УДК 519.2 DOI 10.23683/0321-3005-2018-1-15-19

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОЖИДАЕМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФИНАНСОВЫХ ИНДЕКСОВ

***© 2018 г. Н.В. Данилова*[1]**
[1]*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

FORECASTING OF EXPECTED VALUES OF FINANCIAL INDEXES

***N.V. Danilova*[1]**
[1]*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

Данилова Наталья Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: danilova198686@mail.ru

Natalia V. Danilova - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of High Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: danilova198686@mail.ru

Рассматриваются задача прогноза и её общая схема решения в терминологии гильбертова пространства. Задача линейного прогноза ставится как задача проектирования на подпространство гильбертова пространства. В качестве примера приводится модель Кокса – Росса – Рубинштейна с белым шумом, для которой получен алгоритм прогнозирования логарифмического возврата и приведены результаты его программной реализации. В логарифмическом возврате присутствуют два независимых друг от друга источника случайности. В качестве одного из них рассматривается последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Для второго приводятся два случая. В первом используется последовательность независимых и одинаково распределённых бинарных случайных величин, во втором – последовательность независимых случайных величин, образующих марковскую цепь с заданными переходными вероятностями. Для обоих случаев дается расчёт дисперсии ошибки. Также рассчитывается прогноз волатильности в модели стохастической волатильности с помощью линейного фильтра Калмана – Бьюси, который является удовлетворительным и позволяет найти интервальный прогноз цены. Показано, что фильтр определяется через линейную стохастическую систему уравнений. Приводятся графики моделируемых и прогнозируемых значений стохастической волатильности.

Ключевые слова: *временной ряд, линейный прогноз, стохастическая волатильность, линейный фильтр Калмана – Бьюси, логарифмический возврат, белый шум, метод Монте-Карло, марковская цепь, сингулярное разложение, модель Кокса – Росса – Рубинштейна.*

The forecast problem and its general solution scheme in the terminology of the Hilbert space are considered in the paper. The linear prediction problem is posed as the design problem on the subspace of a Hilbert space. As an example, the Cox-Ross-Rubinshtein model with white noise is given, for which the algorithm for predicting the logarithmic return is obtained and the results of its software implementation are given. In the logarithmic return, there are two independent sources of randomness. As a single source of randomness, we consider a sequence of independent standard Gaussian random variables. For the second source of chance, two cases are given. In the first case, a sequence of independent and identically distributed binary random variables is used. In the second case, we use a sequence of independent random variables that form a Markov chain with given transition probabilities. For both cases, the dispersion of the error is calculated. The forecast of volatility in the model of stochastic volatility with the Kalman-Buci linear filter is also calculated, which is satisfactory and allows us to find the interval price forecast. It is shown that the filter is determined through a linear stochastic system of equations. The graphs of simulated and predicted values of stochastic volatility are given.

Keywords: *time series, linear forecast, stochastic volatility, Kalman-Buci linear filter, logarithmic return, white noise, Monte Carlo method, Markov chain, singular decomposition, Cox-Ross-Rubinstein model.*

Введение

Теории временных рядов и их применению при анализе финансовых данных посвящено довольно много публикаций [1–10].

В первой части статьи дается постановка задачи линейного прогноза как задачи проектирования на подпространство гильбертова пространства. Приводится общая схема решения в терминологии гильбертова пространства. В качестве примера рассматривается модель Кокса – Росса – Рубинштейна с белым шумом. Для этой модели получен алгоритм прогнозирования логарифмического возврата и приведены результаты его программной реализации.

Во 2-й части статьи рассматривается модель стохастической волатильности, удобная при решении задач прогнозирования волатильности, следовательно, и в оценке риска финансовых инструментов. Приводится прогноз волатильности с помощью линейного фильтра Калмана – Бьюси [11], который является удовлетворительным и позволяет найти интервальный прогноз цены.

Линейный прогноз

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P), где Ω – пространство элементарных случайных событий $\omega \in \Omega$; F – σ-алгебра подмножеств Ω; P – семейство вероятностных мер, возможно, параметрическое на F.

Определение **[12].** Гильбертовым пространством вещественнозначных случайных величин с конечным вторым моментом $L^2(\Omega, F, P)$ называется линейное пространство случайных величин с $E\xi = 0, E\xi^2 < \infty$ и скалярным произведением $(\xi, \eta) = E\xi\eta = \operatorname{cov}(\xi, \eta)$.

Рассмотрим совокупность линейно независимых случайных величин $\eta_1, ..., \eta_n$. Обозначим через L_η линейную оболочку, натянутую на случайные величины $\eta_1, ..., \eta_n$.

Наилучшим линейным прогнозом случайной величины ξ по совокупности случайных величин $\eta_1, ..., \eta_n$ назовём

$$\hat{\xi} = \arg \min_{\zeta \in L_\eta} E(\xi - \zeta)^2 .$$

Так как $\zeta \in L_\eta$, то $\zeta = \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i$. Следовательно, наилучший линейный прогноз

$$\hat{\xi} = \arg \min_{a} E\left(\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i \right)^2 .$$

Минимум достигается тогда, когда разность $\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i$ ортогональна подпространству L_η. Таким образом, решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $E\left(\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i \right) \eta_j = 0$.

В матричных обозначениях система уравнений представляется в виде

$$\mathbf{CX} = \mathbf{Y},$$

где

$$\mathbf{X} = (a_i)_{i=1}^{n};\ c_{i,j} = \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j);$$
$$\mathbf{Y} = (y_i)_{i=1}^{n};\ y_i = \operatorname{cov}(\xi, \eta_i);\ i = 1, ..., n.$$

Дисперсия ошибки

$$D\Delta_\eta = E\left(\xi - \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i \right)^2 =$$
$$= D\xi - 2\sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{cov}(\xi, \eta_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) =$$
$$= D\xi - 2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + (\mathbf{CX}, \mathbf{X}).$$

Откуда

$$D\Delta_\eta = D\xi - \left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}, \mathbf{Y}\right).$$

Здесь через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение евклидова пространства.

Пусть последовательность $(S_n)_{n=0}^{N}$ – рыночная стоимость акций. Она является стохастической, определённой на вероятностном пространстве (Ω, F, P). В качестве финансового индекса в статье рассматривается логарифмический возврат, определяемый формулой $h_n = \ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right)$.

Распределение вероятностей последовательности $(S_n)_{n=0}^{N}$ сводится к описанию распределения вероятностей последовательности логарифмических возвратов $(h_n)_{n=1}^{N}$, т.е. к заданию последовательности $\mu_n = Eh_n$ и ковариационной матрицы $\mathbf{C} = (c_{n,m})_{n,m=1}^{N}$, $c_{n,m} = \operatorname{cov}(h_n, h_m) = E(h_n h_m) - \mu_n \mu_m$.

В [12] показано, что $\hat{h}_{N+1} = E(h_{N+1} / h_1, ..., h_N) = \mu_{N+1} + \sum_{i=1}^{N} a_i (h_i - \mu_i)$, где $(a_i)_{i=1}^{N}$ – элементы вектора $\mathbf{X}$, удовлетворяющего СЛАУ $\mathbf{CX} = \mathbf{Y}, \mathbf{Y} = (y_i)_{i=1}^{N}, y_i = (y_i)_{i=1}^{N}, y_i = \operatorname{cov}(h_{N+1}, h_i)$. Ошибка прогноза $\Delta_{N+1} = \hat{h}_{N+1} - h_{N+1}$ распределена по нормальному закону распределения с математическим ожиданием $E\Delta_{N+1} = 0$ и дисперсией $D\Delta_{N+1} = Dh_{N+1} - \left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}, \mathbf{Y}\right)$.

Модель типа Кокса – Росса – Рубинштейна с белым шумом

В данной модели логарифмический возврат имеет вид $h_n=(b-a)\delta_n\delta_{n-1}+a\delta_{n-1}+\sigma\varepsilon_n, \delta_0=1$, где $(\delta_n)_{n=1}^N$ – последовательность независимых и одинаково распределённых бинарных случайных величин; $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Математическое ожидание $Eh_n=p((b-a)p+a)$, $p=P(\delta_n=1)$;

дисперсия

$$Dh_n=p(1-p)\left(p(1+p)(b-a)^2+2ap(b-a)+a^2\right)+\sigma^2;$$

ковариация

$$\operatorname{cov}(h_{n+k},h_n)=\begin{cases}0, k>1\\(b-a)p^2(1-p)((b-a)p+a), k=1\end{cases}.$$

Наилучший линейный прогноз

$$\hat{h}_{N+1}=Eh_{N+1}+\sum_{i=1}^N x_i(h_i-Eh_i).$$

Здесь $(x_i)_{i=1}^N$ – элементы вектора $\mathbf{X}$, удовлетворяющего СЛАУ $\mathbf{CX}=\mathbf{Y}$,

$$\mathbf{Y}=(y_i)_{i=1}^N;\ y_i=\operatorname{cov}(h_{N+1},h_i);$$

$$\mathbf{C}=(c_{n,m})_{n,m=1}^N, c_{n,m}=\operatorname{cov}(h_n,h_m).$$

Дисперсия ошибки

$D\Delta_{N+1}=Dh_{N+1}-\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)$. Введём обозначения: $\mathbf{C}v=\operatorname{cov}(h_{n+1},h_n)$ и $Ds=Dh_{n+1}$. В этих обозначениях матрица $\mathbf{C}=(c_{i,j})_{i,j=1}^N$, $c_{i,j}=$

$$=\begin{cases}\mathbf{D}s, i=j\\\mathbf{C}v, |i-j|=1, \mathbf{Y}=(y_i)_{i=1}^N, y_i=0, i=1,...,N-1, y_N=\mathbf{C}v.\\0, \text{иначе}\end{cases}$$

Представим трёхдиагональную ковариационную матрицу $\mathbf{C}$ в виде произведения $\mathbf{C}=\mathbf{AA}^T$, где матрица $\mathbf{A}=(\alpha_{i,j})_{,j=1}^N$, $\alpha_{i,j}=0, i<j$. Элементы матрицы $\mathbf{A}$ удовлетворяют уравнениям $\alpha_{1,1}=\sqrt{\mathbf{D}s}$, $\alpha_{i+1,i}=\dfrac{\mathbf{C}v}{\alpha_{i,i}}$, $\alpha_{i+1,i+1}=\sqrt{\mathbf{D}s-\alpha_{i+1,i}^2}$, $i=1,...,N-1$. Запишем уравнение $\mathbf{C}=\mathbf{AA}^T$ в виде $\mathbf{AA}^T\mathbf{X}=\mathbf{Y}$. Введём обозначение: $\mathbf{Z}=\mathbf{A}^T\mathbf{X}$. Тогда $\mathbf{AA}^T\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ распадётся на два уравнения: $\mathbf{AZ}=\mathbf{Y}, \mathbf{A}^T\mathbf{X}=\mathbf{Z}$. Решение первого – $\mathbf{Z}=(z_i)_{i=1}^N$, $z_i=0$, $i=1,...,N-1$, $z_N=\dfrac{\mathbf{C}v}{\alpha_{N,N}}$; второго – $x_N=\dfrac{\mathbf{C}v}{\alpha_{N,N}^2}$, $x_{N-k}=-\dfrac{\alpha_{N-k+1,N-k}x_{N-k+1}}{\alpha_{N-k,N-k}}$, $k=1,...,N-1$.

Таким образом, наилучший линейный прогноз

$$\hat{h}_{N+1}=p((b-a)p+a)+\sum_{i=1}^N x_i\left(h_i-p((b-a)p+a)\right).$$

Дисперсия ошибки

$$D\Delta_{N+1}=p(1-p)\left(p(1+p)(b-a)^2+2ap(b-a)+a^2\right)+$$
$$+\sigma^2-\frac{\mathbf{C}v^2}{\alpha_{N,N}^2}.$$

Пример 1.

В этом примере, как и в следующем, приводится сравнение значения величины $\hat{h}_{N+1}$ со средним значением величины h_{N+1}, полученным с помощью метода Монте-Карло $\hat{h}_{N+1}^{MK}$. Число испытаний в методе Монте-Карло $M=1000$. Значение $N=100$.

Начальные данные: $a=0{,}1,\ b=0{,}7,\ p=0{,}5,$ $\hat{h}_{N+1}\approx 0{,}236,\ \hat{h}_{N+1}^{MK}\approx 0{,}283$.

Дисперсия ошибки прогноза $\Delta_{N+1}\approx 0{,}099$.

Рассмотрим ещё один вариант модели Кокса – Росса – Рубинштейна с белым шумом. В данной модели логарифмический возврат имеет вид

$$h_n=b\delta_n+a(1-\delta_n)+\sigma\varepsilon_n,\ \delta_0=1,$$

где $(\delta_n)_{n=1}^N$ – последовательность независимых случайных величин, образующих марковскую цепь с переходными вероятностями $P(\delta_n=1/\delta_{n-1}=1)=s,\ P(\delta_n=1/\delta_{n-1}=0)=r;\ (\varepsilon_n)_{n=1}^N$ – последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин. Обозначим через $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1-r & 1-s\\ r & s\end{pmatrix}$ матрицу переходных вероятностей.

Пусть $\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}P(\delta_1=0)\\P(\delta_1=1)\end{pmatrix}$, $\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Тогда $Eh_n=(b-a)P(\delta_n=1)+a,\quad P(\delta_n=1)=\left(\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{P}_1,\mathbf{I}\right)$.

Собственные числа матрицы $\mathbf{Q}$: – $\lambda_1=1, \lambda_2=s-r$. Соответствующие собственные векторы – $\mathbf{U}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{1-s}{r}\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{U}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Таким образом, для матрицы $\mathbf{Q}$ существует сингулярное разложение $\mathbf{Q}=\mathbf{U\Lambda U}^{-1}$, где $\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & s-r\end{pmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\dfrac{1-s}{r} & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Справедлива формула $\mathbf{Q}^k = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{U}^{-1}$. Матрица $\mathbf{U}^{-1} = \frac{r}{1+r-s}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1-s}{r} \end{pmatrix}$. Отсюда

$$Eh_n = \frac{b-a}{1+r-s}\left(r + (s-r)^n \left(P(\delta_1 = 1)(1-s) - P(\delta_1 = 0)r\right)\right) + a.$$

Отметим, что поскольку $|s-r|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(s-r)^n = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} Eh_n = \frac{r(b-a)}{1+r-s} + a$, причём скорость сходимости – показательная.

Аналогично рассчитывается ковариация

$$\operatorname{cov}(h_n, h_m) = (b-a)^2\left(\mathbf{Q}^{m-1}\mathbf{P}_1, \mathbf{I}\right)\left(\left(\mathbf{Q}^{n-m}\mathbf{I}, \mathbf{I}\right) - \left(\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{I}, \mathbf{I}\right)\right)$$

и дисперсия

$$Dh_n = Eh_n^2 - E^2h_n,$$

$$Eh_n^2 = (b-a)^2\left(\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{P}_1, \mathbf{I}\right) + 2a(b-a)\left(\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{P}_1, \mathbf{I}\right) + a^2.$$

Таким образом, наилучший линейный прогноз

$$\hat{h}_{N+1} = Eh_{N+1} + \sum_{i=1}^{N} x_i\left(h_i - Eh_i\right),$$

где $(x_i)_{i=1}^N$ – элементы вектора $\mathbf{X}$, удовлетворяющего СЛАУ $\mathbf{CX} = \mathbf{Y}, \mathbf{Y} = (y_i)_{i=1}^N,\ y_i = \operatorname{cov}(h_{N+1}, h_i)$, $\mathbf{C} = (c_{n,m})_{n,m=1}^N,\ c_{n,m} = \operatorname{cov}(h_n, h_m)$.

Дисперсия ошибки

$$D\Delta_{N+1} = Dh_{N+1} - \left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}, \mathbf{Y}\right).$$

Пример 2.

Начальные данные: $a = -0{,}3,\ b = 0{,}3,\ p = 0{,}5,$ $\hat{h}_{N+1} \approx 0{,}035,\ \hat{h}_{N+1}^{MK} \approx 0{,}036$.

Дисперсия ошибки прогноза $\Delta_{N+1} \approx 0{,}052$.

Модель стохастической волатильности

$$h_n = \sigma_n\varepsilon_n,\ \ \sigma_n = \exp\left(\frac{\Delta_n}{2}\right),\ \ \Delta_n = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i\Delta_{n-i} + c\delta_n,$$

$\varepsilon_n \sim N(0,1),\ \delta_n \sim N(0,1),\ \varepsilon_n$ и δ_n независимы.

Предположим, что $p = 1$. Введём обозначения

$$x_n = \ln h_n^2,\ y_n = \ln\sigma_n^2.$$

Тогда

$$x_n = E\ln\varepsilon_n^2 + y_n + \left(\ln\varepsilon_n^2 - E\ln\varepsilon_n^2\right),$$

$$y_n = a_0 + a_1 y_{n-1} + c\delta_n.$$

Введём случайные величины

$$\eta_n = \ln\varepsilon_n^2 - E\ln\varepsilon_n^2, \xi_n = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\eta_n.$$

Следовательно,

$$x_n = E\ln\varepsilon_n^2 + y_n + \frac{\pi}{\sqrt{2}}\xi_n,\ \ y_n = a_0 + a_1 y_{n-1} + c\delta_n.$$

Получили линейную стохастическую систему, в которой $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ является стандартной нормальной случайной величиной, а $(\xi_n)_{n=1}^N$ не является гауссовской. Предположим, что случайные величины $(\xi_n)_{n=1}^N$ подчиняются нормальному распределению. Рассмотрим линейный фильтр Калмана – Бьюси [11].

Введём $z_n = Dy_n$ и u_n – наилучшую в среднеквадратическом смысле оценку y_n по наблюдаемым $x_1,..., x_n$. Таким образом, фильтр определяется через систему

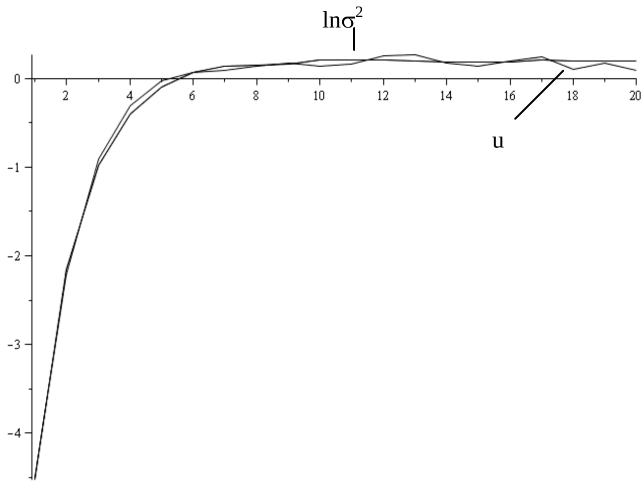
$$u_{n+1} = \left(a_0 + a_1u_n\right) + \frac{a_1 z_n}{\frac{\pi^2}{2} + z_n}\left(x_{n+1} - E\ln\varepsilon_n^2 - u_n\right),\ u_0 = Ey_0,$$

$$z_{n+1} = \left(a_1^2 + c^2\right) - \frac{(a_1 z_n)^2}{\frac{\pi^2}{2} + z_n},\ z_0 = Dy_0.$$

Пример 3.

Начальные данные: $a_0 = 0{,}1;\ a_1 = 0{,}5;\ c = 0{,}01$.

По оси абсцисс изображены значения $n = 1,..., N = 20$. По оси ординат – значения $(u_n)_{n=1}^N$ и $\left(\ln\sigma_n^2\right)_{n=1}^N$ (рисунок).



Графики компьютерной реализации значений $\ln\sigma^2$ и прогноза u для модели стохастической волатильности / The graphs of computer realization of values $\ln\sigma^2$ and forecast u for the model of stochastic volatility

Заключение

Статья посвящена применению известной теории прогнозирования к некоторым моделям (B,S)-рынков. Для линейных моделей, являющихся обобщением модели Кокса – Росса – Рубинштейна, приводится сравнение прогнозируемых результатов со средними значениями финансовых индексов, полученными с помощью метода Монте-Карло, для модели стохастической волатильности – прогнозирование стохастической волатильности с помощью фильтра Калмана – Бьюси.

Литература

1. *Brockwell P.J., Davis R.A.* Time Series: Theory and Methods. 2nd ed. N. Y.: Springer-Verlag, 1991. 580 p.
2. *Gourieroux Ch.* Models ARCH et applications financiers. Paris: Economica, 1992. 100 p.
3. *Guegan D.* Series chronologiques non linearies a temps discret. Paris: Economica, 1994. 308 p.
4. *Hamilton J.D.* Time Series Analysis. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1994. 816 p.
5. *Хеннан Э.* Многомерные временные ряды. М.: Мир, 1974. 576 р.
6. *Mills T.C., Markellos R.N.* The Econometric Modelling of Financial Time Series. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 150 p.
7. *Taylor S.* Modeling Financial Time Series. N. Y.: Wiley, 2008. 200 p.
8. *Shiryaev A.N., Spokoinyi V.G.* Sequential Estimation for Autoregressive Systems. Preprint. Paris: Universite Paris-Sud, 1993. 250 p.
9. *Kabalia P.* On the Asymptotic Efficiency of Estimators of the Parameters of ARMA processes // J. of Time Series Analysis. 1983. Vol. 4. P. 37–49.
10. *Спокойный В.Г., Ширяев А.Н.* Статистические эксперименты и решения (асимптотическая теория) // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1993. 123 с.
11. *Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана. М.: Мир, 1988. 168 с.
12. *Белявский Г.И., Данилова Н.В.* Линейные и нелинейные модели финансовых индексов. Ростов н/Д.: Изд-во Южн. фед. ун-та, 2014. 132 с.

References

1. Brockwell P.J., Davis R.A. *Time Series: Theory and Methods*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1991, 580 p.
2. Gourieroux Ch. *Models ARCH et applications financiers*. Paris: Economica, 1992, 100 p.
3. Guegan D. *Series chronologiques non linearies a temps discret*. Paris: Economica, 1994, 308 p.
4. Hamilton J.D. *Time Series Analysis*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1994, 816 p.
5. Khennan E. *Mnogomernye vremennye ryady* [Multidimensional time series]. Moscow: Mir, 1974, 576 p.
6. Mills T.C., Markellos R.N. *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. Cambridge: Cambridge University Press, 2012, 150 p.
7. Taylor S. *Modeling Financial Time Series*. New York: Wiley, 2008, 200 p.
8. Shiryaev A.N., Spokoinyi V.G. *Sequential Estimation for Autoregressive Systems*. Preprint. Paris: Universite Paris-Sud, 1993, 250 p.
9. Kabalia P. On the Asymptotic Efficiency of Estimators of the Parameters of ARMA processes. *J. of Time Series Analysis*. 1983, vol. 4, pp. 37-49.
10. Spokoinyi V.G., Shiryaev A.N. [Statistical experiments and solutions (asymptotic theory)]. *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya* [The results of science and technology. Modern problems of mathematics. Fundamental directions]. Moscow: VINITI, 1993, 123 p.
11. Balakrishnan A.V. *Teoriya fil'tratsii Kalmana* [The theory of Kalma filtration]. Moscow: Mir, 1988, 168 p.
12. Belyavskii G.I., Danilova N.V. *Lineinye i nelineinye modeli finansovykh indeksov* [Linear and nonlinear models of financial indexes]. Rostov-on-Don: Izd-vo Yuzhn. fed. un-ta, 2014, 132 p.

Поступила в редакцию / Received ***11 декабря 2017 г. / December 11, 2017***