

Содержание

1	ДЗ 1	1
1.1	Задача 1	1
1.1.1	i	2
1.1.2	ii	3
1.2	Задача 2	3
1.3	Задача 3	4
1.4	Задача 4	4
1.4.1	i	4
1.4.2	ii	5
1.5	Задача 5	5
1.5.1	i	5
1.5.2	ii	6
1.5.3	iii	6
1.5.4	iv	7
1.6	Задача 6	7

1 ДЗ 1

1.1 Задача 1

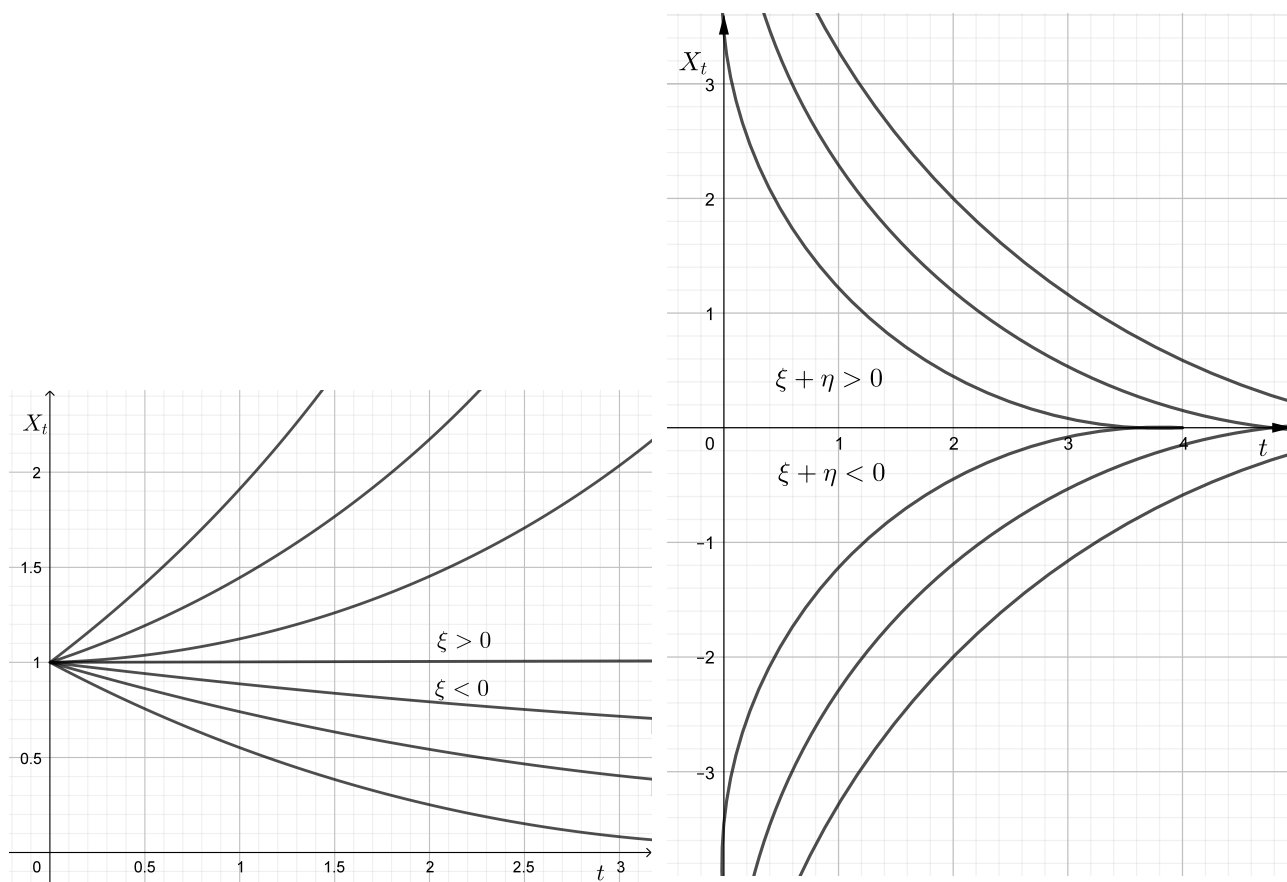


Рис. 1: Траектории

1.1.1 i

Случайный процесс описан уравнением $X_t = e^{\xi t}$

В зависимости от того, будет реализация случайной величины положительной или отрицательной, кривые будут либо экспоненциально возрастать, либо экспоненциально убывать, где ξ будет служить коэффициентом скорости роста. Чем ближе ξ к единице, тем быстрее будет возрастать кривая траектории, а чем ближе к минус единице, тем быстрее убывать. Соответственно, семейство кривых ограничено сверху кривой $X_t = e^{\xi}$, а снизу – кривой $X_t = e^{-\xi}$. Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 слева.

Найдём конечномерные распределения процесса. Для простоты записи покажу на двумерном примере, а далее разширим до многомерного случая.

☀ Очевидно, что $P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = 0$ при $x_1 \leq 0$ и $x_2 \leq 0$, так как показательная функция от экспоненты не может быть отрицательной или нулевой.

☀ При $x_1 \geq 1$ и $x_2 \geq 1$:

$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} &= P\{e^{\xi t_1} \leq x_1, e^{\xi t_2} \leq x_2\} = P\{\xi t_1 \leq \ln(x_1), \xi t_2 \leq \ln(x_2)\} = \\ &P\{\xi \leq \min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \frac{\ln(x_2)}{t_2}\right)\} \end{aligned} \quad (1)$$

☀ При $x_1 \geq 1$ и $0 < x_2 < 1$:

$$\begin{aligned} P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} &= P\{e^{\xi t_1} \leq x_1, e^{\xi t_2} \leq x_2\} = P\{\xi t_1 \leq \ln(x_1), \xi t_2 \leq \ln(x_2)\} = \\ &P\{\xi \leq \min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \frac{\ln(x_2)}{t_2}\right)\} \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $\ln(x_2)$, будет отрицательным, $\ln(x_1)$ - положительным, то $P\{\xi \leq \frac{\ln(x_2)}{t_2}\}$ будет ответом в данном случае.

☀ При $x_2 \geq 1$ и $0 < x_1 < 1$:

Абсолютно аналогично предыдущему случаю

☀ При $0 < x_2 < 1$ и $0 < x_1 < 1$:

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \dots P\{\xi \leq \min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \frac{\ln(x_2)}{t_2}\right)\}$$

В данном случае оба числа будут отрицательными и формула останется без сокращений.

Очевидно (нет, ну правда очевидно, можно я не буду объяснять?), что в многомерном случае будет ровно то же самое. Следовательно, без потери общности, можно записать ответ в сокращённом виде:

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists j \text{ s.t. } x_j \leq 0, j = 1 : n \\ F_{\xi}\left(\min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \dots, \frac{\ln(x_n)}{t_n}\right)\right) & \end{cases}$$

где $F_{\xi}(x)$ - функция распределения случайной величины ξ на $[-1, 1]$

1.1.2 ii

Случайный процесс описан уравнением $X_t = (\xi + \eta)/t$. В зависимости от того, будет ли реализация случайной величины $\xi + \eta$ положительной или отрицательной, траекториями будут семейства гипербол. Соответственно, чем ближе к нулю будет реализована данная случайная величина, тем более вогнуты будут гиперболы вогнуты в сторону точки (0.0). Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 справа.

Что же касается конечномерного распределения, то здесь всё довольно похоже на предыдущий пункт поэтому напишу с минимумом подробностей. Решим для двумерного случая и расширим на многомерный.

Для начала, однако, установим параметры нормального распределения случайной величины $\xi + \eta$. Математическое ожидание ноль. Ковариация двух величин тоже ноль, так что дисперсия равна 1. Получим стандартную нормальную величину.

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{\xi + \eta \leq x_1 t_1, \xi + \eta \leq x_2 t_2\} = P\{\xi + \eta \leq \min(x_1 t_1, x_2 t_2)\}$$

Рассмотрим 4 случая:

$$\odot x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$$

В данном случае обе величины $x_1 t_1, x_2 t_2$ будут отрицательными и ответ будет: $F_{N(0,1)}(\min(x_1 t_1, x_2 t_2))$

$$\odot x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ Очевидно, обе величины } x_1 t_1, x_2 t_2 \text{ будут положительными и ответ: } F_{N(0,1)}(\min(x_1 t_1, x_2 t_2))$$

$$\odot x_1 > 0, x_2 < 0$$

$x_1 t_1$ будет положительной величиной, а $x_2 t_2$ - отрицательной. Ответ: $F_{N(0,1)}(\min(x_1 t_1, x_2 t_2)) = F_{N(0,1)}(x_2 t_2)$

$$\odot x_1 < 0, x_2 > 0 \text{ Ответ зеркален предыдущему.}$$

Очевидно, что с повышением размерности ни один из этих вариантов не будет нарушаться. При наличии хотя бы одной отрицательной переменной x_j среди положительных, она автоматически станет минимумом, а при всех переменных одного знака формула и вовсе не упрощается. Следовательно, без потери общности, запишем ответ:

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} = F_{N(0,1)}(\min(x_1 t_1, \dots, x_n t_n))$$

1.2 Задача 2

$$P\{X_{t_1} < X_{t_2}\} = P\{t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha)) < t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha))\} =$$

$$P\{(t_1 - t_2)\xi_1 + (t_1 - t_2)\alpha\xi_2 < (t_2 - t_1)2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 \geq -2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 + 2\alpha^2 \geq 0\} = 1$$

Чтобы вероятность того, что эта случайная величина была положительной стала равной единице, рассмотрим график. Так как указано, что параметр α является реальным числом, будем рассматривать только случаи с положительным дискриминантом. Чтобы учесть максимальное количество случаев, при которых значение функции в точке положительно, максимально "опустим" параболу, максимизировав дискриминант. Очевидно, что это произойдёт в двух точках относительно ξ : (1, -1), (-1, -1)

$$D = \xi_2^2 - 8\xi_1$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

Все возможные случаи корней при $\xi_2 = + - 1$:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, взяв значения параметра $\alpha \in [-1, 1]$, парабола будет гарантированно будет принимать положительные значения. Ответ: $\alpha \in [-1, 1]$

1.3 Задача 3

$$f_z(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} L[p](u) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x} \right) e^{-ux} dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x(1+u)} + e^{-x(2+u)} dx = \\ &= \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2+u} = \frac{2+u+2+2u}{4+4u+2u+2u^2} = \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \end{aligned} \quad (3)$$

$$L[U](u) = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u \left(1 - \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \right)} = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u \left(\frac{2u^2+3u}{2u^2+6u+4} \right)} = \frac{3u+4}{2u^3+3u^2} = \frac{3u+4}{u^2(2u+3)} \quad (4)$$

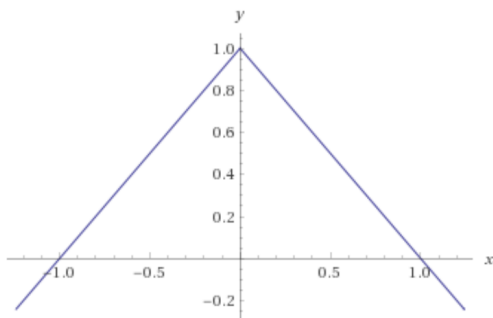
$$\frac{3u+4}{u^2(2u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+3} = \frac{Au(2u+3) + B(2u+3) + Cu^2}{u^2(2u+3)} = \frac{2Au^2 + Cu^2 + 3Au + 2Bu + 3B}{u^2(2u+3)}$$

$$\begin{cases} C + 2A = 0 \\ 3A + 2B = 3 \\ 3B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \quad (5)$$

$$U(t) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\exp^{-\frac{3}{2}t}$$

1.4 Задача 4

1.4.1 i



Для начала выведем несколько необходимых свойств функций плотностей.

$$\begin{aligned} F_{|\xi|} &= P\{|\xi| \leq x\} = P\{-x \leq \xi \leq x\} = \\ &= P\{\xi \leq x\} - P\{\xi \leq -x\} = F_\xi(x) - F_\xi(-x) \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно:

$$f_{|\xi|}(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x)$$

Рис. 2: $f_{\xi-n}(x)$

Теперь по формуле свёртки выведем следующую плотность:

$$f_{\xi-\eta}(x) = f_{\xi+(-\eta)}(x)$$

Для этого выведем следующее свойство:

$$F_{-\eta}(x) = P\{-\eta \leq x\} = P\{\eta \geq -x\} = 1 - F_{\eta}(-x) \Rightarrow f_{-\eta}(x) = f_{\eta}(-x)$$

Теперь возьмём интеграл:

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I\{u-x \in [0; 1]\} I\{-x \in [0; 1]\} = \int_{\max(u-1, -1)}^{\min(u, 0)} 1 dx = \min(u, 0) - \max(u-1, -1)$$

Полученная функция изображена на [2](#).

Так как функция симметричная, $f_{|\xi|}(x) = f_{\xi}(x) + f_{\xi}(-x) = 2f_{\xi}(x)$. Следовательно:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = 2(\min(u, 0) - \max(u-1, -1))$$

Однако следует сделать важное замечание. Так как модуль случайной величины неотрицателен, складывать функции распределения следует только на положительной полуоси. Таким образом, ответ:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = \begin{cases} 0, & u < 0 \\ 2(\min(u, 0) - \max(u-1, -1)), & u \geq 0 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта функция будет соответствовать всем необходимым свойствам функции плотности.

1.4.2 ii

По формуле свёртки:

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \exp^{-|u-x|-|x|} dx = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 \exp^{-|u-x|+x} dx + \int_0^{\infty} \exp^{-|u-x|-x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{\min(u, 0)} \exp^{-u+2x} dx + \int_{\min(u, 0)}^0 \exp^u dx + \int_0^{\max(u, 0)} \exp^{-u} dx + \int_{\max(u, 0)}^{+\infty} \exp^{u-2x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \exp^{-u+2x} \Big|_{-\infty}^{\min(u, 0)} + x \exp^u \Big|_{\min(u, 0)}^0 + x \exp^{-u} \Big|_0^{\max(u, 0)} - \frac{1}{2} \exp^{u-2x} \Big|_{\max(u, 0)}^{+\infty} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \exp^{-u+2\min(u, 0)} - \min(u, 0) \exp^u + \max(u, 0) \exp^{-u} + \frac{1}{2} \exp^{u-2\max(u, 0)} \right) \end{aligned}$$

Вольфрам сказал, что интеграл под этой функцией равен единице, так что всё должно быть верно. По форме распределение напоминает нормальное. Касательно возникших функций минимума и максимума, они призваны регулировать функцию в зависимости от знака параметра u . В зависимости от него один из четырёх интегралов во 2 строке будет схлопываться в нулевой.

1.5 Задача 5

1.5.1 i

Нет, не является процессом восстановления, так как $p\{\xi_i \geq 0\} \neq 1$

1.5.2 ii

Каждая траектория имеет вид ломаной кривой. Она начинается в точке ноль и образует один из путей (слева направо) в древовидной структуре на Рис. 3. Для примера одна из возможных траекторий окрашена в оранжевый. Данная фигура по виду очень напоминает треугольник Паскаля.

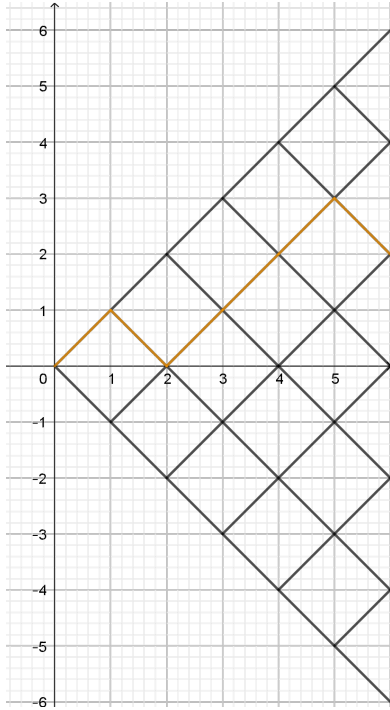


Рис. 3: Траектории S_n

1.5.3 iii

Сколько-нибудь адекватный ответ в явном виде у меня не получился, остался только следующий вариант:

$$\begin{aligned}
 P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} &= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} = \\
 &P\left\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i \leq x_2, \dots, \sum_{i=1}^{t_n} \xi_i \leq x_n\right\} = \\
 &P\left\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1, \dots, \sum_{i=t_{n-1}+1}^{t_n} \xi_i \leq x_n - x_{n-1}\right\}
 \end{aligned}$$

Логика такого перехода в следующем:

$$\sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i + x_1 \leq \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 \Rightarrow \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1$$

Нетрудно проверить, что для каждого периода необходимо просто вычитать предыдущий. Я не до конца уверен в этом переходе, но выглядит красиво. Теперь события независимы. Можно разбить на произведение свёрток в смысле распределений:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1, \dots, \sum_{i=t_{n-1}+1}^{t_n} \xi_i \leq x_n - x_{n-1}\right\} = \\ F^{*t_1}(x_1) \cdot F^{*(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot F^{*(t_n-t_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

Единственное ограничение, которое можно наложить на переменные, это что при $x_j - x_{j-1} < t_j - t_{j-1}$ выражение $\sum_{i=t_{j-1}+1}^{t_j} \xi_i$ обратится в ноль. Это случится потому что сумма описанных выше величин не может быть меньше чем $(-1)^*$ (количество величин в сумме). Итоговый ответ можно записать следующим образом:

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists j \text{ s.t. } x_j - x_{j-1} < t_j - t_{j-1} \\ F^{*t_1}(x_1) \cdot F^{*(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot F^{*(t_n-t_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) & \text{иначе} \end{cases}$$

Мне самому не очень нравится этот ответ, так как она не даёт идей для следующего пункта и так как эти непонятные свёртки вообще неясно как брать в случае дискретных величин.

1.5.4 iv

1.6 Задача 6

Данное утверждение неверно. (Иначе бы его дали в лекции как более общее, ну логично же)

Событие $\{N_t \leq n\}$ можно интерпретировать следующим образом. Возможны три варианта событий:

- ☀ К моменту времени t появилось менее n клиентов.
- ☀ В момент времени t подошёл n -ый покупатель.
- ☀ В какой-то из моментов времени до t подошёл n -ый покупатель, и вплоть до момента t более покупателей не приходило

Следовательно:

$$\{N_t \leq n\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\} \cup \{S_n < t\} \neq \{S_n \geq t\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\}$$

Исходное утверждение неверно.