# Задача 1

а)$E[\sum_{k=1}^{n} t^k Z_k] = \sum_{k=1}^{n} t^k E[Z_k] = 0$

$Cov(\sum_{k=1}^{n} t^k Z_k, \sum_{k=1}^{n} s^k Z_k) = E[(\sum_{k=1}^{n} t^k Z_k) * (\sum_{k=1}^{n} s^k Z_k)] = \sum_{k=1}^{n} (ts)^k E[Z_k^2] = \frac{(ts)^{n+1} - ts}{ts-1}$

Так как у слагаемых в которых стоит произведение двух различных Z будет матожидание 0

Видно что Cov зависит не только от разности, значит не стационарный

б)Аналогично матожидание 0 через раскрытую сумму используя линейность суммы и матожидания

Теперь разберем ковариацию, аналогично нам нужно найти матожидание произведения и в нем нам нужны только те слагаемые в которых стоит квадрат какой-то из k Z

$Cov = \sum_{k=1}^{0.5n} [\sin((2k-1)t)\sin((2k-1)s)E[Z_k^2] + \cos((2k)t)\cos((2k)s)E[Z_k^2]] =$

$\sum_{k=1}^{0.5n} 0.5[\cos((2k-1)(t-s)) - \cos((2k-1)(t+s)) + \cos(2k(t-s)) + \cos(2k(t+s))]$

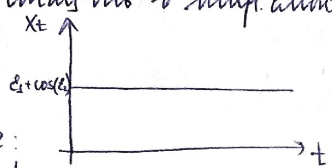
Зафиксируем $t - s = h$ и тогда видно что нам осталось рассмотреть $\sum_{k=1}^{0.5n} \cos(2k(t+s)) - \cos((2k-1)(t+s))$

Если $n = 2$ то видно что $\cos(2(2s+h)) - \cos(2s+h)$ зависит не только от h и поэтому этот процесс тоже не стационарен в широком смысле

# Задача 2

#2. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ - послед-ть i.i.d $\sim N(0,1)$ с.в., $\alpha > 0, \beta > 0$, $t = 1, 2, \ldots$ Стац-ть в шир. смысле и эргодичность - ?

(i). $X_t = \varepsilon_1 + \cos(\varepsilon_2) \rightarrow$ с момента реализации с.в. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ процесс представляет собой константу $\forall t > 0$




Проверим стационарность в широком смысле:

$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_1 + \cos(\varepsilon_2)] = \overbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_1]}^{=0} + \underbrace{\mathbb{E}[\cos(\varepsilon_2)]}_{\text{не зав. от } t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{e}} = const;$

$$K(t,s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s) = \operatorname{cov}(\varepsilon_1+\cos(\varepsilon_2), \varepsilon_1+\cos(\varepsilon_2)) = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.к. } \varepsilon_1 \perp\!\!\!\perp \varepsilon_2, \text{ а ф-ии} \\ \text{от незав. с.в. тоже незав.} \end{array} \right\} =$$

$$= \underbrace{Var(\varepsilon_1)}_{=1} + \underbrace{Var(\cos(\varepsilon_2))}_{\text{не зав. от } t,s} = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(x)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \left(\mathbb{E}[\cos(\varepsilon_2)]\right)^2 = 1 + \frac{1+e^{-2}}{2} - \frac{1}{e} = const \Rightarrow$$

$K(t,s)$ не зав. от $t,s$, $\Rightarrow K(t,s) = K(t+h, s+h)$, $\forall t,s>0$, $h>0$,

$\Rightarrow X_t$ – стационарный в шир. смысле процесс

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_1+\cos(\varepsilon_2)) = \frac{T(\varepsilon_1+\cos(\varepsilon_2))}{T} = \underbrace{\varepsilon_1+\cos(\varepsilon_2)}_{\text{случ. величина}} \not\to const, \Rightarrow X_t \text{ не явл. эргодическим}$$

(ii). $X_t = \varepsilon_t + \alpha t$.

Проверим стац-ть в шир. смысле:

$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \alpha t] = \overbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}^{=0} + \alpha t = \alpha t \to$ зав. от $t$, $\Rightarrow$ процесс не стац. в шир. смысле

Проверим эргодичность.

Заметим, что $X_t \sim N(\mathbb{E}[X_t], Var(X_t))$, т.е. $X_t \sim N(\alpha t, 1)$ (т.к. сумма i.i.d. норм. распр. случ. величин и const), причём $X_t \perp\!\!\!\perp X_s$ $\forall t\neq s$, т.к. $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_s$ $\forall t \neq s$. Тогда

$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \sim N\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right], Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right)\right)$, где

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \underbrace{\mathbb{E}[X_t]}_{=\alpha t} = \frac{\alpha}{T}\sum_{t=1}^{T} t = \frac{\alpha \cancel{T}(T+1)}{2\cancel{T}} = \frac{\alpha(T+1)}{2} \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty$$

Изв-но, что посл-ть норм. с.в. $\eta_n \sim N(\mu_n, \sigma_n^2)$ сх-ся по распр. к $\eta \Leftrightarrow \eta \sim N(\mu, \sigma^2)$, причём $\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$, $\sigma^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^2$, $\Rightarrow$ т.к. $\mu_n = \mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \infty$, $\Rightarrow$ нет сх-ти по распр. к const, $\Rightarrow$ нет сх-ти по вер-ти к const, $\Rightarrow$ процесс не эргодический.

(iii). $X_t = \varepsilon_t + e^{-\beta t}$

Проверим стац-ть в шир. смысле:

$\mathbb{E}[X_t] = \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}_{=0} + e^{-\beta t} = e^{-\beta t}$ – зав. от $t$, $\Rightarrow X_t$ не стац. в шир. смысле;

Проверим эргодичность:

Аналогично с п. (ii), $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \sim N\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right], Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right)\right)$, $X_t \perp\!\!\!\perp X_s$ $\forall t \neq s$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}_{=0} + e^{-\beta t}\right) = \frac{1}{T}\cdot\frac{e^{-\beta}(1-e^{-\beta T})}{1-e^{-\beta}} = \frac{e^{\beta T}-1}{Te^{\beta T}(e^{\beta}-1)} =$$

$$= \frac{1}{T(e^{\beta}-1)} - \frac{1}{Te^{\beta T}(e^{\beta}-1)} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0;$$

$$Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) \overset{X_t \perp\!\!\!\perp X_s}{=\!=} \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} Var(\varepsilon_t + e^{-\beta t}) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\underbrace{Var(\varepsilon_t)}_{=1} = \frac{1}{T} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \xrightarrow{d} 0$, $\Rightarrow \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $\Rightarrow X_t$ – эргодический процесс.

(iv). $X_t = \varepsilon_t + e^{-\beta t} + \alpha t^2$

Проверим стац-ть в шир. смысле:

$\mathbb{E}[X_t] = \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}_{=0} + e^{-\beta t} + \alpha t^2 = e^{-\beta t} + \alpha t^2 \to$ зав. от $t$, $\Rightarrow X_t$ не стац. в шир. смысле

Проверим эргодичность.

Аналогично с (i), $X_t \sim N(e^{-\beta t} + \alpha t^2, 1)$, $\Rightarrow \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \sim N\left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right], Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right)\right)$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}_{=0} + \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e^{-\beta t} + \frac{\alpha}{T}\sum_{t=1}^{T} t^2 = \underbrace{\frac{1}{T(e^{\beta}-1)}}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} 0} - \underbrace{\frac{1}{Te^{\beta T}(e^{\beta}-1)}}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{\alpha \cancel{T}(T+1)(2T+1)}{6\cancel{T}}}_{\xrightarrow[T\to\infty]{} \infty} \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty,$$

$\Rightarrow$ нет сх-ти по распр. к const, $\Rightarrow$ нет сх-ти по вер-ти к const, $\Rightarrow$ процесс не явл. эргодическим.

**Задача 3.** По условию сл. пр. $X_t$ имеет постоянное мат. ожидание.

Кроме того, $K(t+h, s+h) = e^{-\alpha|(t+h)-(s+h)|} = e^{-\alpha|t-s|} = K(t,s)$

Итак, процесс $X_t$ стационарный в широком смысле.

Автоков. ф-ция проц. $X_t$: $\gamma(r) = e^{-\alpha|r|}$

Заметим, что $\lim\limits_{|r|\to\infty} \gamma(r) = \lim\limits_{|r|\to\infty} e^{-\alpha|r|} = 0 \Longrightarrow$ как мы доказали на лекции,

из этого следует, что $X_t$ эргодический.

А это значит, что $\exists c \in \mathbb{R}$: $\operatorname{plim}\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} X_t = c$.

Но тогда $\operatorname{plim}\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} Y_t = \operatorname{plim}\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} X_t + \operatorname{plim}\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T} \xi = c + \operatorname{plim}\limits_{T\to\infty} \xi$;

что не сходится к константе; т.к. $Var(\xi) \neq 0$ по условию.

Зн., $Y_t$ не явл. эргодич. процессом.

Ответ: процесс $Y_t$ НЕ является эргодическим.

**Задача 4.**

Сначала убедимся в том, что проц. $X_t$ явл. стац. в шир. см.

$E[X_t] = E[Y_{t+1}] - E[Y_t] = \alpha + \beta(t+1) - \alpha - \beta t = \beta$ — НЕ завис. от $t$.

$Cov(X_t, X_s) = Cov(Y_{t+1} - Y_t, Y_{s+1} - Y_s) = Cov(Y_{t+1}, Y_{s+1}) + Cov(Y_{t+1}, Y_s) + Cov(Y_t, Y_{s+1}) + Cov(Y_t,$

$= e^{-\lambda|t+1-s-1|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t+1-s|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t-s-1|} + e^{-\lambda|t-s|} = 2e^{-\lambda|t-s|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t+1-s|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t-s-1|}$.

Тогда $Cov(X_{t+h}, X_{s+h}) = 2\cdot e^{-\lambda|t+h-s-h|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t+h+1-s-h|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t+h-s-h-1|} = 2\cdot e^{-\lambda|t-s|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t+1-s|} \cancel{+} - e^{-\lambda|t-s-$

$= Cov(X_t, X_s)$ $\begin{cases} EX_t = const \\ Cov(X_{t+h}, X_{s+h}) = Cov(X_t, X_s) \end{cases} \Longrightarrow X_t$ — стац. в шир. см. процесс.

Автоков. ф-ция: $\gamma(r) = 2e^{-\beta|r|} \cancel{+} - e^{-\beta|r+1|} \cancel{+} - e^{-\beta|r-1|}$.

$\lim\limits_{r\to\infty} \gamma(r) = \lim\limits_{r\to\infty} \left(2\cdot e^{-\beta|r|} \cancel{+} - e^{-\beta|r+1|} \cancel{+} - e^{-\beta|r-1|}\right) = 2\cdot 0 \cancel{+} - 0 \cancel{+} - 0 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ по доказанному следствию сл. пр. $X_t$ эргодический.

Ответ: Да, $X_t$ является эргодическим.