigt at "udmålte" de fremtidige konsekvenser af bestemte fertilitets- og dødelighedsforudsætninger, uanset om disse er virkelighedsnære eller ej.

ningsprognosen have nogen værdi som planlægningsredskab, må befolkningen i hvert fald være opdelt efter køn og alder.

I det følgende skal vi gennemgå tre forskellige prognosemetoder.

11.2a Komponentmetoden

Ved komponentmetoden fremføres først mænd og kvinder i de enkelte aldersklasser ved hjælp af en dødelighedstavle for hvert af de to køn. Dernæst udregnes gennemlevet tid for kvinderne i de forskellige aldre inden for den reproduktive periode, hvorefter man ved hjælp af et sæt af aldersbetingede fertilitetskvotienter kan beregne det fremtidige antal levendefødte. Det beregnede antal levendefødte deles efter køn ved at forudsætte en konstant kønsproportion. De levendefødte drenge og piger reduceres herefter ved hjælp af de givne dødelighedstavler.

Fremføringen af antallet af personer i de forskellige aldersklasser sker på følgende måde. I kapitel 10, note 4 fandt vi f.eks. antallet af 1-årige personer til tidspunkt $T+1$ ved at fremføre antallet af levendefødte fra år $T-1$:

$$B^{(T+1)}_{(1,2)} = g \cdot \frac{a_{(1,2)}}{I(0)} \quad (11.1)$$

Dette antal kan imidlertid også findes med udgangspunkt i antallet af 0-årige til tidspunkt T , nemlig $B^{(T)}_{(0,1)}$

$$B^{(T+1)}_{(1,2)} = B^{(T)}_{(0,1)} \cdot \frac{B^{(T+1)}_{(1,2)}}{B^{(T)}_{(0,1)}} \quad (11.2)$$

$$= B^{(T)}_{(0,1)} \cdot \frac{\frac{g \cdot a_{(1,2)}}{I(0)}}{\frac{g \cdot a_{(0,1)}}{I(0)}} = B^{(T)}_{(0,1)} \cdot \frac{a_{(1,2)}}{a_{(0,1)}}$$

Dvs., at antallet af 0-årige fremføres ved at multiplicere med en faktor (overlevelseskquotienten), som angiver hvilken andel af bestanden, der opnår af blive 1 år ældre. Det ses, at overlevelseskquotienten i dette tilfælde er identisk med forholdet mellem area-

lerne under dødelighedstavlen mellem henholdsvis 1 og 2 år samt 0 og 1 år.

Det generelle udtryk for overlevelseskvotienten for en bestand i aldersklassen x til $x+k$, som fremføres over k tidsperioder bliver

$$o(x, x+k) = \frac{a(x+k, x+2k)}{a(x, x+k)} \quad (11.3)$$

Hvor godt et billede prognosen kommer til at give af den fremtidige befolkningsudvikling afhænger naturligvis helt af, i hvilket omfang de nedlagte forudsætninger mht. fertiliteten og dødeligheden slår til. Hvis der f.eks. udbryder en tredie verdenskrig, vil både dødeligheds- og fertilitetsforholdene ændre sig fuldstændigt, og befolkningsprognosen vil ikke komme til at give noget korrekt billede af virkeligheden. Ved udarbejdelsen af befolkningsprognoser må man derfor forudsætte, at der ikke forekommer pludselige hændelser, som medfører en fuldstændig destruktion eller omformning af den hidtidige samfundsstruktur. Men selv om vi ser bort fra sådanne begivenheder, så har vor historiske viden belært os om, at der over længere tidsrum altid er foregået ændringer i de demografiske komponenter. Vi må derfor regne med, at der også vil ske ændringer i fremtiden. Dødeligheden kan f.eks. falde yderligere på grund af nye fremskridt inden for lægevidenskaben, ligesom fertilitetsniveauet kan forskydes, fordi familiernes indstilling til familieplanlægning ændrer sig.

Begrundelsen for, at man på trods heraf alligevel udarbejder befolkningsprognoser, er, at ændringer i dødeligheds- og fertilitetsniveauet under nogenlunde stabile samfundsforhold sker ret langsomt, fordi der ved enhver ændring gør sig en vis inerti gældende. Fremskridtene inden for lægevidenskaben sker ofte gradvis og siver først efterhånden ud i befolkningen, hvorfor dødeligheden i lande med høj middellevetid ikke ændrer sig pludseligt. Ligeledes vil de faktorer, som bestemmer antallet af fødsler i almindelighed heller ikke ændre sig drastisk. Der hersker f.eks. visse traditioner mht., hvornår man indgår ægteskab, og hvor mange børn man plejer at få.

Resultatet af trægheden er, at man som regel med betydelig sikkerhed kan beregne befolkningens størrelse inden for de nærmeste

tidsperioder. Senere øges chancen stærkt for væsentlige afvigelser mellem prognosen og virkeligheden, nemlig når fremskridtene inden for lægevidenskaben og ændringerne af fertilitetsvanerne har haft tilstrækkelig tid til at slå igennem.

Valget af prognoseforudsætninger sker ved, at man lægger dødeligheds- og fertilitetserfaringerne for et enkelt eller nogle få kalenderår til grund for befolkningsprognosens (kalenderårsprincippet).²⁾ På grund af den færomtalte inertি, er det klart, at man skal basere sine forudsætninger på de seneste kalenderår. Hvis både fertilitets- og dødelighedskomponenten gennem den seneste tid har ændret sig i en bestemt retning og må forventes at ville fortsætte hermed, kan man i stedet for at fremskrive befolkningen med uændret fertilitets- og dødelighedsniveau inddarbejde en fortsat ændring af disse komponenter i prognosens, således at befolkningen fra periode til periode fremskrives med forskellige værdier af fertilitets- og dødelighedsniveauet i de forskellige aldersklasser.

Når prognosens er udarbejdet, er det vigtigt, at man stadig undersøger, i hvilket omfang de anvendte prognoseforudsætninger stemmer overens med virkeligheden, og foretager en ajourføring af prognosens, når væsentlige afvigelser er konstateret.

11.2b Den matematiske metode

Den matematiske metode indebærer i almindelighed, at man indskrænker sig til at bestemme den samlede befolknings størrelse på forskellige tidspunkter i fremtiden. I dette tilfælde fremskrives befolkningen ved hjælp af en matematisk formel (prognosefunktionen), som kun inddrager den samlede befolkningstilvækst. Den fremtidige befolkningstilvækst bestemmes på grundlag af befolkningsudviklingen i den seneste periode.

2) I modsætning hertil står generationsprincippet, hvor man fsv. angår fertiliteten, fremfører hver generation for sig.

De mest almindelige prognosefunktioner er følgende:

1. Den lineære fremskrivning

Den her anvendte prognosefunktion er af formen

$$B(T+t) = B(T) + r_1 t$$

hvor r_1 betegner den absolutte befolkningstilvækst pr. tidsenhed (se figur 11.1). Formlen indebærer, at befolkningen vokser med samme absolutte tilvækst pr. tidsenhed.

2. Den eksponentielle fremskrivning

I dette tilfælde antager prognosefunktionen udtrykket

$$B(T+t) = B(T) \cdot e^{r_2 t}$$

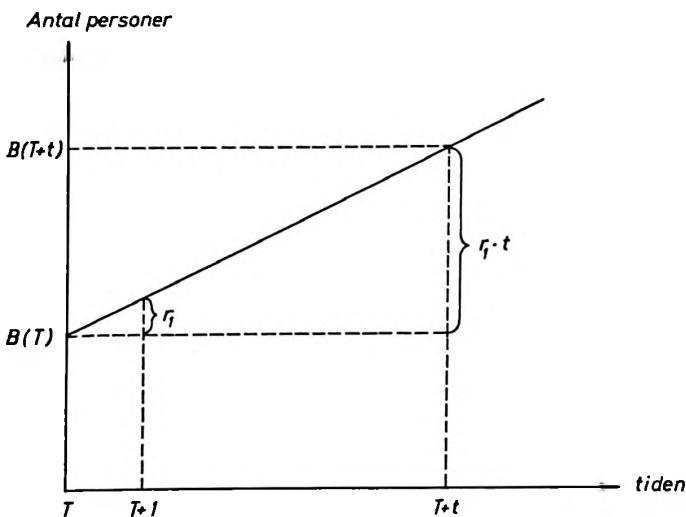
hvor r_2 betegner den relative befolkningstilvækst pr. tidsenhed, således at befolkningen forudsættes at vokse, som en kapital der sættes på rente med kontinuer rentetilskrivning (se figur 11.2).

3. Den logistiske fremskrivning

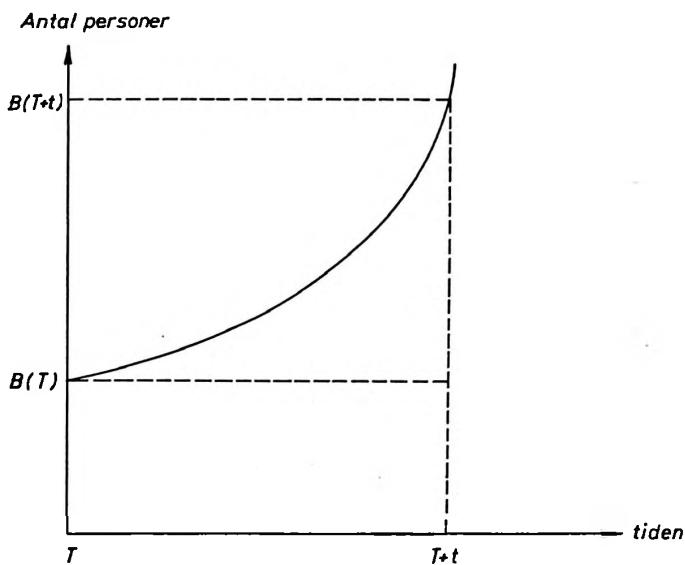
Den logistiske funktion har følgende udseende

$$B(T+t) = \frac{\alpha}{1 + \gamma \cdot e^{-\beta t}}$$

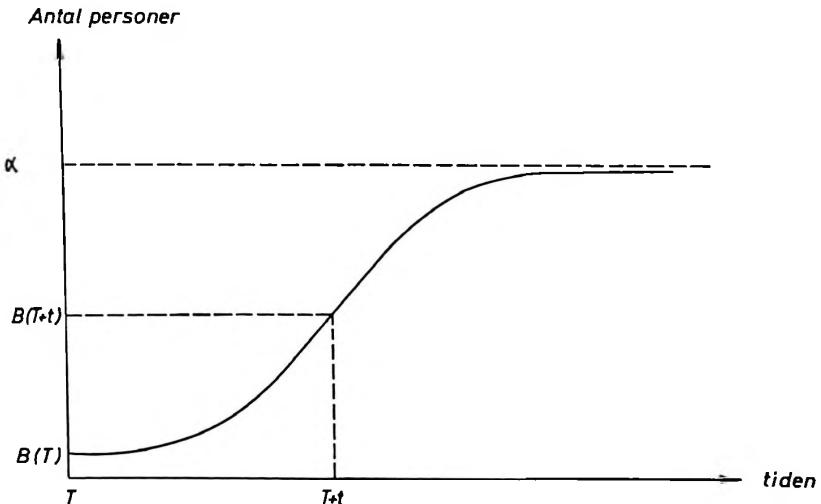
hvor parameteren α angiver den mætningsværdi, som befolkningen går imod for $t \rightarrow \infty$, medens størrelsen β bestemmer befolkningstilvækstens størrelse (se figur 11.3). γ er en normeringskonstant. Som det fremgår af figuren, sker tilvæksten i begyndelsen med stigende hast, hvorefter væksten i den senere del af forløbet bliver svagere og svagere, således at funktionen til sidst bliver næsten vandret.



Figur 11.1 Den lineære kurve.



Figur 11.2 Den eksponentielle kurve.



Figur 11.3 Den logistiske kurve.

Udover at disse metoder kun angiver befolkningens samlede størrelse, lider de alle af den grundskavank, at de ikke inddrager fertilitets- og dødelighedskomponenten. Ved valg af f.eks. en af de tre ovennævnte forudsætninger mht. befolkningstilvæksten, har man ikke taget stilling til de to komponenters udvikling i fremtiden. Når prognosen derfor slår fejl, er man udelukket fra en ajourføring af samme dybtgående karakter, som i forbindelse med komponentmetoden.

11.2c Den økonomiske metode

Den økonomiske metode finder især anvendelse i forbindelse med befolkningsprognoser for små geografiske områder. I sådanne tilfælde er det ofte ind- og udvandringen, som er helt afgørende for befolkningsudviklingen (i modsætning til hele landet, hvor befolkningsudviklingen som regel først og fremmest bestemmes af fertilitets- og dødelighedskomponenten). Da vandringskomponenten i forbindelse med små geografiske områder ikke er underkastet nogen særlig grad af inertি, kan man derfor ikke anvende komponentmetoden, således at man f.eks. forudsætter et konstant antal indvandrere i

de enkelte aldersklasser fremover. Indvandringen i en bestemt tidsperiode vil være bestemt af fremkomsten af nye industrier i området og de hertil knyttede boligområder og kan derfor svinge stærkt fra år til år. Ved den økonomiske metode søger man at skaffe sig information om de fremtidige byggeprojekter i området og på grundlag heraf beregne, hvilken vandring disse projekter vil give anledning til ved f.eks. at basere sig på tidligere erfaringer mht. antallet af tilflyttede personer pr. 100 færdiggjorte lejligheder i området.

APPENDIKS I

Et eksempel på udvikling af en stationær befolkning

Forudsætningerne i forbindelse med udviklingen af den stationære befolkning er i dette eksempel følgende:

1. Den aktuelle befolkning af kvinder fordelt efter alder ved tidspunkt $t = 0$ er som angivet i tabel I.1.
2. Den anvendte dødelighedstavle er som angivet i tabel I.2.
3. Antallet af levendefødte piger pr. år er 40000.

Resultatet af fremskrivningen under de ovenfor angivne forudsætninger ses i tabel I.3 for forskellige værdier af t (fra $t = 0$ til $t = 110$ år).

Tabel I.1 En befolkning af kvinder fordelt efter alder ved $t = 0$.

Alder (1)	Antal (2)	Alder (3)	Antal (4)	Alder (5)	Antal (6)	Alder (7)	Antal (8)
0	35040	25	35040	50	23360	75	11680
1	35040	26	35040	51	23360	76	11680
2	35040	27	35040	52	23360	77	11680
3	35040	28	35040	53	23360	78	11680
4	35040	29	35040	54	23360	79	11680
5	35040	30	35040	55	23360	80	11680
6	35040	31	35040	56	23360	81	11680
7	35040	32	35040	57	23360	82	11680
8	35040	33	35040	58	23360	83	11680
9	35040	34	35040	59	23360	84	11680
10	35040	35	35040	60	11680	85	11680
11	35040	36	35040	61	11680	86	11680
12	35040	37	35040	62	11680	87	11680
13	35040	38	35040	63	11680	88	11680
14	35040	39	35040	64	11680	89	11680
15	35040	40	35040	65	11680	90	0
16	35040	41	35040	66	11680	91	0
17	35040	42	35040	67	11680	92	0
18	35040	43	35040	68	11680	93	0
19	35040	44	35040	69	11680	94	0
20	35040	45	35040	70	11680	95	0
21	35040	46	35040	71	11680	96	0
22	35040	47	35040	72	11680	97	0
23	35040	48	35040	73	11680	98	0
24	35040	49	35040	74	11680	99	0

Tabel I.2 Dødelighedstavle for kvinder.

Alder (x)	l_x	Alder (x)	l_x	Alder (x)	l_x	Alder (x)	l_x
0	100000	25	90849	50	83427	75	43352
1	94475	26	90645	51	82810	76	40298
2	93975	27	90427	52	82189	77	37176
3	93738	28	90211	53	81507	78	33964
4	93567	29	89998	54	80748	79	30750
5	93450	30	89794	55	79932	80	27498
6	93344	31	89594	56	79064	81	24256
7	93250	32	89390	57	78115	82	21095
8	93162	33	89192	58	77081	83	18035
9	93080	34	88986	59	75994	84	15254
10	92998	35	88765	60	74810	85	12737
11	92916	36	88536	61	73531	86	10426
12	92842	37	88299	62	72190	87	8388
13	92769	38	88051	63	70758	88	6562
14	92689	39	87782	64	69202	89	5059
15	92559	40	87502	65	67529	90	3838
16	92495	41	87209	66	65751	91	2851
17	92374	42	86890	67	63759	92	2064
18	92240	43	86555	68	61655	93	1465
19	92077	44	86196	69	59464	94	1025
20	91901	45	85822	70	57091	95	694
21	91709	46	85426	71	54593	96	469
22	91491	47	84989	72	51974	97	305
23	91280	48	84510	73	49207	98	154
24	91069	49	83997	74	46326	99	68
					100		0

Tabel I.3 Udvikling af en stationær befolkning.

t	Antal personer i alder									Ialt (11)	g ¹ (12)	D ² (13)
	0-9 (1)	10-19 (2)	20-29 (3)	30-39 (4)	40-49 (5)	50-59 (6)	60-69 (7)	70-79 (8)	80-89 (9)			
0	350400	350400	350400	350400	350400	233600	116800	116800	116800	0	2336000	40896
1	355175	349670	348824	348681	347431	252203	134099	103082	830562	13415	2335662	40000
2	357460	349340	348081	347853	346107	261575	142633	97733	71911	15185	2337898	40000
3	359773	349021	347379	346733	344873	270965	151105	93138	63177	15327	2341793	40000
4	362119	348701	346231	343717	343717	280356	159410	89178	56262	14562	2347248	40000
5	364505	348371	346105	345432	342620	289725	167536	85750	50711	13332	2354087	40000
10	376811	346750	343810	341459	337990	325149	206154	82875	34805	6962	2402785	40000
15	376811	3458200	342190	338042	334029	319352	2747042	112677	27881	3955	2451179	40000
20	376811	370391	340599	335800	330185	315044	275386	135806	28628	2849	2511499	40000
25	376811	370391	351887	334223	326883	311355	270514	164629	40067	2346	2549106	40000
30	376811	370391	363818	332667	324723	307772	266890	180208	46417	2674	2572371	40000
35	376811	370391	363818	343698	323201	304702	263766	177087	57403	3692	2584574	40000
40	376811	370391	363818	355349	321697	302702	260731	174757	60291	4222	2590769	40000
45	376811	370391	363818	355349	32432	301282	258148	172717	59302	5203	2595453	40000
50	376811	370391	363818	355349	343637	299889	256478	170730	58552	5245	2600900	40000
55	376811	370391	363818	355349	345637	310061	255276	169070	57876	5166	2607455	40000
60	376811	370391	363818	355349	343637	320338	254124	168022	57210	5102	2614802	40000
65	376811	370391	363818	355349	343637	320338	251105	167232	56683	5046	2622410	40000
70	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	166532	56372	4984	2629682	40000
75	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	173076	56100	4946	2635916	40000
80	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	177879	55944	4920	2640537	40000
85	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	177879	58646	4894	2643213	40000
90	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	177879	59779	4905	2644297	40000
95	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	177879	59779	5175	2644567	40000
100	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	177879	59779	5217	2644609	40000
105	376811	370391	363818	355349	343637	320338	271450	177879	59779	5217	2644609	40000

1) Antal levende fødte pr. år.

2) Antal døde pr. år.

APPENDIKS II

Et eksempel på udvikling af to stabile befolkninger

I dette eksempel vises udviklingen af to befolkninger, som har samme dødeligheds- og fertilitets forudsætninger, men forskellige udgangsbestande.

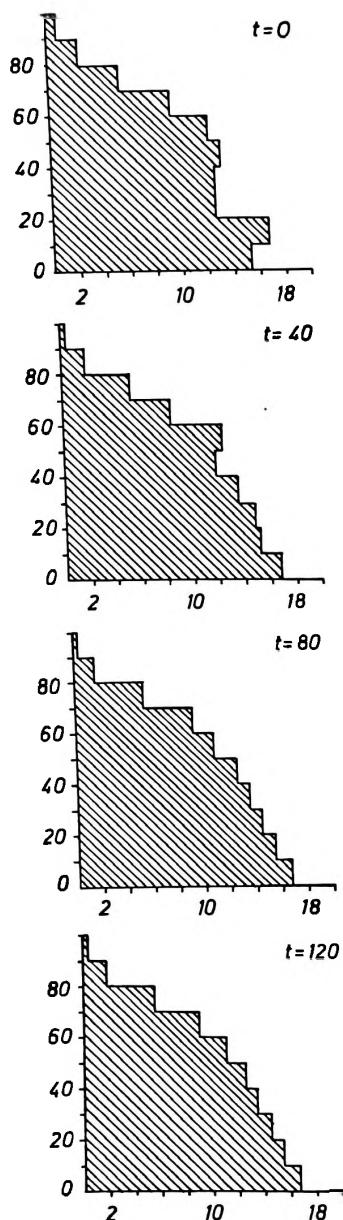
Forudsætningerne for de to befolkninger fremgår af nedenstående oversigt, hvor tabelnumre med I refererer til appendiks I.

Forudsætninger	Befolkning 1	Befolkning 2
1. Aldersfordeling	Tabel II.1	Tabel I.1
2. Dødelighed	Tabel I.2	Tabel I.2
3. Fertilitet	Tabel III.2	Tabel II.2

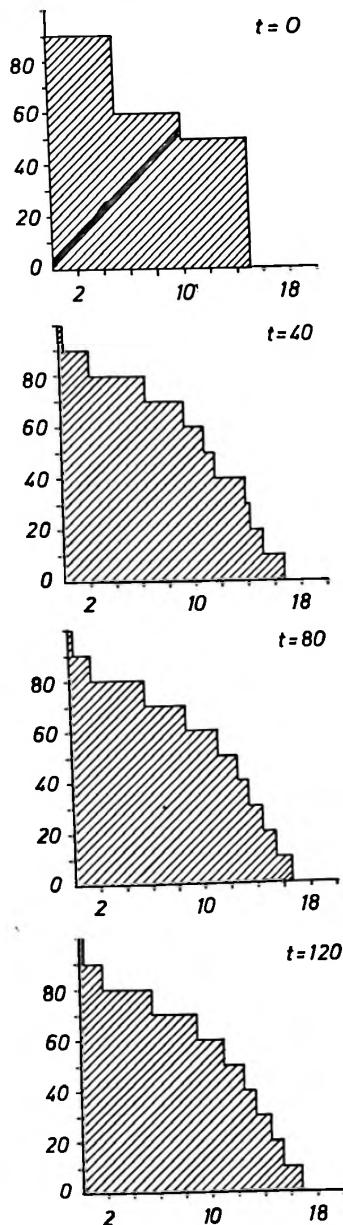
Resultaterne af fremskrivningen af de tre befolkninger ses i henholdsvis tabel II.3 og II.4, samt af figur II.1.

I figur II.2 ses desuden udviklingen i de summariske dødeligheds- og fertilitetskvotienter for voksende værdier af t.

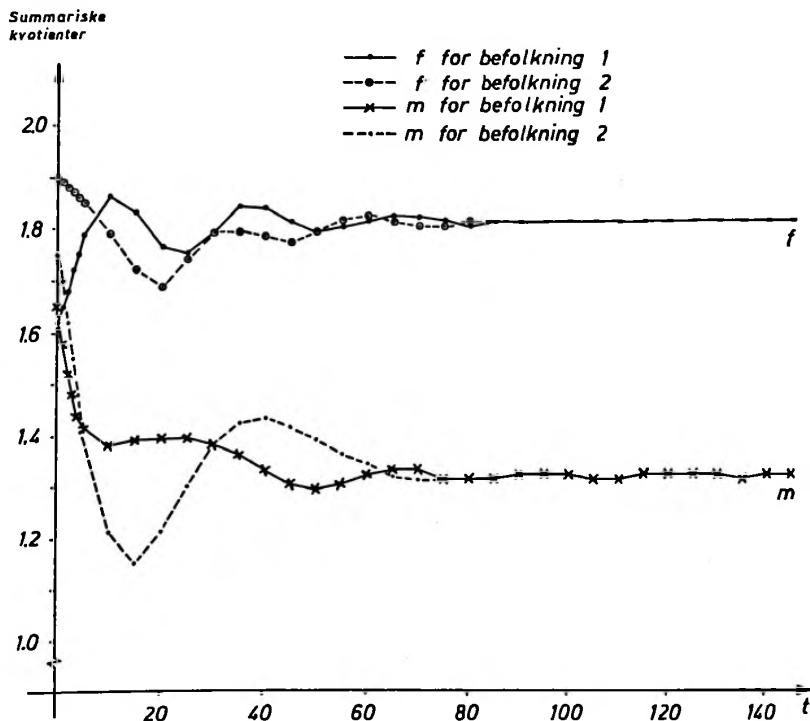
Befolknings 1



Befolknings 2



Figur II.1 Aldersfordelingen (pct.) for befolkning 1 og 2.



Figur II.2 Summariske fertilitets- og dødelighedskvotienter for befolkning 1 og 2. ($t = 0$ til $t = 145$).

Tabel II.1 En befolkning af kvinder fordelt efter alder ved $t = 0$.

Alder (1)	Antal (2)	Alder (3)	Antal (4)	Alder (5)	Antal (6)	Alder (7)	Antal (8)
0	36646	25	29453	50	30449	75	12366
1	36500	26	28453	51	30645	76	11786
2	35329	27	28381	52	31352	77	11032
3	35638	28	27308	53	29966	78	9275
4	35710	29	28329	54	28854	79	8591
5	36171	30	27668	55	28332	80	7317
6	35978	31	28777	56	27651	81	5000
7	35853	32	28079	57	27532	82	5000
8	36551	33	28989	58	26313	83	5000
9	36085	34	28709	59	26266	84	5000
10	35563	35	29769	60	25322	85	5000
11	37566	36	30463	61	24952	86	5000
12	37010	37	31036	62	23946	87	5000
13	39879	38	31305	63	24138	88	5000
14	42300	39	30549	64	22083	89	5000
15	43977	40	32677	65	22654	90	5000
16	43659	41	34316	66	21281	91	5000
17	41106	42	29374	67	19980	92	5000
18	38106	43	30539	68	18969	93	2000
19	36329	44	29440	69	17782	94	2000
20	31730	45	29662	70	16912	95	1000
21	31878	46	29355	71	16087	96	1000
22	30049	47	31164	72	15180	97	500
23	30535	48	30823	73	14668	98	500
24	29633	49	31328	74	13496	99	100

Tabel II.2 Aldersbetingede fertilitetskvotienter for pigefødsler.

Alder (1)	$\bar{f}_{x,x+1}$ (2)	Alder (3)	$\bar{f}_{x,x+1}$ (4)
15	.0210	35	.0191
16	.0210	36	.0191
17	.0210	37	.0191
18	.0210	38	.0191
19	.0210	39	.0191
20	.0850	40	.0055
21	.0850	41	.0055
22	.0850	42	.0055
23	.0850	43	.0055
24	.0850	44	.0055
25	.0782	45	.0004
26	.0782	46	.0004
27	.0782	47	.0004
28	.0782	48	.0004
29	.0782	49	.0004
30	.0435		
31	.0435		
32	.0435		
33	.0435		
34	.0435		

Tabel III.3 Udvikling af stabil befolkning 1

t	Antal personer procentvis fordelt efter alder										f ¹⁾ (11)	m ²⁾ (12)
	0-9 (1)	10-19 (2)	20-29 (3)	30-39 (4)	40-49 (5)	50-59 (6)	60-69 (7)	70-79 (8)	80-89 (9)	90-99 (10)		
0	15.2	16.7	12.5	12.5	13.0	12.1	9.3	5.5	2.2	0.9	1.62	1.65
1	15.2	16.6	13.2	12.1	12.9	12.3	9.6	5.6	1.8	0.7	1.65	1.58
2	15.2	16.3	13.7	12.0	12.8	12.3	9.6	5.6	1.8	0.6	1.52	1.58
3	15.3	15.9	14.3	11.8	12.8	12.3	9.7	5.6	1.7	0.5	1.72	1.48
4	15.4	15.6	14.8	11.8	12.7	12.2	9.7	5.7	1.7	0.4	1.75	1.44
5	15.5	15.3	15.3	11.7	12.6	12.1	9.7	5.7	1.7	0.3	1.79	1.42
10	16.4	14.5	15.8	12.1	11.5	11.7	10.0	6.0	1.8	0.1	1.86	1.38
15	17.0	14.5	14.3	14.2	10.8	11.2	10.3	6.1	1.9	0.1	1.83	1.39
20	16.7	15.5	13.6	14.8	11.2	11.2	10.3	6.3	2.0	0.2	1.76	1.39
25	16.3	16.1	13.8	13.4	13.3	9.7	9.1	5.2	2.1	0.2	1.75	1.38
30	16.2	15.8	14.6	12.8	13.8	10.1	9.7	5.0	2.1	0.2	1.79	1.36
35	16.5	15.4	15.1	12.9	12.4	11.9	7.9	4.4	1.8	0.1	1.84	1.33
40	16.8	15.2	14.8	13.6	11.8	12.0	9.0	5.2	1.9	0.1	1.81	1.30
45	16.8	15.4	14.2	13.8	12.5	12.9	9.5	5.2	1.7	0.1	1.75	1.30
50	16.6	15.7	14.2	14.4	13.3	13.3	9.1	5.0	2.0	0.2	1.79	1.38
55	16.5	15.5	15.5	14.7	13.2	12.9	9.7	5.7	2.1	0.2	1.86	1.36
60	16.5	15.5	15.5	14.7	13.8	12.4	10.4	5.2	2.1	0.2	1.83	1.33
65	16.6	15.4	15.4	14.7	13.6	12.3	12.3	5.2	1.7	0.2	1.76	1.30
70	16.7	15.4	14.5	14.4	13.7	12.3	12.3	5.4	1.7	0.2	1.75	1.30
75	16.6	15.5	15.6	14.4	13.5	12.6	12.6	5.1	1.7	0.2	1.79	1.38
80	16.6	15.6	15.6	14.5	13.4	12.6	11.0	5.0	2.1	0.2	1.84	1.36
85	16.5	15.6	14.6	13.4	12.6	12.4	11.2	4.7	2.0	0.2	1.81	1.33
90	16.6	15.5	15.5	14.6	13.4	12.3	11.2	4.5	1.7	0.1	1.82	1.30
95	16.6	15.5	14.6	14.6	13.5	12.3	11.2	4.5	1.7	0.1	1.81	1.30
100	16.6	15.5	14.5	14.5	13.5	12.4	11.0	4.8	1.8	0.1	1.80	1.30
110	16.6	15.5	14.5	14.5	13.5	12.4	11.1	4.8	1.8	0.1	1.81	1.31
120	16.6	15.5	14.5	14.5	13.5	12.4	11.1	4.8	1.8	0.1	1.81	1.32
130	16.6	15.5	14.5	14.5	13.5	12.4	11.1	4.8	1.8	0.1	1.81	1.32
140	16.6	15.5	14.5	14.5	13.5	12.4	11.0	4.9	1.8	0.1	1.81	1.32

- 1) Den summariske fertilitetskoefficient (pct.). 2) Den summariske dødskoefficient (pct.).

Tabel II.4 Udvikling af stabil befolkning 2.

t	Antal personer procentvis fordelt efter alder								f ¹⁾	m ²⁾
	0-9 (1)	10-19 (2)	20-29 (3)	30-39 (4)	40-49 (5)	50-59 (6)	60-69 (7)	70-79 (8)	80-89 (9)	90-99 (10)
0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	10.0	5.0	5.0	5.0	0.0
1	14.9	14.9	14.9	14.9	14.8	10.8	5.7	4.4	3.5	0.6
2	15.7	14.9	14.8	14.8	14.7	11.1	6.1	4.2	3.1	0.6
3	15.9	14.8	14.7	14.7	14.6	11.5	6.4	4.0	2.7	0.7
4	16.1	14.7	14.7	14.6	14.5	11.8	6.7	3.8	2.4	0.6
5	16.3	14.7	14.6	14.5	14.4	12.2	7.0	3.6	2.1	0.6
10	16.9	14.4	14.1	14.0	13.8	13.3	8.4	3.4	1.4	0.3
15	16.3	15.1	13.6	13.4	13.3	12.7	9.8	4.5	1.1	0.2
20	15.8	15.7	13.3	13.0	12.8	12.2	10.7	5.3	1.1	0.1
25	15.7	15.2	14.2	12.7	12.4	11.8	10.2	6.2	1.5	0.1
30	16.1	14.9	14.8	12.5	12.0	11.4	9.9	6.7	1.7	0.1
35	16.4	14.9	14.4	14.4	13.5	11.8	11.1	9.6	2.1	0.1
40	16.5	15.9	14.1	13.9	11.6	10.8	9.3	6.4	2.1	0.1
45	16.4	15.6	14.1	13.5	12.4	10.6	9.1	6.1	2.1	0.2
50	16.4	15.6	14.4	13.2	13.0	10.4	8.8	5.9	2.0	0.2
55	16.5	15.6	14.4	14.7	13.2	12.6	11.1	8.6	5.7	0.2
60	16.6	15.4	14.7	13.5	12.5	11.5	8.5	5.5	1.9	0.2
65	16.7	15.5	14.5	13.7	12.2	11.2	9.0	5.4	1.8	0.2
70	16.6	15.6	14.4	13.6	12.4	10.9	9.3	5.3	1.8	0.2
75	16.6	15.6	14.4	13.5	12.6	10.8	9.0	5.7	1.7	0.2
80	16.5	15.5	14.6	13.4	12.4	11.0	8.8	5.8	1.7	0.1
85	16.6	15.5	14.6	13.4	12.4	11.2	8.7	5.6	1.8	0.1
90	16.6	15.5	14.5	13.5	12.3	11.1	8.9	5.5	1.9	0.1
95	16.6	15.5	14.5	13.6	12.4	11.0	9.0	5.5	1.8	0.1
100	16.6	15.6	14.5	13.5	12.5	10.9	9.0	5.5	1.7	0.2
110	16.6	15.5	14.5	13.5	12.4	11.1	8.8	5.6	1.8	0.1
120	16.6	15.5	14.5	13.5	12.4	11.0	8.9	5.5	1.8	0.2
130	16.6	15.6	14.5	13.5	12.4	11.0	8.9	5.6	1.8	0.1
140	16.6	15.5	14.5	13.5	12.4	11.1	8.9	5.6	1.8	0.1

1) Den summariske fertilitetskvotient (pct.). 2) Den summariske dødskvotient (pct.).

LITTERATURHENVISNINGER

Barclay, G.W.: Techniques of Population Analysis. John Wiley and Sons. New York 1962.

Cox, Peter R.: Demography and Addendum to Demography. Cambridge University Press. Cambridge 1957.

Flaskämper, Paul: Bevölkerungsstatistik. Richard Meiner. Hamburg 1962.

Gotaas, Per: Formell Befolkningssteori. Forelæsninger ved Universitetet høstsemesteret 1946. Universitetsforlaget. Oslo 1946.

Henry, Louis: Perspectives démographiques. I.N.E.D. Paris 1964.

Hoem, Jan M.: Grunnbegreper i formell befolkningslære. Memorandum fra Socialøkonomisk Institutt. Universitetet i Oslo 1967.

Hyrenius, Hannes: Demometri. Den formella befolkningslärens Grunder. Almqvist och Wiksell. Göteborg 1966.

Jensen, Arne: Befolkningsstatistik. Memorandum fra Københavns Universitets Økonomiske Institut, nr. 5. København 1960.

Pressat, Roland: Pratique de la Démographie. Dunod. Paris 1967.

Pressat, Roland: L'analyse Démographique. Presses Universitaires de France. Paris 1969.

Quensel, C.E.: Kompendium i formell befolkningssteori. Lund 1966.

Spiegelman, Mortimer: Introduction to Demography. The Society of Actuaries. Chicago 1955.

Wolfenden, Hugh H.: Population Statistics and Their Compilation. University of Chicago Press. Chicago 1954.

STIKORDSREGISTER

- α -værdier, 68
A-gruppe, 44-45, 51
 $a(x, x+k)$ defineret, 16
Aborter, 79
Alder for fødende kvinder, 106
Aldersbetingede dødsqvotienter, 17, 62
Aldersnotation, 27
Aldersstrukturen, 71, 100
Approximation af gennemlevet tid, 21
Approximationsformler, 19-26, 85-88

B-gruppe, 38-39, 43, 45-47
 $b(x)$ defineret, 17
Befolkningslukket, 27, 36
åben, 31, 34, 46
Befolkningsfremskrivning, 110
genetik, 10
model, 93
politik, 10
prognose, 110
segmenter, 55
struktur, 93
teori, 10
Beregne aldersbetingede dødsqvotienter, 71
Bestandsmasse, 40
Bevægelsesmasse, 40
Bruttoreproduktionstallet, 105, 107

 c defineret, 12
C-gruppe, 41-42, 45-47

 $d(x)$ defineret, 13, 33
 $d(x, x+k)$ defineret, 12

Demografi, deskriptiv, 9
historisk, 10
social, 10
teknisk, 9
teoretisk, 9
Demografiske komponenter, 9
Døde pr. aldersenhed, 12
Dødeligheden i det første leveår, 70
Dødelighedens "styrke", 13
aldersvariation, 49
sekulærvariation, 49
Dødelighedskurven, 13
Dødfæste, 63
Dødshyppigheden, 14
intensiteten, 15-16
kvotient for gifte, 58
kvotenten, 15, 52

 $e(x)$ defineret, 17
Elementartrekant, 42
Enkestands kvotient, 59
tavle, 59
Estimationsproblemer, 19

 $f(x)$ defineret, 83
 $f(x, x+k)$ defineret, 82
Fertilitetsintensiteten, 83
kvotenten, 82
måling, 79-88
måling, approximationsformler, 85-88
teori, 79-85
tavle, 89
Flergangsvielse, 75
Fremskrivning, eksponentiel-le, 114
lineære, 114
logistiske, 114

- Fødselsnummer, 89
 Fødsler, 79
 Fødte, 63, 79
 Førstegangsvielse, 75

 g defineret, 94
 $g(x)$ defineret, 81
 $g(x, x+k)$ defineret, 80
 Generationsafstanden, 110
 notation, 27
 princippet, 27-49, 88
 Generelle fertilitetskvote, 90
 Gennemlevet tid, 15
 for B-gruppen, 48
 for en åben befolkning, 33

 i(x) defineret, 33
 $i(x, x+k)$ defineret, 34

 Kalenderårsprincippet, 49
 Komponentmetoden, 111
 Konceptioner, 79
 Kønsproportionen, 98, 106

 l(x) defineret, 12
 Levendefødte, 63, 79
 kumulerede antal, 80
 pr. aldersenhed, 81
 Lexis, 30
 skema, 29, 36-37
 Ligevægtstilstand, 94
 Livslinie, 28, 36

 m defineret, 64, 97
 M defineret, 64, 71
 $m(x)$ defineret, 15
 $m(x, x+k)$ defineret, 15
 Maksimale levealder, 12
 Matematiske metode, 113
 Middelfolketallet, 64, 71
 Middellevetiden, 19
 for x-årige, 17
 for 0-årige, 18, 69

 n(x) defineret, 80
 Naturlige befolkningstilvækst, 109
 Nettoindvandring, 78
 Nettoreproduktionstallet, 104, 107, 110

 o(x, x+k) defineret, 112
 Observationstidsnotation, 27
 Overlevelseshyppigheden, 14
 kurven, 12, 15, 24
 kvotient, 111, 112
 tavle for gifte, 57
 tavlens teori, 11-19

 p(x, x+k) defineret, 14
 Prognoseforudsætninger, 113
 funktion, 113
 metoder, 111-117

 q(x, x+k) defineret, 14

 r defineret, 100
 Relative aldersfordeling, 96, 108
 Reproduktion, 109
 Reproduktive aldersklasser, 90
 periode, 80
 Restlevetid, 17

 s_b defineret, 105
 s_n defineret, 104
 s_t defineret, 84
 Samlede fertilitet, 84, 87
 Skilsmisse, 76-77
 hyppighed, 76
 kvotient, 76
 tavle, 76
 Spacing, 92
 Spædbørnssdøeligheden, 44-45, 63, 70
 Stabile befolkning, 98-108
 anvendelse, 108
 konstruktion, 105-108
 teori, 98-105
 Standardbefolkning, 68, 69
 Standardisering direkte, 64-71,
 91
 indirekte, 71-74, 91
 Statistiske befolkning, 94-98
 Summariske dødelighedssammenligninger, 69
 dødkvotient, 64, 66, 97, 100
 fertilitetskquotient, 90, 100
 skilsmisseekvotent, 77
 vielseskvotent, 76
 Sundhedsfaktoren, 71

 u(x) defineret, 33
 $u(x, x+k)$ defineret, 34

Van de Peech's metode, 40
Vandringer, 60, 77-78
Vandringskvotienter, 77
Vielser, 75-76
Vielsesalder, 76
 hyppighed, 75
 kvotient, 75
 tavle, 75

z defineret, 98, 106

Egteskabets varighed, 89
Økonomiske metode, 116

w(x, x+k) defineret, 96

x_{max}, 80
x_{min}, 80

SYMBOLLISTE

	Side
<u>A. Teoretiske funktioner</u>	
<u>overlevelsestavlen</u>	
$l(x)$	12
$a(x, x+k) = \int_0^k l(x+h)dh$	16
$b(x) = \int_0^\infty l(x+h)dh$	17
$e(x) = \frac{b(x)}{l(x)}$	17
<u>dødelighedsmål</u>	
$d(x, x+k) = l(x) - l(x+k)$	12
$d(x) = -l'(x)$	13
$q(x, x+k) = \frac{d(x, x+k)}{l(x)}$	14
$m(x) = \frac{d(x)}{l(x)}$	15
$m(x, x+k) = \frac{d(x, x+k)}{a(x, x+k)}$	15

Side

<u>overlevelsesmål</u>	
$p(x, x+k) = \frac{l(x+k)}{l(x)}$	14
$\circ(x, x+k) = \frac{a(x+k, x+2k)}{a(x, x+k)}$	112
<u>vandringsmål</u>	
$i(x)$	33
$i(x, x+k)$	34
$u(x)$	33
$u(x, x+k)$	34
<u>fertilitetsmål</u>	
$n(x)$	80
$g(x, x+k) = n(x+k) - n(x)$	80
$g(x) = n'(x)$	81
$f(x, x+k) = \frac{g(x, x+k)}{\bar{a}(x, x+k)}$	82
$f(x) = \frac{g(x)}{\bar{I}(x)}$	83
<u>aldersfordeling</u>	
$w(x, x+k) = \frac{B(x, x+k)}{B}$	96
<u>Summariske normerede mål</u>	
m summarisk dødskvotient	64
f summarisk fertilitetskvotient	90
s_t samlet fertilitet	84
$f_{15,50}$ generel fertilitetskvotient	90
s_n nettoreproduktionstallet	104
s_b bruttoreproduktionstallet	105
r relativ tilvækst	100

		Side
<u>C. Andre betegnelser</u>		
z	kønsproportionen	98
x_{\min}, x_{\max}	grænser for reproduktionsperioden	80
g	antal levendefødte pr. tidsenhed	94
d	antal døde pr. tidsenhed	97
M	middelfolketallet	64
c	maksimale levealder	12