1 ДЗ 1

1.1 Номер 1

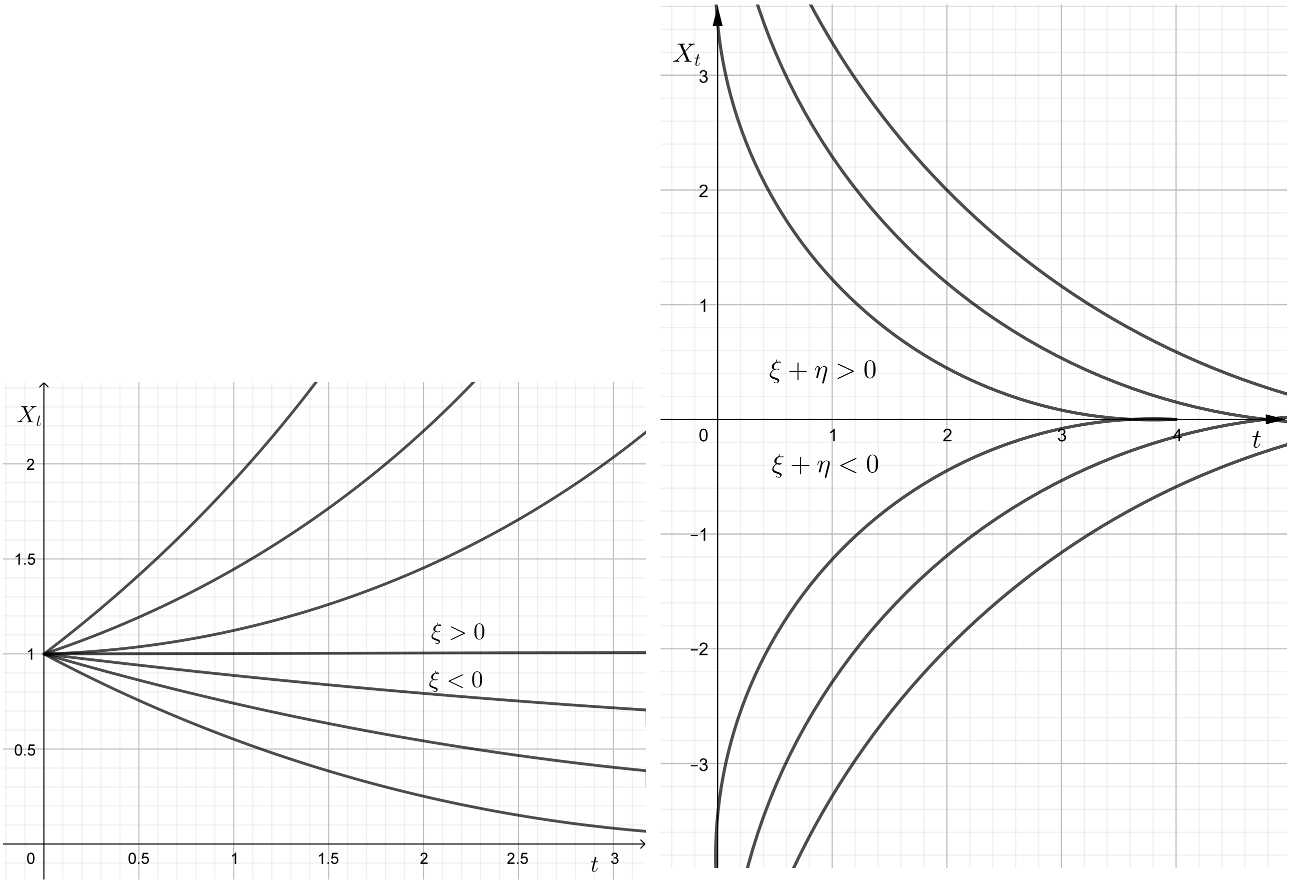

Рис. 1: Траектории

1.1.1 i

Случайный процесс описан уравнением $X_t = e^{\xi t}$

В зависимости от того, будет реализация случайной величины положительной или отрицательной, кривые будут либо экспоненциально возрастать, либо экспоненциально убывать, где ξ будет служить коэффициентом скорости роста. Чем ближе ξ к единице, тем быстрее будет возрастать кривая траектории, а чем ближе к минус единице, тем быстрее убывать. Соответственно, семейство кривых ограничено сверху кривой $X_t = e^{\xi}$, а снизу – кривой $X_t = e^{-\xi}$. Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 слева.

1.1.2 ii

Случайный процесс описан уравнением $X_t = (\xi + \eta)/t$. В зависимости от того, будет ли реализация случайной величины $\xi + \eta$ положительной или отрицательной, траекториями будут семейства гипербол. Соответственно, чем ближе к нулю будет реализована данная случайная величина, тем более вогнуты будут гиперболы вогнуты в сторону точки (0.0). Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 справа.

1.2 Номер 2

$$P\{X_{t_1} < X_{t_2}\} = P\{t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha)) < t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha))\} =$$

$$P\{(t_1 - t_2)\xi_1 + (t_1 - t_2)\alpha\xi_2 < (t_2 - t_1)2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 \geq -2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 + 2\alpha^2 \geq 0\} = 1$$

Чтобы вероятность того, что эта случайная величина была положительной стала равной единице, рассмотрим график. Так как указано, что параметр α является реальным числом, будем рассматривать только случаи с положительным дискриминантом. Чтобы учесть максимальное количество случаев, при которых значение функции в точке положительно, максимально "опустим"параболу, максимизировав дискриминант. Очевидно, что это произойдёт в двух точках относительно ξ: (1, -1), (-1, -1)

$$D = \xi_2^2 - 8\xi_1$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

Все мозможные случаи корней при $\xi_2 = + - 1$:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, взяв значения параметра $\alpha \in [-1, 1]$, парабола будет гарантированно будет принимать положительные значения. Ответ: $\alpha \in [-1, 1]$

1.3 Задача 3

$$f_z(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} L[p](u) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}\right) e^{-ux}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x(1+u)} + e^{-x(2+u)}dx = \\ = \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2+u} = \frac{2+u+2+2u}{4+4u+2u+2u^2} = \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \end{aligned} \tag{1}$$

$$L[U](u) = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u\left(1 - \frac{4+3u}{2u^2+6u+4}\right)} = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u\left(\frac{2u^2+3u}{2u^2+6u+4}\right)} = \frac{3u+4}{2u^3+3u^2} = \frac{3u+4}{u^2(2u+3)} \tag{2}$$

$$\frac{3u+4}{u^2(2u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+3} = \frac{Au(2u+3) + B(2u+3) + Cu^2}{u^2(2u+3)} = \frac{2Au^2 + Cu^2 + 3Au + 2Bu + 3B}{u^2(2u+3)}$$

$$\begin{cases} C + 2A = 0 \\ 3A + 2B = 3 \\ 3B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \tag{3}$$

$$U(t) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\exp^{-\frac{3}{2}t}$$

1.4 Задача 4

1.4.1 i

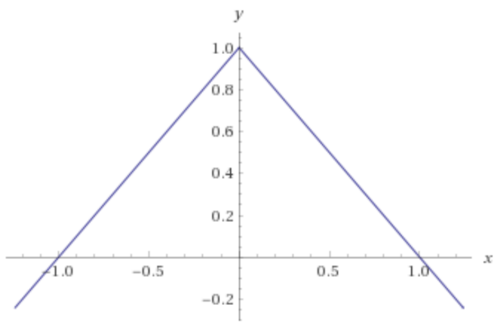

Рис. 2: $f_{\xi-\eta}(x)$

Для начала выведем несколько необходимых свойств функций плотностей.

$$F_{|\xi|} = P\{|\xi| \le x\} = P\{-x \le \xi \le x\} = \\ P\{\xi \le x\} - P\{\xi \le -x\} = F_\xi(x) - F_\xi(-x) \tag{4}$$

Следовательно:

$$f_{|\xi|}(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x)$$

Теперь по формуле свёртки выведем следующую плотность:

$$f_{\xi-\eta}(x) = f_{\xi+(-\eta)}(x)$$

Для этого выведем следующее свойство:

$$F_{-\eta}(x) = P\{-\eta \le x\} = P\{\eta \ge -x\} = 1 - F_\eta(-x) \Rightarrow f_{-\eta}(x) = f_\eta(-x)$$

Теперь возьмём интеграл:

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I\{u - x \in [0;1]\} I\{-x \in [0;1]\} = \int_{max(u-1,-1)}^{min(u,0)} 1dx = min(u,0) - max(u-1,-1)$$

Полученная фукнция изображена на 2.

Так как функция симметричная, $f_{|\xi|}(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x) = 2f_\xi(x)$. Следовательно:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = 2(min(u,0) - max(u-1,-1))$$

Данная функция не удовлетворяет стандартным условиям, накладываемым на функции плотности. Ситуацию исправит нормированная константа $\frac{1}{2}$. Следовательно, ответ:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = min(u,0) - max(u-1,-1)$$

1.4.2 ii

По формуле свёртки:

$$f_{\xi+\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \exp^{-|u-x|-|x|} dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} \exp^{-|u-x|+x} dx + \int_{0}^{\infty} \exp^{-|u-x|-x} dx\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{min(u,0)} \exp^{-u+2x} dx + \int_{min(u,0)}^{0} \exp^{u} dx + \int_{0}^{max(u,0)} \exp^{-u} dx + \int_{max(u,0)}^{+\infty} \exp^{u-2x} dx\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\exp^{-u+2x}\Big|_{-\infty}^{min(u,0)} + x\exp^{u}\Big|_{min(u,0)}^{0} + x\exp^{-u}\Big|_{0}^{max(u,0)} - \frac{1}{2}\exp^{u-2x}\Big|_{max(u,0)}^{+\infty}\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\exp^{-u+2min(u,0)} - min(u,0)\exp^{u} + max(u,0)\exp^{-u} + \frac{1}{2}\exp^{u-2max(u,0)}\right)$$

Вольфрам сказал, что интеграл под этой функцией равен единице, так что всё должно быть верно. По форме распределение напоминает нормальное. Касательно возникших функций минимума и максимума, они призваны регулировать функцию в зависимости от знака параметра u. В зависимости от него один из четырёх интегралов во 2 строке будет схлопываться в нулевой.

1.5 Задача 5

1.5.1 i

Нет, не является процессом восстановления, так как $p\{\xi_i \geq 0\} \neq 1$

1.5.2 ii

Каждая траектория имеед вид ломаной кривой. Она начинается в точке ноль и образует один из путей (слева направо) в древовидной структуре на Рис. 3.Для примера одна из возможных траекторий окрашена в оранжевый. Данная фигура по виду очень напоминает треугольник Паскаля.

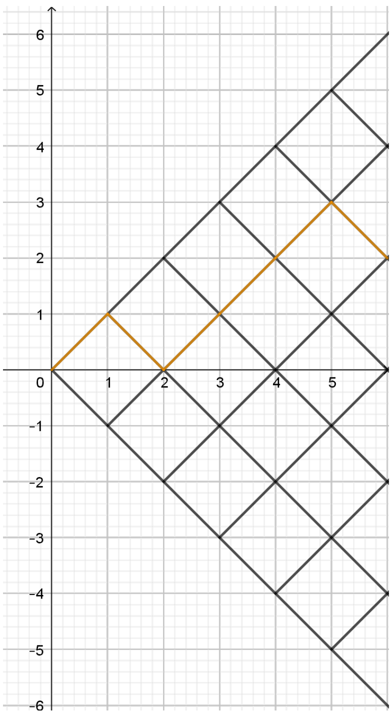

Рис. 3: Траектории S_n

1.5.3 iii

1.5.4 iv

1.6 Задача 6

$$\{S_n \geq t\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\} =$$

Так как $\{S_n > t\} = \{N_t < n\}$

$$= \{N_t < n\} \cup \{S_n = t\} =$$

Так как функция N_t непрерывна справа, то по построению очевидно, что $\{S_n = t\} = \{N_t = n\}$

$$= \{N_t < n\} \cup \{N_t = n\} = \{N_t \leq n\}$$