

Ressaut hydraulique

Méthodes numériques pour résolution d'EDP

Noé Daniel, Richard Pateau



Département
de Physique
—
École normale
supérieure

22 janvier 2025

Le ressaut hydraulique

- Élévation de la hauteur, ondes de choc causées par des non-linéarités
- Perturbation dans l'écoulement :
 - Changement de topographie
 - Obstacle
- Écoulements sous-critiques/sur-critiques



Figure: Ressaut unidimensionnel

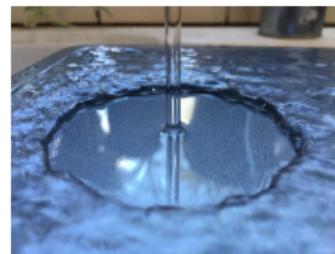


Figure: Ressaut cylindrique

Objectif

Simuler le ressaut hydraulique dans les géométries 1D et cylindrique.

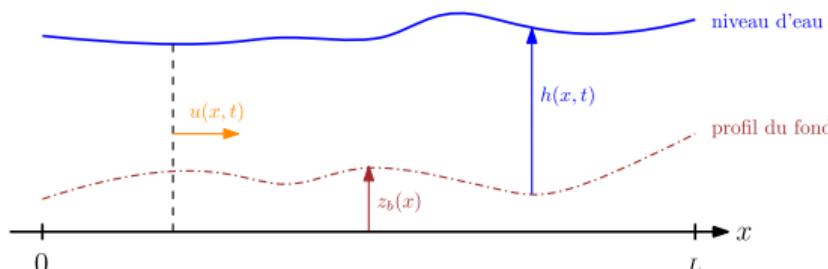
Ressaut hydraulique 1D

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -gh\frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{n^2 gu|u|}{h^{4/3}}$$



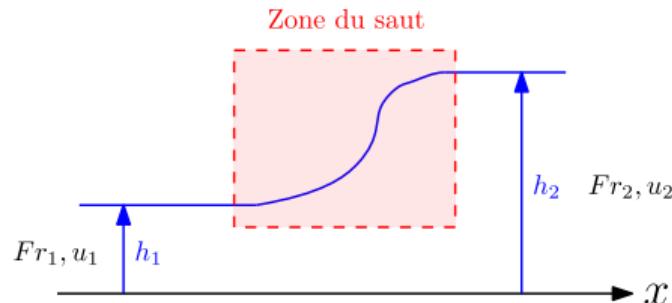
Équations 1D de Saint-Venant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} \end{cases} = 0$$
$$= -gh\frac{\partial z_b}{\partial x}$$

Origine du ressaut

$$\text{Saint-Venant 1D : } \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \end{cases}$$

- Termes non-linéaires : hu^2, gh^2
- Ondes de chocs dans certains régimes d'écoulement : $Fr = \frac{v}{\sqrt{gL}} > Fr_c$



Ressauts souvent non stationnaires : **propagation**

Schémas de discréétisation

Méthode des **volumes finis** : conservation de la masse et de la quantité de mouvement

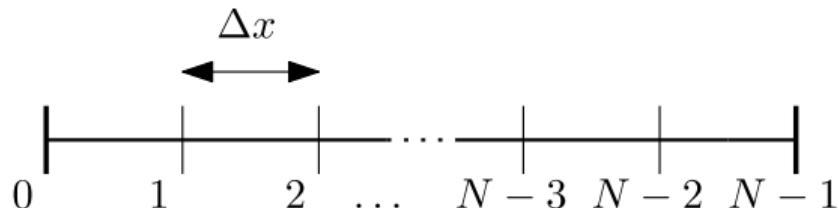


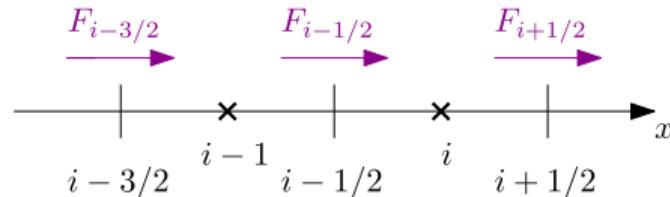
Figure: Discréétisation de l'intervalle $[0, x]$

Notations et équation vectorielle

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Saint-Venant 1D} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}$$

Schéma de Rusanov



- Approximer \mathbf{F} aux interfaces des volumes de contrôle :

$$\mathbf{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i-1}) - \frac{\lambda}{2} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1})$$

λ : vitesse maximale dans l'espace

- Évolution temporelle de \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}_i^{j+1} = \mathbf{U}_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^j - \mathbf{F}_{i-1/2}^j \right) + \Delta t \mathbf{S}$$

Schéma de Roe

- Grandeur de ROE moyennées à gauche et à droite. P.ex :

$$\tilde{u}_{i+1/2} = \frac{\sqrt{h_i} u_i + \sqrt{h_{i+1}} u_{i+1}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad , \quad \tilde{h}_{i+1/2} = \sqrt{h_i h_{i+1}}$$

- Célérité $c = \sqrt{g \tilde{h}_{i+1/2}}$ et valeur propre maximale de la jacobienne de \mathbf{F} évaluée en $\tilde{\mathbf{U}}$: $s_{\max} = |\tilde{u}_{i+1/2}| + c$.

Flux de ROE :

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2}s_{\max}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)$$

Schéma HLL (Harten-Lax-van Leer)

- Solution délimitée par deux ondes distinctes : une se propageant vers la gauche à une vitesse s_L et une vers la droite à s_R .
- Entre les deux ondes : approximation par une région constante.

$$F_{\text{HLL}} = \begin{cases} F_L & \text{si } s_L > 0 \\ F_R & \text{si } s_R < 0 \\ \frac{s_R F_L - s_L F_R}{s_R - s_L} + \frac{s_R s_L (U_R - U_L)}{s_R - s_L} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$s_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R) \quad s_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R) \quad (1)$$

Schéma HLLC (Hartex-Lax-van Leer Contact)

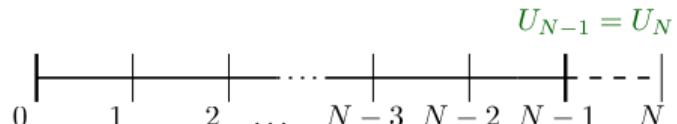
- Comme le HLL mais avec une onde de contact s^* .
- Sauf dans la zone $(s_L < 0) \cap (s_R > 0)$:
 - $h_L^* = h_L$ si $s_L = s^*$ et $h_L^* = h_L \frac{(s_L - u_L)}{(s_L - s^*)}$ sinon. On redéfinit : $F_L^* = F_L + s_L(Q_L^* - Q_L)$.
 - $h_R^* = h_R$ si $s_R = s^*$ et $h_R^* = h_R \frac{(s_R - u_R)}{(s_R - s^*)}$ sinon. Et : $F_R^* = F_R + s_R(Q_R^* - Q_R)$.

$$F_{\text{HLLC}} = \begin{cases} F_L & \text{si } s_L > 0 \\ F_R & \text{si } s_R < 0 \\ F_L^* & \text{si } s_L < 0, s_R > 0, s^* > 0 \\ F_R^* & \text{si } s_L < 0, s_R > 0, s^* < 0 \end{cases}$$

Conditions aux limites et conditions initiales

Conditions aux limites : (en $i = 0$ et $i = N - 1$)

- En **amont** : hauteur h_0 , débit Q_0 imposés : $\forall j \geq 0, \mathbf{U}_0^j = \begin{pmatrix} h_0 \\ Q_0 \end{pmatrix}$
- En **aval** : conditions de Neumann : $\frac{dh}{dx} = \frac{du}{dx} = 0$
 - Rajouter un point fantôme en aval puis imposer $\mathbf{U}_{N-1}^j = \mathbf{U}_N^j$



Conditions initiales : (en $j = 0$)

Déterminent largement l'existence et le comportement du ressaut. *Exemple :*

- Hauteur : $h = h_i$ (uniforme), ou $h = h_i + \eta H(x - x_c)$ (créneau)
- Débit nul partout sauf en amont

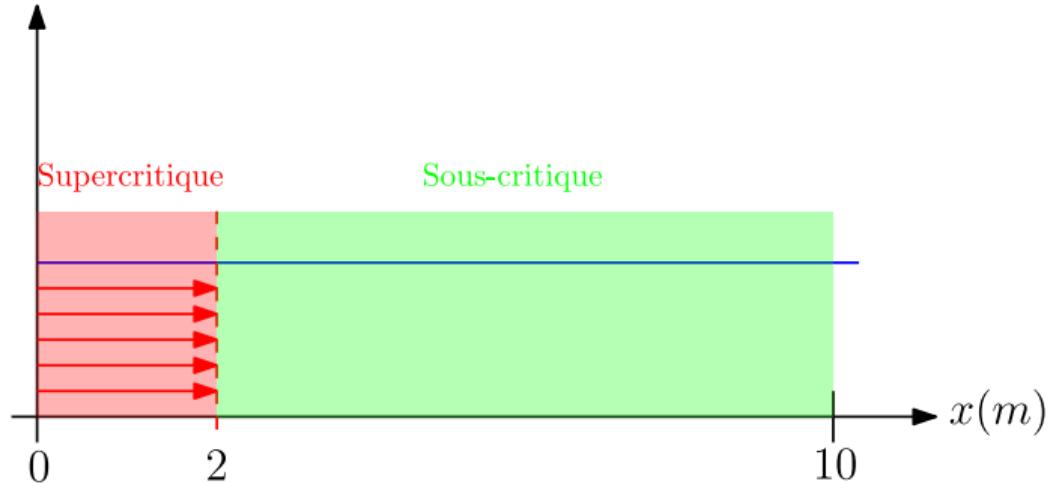
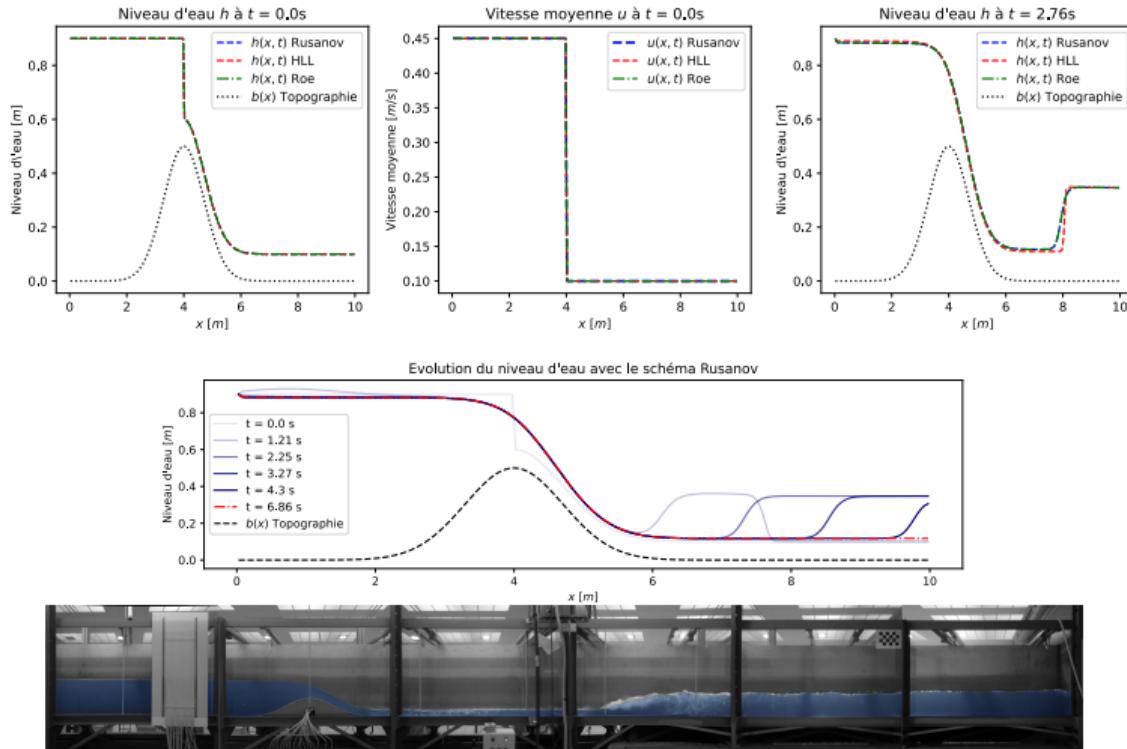


Figure: Setup initial

Animation Rectangular Jump 1

Résultats 1D



- Avec un obstacle gaussien : Choc se forme puis se propage
- Plusieurs schémas donnent des résultats similaires
- Cohérent avec les réalisations expérimentales

Le ressaut circulaire ?

Objectif

Étendre notre étude en 1D à une étude cylindrique.

Application

Rattachement au *kitchen sink* problem.

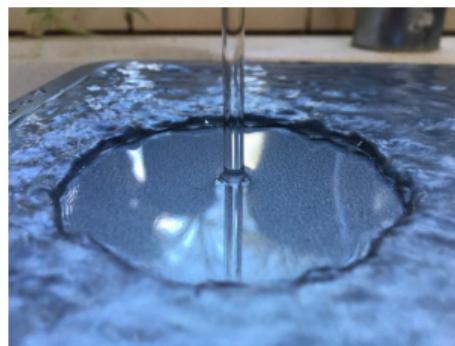
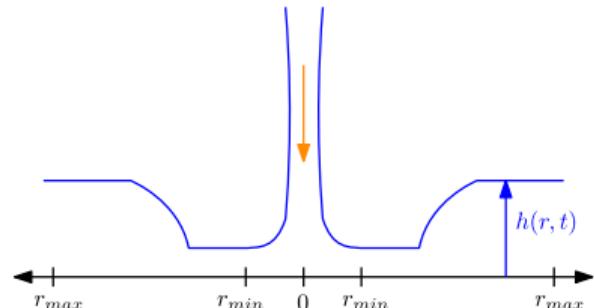


Figure: Jet d'eau unidirectionnel selon $-e_z$ arrivant sur une plaque

De nouvelles équations

- Invariance par rotation autour de \mathbf{e}_z .
- Fond plat : $z_b = 0$.



Conservation de la masse :

$$\frac{\partial(rh)}{\partial t} + \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rhu)}{\partial r} = 0$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial(rhu)}{\partial t} + \frac{\partial(rhu^2)}{\partial r} + \frac{\partial(\frac{1}{2}rgh^2)}{\partial r} = 0$$

Apparition de nouveaux termes sources !

Équations de Saint-Venant circulaire

Mise en forme 1D en développant la divergence et en changeant les termes sources.

Notations et équation vectorielle

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{hu}{r} \\ -\frac{hu^2 + \frac{1}{2}gh^2}{r} \end{pmatrix}$$

$$\text{Saint-Venant circulaire} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = \mathbf{S}$$

Comment traiter la singularité en $r = 0$?

Modélisation numérique du ressaut circulaire.

- Restriction à $[r_{\min}, r_{\max}]$. On considère hauteur et débit fixés en entrée.
- Extrapolation Neumann en sortie.

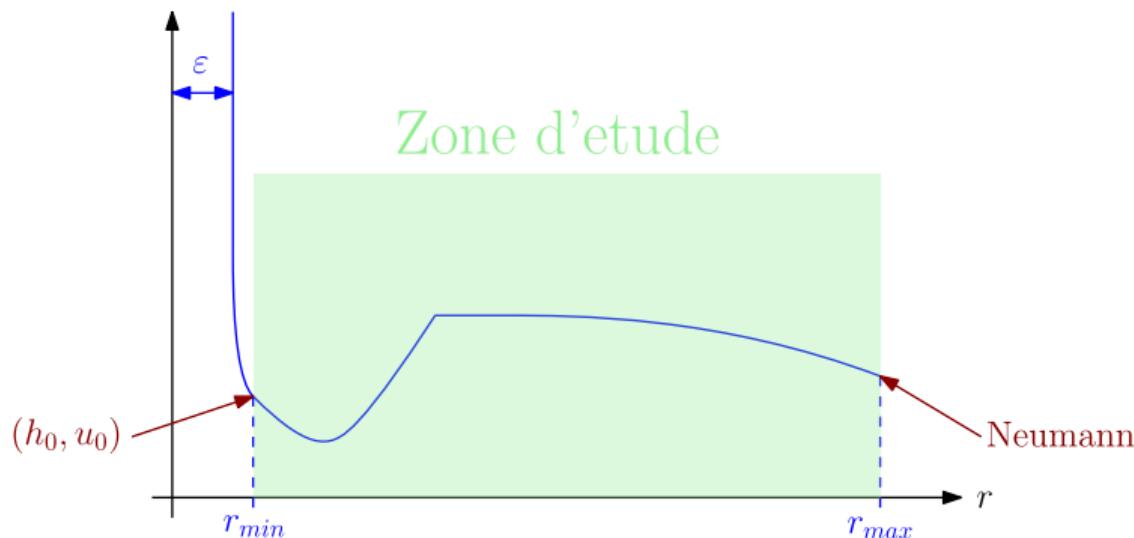
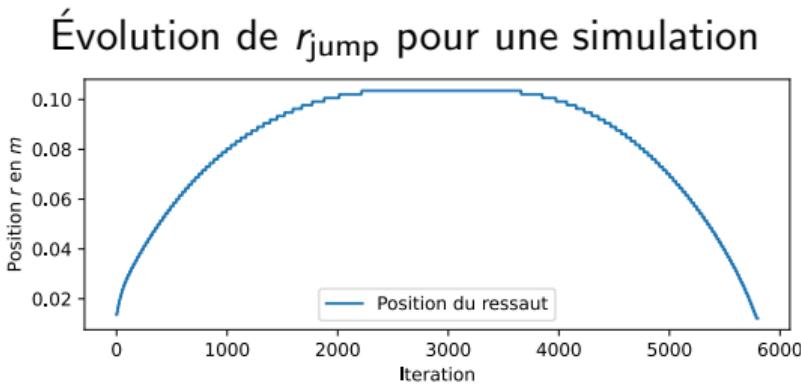


Figure: Modélisation numérique du ressaut hydraulique circulaire

Des premières difficultés



- Problèmes si les vitesses sont nulles (division par 0)
 \Rightarrow imposer $u \rightarrow u + \varepsilon$
- Léger écart avec la situation d'équilibre \rightarrow ressaut toujours instable
- Oscillations numériques empêchent l'équilibre du ressaut

Solution

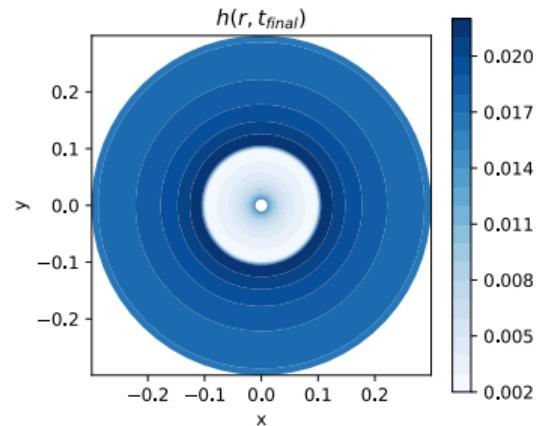
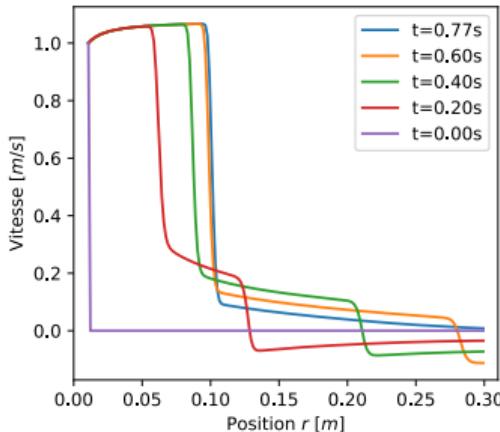
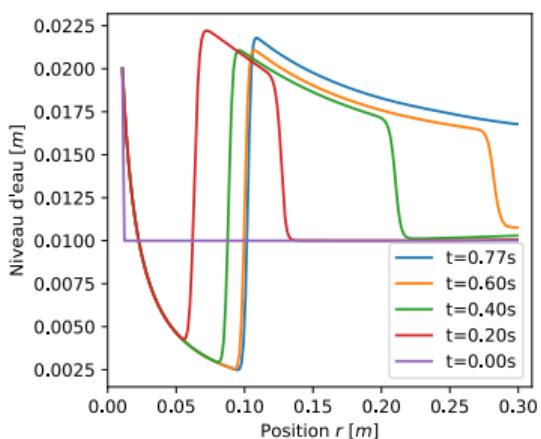
Dès que l'on observe un recul du *jump*, on termine la simulation.

Animation - Circular Jump 1

Première simulation avec un schéma de Rusanov

Avec un niveau plat initialement :

Simulation du ressaut hydraulique circulaire avec schéma de Rusanov

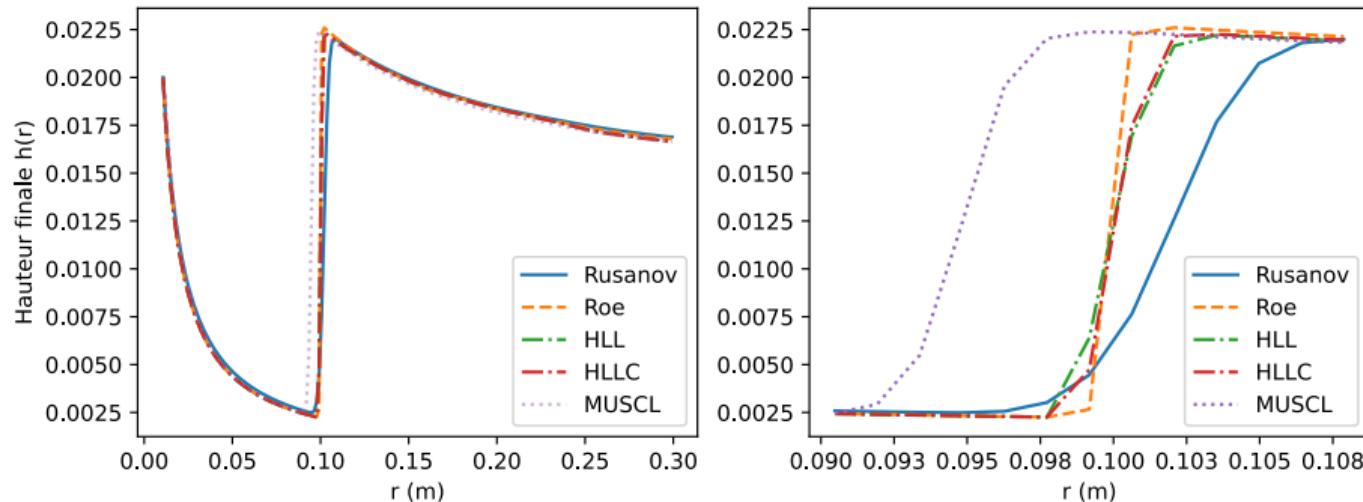


Résultats concluants, on observe un *jump* que l'on a stabilisé. *On verra après si il est cohérent vis à vis de la physique.*

Simulation avec différents schémas...

Simulation avec détection de saut automatique pour tous les schémas.

Comparaison de la hauteur finale pour différents schémas



Computing time ~ 2 à 3 min.

Comportements comparables, différence de hauteur au saut identique mais largeur du saut différente. **Difficulté de savoir lequel est le mieux car pas de solution analytique.**

Théorie stationnaire

Notations : 1 pour aval et 2 pour amont.

- Lorsque le ressaut est stable, on peut faire un bilan de quantité de mouvement :

$$\rho u_1^2 h_1 + \frac{1}{2} \rho g h_1^2 = \rho u_2^2 h_2 + \frac{1}{2} \rho g h_2^2$$

- En ajoutant la conservation du débit :

$$u_1^2 \left(h_1 - \frac{h_1^2}{h_2} \right) + \frac{g}{2} (h_1^2 - h_2^2) = 0 \implies \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{h_2}{h_1} + 1 \right) - \text{Fr}^2 \quad \text{avec } \text{Fr} = \frac{u_1^2}{gh_1}$$

- On peut obtenir le rapport des hauteurs du jump ;

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8\text{Fr}^2} - 1}{2}$$

Est-ce que nos jumps sont en accord avec cette théorie ?

Vérification de la théorie

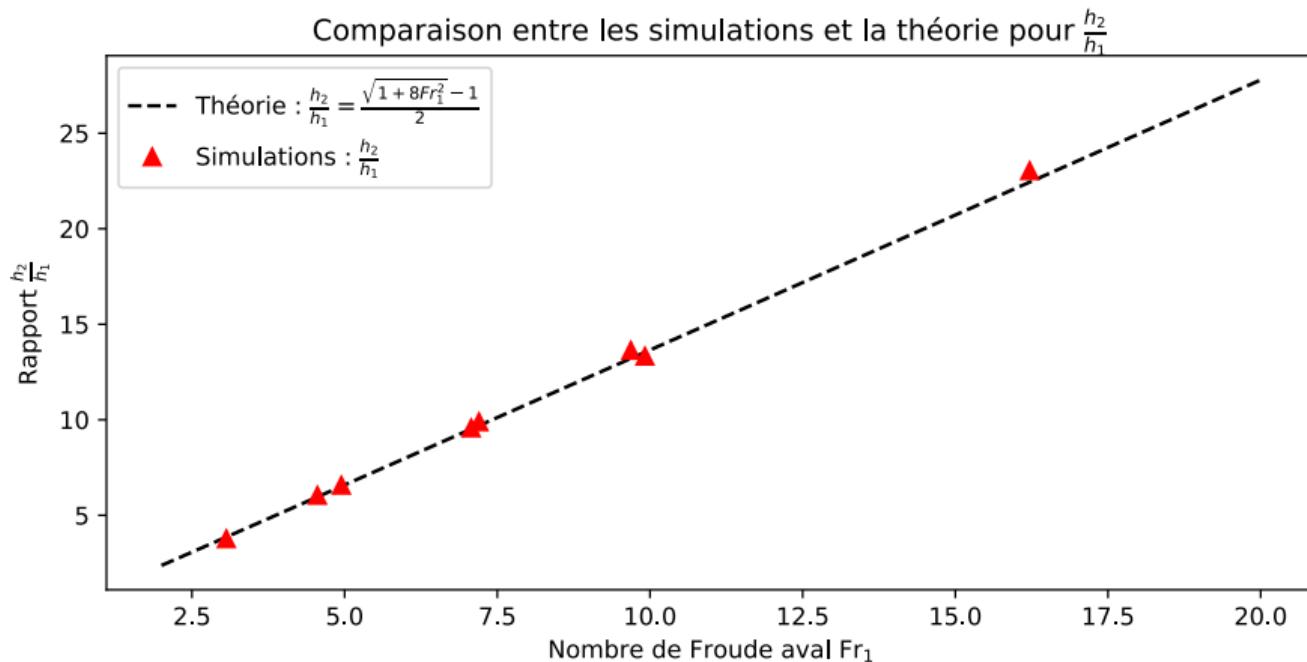
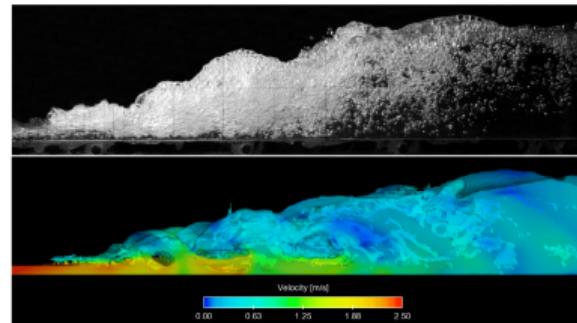


Figure: Vérification de la cohérence physique des simulations.

Conclusion

- Ressaut hydraulique complexe à modéliser :
 - Non-linéarités, ondes de chocs
 - Certains régimes seulement
 - Sensibilité aux conditions initiales
- Géométrie 1D :
 - Onde de choc qui se propage
- Géométrie cylindrique :
 - Ressaut instable qui se résorbe : résultat non physique
 - Hauteur quantitativement correcte

Pistes d'amélioration : ajouter viscosité et turbulence

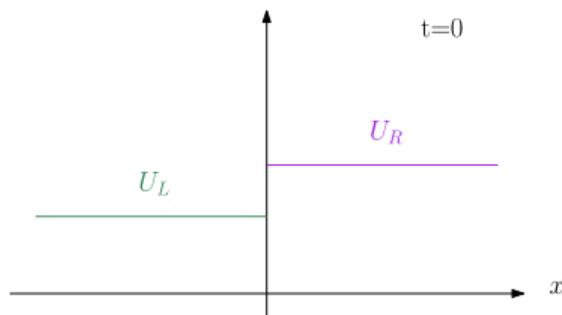


Annexes

Annexe. Solvers de Riemann

- Schémas numériques pour la résolution de systèmes hyperboliques.
- Rôle : calculer (ou approximer) le flux numérique $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$ au bord entre deux cellules où l'on dispose de deux états \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_R .
- Chaque solver de Riemann cherche à résoudre (exactement ou approximativement) le problème de Riemann local :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{U}_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases}$$



Annexe. Solvers de Riemann

On se place à une interface : $i + \frac{1}{2}$ au temps j , on définit alors : $\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_i^j$ et $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{i+1}^j$.
On considère alors le problème de Riemann défini la slide précédente.

On fait évoluer le problème de Riemann sur $t > 0 \implies$ solution composée d'ondes de choc.

Objectif du solver.

Calcul de $\mathbf{F}(\mathbf{U}(0, t))$ et en réalité le flux moyen sortant en 0 entre $[t^j, t^{j+1}]$

Pour rappel :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^j - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^j \right].$$

Le solver de Riemann entre les mailles i et $i + 1$ sert à calculer $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^j$.

Annexe. Particularité de Rusanov

- Très stable (pas de requirements sur CFL)
- Introduction d'un terme de viscosité (diffusif)

$$F_{i-1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i-1}) - \frac{\lambda}{2}(U_i - U_{i-1})$$

λ : vitesse maximale dans l'espace.

Annexe. Solveur de Roe

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Matrice jacobienne des flux évaluée en $\tilde{\mathbf{U}}$: $\tilde{A} = \tilde{A}^+ + \tilde{A}^-$ (flux positifs et négatifs) de valeurs propres respectives λ^+, λ^-

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \tilde{A}\mathbf{U} = \tilde{A}^+\mathbf{U} + \tilde{A}^-\mathbf{U}$$

Décomposition suivant le signe des vitesses λ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}_i) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1})) = \frac{1}{2}(\tilde{A}^+ + \tilde{A}^-)(\mathbf{U}_i + \mathbf{U}_{i+1}) - \frac{1}{2}(\tilde{A}^+ - \tilde{A}^-)(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)$$

Annexe. Système hyperbolique.

Définition.

Le système $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0$ est hyperbolique si la jacobienne A est diagonalisable à valeurs propres réelles avec un ensemble complet de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} \partial_h F_1 & \partial_q F_1 \\ \partial_h F_2 & \partial_q F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{q^2}{h^2} + gh & \frac{2q}{h} \end{pmatrix}$$

Diagonalisable en une matrice :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} u - \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & u + \sqrt{gh} \end{pmatrix}$$

Deux valeurs propres positives distinctes \implies Hyperbolicité.

Hyperbolicité \rightarrow propagation d'ondes de choc avec des célérités (vap).