2 октября 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 4.

Составные и неоднородные процессы Пуассона.
Крайний срок сдачи - 15 октября 2019, 12:10

1. Пусть ξ - случайная величина, имеющая равномерное распределение на $[0,1]$. Найдите характеристические функции следующих случайных величин:

   (i) $\eta_1 = 2\xi - \mathbb{I}\{\xi > 1/2\}$;

   (ii) $\eta_2 = \ln(\xi)$;

   (iii) $\eta_3 = \begin{cases} -1, & 0 \le \xi < 1/3, \\ 0, & 1/3 \le \xi < 2/3, \\ 1, & 2/3 \le \xi \le 1. \end{cases}$

   Какие из полученных характеристических функций являются действительнозначными?

2. Количество заявок на возмещение ущерба в страховую компанию моделируется при помощи процесса Пуассона, при этом в среднем поступает 100 заявок в день. Размер одной выплаты имеет экспоненциальное распределение со средним значением выплаты 5.000 долларов.

   (i) Определите тип процесса X_t, представляющего суммарный размер выплат, совершенный компанией за t дней.

   (ii) Вычислите $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathbb{D}[X_t]$, $\mathbb{P}\{X_t = 0\}$, а также преобразование Лапласа процесса X_t.

3. В некотором интернет-магазине для моделирования количества продаж iPhone 11 используются 2 модели:

   (a) модель однородного процесса Пуассона, причём предполагается, что в среднем продаётся 10 айфонов в день;

   (b) модель неоднородного процесса Пуассона, причём в среднем за t дней продаётся $10 \cdot t^{5/4}$ айфонов.

   Продажи ведутся 24 часа в сутки, без перерывов и выходных. Известно, что 100-ый айфон был продан через 9 дней и 8 часов с момента начала продаж. Для каждой модели,

   (i) найти функцию распределения времени между продажей 100-ого и 101-ого айфона;

   (ii) найти функцию распределения времени между продажей 100-ого и 150-ого айфона.

4. Пусть N_t - неоднородный процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda(t)$. Обозначим $S_k := \min\{t : N_t = k\},\ k = 0, 1, ...$ и $\xi_k := S_k - S_{k-1}$.

   (i) Докажите формулу для плотности случайной величины S_n:

   $$f_{S_n}(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t).$$

   Подсказка: Доказательство можно провести по индукции. При доказательстве шага индукции, используйте равенство

   $$\mathbb{P}\{N_t = n\} = \mathbb{P}\{S_n \le t\} - \mathbb{P}\{S_{n+1} \le t\}.$$

   (ii) Докажите, что справедлива формула

   $$\mathbb{P}\{\xi_{k+1} \le t | S_k = s\} = 1 - e^{-\Lambda(s+t)+\Lambda(s)}.$$

   (iii) Докажите формулу для функции распределения величины ξ_k для $k \ge 2$:

   $$F_{\xi_k}(t) = 1 - \int_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds.$$

5*. Докажите, что если целочисленный неубывающий процесс N_t имеет независимые приращения, обладает свойствами $N_0 = 0$ п.н. и

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}\left\{N_{t+h} - N_t \geq 2\right\}}{\mathbb{P}\left\{N_{t+h} - N_t = 1\right\}} &= 0, \qquad \forall t \geq 0, \\ \lim_{h\to 0} \frac{1 - \mathbb{P}\left\{N_{t+h} - N_t = 0\right\}}{h} &= \lambda(t), \end{aligned}$$

то N_t является неоднородным процессом Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$.

Подсказка. Нужно доказать, что производящая функция процесса N_t удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d\varphi_t(u)}{dt} = \Lambda'(t)(u-1)\varphi_t(u). \tag{1}$$

с начальным условием $\varphi_0(u) = 1$, и что единственным решением данного дифференциального уравнения является производящая функция неоднородного процесса Пуассона.

6*. Пусть $\psi(u)$ - характеристическая функция некоторой случайной величины. Докажите, что функция

$$\widetilde{\psi}(u) = \frac{2}{2 - \psi(u)} - 1$$

также является характеристической функцией некоторой (другой) случайной величины.