Задача 1

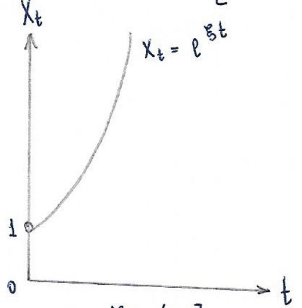
1. (i)

$X_t = e^{\xi t}$, $t \in (0; +\infty)$, $\xi \sim U[-1; 1]$.

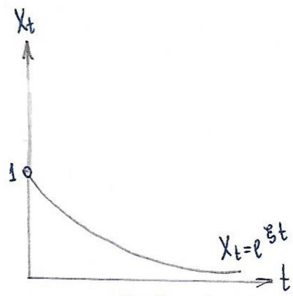
$$\mathbb{P}\{X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_k} \le x_k\} = \mathbb{P}\{e^{\xi t_1} \le x_1, \dots, e^{\xi t_k} \le x_k\} = \mathbb{P}\left\{\xi \le \frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, \xi \le \frac{\ln x_k}{t_k}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\xi \le \min\left(\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, \frac{\ln x_k}{t_k}\right)\right\} =$$

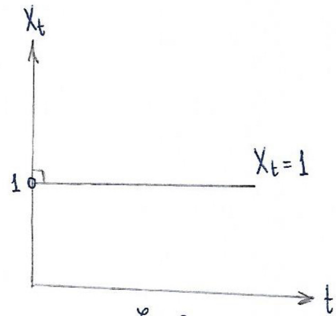
$$= \begin{cases} 1, \text{ если } \min\left(\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, \frac{\ln x_k}{t_k}\right) \geqslant 1; \\ 0, \text{ если } \min\left(\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, \frac{\ln x_k}{t_k}\right) \le -1; \\ \dfrac{\min\left(\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, \frac{\ln x_k}{t_k}\right) + 1}{2}, \text{ если } -1 < \min\left(\frac{\ln x_1}{t_1}, \dots, \frac{\ln x_k}{t_k}\right) < 1. \end{cases}$$



$\xi \in (0; 1]$



$\xi \in [-1; 0)$



$\xi = 0$

(ii) $X_t = (\xi + \eta)/t$

$t \in (0; +\infty)$

$\xi, \eta \sim N(0, \frac{1}{2})$ и независимы.

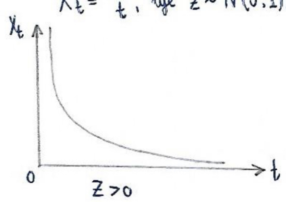
$$\mathbb{P}\{X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_k} \le x_k\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\xi + \eta}{t_1} \le x_1, \dots, \frac{\xi + \eta}{t_k} \le x_k\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\xi + \eta \le x_1 \cdot t_1, \dots, \xi + \eta \le x_k \cdot t_k\} =$$

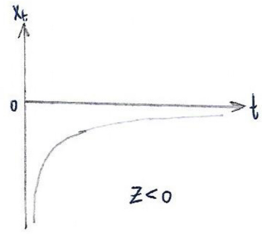
% Заметим, что $\xi + \eta = Z$, где $Z \sim N(0, 1)$

$$= \mathbb{P}\{Z \le \min(x_1 t_1, \dots, x_k t_k)\} = F_Z(\min(x_1 t_1, \dots, x_k t_k)),$$ где F_Z – функция распределения стандартной нормальной случ. величины.

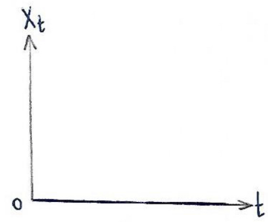
$X_t = \frac{Z}{t}$, где $Z \sim N(0; 1)$.



$Z > 0$



$Z < 0$



$Z = 0$

Задача 2

Задача 2

Поскольку при фиксированных w и a наша функция имеет вид Ct, то нам надо найти все значения a, при которых для любых значений случайных величин $P(C > 0) = 1$

$\xi_1 + a(\xi_2 + 2a)$, будем минимизировать данное выражение по $\cancel{x_1}$ ξ и ξ_2, считая, что они принимают значения только в пределах $[-1;1]$. Если минимум этого выражения оказывается меньше 0, то данная функция, непрерывная по обоим аргументам, будет иметь некую окрестность этой точки, где значений будут меньше 0, а в силу равномерного распределения двумерной сл.вел. (ξ_1, ξ_2)(обе независимы и равномерно распределены, произведение плотностей тоже константа) площадь этой окрестности, отвечающая случаю $P(C \leq 0) = 0$ будет ненулевой.
Точки вне "в пределах $[-1;1]$"смысла рассматривать нет, т.к вероятность попадания туда все равно 0
Тогда проверим минимум на $C \geq 0$ и потом проверим что $C = 0$ с нулевой вероятностью

Минимизируем по ξ_1 при $\xi_2 = const$, линейная функция с положительным наклоном, минимум при $\xi_1 = -1$
$a(\xi_2 + 2a) - 1$, минимизируем по ξ_2, тоже линейная функция. Видно что при $a = 0$ минимальное значение $C = -1$ не подходит

$a > 0$: Тогда минимальное значение функции $C = a(2a - 1) - 1 \geq 0$
Решая данное квадратное уравнение на ОДЗ, получаем $a \geq 1$
При $a > 1$ минимальное значение > 0, аккуратно проверим $a = 1$
Тогда $\xi_1 + \xi_2 + 2 = 0$ в единственной точке (-1,-1), вероятность такого равна 0, все ок

$a < 0$: Тогда минимальное значение функции $C = a(2a + 1) - 1 \geq 0$
Решая данное квадратное уравнение на ОДЗ, получаем $a \leq -1$
При $a < -1$ минимальное значение > 0, аккуратно проверим $a = -1$
Тогда $\xi_1 - \xi_2 + 2 = 0$ в единственной точке (-1;1), вероятность такого равна 0, все ок
Значит почти все траектории возрастают при $a \in \mathbb{R} \setminus (-1;1)$ +

Задача 3

3) N_t – считающий процесс.

S_n – процесс восстановления.

$S_n = S_{n-1} + \varepsilon_n$

$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} + e^{-2x}$

$E N_t = ?$

- $f_\varepsilon(x) \longrightarrow \mathcal{L}_p(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_\varepsilon(x) \cdot dx$

$$\mathcal{L}_p(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\left[\frac{1}{2}\cdot e^{-x} + e^{-2x}\right]\cdot dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x(s+1)}\cdot dx + \int_0^\infty e^{-x(s+2)}\cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{s+2+2s+2}{2(s+1)(s+2)} = \frac{3s+4}{2(s+1)(s+2)}$$

- $$\mathcal{L}_v(s) = \frac{\left(\frac{3s+4}{2(s+1)(s+2)}\right)}{s\left(1 - \frac{3s+4}{2(s+1)(s+2)}\right)} = \frac{3s+4}{\cancel{2(s+1)(s+2)}s}\cdot\frac{\cancel{2(s+1)(s+2)}}{2(s^2+3s+2) - 3s+4} =$$

$$= \frac{3s+4}{\cancel{2}s\cdot(2s^2 + \cancel{6}s + \cancel{4} - \cancel{3s} - \cancel{4})}_{3} = \frac{3s+4}{s^2(2s+3)}$$

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{2s+3} = \frac{As(2s+3) + 2Bs + 3B + Cs^2}{\dots} = \frac{2As^2 \overset{+3As}{+} Cs^2 + 2Bs + 3B}{\dots}$$

$$\begin{cases} 2A + C = 0 & \Rightarrow C = -2\cdot\frac{1}{9} = -\frac{2}{9} \\ 3A + 2B = 3 & 3A = 3 - \frac{8}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{9} \\ 3B = 4 & \Rightarrow B = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_v(s) = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s^2} - \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2s+3} = \frac{1}{9s} + \frac{4}{3s^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s+3/2}$$

$$\boxed{\bullet\ U(x) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{9}\cdot e^{-\frac{3}{2}x}}$$

Задача 4

④. (i) $\xi, \eta \sim U[0;1]$ и независимы.

$$F_{|\xi-\eta|}(x) = \mathbb{P}\{|\xi-\eta| \le x\} = \mathbb{P}\{-x \le \xi-\eta \le x\} = F_{\xi-\eta}(x) - F_{\xi-\eta}(-x)$$

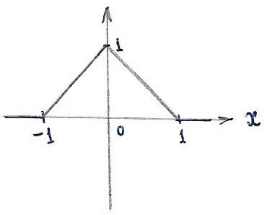
$$f_{|\xi-\eta|}(x) = F'_{|\xi-\eta|}(x) = f_{\xi-\eta}(x) + f_{\xi-\eta}(-x)$$

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_\xi(x-y)\cdot \mathbb{I}\{0 \le x-y \le 1\}\cdot f_\eta(y)\cdot \mathbb{I}\{y\in[-1;0]\}\cdot dy =$$

$$= \int 1\cdot dy = \begin{cases} \int_{x-1}^{0} dy, \text{ если } 1 \ge x \ge 0 \\ \int_{-1}^{x} dy, \text{ если } -1 \le x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-x, \text{ если } x\in[0;1] \\ 0, \text{ иначе.} \\ x+1, \text{ если } x\in[-1;0] \end{cases}$$

Очевидно, что $f_{\xi-\eta}(x) = f_{\xi-\eta}(-x)$

$f_{\xi-\eta}(x)$



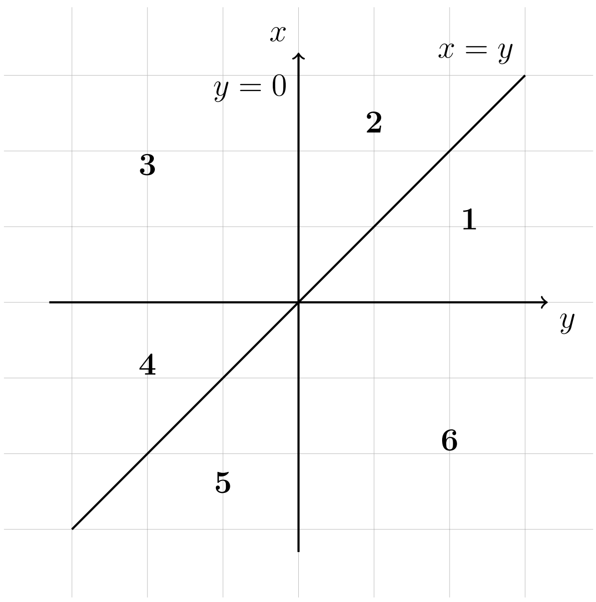
Осталось заметить, что $|\xi-\eta| \ge 0$.

$$f_{|\xi-\eta|} = \begin{cases} 2(1-x), \text{ если } x\in[0;1] \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

ii. Воспользуемся формулой свёртки:

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int_{\mathbb{R}} p(x-y)\cdot p(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}e^{-|x-y|}\cdot\frac{1}{2}e^{|y|}dy$$

Исходя из того, что в интеграле есть выражения с модулем, разобьём его на части, как изображено ниже:



– Случай 1. Области $\mathbf{1-3}$ или $x \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{-(x-y)} \cdot \frac{1}{2} e^{y} dy + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-(x-y)} \cdot \frac{1}{2} e^{-y} dy + \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{(x-y)} \cdot \frac{1}{2} e^{-y} dy \\
= \frac{e^{-x}}{4} \int_{-\infty}^{0} e^{2y} dy + \frac{e^{-x}}{4} \int_{0}^{x} dy + \frac{e^{x}}{4} \int_{x}^{+\infty} e^{-2y} dy \\
= \frac{e^{-x}}{4} \cdot \left. \frac{e^{2y}}{2} \right|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-x}}{4} \cdot \left. y \right|_{0}^{x} + \frac{e^{x}}{4} \cdot \left. \frac{e^{-2y}}{-2} \right|_{x}^{+\infty} \\
= \frac{e^{-x}}{8} + \frac{x e^{-x}}{4} + \frac{e^{-x}}{8} \\
= \frac{e^{-x}}{4} (1 + x)
\end{aligned}
$$

– Случай 2. Области $\mathbf{4-6}$ или $x < 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-(x-y)} \cdot \frac{1}{2} e^{y} dy + \int_{x}^{0} \frac{1}{2} e^{(x-y)} \cdot \frac{1}{2} e^{y} dy + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{(x-y)} \cdot \frac{1}{2} e^{-y} dy \\
= \frac{e^{-x}}{4} \int_{-\infty}^{x} e^{2y} dy + \frac{e^{x}}{4} \int_{x}^{0} dy + \frac{e^{x}}{4} \int_{0}^{\infty} e^{-2y} dy \\
= \frac{e^{-x}}{4} \left. \frac{e^{2y}}{y} \right|_{-\infty}^{x} + \frac{e^{x}}{4} \cdot \left. y \right|_{x}^{0} + \frac{e^{x}}{4} \cdot \left. \frac{e^{-2y}}{-2} \right|_{0}^{+\infty} \\
= \frac{e^{x}}{8} - \frac{x e^{x}}{4} + \frac{e^{x}}{8} \\
= \frac{e^{x}}{4} (1 - x)
\end{aligned}
$$

Объединив, получим ответ:

$$
p_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{4}(1+x), & x \geq 0 \\ \frac{e^{x}}{4}(1-x), & x < 0 \end{cases}
$$