58. Vasin A., Durakovich N., Vasina P. Cournot equilibrium and competition via supply functions // Game Theory and Applications. N.Y.: Nova Science Publishers, 2003. **9**. P. 181–191.
59. Marhuenda F., Vasin A., Vasina P. Taxation of firms under incomplete information. Moscow: New Economic School, WP N 2003/040.

Поступила в редакцию
10.05.04

Ю. В. Прохоров, В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РИСКА, ОСНОВАННЫЕ НА СМЕШАННЫХ ГАУССОВСКИХ МОДЕЛЯХ[1]

(кафедра математической статистики факультета ВМиК)

Введение. Развитие современной математической теории риска, основанной в первую очередь на результатах и методах теории вероятностей и математической статистики, имеет не только вполне естественное серьезное теоретическое значение, но и огромную практическую важность. Это обусловлено в первую очередь насущной необходимостью решения на практике большого числа конкретных задач, связанных с анализом рисковых ситуаций, т. е. определением как размера возможных потерь, так и самой возможности потерь критического, например катастрофического, уровня. Рисковые ситуации чрезвычайно разнообразны. Они могут возникать в самых разных областях человеческой деятельности и могут иметь самые разные последствия — от больших материальных потерь и человеческих жертв при недооценке риска землетрясений, ураганов, наводнений или других природных катаклизмов большой силы при проектировании зданий или защитных сооружений до значительных материальных и финансовых потерь при недооценке риска резких колебаний экономических или финансовых показателей (курсов валют, цен акций и др.). В настоящее время в связи с развитием компьютерных информационных систем оформляется новая область теории риска, охватывающая задачи, связанные с анализом информационных рисков.

Многие классические методы оценки риска, разработанные, как правило, в конце XIX — первой половине XX в., основаны на предположении о том, что параметры, характеризующие рисковые ситуации, имеют нормальное распределение. Однако, к сожалению, зачастую применение классических методов приводит к недооценке риска. Причины иногда имеющей место несостоятельности нормальных моделей могут быть разными. К примеру, если возможность и размер потерь в тех или иных рисковых ситуациях вычисляются на основе статистических данных, накопленных за определенное время, то, как мы убедимся ниже, существенную роль будет иметь то обстоятельство, является или нет поток событий, в результате которых накапливаются статистические данные, однородным. Другими словами, стремится ли отношение количества зарегистрированных в течение определенного интервала времени событий к длине этого интервала времени к некоторому числу с течением времени. Если такое сближение указанного отношения с некоторым числом имеет место, то нормальные модели могут давать адекватные результаты. Однако если такое сближение не наблюдается и указанное отношение сильно колеблется, оставаясь случайным (т. е. непредсказуемым), то нормальные модели неадекватны и приводят к весьма существенной недооценке риска. Как мы увидим, вместо ожидаемого в соответствии с классической теорией нормального закона в подобных ситуациях (например, если упомянутое выше отношение ведет себя как гамма-распределенная случайная величина) могут возникать, скажем, функции распределения ущерба типа распределения Стьюдента с произвольно малым

[1] Работа поддержана грантами РФФИ 02–01–00949, 02–01–01080, 03–01–00428, INTAS 03–51–5018.

числом γ степеней свободы. Например, функция распределения Стьюдента при $\gamma = 2$ (ему соответствует интенсивность потока информативных событий, имеющая асимптотически экспоненциальное распределение) имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} + x/\bigl(2\sqrt{2+x^2}\bigr), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Хвосты этого распределения столь тяжелы, что у него отсутствуют моменты порядков $\delta \geqslant 2$. Несложно видеть, что β-квантиль этого распределения для $\frac{1}{2} < \beta < 1$ равна $\sqrt{2}(2\beta-1)/\sqrt{1-(2\beta-1)^2}$. Поэтому, например, расстояние между квантилями порядков 0,975 и 0,025 этого распределения (что в определенном смысле соответствует длине "наикратчайшего доверительного интервала" с коэффициентом доверия 0,95) оказывается почти в 2,2 раза больше соответствующей характеристики нормального распределения с тем же параметром масштаба. Этот пример наглядно иллюстрирует, насколько важно учитывать случайность интенсивности потока событий, несущих регистрируемую информацию. В противном случае можно существенно недооценить размер возможного ущерба или саму возможность критического ущерба (легко видеть, что реальная доверительная вероятность "95%-го нормального" интервала, вычисленная по приведенной выше функции распределения $\Psi(x)$, оказывается меньшей, чем 0,82).

Приведенный пример представляется особо важным для анализа экономических и финансовых рисков. Согласно современным методам экономического анализа, очень важна такая мера риска, как VaR (Value at Risk). Адекватного аналога в русском языке, насколько известно авторам, этот термин пока не имеет. По определению показатель VaR представляет собой наименьшее решение уравнения $\mathsf{P}(X \geqslant \mathrm{VaR}) = \epsilon$, где X — случайная величина, описывающая возможные в рассматриваемой рисковой ситуации потери, ϵ — наперед заданное малое положительное число, обычно интерпретируемое как вероятность практически невозможного события. Другими словами, VaR — это практический порог наибольших возможных потерь. С математической же точки зрения VaR — это квантиль распределения случайной величины X порядка $1-\epsilon$. Существующие методы вычисления показателя VaR, описываемые в экономической литературе, основаны на нормальности распределения величины X. Приведенный выше пример показывает, что при неправильном выборе модели легко ошибочно занизить практический порог наибольших возможных потерь почти в 2,2 раза.

Неоднородность потока информативных событий, приводящая к возникновению не-нормальных вероятностных моделей с "тяжелыми хвостами", является, увы, не исключением, а правилом. Поэтому особую важность приобретает изучение именно *внутренних* аналитических механизмов формирования вероятностных моделей рисковых ситуаций. Асимптотический подход, основанный на предельных теоремах теории вероятностей, дает возможности не только получить сами формальные вероятностные модели рисковых ситуаций, но и в некотором смысле дать разумное теоретическое объяснение их адекватности на основе минимальных предположений о внутренней структуре изучаемых характеристик, что чрезвычайно важно при решении задач анализа риска в условиях стохастической неопределенности.

Научное направление, связанное с анализом рисковых ситуаций в самых разных областях, интенсивно развивается на кафедре математической статистики факультета ВМиК МГУ. Важное место в этих исследованиях занимает изучение конкретных механизмов формирования неклассических смешанных гауссовских вероятностных моделей рисковых ситуаций и методов их анализа. В данном обзоре мы приведем некоторые наиболее интересные и важные результаты, полученные в последнее время.

К сожалению, из-за ограниченного объема данного обзора мы не имеем возможности упомянуть все работы сотрудников кафедры математической статистики, в которых методы теории вероятностей (в том числе и оригинальные) применяются к решению конкретных задач анализа страхового или финансового риска, а также тесно связанных с математической теорией риска теорией надежности сложных систем. Заинтересованные читатели могут ознакомиться с этими результатами, например, по книгам [1–7].

1. Принципы анализа рисковых ситуаций с помощью смешанных гауссовских вероятностных моделей. Во многих случаях статистический анализ реальных данных, полученных в тех или иных рисковых ситуациях, показывает, что там, где, основываясь на классических результатах теории вероятностей, и в первую очередь на центральной предельной теореме, следовало бы ожидать нормального распределения рассматриваемых величин, реальные распределения оказываются заметно отличными от нормальных. Эта ситуация, например, характерна для анализа процессов биржевых цен. В финансовой математике первые работы, в которых отмечено это явление, появились еще в начале прошлого столетия. Отмеченный феномен является всеобщим: ненормальность распределений приращений биржевых цен проявляется на всех биржах независимо от объекта торговли. Переход к логарифмам, который должен приводить к так называемому геометрическому броуновскому движению, не спасает ситуацию. Приращения логарифмов биржевых цен на интервалах умеренной длины (до 2–3 недель) также не нормальны.

Отмеченная ненормальность распределений приращений проявляется в том, что в действительности наблюдается заметно больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине значений приращений, нежели их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Другими словами, наблюдаемые распределения приращений биржевых цен на интервалах времени умеренной длины являются более островершинными, нежели нормальные, имея заметно более тяжелые хвосты. Подобный эффект наблюдается повсеместно: в метрологии, экспериментальной физике и других областях, связанных со статистическим анализом реальных данных.

Широкое применение нормального закона для описания тех или иных вероятностно-статистических закономерностей обусловлено тем, что оно является удобной *асимптотической* аппроксимацией реальных распределений вероятностей случайных величин, определяемых суммарным воздействием большого числа "элементарных" случайных факторов. В большинстве приложений нет реальных оснований отвергать предположение об ограниченности влияния каждого случайного фактора. Поэтому в данном обзоре основное внимание мы уделим суммам случайных величин, в которых слагаемые имеют конечные дисперсии. Мы приведем пример асимптотической схемы, которая связана с суммами таких слагаемых, и приводит к не-нормальным распределениям с тяжелыми хвостами, и тем самым дадим обоснование использования последних в качестве асимптотических аппроксимаций, альтернативных нормальному закону.

Рассматриваемая асимптотическая схема основана на принципе, который может быть наглядно проиллюстрирован на примере простейшей задачи из теории измерений. Погрешность определяется суммарным воздействием случайных факторов, ни один из которых не является доминирующим, и потому, согласно центральной предельной теореме, должна иметь нормальное распределение. Однако на *разные* измерения воздействует, вообще говоря, *разное* число случайных факторов, т.е. число случайных факторов, определяющих погрешность, само является случайным фактором. Поэтому вместо классической центральной предельной теоремы здесь более уместно пользоваться предельными теоремами для сумм случайного числа независимых случайных величин.

Теория случайного суммирования довольно хорошо развита (см., например, монографии [1, 8, 9]). Не ставя перед собой цели привести результаты этой теории во всей полноте, мы сосредоточимся лишь на очень частном конкретном варианте постановки задачи, когда число слагаемых в суммах формируется в соответствии с так называемым дважды стохастическим пуассоновским процессом (процессом Кокса). Этот случай имеет чрезвычайно важное практическое значение.

2. Предельные теоремы для обобщенных процессов Кокса. Целью данного раздела является описание задачи моделирования неоднородных хаотических потоков событий с помощью обобщенных процессов Кокса и демонстрация того, что отклонение распределения наблюдаемых процессов от нормального могут быть успешно объяснены наличием существенной изменчивости интенсивности неоднородных хаотических потоков событий, описываемых процессами Кокса.

2.1. Обобщенные процессы Кокса. Пусть $N_1(t)$, $t \geqslant 0$, — однородный пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а $\Lambda(t)$, $t \geqslant 0$, — независимый от $N_1(t)$ случайный процесс, обладающий следующими свойствами: $\Lambda(0) = 0$, $\mathsf{P}(\Lambda(t) < \infty) = 1$ для любого $t > 0$, траектории $\Lambda(t)$ не убывают и непрерывны справа. Дважды стохастический пуассоновский процесс $N(t)$, называемый также процессом Кокса, определяется как суперпозиция $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$:

$$N(t) = N_1(\Lambda(t)), \quad t \geqslant 0.$$

В этом случае будем говорить, что процесс Кокса $N(t)$ управляется процессом $\Lambda(t)$. В частности, если процесс $\Lambda(t)$ допускает представление

$$\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant 0,$$

в котором $\lambda(t)$ — положительный случайный процесс с интегрируемыми траекториями, то $\lambda(t)$ можно интерпретировать как мгновенную стохастическую интенсивность процесса $N(t)$. Поэтому иногда процесс $\Lambda(t)$, управляющий процессом Кокса $N(t)$, мы будем называть *накопленной интенсивностью процесса* $N(t)$. Свойства процессов Кокса подробно описаны в книгах [1, 10].

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что при каждом $t \geqslant 0$ случайные величины $N(t), X_1, X_2, \ldots$ независимы. Процесс

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

назовем обобщенным процессом Кокса (при этом для определенности считаем, что $\sum\limits_{j=1}^{0} = 0$).

Процессы вида (2) играют чрезвычайно важную роль во многих прикладных задачах. Достаточно сказать, что при $\Lambda(t) \equiv \lambda t$ с $\lambda > 0$ процесс $S(t)$ превращается в классический обобщенный пуассоновский процесс, традиционно используемый при моделировании многих явлений в физике, теории надежности, финансовой и актуарной деятельности, биологии и т.д. Большое число разнообразных прикладных задач, приводящих к обобщенным пуассоновским процессам, описано в книгах [1, 9].

Общие процессы $S(t)$ вида (2) со случайной интенсивностью $\Lambda'(t)$ являются более адекватными моделями реальных хаотических процессов, в которых свойство однородности является скорее исключением, нежели правилом, в частности процессов страховых выплат или же изменений цен на биржах, где реальная интенсивность существенно изменчива. Поэтому обобщенные процессы Кокса находят весьма широкое применение в актуарной и финансовой математике (см. [1]). Следует особо упомянуть, что на основе формальных теоретико-вероятностных построений, связанных с предельными теоремами для неоднородных случайных блужданий, описываемых обобщенными процессами Кокса, удалось предложить новую математическую модель для распределения вероятностей характеристик, регистрируемых в турбулентной плазме [11]. Эта модель имеет вид смеси гауссовых распределений. Высокая степень адекватности предложенной модели подтверждена результатами статистического анализа экспериментальных данных. Это позволило получить совершенно новое физическое модельное представление о перемежаемости плазменных турбулентных пульсаций в проблеме управляемого термоядерного синтеза.

2.2. Теоремы переноса для обобщенных процессов Кокса. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что у случайных величин $\{X_j\}_{j\geqslant 1}$ имеется по крайней мере два первых момента. Обозначим $\mathsf{E}X_1 = a$, $\mathsf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < \infty$. Даже в таких предположениях предельные распределения обобщенных процессов Кокса могут иметь произвольно тяжелые хвосты. В данном обзоре мы сосредоточимся на ситуации, в которой $a = 0$. Мы продемонстрируем, что асимптотическое поведение процесса $S(t)$ полностью определяется асимптотическим поведением накопленной интенсивности $\Lambda(t)$. Более того, тяжелые (например, типа Парето) хвосты распределений, предельных для сумм (2), могут быть обусловлены не "плохим" поведением слагаемых (например, отсутствием у них моментов), а чрезмерно большим разбросом значений управляющего процесса $\Lambda(t)$.

Всюду далее символы $\Longrightarrow$ и $\xrightarrow{P}$ будут обозначать сходимость по распределению и сходимость по вероятности соответственно. Стандартная нормальная функция распределения будет обозначаться $\Phi(x)$. Пусть $d(t) > 0$ — вспомогательная нормирующая (масштабирующая) функция, неограниченно возрастающая при $t \to \infty$.

Теорема 1. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ $(t \to \infty)$. *Для того чтобы одномерные распределения нормированного обобщенного процесса Кокса слабо сходились к распределению некоторой с.в.* Z, *т.е.*

$$\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} \Longrightarrow Z \quad (t \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала неотрицательная с.в. U такая, что:

1) $\mathsf{P}(Z < x) = \int\limits_0^\infty \Phi(x/\sqrt{y})\, d\mathsf{P}(U < y)$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\Lambda(t)/d(t) \Longrightarrow U$ $(t \to \infty)$.

Доказательство см. в [12] или [1].

Обратим внимание на то, что условие 2 теоремы 1 может быть интерпретировано как требование статистической регулярности накопленной интенсивности: предел отношения $\Lambda(t)/d(t)$ при $t \to \infty$ может быть случайным, но он должен существовать. Еще одна интерпретация этого условия заключается в том, что при больших t распределение случайной величины $\Lambda(t)/d(t)$ практически не зависит от t. При этом условие 1 означает, что, вообще говоря, предельным распределением обобщенного процесса Кокса является масштабная смесь нормальных законов.

Из теоремы 1 и идентифицируемости семейства масштабных смесей нормальных законов (см. [13]) немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1*

$$\mathsf{P}\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right) \Longrightarrow \Phi(x) \quad (t \to \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$\Lambda(t)/d(t) \Longrightarrow 1 \quad (t \to \infty).$$

Другими словами, предельное распределение обобщенного процесса Кокса может быть нормальным только в том случае, когда случайная величина $\Lambda(t)/d(t)$ асимптотически (при $t \to \infty$) неслучайна.

В качестве еще одного следствия теоремы 1 мы приведем один критерий сходимости одномерных распределений обобщенных процессов Кокса с нулевым средним и *конечными дисперсиями* к устойчивым законам. Мы покажем, что одномерные распределения обобщенных процессов Кокса с описанными выше свойствами асимптотически строго устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически строго устойчивы их управляющие процессы.

Пусть $G_{\alpha,\theta}(x)$ — строго устойчивая функция распределения с показателем α и параметром θ, которая, как известно, определяется своей характеристической функцией

$$g_{\alpha,\theta}(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \exp\left\{-i\frac{\pi\theta\alpha}{2}\operatorname{sign} t\right\}\right\},$$

где $t \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $|\theta| \leqslant \theta_\alpha = \min(1, 2/\alpha - 1)$ (см., например, [14]).

Теорема 2. *Предположим, что* $\Lambda(t) \xrightarrow{P} \infty$ $(t \to \infty)$. *Для того чтобы*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{S(t)}{\sigma\sqrt{d(t)}} < x\right) = G_{\alpha,0}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left(\Lambda(t) < d(t)x\right) = G_{\alpha/2,1}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство см. в [12].

Рассмотрим ситуацию с дискретным временем $t = n = 1, 2, \ldots$ и предположим, что управляющий процесс $\Lambda(n)$ имеет вид

$$\Lambda(n) = Z_1 + \ldots + Z_n, \tag{3}$$

где $\{Z_i\}$ — независимые одинаково распределенные с.в., $Z_i \geqslant 0$, $i \geqslant 1$. Такое представление возникает в ситуации, когда $\Lambda(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями, а обобщенный процесс Кокса наблюдается в равноотстоящие моменты времени, т.е. Z_i — приращения управляющего процесса $\Lambda(t)$ за интервалы времени между наблюдениями. В соответствии с (2) полагаем

$$S(n) = \sum_{j=1}^{N_1(\Lambda(n))} X_j.$$

В этой ситуации с помощью теоремы 2 данной работы и теоремы 2 § 35 из [15] мы легко получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Одномерные распределения нормированного обобщенного процесса Кокса с дискретным временем $S(n)/\delta_n$ слабо сходятся к строго устойчивому распределению $G_{\alpha,0}$ при некотором выборе констант δ_n тогда и только тогда, когда для любого $k > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(Z_1 \geqslant x)}{\mathsf{P}(Z_1 \geqslant kx)} = k^{\alpha/2}.$$

Другими словами, часто наблюдаемые на практике тяжелые хвосты (устойчивых) распределений, предельных для обобщенных процессов Кокса при возрастающей интенсивности, могут возникать не только в той ситуации, где тяжелые хвосты присущи распределениям скачков. Как видно из теоремы 3, даже при произвольно легких хвостах распределений скачков тяжелые хвосты предельного закона могут возникать из-за того, что тяжелые (паретовские) хвосты имеются у распределений приращений управляющего процесса.

В кандидатских диссертациях Д. Е. Кащеева (защищенной под руководством профессора Ю. С. Хохлова [16]) и А. А. Кудрявцева (защищенной под руководством профессора В. Ю. Королева [17]), доказаны и исследованы функциональные предельные теоремы для обобщенных процессов Кокса в схеме серий. В упомянутых работах в качестве предельных выступают так называемые подчиненные винеровские процессы. Эти результаты представляют собой мостик, который соединяет модели эволюции рассматриваемых процессов на микроуровне (т.е. на малых временны́х интервалах) и популярные в настоящее время макромодели многих реальных процессов типа геометрического броуновского движения со случайными сносом и диффузией (подобные модели описывают броуновское движение в случайной среде, скажем, в жидкости со случайной температурой и/или вязкостью), и тем самым дают дополнительное теоретическое обоснование моделям конечномерных распределений соответствующих процессов, имеющим вид масштабных смесей нормальных законов.

2.3. Асимптотические разложения для квантилей обобщенных процессов Кокса. В этом разделе мы приведем асимптотические разложения для квантилей обобщенных процессов Кокса с нулевым средним. Как мы отмечали во введении, вычисление квантилей распределений необходимо для корректного использования такой меры риска, как VaR. Пусть $\Lambda(t) = Ut$, $t \geqslant 0$, где U — такая случайная величина, что $\mathsf{P}(U \geqslant 0) = 1$. Для $\beta \in (0,1)$ квантиль порядка β случайной величины $S(t)$ (см. (2)) с таким управляющим процессом обозначим $u_\beta^{(1)}(t)$.

Напомним, что некоторая случайная величина Y удовлетворяет условию Крамера, если

$$\limsup_{|s|\to\infty} |\mathsf{E}\exp\{isY\}| < 1.$$

Теорема 4. *Пусть $a = \mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_1^4 < \infty$, причем случайная величина X_1 удовлетворяет условию Крамера. Предположим, что $\mathsf{E}U^{-1} < \infty$, $\mathsf{E}U = 1$ и для любого $q \in (0,1)$*

$$s\log(s)\mathsf{E}q^{Us} \to 0 \quad (s \to \infty).$$

Тогда при $t \to \infty$

$$u_\beta^{(1)}(t) = -\frac{q_1(u_\beta^{(1)})}{q_0'(u_\beta^{(1)})} + \sigma\sqrt{t}u_\beta^{(1)} + \\ + \frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{q_0'(u_\beta^{(1)})q_1(u_\beta^{(1)})q_1'(u_\beta^{(1)}) - \left(q_0'(u_\beta^{(1)})\right)^2 q_2(u_\beta^{(1)}) - \frac{1}{2}q_1^2(u_\beta^{(1)})q_0''(u_\beta^{(1)})}{\left(q_0'(u_\beta^{(1)})\right)^3}\right] + o(t^{-1/2}),$$

где $u_\beta^{(1)}$ *— квантиль порядка* β *функции распределения*

$$q_0(x) = \mathsf{E}\Phi\left(xU^{-1/2}\right),$$

а функции $q_1(x)$ *и* $q_2(x)$ *имеют вид*

$$q_1(x) = -\frac{\alpha_3}{6\sigma^3}\mathsf{E}U^{-1/2}\phi(xU^{-1/2})(x^2U^{-1} - 1),$$

$$q_2(x) = -\mathsf{E}U^{-1}\phi(xU^{-1/2})\left[(x^3U^{-3/2} - 3xU^{-1/2})\frac{\alpha_4}{24\sigma^4} + (x^5U^{-5/2} - 10x^3U^{-3/2} + 15xU^{-1/2})\frac{\alpha_3^2}{72\sigma^6}\right].$$

Доказательство этого утверждения приведено, например, в [1, 3].

Теперь рассмотрим ситуацию с дискретным временем $t = n = 1, 2, \ldots$ и предположим, что управляющий процесс $\Lambda(n)$ представляется в виде (3), где случайные величины $Z_1, Z_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены. Для $\beta \in (0, 1)$ квантиль порядка β с.в. $S(n)$ с таким управляющим процессом мы будем обозначать $u_\beta^{(2)}(n)$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathsf{E}|X_1|^4 < \infty$, $\mathsf{E}Z_1^4 < \infty$. *Тогда если* $\nu_1 = 1$ *и случайная величина* X_1 *удовлетворяет условию Крамера, то при* $n \to \infty$

$$u_\beta^{(2)}(n) = (u_\beta^2 - 1)\frac{\alpha_3}{6\sigma^3} + \sigma\sqrt{n}u_\beta + \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{\alpha_3^2}{36\sigma^6}(5u_\beta - 2u_\beta^3) + \frac{\alpha_4 + 3\sigma^4(\nu_2 - 1)}{24\sigma^4}(u_\beta^3 - 3u_\beta)\right] + o\left(n^{-1/2}\right),$$

где u_β *— квантиль порядка* β *стандартного нормального распределения,* $\alpha_k = \mathsf{E}X_1^k$, $k \geqslant 1$, *а* $\nu_2 = \mathsf{E}Z_1^2$.

Заметим, что если $\nu_2 = 2$, то асимптотическое разложение, приведенное в теореме 5, совпадает с асимптотическим разложением для квантилей случайной величины $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ (см. [1]).

Если же в дополнение к условиям теоремы 5 $\alpha_3 = 0$, что возможно, например, если случайные величины X_j имеют симметричное распределение, то

$$u_\beta^{(2)}(n) = \sigma\sqrt{n}u_\beta + \frac{\alpha_4 + 3\sigma^4(\nu_2 - 1)}{24\sigma^4\sqrt{n}}(u_\beta^3 - 3u_\beta) + o\left(n^{-1/2}\right).$$

3. Некоторые свойства масштабных смесей нормальных законов

3.1. Островершинность масштабных смесей нормальных законов. Понятие островершинности распределения можно определять по-разному. К примеру, в прикладных исследованиях в качестве численной характеристики островершинности часто рассматривается коэффициент эксцесса $\varkappa(Z)$, который для случайной величины Z с $\mathsf{E}Z^4 < \infty$ определяется как

$$\varkappa(Z) = \mathsf{E}\left(\frac{Z - \mathsf{E}Z}{\sqrt{\mathsf{D}Z}}\right)^4.$$

Если $\mathsf{P}(X < x) = \Phi(x)$, то $\varkappa(X) = 3$. Плотности с более острыми вершинами (и соответственно более тяжелыми хвостами), чем у нормальной плотности, имеют $\varkappa > 3$, а для плотностей с менее острой вершиной $\varkappa < 3$. Следующее утверждение устанавливает, что смеси $\mathsf{E}\Phi(x/\sqrt{U})$ всегда являются более островершинными и, следовательно, имеют более тяжелые хвосты, нежели нормальный закон, если в качестве характеристики островершинности рассматривается коэффициент эксцесса.

Лемма 1. *Пусть X и Y — независимые случайные величины с конечными четвертыми моментами. Предположим, что* $\mathsf{E}X = 0$ *и* $\mathsf{P}(Y \geqslant 0) = 1$. *Тогда*

$$\varkappa(XY) \geqslant \varkappa(X).$$

Более того, $\varkappa(XY) = \varkappa(X)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathsf{P}(Y = \mathrm{const}) = 1$.

Доказательство см., например, в [9] или [1].

Таким образом, если X — стандартная нормальная случайная величина, а U — неотрицательная случайная величина с $\mathsf{E}U^2 < \infty$, независимая от X, то $\varkappa(X \cdot \sqrt{U}) \geqslant 3$ и $\varkappa(X \cdot \sqrt{U}) = 3$, если и только если U неслучайна.

К слову сказать, равенство коэффициента эксцесса минимально возможному значению (равному трем) характеризует нормальный закон не только в классе масштабных смесей нормальных законов (см. вышеприведенную лемму), но и в классе всех безгранично делимых законов с конечным четвертым моментом [18].

Понятие "распределения с тяжелыми хвостами", естественно тесно связанное с понятием островершинности, также можно определить по-разному. В данном обзоре мы не придерживаемся какого-либо одного формального определения распределения с тяжелыми хвостами, понимая под таковым распределение, хвосты которого имеют более высокую скорость убывания по сравнению с нормальным законом при неограниченном росте аргумента. В [19] предложено вместо "абсолютной" тяжести хвостов распределений вероятности рассматривать "относительную", сравнивая вероятности больших уклонений. Следуя этому подходу и используя неравенство Иенсена, легко получить неравенства, напрямую связывающие хвосты масштабных смесей нормальных законов с хвостами самого́ нормального распределения. Пусть, как и ранее, X — стандартная нормальная случайная величина, а U — неотрицательная случайная величина, независимая от X. Плотность случайной величины $Z = X \cdot \sqrt{U}$ (всегда существующую, симметричную и одновершинную) обозначим $p_Z(x)$. Легко видеть, что $\mathsf{P}(Z > x) = 1 - \mathsf{E}\Phi(x/\sqrt{U})$ для $x > 0$.

Лемма 2. *Для $x > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}(Z > x) \geqslant 1 - \Phi\big(\sqrt{2\pi}x p_Z(0)\big).$$

Если случайная величина U удовлетворяет условию нормировки $\mathsf{E}U^{-1/2} = 1$, *то*

$$\mathsf{P}(Z > x) \geqslant 1 - \Phi(x), \quad x > 0.$$

Из леммы 2 вытекает, что если $\mathsf{E}U^{-1/2} = 1$, то для любого $x \geqslant 0$

$$\mathsf{P}\Big(\Big|X \cdot \sqrt{U}\Big| \geqslant x\Big) \geqslant \mathsf{P}(|X| \geqslant x) \quad \big(= 2[1 - \Phi(x)]\big),$$

т.е. масштабные смеси нормальных законов всегда имеют более тяжелые хвосты, нежели само нормальное распределение.

3.2. Масштабные нормальные смеси как симметризации вероятностных распределений. Из результатов предыдущих разделов вытекает, что задача статистического анализа распределений многих реальных процессов сводится к статистическому определению смешивающего распределения (разделению смеси), которое является неизвестным параметром рассматриваемой статистической задачи. Без каких-либо дополнительных предположений класс смешивающих законов (параметрическое множество) совпадает с множеством всех распределений, сосредоточенных на неотрицательной полуоси. Подбор нужного закона при этом представляет собой чрезвычайно трудоемкую статистическую задачу. Вопрос о существовании и единственности решения этой задачи тесно связан с понятием идентифицируемости, т.е. однозначности представления смесей. Общая задача идентификации сдвиг-масштабной смеси нормальных законов допускает неоднозначное решение, однако конечные сдвиг-масштабные смеси нормальных законов и произвольные масштабные смеси, рассматриваемые в данной работе, идентифицируемы однозначно ([13, 20], также см., например, [4]). С целью упрощения задачи вполне естественно стремиться сузить параметрическое множество, т.е. семейство допустимых смешивающих законов за счет каких-либо дополнительных соображений. Один из возможных подходов к решению этой задачи и предлагается в данном разделе.

Практика показывает, что во многих случаях статистический анализ данных о логарифмах приращения биржевых цен (или экспериментальных данных, связанных с измерениями параметров турбулентной плазмы) удобно производить, разбивая общий массив данных (выборку) на два подмассива (две подвыборки), один из которых содержит только положительные, а другой — только неположительные данные, подгоняя распределение к каждой из подвыборок и в качестве распределения приращения беря свертку подогнанных распределений.

При этом часто соображения симметрии обосновывают предположение о том, что сворачиваемые распределения должны по крайней мере принадлежать к одному типу. Для простоты мы будем предполагать, что они совпадают и равны, скажем, $F(x)$. Характеристическую функцию, соответствующую функции распределения $F(x)$, обозначим $f(t)$. Тогда $\mathsf{E}\exp\{isP\} = |f(s)|^2$, $s \in \mathbb{R}$. Последняя характеристическая функция вещественна, следовательно, распределение, ей соответствующее, является симметричным в том смысле, что $\mathsf{P}(P < -x) = 1 - \mathsf{P}(P > x)$.

Распределение, соответствующее характеристической функции $|f(s)|^2$, называется *симметризацией* распределения $F(x)$.

Таким образом, упомянутая выше задача сужения класса допустимых смесей нормальных законов сводится к следующей.

Задача 1. *Описать класс $\mathcal{P}$ всех распределений F, сосредоточенных на неотрицательной полуоси и таких, что их симметризация представима в виде масштабной смеси нормальных законов.*

Решение задачи 1 дается следующей теоремой.

Теорема 6. *Распределение F принадлежит к классу $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $F(0) = 0$ и соответствующая ему характеристическая функция f удовлетворяет следующему условию: функция $\left|f(\sqrt{t})\right|^2$, $t \geqslant 0$, является вполне монотонной, т.е. она бесконечно дифференцируема и при каждом $n \geqslant 1$*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left|f(\sqrt{t})\right|^2 \geqslant 0, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство см., например, в работе [21].

Заметим, что условие (4) теоремы 6 представляет собой критерий представимости симметризации *произвольного* распределения F (не обязательно сосредоточенного на полуоси) с характеристической функцией f в виде масштабной смеси нормальных законов.

Класс $\mathcal{P}$ не является пустым, что демонстрируют следующие примеры.

Пример 1. Пусть $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ — функция гамма-распределения с некоторыми параметрами формы α и масштаба λ. Тогда $\Gamma_{\alpha,\lambda} \in \mathcal{P}$. В частности, к классу $\mathcal{P}$ принадлежит экспоненциальное распределение, которому соответствует $\alpha = 1$. Можно показать, что распределению $\Gamma_{\alpha,\lambda} \in \mathcal{P}$ соответствует смешивающая случайная величина $Y = \sqrt{Z}$, где Z имеет функцию распределения $\Gamma_{\alpha,\lambda^2/2}$. В частности, можно убедиться, что масштабной смесью нормальных законов является распределение Лапласа с плотностью $\ell(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, которому соответствует смешивающая экспоненциально распределенная случайная величина Z.

Пример 2. Пусть $G_{\alpha,b,c}$ — функция распределения устойчивого закона, сосредоточенного на положительной полуоси, которому соответствует характеристическая функция

$$g_{\alpha,b,c}(t) = \exp\left\{ibt - c\,|t|^{\alpha}\left[1 - i\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right]\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $0 < \alpha < 1$, $b \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Тогда $G_{\alpha,b,c} \in \mathcal{P}$.

Чтобы найти смешивающее распределение, соответствующее функции распределения $G_{\alpha,b,c}$, не ограничивая общности, будем считать, что $2c = 1$ (это предположение фактически сводится к изменению масштаба в $(2c)^{1/\alpha}$ раз). Тогда характеристическая функция $g_\alpha(t)$, соответствующая симметризации закона $G_{\alpha,b,\frac{1}{2}}$, очевидно, равна $\left|g_{\alpha,b,\frac{1}{2}}(t)\right|^2 = \exp\{-|t|^\alpha\}$, что, как известно, соответствует симметричному устойчивому закону G_α с параметром α. При этом по теореме 3.3.1 из [14] функция распределения G_α может быть представлена в виде

$$G_\alpha(x) = \int\limits_0^\infty \Phi\left(x/\sqrt{y}\right)\, d\mathsf{P}(Y_{\alpha/2} < y), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения, а $Y_{\alpha/2}$ — положительная строго устойчивая случайная величина с показателем $\alpha/2$.

В частности, к классу $\mathcal{P}$ принадлежит распределение Леви (устойчивое распределение с параметром $\alpha = 1/2$) с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2x}\right\}, \quad x > 0.$$

Ему соответствует смешивающее сосредоточенное на положительной полуоси строго устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha = 1/4$.

Иногда говорят, что случайная величина X имеет распределение с тяжелыми хвостами, если для некоторых $C > 0$ и $\gamma > 0$

$$\mathsf{P}(|X| \geqslant x) \sim Cx^{-\gamma}$$

при $x \to \infty$. При этом можно показать, что "тяжесть" хвоста распределения с тяжелыми хвостами совпадает с аналогичной характеристикой его симметризации, а именно: если случайная величина X имеет распределение с тяжелыми хвостами в вышеуказанном смысле, характеризуемыми параметром $\gamma > 0$, то

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\mathsf{P}(|X^{(s)}| \geqslant x)}{\mathsf{P}(|X| \geqslant x)} \leqslant 2^{\gamma+1}.$$

Довольно часто оказывается, что хвосты законов, подогнанных к подвыборкам одного знака, убывают (при $x \to \infty$) вейбулловским образом, т.е. как $O(\exp\{-x^\gamma\})$ с некоторым $\gamma \in (0,1)$. Два следующих примера иллюстрируют возможность выбора соответствующего распределения из класса $\mathcal{P}$.

Оба этих примера основаны на следующем утверждении, доказанном в кандидатской диссертации Э. Багирова, защищенной в 1988 г. под научным руководством Ю. В. Прохорова [22].

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{P}$ — класс случайных величин, функции распределения которых представимы в виде масштабных смесей нормальных функций распределения с нулевым средним. Если V — некоторая случайная величина из класса $\mathcal{P}$ и n — произвольное натуральное число, то распределение случайной величины V^{2n} принадлежит классу $\mathcal{P}$.*

Пример 3. Пусть X — случайная величина, плотность распределения которой имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} x^{-(2k-1)/2k} \exp\{-x^{1/k}\}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

при некотором натуральном k. Тогда $\mathsf{P}(X < x) \in \mathcal{P}$. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся теоремой 7. В качестве V возьмем случайную величину со стандартным нормальным распределением. Очевидно, $V \in \mathcal{A}$. Несложно проверить, что при этом рассматриваемая в данном примере плотность $p(x)$ соответствует случайной величине $X = V^{2k}$.

Пример 4. Пусть W_γ — распределение Вейбулла с параметром γ, имеющее плотность

$$w_\gamma(x) = \begin{cases} \gamma x^{\gamma-1} \exp\{-x^\gamma\}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

причем $\gamma = (2k)^{-1}$ при некотором $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $W_\gamma \in \mathcal{P}$. Действительно, выше (в частности, см. пример 1) мы заметили, что к классу $\mathcal{A}$ принадлежит случайная величина Λ, имеющая распределение Лапласа. Легко убедиться, что случайная величина Λ^{2k} имеет плотность $w_\gamma(x)$ с $\gamma = (2k)^{-1}$. Поэтому принадлежность распределения W_γ к классу $\mathcal{P}$ вытекает из теоремы 7.

Теорема 7 обеспечивает также присутствие в классе $\mathcal{P}$ распределений (а стало быть, и соответствующих случайных величин в классе $\mathcal{A}$), имеющих хвосты, убывающих степенным образом с произвольным показателем. В этом нас убеждает следующий пример.

Пример 5. Пусть $F_{1,m}$ — распределение Снедекора–Фишера с $(1, m)$ степенями свободы $(m > 0)$, задаваемое плотностью

$$p_{1,m}(x) = \frac{\Gamma\big((m+1)/2\big)m^{m/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(m/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(m+x)^{(m+1)/2}}, \quad x > 0.$$

Тогда $F_{1,m} \in \mathcal{P}$. Действительно, распределение Снедекора–Фишера с (n, m) степенями свободы ($n > 0$, $m > 0$), хорошо известное в математической статистике, соответствует случайной величине

$$Z_{n,m} = \frac{m\eta_n}{n\eta_m},$$

где η_n и η_m — независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат соответственно с n и m степенями свободы (при этом n и m не обязаны быть целыми). Отсюда видно, что распределение Снедекора–Фишера $F_{1,m}$ с $(1, m)$ степенями свободы соответствует квадрату случайной величины τ_m, имеющей распределение Стьюдента с m степенями свободы. Но, как хорошо известно, $\tau_m \in \mathcal{A}$. Теперь требуемое утверждение непосредственно вытекает из теоремы 7.

Необходимо отметить, что в соответствии с введенной выше терминологией масштабная смесь нормальных законов, являющаяся симметризацией распределения Снедекора–Фишера $F_{1,m}$ с $(1, m)$ степенями свободы, имеет тяжелые хвосты, убывающие при $x \to \infty$ как $O(x^{-m/2})$.

Мы можем сформулировать задачу, являющуюся в некотором смысле обратной к задаче 1.

Задача 2. *Описать класс $\mathcal{M}$ всех распределений H, сосредоточенных на неотрицательной полуоси, обладающих следующим свойством: для распределения H существует распределение F, сосредоточенное на неотрицательной полуоси, симметризация которого совпадает с функцией распределения*

$$\int_0^\infty \Phi(x/y)\,dH(y).$$

Эта задача не является тривиальной, поскольку класс $\mathcal{M}$ не совпадает с классом всех распределений, сосредоточенных на неотрицательной полуоси. Действительно, пусть H — вырожденная функция распределения с единственным единичным скачком в некоторой точке $a > 0$. Тогда масштабная смесь нормальных законов становится нормальным распределением, а основное уравнение принимает вид $X \stackrel{d}{=} U/a - U'/a$. Это уравнение относительно распределения случайной величины U по теореме Леви–Крамера о разложимости нормального закона лишь на нормальные компоненты имеет единственное решение: распределение случайной величины U само должно быть нормальным, но оно имеет точки роста на отрицательной полуоси, и стало быть, вырожденное распределение не принадлежит к $\mathcal{M}$.

4. Предельные теоремы для асимптотически нормальных статистик, построенных по выборкам случайного объема. В предыдущих главах мы рассматривали видоизменение предельного распределения сумм независимых случайных величин при замене числа слагаемых случайной величиной. Сходный эффект наблюдается при статистическом анализе, основанном на выборках случайного объема, когда используются такие статистики (т.е. измеримые функции от выборки), которые ведут себя в определенном смысле подобно суммам случайных величин, а именно обладают свойством асимптотической нормальности.

Иногда при анализе эффективности и/или качества функционирования технических систем, экономических или финансовых компаний оценка и прогноз основных характеристик производятся на основе статистических данных, накапливаемых в течение определенного интервала времени. Как правило, данные накапливаются в результате осуществления некоторых "информативных" событий. Например, выводы о распределении размера страховых выплат, что играет ключевую роль при вычислении или оценивании такого важного показателя эффективности функционирования страховой компании, как вероятность разорения, обычно делаются на основе статистики $X_1, X_2, \ldots, X_{N(T)}$ значений страховых требований, поступивших в течение интервала времени $[0, T]$ (очевидно, здесь $N(T)$ обозначает число страховых требований, поступивших за время $[0, T]$). Эти выводы используются для прогнозирования показателей эффективности на следующий период времени $[T, 2T]$. Однако очевидно, что наблюдаемое число информативных событий, произошедших в течение интервала времени $[0, T]$, является не чем иным, как реализацией некоторой целочисленной случайной величины. Если не принимать во внимание случайный характер объема доступной информации, то все, что можно сделать, — это построить в некотором смысле "условный" прогноз. Чтобы сделать полный прогноз с учетом случайности числа информативных событий, необходимо использовать результаты типа предельных теорем для статистик, построенных по выборкам случайного объема. В классической математической статистике типическим свойством многих измеримых функций от выборки (статистик) является их асимптотическая нормальность (при неслучайном объеме выборки). Оказывается, что при замене объема выборки случайной величиной свойство асимптотической нормальности рассматриваемых статистик трансформируется таким образом, что вместо нормального у статистик могут возникнуть предельные распределения с произвольно тяжелыми хвостами. Этот эффект приводит к тому, что условные прогнозы, о которых говорилось выше и которые основаны на нормальности предельного распределения рассматриваемых характеристик, существенно недооценивают возможные риски. Применительно к статистическому оцениванию вероятности разорения страховой компании указанный эффект подробно изучен в работе [23], также см. [1, 3]. Учитывать этот эффект также чрезвычайно важно при использовании такой популярной в экономике и финансовой инженерии меры риска, как VaR, упоминавшейся во введении. В данном разделе мы рассмотрим эффект трансформации предельных распределений статистик при замене объема выборки случайной величиной более подробно.

Рассмотрим случайные величины $N_1, N_2, \ldots, X_1, X_2, \ldots$, определенные на одном и том же измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$. Пусть на $\mathcal{A}$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathsf{P}_\theta\}$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$. Предположим, что при каждом $n \geqslant 1$ случайная величина N_n принимает только натуральные значения и независима от последовательности $X_1, X_2, \ldots$ относительно каждой из семейства мер $\{\mathsf{P}_\theta,\ \theta \in \Theta\}$. Пусть

$$T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n) = \big(T_{n,1}(X_1, \ldots, X_n), \ldots, T_{n,r}(X_1, \ldots, X_n)\big)$$

— некоторая статистика со значениями в $\mathbb{R}^r$, $r \geqslant 1$. Для каждого $n \geqslant 1$ определим случайный вектор (элемент) T_{N_n}, положив

$$T_{N_n(\omega)} = T_{N_n(\omega)}\left(X_1(\omega), \ldots, X_{N_n(\omega)}(\omega)\right)$$

для каждого элементарного исхода $\omega \in \Omega$.

Пусть Σ — некоторая положительно определенная матрица. Нормальное распределение в $\mathbb{R}^r$ с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ будем обозначать Φ_Σ. Это распределение определяется плотностью

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right\}}{(2\pi)^{r/2}\,|\Sigma|^{1/2}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r.$$

Распределение случайного вектора ξ относительно меры P_θ мы будем обозначать $\mathcal{L}_\theta(\xi)$.

Будем говорить, что статистика T_n *асимптотически нормальна* с асимптотической ковариационной матрицей Σ, если существует функция $t(\theta)$: $\Theta \longrightarrow \mathbb{R}^r$ такая, что при каждом $\theta \in \Theta$

$$\mathcal{L}_\theta\big(\sqrt{n}(T_n - t(\theta))\big) \Longrightarrow \Phi_\Sigma \quad (n \to \infty). \tag{5}$$

На существенное отличие асимптотических свойств статистик, построенных по выборкам случайного объема, от аналогичных свойств статистик, асимптотически нормальных в смысле (5), обратил внимание еще Б. В. Гнеденко. В частности, изучая достаточные условия слабой сходимости распределений выборочных квантилей в выборках случайного объема, он привел следующий пример, связанный с выборочной медианой. Хорошо известно, что в стандартной ситуации выборочная медиана асимптотически нормальна. В то же время, как показано в [24], если объем выборки N_n имеет геометрическое распределение со средним n, то нормированная выборочная медиана $\sqrt{n}(X_{([N_n/2]+1)} - \operatorname{med} X_1)$ имеет предельную функцию распределения (1) (см. введение), у которой нет никаких моментов порядков $\delta \geqslant 2$.

Наша цель в данном разделе — описать асимптотическое поведение случайных элементов T_{N_n}.

4.1. Вспомогательные результаты. Рассмотрим последовательность $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ случайных элементов, принимающих свои значения в r-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^r$. Пусть $\Xi(\mathbb{R}^r)$ — множество всех невырожденных линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}^r$. Символы $\stackrel{d}{=}$ и $\xrightarrow{P}$ будут соответственно обозначать совпадение распределений и сходимость по вероятности. Предположим, что существуют последовательности $\{B_n\}_{n\geqslant 1}$ операторов из $\Xi(\mathbb{R}^r)$ и $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ элементов из $\mathbb{R}^r$ такие, что

$$Y_n \equiv B_n^{-1}(S_n - a_n) \Longrightarrow Y \quad (n \to \infty), \tag{6}$$

где Y — некоторый случайный элемент, распределение которого мы обозначим H, $H = \mathcal{L}(Y)$.

Наряду с $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ рассмотрим последовательность целочисленных положительных случайных величин $\{N_n\}_{n\geqslant 1}$ таких, что при каждом $n \geqslant 1$ случайная величина N_n независима от последовательности $\{S_k\}_{k\geqslant 1}$. Пусть $c_n \in \mathbb{R}^r$, $D_n \in \Xi(\mathbb{R}^r)$, $n \geqslant 1$. В данном разделе мы сформулируем достаточные условия слабой сходимости распределений случайных элементов $Z_n = D_n^{-1}(S_{N_n} - c_n)$ при $n \to \infty$.

Предположим, что все случайные величины и случайные элементы заданы на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Под измеримостью случайного поля мы будем подразумевать его измеримость как функции двух переменных — элементарного исхода и параметра — относительно декартова произведения σ-алгебры $\mathcal{A}$ и борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ подмножеств $\mathbb{R}^r$.

Для $g \in \mathbb{R}^r$ обозначим $W_n(g) = D_n^{-1}(B_{N_n} g + a_{N_n} - c_n)$. В работах [25, 26] доказана следующая теорема, устанавливающая достаточные условия слабой сходимости произвольных многомерных случайных последовательностей с независимыми случайными индексами при операторной нормировке.

Теорема 8. *Пусть $\|D_n^{-1}\| \to \infty$ при $n \to \infty$ и последовательность случайных величин $\{\|D_n^{-1} B_{N_n}\|\}_{n\geqslant 1}$ слабо относительно компактна. Предположим, что существуют случайный элемент Y с распределением H и случайное поле $W(g)$, $g \in \mathbb{R}^r$, такие, что имеет место (6) и*

$$W_n(g) \Longrightarrow W(g) \quad (n \to \infty)$$

для H-почти всех $g \in \mathbb{R}^r$. Тогда поле $W(g)$ измеримо, линейно зависит от g и

$$Z_n \Longrightarrow W(Y) \quad (n \to \infty),$$

где поле $W(\cdot)$ и случайный элемент Y независимы.

Теперь приведем один вспомогательный результат, связанный с идентифицируемостью специального семейства смесей многомерных нормальных законов. Пусть U — неотрицательная случайная величина. Символом $\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(\cdot)$ мы будем обозначать распределение, которое для каждого борелевского множества A в $\mathbb{R}^r$ определяется как

$$\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(A) = \int\limits_0^\infty \Phi_{u\Sigma}(A)\, d\mathsf{P}(U < u). \tag{7}$$

Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех неотрицательных случайных величин.

Лемма 3. *Какова бы ни была невырожденная ковариационная матрица Σ, семейство распределений $\{\mathsf{E}\Phi_{U\Sigma}(\cdot):\ U \in \mathcal{U}\}$ идентифицируемо в том смысле, что если $U_1 \in \mathcal{U}$, $U_2 \in \mathcal{U}$ и*

$$\mathsf{E}\Phi_{U_1\Sigma}(A) = \mathsf{E}\Phi_{U_2\Sigma}(A) \tag{8}$$

для любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$, то $U_1 \stackrel{d}{=} U_2$.

Доказательство этого утверждения см. в [27].

4.2. От асимптотической нормальности к распределениям с тяжелыми хвостами. В дополнение к обозначениям, введенным выше, положим $Z_n = \sqrt{n}(T_{N_n} - t(\theta))$.

Теорема 9. *Пусть $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \to \infty$ относительно каждой из вероятностных мер P_θ, $\theta \in \Theta$. Предположим, что статистика T_n асимптотически нормальна в смысле (5) с асимптотической ковариационной матрицей Σ. Для того чтобы при каждом $\theta \in \Theta$ существовало распределение F_θ такое, что при каждом $\theta \in \Theta$*

$$\mathcal{L}_\theta(Z_n) \Longrightarrow F_\theta \quad (n \to \infty), \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало семейство функций распределения $\mathcal{V} = \{V(x,\theta) : \theta \in \Theta\}$, удовлетворяющее условиям:

(i) $V(x,\theta) = 0$ *при* $x < 0$, $\theta \in \Theta$;

(ii) *для любого* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$

$$F_\theta(A) = \int_0^\infty \Phi_{u^{-1}\Sigma}(A)\, d_u V(u,\theta), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \theta \in \Theta;$$

(iii) $\mathsf{P}_\theta(N_n < nx) \Longrightarrow V(x,\theta)$, $n \to \infty$, $\theta \in \Theta$.

При этом если функции распределения случайных величин N_n не зависят от θ, то не зависят от θ и функции распределения $V(x,\theta)$, т. е. семейство $\mathcal{V}$ состоит из единственного элемента.

Доказательство см., например, в [6].

Следствие 2. *В условиях теоремы 9 статистика T_{N_n} асимптотически нормальна с некоторой асимптотической ковариационной матрицей Σ', если и только если существует число $c > 0$ такое, что*

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow c \quad (n \to \infty).$$

Более того, в таком случае $\Sigma' = c^{-1}\Sigma$.

Данное утверждение немедленно вытекает из теоремы 9 с учетом леммы 3.

Пример 6. *Многомерное распределение Стьюдента* описано, например, в книге [28]. Рассмотрим r-мерный нормальный случайный вектор Y с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ. Пусть случайная величина W_γ имеет распределение хи-квадрат с параметром (“числом степеней свободы”) $\gamma > 0$ (необязательно целым) и независима от случайного вектора Y. Распределение случайного вектора $Z = \sqrt{\gamma/W_\gamma} \cdot Y$ называется *многомерным распределением Стьюдента*. Для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$ плотность распределения случайного вектора Z имеет вид

$$p_{\gamma,\Sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\big(r+\gamma)/2\big)}{|\Sigma|^{1/2}\,\Gamma(\gamma/2)(\pi\gamma)^{r/2}} \cdot \frac{1}{\Big(1 + \frac{1}{\gamma}\mathbf{x}^\top \Sigma^{-1}\mathbf{x}\Big)^{(r+\gamma)/2}}.$$

Согласно теореме 9, в многомерное распределение Стьюдента трансформируется предельное распределение статистики, являющейся асимптотически нормальной в смысле (5) при неслучайном объеме выборки, если объем выборки является случайной величиной, имеющей асимптотическое распределение хи-квадрат. В частности, такому условию удовлетворяет случайная величина с отрицательным биномиальным распределением. Примеры таких случайных величин подробно рассмотрены в работах [29, 30].

5. Анализ рисковых ситуаций с помощью вероятностных моделей, основанных на порядковых статистиках

5.1. Асимптотическое распределение выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема. В качестве примера применения результатов предыдущего раздела мы рассмотрим условия существования предельного распределения выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема. Задача оценивания квантилей представляет собой исключительный интерес при вычислении такой меры риска, как VaR (см. введение). Данный раздел основан на работе [27].

Пусть $n \geqslant 1$, $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с общей плотностью распределения $p(x)$, а $X_{n:1}, \ldots, X_{n:n}$ — соответствующий вариационный ряд, $X_{n:1} \leqslant X_{n:2} \leqslant \ldots \leqslant X_{n:n}$. Пусть $r \geqslant 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — некоторые числа, такие, что $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r < 1$. Квантили порядков $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ случайной величины X_1 мы будем обозначать ξ_{λ_i}, $i = 1, \ldots, r$. Выборочными квантилями порядков $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ принято называть случайные величины $X_{n:[\lambda_i n]+1}$, $i = 1, \ldots, r$, где символ $[a]$ обозначает целую часть числа a. Хорошо известен классический результат [31] об асимптотической нормальности совместного распределения выборочных квантилей (см. также [32, раздел 9.2]).

В данном разделе мы укажем условия существования предельного совместного распределения выборочных квантилей, построенных по выборке случайного объема, и опишем вид этого предельного распределения при замене объема выборки случайной величиной. В связи с этим рассмотрим последовательность $X_1, X_2 \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин с общей плотностью распределения $p(x)$. Пусть $\{N_n\}_{n \geqslant 1}$ — последовательность целочисленных неотрицательных случайных величин таких, что при каждом $n \geqslant 1$ случайные величины N_n и $X_1, X_2 \ldots$ независимы. Ниже мы рассмотрим асимптотику распределения случайных величин $X_{N_n:[\lambda_i N_n]+1}$, $i = 1, \ldots, r$, при $n \to \infty$ в предположении, что $N_n \to \infty$ по вероятности. Приведенные ниже теоремы обобщают и уточняют результаты работ [33, 34, 35].

В дополнение к обозначениям, введенным выше, положим $Q_{n,j} = X_{N_n:[\lambda_j N_n]+1}$, $j = 1, \ldots, r$, $Q_n = (Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,r})$, $\xi = (\xi_{\lambda_1}, \ldots, \xi_{\lambda_r})$, $Z_n = \sqrt{n}(Q_n - \xi)$. Основным результатом данного подраздела является следующее утверждение.

Теорема 10. *Пусть $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \to \infty$. Если $p(x)$ дифференцируема в окрестностях квантилей ξ_{λ_i} и $p(\xi_{\lambda_i}) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, то для сходимости*

$$Z_n \Longrightarrow Z \quad (n \to \infty)$$

к некоторому случайному элементу Z необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина U, что

$$\mathsf{P}(Z \in A) = \mathsf{E}\Phi_{U^{-1}\Sigma}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^r),$$

где $\Sigma = (\sigma_{ij})$,

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_i(1-\lambda_j)}{p(\xi_{\lambda_i})p(\xi_{\lambda_j})}, \quad i \leqslant j,$$

и

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow U \quad (n \to \infty).$$

Доказательство этого результата основано на теореме 9. При этом условие (5) выполнено вследствие теоремы Мостеллера.

Следствие 3. *В условиях теоремы 10 совместное распределение нормированных выборочных квантилей $\sqrt{n}(X_{N_n:[\lambda_j N_n]+1} - \xi_{\lambda_j})$, $j = 1, \ldots, r$, слабо сходится к r-мерному нормальному закону с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей Σ, определенной в теореме 10, если и только если*

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow 1 \quad (n \to \infty).$$

Пусть $0 < \lambda < 1$, ξ_λ — квантиль случайной величины X_1 порядка λ. Стандартную нормальную функцию распределения обозначим $\Phi(x)$.

Следствие 4. *Предположим, что плотность $p(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки ξ_λ, $p(\xi_\lambda) > 0$ и $N_n \xrightarrow{P} \infty$ при $n \to \infty$. Тогда, для того чтобы нормированная выборочная* *квантиль порядка λ, построенная по выборке случайного объема N_n, имела предельное распределение при $n \to \infty$:*

$$\frac{\sqrt{n}p(\xi_\lambda)}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}}(X_{N_n:[\lambda N_n]+1} - \xi_\lambda) \Longrightarrow Z \quad (n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала такая неотрицательная случайная величина U, что

$$\mathsf{P}(Z < x) \equiv \mathsf{E}\Phi(\sqrt{U}x)$$

и

$$\frac{N_n}{n} \Longrightarrow U \quad (n \to \infty).$$

Это утверждение, впервые доказанное в работе [34] и приведенное также в [35], является частным случаем теоремы 10.

5.2. Предельные теоремы для промежуточных порядковых статистик, построенных по выборкам случайного объема. Данный раздел основан на работе [7]. Стандартные методы расчета некоторых показателей надежности функционирования сложных технических систем применимы лишь тогда, когда система работает в стационарном режиме. Однако реально режим функционирования многих систем, рассматриваемый как функция времени, иногда испытывает некоторые колебания, имеет нестационарности, которые могут быть вызваны многими причинами, связанными с воздействием внутренних и внешних факторов риска. Например, режим функционирования оборудования систем связи явно имеет периодические компоненты, связанные, например, с сезонными изменениями температуры, влажности и других внешних параметров. Кроме того, участки нестационарности могут быть вызваны некоторыми случайно возникающими (не поддающимися абсолютно надежному прогнозированию) причинами, например вандализмом. Мы опишем математическую модель, позволяющую учесть нестационарность в режиме функционирования сложных технических систем, обусловленную стохастическим характером интенсивности потоков экстремальных событий, определяющих изменения надежностных характеристик и/или ведущих к отказам оборудования. Использование этой модели приводит к выводу о том, что указанные выше нестационарности могут существенно влиять на аналитические оценки показателей надежности.

Как уже говорилось выше, неоднородные хаотические потоки "шоковых" событий, влияющих на работоспособность оборудования, естественно моделировать при помощи процессов Кокса, определяемых как суперпозиции $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, $t \geqslant 0$, стандартного пуассоновского процесса (однородного пуассоновского процесса с единичной интенсивностью) $N_1(t)$ и независимого от него случайного процесса $\Lambda(t)$, имеющего почти наверное конечные неограниченно возрастающие непрерывные справа траектории, выходящие из нуля.

Аппаратура, применяемая в сложных технических системах на современном уровне развития технологии, как правило, обладает высокой надежностью и устойчивостью к однократным шоковым воздействиям. Другими словами, однократное шоковое воздействие не выводит аппаратуру из строя. Однако неблагоприятное воздействие шоков может сказываться в некотором изменении параметров аппаратуры, незначительном ухудшении ее надежностных характеристик, и в принципе узел (агрегат), изначально обладающий очень высокой надежностью, может выйти из строя после многократного шокового воздействия. Математическое описание результата многократного шокового воздействия на высоконадежную аппаратуру имеет следующий вид.

По выборке $X_1, \ldots, X_{N(t)}$ значений шоковых воздействий, зафиксированных на интервале времени $[0, t]$, построим вариационный ряд $X_{N(t):1}, \ldots, X_{N(t):N(t)}$. Пусть $k(n)$ — натуральнозначная функция натурального аргумента такая, что $k(n) \to \infty$ и $k(n)/n \to 0$ (или $n - k(n) \to \infty$, $k(n)/n \to 1$) при $n \to \infty$. Значение $k(n)$ (или $n - k(n)$) имеет смысл такого числа шоковых воздействий большой величины, которое выводит аппаратуру из строя. При этом условие $k(n) \to \infty$, по сути, соответствует представлению о высоконадежной аппаратуре как о такой, для выведения из строя которой требуется очень много шоковых воздействий. Условие $k(n)/n \to 0$ означает, что количество больших, критических шоков хоть и велико по абсолютной величине, но все же мало́ по сравнению с общим числом шоков, зарегистрированных за рассматриваемый период времени, что опять-таки согласуется с представлением о высоконадежной аппаратуре как о такой, которая может противостоять очень большому числу шоковых воздействий. Таким образом, критическим для высоконадежной аппаратуры является значение порядковых статистик $X_{N(t):k(N(t))}$ с функцией $k(N(t))$, обладающей указанными выше свойствами. Такие порядковые статистики называются порядковыми статистиками с промежуточными рангами. Мы будем рассматривать асимптотическое поведение величин $X_{N(t):k(N(t))}$ при $t \to \infty$. Этот случай менее всего изучен теоретически.

Теорема 11. *Пусть $k(n) = [Cn^\alpha]$, $C > 0$, $0 < \alpha < 1$. Предположим, что существуют неслучайные функции $a(t) > 0$, $b(t)$ и $d(t)$ такие, что $d(t)$ — натуральнозначная, $d(t) \to \infty$ и случайная величина $\big(X_{d(t):k(d(t))} - b(t)\big)/a(t)$ при $t \to \infty$ имеет некоторое предельное распределение, скажем, $G(x)$. Предположим, что существует случайная величина Λ такая, что $\mathsf{P}(\Lambda > 0) = 1$ и*

$$\Lambda(t)/d(t) \Longrightarrow \Lambda \quad (t \to \infty).$$

Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\left(\frac{X_{N(t):k(M(t))} - b(t)}{a(t)} < x\right) \longrightarrow H(x) \quad (t \to \infty),$$

где $M(t) = \big(N(t)\big)^{1/\alpha}\big(d(t)\big)^{1-1/\alpha}$. Функция распределения $H(x)$ имеет вид $H(x) = \mathsf{E}\Phi\big(\sqrt{\Lambda}u(x)\big)$, а функция $u(x)$ однозначно определяется функцией $G(x)$ и с точностью до сдвига и масштаба может иметь только три формы:

$$u_1(x) = \begin{cases} -\infty, & x \leqslant 0, \\ \beta \ln x, & x > 0; \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} -\beta \ln|x|, & x < 0, \\ +\infty, & x \geqslant 0; \end{cases} \qquad u_3(x) \equiv x,$$

где $\beta > 0$.

Этот результат исправляет теорему, приведенную в работе [36]. При этом теорема 11 отличается по форме от приведенной в статье [24] и приводит не к сдвиговым (как в [24]), а к специальным масштабным смесям нормальных законов.

Последнее обстоятельство позволяет сделать вывод, основанный на лемме 2, из которой вытекает, что $1 - G(x) \leqslant 1 - H(x)$ при $x > 0$, что означает, что классическая теория порядковых статистик с промежуточными рангами *недооценивает* риски катастрофических шоков по сравнению с подходом, рассматриваемым в данном разделе.

Применение приведенных выше результатов к анализу надежности волоконно-оптических линий связи железнодорожного транспорта России описано в монографии [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bening V.E., Korolev V.Yu. Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance. Utrecht: VSP. The Netherlands, 2002.
2. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Введение в математическую теорию риска. М.: МАКС Пресс, 2000.
3. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Обобщенные процессы риска. М.: МАКС Пресс, 2000.
4. Королев В.Ю. Вероятностные модели: Введение в асимптотическую теорию случайного суммирования. М.: Диалог-МГУ, 1997.
5. Королев В.Ю. Прикладные задачи теории вероятностей: Модели роста надежности модифицируемых систем. М.: Диалог-МГУ, 1997.
6. Королев В.Ю. Смешанные гауссовские вероятностные модели реальных процессов. М.: МАКС Пресс, 2004.
7. Здоровцов И.А., Королев В.Ю. Основы теории надежности волоконно-оптических линий передачи железнодорожного транспорта. М.: МАКС Пресс, 2004.
8. Круглов В.М., Королев В.Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: Изд-во МГУ, 1990.
9. Gnedenko B.V., Korolev V.Yu. Random summation: limit theorems and applications. CRC Press, Boca Raton, 1996.
10. Grandell J. Doubly stochastic Poisson processes // Lecture Notes Math. 1976. **529**. P. 112–157.

11. Скворцова Н.Н., Королев В.Ю., Маравина Т.А., Батанов Г.М., Петров А.Е., Пшеничников А.А., Сарксян К.А., Харчев Н.К., Санчез Х., Кубо Ш. Новые возможности математического моделирования турбулентных транспортных процессов в плазме // Физика плазмы. 2004. **31**. Вып. 1. С. 64–83.
12. Королев В.Ю. О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам // Теория вероятн. и ее примен. 1998. **43**. Вып. 4. С. 786–792.
13. Teicher H. Identifiability of mixtures // Ann. Math. Stat. 1961. **32**. P. 244–248.
14. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
15. Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
16. Кащеев Д.Е. Моделирование динамики финансовых временных рядов и оценивание производных финансовых инструментов: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Тверь, Тверской государственный университет, 2001.
17. Кудрявцев А.А. Неоднородные процессы риска: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ, 2003.
18. Круглов В.М. Нормальная и пуассоновская сходимости // Теория вероятн. и ее примен. 2003. **48**. Вып. 2. С. 392–398.
19. Birnbaum Z.W. On random variables with comparable peakedness // Ann. Math. Stat. 1948. **19**. N 1, P. 76–81.
20. Teicher H. Identifiability of finite mixtures // Ann. Math. Stat. 1963. **34**. N 4. P. 1265–1269.
21. Королев В.Ю. О распределениях, симметризация которых является масштабной смесью нормальных законов // Статистические методы оценивания и проверки гипотез. Пермь: Изд-во Пермского гос. ун-та, 2000. С. 136–143.
22. Багиров Э.Б. Метод смесей и его применение к выводу нижних оценок для распределений функций от нормальных случайных величин: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МИАН, 1988.
23. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Непараметрическое оценивание вероятности разорения для обобщенных процессов риска // Теория вероятн. и ее примен. 2002. **47**. Вып. 1. С. 3–20.
24. Азларов Т.А., Джамирзаев А.А., Мамуров И.Н. Предельные теоремы для распределений порядковых статистик при случайном объеме выборки // Узбекский матем. журн. 1991. № 1. С. 3–13.
25. Korolev V.Yu., Kossova E.V. On limit distributions of randomly indexed multidimensional random sequences with an operator normalization // J. of Math. Sci. 1992. **72**. N 1. P. 2915–2929.
26. Korolev V.Yu., Kossova E.V. Convergence of multidimensional random sequences with independent random indices // J. of Math. Sci. 1995. **76**. N 2. P. 2259–2268.
27. Королев В.Ю. Асимптотические свойства выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема // Теория вероятн. и ее примен. 1999. **44**. Вып. 2. С. 440–445.
28. Гроот М.де. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.
29. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. О моделировании больших рисков при помощи распределения Стьюдента // Обозрение промышленной и прикладной математики. Сер. Финансовая и страховая математика. 2003. **10**. Вып. 2. С. 268–275.
30. Бенинг В.Е., Королев В.Ю. Об использовании распределения Стьюдента в задачах теории вероятностей и математической статистики // Теория вероятн. и ее примен. 2004. **49**. Вып. 3. С. 419–429.
31. Mosteller F. On some useful “inefficient” statistics // Ann. Math. Stat. 1946. **17**. P. 377–408.
32. Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.
33. Гнеденко Б.В., Стоматович С., Шукри А. О распределении медианы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 2. С. 59–63.
34. Королев В.Ю., Селиванова Д.О. Асимптотическое поведение выборочных квантилей, построенных по выборкам случайного объема. Деп. ВИНИТИ 12.05.94. № 1197-В94.
35. Селиванова Д.О. Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для случайных сумм: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ, 1995.
36. Шериф А. Предельные теоремы для крайних членов вариационного ряда: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, МГУ, 1983.
37. Гнеденко Б.В., Фахим Х. Об одной теореме переноса // ДАН СССР. 1969. **187**. Вып. 1. С. 15–17.

38. Гнеденко Б.В. Об оценивании неизвестных параметров распределений по случайному числу независимых наблюдений // Теория вероятн. и матем. стат. Тр. Тбилисского матем. ин-та им. А.М. Размадзе. 1989. **92**. С. 146–150.
39. Королев В.Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами // Теория вероятн. и ее примен. 1994. **39**. Вып. 2. С. 313–333.
40. Королев В.Ю. Сходимость случайных последовательностей с независимыми случайными индексами. II // Теория вероятн. и ее примен. 1995. **40**. Вып. 4. С. 907–910.
41. Королев В.Ю. Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. Финансовая и страховая математика. 1997. **4**. Вып. 1. С. 86–102.
42. Королев В.Ю. О сходимости распределений случайных сумм к устойчивым законам // Теория вероятн. и ее примен. 1997. **42**. Вып. 4. С. 818–820.
43. Королев В.Ю. Асимптотические свойства экстремумов обобщенных процессов Кокса и их применения в некоторых задачах финансовой математики // Теория вероятн. и ее примен. 2000. **45**. Вып. 1. С. 182–194.
44. Королев В.Ю. О стереотипе нормальности и механизмах возникновения распределений с тяжелыми хвостами при математическом моделировании реальных процессов // Стохастические модели структурной плазменной турбулентности / Под ред. В.Ю. Королева, Н.Н. Скворцовой. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 183–273.
45. Королев В.Ю., Здоровцов И.А., Сурков А.Г. Определение критических значений параметров среды функционирования высоконадежных элементов волоконно-оптических линий передачи Магистральной цифровой сети связи // Системы и средства информатики. М.: Изд-во ИПИ РАН, 2002. С. 122–126.
46. Королев В.Ю., Скворцова Н.Н. Стохастические модели структурной плазменной турбулентности / Под ред. В.Ю. Королева, Н.Н. Скворцовой. М.: МАКС Пресс, 2003.
47. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991.
48. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1971.
49. Grandell J. Mixed Poisson processes. London: Chapman and Hall, 1997.
50. Гранделл Я. Смешанные пуассоновские процессы // Обозрение прикладной и промышленной математики. Сер. Финансовая и страховая математика. 1998. **5**. Вып. 1. С. 44–65.
51. Kolokoltsov V., Korolev V., Uchaikin V. Fractional stable distributions // J. of Math. Sci. 2001. **105**. N 6. P. 2569–2576.
52. Korolev V.Yu. Limit behavior of centered random sums of independent identically distributed random variables // J. Math. Sci. 1995. **76**. P. 2153–2162.

Поступила в редакцию
10.05.04