#1. $X_n < s \rightarrow X_{n+1} = S$; день с номером $n = 0, 1, 2, \dots$ заказы на $\mathcal{D}_n$ коробок, $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots$ – i.i.d.

Запишем формулировку процесса: $X_{n+1} = \begin{cases} S, & \text{если } X_n < s, \\ X_n - \mathcal{D}_n, & \text{если } X_n \in [s; S] \end{cases}$ → по сост-ю на 9:00 n+1-го дня

(предположим, что в случае $X_n < s$ склад пополняется до поступления n+1-го заказа а реш-е о пополнении прин. до $\mathcal{D}_n$)

Тогда $\mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \mathbb{P}\{S \cdot \mathbb{I}_{\{X_n < s\}} + \mathbb{I}_{\{X_n \in [s;S]\}}(X_n - \mathcal{D}_n) = j \mid X_n = i\} = \begin{cases} \mathbb{I}_{\{j=S\}}, & \text{если } i < s, \\ \mathbb{P}\{\mathcal{D}_n = i - j\}, & i \in [s; S] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

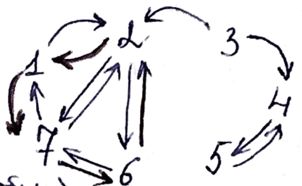
→ при добавлении „предыстории" вероятность не изменилась, т.к. она зависит только от предыдущего состояния цепи (это видно из записи вероятности): склад пополняется, а величина $\mathcal{D}_1, \dots$ – i.i.d. ⇒ X_n – цепь Маркова

#2

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) найти классы эквивалентности;
(ii) определить сущ/несущ, период./непериод. сост-я;
(iii) найти стац. распр.

Приведём графич. представление данной цепи.



Можно выделить след. классы эквив-ти: 1-2-6-7 (сообщ.)
3 (ни с каким не сообщ.)
4-5 (из 4 можно попасть только в 5, из 5 - в 4)

i) Существенные состояния ($\forall i: j \to i \Rightarrow i \to j$): 1, 2, 6, 7, 4, 5

Несущественные сост-я ($\exists i: j \to i,\ i \not\to j$): 3

Периодические сост-я: 4, 5: $d(4) = d(5) = 2$ (1 кл. эквив)

Непериодические сост-я: 1, 2, 6, 7, 3: $d(1) = 1, \Rightarrow d(2) = d(6) = d(7) = 1$ (1 кл. эквив.)
$d(3) = 1$, т.к. НОД $\varnothing$

iii). Стац. распр.: $\vec{\pi}\underline{P} = \vec{\pi}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_7 = \pi_1 & (1) \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_6 + \frac{1}{3}\pi_7 = \pi_2 & (2) \\ \frac{1}{2}\pi_3 + \pi_5 = \pi_4 & (3) \\ \pi_4 = \pi_5 & (4) \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_7 = \pi_6 & (5) \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_6 = \pi_7 & (6) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 & (7) \end{cases}$$

$(4) \to (3)$: $\pi_3 = 0$, $\Rightarrow (2')$: $\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_6 + \frac{1}{3}\pi_7 = \pi_2$

$(2') - (6)$: $\frac{1}{3}\pi_7 + \pi_7 - \pi_2 - \frac{1}{3}\pi_2 = 0, \Rightarrow \pi_2 = \pi_7, \Rightarrow \left.\begin{matrix} (5): \frac{2}{3}\pi_2 = \pi_6 \\ (1): \frac{2}{3}\pi_2 = \pi_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi_1 = \pi_6$

$$\Rightarrow (7): 2\pi_1 + 2\pi_5 + 3\pi_1 = 1, \Rightarrow \begin{cases} \pi_5 = \frac{1 - 5\pi_1}{2} = \pi_4, \quad \pi_1 \in [0; 1/5], \ \pi_5 = \pi_4 \in [0; 1/2] \\ \pi_2 = \frac{3}{2}\pi_1 = \pi_7, \quad \pi_2 = \pi_7 \in [0; 3/10] \\ \pi_1 = \pi_6 \in [0; 1] \\ \pi_3 = 0 \end{cases}$$

пусть $\pi_1 = \alpha \in [0; 1/5]$, тогда $\pi^* = (\alpha; \frac{3}{2}\alpha; 0; \frac{1-5\alpha}{2}; \frac{1-5\alpha}{2}; \alpha; \frac{3}{2}\alpha)$ – множество стац. распределений.

#3.

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad p_{23}^{(n)} - ?$$

По теореме, $P^{(n)} = P^n$, а $p_{23}^{(n)}$ является элементом матрицы $P^{(n)}$ с индексом 23. ⇒ найдём $P^{(n)}$. Известно, что $P = M^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} M$, ⇒ найдём собственные значения P:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} 1/3-\lambda & 1/3 \\ 1/2 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} - 1/3 \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} + 1/4 \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3-\lambda & 1/3 \end{vmatrix} =$$

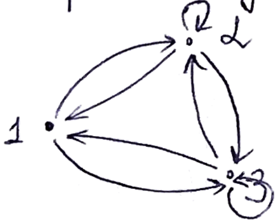
$$= -\lambda\left(\frac{1}{12} - \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda}{4} + \lambda^2 - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{\lambda}{12} + \frac{7\lambda^2}{12} - \lambda^3 + \frac{1}{24} + \frac{2\lambda}{6} + \frac{\lambda}{8} =$$

$$= -\lambda^3 + \frac{7\lambda^2}{12} + \frac{9\lambda}{24} + \frac{1}{24} = 0 \; | \cdot 24$$

$$-24\lambda^3 + 14\lambda^2 + 9\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \Rightarrow$$

$$\begin{array}{r|l} -24\lambda^3 + 14\lambda^2 + 9\lambda + 1 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} -\;\; -24\lambda^3 + 24\lambda^2 \quad\quad\quad\; & -24\lambda^2 - 10\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1/4, \; \lambda_3 = -1/6 \\ \hline -10\lambda^2 + 9\lambda \quad\; & \\ -\;\; -10\lambda^2 + 10\lambda \quad\; & \\ \hline -\lambda + 1 & \\ -\;\; -\lambda + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

P^n - лин. комбинация собств. значений, ⇒ можно представить $p_{23}^{(n)}$ как $p_{23}^{(n)} = A \cdot \lambda_1^n + B\lambda_2^n + C\lambda_3^n$. Найдём константы, подставляя конкретные значения n:



$n=0: \; p_{23}^{(0)} = A + B + C = 0$

$n=1: \; p_{23}^{(1)} = A - \frac{1}{4}B - \frac{1}{6}C = \frac{1}{3}$

$n=2: \; p_{23}^{(2)} = A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{36}C$. Найдём $p_{23}^{(2)}$:

марк. св-во

$$\mathbb{P}\{X_2 = 3 \mid X_0 = 2\} = \mathbb{P}\{X_2 = 3 \mid X_1 = 3, \cancel{X_0 = 2}\} \cdot \mathbb{P}\{X_1 = 3 \mid X_0 = 2\} + \mathbb{P}\{X_2 = 3 \mid X_1 = 2, \cancel{X_0 = 2}\} \cdot \mathbb{P}\{X_1 = 2 \mid X_0 = 2\} +$$

$$+ \mathbb{P}\{X_2 = 3 \mid X_1 = 1, \cancel{X_0 = 2}\} \cdot \mathbb{P}\{X_1 = 1 \mid X_0 = 2\} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{13}{36}$$

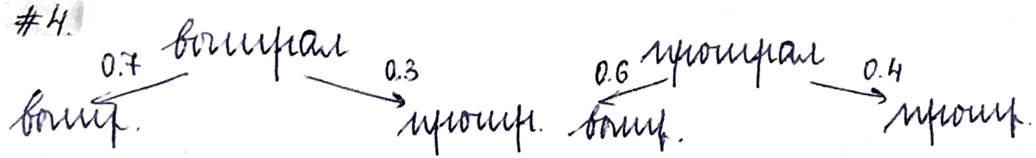
$$\Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - \frac{1}{4}B - \frac{1}{6}C = \frac{1}{3} \\ A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{36}C = \frac{13}{36} \end{cases} \Rightarrow \text{решим систему:}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/4 & -1/6 & 1/3 \\ 1 & 1/16 & 1/36 & 13/36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5/4 & -7/6 & 1/3 \\ 0 & -15/16 & -35/36 & 13/36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 14 & -4 \\ 0 & 270 & 280 & -104 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{15} & 14 & -4 \\ 0 & 135 & 140 & -52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 15 & 14 & -4 \\ 0 & 0 & 210 & -240 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 15 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 15 & 14 & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{7} & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 105 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 105 & 0 & 84 \\ 0 & 0 & 7 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow A = \frac{12}{35}, \; B = \frac{4}{5}, \; C = -\frac{8}{7}$$

$$\Rightarrow p_{23}^{(n)} = \frac{12}{35} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{8}{7} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

#4.

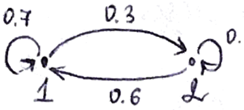


$p_{11}^{(3)}$ - ?

(3 шага, т.к. т. старта - X_1)

Можно видеть, что вероятность выигр/проигр. в тек. матче зав. только от предыдущего, ⇒ для описания можно исп-ть цепь Маркова. Обозначим выигрыш как 1-е состояние, проигрыш - как 2-е. Тогда матрица переходных вер-й за 1 шаг имеет вид

$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$, соответствующий граф



Исходя из аналогичной с #3 логики, найдём собств. зн-я P:

$$\begin{vmatrix} 0.7-\lambda & 0.3 \\ 0.6 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = 0.28 - 1.1\lambda + \lambda^2 - 0.18 = 0, \Rightarrow \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.1 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 0.1$$

Тогда $p_{11}^{(n)}$ можно представить как: $p_{11}^{(n)} = A + (0.1)^n \cdot B$. Найдём A и B, подставляя конкретное значение n:

$$\begin{aligned} n = 0: & \begin{cases} A + B = p_{11}^{(0)} = 1 \\ A + 0.1B = p_{11}^{(1)} = 0.7 \end{cases} \rightarrow B = 1 - A \\ n = 1: & \end{aligned}$$

$$\rightarrow 0.9A = 0.6, \Rightarrow A = \frac{2}{3}, \; B = \frac{1}{3}.$$

Отсюда $p_{11}^{(n)} = \frac{2}{3} + (0.1)^n \cdot \frac{1}{3}$; в частности, при $n = 3$

$$p_{11}^{(3)} = \frac{1}{3} + 0.1^3 \cdot \frac{1}{3} = 0.667.$$