$$\sum_{2007}^{2009}\hat{y} = \sum_{2005}^{2009}\hat{y}_{III} - y_{2006} - y_{2005} = 266198 - 45940 - 40435 =$$
$$= 179823 \text{ млн руб.} \qquad (1)$$

Предполагая линейность развития годовых объемов инвестиций в третьей пятилетке по аналогии с первой и особенно второй пятилетками, рассчитаем скорректированный прогноз на 2007, 2008 и 2009 гг. с учетом уже сложившихся фактических уровней 2005 и 2006 годов.

Для этого сначала вычтем из скорректированного суммарного объема инвестиций в третьей пятилетке фактический объем инвестиций за 2005 г.:

$$\sum_{2006}^{2009}\tilde{Y} = \sum_{2005}^{2009}\tilde{Y} - y_{2005} = 266198 - 40435 =$$
$$= 225763 \text{ млн руб.} \qquad (2)$$

На втором этапе определим скорректированный средний абсолютный прирост ($\bar{\Delta}$) за 2007 – 2009 гг.:

$$\sum_{2006}^{2009}\tilde{Y} = y_{2006} + \hat{y}_{2007} + \hat{y}_{2008} + \hat{y}_{2009}, \qquad (3)$$

где $\hat{y}_{2007} = y_{2006} + \bar{\Delta}$; $\hat{y}_{2008} = y_{2006} + 2\bar{\Delta}$; $\hat{y}_{2009} = y_{2006} + 3\bar{\Delta}$;

$$\sum_{2006}^{2009}\tilde{Y} = 4y_{2006} + 6\bar{\Delta}. \qquad (4)$$

Отсюда получаем

$$\bar{\Delta} = \frac{(\sum_{2006}^{2009}\tilde{Y}) - 4y_{2006}}{6} = \frac{225763 - 183760}{6} =$$
$$= 7000{,}5 \text{ млн руб.} \qquad (5)$$

и прогнозные годовые объемы инвестиций в Саратовскую область на 2007 – 2009 гг.: на 2007 г. прогноз объема инвестиций составит 52940,5 млн руб.; на 2008 г. – 59941 млн руб.; на 2009 г. – 66941,5 млн рублей.

Проведенное нами исследование позволило выявить характерные черты развития инвестиционного процесса в Саратовской области. Критический анализ известных в научной литературе способов экстраполяции выявил рациональный метод прогнозирования сложившейся в рассматриваемом регионе инвестиционной тенденции и позволил, сочетая аспекты анализа пятилетних и годовых тенденций внутри каждой пятилетки уровней, дать научно обоснованный прогноз на три года. Данный результат мы расцениваем как предпосылку более детального изучения инвестиционного процесса, нацеленного в первую очередь на раскрытие причинно-следственных связей с другими социально-экономическими явлениями региона.

---

1. Статистический ежегодник Саратовской области. 2005 г.; данные официального интернет-сайта Правительства Саратовской области www.saratov.gov.ru; данные официального интернет-сайта Федеральной службы государственной статистики РФ www.gks.ru

2. *Прокофьев В.А.* Методы механического сглаживания и прогнозирования уровней коротких динамических рядов / Вестник СГСЭУ. 2004. № 9.

УДК 336.761

УСТОЙЧИВОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ НА РОССИЙСКОМ ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Р.О. Яковенко,

аспирант кафедры прикладной математики, СГСЭУ

Разработанная Г. Марковицем портфельная теория делает возможным оптимальное распределение средств между несколькими активами. Она основывается на анализе среднего значения и дисперсии доходностей ценных бумаг и опирается на нормальное распределение. Однако анализ ценовых движений акций, обращающихся на финансовых рынках, показывает, что «хвосты» функций плотностей распределения наблюдаемых доходностей убывают значительно медленнее, нежели для гауссовского распределения. Кроме того, можно видеть сильную «вытянутость» пика плотности распределения в окрестности центральных значений.

Работы Б. Мандельброта [3. С. 394 – 419] и Е. Фама [1. С. 34 – 105] подхлестнули интерес к эмпирическому анализу распределений финансовых инструментов. Это привело к отказу от нормального приближения, вместо которого было предложено использовать устойчивое распределение Парето как статистическую модель доходности:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{если } x \ge 1, \\ 0, & \text{если } x < 1. \end{cases}$$

Такое распределение, как и другие устойчивые распределения, имеет свой «индекс устойчивости» α. Его также называют «хвостовым индексом», теоретические значения которого лежат в интервале (0,2]. В случае $\alpha = 2$ распределение является нормальным.

Рассмотрим проблему оптимального распределения средств среди $n + 1$ ценных бумаг, вклады в n из которых являются рисковыми. Они имеют устойчивые распределения и доходности $z = [z_1,..,z_n]'$, а $(n + 1)$-й актив представляет собой безрисковый финансовый инструмент с фиксированной доходностью z_0.

Предположим, что вектор доходов от рисковых инструментов $z = [z_1,..,z_n]'$ представляет собой негауссовские α-устойчивые распределения с коэффициентом $1 < \alpha < 2$. Тогда характеристическая функция z будет иметь следующую форму:

$$\Phi_z(t) = E(\exp(it'z)) = \exp(-(t'Q')^{\frac{\alpha}{2}} + it'\mu, \qquad (1)$$

где $Q = [\sigma_{ij}^2] = \dfrac{q_{ij}^2}{2}$ – положительная определённая матрица $n \times n$; $\mu = E(z)$ - вектор средних значений. Элемент q_{ij}^2 определяется из

$$\frac{q_{ij}^2}{2} = [\tilde{z}_i, \tilde{z}_j]_\alpha \left\|\tilde{z}_j\right\|_\alpha^{2-\alpha}, \qquad (2)$$

где $\tilde{z}_j = z_j - \mu$ является центрированной доходностью, а $[\tilde{z}_i, \tilde{z}_j]_\alpha$ – ковариация между устойчивыми величинами $\tilde{z}_i$ и $\tilde{z}_j$.

Эта модель может рассматриваться как частный случай эллиптической модели Оуэна-Рабиновича. Тем не менее для такой модели не существует процедуры оценки параметров в случае бесконечной дисперсии. Используем формулы (1) и (2), чтобы получить статистическую оценку устойчивого эффективного множества. Для оценки эффективного множества доходов, данных (1), необходимо предложить оценки вектора средних значений μ и дать оценку дисперсионной матрицы Q.

В качестве оценок μ будем использовать $\hat{\mu}$ – средние значения, получаемые из имеющихся данных. С. Рачев и С. Ортобелли [6. С. 547 – 594] в своих работах используют следующую оценку матрицы $\tilde{Q} = \dfrac{\tilde{q}_{ij}^2}{2}$ для элементов неизвестной дисперсионной матрицы Q:

$$\frac{\tilde{q}_{ij}^2}{2} = \tilde{\sigma}_{jj}^{2-p} \frac{\Gamma(1-\frac{p}{2})\sqrt{\pi}}{2^p \Gamma(1-\frac{p}{\alpha})\Gamma(\frac{p+1}{2})} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \tilde{z}_i^{(k)} (\tilde{z}_j^{(k)})^{<p-1>},$$

где σ_{jj} получают из

$$\tilde{\sigma}_{jj}^p = \left(\frac{\Gamma(1-\frac{p}{2})\sqrt{\pi}}{2^p \Gamma(1-\frac{p}{\alpha})\Gamma(\frac{p+1}{2})} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left|\tilde{z}_j^{(k)}\right|^p \right)^{\frac{2}{p}}.$$

Следует отметить, что наилучшее значение p зависит от α и от общего числа наблюдений.

Вернёмся к проблеме оптимизации портфеля ценных бумаг. Принимая во внимание полученные выводы, запишем для общей величины получаемого дохода от портфеля x

$$W = x'z + (1 - x'e)z_0 \overset{d}{=} S_\alpha(\sigma_w, \beta_w, E(W))$$

и

$$W = z_0, \text{ если } x = 0,$$

где α – индекс устойчивости, $\sigma_w = \sigma_{x'z} = \sqrt{x'Qx}$ – масштабный параметр, $\beta_w = \beta_{x'z} = 0$ – параметр скошенности, а $E(W) = x'E(z) + (1 - x'e)z_0$.

В случае, когда доходности $z = [z_1,..,z_n]'$ представляют собой негауссовские α-устойчивые распределения и когда существует возможность использовать короткие продажи, каждый избегающий риска инвестор будет выбирать оптимальный портфель исходя из следующей оптимизационной задачи:

$$\min x'Qx \;\Rightarrow\; x'\mu + (1 - x'e)z_0 = m_W$$

для некоторого известного среднего m_W. Следовательно, каждый оптимальный портфель, который максимизирует вогнутую поверхность функции полезности u,

$$\max_x E(u(x'z + (1 - z'e)z_0)),$$

принадлежит следующим предельным значениям среднего и дисперсии:

$$\sigma = \begin{cases} \dfrac{m - z_0}{\sqrt{(\mu - ez_0)'Q^{-1}(\mu - ez_0)}}, \text{ если } m \ge z_0 \\ \dfrac{z_0 - m}{\sqrt{(\mu - ez_0)'Q^{-1}(\mu - ez_0)}}, \text{ если } m < z_0 \end{cases}, \qquad (3)$$

где $\mu = E(z)$, $m = x'\mu + (1 - x'e)z_0$, $e = [1,...,1]'$ и $\sigma^2 = x'Qx$. Более того, веса оптимального портфеля x удовлетворяют следующему условию:

$$x = Q^{-1}(\mu - z_0 e) \frac{m - z_0}{(\mu - ez_0)'Q^{-1}(\mu - ez_0)}. \qquad (4)$$

Отметим, что (3) и (4) имеют такую же форму, как и в случае нормально распределённых величин доходностей. Более того, выражение (4) может быть использовано в случаях как нормального, так и устойчивого распределения. Разница будет заключаться лишь в том, какое значение вкладывается в матрицу Q и параметр σ. В случае использования классической теории матрица Q будет представлять собой ковариационную матрицу, а σ – стандартное отклонение, в то время как при негауссовском распределении доходностей матрица Q – дисперсионная матрица, а σ – масштабный параметр, $\sigma = \sqrt{x'Qx}$.

Таким образом, чтобы узнать оптимальные веса отдельных ценных бумаг, необходимо знать величины хвостовых индексов входящих в портфель акций. После этого становится возможным получить оценку дисперсионной матрицы Q и воспользоваться формулой (4) для расчёта портфеля.

Вычислению хвостового индекса посвящёно множество статей, описан не один способ подсчёта. Дж. МакКаллох [4] получил устойчивую оценку всех четырёх параметров, используя пять квантилей порядка 5, 25, 50, 75 и 95. С. Когон и Д. Вилиамс [2. С. 311 – 335] улучшили процедуру, предложенную И. Котровелисом, которая основана на регрессии выборки характеристической функции. Дж. Нолан [5. С. 105 – 130] описал метод максимального правдоподобия для определения всех четырёх параметров устойчивых распределений.

В зарубежной литературе нет однозначного мнения по поводу выбора единого метода для оценки параметров устойчивых отображений. Зачастую используется несколько методов одновременно.

Для описания ценовых движений акций используют последовательность S_k, где каждому значению дискретного времени k ставится в соответствие цена, взятая через определённый интервал времени. Однако для углубленного анализа более удобно использовать величины «логарифмической доходности» $H_k = \ln\dfrac{S_k}{S_{k-1}}$, которые также называют «отдачей».

Для анализа были выбраны наиболее ликвидные акции российского фондового рынка: РАО «ЕЭС России», ОАО НК «Лукойл», ОАО «Ростелеком», АК Сберегательный банк РФ, ОАО ГМК «Норильский Никель» и ОАО «Газпром». Каждая из этих компаний представляет отдельную отрасль производства.

Из открытых источников были взяты сведения об изменениях рыночных цен выбранных активов. Используются часовые данные за период с 1 января 2003 г. по 1 января 2007 года. Для каждого имеющегося ряда значений формировалась его «логарифмическая доходность» с использованием значений цен закрытия каждого часа. Полученные величины H_k впоследствии разбивались на 4 участка, каждый соответствовал определённому году. Результаты вычисления индекса α представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты вычисления индекса α различными способами

Компания	2003 – 2004	2004 – 2005	2005 – 2006	2006 – 2007
Квантильный метод				
РАО «ЕЭС России»	1,3998	1,3952	1,3442	1,3757
ОАО «Газпром»	1,3888	1,3952	1,3591	1,2908
ОАО ГМК «Норильский Никель»	1,4008	1,5005	1,4428	1,3408
ОАО НК «Лукойл»	1,4901	1,5479	1,4373	1,4176
ОАО «Ростелеком»	1,4654	1,473	1,4807	1,268
АК Сберегательный банк РФ	1,4118	1,4117	1,4054	1,3183
Минимальное значение	*1,3888*	*1,3952*	*1,3442*	*1,2680*
Метод максимального правдоподобия				
РАО «ЕЭС России»	1,4925	1,4802	1,466	1,4578
ОАО «Газпром»	1,4872	1,485	1,4179	1,3541
ОАО ГМК «Норильский Никель»	1,4911	1,575	1,5681	1,4225
ОАО НК «Лукойл»	1,669	1,6555	1,5658	1,5303
ОАО «Ростелеком»	1,5601	1,5882	1,5869	1,3276
АК Сберегательный банк РФ	1,5377	1,4585	1,5007	1,4014
Минимальное значение	*1,4872*	*1,4585*	*1,4179*	*1,3276*
Оценка с помощью характеристической функции				
РАО «ЕЭС России»	1,6257	1,5984	1,6058	1,584
ОАО «Газпром»	1,594	1,5924	1,5186	1,4562
ОАО ГМК «Норильский Никель»	1,5946	1,6639	1,7059	1,5707
ОАО НК «Лукойл»	1,7637	1,7357	1,6894	1,6487
ОАО «Ростелеком»	1,6386	1,6828	1,6923	1,3816
АК Сберегательный банк РФ	1,6382	1,5756	1,6443	1,522
Минимальное значение	*1,5940*	*1,5756*	*1,5186*	*1,3816*

Для оценки матрицы дисперсии использовалось минимальное для каждого года значение хвостового индекса, после чего вычислялись оптимальные веса инвестиционного портфеля. Безрисковый актив z_0 принимался равным 6% годовых. Результаты представлены в табл. 2. Величина α = 2 соответствует классической портфельной теории Марковица, значения α < 2 в третьем, четвёртом и пятом столбцах соответствуют весам, полученным для негауссовской портфельной модели с использованием квантильного метода, метода максимального правдоподобия и процедуры оценки хвостового индекса с помощью характеристической функции соответственно.

Таблица 2

Веса оптимальных портфелей ценных бумаг для разных временных интервалов в зависимости от хвостового индекса

2003 – 2004				
Компания \ Индекс α	α =2	α =1,3888	α =1,4872	α =1,5940
РАО «ЕЭС России»	-0,0142	-0,0394	-0,0352	-0,0311
ОАО «Газпром»	0,2021	0,2011	0,2003	0,1998
ОАО ГМК «Норильский Никель»	0,1223	0,1092	0,1114	0,1136
ОАО НК «Лукойл»	0,2956	0,2765	0,2822	0,2873
ОАО «Ростелеком»	0,0840	0,1171	0,1106	0,1044
АК Сберегательный банк РФ	0,3102	0,3354	0,3306	0,3260
2004 – 2005				
Компания \ Индекс α	α =2	α=1,3952	α =1,4585	α =1,5756
РАО «ЕЭС России»	-0,1188	-0,2101	-0,1938	-0,1782
ОАО «Газпром»	0,2795	0,3203	0,3126	0,3051
ОАО ГМК «Норильский Никель»	-0,0519	-0,0710	-0,0676	-0,0644
ОАО НК «Лукойл»	0,4326	0,4704	0,4664	0,4617
ОАО «Ростелеком»	0,2732	0,3047	0,2993	0,2942
АК Сберегательный банк РФ	0,1854	0,1856	0,1831	0,1816
2005 – 2006				
Компания \ Индекс α	α =2	α =1,3442	α =1,4179	α =1,5186
РАО «ЕЭС России»	0,0276	0,0402	0,0382	0,034809
ОАО «Газпром»	0,3370	0,4369	0,4282	0,411209
ОАО ГМК «Норильский Никель»	0,1532	0,0663	0,0738	0,088457
ОАО НК «Лукойл»	0,1687	0,1813	0,1810	0,180048
ОАО «Ростелеком»	0,0621	0,0341	0,0371	0,042687
АК Сберегательный банк РФ	0,2514	0,2409	0,2415	0,242789
2006 – 2007				
Компания \ Индекс α	α = 2	α =1,2680	α =1,3276	α =1,3816
РАО «ЕЭС России»	0,0095	-0,0507	-0,0464	-0,0420
ОАО «Газпром»	0,3852	0,3871	0,3869	0,3866
ОАО ГМК «Норильский Никель»	0,0858	0,0021	0,0087	0,0153
ОАО НК «Лукойл»	0,2737	0,3236	0,3220	0,3201
ОАО «Ростелеком»	0,1289	0,1911	0,1845	0,1782
АК Сберегательный банк РФ	0,1170	0,1467	0,1442	0,1418

Предположим, потенциальный инвестор действовал следующим образом: вычислив оптимальный портфель по данным за 2003 г., он в январе 2004 г. тратит некий начальный капитал и покупает ценные бумаги. По прошествии года он выводит прибыль, пересчитывает веса портфеля по данным за 2004 г. и вновь формирует соответствующие позиции по акциям, и так далее. Таким образом, к началу 2008 г. у него образуется некая сумма, которую он на протяжении четырех лет получал в начале каждого года в виде прибыли от инвестиций. В табл. 3 показаны величины дохода такого инвестора в процентах от вложенного капитала в зависимости от метода формирования портфеля и оценки величины хвостового индекса.

По полученным результатам можно судить о том, что классическая портфельная теория даёт наименьшую прибыль. С другой стороны, в литературе можно найти выводы о том, что с уменьшением значений хвостового индекса, кроме роста доходности портфеля,

Таблица 3

Доходности полученных портфелей ценных бумаг, %

Метод	2004 г.	2005 г.	2006 г.	2007 г.
Классическая теория	50,49	129,90	71,69	10,87
Квантильный метод	51,63	136,21	71,31	12,94
Метод максимального правдоподобия	51,37	134,90	71,32	12,67
Характеристическая функция	51,14	133,71	71,34	12,42

происходит и увеличение риска вложений. Принимая во внимание высокую волатильность российского фондового рынка в 2006 г., где классическая теория показала наилучший результат, использование портфеля Марковица может показаться более привлекательной инвесторам, избегающим рискованных вложений капитала. Более агрессивно настроенным трейдерам негауссовская теория распределения средств даст больше возможности для заработка. Сделать вывод о предпочтении какого-либо одного способа оценки параметров устойчивых распределений на данный момент затруднительно. Результаты подтверждают гипотезу о росте доходности портфеля с уменьшением α. Исследования в этом направлении являются темой дальнейших работ.

---

1. *Fama E.F.* The behavior of stock market prices // Journal of Business. 1965. № 38.

2. *Kogon S.M., Williams D.B.* Characteristic function based estimation of stable parameters // *Adler, R., Feldman, R., Taqqu, M.* A Practical Guide to Heavy Tailed Data – Birkhдuser, Boston, MA, 1998.

3. *Mandelbrot B.* The variation of certain speculative prices // Journal of Business. 1963. № 36.

4. *McCulloch J.H.* Financial applications of stable distributions // *Maddala, G.S., Rao, C.R.* Statistical Methods in Finance, Handbook of Statistics. North-Holland, New York, 1996. Vol. 14.

5. *Nolan J.P.* Modeling financial data with stable distributions // *Rachev S.T.* Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance. 2003.

6. *Ortobelli S., Huber I., Rachev S.T.* Portfolio choice theory with non-Gaussian distributed returns // *Rachev S.T.* Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance. 2003.