# Микроэконометрика

## Семинар №1

### Метод максимального правдоподобия и численные методы оптимизации

#### Задание №1

Решите следующую задачу на нормальное распределение.

1. Симулируйте выборку $X=(X_1,\cdots X_n)$ объема $n=10000$ из нормального распределения с математическим ожиданием $\mu=1$ и дисперсией $\sigma^2=25$.

2. Выпишите логарифм функции правдоподобия. Запрограммируйте его как функцию от параметров распределения и реализации выборки.

3. Оцените параметры $\mu$ и $\sigma^2$ при помощи метода максимального правдоподобия

3.1. аналитически: используя FOC и SOC;

3.2. используя численные методы оптимизации.

3.3. Сравните полученные обоими способами результаты.

4. Найдите реализацию оценки ковариационной матрицы оценок параметров распределения используя

4.1. оценку информации Фишера;

4.2. Гессиан в точке реализации вектора ММП оценок.

4.3. Найдите реализацию истинной ковариационной матрицы оценок, используя истинные значения оцениваемых параметров.

4.4. Сравните полученные обоими способами реализации оценки ковариационной матрицы оценок между собой и с реализацией истинной ковариационной матрицы оценок.

5. Проверьте гипотезу о том, что $\mu=1.05$ на уровне значимости $\alpha=0.05$ и вычислите соответствующий p-value, используя реализацию оценки ковариационной матрицы,

5.1. полученную в 4.1;

5.2. полученную в 4.2;

5.3. Сравните полученные результаты.

6. С помощью дельта метода проверьте гипотезу о том, что $\sigma e^{\mu} = 11$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$ и вычислите соответствующий p-value, используя реализацию оценки ковариационной матрицы

6.1. полученную в 4.1;

6.2. полученную в 4.2.

6.3. Сравните полученные результаты.

## Задание №2

Рассмотрим следующую нелинейную модель, со случайной ошибкой, имеющей распределение Стьюдента с десятью степенями свободы:

$$y_i = \beta_0 + x_{1i}^{\beta_1} + \beta_2^{x_{2i}} + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim t(\mathrm{df}), \text{ i.i.d., df=10}$$

$$i \in \{1, \cdots, 10000\}$$

$$\beta_0 = 0.5,\ \beta_1 = 0.75,\ \beta_2 = 0.9$$

В качестве оцениваемых параметров модели выступают $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ и df.

1. Симулируйте $x_1$ и $x_2$ из модуля двумерного нормального распределения с единичными дисперсия и корреляцией $0.5$, а также нулевым вектором математических ожиданий.

2. Выпишите и запрограммируйте логарифм функции правдоподобия.

3. Оцените параметры $\beta_0$, $\beta_1$, $\beta_2$ и df используя метод максимального правдоподобия и численные методы оптимизации.

4. Найдите оценку ковариационной матрицы оценок параметров модели используя Гессиан в точке реализации вектора ММП оценок.

5. Найдите p-value теста, нулевая гипотеза которого заключается в том, что

5.1. $\beta_1 = 0.7$

5.2. $\beta_1^{\beta_0} + \beta_0\beta_2 = 1.35$

6. Найдите предельный эффект переменной $x_1$ при $x_1 = 2$, его ММП оценку, а также её реализацию. Протестируйте гипотезу о равенстве этого предельного эффекта нулю.

## Задание №3

Сами придумайте интересную модель, указав оцениваемые параметры, зависимую переменную, независимые переменные и распределение стохастических компонент (случайных ошибок).

1. Выпишите функцию правдоподобия и запрограммируйте её.

2. Симулируйте данные в соответствии с предложенным вами процессом генерации данных.

3. Оцените параметры вашей модели при помощи численного метода. Убедитесь, что, при большом числе наблюдений, оценки параметров оказываются достаточно близки к истинным значениям оцениваемых параметров. Если этого не происходит, то скорее всего оцениваемая вами функция правдоподобия чрезвычайно сложна и имеет много локальных максимумов. В таком случае попытайтесь упростить модель или удачно подобрать начальную точку.

4. Найдите оценку ковариационной матрицы оценок параметров модели используя Гессиан в точке реализации вектора ММП оценок.

5. Придумайте и проверьте несколько гипотез по поводу ваших параметров и предельных эффектов независимых переменных.