Chapitre 1: GRAPHES

Ghislain PANDRY

Chercheur, Traitement du signal et des images

2 mars 2021

SITUATIONS MODÉLISÉES

Les graphes modélisent de nombreuses situations concrètes où interviennent des **objets** en **interaction** :

Circuit électronique : lien entre les composants ;

Web : chaque page est un sommet du graphe, chaque lien hypertexte est une arête entre deux sommets ;

Réseau social : les sommets sont les personnes, deux personnes sont adjacentes dans ce graphe lorsqu'elles sont amies. Si la notion d'amitié n'est pas réciproque, le graphe est orienté.

SITUATIONS MODÉLISÉES

Mathématiques : algèbre, combinatoire,$\cdots$;

Recherche opérationnelle : tournées de distribution, ordonnancement de tâches,$\cdots$;

Cartographie :coloriage de carte, le plan d'une ville et de ses rues en sens unique,routière, ferroviaire ou aériennes entre différentes agglomérations$\cdots$.

Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets (ville, page web, personne,composantes électronique, ordinateur,...) et leurs relations (route, lien hypertexte, amitié, circuit électronique, wifi ou utp ou ftp ou fibre optique) avec une représentation graphique naturelle.

Définition 1

Un graphe permet de décrire un ensemble d'objets et leurs relations, c'est à dire les liens entre les objets.

- Les **objets** sont appelés les ***nœuds***, ou encore les ***sommets*** du graphe ;
- Un **lien** entre deux objets est appelé une arête ou un arc.

Définition

Un graphe non orienté ***G*** est un couple ***(V,E)***, noté ***G=(V,E)*** où :

- $\boldsymbol{V} = \{v_i | i \in I\}$ est un ensemble fini non vide d'objets, I :ensemble des indices. Les objets (ou éléments) de ***V*** sont appelés les sommets $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ du graphe ;
- ***E*** est un sous-ensemble du produit cartésien $V \times V$. Les éléments $\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}$ de **E** sont appelés les arêtes du graphe.
  $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V /$ *le sommet* v_i *est en relation avec le sommet* $v_j\}$;
- E est un ensemble de couples non ordonnés de sommets $(v_i, v_j) \in V \times V$.
- lorsque les deux sommets sont confondus, on parle de boucle, noté $e_k = (v_i, v_i)$.

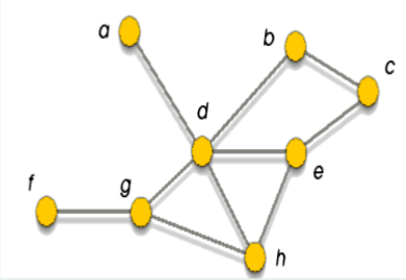
NOTATION

Une paire (v_i, v_j) est appelée une arête e_k, et est représentée graphiquement par $v_i - v_j$. On dit que les sommets v_i et v_j sont **adjacents**. L'ensemble des sommets adjacents au sommet $v_i \in V$ est noté $Adj(v_i) = \{v_j \in V, (v_i, v_j) \in E\}$.

DÉFINITION

1. On appelle **ordre** d'un graphe $G = (V, E)$ le nombre de ses sommets V, i.e c'est $card(V)$ noté également $\sharp V$.
2. On appelle **taille** d'un graphe $G = (V, E)$ le nombre de ses arêtes E, i.e c'est $card(E)$ noté également $\sharp E$.

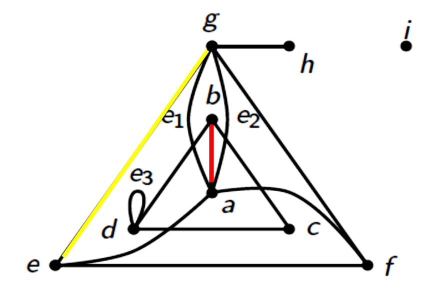
EXEMPLE 1



Un exemple de graphe à 8 sommets, nommés a à h, comportant 10 arêtes.

Soit $G = (V, E)$, on a : $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ et $E = \{(a, d), (b, c), (b, d), (d, e), (e, c), (e, h), (h, d), (f, g), (d, g), (g, h)\}$

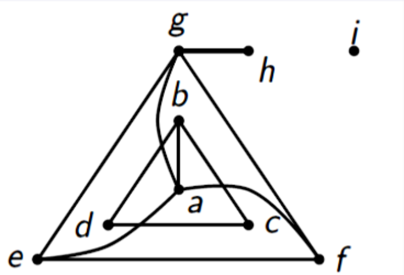
EXEMPLE 2



a et b sont adjacents ou voisins.
l'arête **(e,g)** est incidente à e et g.
le sommet h est pendant, le sommet i est isolé.
e_1 et e_2 sont parallèles, e_3 est une boucle.

Définition

Un graphe non orienté est simple s'il ne contient ni boucle ni arête parallèle.



ORDRE ET TAILLE

Soit G un graphe simple d'ordre n. Le nombre d'arêtes m de G vérifie la relation suivante :

non-orienté : $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$

orienté : $m \leqslant n(n-1)$

DENSITÉ

La densité d'un graphe est le nombre d'arêtes réalisées dans le graphe par rapport au nombre d'arêtes possibles :

$$den(G_{nondirige}) = \frac{2|E|}{|V|(|V|-1)} \quad (1)$$

$$den(G_{dirige}) = \frac{|E|}{|V|(|V|-1)} \quad (2)$$

DÉFINITION : Degré d'un sommet

Sommets adjacents : Deux sommets v_i et v_j sont adjacents s'il existe l'arête (v_i, v_j) dans E. Les sommets v_i et v_j sont alors dits voisins ;

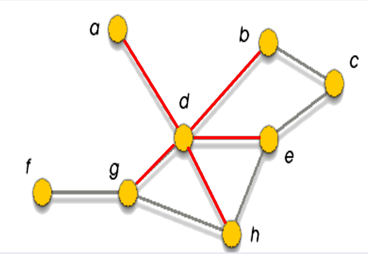
Arête incidente : Une arête est incidente à un sommet v_i si v_i est l'une de ses extrémités.

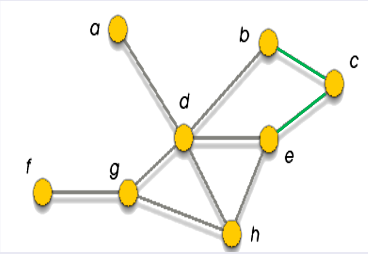
Degré d'un sommet v_i de G est le nombre d'arêtes incidentes à v_i. Il est noté $\delta(v_i)$. Pour un graphe simple le degré de v_i correspond également au nombre de sommets adjacents à v_i.

PROPRIÉTÉ : Degré d'un graphe

Soit G un graphe non orienté et m son nombre d'arêtes.
$\sum_{v_i \in V} \delta(v_i) = 2m$

EXERCICE





$(d, a); (d, b); (d, e); (d, h); (d, g)$
$\delta(d) = 5$

$(c, b); (c, e)$
$\delta(c) = 2$

INTERROGATION/10 MINUTES

$G = (V; E)$ est-il bien défini pour :

1. $V = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5\}$ et $E = \emptyset$.
2. $V = \{1; 2\}$ et $E = \{(1; 3); (1; 4)(1; 5); (2; 3)\}$.
3. $V = \{1; 2; 3\}$ et $E = \{(1; 1); (1; 2); (2; 3)\}$.

RÉPONDEZ PAR VRAI OU FAUX

TD

1. Construire un graphe non orienté dont les sommets sont les entiers compris 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation suivante :"LA SOMME EST MULTIPLE DE 3".
2. Déterminer le degré du graphe, l'ordre et la taille.

Définition

Un graphe orienté ***G*** est un couple ***(V,E)***, noté ***G=(V,E)*** où :

- $\boldsymbol{V} = \{v_i | i \in I\}$ est un ensemble fini non vide d'objets, I :ensemble des indices. Les objets (ou éléments) de $\boldsymbol{V}$ sont appelés les sommets $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ du graphe ;
- $\boldsymbol{E}$ est un sous-ensemble du produit cartésien $V \times V$. Les éléments $\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}$ de **E** sont appelés les arcs du graphe.
  $E = \{(v_i, v_j) \in V \times V / \textit{ le sommet } v_i \textit{ est en relation avec le sommet } v_j\}$;
- E est un ensemble de couples ordonnés de sommets $(v_i, v_j) \in V \times V$.
- lorsque les deux sommets sont confondus, on parle de boucle, noté $e_k = (v_i, v_i)$.

NOTATION

Un couple (v_i, v_j) est appelé un arc e_k, et es par la Fig.2

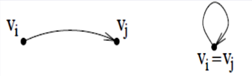


Figure – Arc reliant deux sommets, une boucle.

- v_i est le **sommet initial ou origine**, et v_j le **sommet terminal ou extrémité**.
- L'arc $e_k = (v_i, v_j)$ est dit sortant en v_i et incident en v_j.
- L'ensemble des arcs sortant de v_i est noté $\omega^+(v_i)$ et l'ensemble des arcs entrant dans v_j est noté $\omega^-(v_j)$.
- L'ensemble des arcs incidents à un sommet v est $\omega(v) = \omega^+(v) \cup \omega^-(v)$.

NOTATION

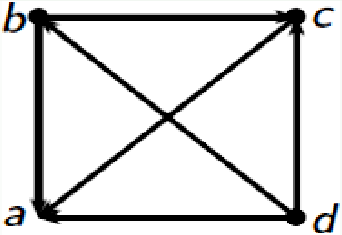
- v_j est un **successeur** de v_i, tandis que v_i est un **prédécesseur** de v_j.
- L'ensemble des successeurs d'un sommet $v_i \in V$ est noté $succ(v_i) = \{v_j \in V, (v_i, v_j) \in E\}$.
- L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $v_j \in V$ est noté $pred(v_j) = \{v_i \in V, (v_i, v_j) \in E\}$.

DÉFINITION : Degré d'un sommet, demi-degré, degré d'un graphe

Dans un graphe orienté,

- on appelle demi-degré entrant d'un sommet v, noté $\delta^-(v)$=$\#(\omega^-(v))$.
- on appelle demi-degré sortant d'un sommet v, noté $\delta^+(v)$=$\#(\omega^+(v))$.
- $\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v)$.
- le degré de v est $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.
- dans un graphe orienté, à m arcs, on a $\sum_{v_i \in V} \delta^-(v_i) = \sum_{v_i \in V} \delta^+(v_i) = m$.
- le degré total $\delta(V) = \sum_{v_i \in V} \delta^-(v_i) + \sum_{v_i \in V} \delta^+(v_i) = 2m$.
- $\sum_{v_i \in V} \delta(v_i) = 2\sharp E$

EXERCICE D'APPLICATION 1



Degrés entrants :

$$\delta^-(a) = 3, \delta^-(b) = 1,$$
$$\delta^-(c) = 2,\ \delta^-(d) = 0.$$

Degrés sortants :

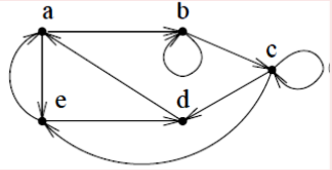
$$\delta^+(a) = 0, \delta^+(b) = 2,$$
$$\delta^+(c) = 1,\ \delta^+(d) = 3.$$

CORRECTION

Degrés entrants : $\sum_{v_i \in V} \delta^-(v_i) = \delta^-(a) + \delta^-(b) + \delta^-(c) + \delta^-(d) \Rightarrow \sum_{v_i \in V} \delta^-(v_i) = 6.$

Degrés sortants : $\sum_{v_i \in V} \delta^+(v_i) = \delta^+(a) + \delta^+(b) + \delta^+(c) + \delta^+(d) \Rightarrow \sum_{v_i \in V} \delta^+(v_i) = 6.$

INTERROGATION 2



1. Déterminer l'ensemble des sommets V ;
2. Déterminer l'ensemble des arcs E ;
3. Déterminer l'ensemble des arcs sortants de a et des arcs entrants de d ;
4. Déterminer l'ensemble des successeurs de a et de b ;
5. Déterminer l'ensemble des prédécesseurs de a ;
6. Déterminer le demi-degré sortant de c.

EXERCICE D'APPLICATION

1. Construire un graphe dont les sommets sont les entiers compris 1 et 16 et dont les arcs représentent la relation suivante :"**ÊTRE PREMIER AVEC**".
2. Déterminer le degré de chaque sommet.

INTERROGATION LICENCE 2

1. Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris 1 et 21 et dont les arcs représentent la relation suivante :"**ÊTRE DIVISEUR DE**".
2. Déterminer le degré entrant et le degré sortant de chaque sommet.

Représentation des graphes

Il existe de nombreuses façons de représenter les graphes comme une structure de données. On en verra deux :

matrice d'adjacence : le graphe est représente par une matrice $A_{n,n}$ carrée, à coefficients dans $\mathbb{N}$ indexée par les sommets du graphe et telle que $A_{i,j}$ est égal au nombre d'arêtes (ou arcs) du sommet i au sommet j.

matrice d'incidence : le graphe sans boucle est représentée par une matrice $M_{n,m}$ indexée par les sommets et les arêtes et telle que $M_{i,e_j} = 1$ si i est l'origine de e_j , $M_{i,e_j} = -1$ si i est l'extrémité de e_j , $M_{i,e_j} = 0$ sinon.

matrice d'adjacence

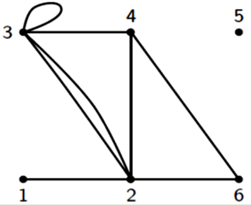
Pour une matrice d'adjacence, on peut noter :

- la taille d'une matrice d'adjacence est n^2
- si le graphe est non orienté, alors sa matrice d'adjacence est symétrique
- la présence et l'absence d'arêtes sont représentées :beaucoup d'espaces mémoire utilisés pour rien.
- si le graphe est simple on peut se contenter d'une matrice d'adjacence à coefficients dans $\{0, 1\}$

Exemple

La matrice d'adjacence suivante représente le graphe non orienté ci-dessous

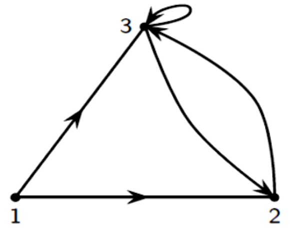
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Exemple

La matrice d'adjacence suivante représente le graphe orienté ci-dessous

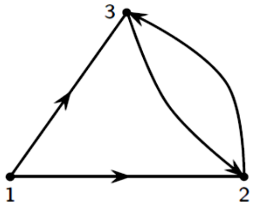
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Exemple

La matrice d'incidence suivante représente le graphe orienté ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Distance dans un graphe non orienté

Définition

La *distance* $d(x,y)$ entre deux sommets x, y d'un graphe non orienté G est défini par :

- $d(x,y) = 0$ si $x = y$.
- $d(x,y)$ est la longueur d'une plus courte chaîne reliant x à y s'il existe une telle chaîne
- $d(x,y) = \infty$ sinon

Propriété

Pour tous sommets x, y, z

- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$

Définition mathématique

Soit $G = (E_1, V_1)$ et $H = (E_2, V_2)$ deux graphes. Un isomorphisme de graphe de G dans H est une bijection ϕ de G dans H qui vérifie : $(i, j) \in V_1 \Leftrightarrow (\phi(i), \phi(j)) \in V_2$.

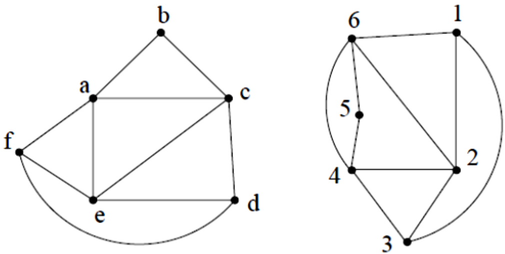
Définition

Les graphes H et G sont isomorphes s'il existe une bijection entre les ensembles de sommets des deux graphes qui respectent les relations de voisinage.

Explication

Autrement dit, si le sommet a de G correspond au sommet α de H, alors les correspondants des voisins de a dans G doivent être les voisins de α dans H et réciproquement.

Exercice d'application



$$\varphi : a \mapsto 4,\ \ b \mapsto 5, c \mapsto 6, d \mapsto 1,\ \ e \mapsto 2,\ \ f \mapsto 3.$$

Interrogation

Les deux graphes ci-dessous sont-ils isomorphes ?

DÉFINITION : SOUS-GRAPHE

un sous-graphe $G^{'}$ d'un graphe G donné est un graphe obtenu en supprimant certains sommets et/ou arêtes.

DÉFINITION 1

Un sous-graphe de $G = (V; E)$ (orienté ou non) engendré par un sous-ensemble de sommets $V' \subset V$ est $G' = (V'; E')$ où E' représente toutes les arêtes de E ayant leur deux extrémités dans V'.

DÉFINITION 2

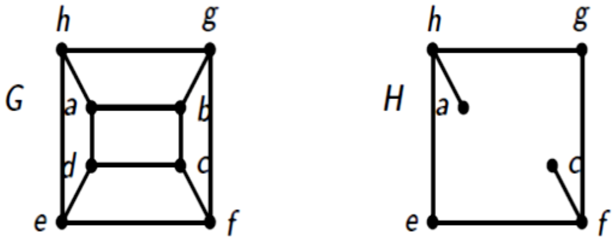
Un sous-graphe $G = (V; E)$ (orienté ou non) est obtenu en supprimant des sommets de V et les arêtes (ou arcs) qui lui sont incidentes.

EXPLICATION

Un sous-graphe de G (orienté ou non) consiste à considérer seulement une partie des sommets de V et les liens induits par E.

REMARQUE

Dans le cas général, un sous-graphe a moins de sommets et moins d'arêtes(ou arcs).



H est un sous-graphe de G, $H = G \setminus \{b, d\}$.

DÉFINITION 1 :SOUS GRAPHE PARTIEL

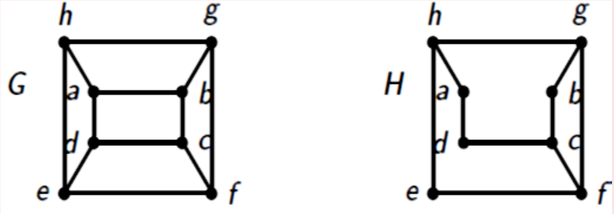
Un graphe partiel de $G = (V; E)$ (orienté ou non) engendré par $E^{'} \subset E$ est le graphe $G^{'} = (V; E^{'})$.

DÉFINITION 2

Un graphe partiel est obtenu en supprimant des arêtes (ou arcs).

REMARQUE

un graphe partiel $H \subset G$ a exactement les mêmes sommets que le graphe de départ G (orienté ou non).



H est un graphe partiel de G, $H = G \setminus \{(a,b),(d,e)\}$.

DÉFINITION : Chemin

Un chemin d'un sommet v_0 vers un sommet v_j est une liste $p = (v_0, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_j)$ de sommets telle qu'il existe dans le graphe une arête entre chaque paire de sommets successifs $(v_k, v_{k+1}) \in V$ avec $k \in [0, j-1]$. On dira que le chemin contient les sommets $v_0; v_1; ...; v_j$ et les arcs $(v_0, v_1); (v_1, v_2); ...; (v_{j-1}, v_j)$.

DÉFINITION : Longueur

La longueur du chemin correspond au nombre d'arêtes parcourues, i.e $j - 0 = j$

GRAPHE ORIENTE

Chemin élémentaire et circuit

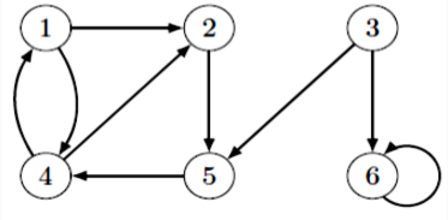
Chemin élémentaire : Un chemin $p = (v_0, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_j)$ est élémentaire si les sommets qu'il contient sont tous distincts $(\forall i, j = 1, ..., j\,; i \neq j\,;\ v_i \neq v_j)$ i.e un chemin p est simple (élémentaire) si chaque arête du chemin est empruntée une seule fois donc sans circuit.

Circuit : Un chemin $p = (v_0, v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_j)$ forme un circuit si $v_0 = v_j$ et si le chemin comporte au moins un arc $(j \geq 1)$.

Circuit élémentaire : Ce circuit est élémentaire si, en plus, les sommets $v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v_j$ sont tous distincts. Une boucle est un circuit de longueur 1.

GRAPHE ORIENTE

EXPLICATION

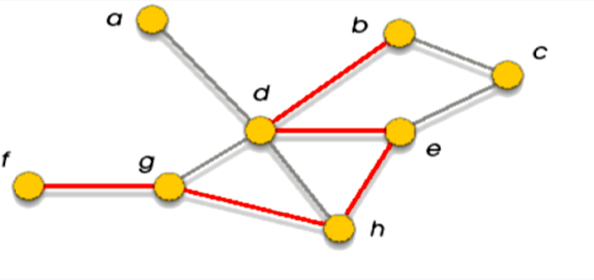


- Un chemin élémentaire dans ce graphe est $p = (1; 4; 2; 5)$.
- Un chemin non élémentaire dans ce graphe est $p = (3; 6; 6; 6)$.
- Un circuit élémentaire dans ce graphe est $p = (1; 2; 5; 4; 1)$
- Un circuit non élémentaire dans ce graphe est $p = (1; 2; 5; 4; 2; 5; 4; 1)$

GRAPHE NON ORIENTE

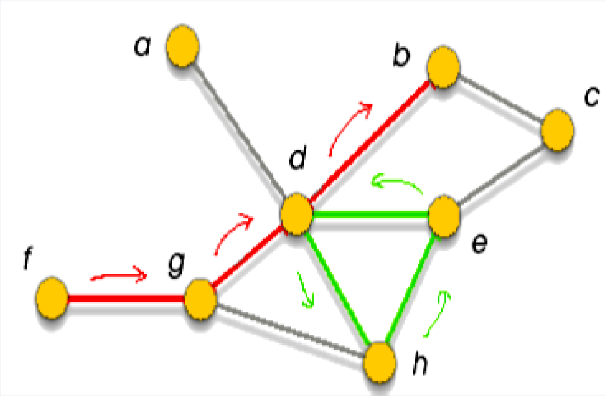
On parlera de **chaîne** au lieu de chemin, et de **cycle** au lieu de circuit. Dans le cas d'un cycle, toutes les arêtes doivent être distinctes. Un graphe sans cycle est dit **acyclique**.

EXEMPLE 1



on a un chemin de longueur 5 dans le graphe reliant les sommets f et b. $p = (f, g, h, e, d, b)$

EXEMPLE 1

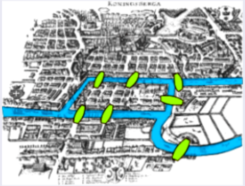


Le chemin (f, g, d, b)est élémentaire, le chemin (f, g, d, h, e, d, b) ne l'est pas : le sommet d est visité 2 fois, ce qui crée le cycle (d, h, e, d)

DÉFINITION

- Une chaîne eulérienne est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe, prises une seule fois.
- Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne dont les extrémités coïncident ;

HISTOIRE GRAPHE EULÉRIEN

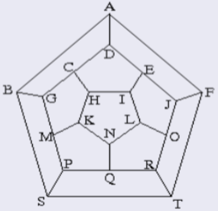


Un des plus anciens problèmes de théorie des graphes, le problème des sept ponts de Königsberg (qui s'appelle aujourd'hui Kaliningrad), consiste à essayer de traverser les sept ponts de la ville une et une seule fois, en partant et en revenant au même endroit.

THÉORÈME DE EULER

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre les sommets v_i et v_j si et seulement si v_i et v_j sont les seuls sommets de degré impair.
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

HISTOIRE GRAPHE HAMILTONIEN



En 1857, Sir William Rowan Hamilton inventa un jeu mathématique, appelé "icosian game", dont le but est de parcourir tous les sommets d'un dodécaèdre une et une seule fois, en partant et revenant du même endroit. En hommage à Hamilton, de tels graphes portent son nom.

DENTITION : GRAPHE HAMILTONIEN

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est hamiltonien s'il existe un cycle passant exactement une fois par chaque sommet de G.

REMARQUE

Reconnaître un graphe hamiltonien peut sembler facile (puisque c'est facile pour un graphe eulérien...) mais il n'en est rien. Il existe cependant des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence d'un cycle hamiltonien :

Théorème de Dirac (1952)

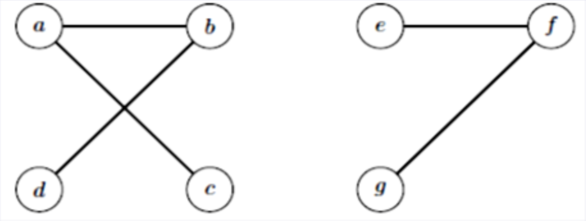
Soit un graphe simple $G = (V, E)$ à N sommets. Si le degré de tout sommet est supérieur ou égal à $N/2$, alors G contient un cycle hamiltonien.

Théorème de Ore (1960)

Soit un graphe simple $G = (V, E)$ à N sommets. Si pour chaque paire de sommets v_i et v_j non adjacents l'inégalité $\delta(v_i) + \delta(v_j) \geq N$ est vérifiée, alors G contient un cycle hamiltonien.

Définition : Graphes et sous-graphes connexes

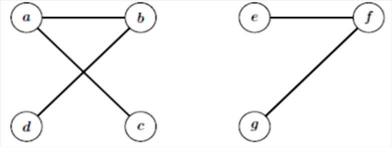
Un graphe non orienté est connexe si chaque sommet est accessible à partir de n'importe quel autre. Autrement dit, si pour tout couple de sommets distincts $(v_i; v_j) \in E \times E$, il existe une chaîne entre v_i et v_j.



le graphe non orienté suivant n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne entre les sommets a et e. En revanche, le sous-graphe induit par les sommets $\{a; b; c; d\}$ est connexe.

Définition :Composantes connexes

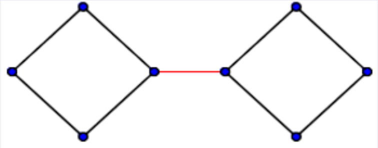
Une composante connexe d'un graphe non-orienté G est un sous-graphe G' de G qui est connexe et maximal (c'est-à-dire qu'aucun autre sous-graphe connexe de G ne contient G').
Un graphe est dit connexe si et seulement s'il admet une unique composante connexe.



Par exemple, le graphe est composé de 2 composantes connexes : la première est le sous-graphe induit par les sommets $\{a; b; c; d\}$, et la seconde est le sous-graphe induit par les sommets $\{e; f; g\}$.

Définition : point d'articulation

- Un **point d'articulation** d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.
- Un **isthme** est une arête dont la suppression a le même effet.



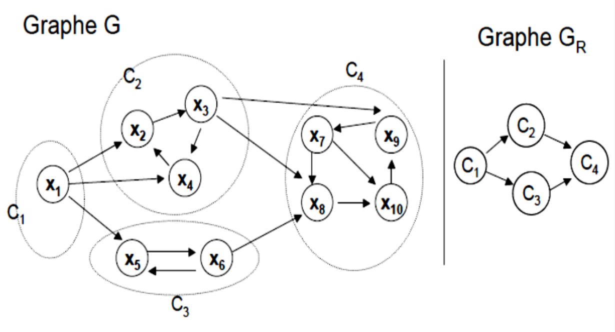
Vocabulaire

On retrouve les différentes notions de connexités dans les graphes orientés, en remplaçant naturellement la notion de chaîne par celle de chemin : on parle de graphe **fortement connexe** au lieu de connexe, de **composante fortement connexe** au lieu de composante connexe

Définition :Graphes et sous-graphes fortement connexes

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. On appelle graphe réduit de G le graphe G_r dont les sommets $c_1; ...; c_p$ sont les composantes fortement connexes de G, et il existe un arc entre c_i et c_j si et seulement s'il existe au moins un arc entre un sommet de G_i et un sommet de G_j dans le graphe G. On vérifie que le graphe G_r est sans circuit.

EXEMPLE



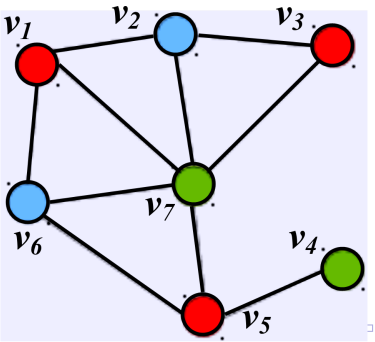
G_r est un graphe sans circuit.

Définition : Stable

On dit que $S \subset V$ est un stable si $\forall x, y \in S, (x, y) \in E$.

Définition : k-coloration de G

Une k- coloration d'un graphe (simple, sans boucles) $G = (V; E)$ est une application $c : V \to \{1; 2; \cdots; k\}$ de façon telle que les sommets voisins ont des couleurs distinctes :
$(v_i, v_j)_{i \neq j} \in E, \Rightarrow c(v_i) \neq c(v_j)$



Définition : Stable

Un stable est un ensemble de sommets non adjacents donc une k-coloration = un partitionnement du graphe en k stables.

Définition :Classe de couleur

Une k-coloration de G est une "partition" de l'ensemble V des sommets de G en k ensembles stables (ou indépendants) :
$V = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ où $V_m =$ ensemble des sommets coloriés m.

Définition : Nombre chromatique

G est k-coloriable s'il peut être colorié avec k couleurs. Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier G.

Algorithme de Welsh et Powell

Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

- **Étape 1 :** Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
- **Étape 2 :** En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.
- **Étape 3 :** S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'**Étape 2**. Sinon, FIN.