### *2.4. Тождество Вальда*

**Определение 2.5.** Пусть задана некоторая последовательность величин $X_1, X_2, ...$ (возможно, зависимых и разнораспределённых). *Момент остановки* (stopping time, stopping trial) $\tau$ - это случайная величина, принимающая значения $1, 2, 3, ...$, такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}\{\tau = n\}$ является детерминированной функцией от $X_1, X_2, ..., X_n$.

**Пример 2.6.** Несколько игроков передвигают фишки по игровому полю в соответствии с подбрасыванием кубика. Пусть $X_1, X_2, ...$ - это результаты поочерёдных подбрасываний кубика, то есть i.i.d. случайные величины, имеющие равномерное распределение на $\{1, .., 6\}$. Тогда случайная величина *"количество ходов до окончания игры"* является моментом остановки.

**Теорема 2.7.** *(Тождество Вальда, Wald's equality) Пусть $X_1, X_2, ...$ - i.i.d. случайные величины, $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Пусть $\tau-$ момент остановки, $\mathbb{E}\tau < \infty$. Тогда*

$$\mathbb{E}\big[X_1 + ... + X_\tau\big] = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau.$$

*Доказательство.* Запишем математическое ожидание в следующем виде:

$$\mathbb{E}\big[X_1 + ... + X_\tau\big] \quad = \quad \mathbb{E}\big[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}\big]. \tag{8}$$

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$, случайные величины $X_n$ и $\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}$ являются независимыми. Действительно,

$$\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\} = 1 - \mathbb{I}\big\{\tau = 1\big\} - ... - \mathbb{I}\big\{\tau = n - 1\big\}. \tag{9}$$

По определению момента остановки, для любого $k = 1..(n-1)$, $\mathbb{I}\{\tau = k\}$ является детерминированной функцией от $X_1, ..., X_k$, и поэтому левая и правая части (9) являются функцией от $X_1, ...., X_{n-1}$. Значит, $X_n$ и $\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}$ независимы. Продолжим равенство в (8):

$$\mathbb{E}\big[X_1 + ... + X_\tau\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n \cdot \mathbb{E}\big[\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}\big]$$
$$= \mathbb{E}X_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big\{\tau \geq n\big\} = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau.$$

□

Теперь применим Теорему 2.7 к процессу восстановления. В качестве последовательности величин возьмём $\xi_1, \xi_2, ....$ Важно отметить, что $N_t$ не является моментом остановки: для любого натурального $n$ , по $\xi_1, ..., \xi_n$ нельзя определить, выполнено ли $N_t = n$. Действительно, если $t > \xi_1 + .. + \xi_n$, то события $N_t = n$ может быть выполнено (если $t < \xi_1 + ... + \xi_n + \xi_{n+1}$), а может быть не выполнено.

Однако $(N_t+1)$ является моментом остановки: если $t \geq \xi_1 + .. + \xi_n$ или $t < \xi_1 + .. + \xi_{n-1}$, то $\{N_t = n-1\}$ не выполнено, а если $\xi_1 + .. + \xi_{n-1} \leq t < \xi_1 + .. + \xi_n$, то выполнено.

Таким образом, из Теоремы 2.7 следует такое утверждение.

**Следствие 2.8.** *Пусть задан процесс восстановления* $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, *где* $\xi_1, \xi_2, ...$ *-i.i.d.,* $\mathbb{E}\xi_1 < \infty$. *Обозначим через* $N_t$ *соответствующий считающий процесс. Тогда*

$$\mathbb{E}\big[S_{N_t+1}\big] = \mathbb{E}\big[\xi_1\big] \cdot \Big(\mathbb{E}\big[N_t\big] + 1\Big).$$