UNIDAD N° 2: TRIÁNGULOS
GUÍA TEÓRICO-PRÁCTICA 2-1 (Soluciones)

1) Indica cuáles de los siguientes planteamientos son ***verdaderos*** y cuáles son ***falsos***, justificando debidamente cada una de tus respuestas.

(a) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Respuesta: VERDADERO

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180° y el hecho de que el triángulo sea rectángulo significa que uno de sus ángulos mide 90°. Por tanto, la suma de las medidas de los ángulos agudos de ese triángulo es 180° – 90° = 90°, por tanto, son complementarios.

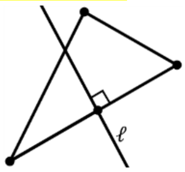
(b) Hay algún triángulo ABC cuyos lados tienen las siguiente medidas: AB = 9 cm, AC = 7 cm y BC = 1 cm.

Respuesta: FALSO

No se cumple la desigualdad triangular: $9 \nless 7+1$.

(c) Si una recta es perpendicular a un lado de un triángulo y pasa por su punto medio, entonces es una mediana de ese triángulo.

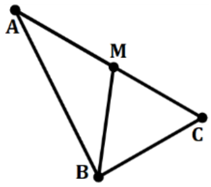
Respuesta: FALSO



En este caso, la recta ℓ *es perpendicular a un lado del triángulo y pasa por su punto medio, pero no es una mediana del triángulo dado (de hecho, una mediana no es una recta, es un segmento).*

(d) Si un segmento tiene como uno de sus extremos un vértice de un triángulo y el otro extremo es el punto medio del lado opuesto a dicho vértice, entonces es una mediatriz de ese triángulo.

Respuesta: FALSO



En este caso, el segmento $\overline{BM}$ *tiene como uno de sus extremos el vértice* B *del triángulo* ABC *y el otro extremo es el punto medio* M *del lado opuesto al vértice* B*, pero no es una mediatriz del triángulo* ABC *(de hecho, una mediatriz no es un segmento, es una recta).*

(e) Hay algún triángulo ABC cuyos lados tienen las siguiente medidas: AB = 7 cm, AC = 9 cm y BC = 11 cm.

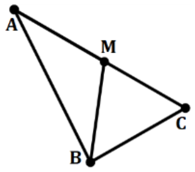
Respuesta: VERDADERO

Se cumple la desigualdad triangular:

$$7 < 9+11$$
$$9 < 7+11$$
$$11 < 7+9$$

(f) Las alturas en un triángulo cualquiera son segmentos que unen a los vértices con el punto medio del lado opuesto.

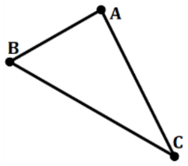
Respuesta: FALSO



En este caso, el segmento $\overline{BM}$ tiene como uno de sus extremos el vértice B del triángulo ABC y el otro extremo es el punto medio M del lado opuesto al vértice B, pero no es una altura del triángulo ABC ya que $\overline{BM}$ no es perpendicular al lado $\overline{AC}$.

(g) Si ABC es un triángulo en el que AB < BC < AC, entonces el ángulo de menor medida es $\angle$A.

Respuesta: FALSO



Como $\overline{AC}$ es el lado de menor medida de ABC, entonces el ángulo de menor medida es el que se opone a ese lado y es $\angle B$, que no es el ángulo $\angle A$.

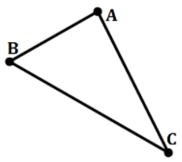
(h) En un triángulo rectángulo, la suma de las medidas de los catetos es mayor que la medida de la hipotenusa.

Respuesta: VERDADERO

Por la desigualdad triangular.

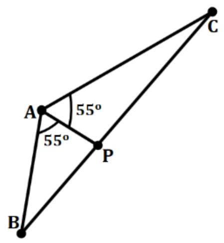
(i) Si ABC es un triángulo en el que $\mathrm{m}(\angle \mathrm{A}) = 35°$ y $\mathrm{m}(\angle \mathrm{C}) = 75°$, entonces $\overline{\mathrm{AB}}$ es el lado de mayor medida.

Respuesta: VERDADERO



Es claro que $m(\angle B) = 180° - 35° - 75° = 70°$. Como $\angle C$ es el ángulo de mayor medida de ABC, entonces el lado de mayor medida es el que se opone a dicho ángulo y es $\overline{AB}$.

(j) De acuerdo a los datos de la figura de la derecha, podemos asegurar que $\overline{\mathrm{AP}}$ es una bisectriz del triángulo ABC.



Respuesta: VERDADERO

Porque $\overline{AP}$ divide al ángulo $\angle BAC$ en dos ángulos de igual medida.

(k) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden 45° cada uno.

Respuesta: FALSO

Es posible tener un triángulo rectángulo con ángulos agudos de medidas 30° y 60° y, por tanto, en ese caso ninguno de ellos mediría 45°.

2) Si la suma de las medidas de dos de los ángulos internos de un triángulo es 132°. ¿Cuál es la medida del tercer ángulo?

Respuesta: 48°

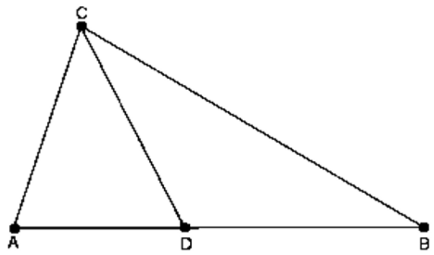
3) Si en un triángulo ABC, se tiene que AC = BC y que med(∠B) = 40°, ¿cuánto miden los ángulos ∠A y ∠C?
Respuesta: med(∠A) = 40° y med(∠C) = 100°

4) ¿Cuáles son las medidas de los ángulos internos de un triángulo isorrectángulo?
Respuesta: 45°, 45° y 90°

5) Si en un triángulo isósceles y obtusángulo se cumple que la medida de uno de sus ángulos internos es 20°, ¿cuáles son las medidas de los otros dos ángulos internos?
Respuesta: 20° y 140°

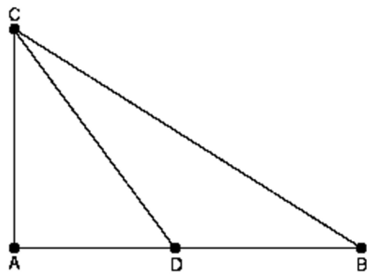
6) Si el triángulo ACD es equilátero y AC = DB, calcula la medida del ángulo ∠DCB.
Respuesta: 30°

Ayuda: Utiliza propiedades de los triángulos isósceles

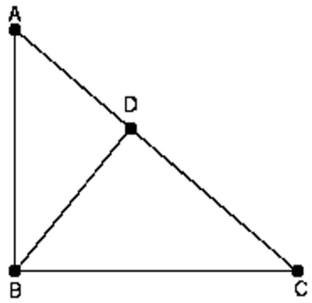


7) Si $\mathrm{CD} = \mathrm{DB}$, el ángulo $\angle\mathrm{CDA}$ mide 40° y $\overline{\mathrm{CA}}$ es perpendicular a $\overline{\mathrm{AB}}$, calcula la medida del ángulo $\angle\mathrm{ACB}$.
Respuesta: 70°

Ayuda: Utiliza propiedades de los triángulos isósceles



8) Si el ángulo $\angle\mathrm{ABC}$ es recto, $\overline{\mathrm{BD}}$ es una altura del triángulo ABC y el ángulo $\angle\mathrm{BAC}$ mide 50°. Calcula la medida del ángulo $\angle\mathrm{DBC}$.
Respuesta: 50°



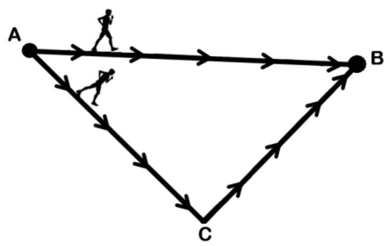
9) Si en un triángulo ABC, se cumple que AC < BC < AB, ¿cuál de los ángulos internos ∠A, ∠B, ∠C del triángulo ABC tiene la *mayor medida*? ¿Y cuál de ellos tiene la *menor medida*?
Respuesta: ∠C es el ángulo de mayor medida y ∠B es el ángulo de menor medida

10) Si en un triángulo ABC, se cumple que med(∠C) < med(∠A) < med(∠B), ¿cuál es el mayor de los valores AB, AC, BC? ¿Y el menor de esos valores?
Respuesta: AC es el mayor de los valores y AB es el menor de los valores

11) Si en un triángulo ABC, se tiene que med(∠B) < med(∠C) < med(∠A), AC = 4 y BC = 6. Si se sabe que la medida AB es un número entero, ¿es posible determinar su valor con los datos dados? Y si tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es ese valor?
Respuesta: Si es posible. AB = 5

12) Si en un triángulo ABC se cumple que AB < AC < BC, que med(∠C) = 59° y que med(∠A) y med(∠B) son números enteros (en grados sexagesimales), con esos datos ¿es posible calcular los valores de med(∠A) y med(∠B)? Y si fuese posible, ¿cuáles serían sus valores?
Respuesta: Si es posible. Los valores serían med(∠A) = 61° y med(∠B) = 60°

13) Dos corredores, Daniel y Rafael, corren desde el punto A hasta el punto B por dos caminos diferentes.



(a) Supongamos que nos informan que Daniel va directamente de A a B, recorriendo un total de 100 metros, mientras que Rafael va primero de A a C, recorriendo 55 metros, y luego va de C a B, recorriendo 45 metros. ¿Consideras que esta información puede ser válida? Explica tu respuesta.
Respuesta: No
Se incumple la desigualdad triangular: 100 ≮ 55+45

(b) Supongamos ahora que Daniel va directamente de A a B, recorriendo un total de 120 metros, mientras que Rafael va primero de A a C, recorriendo 62 metros, y luego va de C a B, recorriendo **x** metros, donde **x** es un número entero.
- ¿Cuál es el menor valor posible que puede tener **x**?
  Respuesta: 59
- ¿Cuál es el mayor valor posible que puede tener **x**?
  Respuesta: 181
  Ayuda: Utiliza la desigualdad triangular

14) Si ABC es un triángulo isósceles y se sabe que $\mathrm{AB} = 4$, entonces
(a) ¿cuál es el menor valor entero que puede tener AC?
Respuesta: 1
(b) ¿cuál es el mayor valor entero que puede tener AC?
Respuesta: No existe
Ayuda: Utiliza la desigualdad triangular en dos casos posibles para los triángulos isósceles en este problema

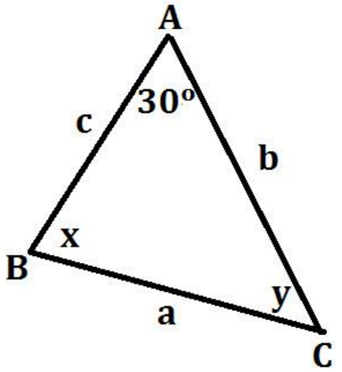
15) Si en un triángulo ABC se cumple que:

- La medida del ángulo $\angle$A es la mitad de la medida del ángulo $\angle$B.
- La medida del ángulo $\angle$C es el triple de la medida del ángulo $\angle$B.

¿Cuál es la medida de cada uno de los ángulos internos de ABC?

Respuesta: m($\angle$A) = 20° ; m($\angle$B) = 40° ; m($\angle$C) = 120°

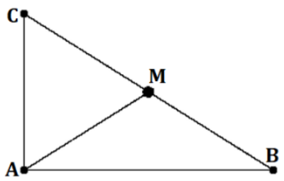
16) En el triángulo ABC asumamos que $a < b < c$.



(a) ¿Cuál es el menor valor entero que puede tener x?
(b) ¿Cuál es el mayor valor entero que puede tener x?
(c) ¿Cuál es el menor valor entero que puede tener y?
(d) ¿Cuál es el mayor valor entero que puede tener y?
(e) Si decimos que ABC es acutángulo, vuelve a responder las preguntas (a), (b), (c) y (d).
(f) Si decimos que ABC es obtusángulo, vuelve a responder las preguntas (a), (b), (c) y (d).

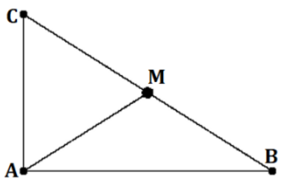
Respuestas: (a) x = 31°
(b) x = 74°
(c) y = 76°
(d) y = 119°
(e): (a) x = 61° ; (b) x = 74° ; (c) y = 76° ; (d) y = 89°
(f): (a) x = 31° ; (b) x = 59° ; (c) y = 91° ; (d) y = 119°

17) Si AM = BM = CM, determina la medida del ángulo $\angle$CAB.



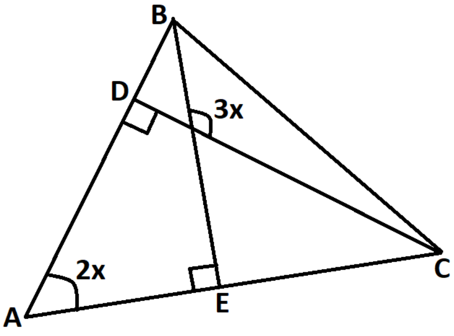
Respuesta: 90°

18) Si AM = BM = CM y m($\angle$ACB) = 80°, calcula las medidas de $\angle$CMA y $\angle$MAB.



Respuesta: 20° y 10°

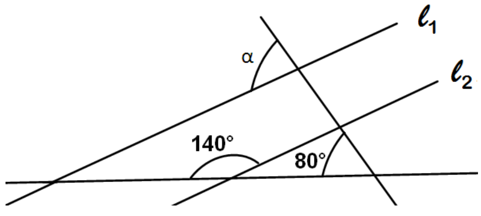
19) Calcula el valor de **x**



Respuesta: **x** = 36°

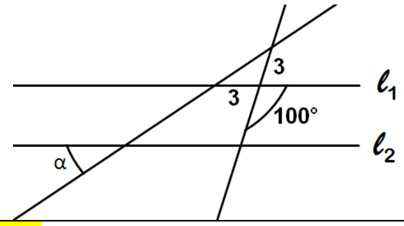
20) En los siguientes ejercicios calcular el valor de "α", sabiendo que $\ell_1 \parallel \ell_2$.

(a)



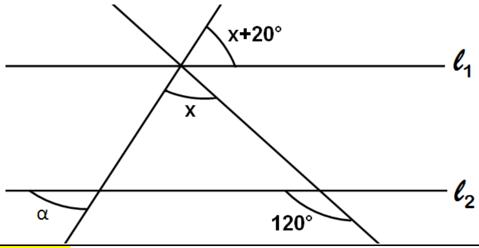
Respuesta: 120°

(b)



Respuesta: 40°

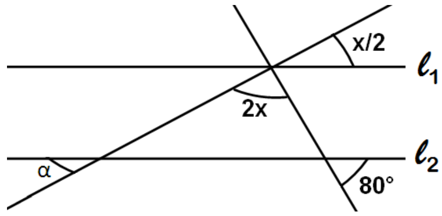
(c)



Respuesta: 70°

Ayuda: Deberías llegar a que x = 50°

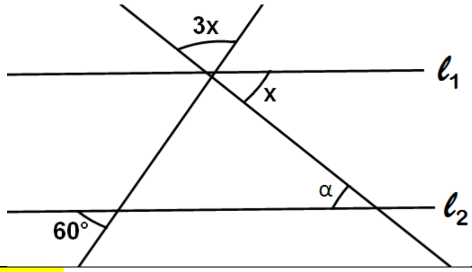
(d)



Respuesta: 20°

Ayuda: Deberías llegar a que x = 40°

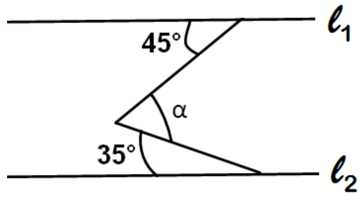
(e)



Respuesta: 30°

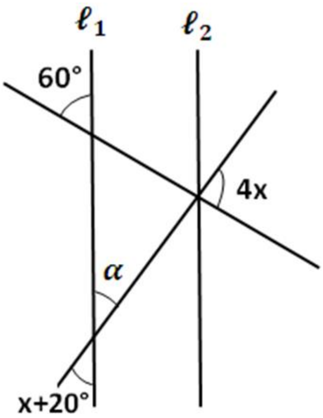
Ayuda: Deberías llegar a que x = 30°

(f)



Respuesta: 80°

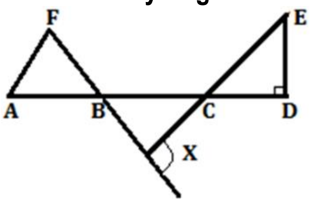
(g)



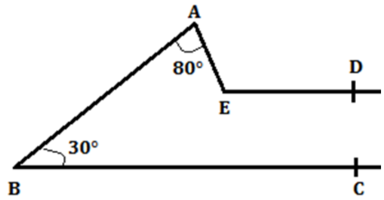
Respuesta: 40°

Ayuda: Deberías llegar a que x = 20°

21) En la figura se tiene que $AB = BF = FA$ y $CD = DE$. Calcula el valor de x.
Respuesta: 105°

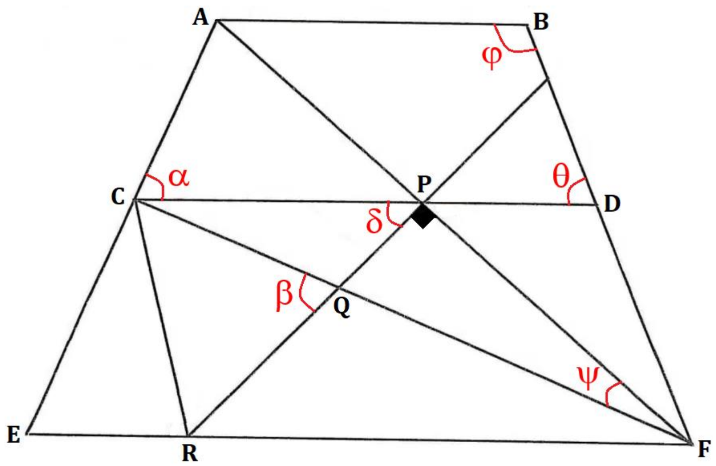


22) En la figura se tiene que $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$. Calcula cuánto mide el ángulo $\angle AED$.
Respuesta: 110°



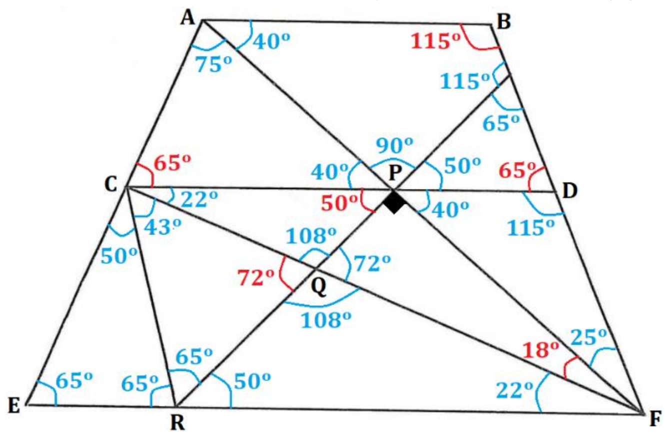
23) En la figura se tiene que:
- $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$
- $CE = CR$
- m($\angle CRE$) = m($\angle CRQ$) y m($\angle AEF$) = m($\angle BFE$)
- m($\angle DCF$) = 22°, m($\angle DPF$) = 40° y $\angle FPR$ es recto

Calcula los valores de α, β, δ, φ, θ, ψ



Respuesta: α = 65°, β = 72°, δ = 50°, φ = 115°, θ = 65°, ψ = 18°

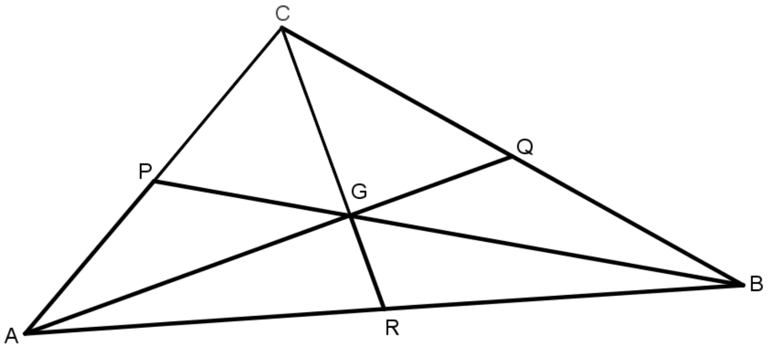
Comentario: Seguramente obtendrás todos los valores que se muestran en la figura siguiente



24) Si en un triángulo ABC, AM es una mediana de ABC, G es el baricentro de ABC y AG = 12 cm, ¿cuál es el valor de GM, en cm?
Respuesta: 6 cm

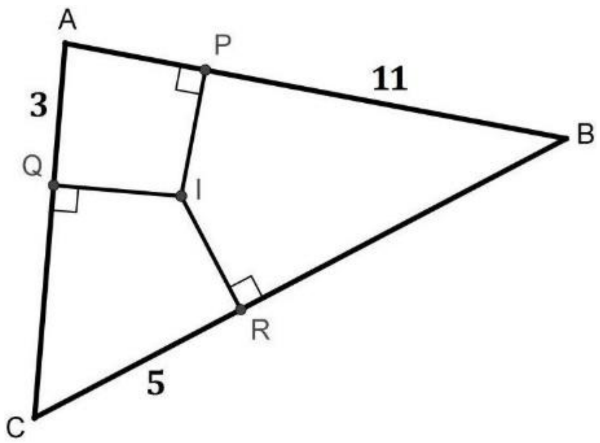
25) Si en un triángulo ABC, BP es una mediana de ABC, G es el baricentro de ABC y GP = 48 mm, ¿cuál es el valor de BG, en mm?
Respuesta: 96 mm

26) En la figura se tiene que G es el baricentro del triángulo ABC, el triángulo CGP es equilátero, GQ = $2\sqrt{3}$ y AP = 4. Calcula los valores de AG, BG, CG, GP y GR.



Respuesta: AG = $4\sqrt{3}$, BG = 8, CG = 4, GP = 4 y GR = 2

27) En la figura se tiene que I es el incentro del triángulo ABC. Por otro lado, $\overline{\mathrm{IP}}$, $\overline{\mathrm{IQ}}$ e $\overline{\mathrm{IR}}$ son segmentos perpendiculares a los lados $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ y $\overline{\mathrm{BC}}$, respectivamente. Además, se tiene que $\mathrm{AQ} = 3$, $\mathrm{BP} = 11$ y $\mathrm{CR} = 5$. Determina las longitudes de los tres lados del triángulo ABC.



Respuesta: AB = 14, AC = 8 y BC = 16

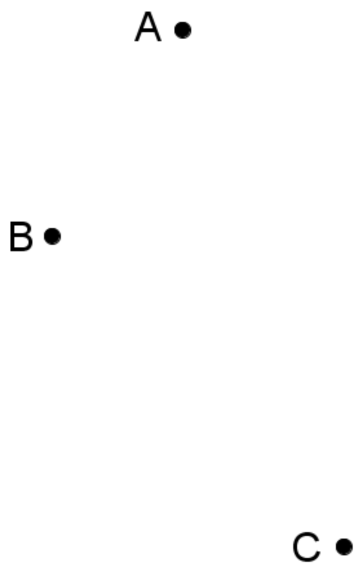
Ayuda: Por propiedad del incentro de un triángulo se llega a que

AP = AQ = 3

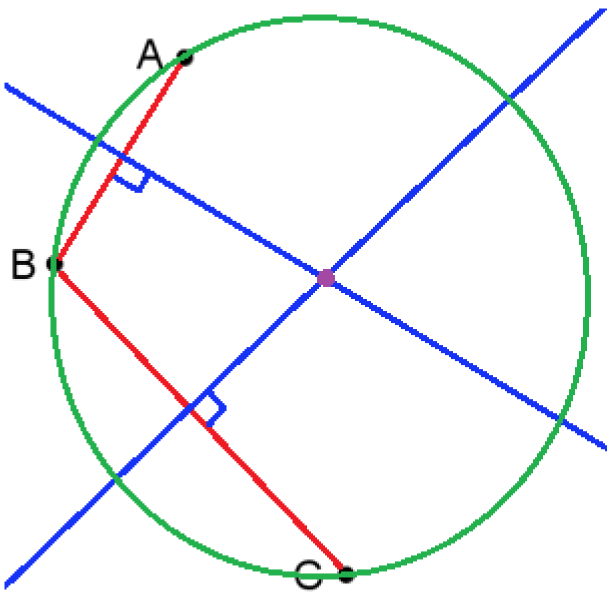
BP = BR = 11

CQ = CR = 5

28) Usa regla, compás y propiedades de los triángulos para obtener la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C que se muestran a continuación:



Respuesta:



Ayuda: Se utiliza propiedad del circuncentro de un triángulo:

(1) Traza los segmentos $\overline{AB}$ *y* $\overline{BC}$ *(rojo).*

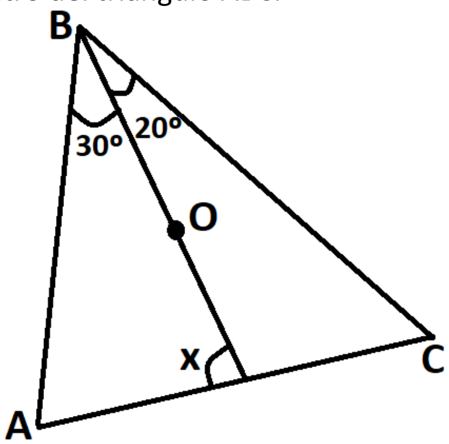
(2) Traza las mediatrices de los segmentos anteriores (azul).

(3) Obtendrás el circuncentro del triángulo ABC *(violeta).*

(4) Traza la circunferencia con centro en el punto anterior y abre el compás hasta cualquiera de los puntos A, B *o* C *(verde).*

PROBLEMA RETO

En la figura, O es el circuncentro del triángulo ABC.



¿Cuál es el valor de x?

Respuesta: x = 80°

Pista: Como O es el circuncentro del triángulo ABC, OA = OB = OC por ser radios del circuncírculo del triángulo