Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный инженерно-экономический университет»

Кафедра исследования операций в экономике имени профессора Львова Ю.А.

КУРСОВАЯ РАБОТА

# «*Эффективность рынка, Парето распределение богатства и Леви распределение доходности акций*»

Выполнила: Хокканен П.В,

студентка группы 3541

Преподаватель: Ичкитидзе Ю.Р.

Оценка: Дата:

Подпись:

Санкт-Петербург

2009

Содержание

## *Введение и постановка задачи*

Закон распределения богатства по Парето, который на практике наблюдается во многих странах, предполагает довольно большую разницу в величине богатства. Например, в США наиболее обеспеченные представители населения (составляют около 1% от общей численности) обладает приблизительно 40% от суммарного богатства общества. Что лежит в основе такого неравенства? Ответ на этот вопрос имеет глубокое политическое, социальное и философское значение. Далее в работе будет показано, что Парето распределение богатства является следствием фундаментального свойства процесса капиталовложения – этот процесс является стохастическим мультипликативным процессом. Кроме того, распределение Парето подразумевает, что неравенство вызвано прежде всего случайными процессами.

Этот результат близко связан с понятием эффективности рынка и может иметь прямое значение относительно экономической роли и социальной необходимости неравенства богатства. Также будет показано, что распределение богатства Парето может объяснить Леви распределение доходности акций, которое было загадкой для исследователей в течение многих лет. Таким образом, Парето распределение богатства, понятие эффективности рынка и распределение Леви доходности акций близко взаимосвязаны между собой.

В данной работе мы остановимся на трех, на первый взгляд, несвязанных проблемах:

1) распределения богатства и его неравенстве;
2) эффективности рынка: успехи в процессе капиталовложения вызваны существованием у некоторых инвесторов способности выбора оптимального времени осуществления сделки купли-продажи по ценным бумагам (специфические инвестиционные способности) или удачи и провалы в капиталовложениях обусловлены только случайными процессами;
3) распределения доходности акций, и в частности, проблеме ”тяжелого” хвоста распределения Леви, открытое в 1963 году Мандельбротом и численно описанное в 1995 году Мантэнья, Стэнли и другими.

Далее будет показано, что, хотя на первый взгляд, перечисленные проблемы не связаны между собой (первая в экономике, а две другие в области финансов), но на самом деле между ними существует корреляция.

Распределение богатства Парето является следствием стохастической мультипликативной природы процесса инвестирования. Однако, выясняется, что распределение Парето имеет место только для эффективного рынка, который подразумевает, что инвестиционные успехи и провалы случайны. Таким образом, случайный процесс, а не специфические инвестиционные навыки, приводят к распределению богатства по Парето. Кроме того, данное распределение может объяснить Леви распределение доходности с “тяжелым хвостом”. В результате исследований будет установлена связь между параметрами Парето и Леви распределений ($\alpha_W$ и $\alpha_L$). Таким образом, Парето распределение богатства, эффективность рынка и распределение доходности по Леви тесно взаимосвязаны.

При исследовании распределения богатства можно выделить две отличительные области. В диапазоне с низким уровнем богатства его распределение может быть аппроксимировано логнормальным распределением. В диапазоне с высоким уровнем богатства распределение описывается законом Парето. В данной работе исследуется область высокого уровня богатства, характеризующаяся Парето распределением. Данная интервал крайне важен с точки зрения исследования, так как он характеризуется относительно маленькой долей населения (обычно составляет около 5% от численности), на которую приходится большая долю суммарного богатства.

В конце 19 века Парето обнаружил, что область с высоким уровнем богатства не подчиняется логнормальному распределению. Распределение богатства было описано с помощью функции плотности вероятности:

$$P(W) = CW^{-(1+\alpha)} \text{ для } W \geq W_0 \qquad (1)$$

где W – богатство, P(W) – функция плотности, $W_0$ – нижняя граница богатства, для значений ниже которого справедливо логнормальное распределение, C – константа, известная как постоянная Парето. Процесс накопления богатства носит стохастический мультипликативный характер, то есть это процесс, в котором значение элемента на каждом шаге умножается на случайную величину. Основным различием между мультипликативным и аддитивным процессами является то, что в аддитивных процессах (например, в случайных блужданиях) изменения в значениях не зависят от самого значения элемента, тогда как в мультипликативных процессах изменения пропорциональны первоначальным значениям.

В работе утверждается, что мультипликативная природа процесса капиталовложения – причина для наблюдаемого на практике Парето распределения богатства. Действительно, исходное произвольное невырожденное распределение богатства, будучи стохастически мультипликативным и однородным процессом, в конечном результате будет подчиняться закону распределения по Парето. Однородность процесса подразумевает, что у всех инвесторов одинаковые способности к инвестированию. Эта идея близко связан с концепцией эффективного рынка: на эффективном рынке не предполагается существование инвесторов, которые последовательно обыгрывают своих конкурентов. Также будет доказано, что неоднородные мультипликативные процессы приводят к распределению богатства, отличному от Парето. Таким образом, распределение Парето подразумевает эффективность рынка.

### *1. Стохастический мультипликативный процесс. Распределение Парето*

Стохастический мультипликативный процесс накопления богатства задаётся функцией:

$$W_i^{t+1} = W_i^t \cdot \tilde{\lambda}_i^t \qquad (2)$$

где $W_i^t$ - богатство i-го инвестора в момент времени t,

$\tilde{\lambda}_i^t$ - стохастическая составляющая, имеющая некоторое распределение $g_i(\tilde{\lambda})$.

Индекс i в $g_i(\tilde{\lambda})$ возникает из-за того, что в общем случае, каждый инвестор может иметь своё собственное распределение доходности.

Для людей с высоким уровнем богатства его приращение, главным образом, происходит из-за финансовых вложений, и поэтому оно типично мультипликативно. Для людей с более низким уровнем богатства основой его изменения является, в основном, зарплата и изменения уровня потребления, которые имеют аддитивный, а не мультипликативный характер.

В работе рассматривается моделирование динамики высокого уровня богатства. Есть множество способов, с помощью которых можно было бы смоделировать разделяющую границу между данными областями. Мы начнём с рассмотрения самой простой модели, в которой есть чёткая граница между этими двумя областями. Специфика моделирования границы не повлияет на общие результаты модели динамики высокого уровня богатства.

Введём некоторый пороговый уровень богатства $W_0$, выше которого динамика изменения богатства будет описываться стохастическим мультипликативным процессом, например, уравнением вида (2). Предполагается, что только люди с богатством, превышающим уровень $W_0$, будут участвовать в процессе инвестирования. Формально, это ограничение может быть описано следующим образом для любых i и t:

$$W_i^t \geq W_0 \qquad (3)$$

В случае, когда существует в целом тенденция к уменьшению уровня богатства, нижняя граница $W_0$ может быть определена абсолютной величиной. Однако, мы можем ожидать тенденцию увеличения уровня богатства (например, из-за инфляции или из-за темпа экономического роста). Таким образом, определение нижней границы как абсолютной величины становится бессмысленным, и в таком случае естественным способом определения границы $W_0$ будет использование понятия среднего богатства. Тогда нижняя граница $W_0$ находится по формуле $W_0 = \omega \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i^t$, где N - число инвесторов, $\omega$ - граница, заданная абсолютной величиной $(\omega < 1)$.

При изменении уровня богатства индивидов, они могут переходить из группы с низким уровнем богатства в группу с высоким и наоборот. Так как мы не рассматриваем динамику богатства ниже граничного уровня, то в качестве упрощения будем считать, что рынок достиг равновесия, переход из одной группы в другую не возможен, то есть число индивидов, участвующих в процессе инвестирования, постоянно. Вышеупомянутое предположение упрощает анализ, но получаемые результаты напрямую зависят от сделанного упрощения. В однородном процессе все инвесторы имеют одинаковое распределение отдачи от инвестиций, то есть:

$$W_i^{t+1} = W_i^t \cdot \tilde{\lambda}_i^t,\ \mathrm{W}_\mathrm{i}^\mathrm{t} \ge W_0,\ \mathrm{g}_\mathrm{i}(\tilde{\lambda}) = g(\tilde{\lambda}) \text{ для всех i.} \qquad (4)$$

Отметим, что, хотя все инвесторы имеют одно и то же распределение отдачи от инвестиций, $g(\tilde{\lambda})$, $\tilde{\lambda}$ определены для каждого инвестора отдельно. Одним из объяснений этого может являться тот факт, что инвесторы могут иметь одну и ту же цель, но различные ожидания, и в результате этого формируют различные портфели ценных бумаг. В каждый момент времени инвесторы будут получать различную отдачу от совершённых инвестиций, но если они выбирают из одного набора ценных бумаг и имеют одинаковое оптимальное время осуществления сделки по финансовым инструментам, то они получат отдачу от вложений согласно одному и тому же распределению. Инвестор, с распределенными во времени высокими значениями $\lambda$, будет более удачлив, и станет богаче остальных. Таким образом, при однородных процессах инвесторы имеют одинаковое распределение доходности, и таким образом причиной различия в богатстве является случайная составляющая.

Теорема 1 показывает, что Парето распределение богатства – логичное следствие гомогенных мультипликативных процессов.

*Теорема 1* :

Для любого начального распределения богатства и нетривиального распределения отдачи (с ненулевым риском, т.е. $Var(\lambda) > 0$) процесс накопления богатства, заданный формулой (4), имеет распределения богатства, приближенное к распределению Парето.

*Доказательство*:

Обозначим совокупное распределение богатства в момент времени t и в момент времени $t_1$ соответственно F(W,t) и F(W,$t_1$). Так как богатство i-го инвестора меняется от $W_i^t$ в момент t до $W_i^t \cdot \widetilde{\lambda}_i^t$ в момент $t_1$, то есть $W_i^{t+1} = W_i^t \cdot \widetilde{\lambda}_i^t$ (см. (1)), то совокупное распределение богатства в момент времени t+1 может быть задано как:

$$F(W,t+1) = \int_0^{+\infty} F(\frac{W}{\lambda},t) \cdot g(\lambda) d\lambda \qquad (5)$$

Уравнение (5) описывает процесс, в котором вероятность F(W) в момент времени t+1 является взвешенным средним вероятностей для $\frac{W}{\lambda}$ в момент времени t. Таким образом, начиная с произвольной плотности вероятности F(W,0), распределение F(W) стремится к непрерывному сглаживающемуся процессу. При наличии эффективной нижней границы богатства ($W_i^t \geq W_0$), этот непрерывно сглаживающийся процесс становится аналогом стремления к пределу. Такой процесс известен как приближение распределения F(W) к стационарному распределению. Для ограниченного стационарного распределения богатства имеем F(W,t+1) = F(W,t) = F (W), и (5) преобразуется:

$$F(W) = \int_0^{+\infty} F(\frac{W}{\lambda},t) \cdot g(\lambda) d\lambda \qquad (6)$$

Дифференцируя по W, получаем функцию плотности распределения:

$$f(W) = \int_0^{+\infty} f(\frac{W}{\lambda},t) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot g(\lambda) d\lambda \qquad (7)$$

Для того чтобы показать, что распределение Парето - решение (7), заменим функцией плотности распределения Парето (1) f(W) в (7), и получим:

$$\frac{\alpha k^{\alpha}}{W^{\alpha+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha k^{\alpha}}{(W/\alpha)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot g(\lambda) d\lambda = \frac{\alpha k^{\alpha}}{W^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha} g(\lambda) d\lambda \qquad (8)$$

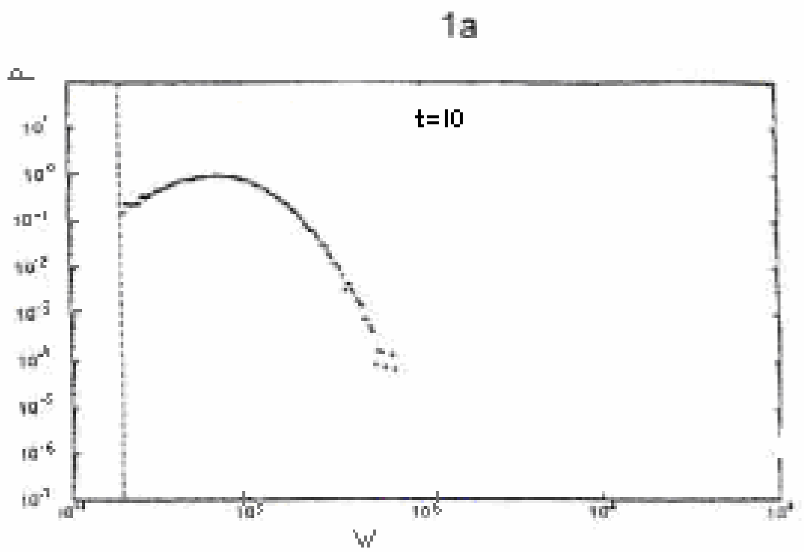
Таким образом, очевидно, что распределение Парето с $\alpha$, удовлетворяющим $\int_0^{+\infty} \lambda^{\alpha} g(\lambda) d\lambda = 1$, является решением (6).

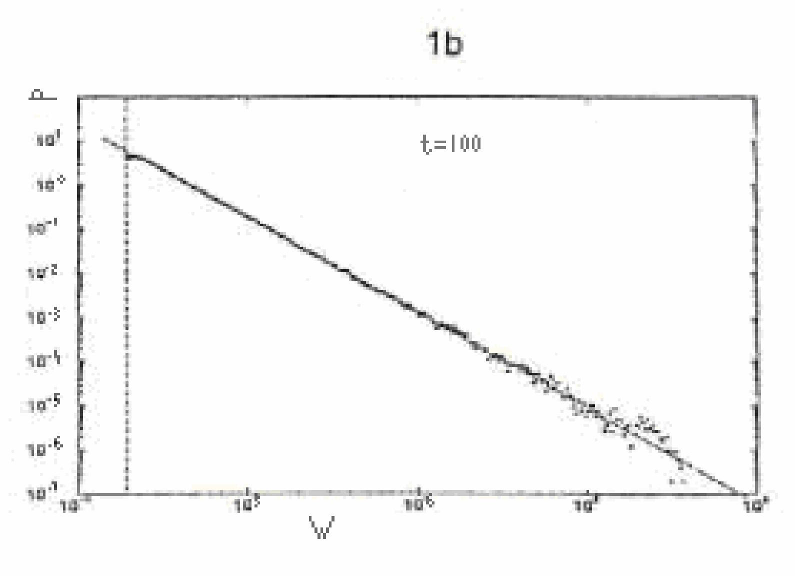
Моделирование однородного мультипликативного процесса накопления богатства с помощью метода Монте Карло иллюстрирует результаты Теоремы 1, и позволяет провести оценку времени, необходимого и достаточного для приближения распределения богатства к распределению Pareto. Пусть все инвесторы имеют одинаковый начальный уровень богатства $100 000. Распределение отдачи $g(\tilde{\lambda})$ имеет вид:

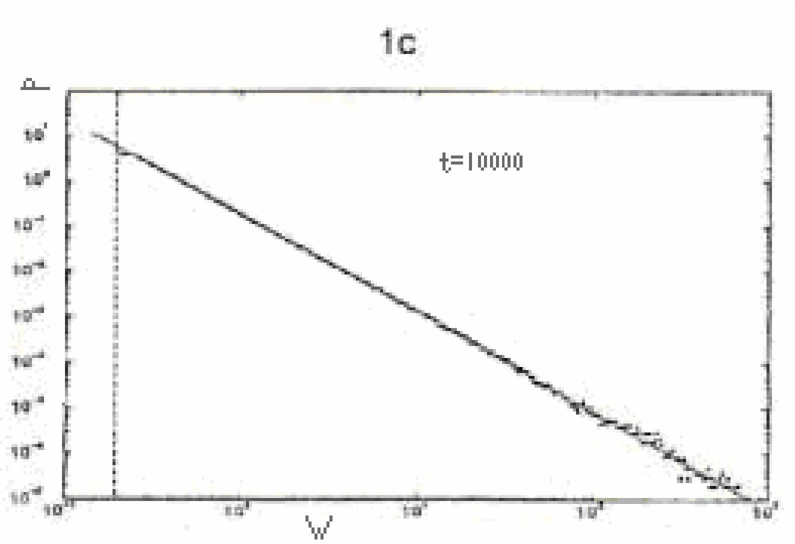
| $\lambda$ | p |
|---|---|
| 1,10 | 0,5 |
| 0,95 | 0,5 |

то есть в каждый момент времени инвесторы равновероятно могут получить 10% или потерять 5%. Нижняя граница богатства ($W_0$) установлена в размере 20% от среднего значения богатства. Распределение богатства было определено для разных временных интервалов (см. график 1). Вертикальная линия на уровне 0,2 представляет собой нижнюю границу богатства $W_0$. Отметим, что теоретическое распределение Парето (см. (1)) линейно в двойной логарифмической шкале. Распределение после 10 инвестиционных периодов (график 1a) всё ещё довольно симметрично, и сосредоточено вокруг значения среднего богатства (1,0 на горизонтальной оси). Однако после 100 периодов распределение богатства становится близким к распределению Парето (график 1b), и для большего количества периодов таким и остается. На графике 1с представлено распределение богатства после 10000 периодов.

*График 1*






Однородность процесса ($g_i(\tilde{\lambda}) = g(\tilde{\lambda})$ для всех i) подразумевает эффективный рынок: ни один инвестор не в состоянии достигнуть распределения отдачи от инвестиций, которое будет предпочтительнее $g(\tilde{\lambda})$. В следующем разделе будет показано, что это условие является необходимым условием для появления распределения Парето. Если рынок неэффективен и $g_i(\tilde{\lambda}) \neq g(\tilde{\lambda})$, то распределение богатства будет отличаться от Парето распределения.

### *2. Неоднородные мультипликативные процессы и эффективность рынка*

В качестве первого шага к анализу общей неоднородной модели ($g_i(\tilde{\lambda}) \neq g_j(\tilde{\lambda})$), проанализируем случай двух различных подгрупп инвсторов. Рассмотрим рынок, на котором часть инвесторов имеет “нормальные” способности к инвестированию и имеет распределение доходности $g_{normal}(\tilde{\lambda})$, в то время как меньшинство "умных" инвесторов в состоянии использовать в своих интересах неэффективность рынка и получают в результате доходность согласно распределению $g_{\mathrm{smart}}(\tilde{\lambda})$. При этом $\sigma(g_{\mathrm{normal}}) = \sigma(g_{\mathrm{smart}})$ и $E(g_{\mathrm{normal}}) < E(g_{\mathrm{smart}})$. Получающееся распределение богатства будет отличаться от распределения Парето, как доказано в Теореме 2.

*Теорема 2:*

В случае существования двух различных подгрупп инвесторов, как описано выше, распределение богатства сходится к распределению, которое **не** соответствует распределению Парето.

*Доказательство:*

В течение некоторого времени "умные" инвесторы становятся в среднем более богатыми, чем "нормальные" инвесторы. Поскольку "нормальные" инвесторы становятся относительно более бедными, все больше их количество пересечёт нижнюю границу богатства, $W_0$, и уйдет с рынка. В таком случае можно предположить, что "нормальные" инвесторы полностью исчезнут, однако, этого не произойдет из-за существующего притока инвесторов на рынок. Они берутся из числа тех, чьё богатство было ниже уровня $W_0$, но они успели приобрести достаточное богатство для того, чтобы участвовать в инвестиционном процессе.

Сделаем предположение о том, что рынок находится в устойчивом состоянии, при котором приток новых инвесторов уравновешивается оттоком инвесторов, уходящих с рынка. Это предположение упростит анализ, но не будет влиять на конечный результат.

Некоторые новые инвесторы, выходящие на рынок, относятся к "нормальному" типу. Так как число "нормальных" инвесторов на рынке снижается, то также ведёт себя и их доля в оттоке с рынка. В конечном счете, баланс будет достигнут тогда, когда отток инвесторов каждого типа станет соответствовать притоку того типа, и размер каждой подгруппы сойдется к определенному (среднему) значению.

Поскольку структура каждой подгруппы является однородной, то распределение богатства каждой подгруппы описывается уравнением (4). Из Теоремы 1 следует, что богатство каждой подгруппы будет разделено между членами каждой из подгрупп согласно распределению Парето. Таким образом, распределение богатства среди "нормальных" инвесторов будет иметь вид:

$$P_{\mathrm{normal}}(W) = C_{normal} W^{-(1+\alpha_{normal})} \tag{9}$$

и распределение богатства среди "умных" инвесторов:

$$P_{\mathrm{smart}}(W) = C_{normal} W^{-(1+\alpha_{smart})} \tag{10}$$

Оба распределения будут распределениями Парето, но с различными параметрами С и α. Поскольку в среднем богатство “умного” инвестора превышает богатство “нормального”, то $\alpha_{smart} < \alpha_{normal}$. Совокупное распределение богатства имеет вид:

$$\mathrm{P(W)} = \mathrm{P}_{\mathrm{normal}}(W) + \mathrm{P}_{\mathrm{smart}}(W) = C_1 W^{-(1+\alpha_{normal})} + C_2 W^{-(1+\alpha_{smart})} \qquad (11)$$

что не является распределением Парето.

Результат Теоремы 2 может быть с помощью метода математической индукции обобщен для случая с несколькими подгруппами: в этом случае распределение богатства в пределах каждой подгруппы будет Парето распределением, но в силу того, что каждая подгруппа характеризуется своим значением параметра α, совокупное распределение не будет Парето.

Моделирование с помощью метода Монте Карло может помочь проиллюстрировать результаты Теоремы 2, и подтвердить, что этот результат справедлив в общем случае для большого числа подгрупп. График 2 показывает распределение богатства в случае с двумя группами инвесторов, где группа "нормальных" инвесторов имеет параметры $\mathrm{g}_{\mathrm{normal}}(\tilde{\lambda})$:

| $\lambda$ | p |
|---|---|
| 1,10 | 0,5 |
| 0,95 | 0,5 |

а группа "умных" инвесторов с параметрами для $\mathrm{g}_{\mathrm{smart}}(\tilde{\lambda})$:

| $\lambda$ | p |
|---|---|
| 1,11 | 0,5 |
| 0,96 | 0,5 |

На графике 2 видно, что несмотря на то, что распределение богатства внутри каждой группы подчиняется закону распределения Парето ($\alpha_{normal}$ =1,67, $\alpha_{smart}$ = 0,63), совокупное распределение (сплошная линия) не ведёт себя таким образом. Общее распределение выпукло в то время, как распределение Парето должно быть линейным на логарифмической шкале.

Аналогичное выпуклое распределение было получено для общего случае с несколькими подгруппами (см. график 3). Каждый инвестор имел собственное распределение богатства $\mathrm{g}_{\mathrm{i}}(\tilde{\lambda})$ нормально распределенное со стандартным отклонением 20%. Математические ожидания у распределений всех инвесторов также различны.

Критерий Колмогорова-Смирнова не позволяет принять гипотезу о том, что полученное общее распределение богатства – распределение Парето. Для распределения богатства 1000 инвесторов было получено значение критерия D=0,310, которое превышает в несколько раз критическое значение $D_{кр} = \frac{1,63}{\sqrt{1000}} = 0,052$, достаточное для того, чтобы отклонить гипотезу о Парето распределении с 99% вероятностью.

*График 2*

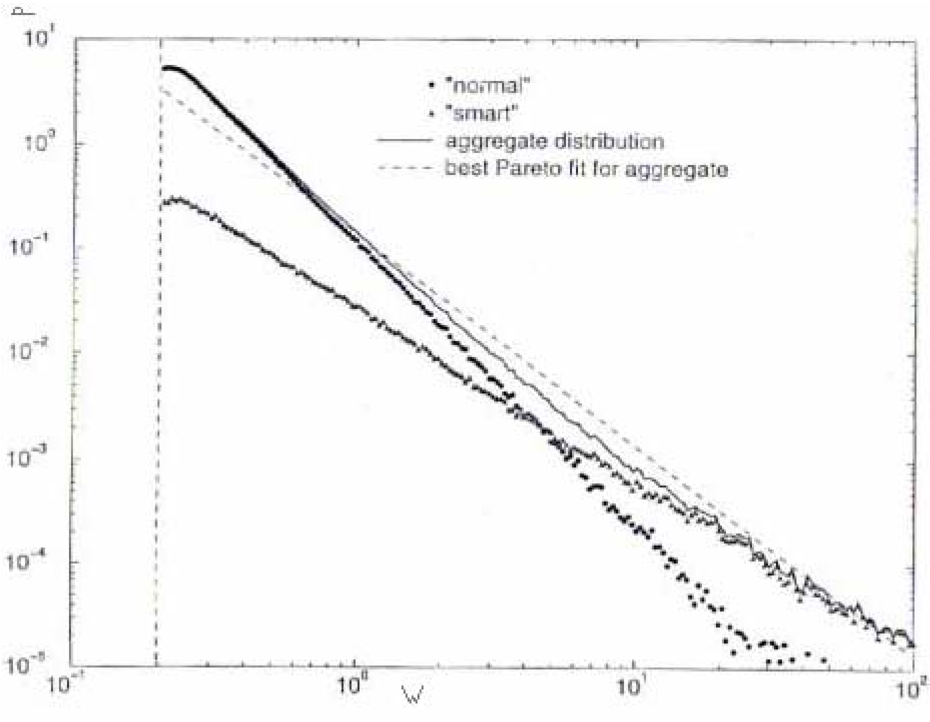
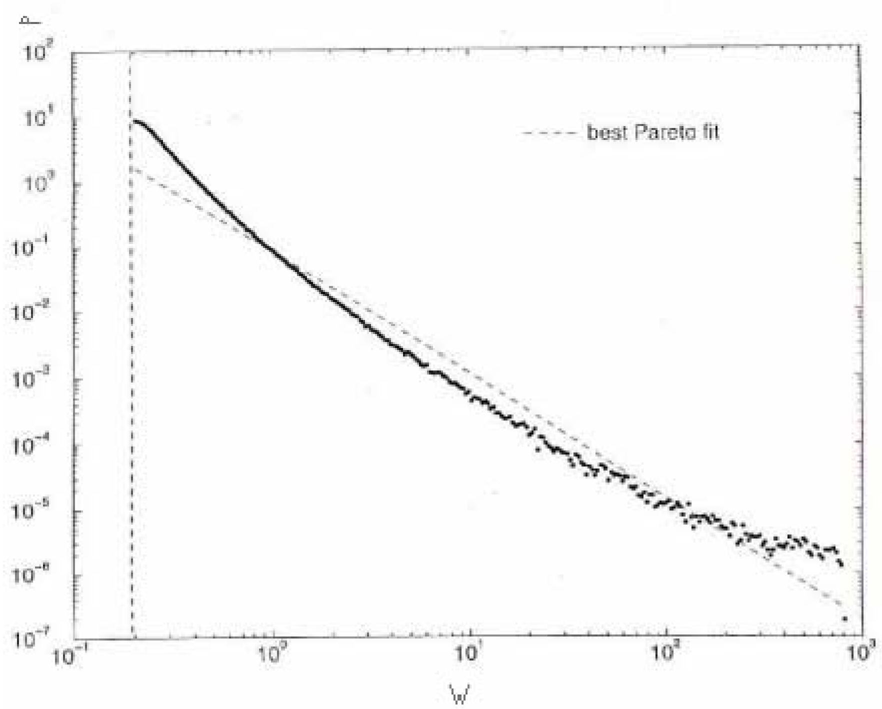



*График 3*




Несмотря на то, что Парето распределение богатства не может быть полностью принято на неэффективном рынке с дифференцированными инвестиционными способностями инвесторов, но это не означает, что распределение Парето может быть статистически отвергнуто. В 2001 году Леви использовал численный анализ, в рамках которого показал, что распределение Парето не может быть статистически отвергнуто, если в среднем годовая отдача среди разных подгрупп инвесторов находится в пределах 1%. Таким образом, на практике наблюдаемое распределение богатства (близкое к распределению Парето) не подразумевает совершенно эффективный рынок, но оно налагает довольно жесткое ограничение на неэффективность рынка.

### *3. Парето распределение богатства и Леви распределение доходности акций*

В этой части будет показано, что распределение богатства по Парето может объяснить Леви распределение краткосрочной доходности акций. Теоретический результат относительно распределения доходности акций и его взаимосвязь с распределением богатства представлен в Теореме 3. Выводы данной теоремы будут использованы при эмпирическом доказательстве.

#### *3.1 Леви распределение доходности акций. Обзор*

Известно, что распределение доходности акций, особенно в короткие интервалы времени, плохо описываются с помощью нормального распределения. Эти распределения характеризуются “тяжелым хвостом”. В 1963 году Мандельброт предложил точную функциональную форму для распределений доходности акций. Точнее, он предположил, что функция логарифма доходности распределена согласно симметрическому распределению вероятности Леви, определяемому как:

$$L^{\gamma}_{\alpha_L}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \exp(-\gamma \cdot \Delta t \cdot q^{\alpha_L}) \cdot \cos(qx)dq \qquad (12)$$

где $L^{\gamma}_{\alpha_L}(x)$ - функция плотности вероятности Леви в x, $\alpha_L$ - показатель степени, характерный параметр распределения, γΔ t - общий коэффициент пропорциональности, γ - коэффициент пропорциональности для Δt=1, q – интегрируемая переменная.

В первые несколько лет после публикации статья Мандельброта была положительно воспринята. Однако последующие работы поставили под сомнение гипотезу распределения Леви, и до 90-ых к данным исследованиям не возвращались. Более глубокий анализ краткосрочных доходов показал, что динамика цен, логарифм доходности и нормы прибыли хорошо описываются усеченным распределением Леви.

Это не острое усечение в обычном математическом смысле, а скорее, оно описывает с некоторого уровня гладкий спад распределения Леви. Маньэнья и Стэнли в 1995 году при анализе линейного графика движения цен $S\&P_{500}$ индексов обнаружили, что динамика хорошо описывается распределением Леви до шести стандартных отклонений, взятых от среднего (в обоих направлениях).

Возникает вопрос: почему отдачи от ценных бумаг имеет столь специфичное распределение? В ответе на этот вопрос может помочь Парето распределение богатства.

### *3.2 Парето распределение богатства и Леви распределение доходности*

Распределение Леви описывает распределение доходности в краткосрочных периодах. Сформулированная ниже Теорема 3 показывает, что в случае распределения богатства инвесторов согласно распределению Парето, и пропорциональном (в стохастическом смысле) богатству инвестора результатов торгов на цену акций, краткосрочные доходности будут распределены согласно распределению Леви. Предположение о пропорциональности между богатством инвестора и воздействием торговли инвестора на цену кажется логичным: интуитивно понятно, что действия инвестора с богатство в $100 миллионов, в среднем, затронут цены примерно в 10 раз сильнее, чем аналогичные действия инвестора, но обладающего только $10 миллионами. Это предположение также согласуется с тем, что ценовое воздействие торговли примерно пропорционально объему торговли, особенно для отраслей большого объема, и с моделями с постоянным значением относительного неприятия риска, которые подразумевают, что инвесторы принимают решения согласно пропорциям их богатства (например, работы Леви и Марковица, Самуэльсона). Точнее, если инвесторы принимают решения относительно доли их богатства, то объем торговли стохастически пропорционален богатству инвестора.

*Теорема 3*:

Если богатство инвесторов распределено согласно закону Парето с параметром распределения $\alpha_W$, и влияние на цену торгов каждого инвестора стохастически пропорционально богатству инвестора, то получающееся распределение доходности (и распределение динамики цен) задаются Леви распределением с параметром $\alpha_L = \alpha_W$.

Теорема 3 не только даёт объяснение Леви распределения доходности, но также определяет параметр Леви распределения $\alpha_L$ как равный параметру Парето распределения $\alpha_W$. Данное предположение на первый взгляд не очевидно, так как оба параметра относятся к различным областям исследований и априорно считаются независимыми.

## ***4. Эмпирическое доказательство***

В этой главе будет описан алгоритм для эмпирического расчета параметров $\alpha_L$ и $\alpha_W$ для трех стран: США, Великобритания, и Франция.

### 4.1 Оценка $\alpha_L$

Для оценки $\alpha_L$ используем методологию Мантэнья и Стэнли (1995 г). Они обозначают плотность симметрического распределения Леви (см. (12)) в 0 через $p_0$, и используют соотношение (13) для оценки $\alpha_L$:

$$p_0 \equiv L^{\gamma}_{\alpha_L}(0) = \frac{\Gamma(1/\alpha_L)}{\pi \alpha_L (\gamma \Delta t)^{1/\alpha_L}} \tag{13}$$

где Γ – функция гамма-распределения, Δt - горизонт, для которого вычисляются нормы прибыли, и γ - коэффициент пропорциональности для Δt = 1. Таким образом, плотность вероятности в 0 падает до $\Delta t^{-\frac{1}{\alpha_L}}$. Мантэнья и Стэнли оценивают плотность в 0 как $p_0$ для различных временных интервалов Δt. Чтобы оценить $\alpha_L$, они используют регрессию:

$$\log(p_0(\Delta t))_i = A + B\log(\Delta t)_i + \varepsilon_i \tag{14}$$

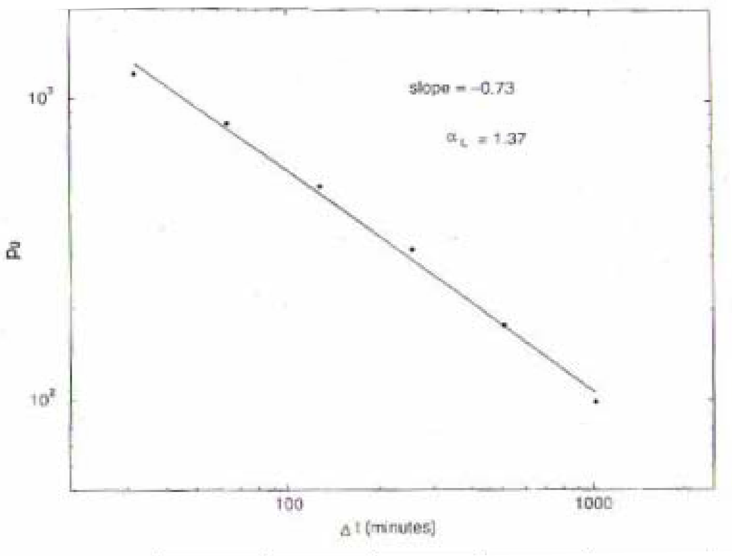
и оценивают $\alpha_L$ как $-\frac{1}{\hat{B}}$.

Используем эту методику. Наши данные состоят из: $S\&P_{500}$: 1780752 значений индекса за 1990-1995, $FTSE_{100}$: 75606 индексов с января 1997 по август 1997, $CAC_{40}$: 234501 значения индекса в 1996 году.

Также как Мантэнья и Стэнли для каждого из этих рядов оценим плотность $p_0(\Delta t)$ по всему набору данных, вычисляя нормы прибыли для интервалов Δt. Мы считаем число норм прибыли в пределах диапазона [−0,0001;0,0001] и делим это число на общее количество наблюдений, чтобы получить вероятность нормы прибыли в этом диапазоне. Далее делим полученный результат на размер диапазона (0,0002), чтобы получить плотность вероятности в 0 – $p_0$. Повторяем эту процедуру для различных временных интервалов осуществления выборки Δt. Полученные значения $p_0(\Delta t)$ представлены на графиках 4, 6 и 7.

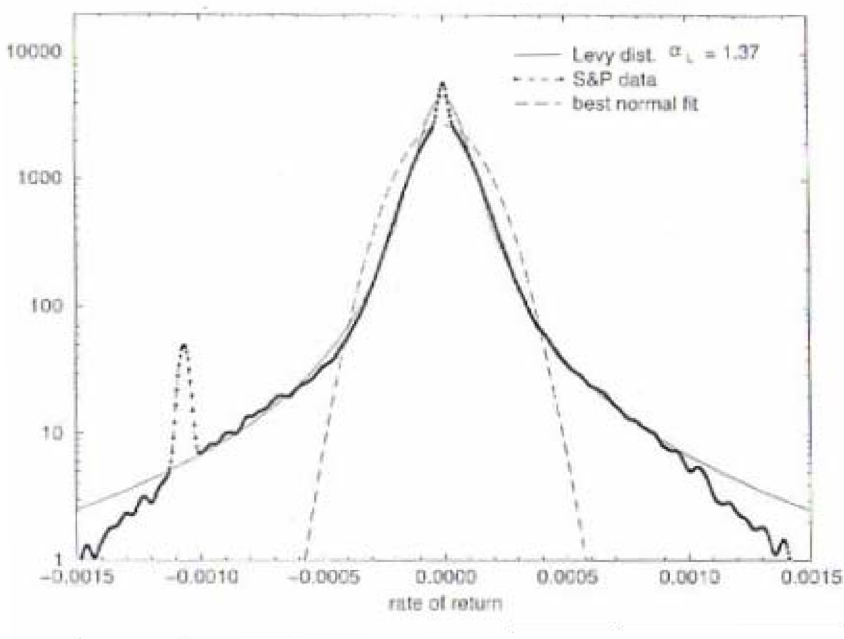
Для оценки $\alpha_L$ воспользуемся уравнением регрессии (14). Для $S\&P_{500}$ $\alpha_L$=1,37 (график 4). Стандартное отклонение для этой оценки равно 0,04, и коэффициент корреляции −0,987. Полученное по нашей оценке значение параметра $\alpha_L$ очень близко к полученному Мантэнья и Стэнли значению $\alpha_L$=1,40 для $S\&P_{500}$ за период 1984-1989.

*График 4*




Чтобы проверить, что эмпирическое распределение нормы прибыли действительно хорошо описывается симметрическим распределением Леви с $\alpha_L$=1,37, сравним эти распределения (см. график 5). Эмпирическое распределение вычислено для нормы прибыли за 1-минутные интервалы времени. График 5 показывает насколько близкими получились эмпирическое и теоретическое распределения для нормы прибыли в интервале $\pm$0,001 (или 0.1 %), что соответствует приблизительно шести стандартным отклонениям от среднего.

*График 5*




Для $FTSE_{100}$ $\alpha_L$=1,08 (график 6). Стандартное отклонение составляет 0,03, коэффициент корреляции −0,996. Оцененное значение параметра распределения близко к $\alpha_L$=1,10, полученному Копиланом, Вонгом по данным $FTSE_{100}$ за 1993 год. Для $CAC_{40}$

$\alpha_L$=1,82 (график 7). Стандартная ошибка этой оценки 0,05, коэффициент корреляции −0,978.

*График 6*

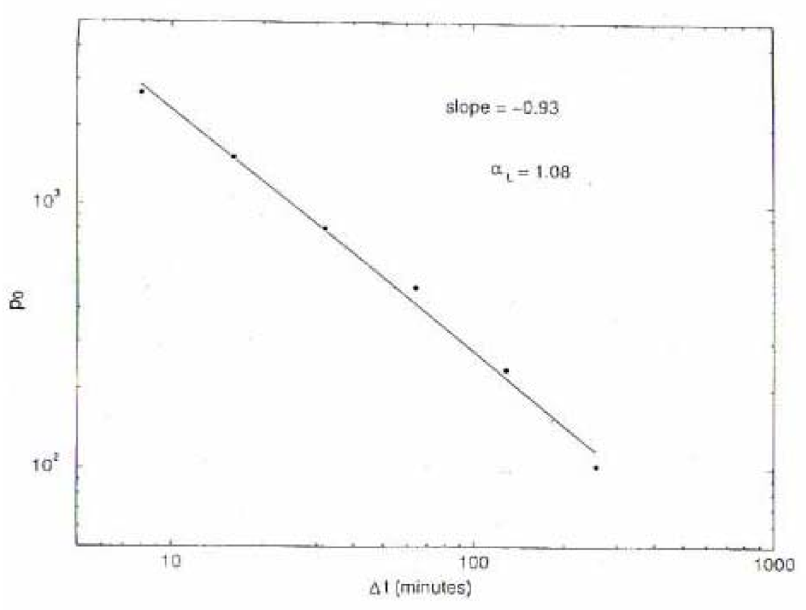
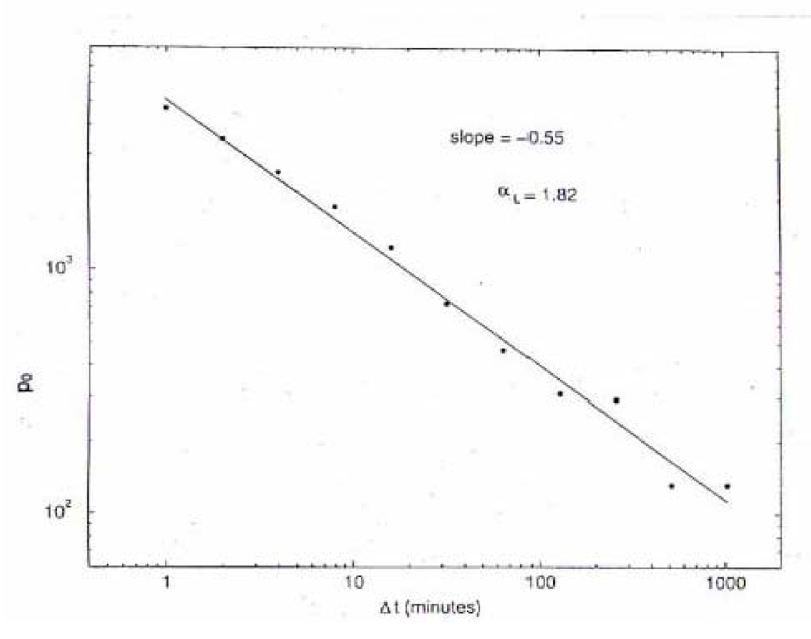



*График 7*




## *4.2 Оценка $\alpha_W$*

Оценка параметра $\alpha_W$ Парето распределения богатства требует данных о правом "хвосте" распределения, то есть данных о богатстве самых обеспеченных людей. Французский сборник Quid предоставляет информацию о богатстве наиболее обеспеченных 162370 людям Франции. Эти данные находятся в агрегированной форме, то есть данные, о числе людей с богатством, превышающим некоторый определенный уровень. Согласно закону Парето (см. (1)), число людей с богатством, превышающим определенный уровень $W_x$, должно быть пропорциональным $W_x^{-\alpha_W}$ :

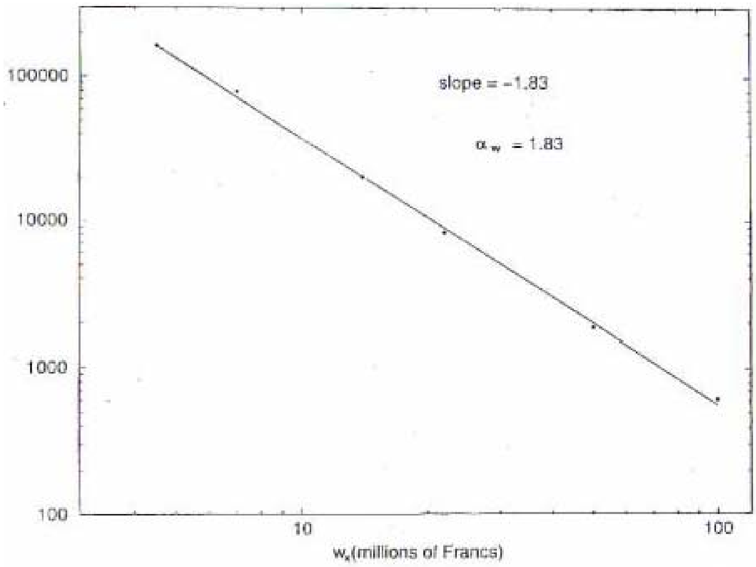
$$N(W > W_x) = N \int_{W_x}^{+\infty} f(W) dW = N \cdot C \int_{W_x}^{+\infty} W^{-(1+\alpha_W)} dW = \frac{N \cdot C}{\alpha_W} W_x^{-\alpha_W} \qquad (15)$$

где $N(W>W_x)$ - число людей с богатством, превышающим $W_x$, N – общее число индивидов. Если Парето распределение правомерно, то ожидается, что определяя $N(W>W_x)$, как функцию от $W_x$, наблюдаемые значения должны попасть на прямую линию с наклоном $-\alpha_W$. На графике 8 представлены данные французского сборника Quid. Видно, что эмпирическое распределение богатства согласуется законом Парето. Чтобы оценить $\alpha_W$ для Франции, используем регрессию:

$$\log(N(W > W_x))_i = A + B \log(W_x)_i + \varepsilon_i \ (16)$$

Абсолютное значение коэффициента наклона линии регрессии, которое является оценкой для $\alpha_W$, составляет 1,83 (стандартное отклонение = 0,03, коэффициент корреляции = −0,999) (см. график 8).

*График 8*




Данные относительно самых богатых людей по США и Великобритании более детальны, но их меньше. Для этих стран изданы сборники с ранжированными по богатству данными наиболее обеспеченных людей (нескольких сотен). Используем методы, предложенные Леви и Соломоном, для оценки коэффициента $\alpha_W$. Распределение богатства по Парето с параметром $\alpha_W$ подразумевает следующее соотношение между положением (рангом) человека в иерархии богатства и его богатством:

$$W(n) = An^{-\frac{1}{\alpha_W}} \qquad (17)$$

где n - ранг (с т.з. богатства), W – величина богатства. Константа A задаётся по формуле $A = (\frac{\alpha_W}{NC})^{-\frac{1}{\alpha_W}}$, где N - общее численность населении, C – постоянная в уравнении (1).

Для США данные взяты из Forbes от 1997 (список из 400 богатейших людей). По регрессии:

$$\log(W(n))_i = A + B\log(n)_i + \varepsilon_i \tag{18}$$

получаем коэффициент наклон $-0{,}74 = -\frac{1}{\alpha_W}$, следовательно $\alpha_W$ =1,35 для США. Стандартное отклонение данной оценки составит 0,005. Полученная оценка $\alpha_W$ =1,35 для США близка к оценке 1,35≤ $\alpha_W$ ≤1,42, которая была получена Вольфом для доли богатых от общей численности населения США в 1%, 5% и 10%.

Для Великобритании исходные данные берутся из Sunday Times Rich за 1997. Полученные данные представлены на графике 10. Мы получаем наклон линии регрессии −0,94, который соответствует значению $\alpha_W$ =1,06 (стандартное отклонение 0,004).

Полученные результаты представлены в Таблице 1. Мы видим тесную связь между параметрами $\alpha_W$ и $\alpha_L$, полученными в результате оценки по трем странам.

*Таблица 1*

| | $\alpha_L$ | $\alpha_W$ |
|---|---|---|
| U.S. | 1.37 ± 0.04 | 1.35 ± 0.005 |
| U.K. | 1.08 ± 0.03 | 1.06 ± 0.004 |
| France | 1.82 ± 0.05 | 1.83 ± 0.030 |

*График 9*

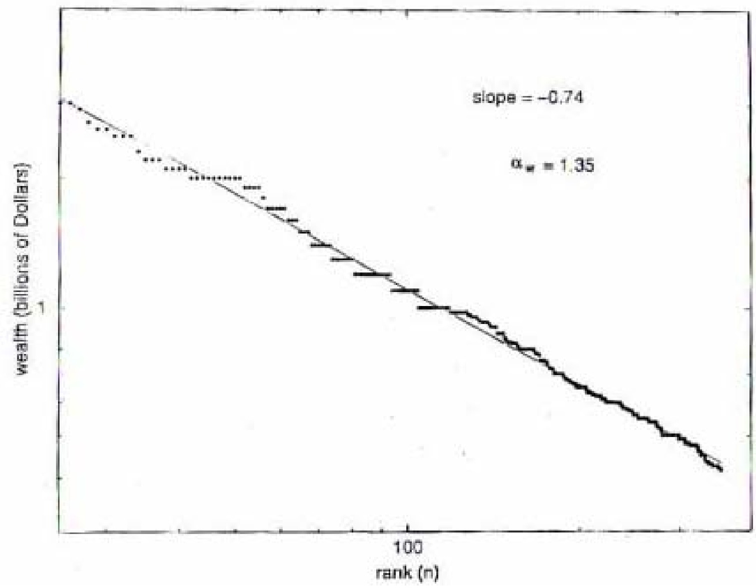
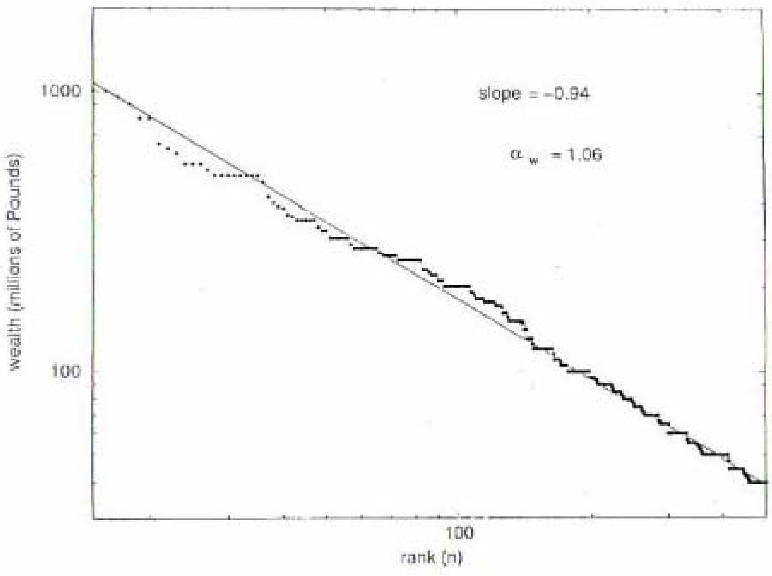


*График 10*



slope = -0.94
$\alpha_w$ = 1.06
1000
100
wealth (millions of Pounds)
100
rank (n)

## *Выводы*

Процесс накопления богатства через капиталовложения является стохастическим и мультипликативным по своей природе. В работе показано, что гомогенные вероятностные процессы приводят к распределению богатства по закону Парето. Таким образом, распределение богатства по Парето, и вызванное им неравенство в распределении богатства в обществе, являются фундаментальным следствием свойств процесса капиталовложения. Неоднородные процессы, в которых у инвесторов есть специфичные инвестиционные навыки, приводят к распределению богатства, которое отлично от Парето распределения. Таким образом, распределение Парето предполагает, что случайная составляющая, а не специфичные навыки инвесторов, лежит в основе неравенства в диапазоне высокого богатства. Распределение Парето близко связано, с эффективностью рынка (точное распределение богатства по Парето возникает на эффективном рынке). На практике, некоторая степень неэффективности рынка может быть совместима с распределением Парето, в том смысле, что оно не может быть статистически отвергнуто. Однако, данное распределение налагает довольно жесткое ограничение на неэффективность рынка. Чем ближе распределение богатства к распределению Парето, тем жестче ограничение на эффективность рынка.

Распределение богатства по Парето может также объяснить хвост в Леви распределении краткосрочных доходностей. В работе показана связь между двумя, относящимися к различным областям, распределениям: распределение богатства является одним из главных объектов изучения в экономике, и распределение доходности ценных бумаг, которое играет важную роль в области финансов. Анализ приводит к прогнозу равенства параметра распределения Парето $\alpha_W$ параметру Леви распределения доходности $\alpha_L$. Эмпирическое исследование в США, Великобритании и Франции показывает поразительную взаимосвязь между этими априорно несвязанными параметрами (США: $\alpha_L$ = 1,37, $\alpha_W$ = 1,35; Великобритания: $\alpha_L$= 1,08, $\alpha_W$ =1,06; Франция: $\alpha_L$= 1,82, $\alpha_W$ = 1,83).

### *Список литературы*


1. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.10.1356
2. http://en.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9vy_distribution
3. http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BE