ВЛИЯНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДНОСТИ РИСКОВЫХ АКТИВОВ ОТ НОРМАЛЬНОГО НА ИНВЕСТИЦИОННЫЙ СПРОС

И.Г. НАТАЛУХА,
кандидат экономических наук
Кисловодский институт экономики и права

Финансовые рынки в современных условиях (особенно зарождающиеся рынки, к числу которых относится и российский фондовый рынок) характеризуются различного рода нестационарными, кризисными и катастрофическими явлениями [1 – 4]. В таких условиях традиционная портфельная теория [5, 6] часто оказывается неадекватной и неспособной объяснить как поведение финансовых временных рядов, так и несоответствие практических рекомендаций финансовых аналитиков по размещению рисковых активов теоретическим предсказаниям [7]. Фундаментальное значение имеет проблема анализа ситуации, когда распределение доходности финансовых инструментов существенно отклоняется от нормального. Имеются многочисленные свидетельства того, что распределение доходности рисковых активов на финансовых рынках характеризуется значительными асимметрией и эксцессом (так называемые «жирные» хвосты распределений, когда на концах хвостов, т.е. в области очень больших и очень малых доходностей, имеет место повышенная плотность распределения по сравнению с нормальным, а также «лептоэксцесс» – островершинность и «платоэксцесс» – плосковершинность). Поскольку модель оценки финансовых активов (САРМ) и большая часть методов эконометрического анализа предполагают, что ожидаемые доходности подчиняются нормальному или логнормальному распределению, возникает проблема распространения этих теорий и методов на ситуации, когда доходности активов не распределены нормально.

В настоящей работе получено приближенное аналитическое выражение, определяющее портфельный выбор («спекулятивный» спрос) инвестора как функцию математического ожидания, дисперсии, асимметрии и эксцесса распределения избыточной доходности рисковых активов. Полученное решение показывает, как отклонения распределения доходности влияют на инвестиционный спрос на рисковые активы. Предполагаем, что инвестор максимизирует свою ожидаемую полезность в следующем периоде

$$\frac{\max E_t u(W_{t+1})}{\theta_t},$$

инвестируя средства в безрисковый актив (банковский счет) и один рисковый актив, так что для капитала инвестора можно записать следующее уравнение

$$W_{t+1} = W_t[\theta_t(R_{1,\,t+1} - R_f) + R_f],$$

где E_t – оператор математического ожидания, $u(\cdot)$– функция полезности, W_t и W_{t+1} – начальный и конечный капиталы инвестора, $R_{1,\,t+1}$ – доходность рискового актива, R_f – доходность безрискового актива, θ_t – вес рискового актива в портфеле инвестора.

В предположении о вогнутости функции полезности $u(\cdot)$ запишем следующее условие первого порядка, которому должно удовлетворять оптимальное решение

$$E_t[u'(W_{t+1})(R_{1,\,t+1} - R_f)] = 0\,. \qquad (1)$$

Решение этой статической (однопериодической) задачи определяет спекулятивный спрос инвестора на рисковый актив, соответствующий игнорированию инвестором изменения инвестиционных возможностей. Предполагая, что распределение доходности рискового актива имеет конечные моменты, разложим предельную функцию полезности инвестора $u'(W_{t+1})$ в ряд Тейлора в окрестности ожидаемого капитала в следующем периоде $E_t\cdot[W_{t+1}]$. Подставляя полученное разложение в условие первого порядка (1), получаем следующее уравнение

$$\begin{aligned}0 &= u^{(1)}(E_t[W_{t+1}])x_t + u^{(2)}(E_t[W_{t+1}])W_t\theta_t m_{2t} + \\ &+\frac{1}{2}u^{(3)}(E_t(W_{t+1}])W_t^2\theta_t^2\times(m_{3t}+m_{2t}x_t) + \qquad (2)\\ &\frac{1}{6}u^{(4)}(E_t[W_{t+1}])W_t^3\theta_t^3(m_{4t}+m_{3t}x_t)+O(\theta_t^4),\end{aligned}$$

где $x_t = E_t R_{1,\,t+1} - R_f$.

Ожидаемая избыточная доходность рискового актива, m_{nt} – n-й центральный момент распределения доходности рискового актива $R_{1,\,t+1}$, а $u^{(n)}(\cdot)$ – n-я производная функции полезности.

Заметим, что традиционный результат портфельной теории, основанный на анализе математического ожидания и дисперсии распределения, следует из уравнения (2)в первом приближении:

$$\theta_t \approx -\frac{u^{(1)}(E_t[W_{t+1}])x_t}{u^{(2)}(E_t[W_{t+1}])W_t m_{2t}} = \frac{x_t}{\alpha m_{2t}}, \qquad (3)$$

где коэффициент

$$\alpha = -u^{(2)}W / u^{(1)}$$

представляет собой коэффициент относительного неприятия риска Эрроу-Пратта.

Дальнейший анализ проведем в предположении, что полезность инвестора описывается степенной функцией с постоянным относительным неприятием риска [6]

$$u(W) = \frac{W^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Из разложения (2) следует, что в этом случае оптимальный вес рискового актива в портфеле θ_t будет решением следующего кубического уравнения

$$a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d = 0, \qquad (4)$$

где коэффициенты a, b, c, d суть следующие функции

$$a = -\frac{1}{6}\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)(\gamma_2+3)\sigma^4 + \frac{1}{6}\alpha(1-\alpha^2)\gamma_1\sigma^3 x - $$
$$-\frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)\sigma^2x^2 + x^4;$$
$$b = R_f[\frac{1}{2}\alpha(1+\alpha)\gamma_1\sigma^3 - \frac{1}{2}\alpha(3-\alpha)\sigma^2 x + 3x^3];$$
$$c = R_f^2[-\alpha\sigma^2 + 3x^2];$$
$$d = R_f^3 x.$$

Здесь σ^2, γ_1, γ_2 означают соответственно дисперсию, асимметрию и эксцесс избыточной доходности. Вес размещения θ находится из уравнения (4):

$$\theta = \frac{-b + K + (b^2 - 3ac)/K}{3a}, \qquad (5)$$

где

$$K = \left(\frac{A + \sqrt{4(-b^2+3ac)^3 + A^2}}{2}\right)^{1/3};$$
$$A = -2b^3 + 9abc - 27a^2 d.$$

Для того чтобы выяснить, как отклонения от нормального распределения влияют на портфельный выбор инвестора, вычислим частные производные от веса размещения рискового актива θ по асимметрии γ_1 и эксцессу γ_2. Обозначим $f(\gamma_1, \gamma_2)$ левую часть уравнения (4). При малых θ и x получаем:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_1} \equiv -\frac{\partial f/\partial\gamma_1}{\partial f/\partial\theta} \approx \frac{1}{2}(1+\alpha)\sigma\theta^2 > 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_2} \equiv -\frac{\partial f/\partial\gamma_2}{\partial f/\partial\theta} \approx -\frac{1}{6}(1+\alpha)(2+\alpha)\sigma^2\theta^3.$$

Частные производные (6) показывают, что:

1) оптимальный вес рискового актива в портфеле возрастает при положительной асимметрии и уменьшается при положительном эксцессе;

2) влияние отклонений распределения доходности рисковых активов от нормального распределения увеличивается с ростом относительного неприятия риска инвестором;

3) влияние асимметрии на оптимальный вес рискового актива в портфеле увеличивается с ростом среднего квадратического отклонения, а влияние эксцесса усиливается с ростом дисперсии.

Таким образом, отклонения распределения доходности рисковых активов от нормального являются источником риска и/или выгоды, которые не могут быть описаны в рамках традиционного анализа на основе расчета математического ожидания и дисперсии. Как «жирные» хвосты, так и отрицательная асимметрия, наблюдаемые на фондовых рынках, предполагают существование дополнительного риска для инвестора и поэтому сокращают спекулятивный спрос инвестора на рисковые активы. Предварительный анализ показывает, что увеличение инвестиционного горизонта, хотя и уменьшает величину асимметрии и эксцесса, в целом не уменьшает их влияния на портфельный выбор. Заметим, что влияние отклонений распределения доходности активов от нормального на динамическое хеджирование должно исследоваться на основе динамической модели финансового рынка с учетом конкретной стохастической динамики цен рисковых активов.

Литература

1. *Cochrane J.H.* Asset pricing. Princeton: Princeton University Press, 2001. 268 p.
2. *Sornette D.* Why stock markets crash. Princeton: Princeton University Press, 2002. 214 p.
3. *Наталуха И.Г.* Моделирование спекулятивного бума на финансовом рынке с учетом психологии инвесторов // Материалы шестого Всероссийского симпозиума «Математическое моделирование и компьютерные технологии». Кисловодск, 2004. Т. 2. С. 7-8.
4. *Наталуха И.Г.* Оптимальное инвестирование и потребление с учетом привычного уровня потребления // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12, Вып. 2. С. 450-455.
5. *Шарп У., Александер Г., Бейли Д.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997. 1028 с.
6. *Крушвиц Л.* Финансирование и инвестиции. СПб.: Питер, 2000. 382 с.
7. *Canner N., Mankiw N.G., Weil D.N.* An asset allocation puzzle // American Economic Review. 1997. V. 87. P. 181-191.