ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 12-17.

УДК 517.9

# ОБ АНАЛОГАХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф.Х. БАЙЧОРОВА

**Аннотация.** Рассматривается задача о собственных функциях дифференциальных операторов, полуинвариантных относительно группы сдвигов. Получено условие разрешимости этой задачи в элементарных функциях и указана связь этого условия с теорией коммутативных колец дифференциальных операторов.

**Ключевые слова:** обобщенные функции Бесселя, преобразования Дарбу.

**Mathematics Subject Classification:** 34L05

## 1. Введение

Рассматривается задача о собственных функциях дифференциальных операторов из следующего специального класса (см.[1])

$$A = e^{Nt}a(D_t) = e^{Nt}\prod_{j=1}^{N}(D_t+\alpha_j). \tag{1}$$

Здесь $a(D_t)$ произвольный многочлен с постоянными коэффициентами степени $N$ от символа $D_t$. После замены независимой переменной:

$$x = -e^{-t}, \quad D_x = e^t D_t, \quad D_t = -xD_x \tag{2}$$

оператор (1) принимает следующий вид оператора Эйлера (см.[2])

$$\widetilde{A} = \frac{1}{(-x)^N}\prod_{j=1}^{N}(xD_x-\alpha_j), \tag{3}$$

и при $N=2$ мы получаем

$$\widetilde{A} = \frac{1}{x^2}(xD_x-\alpha_1)(xD_x-\alpha_2) = D_x^2 + \frac{\alpha}{x}D_x + \frac{\beta}{x^2}. \tag{4}$$

Другими словами, рассматриваемая задача о собственных функциях $A\psi=\lambda\psi$ при $N=2$ сводится к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{x^2+n^2}{x^2}y, \tag{5}$$

а при $N=3$ к простейшему обобщению уравнения (5).

Операторы вида (1) полуинвариантны относительно сдвига $t \to t+const$. За счет сдвига, не ограничивая общности, полагаем $\lambda=1$ в уравнении $A\psi=\lambda\psi$. Заметим далее, что операция сопряжения с экспонентой равносильна для этих операторов замене $D_t \to D_t+const$. Действительно,

$$e^{-kt}\circ D_t\circ e^{kt} = D_t+k \Rightarrow e^{-kt}\circ e^{Nt}a(D_t)\circ e^{kt} = e^{Nt}a(D_t+k). \tag{6}$$

F.Kh. Baichorova, On analogues of third order Bessel function.



*Поступила 26 ноября 2013 г.*

Таким образом, один из корней оператора (1) при $N = 3$ выбираем равным нулю, и уравнение для собственных функций приводим к виду

$$e^{3t} D_t (D_t + \alpha_2)(D_t + \alpha_3)\psi = \psi \Leftrightarrow \psi''' + \frac{\alpha}{x}\psi'' + \frac{\beta}{x^2}\psi' = \psi, \tag{7}$$

где $\alpha = 3 - \alpha_2 - \alpha_3$, $\beta = 1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$.

Легко видеть, что точка $x = 0$ является регулярной особой точкой для уравнения (7). Как известно, в окрестности регулярной особой точки для этого уравнения существует фундаментальная система из трех решений в виде сходящихся степенных рядов (см. [3], с. 496–498)

$$\psi = x^s(\widehat{C}_0 + \widehat{C}_1 x + \widehat{C}_2 x^2 + \ldots). \tag{8}$$

Вообще говоря, в этой формуле появляется логарифм, и в случае "кратных" корней решение ищется в виде

$$\psi = x^s[\varphi_1(x) log(x) + \varphi_2(x)],$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)-$ аналитические в нуле функции. Достаточным условием отсутствия $log$ является то, что $\alpha_2, \alpha_3$ — нецелые, этот случай рассматривается ниже (см.(14)).

Подставляя разложения $\psi$ и его производные в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при степенях $x$ нулю, получаем уравнение

$$s[(s-1)(s-2) + \alpha(s-1) + \beta] = 0,$$

которое определяет величину показателя $s$. Это уравнение называется *определяющим уравнением.* Его решениями являются $0, \alpha_2, \alpha_3$. Если $s$ нецелые, то это случай общего положения.

**Пример 1.** При $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$ уравнение для собственных функций (7) сводится к уравнению

$$(e^t D_t)^3 \widehat{\psi} = D_x^3 \widehat{\psi} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{\psi}''' = \widehat{\psi},$$

фундаментальной системой решений которого является

$$\widehat{\psi}_1 = e^x, \widehat{\psi}_2 = e^{ax}, \widehat{\psi}_3 = e^{bx},$$

где $a = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), b = \overline{a}$.

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Задача на собственные функции оператора третьего порядка $\widetilde{A} = \frac{1}{x^3}(xD_x - \alpha_1)(xD_x - \alpha_2)(xD_x - \alpha_3)$ имеет три решения, выражающихся в элементарных функциях, а именно

$$\psi_j = e^{\alpha_j x} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

в том случае, если выполняется условие:

$$(0, \alpha_2, \alpha_3) \equiv (0, 1, 2) \quad (mod \quad 3). \tag{9}$$

В случае уравнения Бесселя второго порядка аналогичное условие (9) записывается в виде

$$(0, \alpha_2) \equiv (0, 1) \quad (mod \quad 2),$$

что эквивалентно полуцелому $n$ в уравнении (5).

В работе [4] показано, что целые $n$ в уравнении (5) соответствуют коммутативным кольцам дифференциальных операторов 4 и 6 порядков вида (1).

## 2. Собственные функции

При нахождении коэффициентов разложения решения по степеням $x$ (8) удобно переписать дифференциальное уравнение в терминах степеней оператора Эйлера $xD_x = \theta$. Например, дифференциальный оператор

$$P = x(1-x)\partial^2 - (a+b+1)x\partial + c\partial - ab, \tag{10}$$

соответствующий гипергеометрическому уравнению Гаусса, можно переписать, используя оператор Эйлера $\theta = x\partial$, в следующем виде (ср.[5]):

$$x \cdot P = \theta(\theta + c - 1) - x(\theta + a)(a+b). \tag{11}$$

В общем случае для оператора третьего порядка

$$A = e^{3t}D_t(D_t+\alpha_2)(D_t+\alpha_3) = \frac{1}{x^3}\theta(\theta-\alpha_2)(\theta-\alpha_3) = \frac{1}{x^3}a(\theta), \tag{12}$$

собственную функцию удобнее искать в виде произведения многочлена на экспоненту

$$\psi = e^x \sum_{k=0}^{n} C_k x^k, \quad C_0 = const. \tag{13}$$

Причем, коэффициенты $\widehat{C}_k$ и $C_k$ этих двух разложений (8) и (13) собственной функции связаны следующими формулами:

$$\widehat{C}_k = \sum_{i+j=k} \frac{C_i}{j!} = \frac{C_0}{k!} + \ldots C_k, \quad k > 0.$$

При этом справедливо следующее:

в случае общего положения

$$\widehat{C}_0 = 1, \quad \widehat{C}_1 = 0, \quad \widehat{C}_2 = 0, \quad \widehat{C}_3 = \frac{1}{a(3)}, ..., \quad \widehat{C}_k = \frac{\widehat{C}_{k-3}}{a(k)} \tag{14}$$

и решения задачи $A\psi = \psi$ — целые функции.

Действительно, пусть решение задачи $A\psi = \psi$ представлено в виде степенного ряда (8), где $\widehat{C}_k$ определяются из (14).

Покажем,что функция (8) — целая. Для этого найдем область сходимости ряда (8) при помощи признака Даламбера

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\widehat{C}_{3k+3}}{\widehat{C}_{3k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{3k+3}\prod_k(3k[(3k)^2+3kb_1+b_2])}{x^{3k}\prod_k[(3k+3)((3k+3)^2+(3k+3)b_1+b_2)]}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^3}{(3k+3)((3k+3)^2+(3k+3)b_1+b_2)}\right| =$$

$$= |x^3| \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(3k+3)((3k+3)^2+(3k+3)b_1+b_2)}\right| = 0.$$

Радиус круга сходимости равен $\infty$ и ряд (8) абсолютно сходится при всех значениях $x$.

Для произвольного многочлена $a(\theta)$ из (12) справедливы следующие соотношения (ср. [5]):

$$a(\theta) \bullet x^\alpha = a(\alpha) \cdot x^\alpha, \tag{15}$$

$$a(\theta)(x^i) = x^i \cdot a(\theta + i), \tag{16}$$

$$a(\theta)(e^x x^k) = x^k a(\theta + k)(e^x). \tag{17}$$

Применяя эти формулы к $a(\theta) = \theta^3 + b_1\theta^2 + b_2\theta$, (где $b_1 = -\alpha_2 - \alpha_3$, $b_2 = \alpha_2\alpha_3$), получаем:

$$a(\theta+k)=\theta^3+(b_1+3k)\theta^2+(3k^2+2b_1k+b_2)\theta+a(k),\text{где}\quad a(k)=k^3+b_1k^2+b_2k,\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{18}$$

Поэтому

$$a(\theta+k)(e^x)=e^x(x^3+(b_1+3k+3)x^2+b_2(k)x+a(k)),\text{где}\quad b(k)=a(k+1)-a(k). \tag{19}$$

Найдем коэффициенты $C_k$ ряда (13) из $A\psi=\psi$

$$A\psi=\frac{1}{x^3}a(\theta)(e^x\sum_{k=0}^{n}C_kx^k)=e^x\sum_{k=0}^{n}C_kx^k.$$

Для этого приравниваем коэффиценты при соответствующих степенях $x$ :

$$a(1)(C_0+C_1)=0,$$

$$(3+a)C_0+b(1)C_1+a(2)C_2=0,$$

$$C_0+(6+a)C_1+b(2)C_2+a(3)C_3=C_0,$$

$$C_1+(9+a)C_2+b(3)C_3+a(4)C_4=C_1,$$

$$C_2+(12+a)C_3+b(4)C_4+a(5)C_5=C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или, учитывая (19):

$$\begin{cases}a(1)(C_0+C_1)=0,\\(3+a)C_0+[a(2)-a(1)]C_1+a(2)C_2=0,\\(6+a)C_1+[a(3)-a(2)]C_2+a(3)C_3=0,\\(9+a)C_2+[a(4)-a(3))]C_3+a(4)C_4=0,\\(12+a)C_3+[a(5)-a(4)]C_4+a(5)C_5=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \tag{20}$$

Из полученной системы можно вывести реккурентное отношение для коэффициентов $C_k$:

$$C_{k+1}=-\frac{C_{k-1}(a+3k)+[a(k+1)-a(k)]C_k}{a(k+1)}.$$

## 3. Условия обрыва

Рассмотрим случай, когда решениями задачи на собственные функции

$$A\psi=\psi$$

для оператора (12) являются функции

$$\psi=e^x(C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3).$$

Решим приведенную выше систему (20) для первой, второй, третьей степени многочлена из (13).

В случае первой степени обнуляем все коэффициенты, начиная с $C_2$, тогда система (20) примет вид:

$$\begin{cases}a(1)(C_0+C_1)=0,\\(3+a)C_0+[a(2)-a(1)]C_1=0,\\(6+a)C_1=0.\end{cases}$$

Эта система разбивается на две:

$$\begin{cases} a(1) = 0, \\ (3+a)C_0 + [a(2) - a(1)]C_1 = 0, \\ (6+a)C_1 = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} C_0 + C_1 = 0, \\ (3+a)C_0 + [a(2) - a(1)]C_1 = 0, \\ (6+a)C_1 = 0, \end{cases}$$

решая которые, получаем: *(1)* $b_1 = -6, \quad b_2 = 5, \quad C_1 = -\frac{1}{2}C_0$ и собственная функция для оператора $A: \quad \psi_1 = e^x(C_0 - \frac{1}{2}C_0 x)$. Или

$$\textit{(2)} \quad b_1 = -6, \quad b_2 = 8, \quad C_1 = -C_0; \quad \psi_1 = e^x(C_0 - C_0 x).$$

Аналогично, в случае второй степени, обнуляем все коэффициенты, начиная с $C_3$, а в случае третьей степени -$C_i = 0, \quad i = 4, 5 \ldots$

Соотвественно решения:

$$\textit{(3)} \quad b_1 = -9, \quad b_2 = 8, \quad C_1 = -\frac{3}{5}C_0, C_2 = \frac{C_0}{10}; \quad \psi_1 = e^x\left(C_0 - \frac{3}{5}C_0 x + \frac{1}{10}C_0 x^2\right),$$

$$\textit{(4)} \quad b_1 = -9, \quad b_2 = 20, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{1}{2}C_0; \quad \psi_1 = e^x\left(C_0 - C_0 x + \frac{1}{2}C_0 x^2\right),$$

$$\textit{(5)} \quad b_1 = -9, \quad b_2 = 14 \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{1}{4}C_0; \quad \psi_1 = e^x\left(C_0 - C_0 x + \frac{1}{4}C_0 x^2\right),$$

$$\textit{(6)} \quad b_1 = -12, b_2 = 11, C_1 = -\frac{13}{20}C_0, C_2 = \frac{3}{20}C_0, C_3 = -\frac{1}{80}C_0 x^3,$$

$$\psi_1 = e^x\left(C_0 - \frac{13}{20}C_0 x + \frac{3}{20}C_0 x^2 - \frac{1}{80}C_0 x^3\right),$$

$$\textit{(7)} \quad b_1 = -12, \quad b_2 = 35, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{C_0}{2}, C_3 = -\frac{C_0}{8};$$

$$\psi_1 = e^x\left(C_0 - C_0 x + \frac{C_0}{2}x^2 - \frac{1}{8}C_0 x^3\right),$$

$$\textit{(8)} \quad b_1 = -12, \quad b_2 = 32, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{C_0}{2}, C_3 = -\frac{C_0}{10};$$

$$\psi_1 = e^x\left(C_0 - C_0 x + \frac{C_0}{2}x^2 - \frac{1}{10}C_0 x^3\right),$$

$$\textit{(9)} \quad b_1 = -12, \quad b_2 = 20, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{9C_0}{28}, C_3 = -\frac{C_0}{28};$$

$$\psi_1 = e^x\left(C_0 - C_0 x + \frac{9C_0}{28}x^2 - \frac{1}{28}C_0 x^3\right).$$

Для того чтобы построить два других решения, мы будем рассматривать правый оператор преобразования Дарбу $R$, связывающий оператор $A$ вида (1) и оператор $A_0 = (e^t D_t)^3 = D_x^3$ из Примера 1. В работе [1] показано, что такой оператор существует, если выполнено условие (9). Непосредственно можно проверить, что это условие выполнено для указанных выше случаев *(1)–(9)*.

При этом

$$AR = RA_0 \Rightarrow A\psi = \psi \quad \text{при} \quad \psi = R\widehat{\psi},$$

и оператор $R$ переводит собственные функции оператора $A_0$ в собственные функции оператора $A$. Например, для оператора $A = e^{3t}D_t(D_t+1)(D_t+5)$:

$$\psi_2 = R\widehat{\psi_2} = (D_t+2)e^{\alpha x} = (-xD_x+2)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(2-x\alpha)$$

и

$$\psi_3 = R\widehat{\psi_3} = (-xD_x+2)e^{\beta x} = e^{\beta x}(2-x\beta).$$

Аналогично находятся собственные функции для каждого из случаев *(1)–(9)*.

Приведенные выше формулы для $\psi_1$ позволяют найти явный вид оператора $R$ (ср. [1]) для каждого из случаев *(1)–(9)*. Например: найдем оператор $R = (D_t+\gamma_1)(D_t+\gamma_2)$ по собственной функции *(3)*, переписав $R$ в терминах $x$: $R = (-xD_x+\gamma_1)(-xD_x+\gamma_2) = x^2D_x + (1-\gamma_1-\gamma_2)xD_x + \gamma_1\gamma_2$,

$$Re^x = e^x(x^2 + (1-\gamma_1-\gamma_2)x + \gamma_1\gamma_2) = e^x(10-6x+x^2) = \psi_1,$$

откуда

$$\begin{cases} 1-\gamma_1-\gamma_2 = -6, \\ \gamma_1\gamma_1 = 10, \end{cases}$$

или $\gamma_1 = 2, \gamma_1 = 5$ и $R = (D_t+2)(D_t+5)$.

В следующей таблице приведены операторы $A$ и соответствующие им операторы преобразования $R$:

| № | $A$ | $R$ |
|---|---|---|
| (1) | $e^{3t}D_t(D_t+1)(D_t+5)$ | $D_t+2$ |
| (2) | $e^{3t}D_t(D_t+2)(D_t+4)$ | $D_t+1$ |
| (3) | $e^{3t}D_t(D_t+1)(D_t+8)$ | $(D_t+2)(D_t+5)$ |
| (4) | $e^{3t}D_t(D_t+4)(D_t+5)$ | $(D_t+1)(D_t+2)$ |
| (5) | $e^{3t}D_t(D_t+2)(D_t+7)$ | $(D_t+1)(D_t+4)$ |
| (6) | $e^{3t}D_t(D_t+1)(D_t+11)$ | $(D_t+2)(D_t+5)(D_t+8)$ |
| (7) | $e^{3t}D_t(D_t+5)(D_t+7)$ | $(D_t+1)(D_t+2)(D_t+4)$ |
| (8) | $e^{3t}D_t(D_t+4)(D_t+8)$ | $(D_t+1)(D_t+2)(D_t+5)$ |
| (9) | $e^{3t}D_t(D_t+2)(D_t+10)$ | $(D_t+1)(D_t+4)(D_t+7)$ |

(21)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Шабат А.Б., Эльканова З.С. и Урусова А.Б. *Двусторонние преобразования Дарбу* // Теоретическая математическая физика. Уфа. Т. 173, № 2. 2012. С. 207–218.
2. Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений* Москва. 2013.
3. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* Харьков: НТИУ. 1939. 719 с.
4. Байчорова Ф.Х., Эльканова З.С. *Коммутирующие дифференциальные операторы порядков 4 и 6* // Уфимский математический журнал. Т 5. № 3. 2013. С. 12–20.
5. M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama *Grobner Deformations of Hypergeometric Differential Equations* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 2000.



Фатима Хасановна Байчорова,
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,
ул. Ленина, 29,
369202, г. Карачаевск, КЧР, Россия
E-mail: fatima-kchgu@yandex.ru