Задача 1

(i) Для удобства перепишем процесс восстановления S_n в виде

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_n$$

Тогда нужно показать, что сумма случайных величин, имеющих распределение $\Gamma(\alpha, \beta)$, имеет распределение $\Gamma(n\alpha, \beta)$. Для этого воспользуемся методом математической индукции.

1. Для $n = 1$ утверждение верно, поскольку $S_1 = \xi_1$, а в условии дано, что $\xi_1 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.
2. Пусть для $n-1$ верно, что $S_{n-1} \sim \Gamma((n-1)\alpha, \beta)$
3. Покажем, что для n верно $S_n \sim \Gamma(n\alpha, \beta)$.
   Так как $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, воспользуемся формулой свёртки:

$$\begin{aligned}
f_{s_n}(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{S_{n-1}}(x-y) f_{\xi_n}(y) dy \\
&= \int_0^x \frac{\beta^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha)} \cdot (x-y)^{(n-1)\alpha-1} e^{-\beta(x-y)} \cdot \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y} dy \\
&= \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha)\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x} \int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{(n-1)\alpha-1} dy \\
&\overset{(*)}{=} \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha)\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\beta x} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma((n-1)\alpha)}{\Gamma(\alpha + (n-1)\alpha)} x^{\alpha n - 1} \\
&= \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} \cdot e^{-\beta x} \cdot x^{\alpha n - 1}
\end{aligned}$$

   Для перехода $(*)$ было исользовано свойство бета-функции.

(ii) Воспользуемся следующим определением считающего процесса:

$$\{N_t = n\} = \{S_n \leq t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$$

Обозначив событие $\{S_n \leq t\}$ за A, а собтиые $\{S_{n+1} > t\}$ за B, заметим, что

$$A \cap B = A \backslash B^c,$$

так как в данном случае $B^c \subset A$:

$$\{S_{n+1} \leq t\} \subset \{S_n \leq t\}$$
$$\{\xi_1 + \ldots + \xi_{n+1} \leq t\} \subset \{\xi_1 + \ldots + \xi_n \leq t\}$$

Значит,

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A \backslash B^c\} = \mathbb{P}\{A\} - \mathbb{P}\{B\},$$

а следовательно и

$$\mathbb{P}\{N_t = n\} = \mathbb{P}\{S_n \leq t\} - \mathbb{P}\{S_{n+1} \leq t\} \tag{1}$$

Прежде чем искать $\mathbb{P}\{S_{n+1} \le t\}$, заметим, что

$$\mathbb{P}\{S_n \le t\} = \int_0^t \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \int_0^t \frac{\beta e^{-\beta x} (\beta x)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)},$$

а также, что у гамма-функции есть следующее свойство:

$$\Gamma(a) = (a-1)!$$

Теперь найдём $\mathbb{P}\{S_{n+1} \le t\}$, пользуясь интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_{n+1} \le t\} &= \int_0^t \frac{\beta^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} x^{(n+1)\alpha-1} e^{-\beta x} dx \\
&= \int_0^t \frac{\beta e^{-\beta x} (\beta x)^{(n+1)\alpha-1}}{((n+1)\alpha-1)!} dx \\
&\overset{(**)}{=} -e^{-\beta x} \cdot \frac{(\beta x)^{(n+1)\alpha-1}}{((n+1)\alpha-1)!}\Bigg|_0^t + \int_0^t \frac{\beta e^{-\beta x} (\beta x)^{(n+1)\alpha-2}}{((n+1)\alpha-2)!} dx \\
&= -e^{-\beta t} \cdot \frac{(\beta t)^{(n+1)\alpha-1}}{((n+1)\alpha-1)!} - e^{-\beta x} \cdot \frac{(\beta x)^{(n+1)\alpha-2}}{((n+1)\alpha-2)!}\Bigg|_0^t + \int_0^t \frac{\beta e^{-\beta x} (\beta x)^{(n+1)\alpha-3}}{((n+1)\alpha-3)!} dx \\
&= \dots \\
&= -e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{(\beta t)^{(n+1)\alpha-i}}{((n+1)\alpha-i)!} + \mathbb{P}\{S_n \le t\}
\end{aligned}$$

На шаге $(**)$ для интегрирования по частям были взяты следующие функции:

$$\begin{aligned}
u &= *(\beta x)^{(n+1)\alpha-1} & dv &= \beta e^{-\beta x} \\
du &= ((n+1)\alpha-1)(\beta x)^{(n+1)\alpha-2}\beta & v &= -e^{-\beta x}
\end{aligned}$$

и далее по аналогии.

Подставим полученное выражение в уравнение (1) и выпишем ответ:

$$\mathbb{P}\{N_t = n\} = e^{-\beta t} \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{(\beta t)^{(n+1)\alpha-i}}{((n+1)\alpha-i)!}$$

Задача 2

Пусть время прихода клиентов — случайная величина $\xi \sim \exp(1/10)$. Параметр λ находится из знания о том, что математическое ожидание случайной величины с экспоненциальным распределением равно $1/\lambda$, а в условии сказано, что это значение равно 10.

Аналогично положим время обслуживания первого клиента за случайную величину $\eta \sim \exp(1/25)$.

Как показано на Рис. 1, вероятность того, что второму клиенту придётся подождать, это вероятность того, что время обслуживания первого клиента будет больше, чем суммарное время ожидания прихода двух клиентов.

Таким образом, в задаче требуется найти вероятность

$$\mathbb{P}\{\eta > \xi_1 + \xi_2\} \tag{2}$$

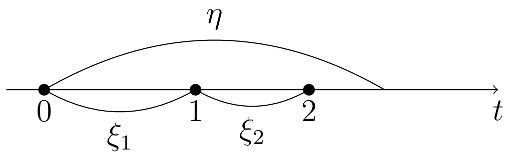

Рис. 1: Время прихода и время обслуживания клиентов

Обозначим $\xi_1 + \xi_2 = \zeta$ и найдём $f_\zeta(z)$ с помощью формулы свёртки:

$$\begin{aligned}
f_\zeta(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{\xi_1}(z-y) f_{\xi_2}(y) dy \\
&= \int_0^z \frac{1}{10} e^{-(z-y)/10} \cdot \frac{1}{10} e^{-y/10} dy \\
&= \frac{e^{-z/10}}{100} \int_0^z dy \\
&= \frac{e^{-z/10}}{100} y \Big|_0^z \\
&= \frac{z e^{-z/10}}{100}
\end{aligned}$$

Теперь можно искать вероятность (2):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\eta > \xi_1 + \xi_2\right\} &= \int_0^{+\infty} \int_v^{+\infty} \frac{1}{25} e^{-u/25} \cdot \frac{1}{100} v e^{-v/10} du dv \\
&= \frac{1}{2500} \int_0^{+\infty} v e^{-v/10} \int_v^{+\infty} e^{-u/25} du dv \\
&= \frac{1}{2500} \int_0^{+\infty} v e^{-v/10} \cdot \frac{e^{-u/25}}{-1/25} \Big|_v^{+\infty} dv \\
&= \frac{1}{100} \int_0^{+\infty} v e^{-7v/50} dv \\
&= \frac{1}{100} \left[v \frac{e^{-7v/50}}{-7/50} \Big|_0^{+\infty} + \frac{50}{7} \int_0^{+\infty} e^{-7v/50} dv \right] \\
&= \frac{1}{14} \cdot \frac{e^{-7v/50}}{-7/50} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{25}{49}
\end{aligned}$$

Задача 3

3. Введём новый процесс, показывающ. кол-во зарегистр. автомобилей к моменту времени $t \in [0,1]$

$$N_t' = \begin{cases} N_t, & t<\mu \\ N_\mu, & t \geq \mu \end{cases}$$

$$\mathbb{E} N_t' = \mathbb{E}(N_t \mid t<\mu) \cdot \mathbb{P}\{t<\mu\} + \mathbb{E}(N_\mu \mid t \geq \mu) \cdot \mathbb{P}\{t \geq \mu\} = \lambda t \cdot (1-t) + $$
$$+ \lambda \frac{t}{2} \cdot t = \lambda t \left(1 - t + \frac{t}{2}\right) = \lambda t \left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

$$\operatorname{Cov}(N_t', N_s') = \mathbb{E}(N_t', N_s') - \underbrace{\mathbb{E} N_t' \cdot \mathbb{E} N_s'}_{\text{вот это мы уже знаем}}$$

Без огр. общности $t>s$

$$\mathbb{E}(N_t', N_s') = \mathbb{E}(N_t N_s \mid \mu > t) \cdot \mathbb{P}\{\mu>t\} + \mathbb{E}(N_s N_\mu \mid s \leq \mu \leq t) \cdot \mathbb{P}\{s \leq \mu \leq t\} +$$
$$+ \mathbb{E}(N_\mu^2 \mid \mu < s) \cdot \mathbb{P}\{\mu < s\} = ?$$

1) $\mathbb{E}(N_t N_s \mid \mu > t) = \operatorname{Cov}(N_t, N_s) + \mathbb{E} N_t \mathbb{E} N_s = \operatorname{Var} N_s + \mathbb{E} N_t \mathbb{E} N_s =$
$= \lambda s + \lambda^2 t s = \lambda s (1 + \lambda t)$

2) $\mathbb{E}(N_s N_\mu \mid s \leq \mu < t) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(N_s N_\mu \mid s \leq \mu \leq t, \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\lambda s (1 + \lambda \mu) \mid s \leq \mu \leq t\right] =$
$= \lambda s \cdot \left(1 + \lambda \cdot \frac{t+s}{2}\right)$

3) $\mathbb{E}(N_\mu^2 \mid \mu < s) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(N_\mu^2 \mid \mu < s, \mu)\right] = \mathbb{E}\left[\lambda\mu + (\lambda\mu)^2 \mid \mu < s\right] =$
$= \lambda \frac{s}{2} + \lambda^2 \cdot \int_0^s \frac{x^2}{s} dx = \lambda \frac{s}{2} + \frac{\lambda^2 s^2}{3} = \lambda s \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda s}{3}\right)$

$$\operatorname{Cov}(N_t', N_s') = \lambda s (1 + \lambda t) \cdot (1-t) + \lambda s \left(1 + \frac{\lambda t}{2} + \frac{\lambda s}{2}\right) \cdot (t-s) +$$
$$+ \lambda s \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda s}{3}\right) \cdot s - \lambda s \cdot \lambda t \left(1 - \frac{t}{2}\right)\left(1 - \frac{s}{2}\right) = \lambda s \left(1 + \cancel{\lambda t} - \cancel{\lambda t^2} - \cancel{t} + \cancel{t} - s + \cancel{\frac{\lambda t^2}{2}} - \cancel{\frac{\lambda s t}{2}} + \cancel{\frac{\lambda s t}{2}} \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda s^2}{2} + \frac{1}{2} s + \frac{\lambda s^2}{3} - \cancel{\lambda t} + \frac{\lambda s t}{2} + \cancel{\frac{\lambda t^2}{2}} - \frac{\lambda t^2 s}{4} \right) =$$
$$= \lambda s \left(1 + \frac{\lambda s t}{2} - \frac{1}{2} s - \frac{\lambda s^2}{6} - \frac{\lambda t^2 s}{4}\right)$$

Задача 4

$\boxed{4.}$ Пусть N_t – считающ. процесс Пуассона

Мы знаем, что $\mathbb{E}\, N_t = \frac{1}{5} t$, где t – время в днях $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$

Необходимо найти $\mathbb{P}\{N_{30} \leq 3 \mid N_{10} \geq 2\}$

$$\mathbb{P}\{N_{30} \leq 3 \mid N_{10} \geq 2\} = \frac{\mathbb{P}\{\{N_{30} \leq 3\} \cap \{N_{10} \geq 2\}\}}{\mathbb{P}\{N_{10} \geq 2\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{\{N_{30} = 3\} \cap \{N_{10} = 2\}\} + \mathbb{P}\{\{N_{30} = 3\} \cap \{N_{10} = 3\}\} + \mathbb{P}\{\{N_{30} = 2\} \cap \{N_{10} = 2\}\}}{1 - \mathbb{P}\{N_{10} = 0\} - \mathbb{P}\{N_{10} = 1\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{\{N_{30} - N_{10} = 1\} \cap \{N_{10} = 2\}\} + \mathbb{P}\{\{N_{30} - N_{10} = 0\} \cap \{N_{10} = 3\}\} + \mathbb{P}\{\{N_{30} - N_{10} = 0\} \cap \{N_{10} = 2\}\}}{1 - \mathbb{P}\{N_{10} = 0\} - \mathbb{P}\{N_{10} = 1\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{N_{30} - N_{10} = 1\} \cdot \mathbb{P}\{N_{10} = 2\} + \mathbb{P}\{N_{30} - N_{10} = 0\} \cdot \mathbb{P}\{N_{10} = 3\} + \mathbb{P}\{N_{30} - N_{10} = 0\} \cdot \mathbb{P}\{N_{10} = 2\}}{1 - \mathbb{P}\{N_{10} = 0\} - \mathbb{P}\{N_{10} = 1\}} =$$

$$= \frac{e^{-20\lambda} \cdot \frac{(20\lambda)^1}{1!} \cdot e^{-10\lambda} \cdot \frac{(10\lambda)^2}{2!} + e^{-20\lambda} \cdot \frac{(20\lambda)^0}{0!} \cdot e^{-10\lambda} \cdot \frac{(10\lambda)^3}{3!} + e^{-20\lambda} \cdot \frac{(20\lambda)^0}{0!} \cdot e^{-10\lambda} \cdot \frac{(10\lambda)^2}{2!}}{1 - e^{-10\lambda} \cdot \frac{(10\lambda)^0}{0!} - e^{-10\lambda} \cdot \frac{(10\lambda)^1}{1!}} =$$

$$= \frac{e^{-30\lambda} \left(20\lambda \cdot 50\lambda^2 + \frac{500}{3} \lambda^3 + 50\lambda^2\right)}{1 - e^{-10\lambda}(1 + 10\lambda)} \overset{\lambda = \frac{1}{5}}{=} \frac{e^{-6} \left(1000 \cdot \frac{1}{125} + \frac{500}{3} \cdot \frac{1}{125} + 50 \cdot \frac{1}{25}\right)}{1 - e^{-2}\left(1 + 10 \cdot \frac{1}{5}\right)} =$$

$$= \frac{e^{-6}\left(8 + \frac{4}{3} + 2\right)}{1 - e^{-2} \cdot 3} = \frac{34 e^{-6}}{3(1 - 3e^{-2})} \approx 0,0473$$