Chapitre 1: INTRODUCTION A L'OPTIMISATION COMBINATOIRE

Ghislain PANDRY

Chercheur, Traitement du signal et des images

Domaines d'application

L'optimisation combinatoire intervient sur toute situation nécessitant une planification ou une organisation efficace. Elle est liée à la minimisation de risque, du temps ou du coût ainsi qu'à la maximisation de la qualité, du profit ou de l'efficacité. L'industrie et l'ingénierie sont les domaines qui profitent le plus des études de l'optimisation combinatoire. On cite quelques exemples :

- La conception de réseaux (électriques, téléphoniques, etc) ;
- La planifications des tâches des employés d'une entreprise ;
- Le calcul d'itinéraire pour les applications de géolocalisation ;
- La planification du trafic aérien ou routier ;
- L'allocation de ressources matérielles et humaines ;
- L'ordonnancement et la planification de la production ;
- La gestion de portefeuilles ;
- Maximisation du profit et minimisation du coût.

I-1-1 : Définition Étymologique

L'optimisation est un nom féminin qui définit une action du verbe optimiser. C'est la démarche consistant à rendre optimal le fonctionnement d'un système : Donner à quelque chose (à une machine, à une entreprise, etc.) le rendement optimal en créant les conditions les plus favorables ou en tirant le meilleur parti possible..

I-1-2 : Définition en RO

L'optimisation appartient au domaine de la Recherche Opérationnelle qui représente la science de prise de décision. Un problème d'optimisation en mathématique consiste à trouver la meilleure solution possible pour un problème donné.

I-1-3 : Définition Mathématique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif,
$X \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non vide
$f : X \to \mathbb{R}$ une fonction à valeur réelle.
Un problème **d'optimisation** consiste à trouver la meilleure solution $\overline{x} \in X$ appelée solution globale.
La meilleure solution du problème varie selon l'objectif. On parle d'une **minimisation** ou une **maximisation** de la fonction f sur l'ensemble X. On note : $\overline{x} = min_{x \in X} f(x)$ ou $\overline{x} = max_{x \in X} f(x)$.

I-2-1 :Variables de décision

Le vecteur $x \in X$ est appelé vecteur de décision. Les éléments formants le vecteur de décision sont appelés variables de décision. Ce sont les variables recherchées dans le problème.

I-2-2 :Dimension de problème

La dimension du problème est représentée par le nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$. Elle représente le nombre de variables de décision. Une solution à un problème de 2 dimensions est un vecteur de 2 éléments (2-uplet).

I-2-3 :Espace de recherche et Solution admissible

L'ensemble X de dimension n contient les valeurs que le vecteur x peut prendre. Ces dernières sont appelées solutions admissibles ou faisables (ou encore solutions candidates). Une solution admissible est une affectation de toutes les variables de décision , qui répond aux contraintes du problème. L'ensemble X est connu sous différentes appellations : ensemble admissible, espace de solution, espace de recherche, domaine de recherche etc..

I-2-5 :Contraintes

L'espace de recherche X est limité par quelques règles. Une contrainte est une condition que doivent respecter les vecteurs de décision du problème.

I-2-6 :Solution optimale

C'est la meilleure solution $\overline{x} \in X$du problème. . Elle est appelée solution globale ou optimale.

I-2-7 :Fonction objectif

la fonction f, à valeur scalaire, sert de critère pour déterminer la meilleure solution du problème. Elle est appelée fonction d'objectif (fonction fitness, critère, etc). Elle attribue à chaque solution $x \in X$ de l'espace de recherche, un nombre réel indiquant sa valeur (son score).

I-2-8 :Minimisation

Une minimisation revient à trouver un élément $\overline{x}$ de X tel que : $\forall x \in X : f(\overline{x}) \leq f(x)$. On dit qu'on cherche à **minimiser** la fonction f sur l'ensemble X. Dans ce cas la fonction d'objectif f est connue comme une fonction de **coût**. Le vecteur $\overline{x}$ est une borne inférieure de l'ensemble X.

I-2-9 :Maximisation

Une minimisation revient à trouver un élément $\overline{x}$ de X tel que : $\forall x \in X : f(\overline{x})f(x)$. On dit qu'on cherche à **maximiser** la fonction f sur l'ensemble X. Dans ce cas la fonction d'objectif f est connue comme une fonction d' **utilité** ou de **profit**. Le vecteur $\overline{x}$ est une borne supérieure de l'ensemble X.

I-2-10 :Minimum et maximum stricte

On parle d'un minimum stricte (respectivement un maximum stricte) si : $\forall \in X$: $f(\overline{x}) < f(x)$ (respectivement $f(\overline{x}) > f(x)$).

I-2-11 :Voisinage

Une solution voisine d'une solution x est définit comme une légère modification de la solution x . Cette modification est appelée aussi **mouvement**. Le voisinage de la solution x est l'ensemble des solutions de voisines de x.

I-2-12 :Optimum global et local

Un optimum global est la valeur de la fonction objectif de la solution globale. On peut avoir plusieurs solutions globales mais un seul optimum globale . Un optimum local reflète la meilleure solution dans un entourage voisin. Dans la figure, on remarque qu'il existe deux solutions différentes x_1 et x_2 qui reflètent un seul optimum global $f_1 = f_2$. La solution x_3 représente une solution locale reflétant un optimum local.

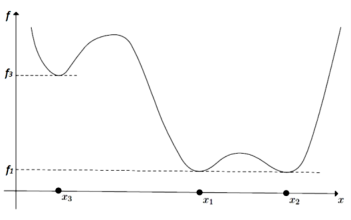

Figure – Optimum local et global

II-1 : Familles

Il existe plusieurs familles d'optimisation. Il est important de bien identifier à quelle catégorie appartient le problème pour pouvoir choisir la conduite de la résolution. Les problèmes d'optimisation diffèrent selon l'espace de recherche, les contraintes, les objectifs, etc. Selon la nature de l'ensemble de recherche X on distingue deux classes d'optimisation : l'optimisation continue et l'optimisation discrète.

II-1-1 :Optimisation Continue

On parle d'Optimisation continue, si l'espace de recherche X est continu (par exemple l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$). La fonction objectif est aussi continue. La fonction sphère est une fonction continue définie par $f(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^2$. La minimisation de cette fonction est une optimisation continue.

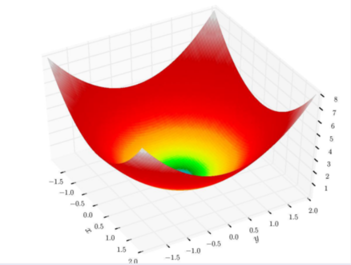

Figure – Fonction objectif continue

II-1-2 :Optimisation Discrète

On parle d'Optimisation discrète, si l'espace de recherche X est discret et infini. La fonction objectif qui définit un tel problème est représentée par un nuage de points. Les problèmes de cette classe d'optimisation sont plus difficiles que ceux de l'optimisation continue.

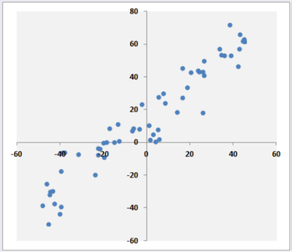

Figure – Fonction objectif discrète

II-1-2 :Optimisation combinatoire

L'optimisation combinatoire est une branche de l'optimisation discrète dont l'espace de recherche est fini et dénombrable.

II-2-1 : Optimisation avec et sans contraintes

L'espace de recherche peut être limité par des contraintes. Ces dernières peuvent être des bornes inférieures ou supérieures, ou un ensemble d'équations définissant des situations précises. L'optimisation avec contraintes est plus compliquée à résoudre. Dans le cas contraire, l'espace de recherche n'est pas limité par des contraintes. Il est alors infini et toutes les solutions incluses sont candidates. L'optimisation sans contraintes est plus facile à résoudre.

II-2-2 : Optimisation mono ou multi-objectifs

Un problème d'optimisation peut avoir un ou plusieurs objectifs. Un problème monoobjectif est défini par une unique fonction objectif. S'il se trouve plusieurs objectifs qui génèrent une contradiction entre eux, on parle alors d'un problème multi-objectifs. Pour des raisons de simplification, un problème multi-objectif peut être reformulé avec une seule fonction objectif ou en transformant des objectifs sous forme de contraintes.

III-1-1 : Introduction

Face à un problème d'optimisation combinatoire donné, la question à laquelle on doit répondre est la résolution du problème. Ce dernier possède généralement un nombre énorme de solutions réalisables.
La résolution la plus évidente est de lister toutes les combinaisons possibles afin de trouver celles qui sont valides et meilleures. On appelle ce type d'algorithme : Algorithmes Exhaustifs.
Ces algorithmes sont très gourmands en terme de complexité. Ils passent d'algorithmes polynomiaux à non-polynomiaux avec l'augmentation de la dimension du problème à traiter.

III-2-1 : Classes de familles

Les méthodes de l'optimisation combinatoire peuvent être classées en deux grandes familles de classes : les méthodes exactes et les méthodes approchées.

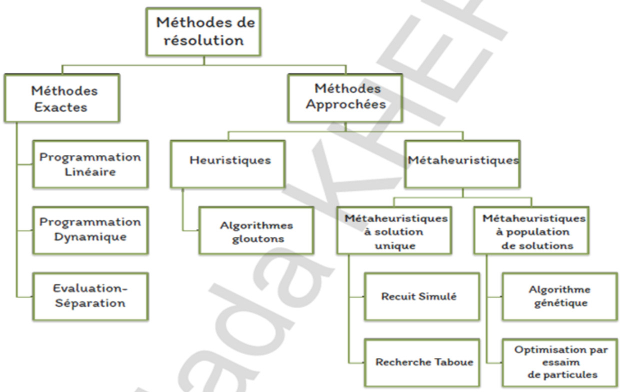

Figure – Type de méthodes