УДК 336.6

А. Ф. БИГЛОВА, И. Г. НАТАЛУХА

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТЕЙ РИСКОВЫХ АКТИВОВ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ПРИНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ

Анализируется характер распределений доходностей ценных бумаг на финансовых рынках. Исследуется влияние изменений асимметрии и эксцесса закона распределения доходности акции на долю этого актива в оптимальном при степенной функции полезности портфеле акции и облигации. *Акции; нормальные и устойчивые распределения; асимметрия; эксцесс; функция полезности*

ВВЕДЕНИЕ

Первоначальные представления Башелье [1] и Самюэльсона [2] о характере распределения доходностей акций как о нормальном или логнормальном, как отметили Мандельброт и Фама [3], не согласуются с практикой. Наличие небольшого числа влиятельных в финансовом смысле инвесторов приводит к тому, что предположения центральной предельной теоремы нарушаются. В особенности это характерно для зарождающихся рынков, к числу которых относится и российский фондовый рынок. Они характеризуются различного рода нестационарными, кризисными и катастрофическими явлениями [4–6]. Реально более естественно предполагать, что распределения доходностей акций имеют фрактальный характер, в частности, входят в класс устойчивых распределений Парето [7], которые характеризуются тяжелыми хвостами и вытянутым максимумом. В этих

Исследования первого автора выполнены при поддержке РФФИ (грант 04-06-80009) и Научного фонда ФРГ (DFG-project RA 861/6-1)

условиях традиционная портфельная теория [8, 9] может привести к некорректным выводам.

Работа состоит из двух частей. В первой на новейшем статистическом материале анализируются гипотезы о нормальности и устойчивости распределений доходностей акций, во второй исследуется влияние третьего и четвертого моментов распределения (они характерны для устойчивых распределений) на принятие инвестиционных решений при использовании степенной функции полезности.

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТЕЙ ЦЕН АКЦИЙ

Анализировались ежедневные доходности высоколиквидных акций 382 компаний, входящих в ведущие международные индексы за 1992–2003 годы.

Дневные доходности вычислялись по формуле

$$r(t) = \ln \frac{S(t)}{S(t-1)},$$

где $S(t)$ — стоимость акции во время t (рассматриваются доходности, очищенные от дивидендов).

В первую очередь проверялась гипотеза о нормальности распределения доходностей. Проверка проводилась с использованием КС-критерия (Колмогорова–Смирнова) [10]. В табл. 1 приведены соответствующие результаты.

Таблица 1

Процент акций, для которых гипотезу о нормальности следует отвергнуть, %

Уровень значимости	95	99	99,9	99,95	99,99
Процент акций	99,33	97,35	90,759	89,10	82,178

Таким образом, предположение о нормальности распределения цен акций несостоятельно.

Для анализа гипотезы о Парето-устойчивости вычислялись статистические оценки индекса устойчивости α и параметра скошенности β. Известно [7], что $\alpha \in [0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, нормальные распределения являются подмножеством Парето-устойчивых при $\alpha = 2$. На рис. 1 приведено распределение статистических оценок указанных параметров на α–β плоскости.

Отсюда видно, что класс устойчивых распределений, которые могут описывать доходности акций, весьма узок. В частности, параметр скошенности в подавляющем большинстве случаев принимает положительные значения. На рис. 2 и 3 приведены гистограммы статистических оценок параметров α и β.

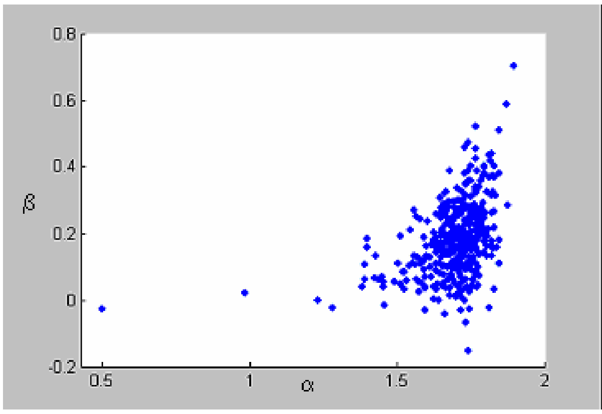

Рис. 1. Распределение статистических оценок параметров

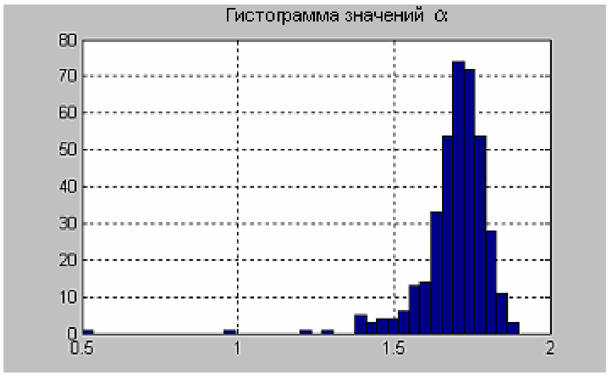

Рис. 2. Гистограмма значений α

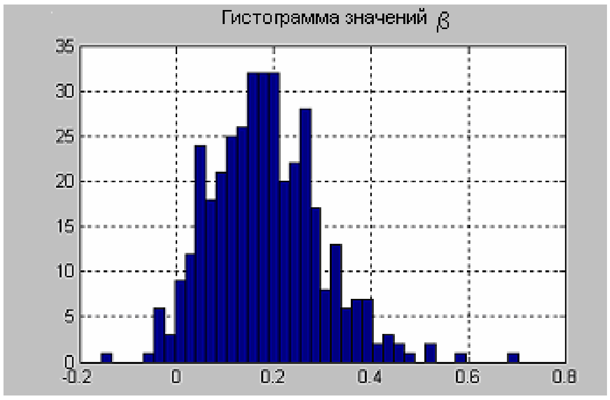

Рис. 3. Гистограмма значений β

Рис. 2 служит дополнительным подтверждением того, что гипотеза о нормальности распределения доходностей несостоятельна: статистические оценки параметра α не принимают значения 2.

В табл. 2 приведены результаты проверки по КС-критерию гипотезы об устойчивости. Приведены проценты акций, для которых гипотезу об устойчивости следует отвергнуть.

Таблица 2

Уровень значимости, %	95	99	99,9	99,95	99,99
Процент акций, %	23,82	11,78	6,02	5,235	4,71

Приведенные данные подтверждают вывод о том, что использование предположения об устойчивости закона распределения доходностей акций приводит к меньшим инвестиционным ошибкам, нежели гипотеза нормальности.

ВЛИЯНИЕ ВЫСШИХ МОМЕНТОВ НА ПРИНЯТИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ

Рассматривается следующая задача. Инвестор вкладывает средства в безрисковый актив (банковский счет) и один рисковый актив, таким образом, чтобы к концу временного промежутка достигало максимума ожидаемое значение некоторой функции полезности $E[u(W)]$. Здесь E — математическое ожидание, u — функция полезности, W — доходность портфеля за избранный временной промежуток. Если R_1 — доходность рискового актива, R_f — доходность безрискового актива, θ — вес рискового актива в портфеле инвестора, то $W = \theta(R_1 - R_f) + R_f$.

В предположении о вогнутости функции полезности u запишем следующее условие первого порядка, которому должно удовлетворять оптимальное решение:

$$E[u^{(1)}(W)(R_1 - R_f)] = 0. \tag{1}$$

Здесь и далее $u^{(n)}$ — n-я производная функции полезности.

Решение этой статической (однопериодной) задачи определяет спекулятивный спрос инвестора на рисковый актив, соответствующий игнорированию инвестором предполагаемых изменений инвестиционных возможностей. Считая, что распределение доходности рискового актива имеет конечные моменты, разложим предельную функцию полезности инвестора $u^{(1)}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности величины $E[W]$ — ожидаемого капитала в следующем периоде. Подставляя полученное разложение в условие первого порядка (1), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} 0 = u^{(1)}(E[W])x + u^{(2)}(E[W])\theta m &+ \\ + \frac{1}{2}u^{(3)}(E[W])\theta^2(m_3 + m_2 x) &+ \\ + \frac{1}{6}u^{(4)}(E[W])\theta^3(m_4 + m_3 x) &+ o(\theta^3), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x = E[R_1] - R_f$ — ожидаемая избыточная доходность, m_n — n-й центральный момент распределения доходности рискового актива R_1.

Заметим, что из уравнения (2) в первом приближении вытекает традиционный результат портфельной теории, основанный на анализе математического ожидания и дисперсии распределения доходности рискового актива:

$$\theta \approx -\frac{u^{(1)}(E[W])x}{u^{(2)}(E[W])m_2} = \frac{x}{\alpha m_2}\,, \tag{3}$$

где $\alpha = -u^{(2)}/u^{(1)}$ — коэффициент относительного неприятия риска Эрроу–Пратта.

Дальнейший анализ проведем в предположении, что функция полезности инвестора является степенной $u(W) = \frac{W^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ $(\alpha{>}0)$ [9].

Из (2) следует, что в этом случае оптимальный вес θ рискового актива в портфеле приближенно совпадает с корнем кубического уравнения

$$a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d = 0, \tag{4}$$

где коэффициенты a, b, c, d имеют вид

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{6}\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)(\gamma_2+3)\sigma^4 + \\ &\quad + \frac{1}{6}\alpha(1-\alpha^2)\gamma_1\sigma^3 x - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\sigma^2 x^2 + x^4; \\ b &= R_f\left[\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)\gamma_1\sigma^3 - \frac{1}{2}\alpha(3-\alpha)\sigma^2 x + 3x^3\right]; \\ c &= R_f^2[-\alpha\sigma^2 + 3x^2]; \\ d &= R_f^3 x. \end{aligned}$$

Здесь σ^2, γ_1, γ_2 означают, соответственно, дисперсию, асимметрию и эксцесс избыточной доходности x. Доля рискового актива θ находится из уравнения (4) по формуле Виета

$$\theta = \frac{-b + K + (b^2 - 3ac)/K}{3a}\,, \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{A + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + A^2}}{2}\right)^{1/3}; \\ A &= -2b^3 + 9abc - 27a^2 d. \end{aligned}$$

Для того чтобы выяснить, как влияют на портфельный выбор инвестора изменения асимметрии и эксцесса, вычислим частные производные от веса рискового актива θ в оптимальном портфеле по асимметрии γ_1 и эксцессу γ_2. Если обозначить через $f(\gamma_1, \gamma_2)$ левую часть уравнения (4), то при малых θ и x получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_1} \equiv -\frac{\partial f/\partial\gamma_1}{\partial f/\partial\theta} \approx \frac{1}{2}(1+\alpha)\sigma\theta^2 > 0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_2} \equiv -\frac{\partial f/\partial\gamma_2}{\partial f/\partial\theta} \approx -\frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)\sigma^2\theta^3 < 0.$$

Последние формулы показывают, что вес рискового актива в оптимальном портфеле возрастает с ростом асимметрии и уменьшением эксцесса. Очевидно также, что влияние изменения асимметрии и эксцесса на вес рискового актива усиливается с ростом как относительного неприятия риска инвестором, так и среднего квадратического отклонения. Следует также отметить усиление влияния изменения асимметрии и эксцесса с ростом доли рискового актива в базовом оптимальном портфеле.

Как толстые хвосты, так и отрицательная асимметрия, характеризующие Парето-устойчивые распределения, предполагают существование дополнительного риска для инвестора и потому сокращают спекулятивный спрос инвестора на рисковые активы. Предварительный анализ показывает, что увеличение инвестиционного горизонта, хотя и уменьшает величину асимметрии и эксцесса, в целом не уменьшает их влияния на портфельный выбор. В [11] анализируется влияние изменения параметров распределения доходности активов на процесс хеджирования в динамической (многопериодной) модели финансового рынка с учетом конкретной стохастической динамики цен рисковых активов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сложность функционирования современных финансовых рынков заключается, в частности, в том, что законы распределения доходностей ценных бумаг далеки от нормального. Учет этого обстоятельства позволит потенциальным инвесторам принимать более обоснованные решения. Особенно важен учет этого обстоятельства при организации портфельных инвестиций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bachelier, L.** Theorie de la speculation / L Bachelier. Paris : Gauthier–Villars, 1900. 70 p.
2. **Samuelson, P.** Risk and uncertainty: A fallacy of large numbers / P. Samuelson // Scientia. 1963. № 98. P. 108–113.
3. **Fama, E. F.** The behavior of stock market prices / E. F. Fama // J. Business. 1965. Vol. 38. P. 34–105.
4. **Cochrane, J. H.** Asset pricing / J. H. Cochrane. Princeton : Princeton Univ. Press, 2001. 268 p.
5. **Sornette, D.** Why stock markets crash / D. Sornette. Princeton : Princeton Univ. Press, 2002. 212 p.
6. **Наталуха, И. Г.** Моделирование спекулятивного бума на финансовом рынке с учетом психологии инвесторов / И. Г. Наталуха // Математическое моделирование и компьютерные технологии : матер. 6-го Всерос. симп. Кисловодск, 2004. Т. 2. С. 7–8.
7. **Rachev, S.** Stable Paretian Models in Finance / S. Rachev, S. Mittnik. Wiley, 2000. 1046 p.
8. **Шарп, У.** Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Д. Бейли. М. : ИНФРА-М, 1997. 1028 с.
9. **Крушвиц, Л.** Финансирование и инвестиции / Л. Крушвиц. СПб. : Питер, 2000. 382 с.
10. **Смирнов, Н. В.** Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Барковский. М. : Наука, 1969. 436 с.
11. **Наталуха, И. Г.** Мартингальный подход к задачам определения оптимальных стратегий инвестирования и потребления / И. Г. Наталуха // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Общественные науки (Приложение к журналу). 2002. № 2. С. 64–70.

ОБ АВТОРАХ

Биглова Альмира Фанзировна, ассист. каф. вычисл. математики и кибернетики. Дипл. экон.-мат. (УГАТУ, 2003). Канд. техн. наук (УГАТУ, 2006). Иссл. в обл. портфельного анализа и прикл. теории риска.

Наталуха Инна Геннадиевна, доц. каф. экон.-мат. моделирования Кисловодск. ин-та экономики и права. Дипл. экон. (Ставропольск. гос. ун-т, 1990). Канд. экон. наук (Сев.-Кавк. гос. техн. ун-т, Ставрополь, 2000). Иссл. в обл. стохаст. фин. анализа.