11 декабря 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 10.

Стохастическое интегрирование.
Данную домашнюю работу не нужно сдавать в письменном виде.

Во всех задачах через W_t обозначено Броуновское движение.

1. Докажите формулу

$$\int_0^t W_s^2\, e^{-W_s} dW_s = 2 - (W_t^2 + 2W_t + 2)e^{-W_t} + \int_0^t W_s\big(\frac{W_s}{2} - 1\big)e^{-W_s} ds.$$

2. Докажите, что ковариационная функция процесса

$$X_t := W_t + \int_0^t W_u du$$

равна

$$K(t,s) = s + ts - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{2}ts^2,$$

для всех точек (t,s) таких, что $s < t$.

3. Случайный процесс $\Upsilon(x)$ определяется следующим образом:

$$\Upsilon(x) = \int_{x-Bh}^{x-Ah} K\Big(\frac{x-y}{h}\Big) dW_y,$$

где переменная $x \in \mathbb{R}$ играет роль времени, $h > 0$ - некоторый параметр, а функция $K : [A,B] \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L^2([A,B])$. Докажите, что процесс $\Upsilon(x)$ является стационарным в широком смысле.

4. Докажите, что процесс $X_t = t(W_t)^2$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX_t = \left(\frac{X_t}{t} + t\right) dt + 2\sqrt{tX_t}\,\mathrm{sign}(W_t) dW_t,$$

где W_t - Броуновское движение, а функция $\mathrm{sign}(x)$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

5*. Докажите формулу

$$\int_a^b W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}\left(W_b^3 - W_a^3\right) - \int_a^b W_t dt,$$

построив последовательность ступенчатых процессов, сходящуюся к W_t^2.