13 ноября 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 7.

Гауссовские векторы. Гауссовские процессы. Броуновское движение.
Крайний срок сдачи - 26 ноября 2019 г., 12:10

1. Известно, что гауссовский процесс X_t имеет нулевое математическое ожидание. Является ли гауссовским процесс

$$Y_t = X_t \cdot \eta,$$

где $\eta-$ случайная величина, принимающая значения 1 и -1 с вероятностями $p \in (0,1)$ и $(1-p)$? Для любого момента времени t, X_t и η независимы.

2. Существует ли случайный процесс, определённый для $t \in [0,1]$, у которого ковариационная функция равна

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad K(t,s) = \min(t,s) - ts; \\ &\text{(ii)} \qquad K(t,s) = \min(t,s) - t(s+1); \\ &\text{(iii)} \qquad K(t,s) = \min(t,s) + \cos(t-s) \ ? \end{aligned}$$

3. Рассмотрим двумерную случайную величину

$$\vec{Z} = (Z_1, Z_2)\,,$$

такую, что $Z_1 = \xi$, $Z_2 = |\eta| \cdot \mathrm{sign}(\xi)$, где ξ, η - две независимые стандартные нормальные одномерные случайные величины, и функция $\mathrm{sign}(x)$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что

(i) Z_2 - стандартная нормальная случайная величина;

(ii) Z_1 и Z_2 - коррелированные случайные величины;

(iii) вектор $\vec{Z}$ не является гауссовским.

4. Процесс Y_n определён для неотрицательных целых n следующим образом:
$$Y_{n+1} = \alpha Y_n + X_n,\ n = 0, 1, ..., \qquad Y_0 = 0,$$
где $|\alpha| < 1$ - некоторая константа, а последовательность $X_n,\ n = 0, 1, 2, ...,$ представляет собой последовательность i.i.d. стандартных нормальных величин.

   (i) Покажите, что процесс Y_n является гауссовским.

   (ii) Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса Y_n.

5*. Докажите, что функция
$$f(t, s) = e^{-|t-s|}$$
является неотрицательно определённой.

6*. Рассмотрим двумерный гауссовский вектор $\vec{X} = (X_1, X_2)$ с $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Известно, что ковариационная матрица Σ этого вектора невырождена, то есть $\det(\Sigma) \neq 0$.

   (i) Докажите, что плотность распределения вектора $\vec{X}$ равна
$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})},$$
где $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$.

   (ii) Докажите, что если $\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0$, то
$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \phi\left(\frac{x_2 - \mu_2 - \rho(x_1-\mu_1)\sigma_2/\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right),$$
где $\phi(u) = (2\pi)^{-1/2} e^{-u^2/2}$ - плотность стандартного нормального одномерного распределения, а $\rho-$коэффициент корреляции между X_1 и X_2.