

Méthodes numériques pour résolution d'EDP – Le ressaut hydraulique

Noé DANIEL & Richard PATEAU

20 janvier 2025

Résumé

Au travers de ce document, nous allons présenter dans les grandes lignes les étapes qui nous permettent de simuler numériquement l'évolution dynamique d'un ressaut hydraulique.

1 Une première approche : le ressaut hydraulique unidimensionnel.

Les ressauts hydrauliques sont des phénomènes physiques qui apparaissent généralement lorsque l'on étudie l'écoulement d'un fluide en présence de perturbations (topographie des canaux, présence d'obstacles) ou d'écoulements sous-critiques / sur-critiques.

1.1 Dérivation des équations pour un ressaut 1D

Considérons un canal hydraulique délimité par les abscisses $x = 0$ et $x = L$. On se place dans le cas d'une invariance selon l'axe \vec{e}_y pour réaliser une étude 1D.

On désigne par topographie du canal, la géométrie du fond de ce canal. Cette topographie est le profil du fond du canal que l'on notera $z_b(x)$ et que l'on considérera constant tout au long de l'étude.

Lorsqu'un fluide pénètre dans le canal, celui-ci a une hauteur de surface libre qui dépend de l'abscisse et de l'instant où l'on regarde le niveau d'eau. Cette hauteur sera notée $h(x, t)$.

On considérera que le fluide est injecté via une vitesse initiale initialement colinéaire à l'axe \vec{e}_x et on pourra considérer qu'en moyenne la vitesse dans une tranche verticale de fluide notée u et colinéaire à \vec{e}_x et ne dépend que de x et de t .

1.1.1 Conservation de la masse

En considérant un bilan de masse sur une tranche $(x, x + dx)$ entre les instants t et $t + dt$, on aboutit à l'équation classique de conservation de la masse 1D :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

où :

- $h(x, t)$ est la hauteur d'eau (m) à la position x et au temps t .
- $u(x, t)$ est la vitesse moyenne de l'écoulement ($m.s^{-1}$).
- hu représente le débit volumique ($m^3.s^{-1}$).

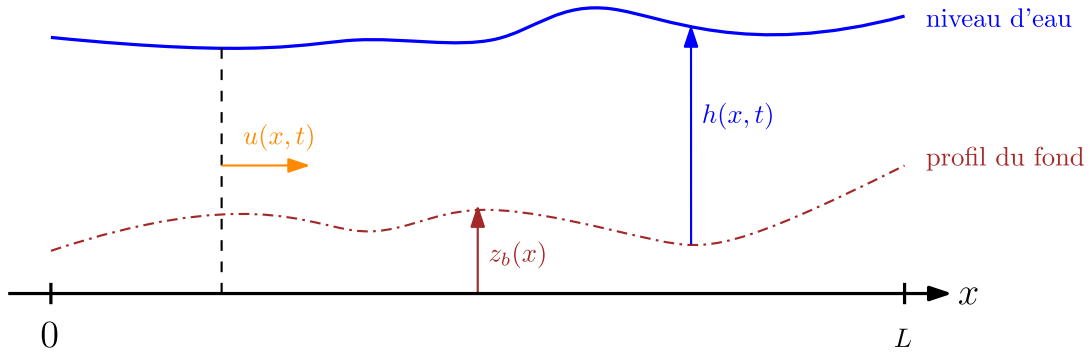


FIGURE 1 – Introduction des notations pour le ressaut unidimensionnel.

1.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Par la même approche, on réalise un bilan de quantité de mouvement qui permet d'aboutir à la deuxième équation maîtresse :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{n^2 gu|u|}{h^{4/3}} \quad (2)$$

où :

- g est l'accélération due à la gravité ($9,81 \text{ m/s}^2$).
- $z_b(x)$ est la topographie du lit du cours d'eau (m).
- n est le coefficient de rugosité de Manning, caractérisant la résistance au flux due au lit et aux parois.

1.1.3 Système des équations 1D de Saint-Venant

Le dernier terme du membre de droite de (2) est appelé le terme de Manning. Pour simplifier le problème, on considérera que ce terme est négligeable. Cette approximation est valide pour des milieux peu rugueux où le frottement ne joue pas beaucoup.

On aboutit alors au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} &= -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \end{cases} \quad (3)$$

1.2 L'origine du ressaut hydraulique

La résolution des équations de Saint-Venant simplifiées présente plusieurs difficultés.

Dans un premier temps, il apparaît des termes non linéaires en h et u avec la présence de hu^2 et gh^2 . Ces non-linéarités peuvent engendrer des solutions complexes, incluant des ondes de choc.

En particulier ces ondes de choc apparaissent dans certains régimes d'écoulement lorsque le nombre de FROUDE dépasse une certaine valeur critique. *On rappelle que le nombre de Froude est défini par : $Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}}$.*

Lorsque ces chocs apparaissent, il est possible d'observer un saut de hauteur entre deux zones de l'écoulement. C'est ce que l'on appelle un ressaut hydraulique (ou *hydraulic jump* en anglais qui a plus de sens).

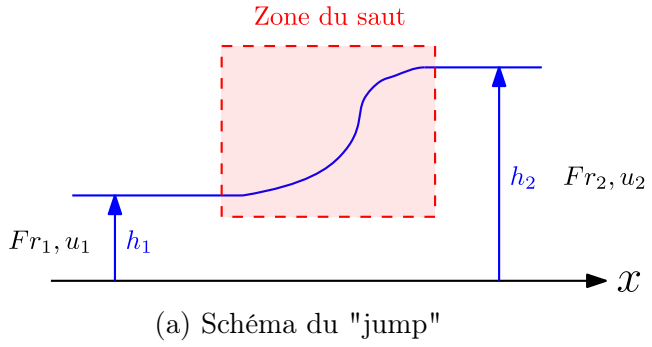


FIGURE 2 – Visualisation d'un ressaut hydraulique stationnaire. *Les ressauts ne sont pas tout stationnaires, le saut peut se propager dans l'espace, c'est d'ailleurs souvent le cas !*

Ces ressauts hydrauliques sont particulièrement visibles lorsque des obstacles apparaissent au sein de l'écoulement, lors de changement de topographies ou même dans le robinet de notre cuisine.

1.3 Schémas de discrétisation

On utilisera dans toute la suite des schémas de conservation utilisant la méthode des volumes finis, de manière à inclure la conservation de la masse et de la quantité de mouvement au cœur du problème. Pour ce faire, on utilisera dans le cas unidimensionnel les vecteurs vitesse U , flux F et source S définis ainsi :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Avec ces notations, on peut combiner le système différentiel pour obtenir :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (5)$$

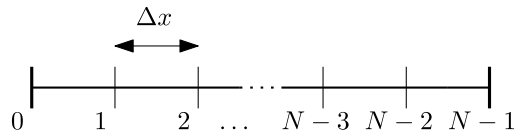


FIGURE 3 – Discrétisation de l'intervalle $[0, x]$

On discrétise l'intervalle $[0, x]$ en N points équirépartis. On notera Δx et Δt les pas de discrétisation en espace et en temps, et par exemple U_i^j désignera la valeur prise par U à la position $i\Delta x$ et au temps $j\Delta t$.

1.3.1 Schéma de Rusanov

Le schéma de RUSANOV (ou de LAX-FRIEDRICHS) est un schéma de type Godunov, c'est-à-dire qu'il consiste à approximer les flux aux interfaces des volumes de contrôle, ce qui est intéressant dans le cas du ressaut hydraulique qui peut comporter des chocs ou des discontinuités. Pour ce faire, le schéma de Rusanov prend en compte la vitesse caractéristique du système λ .

En notant U_i et F_i la vitesse et le flux pris au centre du volume de contrôle d'indice i , et λ la vitesse maximale dans tout l'espace (cf. Fig. (4)), alors le flux à l'interface de gauche de ce volume de contrôle, noté $F_{i-1/2}$, est donné par l'équation :

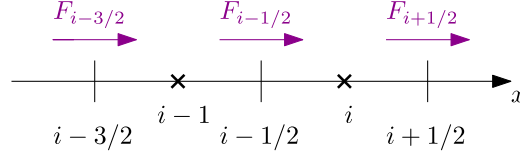


FIGURE 4 – Notations utilisées pour la décomposition en volumes finis

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2} (F_i + F_{i-1}) - \frac{\lambda}{2} (U_i - U_{i-1}) \quad (6)$$

Une fois que les flux sont calculés, on peut déterminer l'évolution temporelle de U avec une écriture explicite :

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1/2}^j - F_{i-1/2}^j) + \Delta t S \quad (7)$$

1.3.2 Schéma MUSCL

Le schéma MUSCL (pour *Monotonic Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws*) consiste, comme le schéma Rusanov, à approximer le flux aux interfaces du volume de contrôle, mais cette fois ci en utilisant des interpolations. On cherche désormais à reconstruire les vitesses aux interfaces, en tenant compte des gradients locaux. Aux interfaces, la vitesse $U_{i\pm 1/2}$ s'expriment donc :

$$U_{i\pm 1/2} = U_i \pm \frac{1}{2} \Delta x \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_i \quad (8)$$

En notant \hat{F} l'opérateur à appliquer pour passer de U à F (c'est-à-dire $F = \hat{F}(U)$), on peut écrire :

$$F_{i\pm 1/2} = \hat{F} \left(U_{i\pm \frac{1}{2}} \right) \quad (9)$$

et pour calculer l'évolution temporelle de U il suffit comme précédemment d'écrire l'évolution explicite avec l'équation (7).

Remarque. En pratique, l'opérateur \hat{F} peut être n'importe quelle autre fonction de flux numérique (*Rosunov, HLL, ...*).

1.3.3 Schéma HLL (Harten-Lax-van Leer)

Le schéma (ou solver) HLL pour HARTEN-LAX-VAN LEER fait partie des solvers dits de RIEMANN et il en constitue une simplification.

Ce dernier repose sur deux hypothèses principales pour approximer la solution. Premièrement, la solution est délimitée par deux ondes distinctes, une qui se propage vers la gauche à une vitesse notée s_L et l'autre vers la droite à une vitesse s_R . Dans un second temps, entre ces deux ondes, la solution va être approximée par une région constante (on ignorera les discontinuités de contact).

Le flux numérique donné par le schéma de HARTEN-LAX-VAN LEER est alors construit ainsi :

$$F_{\text{HLL}} = \begin{cases} F_L & \text{if } s_L > 0 \\ F_R & \text{if } s_R < 0 \\ \frac{s_R F_L - s_L F_R}{s_R - s_L} + \frac{s_R s_L (U_R - U_L)}{s_R - s_L} & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

Lorsque l'on s'intéresse aux équations de SAINT-VENANT avec ce schéma, on utilise l'approximation :

$$s_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R) \quad s_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R)$$

Avec c_R, c_L désignant les vitesses des ondes gravitaires dans les états de droite et de gauche et u_R, u_L les vitesses de l'écoulement dans ces deux états.

On a volontairement repris les notations que l'on retrouve habituellement dans la littérature. À savoir que dans notre cas l'indice L pour left correspond à l'indice i et de même pour R avec $i + 1$.

1.3.4 Schéma HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact)

Le solver HLLC est un raffinement du HLL. La lettre C en plus désigne "contact", il repose sur les mêmes principes que le HLL mais introduit en plus une troisième onde : l'onde de contact à la vitesse s^* .

Dans le modèle *shallow-water*, on fait un bilan de flux et de vitesse moyenne en direct pour trouver la vitesse de contact.

Dans deux des trois cas, rien n'est changé vis-à-vis du HLL, seul le cas où $s_L < 0$ et $s_R > 0$ est modifié. Dans ce cas, on calcule la vitesse de contact via un bilan. Ensuite, on redéfinit des valeurs de l'écoulement via :

$$\begin{aligned} h_L^* &= h_L & \text{si } s_L = s^* \\ h_L^* &= h_L \frac{(s_L - u_L)}{(s_L - s^*)} & \text{sinon} \\ h_R^* &= h_R & \text{si } s_L = s^* \\ h_R^* &= h_R \frac{(s_R - u_R)}{(s_R - s^*)} & \text{sinon} \end{aligned}$$

On définit les débits actualisés Q_L^* et Q_R^* et on calcule de nouveaux flux (*on rappelle que* $Q = hu$) :

$$\begin{aligned} F_L^* &= F_L + s_L(Q_L^* - Q_L) \\ F_R^* &= F_R + s_R(Q_R^* - Q_R) \end{aligned}$$

En fin de compte, on renvoie le flux suivant :

$$F_{\text{HLLC}} = \begin{cases} F_L & \text{si } s_L > 0 \\ F_R & \text{si } s_R < 0 \\ F_L^* & \text{si } s_L < 0, s_R > 0, s^* > 0 \\ F_R^* & \text{si } s_L < 0, s_R > 0, s^* < 0 \end{cases}$$

1.3.5 Schéma de Roe

Le schéma de ROE est également un type de solveur de Riemann et est aussi basé sur le schéma de Godunov, qui consiste à estimer les flux aux interfaces. On calcule pour cela la moyenne des états à gauche et à droite, $\bar{u}_{i+1/2}$ et $\bar{h}_{i+1/2}$, appelée « moyenne de Roe » :

$$\bar{u}_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i}u_i + \sqrt{h_{i+1}}u_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad , \quad \bar{h}_{i+1/2} = \sqrt{h_i h_{i+1}} \quad (11)$$

On définit ensuite $\bar{c} = \sqrt{g \bar{h}_{i+1/2}}$. Enfin, on pose $s_{\max} = |\bar{u}_{i+1/2}| + \bar{c}$, qui correspond à la valeur propre maximale de la matrice des états propres en i et en $i+1$. En effet, dans la majorité des cas, lorsque l'on traite des équations simplifiées de SAINT-VENANT, les valeurs propres sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \bar{u} - \bar{c} \\ \lambda_2 &= \bar{u} + \bar{c} \end{aligned}$$

Avec \tilde{c} qui correspond à la célérité $\bar{c} = \sqrt{g\bar{h}}$.

Le flux du schéma de Roe est alors donné par la formule :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}s_{\max}(U_{i+1} - U_i) \quad (12)$$

1.4 Conditions aux limites

Pour simuler le ressaut hydraulique dans le cas unidimensionnel, on considère le cas un canal alimenté par un débit constant Q_0 , qui correspond ici à un débit surfacique (avec par exemple $D_0 = L_y Q_0$ le débit volumique). Il est raisonnable d'imposer une hauteur d'eau constante h_0 à gauche, car c'est la situation qu'on s'attend à retrouver en régime stationnaire. On a donc, pour tout instant j :

$$U_0^j = \begin{pmatrix} h_0 \\ Q_0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Le cas des conditions aux limites à droite est plus délicat. On ne peut pas imposer de hauteur d'eau car c'est précisément ce qu'on cherche à déterminer, et il n'est pas non plus évident que le débit soit le même à la sortie qu'à l'entrée (le volume d'eau dans l'espace étudié peut varier).

On choisit donc d'utiliser des conditions aux limites de Neumann portant plutôt sur les dérivées spatiales de ces quantités. En partant de l'idée que loin en aval du ressaut, la solution doit être assez homogène dans l'espace, on choisit d'imposer $\frac{dh}{dx} = \frac{du}{dx} = 0$ à droite.

Pour ne pas mordre sur les points de l'intervalle simulé, on rajoute un point fantôme à l'extrémité droite, en $i = N$ (cf. Fig. 5). La condition de dérivée nulle revient alors à prendre $U_{N-1} = U_N$.

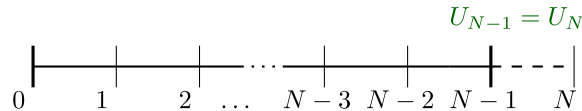


FIGURE 5 – Point fantôme rajouté pour les conditions aux limites de Neumann

1.5 Conditions initiales

Les ressauts hydrauliques sont des phénomènes singuliers, ils n'apparaissent pas tout le temps puisque ce sont des ondes de choc particulières. Une de nos grandes difficultés a donc été de trouver des conditions initiales pour amorcer un ressaut. Par conditions initiales, on entend, comment initialiser le vecteur U à l'instant $t = 0$ sur toute la grille spatiale.

Généralement, on initialisera la hauteur comme identique sur le domaine spatiale puis on ajout soit un échelon soit une hauteur différente à gauche. Dans la majorité des cas on imposera un débit nul partout sauf en entrée (inflow à gauche).

1.6 Quelques résultats en 1D

Dans un premier temps, considérons un obstacle gaussien (c'est souvent ce que l'on choisit lorsque l'on fait des expériences en laboratoire). On impose le débit à gauche et on laisse les hauteurs libres d'évoluer.

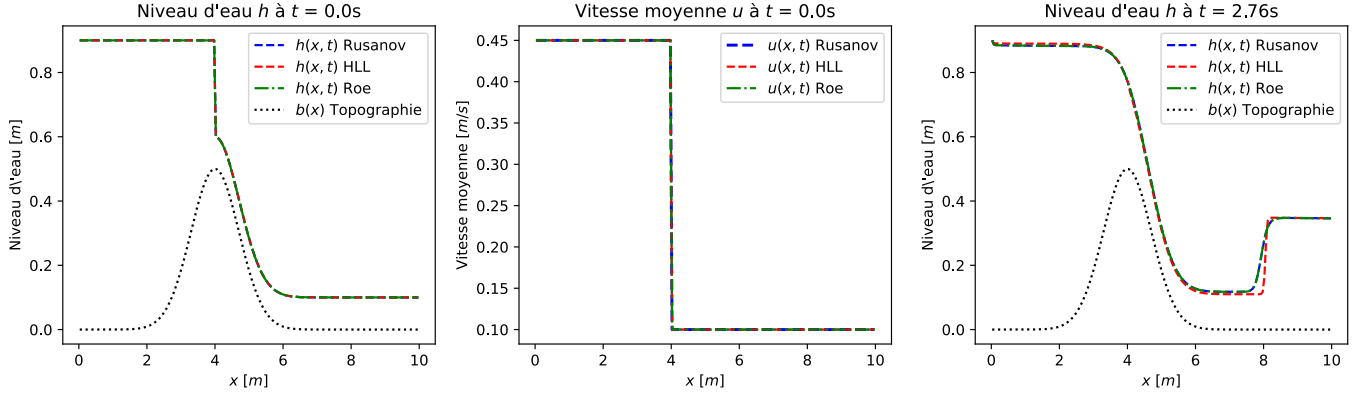


FIGURE 6 – Visualisation des conditions initiales et de l'évolution du niveau d'eau pour une première expérience.

On laisse évoluer le fluide sur un temps de l'ordre d'une dizaine de secondes et on voit apparaître un choc qui se propage. Par exemple, la Figure 6 montre l'évolution du choc avec un schéma de ROSUNOV.

La propagation du choc est raisonnable lorsqu'on la compare à des expériences qui ont pu être réalisées dans des *water tanks*. La Figure 7 est une observation extraite de [8] qui semble bien coïncider avec notre simulation.

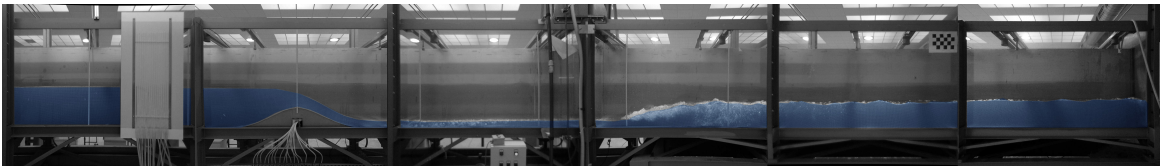
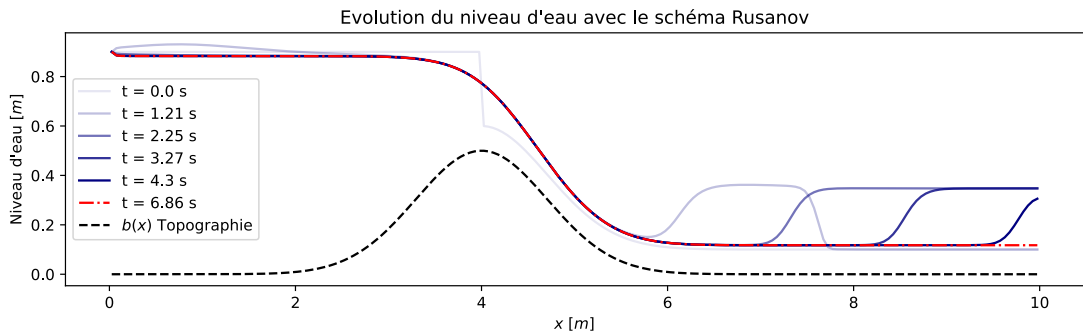


FIGURE 7 – *En haut*, évolution du niveau d'eau dans notre expérience numérique avec le schéma de RUSANOV. *En bas*, observations réalisées dans [8].

Cette expérience a été aussi réalisée avec les différents schémas présentés pour pouvoir comparer les résultats. C'est ce que l'on représente sur le graphique de droite de la Figure 6.

2 Une deuxième approche : le ressaut hydraulique circulaire, le *kitchen sink* problem.

Dans la première partie de notre étude, nous nous sommes intéressés à des ressauts hydrauliques unidimensionnels. Ces derniers sont aujourd'hui très bien compris aussi bien dans leurs profils stationnaires que dynamiques.

Toutefois, on observe aussi des ressauts « circulaires ». C'est typiquement le cas lorsqu'on laisse notre robinet ouvert, on peut alors observer un ressaut dans l'évier comme observé sur la FIGURE 8.

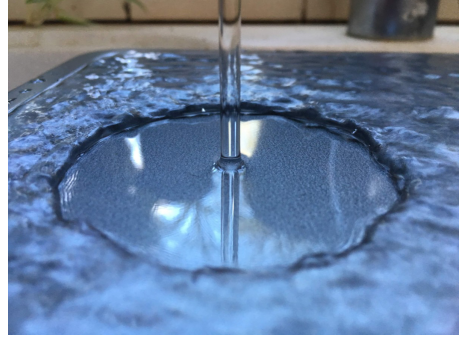
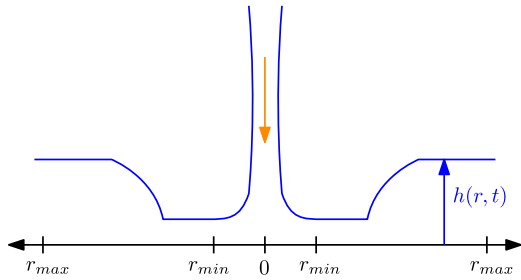


FIGURE 8 – Notations utilisées pour le ressaut hydraulique circulaire (*CHJ - Circular Hydraulic Jump*)

2.1 Dérivation des équations en géométrie cylindrique

Considérons désormais un ressaut dans une géométrie circulaire. Pour plus de simplicité, on considère que le problème est invariant par rotation autour de l'axe vertical \vec{e}_z .

Dans ce cas, on peut alors considérer que la hauteur du fluide ne dépend que de r et de t et $h := h(r, t)$. On peut donc se restreindre à l'étude dans une coupe (et même une demi-coupe) comme représenté sur le schéma de la FIGURE 8. Par simplicité, on considérera aussi que $z_b = 0$ (fond plat).

Alors pour trouver les analogues aux équations (1, 2), on fait un bilan sur une couronne cylindrique entre pour $r_1 < r < r_2$. Les équations sont alors quelque peu modifiées et on fait apparaître la position cylindrique r .

$$\frac{\partial(rh)}{\partial t} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad \text{i.e} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

Puis pour la quantité de mouvement, on obtient :

$$\frac{\partial(rhu)}{\partial t} + \frac{\partial(rhu^2)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}rgh^2\right)}{\partial r} = 0 \quad (15)$$

Notons que le ressaut circulaire diffère du ressaut hydraulique unidimensionnel par l'apparition de nouveaux termes sources (qui sont en réalité cachés dans la divergence) de l'équation. Si on développe ces expressions :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial r} = -\frac{hu}{r} \quad (16)$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial\left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial r} = -\frac{hu^2 + \frac{1}{2}gh^2}{r} \quad (17)$$

En reprenant la notation avec U , F et S , on obtient à nouveau l'équation (5) avec :

$$U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} -\frac{hu}{r} \\ -\frac{hu^2 + \frac{1}{2}gh^2}{r} \end{pmatrix} \quad (18)$$

2.2 Difficultés de modélisation

L'objectif étant de simuler un *inflow* de type jet d'eau vertical. Cependant cet *inflow* est compliqué à simuler via les équations de Saint-Venant et on aura une singularité en $r = 0$. Pour remédier à cela, notre démarche est de restreindre l'étude à un domaine $[r_{\min}, r_{\max}]$ et de considérer des conditions de Dirichlet en r_{\min} qui pourraient correspondre au jet.

Simplification. On considère donc un ressaut hydraulique 1D où l'axe x de la première partie est remplacé par l'axe r radial et où les équations (5, 4) sont remplacées par (18).

2.3 Difficultés de simulation

Dans notre simulation, on observe bien la formation d'un ressaut circulaire, la forme est d'ailleurs caractéristique avec une légère inclinaison de la pente de $h(r)$ vers r_{\min} .

Le ressaut se propage jusqu'à atteindre une position d'équilibre. Cependant, lorsqu'on laisse évoluer la simulation, le ressaut repart en arrière pour se résorber. Ce comportement peut s'expliquer de trois façons :

- Dans tous nos programmes, on ne peut jamais traiter de hauteur nulle car pour le calcul des flux, on récupère la vitesse moyenne de l'écoulement via : $u = U[1, :]/U[0, :]$. Pour remédier à cela, on considère toujours que dans la division, le dénominateur n'est jamais nul avec l'astuce : $u = U[1, :]/(U[0, :]+1e-10)$. Dans les faits, on n'obtient donc jamais une hauteur ou une vitesse vraiment réellement égale à ce qu'elle devrait.
- Physiquement, lorsque le ressaut est à l'équilibre et qu'on ajoute une légère perturbation à son état d'équilibre, le ressaut se résorbe lorsque l'on a un *outflow* à droite (notre cas) [3]. C'est ce qui arrive dans notre cas, les vitesses seront toujours très légèrement différentes des vitesses qu'on devrait obtenir à l'équilibre et on ne peut pas stabiliser le ressaut.
- Comme on l'a vu dans le cours, l'oscillation numérique peut aussi avoir lieu ce qui crée des perturbations résorbant le ressaut lorsque celui-ci est dans son état *pseudo-équilibre*.

Notre proposition. Pour éviter que le ressaut ne reparte, on va créer une fonction qui détecte la position du *jump*. Lorsque la position du *jump* recule de sa position *pseudo-équilibre*, le programme se termine.

2.4 Quelques résultats pour le ressaut circulaire

En considérant un niveau d'eau plat (fond d'eau au repos dans un évier) h_0 , on impose par la suite un inflow en r_{\min} et on visualise l'évolution du niveau d'eau.

Avec notre détection automatique de l'état de *pseudo-équilibre*, on obtient les tracés de la hauteur d'eau et de la vitesse moyenne qui sont représentés sur la Figure 9. Les résultats sont concluants et on retrouve bien autour du jet une différence de niveau avec les bords du domaine.

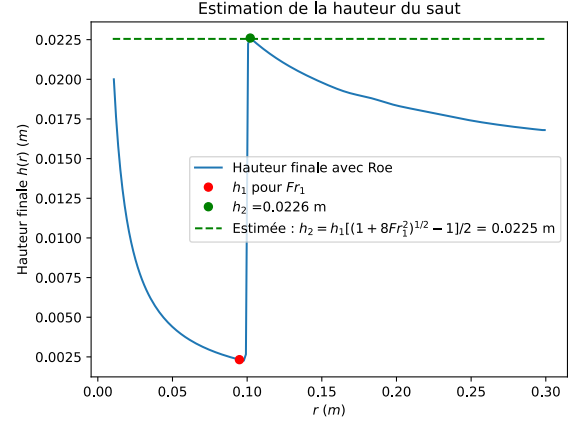
La figure 9 montre l'évolution du système avec le schéma de Rosunov, on a à nouveau fait les simulations pour les différents schémas pour pouvoir comparer les résultats. Cette comparaison est représentée Figure 10.

Vérification de la théorie stationnaire

En faisant un bilan sur un volume de contrôle qui comprend le ressaut et en notant h_1, Fr_1 la hauteur et le nombre de Froude en aval et h_2, Fr_2 en amont, on obtient [7] :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1}{2} \quad (19)$$

On peut ensuite utiliser notre simulation pour voir si notre résultat est cohérent.



Les résultats sont bien satisfaisants.

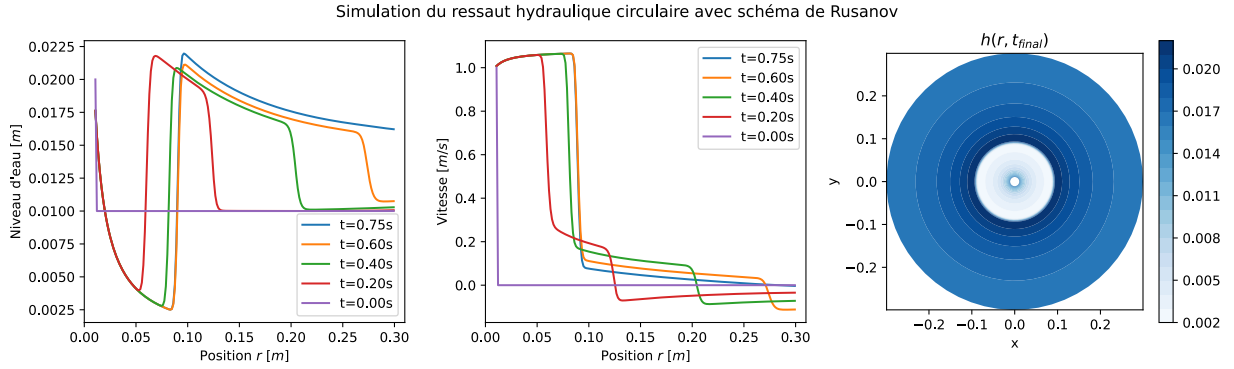


FIGURE 9 – *A gauche* : Évolution du niveau d'eau au long de la simulation et apparition du ressaut hydraulique. *Au centre* : Évolution de la vitesse moyenne de l'écoulement. *A droite* : Visualisation 2D circulaire de la hauteur du niveau d'eau à la fin de la simulation.

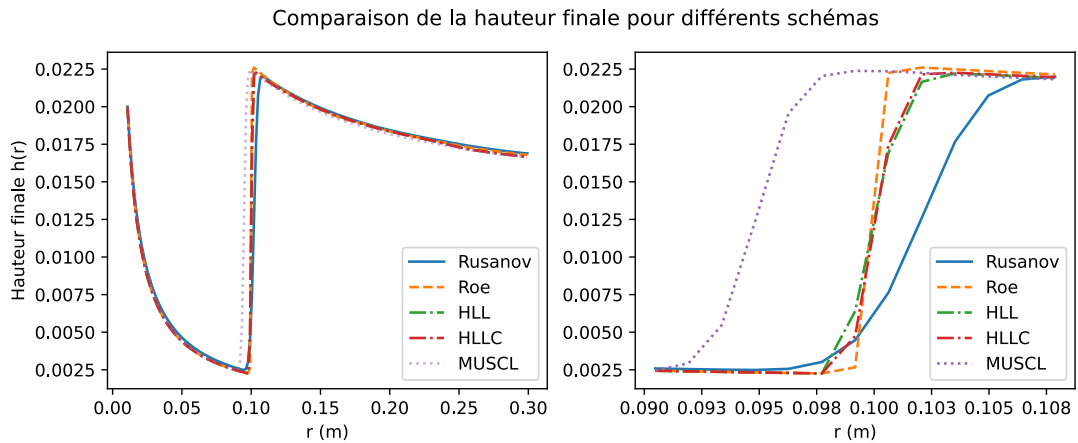


FIGURE 10 – Comparaison des *jumps* finaux pour les différents schémas de flux.

Conclusion

Le ressaut hydraulique est un phénomène physique complexe à capturer en utilisant des méthodes numériques, du fait des non-linéarités qui engendrent des discontinuités ou des ondes de choc. Plusieurs conditions doivent être réunies pour l'observer : il faut être dans le bon régime, adopter des conditions aux limites adaptées et partir d'un état initial qui permet d'établir un ressaut.

On a ici comparé plusieurs méthodes de volumes finis. Dans le cas unidimensionnel, nous avons considéré un obstacle placé au fond du canal, et les différents schémas utilisés ont permis d'observer une onde de choc qui se propage avec l'écoulement, de manière satisfaisante au vu des réalisations expérimentales de ce problème.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la géométrie cylindrique pour se rapprocher du problème de l'évier de cuisine. Cette configuration engendre des complications, notamment pour des faibles rayons. En considérant une arrivée d'eau verticale en $r = 0$, tous les schémas ont également fait apparaître une élévation de la surface qui se propage d'abord vers l'extérieur puis rebrousse chemin jusqu'à disparaître. Ce dernier point contredit l'expérience, qui prédit un ressaut stationnaire. Cependant, en considérant l'instant où la position du ressaut est maximale, la hauteur de l'eau correspond bien à celle qui peut être estimée par la théorie.

Les travaux menés dans ce projet permettent donc un accord à la fois qualitatif et quantitatif dans une certaine mesure avec les résultats théoriques et expérimentaux. Pour simuler plus précisément le ressaut hydraulique, il serait pertinent de prendre en compte des phénomènes comme la viscosité ou la tension superficielle, qui semblent jouer un rôle majeur dans la partie turbulente de l'écoulement en aval du choc. Il est malgré tout remarquable qu'un modèle rustique comme celui des équations de Saint-Venant parvienne à capturer le comportement du ressaut.

Références

- [1] R. K. Bhagat et P. F. Linden, « The circular hydraulic jump ; the influence of downstream flow on the jump radius », *Physics of Fluids*, vol. 34, n° 7, p. 072111, juill. 2022, doi : 10.1063/5.0090549.
- [2] O. Castro-Orgaz et W. H. Hager, « Classical hydraulic jump : basic flow features », *Journal of Hydraulic Research*, vol. 47, n° 6, p. 744-754, nov. 2009, doi : 10.3826/jhr.2009.3610.
- [3] D. I. Ketcheson, R. J. LeVeque, et M. J. Del Razo, *Riemann Problems and Jupyter Solutions*. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2020. doi : 10.1137/1.9781611976212.
- [4] X. Liu et J. H. Lienhard, « The hydraulic jump in circular jet impingement and in other thin liquid films », *Experiments in Fluids*, vol. 15, n° 2, p. 108-116, juill. 1993, doi : 10.1007/BF00190950.
- [5] J. Machalinska-Murawska et M. Szydłowski, « Lax-Wendroff and McCormack Schemes for Numerical Simulation of Unsteady Gradually and Rapidly Varied Open Channel Flow », *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, vol. 60, n° 1-4, p. 51-62, oct. 2014, doi : 10.2478/heem-2013-0008.
- [6] J. N. Reddy, N. K. Anand, et P. Roy, *Finite element and finite volume methods for heat transfer and fluid dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 2023. doi : 10.1017/9781009275453.

- [7] E. Retsinis et P. Papanicolaou, « Numerical and Experimental Study of Classical Hydraulic Jump », *Water*, vol. 12, n° 6, p. 1766, juin 2020, doi : 10.3390/w12061766.
- [8] Cantero-Chinchilla, F.N., Castro-Orgaz, O., Ali, S.Z. et al. Experiments on hydraulic jumps over uneven bed for turbulent flow modelling validation in river flow and hydraulic structures. *Sci Data* 11, 313 (2024). <https://doi.org/10.1038/s41597-024-03135-0>