

# Содержание

<b>1</b>	<b>Домашнее задание 1</b>	<b>4</b>
1.1	Задача 1 . . . . .	4
1.1.1	i . . . . .	4
1.1.2	ii . . . . .	5
1.2	Задача 2 . . . . .	6
1.3	Задача 3 . . . . .	7
1.4	Задача 4 . . . . .	7
1.4.1	i . . . . .	7
1.4.2	ii . . . . .	8
1.5	Задача 5 . . . . .	8
1.5.1	i . . . . .	8
1.5.2	ii . . . . .	8
1.5.3	iii . . . . .	9
1.5.4	iv . . . . .	10
1.6	Задача 6 . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Домашнее задание 2</b>	<b>10</b>
2.1	Задача 1 . . . . .	10
2.2	Задача 2 . . . . .	11
2.2.1	i . . . . .	11
2.2.2	ii . . . . .	11
2.2.3	iii . . . . .	12
2.3	Задача 3 . . . . .	12
2.3.1	i . . . . .	12
2.3.2	ii . . . . .	13
2.4	Задача 4 . . . . .	13
2.4.1	i . . . . .	13
2.4.2	ii . . . . .	14
2.5	Задача 5 . . . . .	14
2.6	Задача 6 . . . . .	14
2.6.1	i . . . . .	14
2.6.2	ii . . . . .	14
2.6.3	iii . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Домашнее задание 3</b>	<b>16</b>
3.1	Номер 1 . . . . .	16
3.1.1	i . . . . .	16
3.1.2	ii . . . . .	17
3.2	Номер 2 . . . . .	17
3.3	Номер 3 . . . . .	18
3.4	Номер 4 . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Домашнее задание 4</b>	<b>19</b>
4.1	Задача 1 . . . . .	19
4.1.1	i . . . . .	19
4.1.2	ii . . . . .	20
4.1.3	iii . . . . .	20
4.2	Задача 2 . . . . .	20
4.2.1	i . . . . .	20

4.2.2	ii	20
4.3	Задача 3	21
4.3.1	i	21
4.3.2	ii	21
4.4	Задача 4	21
4.4.1	i	21
4.4.2	ii	22
4.4.3	iii	22
<b>5</b>	<b>Домашнее задание 5</b>	<b>22</b>
5.1	Задача 1	22
5.2	Задача 2	23
5.2.1	i	23
5.2.2	ii	23
5.2.3	iii	24
5.3	Задача 3	25
5.4	Задача 4	26
5.5	Задача 5	26
5.6	Задача 6	26
<b>6</b>	<b>Домашнее задание 6</b>	<b>27</b>
6.1	Задача 1	27
6.2	i	27
6.2.1	ii	27
6.3	Задача 2	27
6.3.1	i	27
6.4	ii	28
6.4.1	iii	28
6.5	Задача 3	28
6.5.1	i	28
6.5.2	ii	28
6.5.3	iii	28
6.6	Задача 4	29
<b>7</b>	<b>Домашнее задание 7</b>	<b>29</b>
7.1	Задача 1	29
7.2	Задача 2	30
7.2.1	i	30
7.2.2	ii	30
7.2.3	iii	30
7.3	Задача 3	31
7.3.1	i	31
7.3.2	ii	31
7.3.3	iii	32
7.4	Задача 4	33
7.4.1	i	33
7.4.2	ii	33
7.5	Задача 5	34
7.6	Задача 6	35
7.6.1	i	35
7.6.2	ii	36

7.7	Домашнее задание 8 . . . . .	37
7.7.1	Задача 1 . . . . .	37
7.7.2	Задача 2 . . . . .	37
7.7.3	i . . . . .	37
7.7.4	ii . . . . .	38
7.7.5	Задача 3 . . . . .	38
7.7.6	Задача 4 . . . . .	38
7.7.7	Задача 5 . . . . .	38
7.7.8	Задача 6 . . . . .	38

# 1 Домашнее задание 1

## 1.1 Задача 1

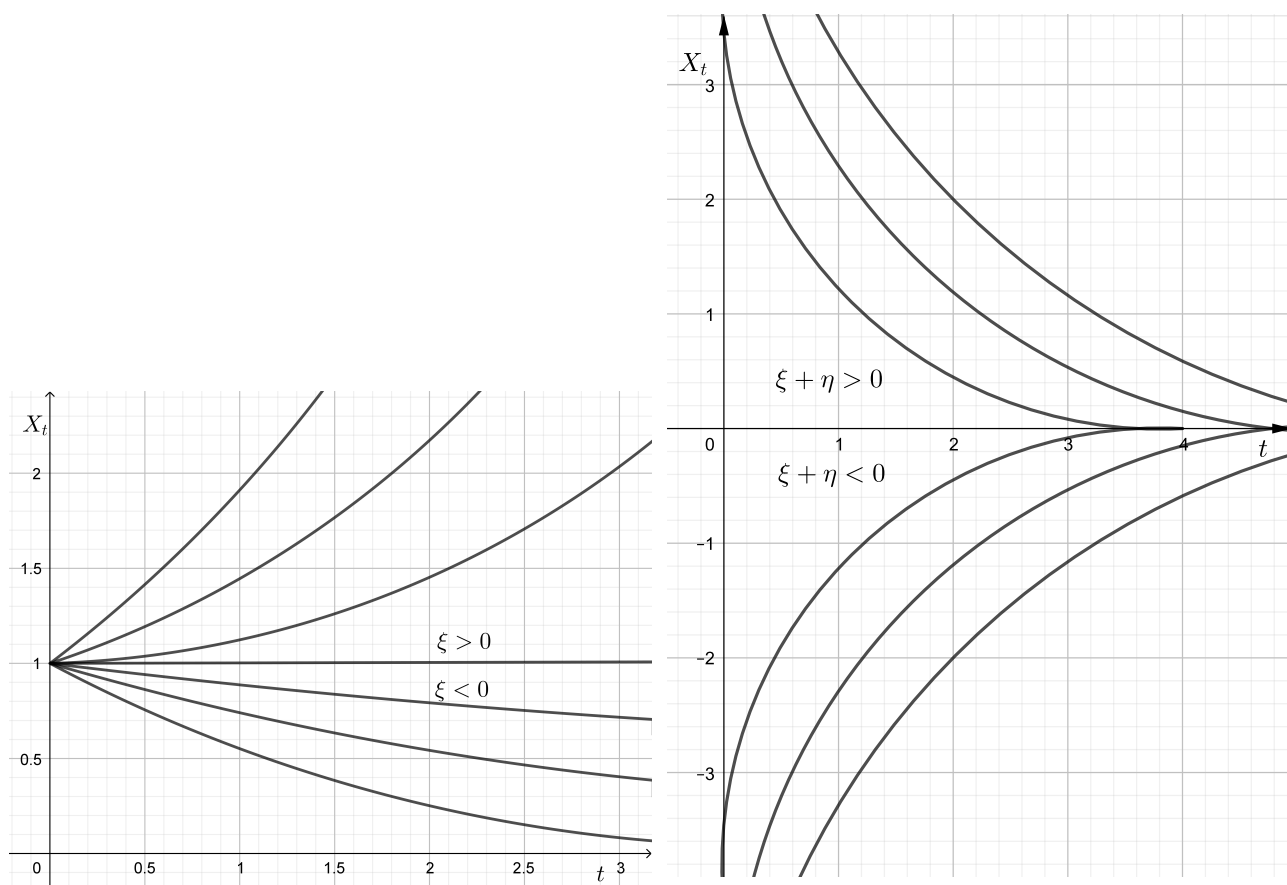


Рис. 1: Траектории

### 1.1.1 i

Случайный процесс описан уравнением  $X_t = e^{\xi t}$

В зависимости от того, будет реализация случайной величины положительной или отрицательной, кривые будут либо экспоненциально возрастать, либо экспоненциально убывать, где  $\xi$  будет служить коэффициентом скорости роста. Чем ближе  $\xi$  к единице, тем быстрее будет возрастать кривая траектории, а чем ближе к минус единице, тем быстрее убывать. Соответственно, семейство кривых ограничено сверху кривой  $X_t = e^{\xi}$ , а снизу – кривой  $X_t = e^{-\xi}$ . Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 слева.

Найдём конечномерные распределения процесса. Для простоты записи покажу на двумерном примере, а далее расширим до многомерного случая.

☀ Очевидно, что  $P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = 0$  при  $x_1 \leq 0$  или  $x_2 \leq 0$ , так как показательная функция от экспоненты не может быть отрицательной или нулевой.

☀ При  $x_1 \geq 1$  и  $x_2 \geq 1$  :

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{e^{\xi t_1} \leq x_1, e^{\xi t_2} \leq x_2\} = P\{\xi t_1 \leq \ln(x_1), \xi t_2 \leq \ln(x_2)\} = P\{\xi \leq \min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \frac{\ln(x_2)}{t_2}\right)\} \quad (1)$$

☀ При  $x_1 \geq 1$  и  $0 < x_2 < 1$  :

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{e^{\xi t_1} \leq x_1, e^{\xi t_2} \leq x_2\} = P\{\xi t_1 \leq \ln(x_1), \xi t_2 \leq \ln(x_2)\} = P\{\xi \leq \min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \frac{\ln(x_2)}{t_2}\right)\} \quad (2)$$

Так как  $\ln(x_2)$  , будет отрицательным,  $\ln(x_1)$  - положительным, то  $P\{\xi \leq \frac{\ln(x_2)}{t_2}\}$  будет ответом в данном случае.

☀ При  $x_2 \geq 1$  и  $0 < x_1 < 1$  :

Абсолютно аналогично предыдущему случаю

☀ При  $0 < x_2 < 1$  и  $0 < x_1 < 1$  :

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \dots P\{\xi \leq \min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \frac{\ln(x_2)}{t_2}\right)\}$$

В данном случае оба числа будут отрицательными и формула останется без сокращений.

Очевидно (нет, ну правда очевидно, можно я не буду объяснять?), что в многомерном случае будет ровно то же самое. Следовательно, без потери общности, можно записать ответ в сокращённом виде:

$$F_\xi(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists j \text{ s.t. } x_j \leq 0, j = 1 : n \\ F_\xi\left(\min\left(\frac{\ln(x_1)}{t_1}, \dots, \frac{\ln(x_n)}{t_n}\right)\right) & \end{cases}$$

где  $F_\xi(x)$  - функция распределения равномерной случайной величины  $\xi$  на  $[-1, 1]$

### 1.1.2 ii

Случайный процесс описан уравнением  $X_t = (\xi + \eta)/t$ . В зависимости от того, будет ли реализация случайной величины  $\xi + \eta$  положительной или отрицательной, траекториями будут семейства гипербол. Соответственно, чем ближе к нулю будет реализована данная случайная величина, тем более вогнуты будут гиперболы вогнуты в сторону точки (0.0). Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 справа.

Что же касается конечномерного распределения, то здесь всё довольно похоже на предыдущий пункт поэтому напишу с минимумом подробностей. Решим для двумерного случая и расширим на многомерный.

Для начала, однако, установим параметры нормального распределения случайной величины  $\xi + \eta$ . Математическое ожидание ноль. Ковариация двух величин тоже ноль, так что дисперсия равна 1. Получим стандартную нормальную величину.

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{\xi + \eta \leq x_1 t_1, \xi + \eta \leq x_2 t_2\} = P\{\xi + \eta \leq \min(x_1 t_1, x_2 t_2)\}$$

Рассмотрим 4 случая:

$$\odot x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$$

В данном случае обе величины  $x_1 t_1, x_2 t_2$  будут отрицательными и ответ будет:  $F_{N_{(0,1)}}(\min(x_1 t_1, x_2 t_2))$

$$\odot x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ Очевидно, обе величины } x_1 t_1, x_2 t_2 \text{ будут положительными и ответ: } F_{N_{(0,1)}}(\min(x_1 t_1, x_2 t_2)) =$$

$$\odot x_1 > 0, x_2 < 0$$

$x_1 t_1$  будет положительной величиной, а  $x_2 t_2$  - отрицательной. Ответ:  $F_{N_{(0,1)}}(\min(x_1 t_1, x_2 t_2)) = F_{N_{(0,1)}}(x_2 t_2)$

$$\odot x_1 < 0, x_2 > 0 \text{ Ответ зеркален предыдущему.}$$

Очевидно, что с повышением размерности ни один из этих вариантов не будет нарушаться. При наличии хотя бы одной отрицательной переменной  $x_j$  среди положительных, она автоматически станет минимумом, а при всех переменных одного знака формула и вовсе не упрощается. Следовательно, без потери общности, запишем ответ:

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\} = F_{N_{(0,1)}}(\min(x_1 t_1, \dots, x_n t_n))$$

## 1.2 Задача 2

$$P\{X_{t_1} < X_{t_2}\} = P\{t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha)) < t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha))\} =$$

$$P\{(t_1 - t_2)\xi_1 + (t_1 - t_2)\alpha\xi_2 < (t_2 - t_1)2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 \geq -2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 + 2\alpha^2 \geq 0\} = 1$$

Чтобы вероятность того, что эта случайная величина была положительной стала равной единице, рассмотрим график. Так как указано, что параметр  $\alpha$  является реальным числом, будем рассматривать только случаи с положительным дискриминантом. Чтобы учесть максимальное количество случаев, при которых значение функции в точке положительно, максимально "опустим" параболу, максимизировав дискриминант. Очевидно, что это произойдёт в двух точках относительно  $\xi$ : (1, -1), (-1, -1)

$$D = \xi_2^2 - 8\xi_1$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

Все возможные случаи корней при  $\xi_2 = + - 1$ :

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, при  $\alpha \in [-1, 1]$  все возможные параболы будут принимать только неотрицательные значения. Ответ:  $\alpha \in [-1, 1]$

### 1.3 Задача 3

$$f_z(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} L[p](u) &= \int_0^\infty \left( \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x} \right) e^{-ux} dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x(1+u)} + e^{-x(2+u)} dx = \\ &= \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2+u} = \frac{2+u+2+2u}{4+4u+2u+2u^2} = \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \end{aligned} \quad (3)$$

$$L[U](u) = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u \left( 1 - \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \right)} = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u \left( \frac{2u^2+3u}{2u^2+6u+4} \right)} = \frac{3u+4}{2u^3+3u^2} = \frac{3u+4}{u^2(2u+3)} \quad (4)$$

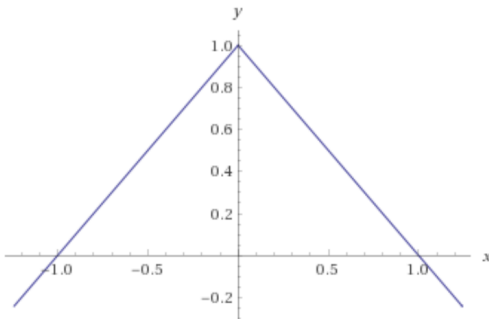
$$\frac{3u+4}{u^2(2u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+3} = \frac{Au(2u+3) + B(2u+3) + Cu^2}{u^2(2u+3)} = \frac{2Au^2 + Cu^2 + 3Au + 2Bu + 3B}{u^2(2u+3)}$$

$$\begin{cases} C + 2A = 0 \\ 3A + 2B = 3 \\ 3B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \quad (5)$$

$$U(t) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\exp^{-\frac{3}{2}t}$$

### 1.4 Задача 4

#### 1.4.1 i



Для начала выведем несколько необходимых свойств функций плотностей.

$$\begin{aligned} F_{|\xi|} &= P\{|\xi| \leq x\} = P\{-x \leq \xi \leq x\} = \\ &= P\{\xi \leq x\} - P\{\xi \leq -x\} = F_{\xi}(x) - F_{\xi}(-x) \end{aligned} \quad (6)$$

Следовательно:

$$f_{|\xi|}(x) = f_{\xi}(x) + f_{\xi}(-x)$$

Теперь по формуле свёртки выведем следующую плотность:

Рис. 2:  $f_{\xi-\eta}(x)$

$$f_{\xi-\eta}(x) = f_{\xi+(-\eta)}(x)$$

Для этого выведем следующее свойство:

$$F_{-\eta}(x) = P\{-\eta \leq x\} = P\{\eta \geq -x\} = 1 - F_{\eta}(-x) \Rightarrow f_{-\eta}(x) = f_{\eta}(-x)$$

Теперь возьмём интеграл:

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I\{u-x \in [0; 1]\} I\{-x \in [0; 1]\} = \int_{\max(u-1, -1)}^{\min(u, 0)} 1 dx = \min(u, 0) - \max(u-1, -1)$$

Полученная функция изображена на 2.

Так как функция симметричная,  $f_{|\xi|}(x) = f_{\xi}(x) + f_{\xi}(-x) = 2f_{\xi}(x)$ . Следовательно:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = 2(\min(u, 0) - \max(u - 1, -1))$$

Однако следует сделать важное замечание. Так как модуль случайной величины неотрицателен, складывать функции распределения следует только на положительной полуоси. Таким образом, ответ:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = \begin{cases} 0, u < 0 \\ 2(\min(u, 0) - \max(u - 1, -1)), u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0, u < 0 \\ -u + 1, u \geq 0 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта функция будет соответствовать всем необходимым свойствам функции плотности.

### 1.4.2 ii

По формуле свёртки:

$$\begin{aligned} f_{\xi+\eta} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \exp^{-|u-x|-|x|} dx = \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^0 \exp^{-|u-x|+x} dx + \int_0^{\infty} \exp^{-|u-x|-x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\min(u,0)} \exp^{-u+2x} dx + \int_{\min(u,0)}^0 \exp^u dx + \int_0^{\max(u,0)} \exp^{-u} dx + \int_{\max(u,0)}^{+\infty} \exp^{u-2x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \exp^{-u+2x} \Big|_{-\infty}^{\min(u,0)} + x \exp^u \Big|_{\min(u,0)}^0 + x \exp^{-u} \Big|_0^{\max(u,0)} - \frac{1}{2} \exp^{u-2x} \Big|_{\max(u,0)}^{+\infty} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \exp^{-u+2\min(u,0)} - \min(u,0) \exp^u + \max(u,0) \exp^{-u} + \frac{1}{2} \exp^{u-2\max(u,0)} \right) = \\ &= \frac{1}{4} (\mathbf{I}\{u \geq 0\} e^{-u}(1+u) + \mathbf{I}\{u < 0\} e^u(1-u)) \end{aligned}$$

Вольфрам сказал, что интеграл под этой функцией равен единице, так что всё должно быть верно. По форме распределение напоминает нормальное. Касательно возникших функций минимума и максимума, они призваны регулировать функцию в зависимости от знака параметра  $u$ . В зависимости от него один из четырёх интегралов во 2 строке будет схлопываться в нулевой.

## 1.5 Задача 5

### 1.5.1 i

Нет, не является процессом восстановления, так как  $p\{\xi_i \geq 0\} \neq 1$

### 1.5.2 ii

Каждая траектория имеет вид ломаной кривой. Она начинается в точке ноль и образует один из путей (слева направо) в древовидной структуре на Рис. 3. Для примера одна из возможных траекторий окрашена в оранжевый. Данная фигура по виду очень напоминает треугольник Паскаля.



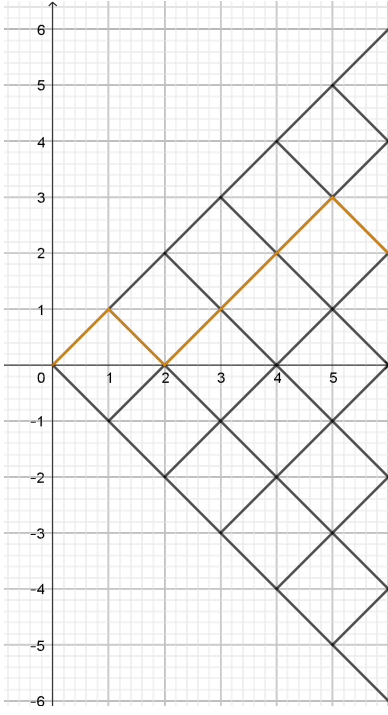


Рис. 3: Траектории  $S_n$

### 1.5.3 iii

Сколько-нибудь адекватный ответ в явном виде у меня не получился, остался только следующий вариант:

$$\begin{aligned}
 P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} &= P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} = \\
 &P\left\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i \leq x_2, \dots, \sum_{i=1}^{t_n} \xi_i \leq x_n\right\} = \\
 &P\left\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1, \dots, \sum_{i=t_{n-1}+1}^{t_n} \xi_i \leq x_n - x_{n-1}\right\}
 \end{aligned}$$

Логика такого перехода в следующем:

$$\sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i + x_1 \leq \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 \Rightarrow \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1$$

Нетрудно проверить, что для каждого периода необходимо просто вычитать предыдущий. Я не до конца уверен в этом переходе, но выглядит красиво. Теперь события независимы. Можно разбить на произведение свёрток в смысле распределений:

$$\begin{aligned}
 P\left\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1, \dots, \sum_{i=t_{n-1}+1}^{t_n} \xi_i \leq x_n - x_{n-1}\right\} = \\
 F^{*t_1}(x_1) \cdot F^{*(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot F^{*(t_n-t_{n-1})}(x_n - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

Единственное ограничение, которое можно наложить на переменные, это что при  $x_j - x_{j-1} < t_j - t_{j-1}$  выражение  $\sum_{i=t_{j-1}+1}^{t_j} \xi_i$  обратится в ноль. Это случится потому что сумма описанных выше величин не может быть меньше чем  $(-1) \cdot (\text{количество величин в сумме})$ . Итоговый ответ можно записать следующим образом:

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists j \text{ s.t. } x_j - x_{j-1} < t_j - t_{j-1} \\ F^{*t_1}(x_1) \cdot F^{*(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot F^{*(t_n-t_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) & \text{иначе} \end{cases}$$

Мне самому не очень нравится этот ответ, так как она не даёт идей для следующего пункта и так как эти непонятные свёртки вообще неясно как брать в случае дискретных величин.

#### 1.5.4 iv

### 1.6 Задача 6

Данное утверждение неверно. (Иначе бы его дали в лекции как более общее, ну логично же)

Событие  $\{N_t \leq n\}$  можно интерпретировать следующим образом. Возможны три варианта событий:

- ☀ К моменту времени  $t$  появилось менее  $n$  клиентов.
- ☀ В момент времени  $t$  подошёл  $n$ -ый покупатель.
- ☀ В какой-то из моментов времени до  $t$  подошёл  $n$ -ый покупатель, и вплоть до момента  $t$  более покупателей не приходило

Следовательно:

$$\{N_t \leq n\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\} \cup \{S_n < t\} \neq \{S_n \geq t\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\}$$

Исходное утверждение неверно.

## 2 Домашнее задание 2

### 2.1 Задача 1

Начальное условие:  $Z_0 = c$

Обозначим случайную величину  $\tau$  следующим образом:

$$\tau = \begin{cases} 1, & 1 - F_{\eta}(R) \\ 0, & F_{\eta}(R) \end{cases}$$

Пусть  $\mathbb{E}(\xi_n) = \mu$

Процесс восстановления:  $Z_n = Z_{n-1} + \tau_n \xi_n$

Вычтем начальное условие из обеих частей:

$$Z_n - c = Z_{n-1} - c + \tau_n \xi_n$$

Переобозначим:

$$S_n = S_{n-1} + \tau_n \xi_n$$

$$N_t = \max\{k, S_k \leq t\} = \max\{k, Z_k - c \leq t\} = \max\{k, Z_k \leq t + c\} = M(C)$$

$$t + c = C \Rightarrow t = C - c$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tau \xi_n)} = \frac{1}{(1 - F_{\eta}(R))\mu} = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{M(C)}{t(C)}$$

$$\mathbb{E}(\tau\xi_n) = \text{независимость} = (1 - F_\eta(R))\mu$$

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \frac{M(C)}{t(C)} = \frac{1}{(1 - F_\eta(R))\mu} \Rightarrow \lim_{C \rightarrow \infty} M(C) = \frac{C - c}{(1 - F_\eta(R))\mu}$$

## 2.2 Задача 2

### 2.2.1 i

Пусть очередная проверка прервёт случайный процесс в точке  $J$ . Это номер проверки, при которой обнаружат первое нарушение.

Тогда по тождеству Вальда  $\mathbb{E}S_J = \mathbb{E}J \cdot \mathbb{E}\xi_i$

$$\mathbb{E}J = 1 \cdot p + 2 \cdot p(1-p) + 3 \cdot p(1-p)^2 = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1}$$

$$g(1-p) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i = \frac{1}{1 - (1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$g'(1-p) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1}$$

Но

$$g'(1-p) = -1 \cdot \left( -\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p^2}$$

$$E[J] = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$E[S_J] = \frac{1}{p} \cdot 45 = \frac{45}{p}$$

### 2.2.2 ii

Процесс восстановления:  $S_n = S_{n-1} + \xi_n$

$$\mathbb{E}\xi_i = 45$$

Обозначим индикатор обнаружения :

$$\tau = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$$

Штраф:  $\zeta \sim U[0, C(\frac{A}{B})]$ ,

Вознаграждение случайного процесса:  $R_i = \tau\zeta \Rightarrow \text{независимость} \Rightarrow \mathbb{E}(R_i) = \frac{pC}{2}$

$$\frac{Y(t)}{t} \rightarrow \frac{pC}{90} \Rightarrow Y(t) \rightarrow \frac{\tau pC}{90}$$

### 2.2.3 iii

Рассмотрим две альтернативы поведения. Первый вариант поведения владельца это экономия. Усредним возможные профиты и лоссы. В таком случае в любой конкретный день он в среднем будет получать профит  $A - B$ . Константу сколько не усредняй, останется константой. Однако он будет в среднем получать асимптотический штраф  $Y(t) \rightarrow \frac{tpC}{90}$ , который мы вычислили в предыдущем пункте.

В ином вариант, когда владелец выбирает не экономить, он не получает выгоды, но в среднем каждый день теряет  $A$  рублей.

В таком случае владельцу будет выгодно экономить, если средняя "чистая прибыль" от экономии будет больше, чем от экономии, то есть:

$$A - B - \frac{Y(t)}{t} > -A$$

$$A - B - \frac{pC}{90} > -A$$

В таком случае владельцу будет выгодна первая стратегия даже если чистая прибыль от экономии будет отрицательной из-за штрафов, но будет больше чем  $-A$ , то экономия всё равно останется оптимальной. Преобразуя неравенство, получим:

$$2A - B - \frac{pC}{90} > 0 \Rightarrow \frac{90(2A - B)}{C(\frac{A}{B})} > p$$

Если честно, я не понял, как использовать зависимость от дроби. Разве что наложить дополнительные условия на производную  $C$  по  $A$  и  $B$ . Возможно это даст какие-то дополнительные условия на  $C$ , но особого смысла в этом не вижу.

## 2.3 Задача 3

Выпишем суммарное вознаграждение процесса восстановления. Для начала обозначим пару вспомогательных индикаторов.  $\tau$  – индикатор того, что ремонт возможно произвести самостоятельно.  $\rho$  – индикатор того, что самостоятельный ремонт был некачественным.

$$\tau = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1 - p \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 1, q \\ 0, 1 - q \end{cases}$$

$$R_i = \tau\rho(m + \eta) + \tau(1 - \rho)m + (1 - \tau)\eta$$

### 2.3.1 i

В данном пункте необходимо только первое слагаемое. При  $t \rightarrow \infty$  уммарные расходы будут следующими:

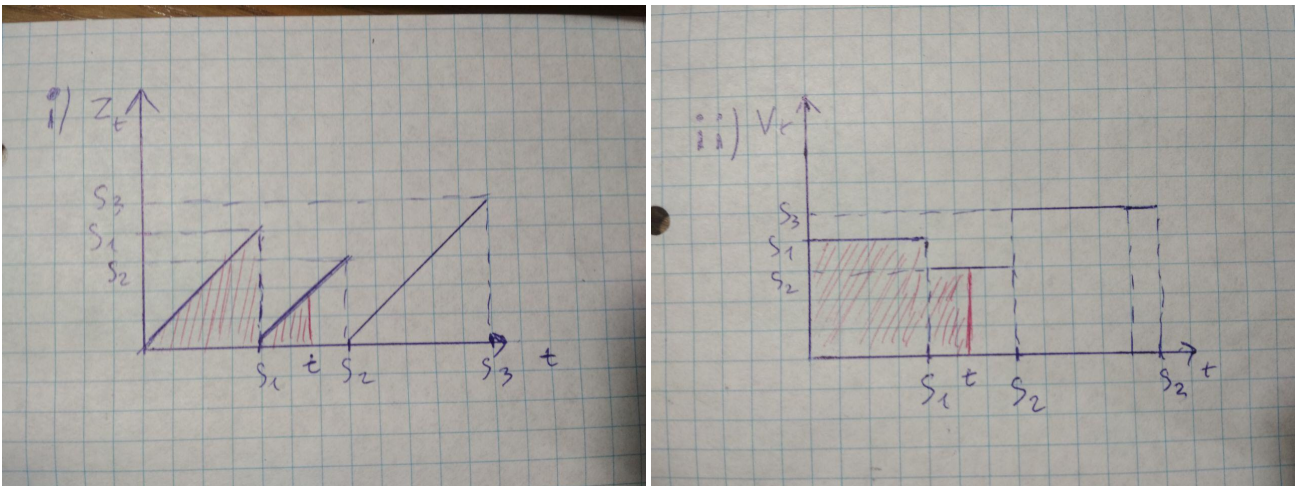
$$\frac{Y(t)}{t} \rightarrow \frac{\mathbb{E}(R_i^I)}{\mathbb{E}(\xi_i)} = \text{независимость} = \frac{pq(m + \frac{M+m}{2})}{18} \Rightarrow Y(t) \rightarrow \frac{tpq(m + \frac{M+m}{2})}{18}$$

### 2.3.2 ii

Сравним ожидаемые вознаграждения за самостоятельный ремонт и за ремонт в автосервисе. Первое должно быть меньше второго. По-хорошему, нужно обе части неравенства ниже разделить на  $\mathbb{E}(x_i)$  но все понимают, что я просто мысленно на это же положительное число 18 просто домножил обе части чтобы лишние дроби не тянуть. Матожидания позволю себе также вычислить в уме.

$$\begin{aligned}
 pq \left( m + \frac{M+m}{2} \right) + p(1-q)m &< \frac{(1-p)(M+m)}{2} \Rightarrow \left| * 2 \text{ и } : q \right. \\
 q(M+3m) + 2m(1-q) &< \frac{M+m}{p} - (M+m) \Rightarrow \left| : (M+m) \right. \\
 \frac{q(M+3m) + 2m - 2qm}{M+m} &< \frac{1-p}{p} \Rightarrow \frac{qM + qm + 2m}{M+m} < \frac{1-p}{p} \Rightarrow \\
 q + \frac{2m}{M+m} &< \frac{1-p}{p}
 \end{aligned} \tag{7}$$

## 2.4 Задача 4



Как и в лекции, будем пользоваться теоремой о двух милиционерах. Это до ужаса скучно, но так и быть. Поправка к графикам, которые у меня уже нет сил перерисовывать: по оси ординат, конечно же,  $\xi_1, \xi_2, \dots$ , а не  $S_1, S_2, \dots$ .

### 2.4.1 i

Функция под интегралом представляет собой просто куски прямой  $Z(t) = t$ , которая в каждый момент восстановления просто сдвигается на  $\xi_i$ . Как видно из графика слева на Рис. 2.4, искомый интеграл ограничен суммами площадей треугольников до точек  $N_t$  и  $N_t + 1$ . Найдём пределы границ неравенства.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_1^{N_t} \frac{1}{2} \xi_i^2}{t} &\leq \int_0^t Z_u^w du \leq \frac{\sum_1^{N_t+1} \frac{1}{2} \xi_i^2}{t} \\
 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \sum_1^{N_t} \xi_i^2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{2N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 \frac{N_t+1}{N_t} \frac{N_t}{N_t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{2N_t} \frac{N_t+1}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}$$

Видим, что исходная функция зажата двумя абсолютно идентичными функциями. Следовательно, по теореме о двух милиционерах предел исходной функции тоже будет равен  $\frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}$

### 2.4.2 ii

Пункт абсолютно идентичен предыдущему. Единственная разница лишь в построении графика. Искомое время является ни чем иным как  $\xi_{N_t+1}$ . Скачки графика происходят непосредственно в моменты восстановления. Все вычисления и выводы абсолютно идентичны, с поправкой на  $\frac{1}{2}$ , так как площадь каждого квадрата будет ровно  $\xi_i^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{t} &\leq \int_0^t V_u^w du \leq \frac{\sum_1^{N_t+1} \xi_i^2}{t} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_1^{N_t} \xi_i^2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{\mathbb{E}(\xi_1)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 \frac{N_t+1}{N_t} \frac{N_t}{N_t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{N_t} \frac{N_t+1}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{\mathbb{E}(\xi_1)} \end{aligned}$$

Видим, что исходная функция зажата двумя абсолютно идентичными функциями. Следовательно, по теореме о двух милиционерах предел исходной функции тоже будет равен  $\frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{\mathbb{E}(\xi_1)}$

## 2.5 Задача 5

## 2.6 Задача 6

### 2.6.1 i

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu \mathbb{E}(N_t) + \mu$$

Далее сделаем ключевой переход.  $S_{N_t+1}$  это точка времени, в которую произойдёт следующий после точки  $t$  эпизод восстановления. Очевидно, что математическое ожидание этой случайной величины больше  $t$ , так как это событие должно произойти после  $t$ . Следовательно:

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu \mathbb{E}(N_t) + \mu > t \Rightarrow \mathbb{E}(N_t) > \frac{t}{\mu} - 1 \Rightarrow \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

### 2.6.2 ii

Снова воспользуемся тождеством Вальда. Начём доказывать с конца.

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t) \leq \frac{t}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{\sqrt{t}}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} \Rightarrow \tilde{\mu}(\sqrt{t}) \mathbb{E}(\tilde{N}_t) \leq t + \sqrt{t}$$

Согласно тождеству Вальда:

$$\mathbb{E}(S_{N_t}) = \tilde{\mu}(\sqrt{t})\mathbb{E}(\tilde{N}_t)$$

Следовательно:

$$\mathbb{E}(S_{N_t}) \leq t + \sqrt{t}$$

Данное неравенство выполняется всегда, так как событие  $S_{N_t}$  – последний момент восстановления до  $t$ , и его математическое ожидание должно быть меньше  $t$ . Следовательно, получаем тождество. Исходное предположение доказано.

Что же касается левой части неравенства, её можно доказать интуитивно. Так как в процессе восстановления в приращениях всегда будет прибавляться меньший чем  $\xi_n$  отрезок времени  $\tilde{\xi}_n$ , то до момента времени  $t$  произойдёт точно не меньше эпизодов восстановления (если все реализации случайной величины  $\xi_n$  будут больше  $b$ ) или больше. Следовательно, математическое ожидание количества восстановлений к моменту  $t$  тоже будет выше.

Оба положения неравенства доказаны.

### 2.6.3 iii

После первых двух пунктов получаем неравенство:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} < \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} < \frac{1}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\mu}(\sqrt{t})}$$

Теперь, очевидно, как и в задаче 4, нужно воспользоваться теоремой о двух милиционерах. Но сначала нужно доказать, что  $\tilde{\mu}(\sqrt{t}) \rightarrow \mu$   $t \rightarrow \infty$

Для этого нужно вычислить следующее:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\min(\sqrt{t}, \xi_n))$$

Для этого так и напрашивается поменять местами предел и математическое ожидание. Однако для этого нужно выполнить условия Dominated convergence theorem. Как бы по-хорошему нужно выписать все предпосылки о вероятностном пространстве как метрическом пространстве и обозначить предпосылки, но сил уже на это мало. Обозначим самые главные. Нужно найти такую мажорирующую функцию  $g$ , что:

- ☀ Функция плотности  $g$  должна быть интегрируема
- ☀ Математическое ожидание модуля  $g$  конечно
- ☀ Функция  $g$  должна доминировать исходную функцию.

Всё просто. Обозначим  $g = \xi_n$ . Её математическое ожидание конечно по условию, и мы можем менять в исходном неравенстве предел и математическое ожидание.

Можно проиллюстрировать всё следующим примером.

Очевидно, что:

$$\min(b, \xi_n) \leq \xi_n$$

Это было как раз условие доминирования. Оно верно с учётом того, что  $\xi_n$  неотрицательная случайная величина. Домножим на неотрицательную функцию плотности.

$$f_\xi(x)\min(b, \xi_n) \leq f_\xi(x)\xi_n$$

Возьмём математическое ожидание обеих частей:

$$\int_0^{+\infty} f_\xi(x) \min(\sqrt{t}, x) dx \leq \int_0^{+\infty} f_\xi(x) x dx$$

Математическое ожидание исходной функции тоже доминировано конечным математическим ожиданием  $\xi$

По пунктам. Нужно ввести предпосылку о том, что функция плотности  $\xi$  интегрируема. Математическое ожидание модуля  $\xi$  равно математическому ожиданию  $\xi$  и конечно. Очевидно, что  $\xi_n$  доминирует исходную функцию.

Поменяем предел и математическое ожидание:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(\min(\sqrt{t}, \xi_n)) \Rightarrow \mathbb{E}(\lim_{t \rightarrow +\infty} \min(\sqrt{t}, \xi_n)) = \mathbb{E}(\xi_n) = \mu$$

Следовательно, мы доказали, что  $\tilde{\mu}(\sqrt{t}) \rightarrow \mu$   $t \rightarrow \infty$ . Теперь воспользуемся-таки теоремой о двух милиционерах и возьмём пределы по двум границам исходного неравенства:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} < \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\mu}(\sqrt{t})}$$

Очевидно, что при  $t \rightarrow +\infty$  дроби с  $t$  в знаменателях занулятся, а в правой части по доказанной выше сходимости появится тоже  $\mu$  В итоге:

$$\frac{1}{\mu} < \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

Следовательно, получаем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

## 3 Домашнее задание 3

### 3.1 Номер 1

#### 3.1.1 i

Докажем по индукции. Начальное условие:

$$S_1 = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

Индукционный переход:

$$n \rightarrow n+1, S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$$

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(x) &= \int_{\mathbb{R}_+} f_{S_n}(x-y) f_{\xi_{n+1}}(y) dy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} I\{x-y > 0\} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I\{y > 0\} dy = \\ &= \frac{\beta^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{\beta x} \underbrace{\int_0^x (x-y)^{n\alpha-1} y^{\alpha-1} dy}_I = \dots \end{aligned}$$

(8)



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^x (x-y)^{n\alpha-1} y^{\alpha-1} dy = \left| z = \frac{y}{x} \right| = \int_0^1 (x-zx)^{n\alpha-1} z x^{\alpha-1} x dz = \\
&= \text{По свойству Бета-функции} = x^{(n+1)\alpha-1} \frac{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)}
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\ldots = \frac{\beta^{(n+1)\alpha} x^{(n+1)\alpha-1}}{\Gamma((n+1)\alpha)} e^{-\beta x} = f_{S_{n+1}}(x) \tag{10}$$

### 3.1.2 ii

$$P\{N_t = n\} = P\{S_n \leq t\} - \{S_{n+1} \leq t\}$$

$$F_{S_n}(x) = \int_0^t \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} dx \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
P\{N_t = n\} &= \int_0^t \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} dx - \int_0^t \frac{\beta^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} x^{(n+1)\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \\
&\int_0^t \beta^{n\alpha} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} \left( \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma((n+1)\alpha)} x^\alpha \right) dx
\end{aligned} \tag{12}$$

Я не знаю, как дальше брать этот интеграл кроме как численно. Ну может тут тоже есть какой-то финт ушами через дискретную вариацию распределения аля Эрланг, но я не придумал, как его тут применить. Оставляю тут просто солнышко. Вот оно: ☀

## 3.2 Номер 2

Предположим независимость случайных величин  $S_2$  и  $\gamma$  (суммарное время обслуживания первого клиента). Это тонкий момент. Я так и не смог привести контрпример к независимости. Вопрос в том, можно ли отделить время прихода первого покупателя от времени стрижки. В таком случае простое ручное вычисление  $\text{Cov}(\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \eta)$  Даст как минимум  $\text{Var}(\xi_1)$ . Следственно, предположим, что вторая величина неделима и независима от  $\xi_1$ . Иначе задача нерешаема в текущих условиях.

Где необходимо, будем пользоваться следующим утверждением (очевидно, по Лопеталю):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

$$\begin{aligned}
P\{\xi_1 + \xi_2 < \gamma\} &= \iint_{x_1 < x_2} \lambda_1^2 x_1 e^{-\lambda_1 x_1} \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} dx_1 dx_2 = \lambda_1^2 \lambda_2 \int_0^{+\infty} \int_{x_1}^{+\infty} x_1 e^{-(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} dx_2 dx_1 = \\
&\lambda_1^2 \lambda_2 \int_0^{+\infty} \left( -\frac{x_1 e^{-(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}}{\lambda_2} \Big|_{x_1}^{+\infty} \right) dx_1 = \lambda_1^2 \lambda_2 \int_0^{+\infty} \left( \frac{x_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}}{\lambda_2} \right) dx_1 = \\
&\lambda_1^2 \int_0^{+\infty} (x_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}) dx_1 = \lambda_1^2 \left( \frac{x_1 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}}{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}}{-(\lambda_1 + \lambda_2)} dx_1 \right) = \\
&-\lambda_1^2 \left( \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}}{-(\lambda_1 + \lambda_2)} dx_1 \right) = -\lambda_1^2 \left( \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x_1}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \Big|_0^{+\infty} \right) = \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} = \frac{\frac{1}{100}}{\left(\frac{35}{250}\right)^2} \approx 0.51
\end{aligned} \tag{13}$$

### 3.3 Номер 3

### 3.4 Номер 4

Необходимо найти следующую вероятность:

$$P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} \geq 2\}$$

Эту вероятность можно расписать по формуле полной вероятности. Это событие реализуется при трёх возможных условиях:

$$N_t = 2, N_t = 3, N_t \geq 4$$

Важно отметить, что  $(A | N_t = 2 | N_t \geq 2) = (A | N_t = 2)$ . Первый элемент уравнения – событие, на которое наложены сразу два условия. Вероятности условий также должны стать условными событиями. Только тогда их сумма будет равняться единице.

В таком случае, запишем формулу следующим образом:

$$\begin{aligned} P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} \geq 2\} &= P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} = 2\}P\{N_{10} = 2 | N_{10} \geq 2\} + \\ &P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} = 3\}P\{N_{10} = 3 | N_{10} \geq 2\} + P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} \geq 4\}P\{N_{10} \geq 4 | N_{10} \geq 2\} = \\ &(P\{N_{30} - N_{10} = 0\} + P\{N_{30} - N_{10} = 1\})P\{N_{10} = 2 | N_{10} \geq 2\} + P\{N_{30} - N_{10} = 0\}P\{N_{10} = 3 | N_{10} \geq 2\} \end{aligned} \quad (14)$$

Найдём все необходимые нам вероятности. Для этого воспользуемся доказанным на лекции утверждением:

$$N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s)) \forall t, s \geq 0, t > s$$

Следовательно:

$$P\{N_t - N_s = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$$

При  $t - s = 5$  получим математическое ожидание процесса приращений равное одной квартире. Соответственно, параметр интенсивности такого распределения вычисляется следующим образом:

$$\lambda(t-s) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{t-s} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

$$P\{N_{10} = 0\} = e^{-2} \approx 0.14$$

$$P\{N_{10} = 1\} = 2e^{-2} \approx 0.28$$

$$P\{N_{10} = 2\} = \frac{(\frac{1}{5}10)^2}{2!} e^{-2} \approx 0.27$$

$$P\{N_{10} = 3\} = \frac{(\frac{1}{5}10)^3}{3!} e^{-2} \approx 0.18$$

$$P\{N_{10} \geq 4\} = 1 - 0.14 - 0.28 - 0.27 - 0.18 = 0.13$$

$$P\{N_{30} - N_{10} = 0\} = \frac{1}{0!} e^{-\frac{1}{5}20} \approx 0.018$$

$$P\{N_{30} - N_{10} = 1\} = \frac{\frac{1}{5}(30 - 10)}{1!} e^{-\frac{1}{5}20} = 4e^{-4} \approx 0.073$$

$$P\{N_{10} = 2 | N_{10} \geq 2\} = \frac{0.27}{0.27 + 0.18 + 0.13} \approx 0.465$$

$$P\{N_{10} = 3 | N_{10} \geq 2\} = \frac{0.18}{0.27 + 0.18 + 0.13} \approx 0.31$$

$$P\{N_{10} \geq 4 | N_{10} \geq 2\} = \frac{0.13}{0.27 + 0.18 + 0.13} \approx 0.22$$

Засунем всё обратно в формулу:

$$P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} \geq 2\} = (0.018 + 0.073) \cdot 0.465 + 0.018 \cdot 0.31 = 0.0423 + 0.00558 = 0.04788 \quad (15)$$

## 4 Домашнее задание 4

### 4.1 Задача 1

#### 4.1.1 i

$$\mathbb{E}(e^{iu(2\xi - \mathbf{I}\{\xi > \frac{1}{2}\})})$$

Определим распределение величины  $2\xi - \mathbf{I}\{\xi > \frac{1}{2}\}$ , разложив её по формуле полной вероятности и используя формулу полной вероятности.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{2\xi - \mathbf{I}\{\xi > \frac{1}{2}\} \leq x\} &= \mathbb{P}\{2\xi \leq x | \xi \leq \frac{1}{2}\} \mathbb{P}\{\xi \leq \frac{1}{2}\} + \mathbb{P}\{2\xi - 1 \leq x | \xi > \frac{1}{2}\} \mathbb{P}\{\xi > \frac{1}{2}\} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{2\xi \leq x \cap \xi \leq \frac{1}{2}\}}{\mathbb{P}\{\xi \leq \frac{1}{2}\}} \mathbb{P}\{\xi \leq \frac{1}{2}\} + \frac{\mathbb{P}\{2\xi - 1 \leq x \cap \xi > \frac{1}{2}\}}{\mathbb{P}\{\xi > \frac{1}{2}\}} \mathbb{P}\{\xi > \frac{1}{2}\} = \\ \mathbb{P}\{2\xi \leq x \cap \xi \leq \frac{1}{2}\} + \mathbb{P}\{2\xi - 1 \leq x \cap \xi > \frac{1}{2}\} &= \mathbb{F}_\xi(\min(\frac{x}{2}, \frac{1}{2})) + \mathbb{F}_\xi(\frac{x+1}{2}) - \mathbb{F}_\xi(\frac{1}{2}) = \mathbb{F}_\xi(\frac{x}{2}) + \mathbb{F}_\xi(\frac{x}{2}) = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x \text{ при } x \in [0; 1] \end{aligned} \quad (16)$$

Последние переходы поясню. Минимум из  $\frac{x}{2}$  и  $\frac{1}{2}$  всегда будет в пользу первого варианта, так как  $x \in [0; 1]$ . В следствие линейности равномерной функции распределения очевидно, что  $\mathbb{F}_\xi(\frac{x+1}{2}) = \mathbb{F}_\xi(\frac{x}{2}) + \mathbb{F}_\xi(\frac{1}{2})$

Получается, что  $\eta_1 \sim U[0, 1]$ . Следовательно, характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\mathbb{E}e^{iu\eta_1} = \int_0^1 e^{iux} dx = \frac{e^{iux}}{iu} \Big|_0^1 = \frac{e^{iu} - 1}{iu} = \frac{\cos(u) + i\sin(u) - 1}{iu}$$

Очевидно, ответ будет комплексным.

#### 4.1.2 ii

$$\mathbb{E}e^{iuln(\xi)} = \mathbb{E}(e^{ln(\xi)})^{iu} = \mathbb{E}\xi^{iu} = \int_0^1 x^{iu} dx = \frac{x^{iu+1}}{iu+1} \Big|_0^1 = \frac{1^{iu+1}}{iu+1} = \frac{1^{iu}}{iu+1}$$

Если расписать единицу в степени мнимой единицы по общей формуле комплексной степени комплексного числа, получим:

$$\begin{aligned}(re^{i\theta})^z &= \exp\{z(\ln r + i\theta + 2ik\pi)\} \\ &= \exp\{z(\ln r + i\theta)\} \cdot \exp\{2ik\pi \cdot z\}\end{aligned}$$

Получим:  $1^i = e^{2\pi k}$

Числитель действительнзначный, знаменатель комплексный. Ответ комплексный.

#### 4.1.3 iii

$$\eta_3 = \begin{cases} -1, & 0 \leq \xi < 1/3 \\ 0, & 1/3 \leq \xi < 2/3 \\ 1, & 2/3 \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{iu\eta_3} &= \frac{1}{3}(e^{-iu} + 1 + e^{iu}) = \frac{1}{3}(\cos(-u) + i\sin(-u) + 1 + \cos u + i\sin u) = \\ &= \frac{1}{3}(\cos u - i\sin u + 1 + \cos u + i\sin u) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos u)\end{aligned} \quad (17)$$

Действительнозначная!

## 4.2 Задача 2

$$\mathbb{E}N_t = 100t$$

$Y_i \sim \exp(\frac{1}{5000})$  - размер выплаты

$$\mathbb{E}Y_1 = 5000$$

#### 4.2.1 i

$X_t = \sum_0^{N_t} Y_i$  - Составной процесс Пуассона, предполагая независимость  $\xi_i N_t$ .  $N_t$  - процесс Пуассона.  $\xi_1, \xi_2 - iid$

#### 4.2.2 ii

$$\mathbb{E}X_t = 100t\mathbb{E}Y_1 = 100t \cdot 5000 = 500000$$

$$\text{Var } X_t = 100t \text{Var } Y_1 = 100t \cdot 5000^2 + 5000^2 = 5000000000 = 5t \cdot 10^9$$

$$\mathbb{P}\{X_t = 0\} = \mathbb{P}\{N_t = 0\} = \frac{(100t)^0}{0!} e^{-100t} = e^{-100t}$$

$$\mathcal{L}_Y(u) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-ux} = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda+u)x} = \lambda \left( -\frac{e^{-(\lambda+u)x}}{\lambda+u} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda+u}$$

$$\mathcal{L}_{X_t} = e^{\lambda_1 t (\frac{\lambda_2}{\lambda_2+u} - 1)} = e^{\frac{-\lambda_1 u t}{\lambda_2+u}} = e^{\frac{-500000 u t}{1+5000u}}$$

### 4.3 Задача 3

Ничтоже сумняшеся воспользуемся формулами из четвёртого номера и определений с семинара во славу Сатаны, конечно же.

#### 4.3.1 i

По 4(ii) Однородный случай

$$F_{S_{101}-S_{100}|S_{100}=224}(t) = P(S_{101} - S_{100} \leq t | S_{100} = 224) = 1 - e^{-0.1(t+224)+10 \cdot 224} = 1 - e^{-10t}$$

Неоднородный случай

$$F_{S_{101}-S_{100}|S_{100}=224}(t) = P(S_{101} - S_{100} \leq t | S_{100} = 224) = 1 - e^{10(t+224)^{\frac{5}{4}}+10(224)^{\frac{5}{4}}}$$

#### 4.3.2 ii

По семинару, разность считающих функций распределена по Пуассону.

Однородный случай:

$$F_{S_{101}-S_{100}|S_{100}=224}(t) = P(N_{224+t}-N_{224} \geq 50) = 1 - \sum_{k=0}^{49} \frac{(10(224+t) - 10(224))^k}{k!} e^{-(10(224+t)-10(224))} =$$
$$1 - \sum_{k=0}^{49} \frac{(10t)^k}{k!} e^{-(10t)}$$

Неоднородный случай:

$$F_{S_{101}-S_{100}|S_{100}=224}(t) = P(N_{224+t}-N_{224} \geq 50) = 1 - \sum_{k=0}^{49} \frac{(10(224+t)^{\frac{5}{4}} - 10(224)^{\frac{5}{4}})^k}{k!} e^{-(10(224+t)^{\frac{5}{4}} - 10(224)^{\frac{5}{4}})}$$

### 4.4 Задача 4

$N_t$  – неоднородный процесс Пуассона

$$N_t - N_s \sim \text{Pois}(\Lambda(t) - \Lambda(s))$$

$$N_t \sim \text{Pois}(\Lambda(t)). S_k = \min\{t : N_t = k\}; \xi_k = S_k - S_{k-1}$$

$$\text{По лекции: } f_{\xi_1}(t) = \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}$$

#### 4.4.1 i

По индукции:

$$\odot n = 1 : f_{S_1}(t) = f_{\xi_1}(t) = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{1-1}}{(1-1)!} \lambda(t) = \lambda(t)e^{-\Lambda(t)}$$

$\odot$  Шаг индукции.

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) \Rightarrow F_{S_{n+1}}(t) = \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) = \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(N_t = n) = F_{S_n}(t) - e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^n}{n!}$$

$$f_{S_{n+1}}(t) = f_{S_n}(t) - \left( -\lambda(t) \cdot e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^n}{n!} + e^{-\Lambda(t)} \frac{n(\Lambda(t))^{n-1} \cdot \lambda(t)}{n!} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \lambda(t) + \lambda(t) \cdot e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^n}{n!} - e^{-\Lambda(t)} \frac{n(\Lambda(t))^{n-1} \cdot \lambda(t)}{n!} = \\
&= \frac{ne^{-\Lambda(t)}(\Lambda(t))^{n-1}\lambda(t)}{n!} + \frac{e^{-\Lambda(t)}(\Lambda(t))^n\lambda(t)}{n!} - \frac{ne^{-\Lambda(t)}(\Lambda(t))^{n-1} \cdot \lambda(t)}{n!} = e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^n}{n!} \lambda(t)
\end{aligned}$$

#### 4.4.2 ii

Если  $\xi_{k+1} \leq t$  то с момента  $S_k$  и до  $S_k + t$  произошёл как минимум один момент восстановления. Может и больше, кто эти случайные процессы разберёт. Всё не как у людей. Тогда  $N_{S_k+t} - N_{S_k} \geq 1$ . Исходя из  $S_k = s \Rightarrow N_{s+t} - N_s \geq 1$

$$\mathbb{P}(\xi_{k+1} \leq t | S_k = s) = \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s < 1) = 1 - \mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = 0) = 1 - e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)}$$

#### 4.4.3 iii

$$\begin{aligned}
F_{\xi_k}(t) &= \mathbb{P}(\xi_K \leq t) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(\xi_k \leq t | S_{k-1} = s) \cdot f_{S_{k-1}}(s) ds = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)}) \cdot e^{-\Lambda(s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds = \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) - e^{-\Lambda(t+s)+\Lambda(s)} \cdot e^{-\Lambda(s)} \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds = \int_0^{+\infty} f_{S_{k-1}}(s) - e^{-\Lambda(t+s)} \cdot \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds = \\
&= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(t+s)} \cdot \frac{(\Lambda(s))^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(s) ds
\end{aligned}$$

## 5 Домашнее задание 5

### 5.1 Задача 1

Для начала выпишем заготовку ответа.

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}\} = \begin{cases} 1 & \text{если } i_{n-1} < s, j = S \\ 0 & \text{если } i_{n-1} < s, j \neq S \\ (\star) & \text{если } i_{n-1} \geq s, i_{n-1} \geq j \\ (\star\star) & \text{если } i_{n-1} \geq s, i_{n-1} < j \end{cases}$$

Теперь кратко поясним полученную конструкцию. Функция распределения распадается на два случая. Если склад был в предыдущий день достаточно опустошён, то есть  $i_{n-1} < s$ , то очевидно, что значение заполнения склада в следующий день предопределено и с вероятностью 1 оно равно  $S$  и с нулевой - чему-то иному. Также очевидно, что никакая предыстория не влияет на эту определённость. Последнее состояние полностью определяет будущее.

Ситуацию, когда склад был заполнен достаточно, нужно рассмотреть отдельно.

$$(\star) = p\{X_{n-1} - D_{n-1} | X_{n-1} = i_{n-1}\} = \mathbb{P}\{i_{n-1} - D_{n-1} = j\} = P\{D_{n-1} = i_{n-1} - j\}$$

При добавлении предыстории ничего не изменится, так как  $D_{n-1}$  и  $X_{n-2}$  независимы. Очевидно, что заказ не может быть отрицательным, поэтому  $(\star\star) = 0$ . Так как в задании не указано, то в предыдущей опции предполагается, что заказ может быть нулевым.

Вершина	Существенность	Период
1	Существенна	1
2	Существенна	1
3	Несущественна	1
4	Существенна	2
5	Существенна	2
6	Существенна	1
7	Существенна	1

$$P\{X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}\} = \begin{cases} 1 & \text{если } i_{n-1} < s, j = S \\ 0 & \text{если } i_{n-1} < s, j \neq S \\ P\{D_{n-1} = i_{n-1} - j\} & \text{если } i_{n-1} \geq s, i_{n-1} \geq j \\ 0 & \text{если } i_{n-1} \geq s, i_{n-1} < j \end{cases}$$

## 5.2 Задача 2

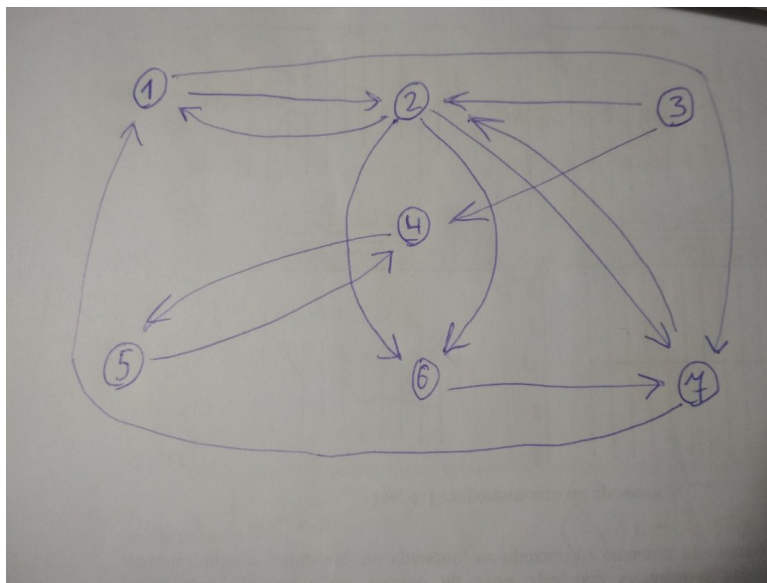


Рис. 4: Графическое представление Марковской цепи

### 5.2.1 i

Исходя из графа на Рис. 4, можно выделить 3 класса эквивалентности: (4,5), (3), (1,2,7,6). Я не знаю, нужно ли тут ещё что-то пояснять. Просто по определению это классы эквивалентности. Попад из любого состояния в любое иное, можно вернуться назад.

### 5.2.2 ii

Опять же, из графа очевидна существенность вершин. Вершины 4 и 5 существенны, так как между ними есть связь, а больше идти некуда. Вершина 3 несущественна, так как из неё можно перейти в 4 и не вернуться. Все остальные вершины существенны, так как

лежат внутри одного класса эквивалентности и вершина 1 существенна. А как мы знаем, в классе эквивалентности если одна вершина существенна, то и все остальные тоже.

Так как все вершины внутри класса эквивалентности имеют один период, то найдём период для вершины 1. Так как не существуют пути 1-2-1 и 1-2-7-1, то НОД длин путей не может быть иным кроме 1. Следовательно, период вершин 1, 2, 6, и 7 равняется 1.

Период для вершины 3 равняется 1 по определению, так как в неё невозможно вернуться.

Периоды вершин 4 и 5, очевидно, 2, так как все возможные пути кратны 2. Все результаты представлены в таблице выше.

### 5.2.3 iii

Для этого нужно решить систему вида  $\pi P = \pi$ , где  $\pi_{1 \times 7}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Дополнительно нужно ввести в систему условие  $\sum_{i=1}^7 \pi_i = 1$ . Из системы можно выкинуть одно уравнение, как было показано на лекции. Выкинем второе, там больше всего коэффициентов. Система, очевидно, неэргодическая, и вполне можно ожидать неединственность решения. Решение системы несложное, но уж очень лень техать. Предложу поверить мне на слово.

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_7 = \pi_1 \\ 0 = \pi_3 \\ \frac{1}{2}\pi_3 + \pi_5 = \pi_4 \\ \pi_4 = \pi_5 \\ \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_7 = \pi_6 \\ \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_6 = \pi_7 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \pi_6 \\ \pi_2 = \pi_7 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_4 = \pi_5 \\ \pi_6 = \frac{2}{3}\pi_7 \\ \pi_7 = (1 - 2\pi_5)\frac{3}{10} \end{cases}$$

Например, одним из возможных распределений будет:

$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \\ \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_4 = \frac{1}{2} \\ \pi_5 = \frac{1}{2} \\ \pi_6 = 0 \\ \pi_7 = 0 \end{cases}$$

Наблюдаем то, что и должны. Неэргодическая система неустойчива к стартовому состоянию и, следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) \neq \pi_j$ . Очевидно, что если стартовое состояние будет



в одной из точек (4,5), то в асимптотике распределение будет таким, как в решении выше, а если в одной из точек (1,2,6,7), то распределение будет совсем иным. Интересный результат, я, кажется, стал лучше понимать предпосылки эргодической теоремы.

### 5.3 Задача 3

Воспользуемся спектральным разложением матрицы из условия для возведения в степень.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 - \lambda & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Чёрное колдовство} \Rightarrow 24\lambda^3 - 14\lambda^2 - 9\lambda - 1 = 0$$

Как видим, корень уравнения  $\lambda = 1$  подходит, так что всё хорошо. Поделим многочлен на многочлен и получим:

$$\frac{24\lambda^3 - 14\lambda^2 - 9\lambda - 1}{\lambda - 1} = 24\lambda^2 + 10\lambda + 1$$

Решим уравнение  $24\lambda^2 + 10\lambda + 1$

$$D = 100 - 96 = 4$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{6}$$

Так как элементы матрицы в степени  $n$  это какие-то линейные комбинации собственных значений. Выпишем через первые несколько степеней значения линейных комбинаций, чтобы получить систему:

$$p_{23}^n = A + B \left(-\frac{1}{4}\right)^n + C \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - \frac{1}{4}B - \frac{1}{6}C = \frac{1}{3} \\ A + \frac{1}{16}B + \frac{1}{36}C = \frac{13}{36} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ 12A - 3B - 2C = 4 \\ 144A + 9B + 4C = 52 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Чёрное колдовство методом Крамера} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{12}{35} \\ B = \frac{4}{5} \\ C = -\frac{8}{7} \end{cases}$$

Ответ:

$$p_{23}^n = \frac{12}{35} + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^n - \frac{8}{7} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

## 5.4 Задача 4

Обозначим два возможных состояния: А - победа, В - поражение. Составим матрицу переходов:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Для Марковской цепи мы помним, что  $P^{(m)} = P^m$ , так что без тени сомнений возведём матрицу в третью степень. Именно в третью, так как матрица в первой степени показывает вероятности исходов второй игры, во второй степени - третьей игры, а в третьей - четвёртой.

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.667 & 0.333 \\ 0.666 & 0.334 \end{pmatrix}$$

Следовательно, вероятность того, что выиграв первый матч, Крылья Советов победят вероятностью 0.667. Что-то меня терзают сомнения, что задача такая лёгкая.

## 5.5 Задача 5

Введём контрпример, показывающий, что данная цепь не является Марковской.

$$\text{Пусть } \xi_n = \begin{cases} 0, p \\ 1, 1-p \end{cases}$$

Найдём следующую вероятность:

$$\mathbb{P}\{\xi_n + \xi_{n+1} = 2 | \xi_{n-1} + \xi_n = 1, \xi_{n-1} + \xi_{n-2} = 0\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi_n + \xi_{n+1} = 2 \cap \xi_{n-1} + \xi_n = 1 \cap \xi_{n-1} + \xi_{n-2} = 0\}}{\mathbb{P}\{\xi_{n-1} + \xi_n = 1 \cap \xi_{n-1} + \xi_{n-2} = 0\}} =$$

Очевидно, что в существует только один набор пересекающихся событий, описывающих числитель и знаменатель и что переход эквивалентен

$$= \frac{\mathbb{P}\{\xi_{n+1} = 1 \cap \xi_n = 1 \cap \xi_{n-1} = 0 \cap \xi_{n-2} = 0\}}{\mathbb{P}\{\xi_n = 1 \cap \xi_{n-1} = 0 \cap \xi_{n-2} = 0\}} = \text{независимость } \xi_n = \mathbb{P}\{\xi_{n+1} = 1\} = p$$

Теперь уберём из условия последний шаг и посмотрим, что получится.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_n + \xi_{n+1} = 2 | \xi_{n-1} + \xi_n = 1\} &= \frac{\mathbb{P}\{\xi_n + \xi_{n+1} = 2 \cap \xi_{n-1} + \xi_n = 1\}}{\mathbb{P}\{\xi_{n-1} + \xi_n = 1\}} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{\xi_{n+1} = 1 \cap \xi_n = 1 \cap \xi_{n-1} = 0\}}{\mathbb{P}\{\xi_n = 1 \cap \xi_{n-1} = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_n = 0 \cap \xi_{n-1} = 1\}} = \frac{p^2(1-p)}{2p(1-p)} = \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Следовательно, предыстория дальше первого шага влияет на вероятность и данная цепь не является цепью Маркова.

## 5.6 Задача 6

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ p_n & p_1 & p_2 & \dots & p_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_1 \end{pmatrix}$$

Сразу заметим, что матрица  $P$  описывает эргодическую цепь Маркова, так как  $p_i \in (0,1), \forall i = 1..n, \sum_{i=1}^n p_i = 1$ . Очевидно, что в каждой вершине есть цикл и, следовательно, период всех вершин = 1. Так как каждая вершина сообщается с каждой, следовательно, можно из каждой точки попасть в каждую и вернуться обратно. Из этого напрямую следует, что весь граф представляет собой один класс эквивалентности, в котором все вершины существенны.

Далее, проверим, что  $\pi_{1 \times n}^T = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  является стационарным распределением. Очевидно, что  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})P_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{n}$ . Следовательно,  $\pi_{1 \times n}^T P = \pi_{1 \times n}^T$  и  $\pi_{1 \times n}^T$  является стационарным распределением. Так как цепь маркова эргодическая, то это распределение будет единственным и, следовательно, по теореме с семинара:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} = \frac{1}{n}, \quad \forall k = 1..n$$

## 6 Домашнее задание 6

### 6.1 Задача 1

#### 6.2 i

Выпишем матрицу переходов:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Искомое распределение - это шестая строка матрицы  $P^2$ . Мысленно умножим шестую строку матрицы  $P$  на каждый из столбцов и получим ответ:

$$p_{6j}^2 = \left( \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{8} \frac{1}{4} \right)$$

#### 6.2.1 ii

Ответ очевиден, вероятности будут равные,  $\frac{1}{6}$ . Очень лень техать систему и тем более решать.

### 6.3 Задача 2

#### 6.3.1 i

Классы эквивалентности:

☼ (1) - существенное состояние, непериодическое

☼ (2,3) - состояния несущественны, период: 2

☼ (4) - несущественное состояние, непериодическое

## 6.4 ii

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_3 \\ \frac{1}{4}\pi_4 = \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 1 \\ \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_4 = 0 \end{cases}$$

Получаем единственное стационарное распределение. Ответ согласуется с логикой. Из любого состояния процесс когда-нибудь перейдёт в состояние 1 и не сможет из него выйти.

### 6.4.1 iii

Решим с помощью метода первого шага. Спасибо ББ, что мы это прошли ещё на 2 курсе.

Пусть  $\mu$  - матожидание количества шагов из 2,  $\eta$  - ожидаемое количество шагов из 3.

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2}(\eta + 1) + \frac{1}{2} \\ \eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\mu + 1) \end{cases} \Rightarrow \mu = 2$$

## 6.5 Задача 3

### 6.5.1 i

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 6.5.2 ii

Классы эквивалентности:

☀ (0) - существенное состояние, непериодическое

☀ (1 - n-1) - несущественные состояния, период: 2

☀ (n) - существенное состояние, непериодическое

### 6.5.3 iii

Решим систему  $4 \times 4$ . Этого будет достаточно.

$$\begin{cases} (1-p)\pi_3 = \pi_2 \\ p\pi_2 = \pi_3 \\ p\pi_3 + \pi_4 = \pi_4 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_2 = 0 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_1 = 1 - \pi_4 \end{cases}$$

Следственно, стационарным распределением будет любое распределение вида  $[p, 0 \dots, 0, (1-p)]$ , где  $p \in [0, 1]$

## 6.6 Задача 4

Найдём математическое ожидание через сумму условных математических ожиданий, взвешенных на вероятности старта из них. По аналогии с задачей 2, найдём условные математические ожидания при старте из каждой точки. При старте из точки 1 подразумевалось матожидание = 0.

Решим систему по методу первого шага.  $\eta$  - матожидание при старте из точки 2,  $\kappa$  - матожидание при старте из точки 3:

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{3}(\eta + 1) + \frac{1}{3}(\kappa + 1) + \frac{1}{3} \\ \kappa = \frac{1}{4}(\kappa + 1) + \frac{1}{2}(\eta + 1) + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta = \frac{13}{4} \\ \kappa = \frac{14}{4} \end{cases}$$

Взвесим на вероятности стартовых точек:

$$\mu = \frac{1}{3} \left( \frac{13}{4} + \frac{14}{4} + 0 \right) = \frac{27}{12}$$

## 7 Домашнее задание 7

### 7.1 Задача 1

$X_t$  - гауссовский процесс

$$\mathbb{E}(X_t) = 0$$

$$Y_t = X_t \eta$$

$$\eta = \begin{cases} 1, p \\ -1, (1-p) \end{cases}$$

$$(Y_{t_1}, Y_{t_2} \cdots Y_{t_n}) = (X_{t_1} \eta, X_{t_2} \eta, \cdots X_{t_n} \eta)$$

$$\gamma = (\lambda_1 X_{t_1} \eta + \lambda_2 X_{t_2} \eta + \cdots + \lambda_n X_{t_n} \eta) = \eta \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{t_i}}_{\xi}$$

Очевидно, что  $\xi$  - нормальная величина. Пусть её функция распределения обозначается как  $\Phi(x)$

$$\mathbb{P}\{\gamma \leq x\} = \mathbb{P}\{\gamma \leq x | \eta = 1\} \mathbb{P}\{\eta = 1\} + \mathbb{P}\{\gamma \leq x | \eta = -1\} \mathbb{P}\{\eta = -1\} = \mathbb{P}\{\xi \leq x\} p + \mathbb{P}\{-\xi \leq x\} (1-p) =$$

$$\mathbb{P}\{\xi \leq x\} p + \mathbb{P}\{\xi \geq -x\} (1-p) = \mathbb{P}\{\xi \leq x\} p + \mathbb{P}\{x \leq \xi\} (1-p) = \Phi(x)(p + 1-p) = \Phi(x)$$

Следовательно,  $\gamma \sim N \Rightarrow (Y_{t_1}, Y_{t_2} \cdots Y_{t_n})$  - гауссовский вектор  $\Rightarrow Y_t$  - гауссовский процесс

## 7.2 Задача 2

### 7.2.1 i

$K(t,s) = \min(t,s) - ts$  - симметричная функция

Проверим положительную определённую.

Заметим, что

$$\min(t,s) = \int_0^{+\infty} f_t(x)f_s(x)dx \text{ при } f_t(x) = \mathbf{I}\{x \in [0,t]\}$$

В то же время  $ts = \min(t,s)\max(t,s)$

Следовательно,  $K(t,s) = \min(t,s)(1 - \max(t,s))$

Также заметим, что  $(1 - \max(t,s)) = \int_0^{+\infty} g_t(y)g_s(y)dy$  при  $g_t(x) = \mathbf{I}\{x \in [t, 1]\}$

Тогда:

$$\sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \int_0^{+\infty} f_{t_i}(x)f_{t_j}(x)dx \int_0^{+\infty} g_{t_i}(y)g_{t_j}(y)dy = \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \int \int_0^{+\infty} f_{t_i}(x)f_{t_j}(x)g_{t_i}(y)g_{t_j}(y)dxdy =$$

$$\int \int_0^{+\infty} \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j f_{t_i}(x)f_{t_j}(x)g_{t_i}(y)g_{t_j}(y)dxdy = \int \int_0^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{t_i}(x)g_{t_i}(y) \right)^2 dxdy \geq 0$$

Следовательно, случайный процесс существует

### 7.2.2 ii

$$K(s,t) = \min(s,t) - s(t+1) = \min(t,s) - s(t+1) \neq \min(t,s) - t(s+1) = k(t,s)$$

Функция несимметрична, следовательно процесс не существует

### 7.2.3 iii

$$K(s,t) = \min(s,t) + \cos(s-t) = \min(t,s) + \cos(t(t-s)) = \min(t,s) + \cos(t-s) = K(t,s)$$

$$\sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j (\min(t_i, t_j) + \cos(t-s)) = \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \min(t_i, t_j) + \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \cos(t-s) = I + II \geq 0 \Rightarrow$$

процесс существует

$$f_t(x) = \mathbf{I}\{x \in [0,t]\}$$

$$I = \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \int_0^{+\infty} f_i(x)f_j(x)dx = \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x)dx = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \right)^2 dx \geq 0$$

$$II = \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \cos(t_i - t_j) = \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j (\cos t_i \cos t_j + \sin t_i \sin t_j) = \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \cos t_i \cos t_j + \sum_{i,j}^n \lambda_i \lambda_j \sin t_i \sin t_j =$$

$$\left( \sum_{i=1}^n \cos t_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin t_i \right)^2 \geq 0$$

## 7.3 Задача 3

### 7.3.1 i

$Z_2 \sim N?$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Z_2 \leq x\} &= \mathbb{P}\{Z_2 \leq x | \xi > 0\} \underbrace{\mathbb{P}\{\xi > 0\}}_{\frac{1}{2}} + \mathbb{P}\{Z_2 \leq x | \xi < 0\} \underbrace{\mathbb{P}\{\xi < 0\}}_{\frac{1}{2}} + \mathbb{P}\{Z_2 \leq x | \xi = 0\} \underbrace{\mathbb{P}\{\xi = 0\}}_0 = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}\{|\eta| \leq x\} + \mathbb{P}\{-|\eta| \leq x\}) \star \end{aligned}$$

$$F_\xi(x) = \Phi(x)$$

Далее, пристально взглядываясь в график плотности нормального распределения, можно рассмотреть отдельно 2 случая:

При  $x > 0$ :

$$\star = \frac{1}{2}(\mathbb{P}\{|\eta| \leq x\} + 1) = \frac{1}{2}(\Phi(x) - \Phi(-x) + 1) = \frac{1}{2}(2\Phi(x) - 1 + 1) = \Phi(x)$$

При  $x < 0$ :

$$\frac{1}{2}(\underbrace{\mathbb{P}\{|\eta| \leq x\}}_0 + \mathbb{P}\{|\eta| \geq -x\}) = \frac{1}{2}(2\Phi(x)) = \Phi(x)$$

### 7.3.2 ii

$$\text{cov}(\xi, |\eta| \text{sign}(\xi))$$

$$\mathbb{E}(\xi) = 0, \mathbb{E}(|\eta| \text{sign}(\xi))$$

$$\mathbb{E}(\xi |\eta| \text{sign}(\xi)) = \mathbb{E}(\xi \text{sign}(\xi)) \mathbb{E}(|\eta|) = \frac{2}{\pi}$$

$$\mathbb{E}(|\eta|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left( -e^{-\frac{x^2}{2}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$x \text{sign}(x)$  – борелевская функция. так что можно считать матожидание по определению

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi \text{sign}(\xi)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \text{sign}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \underbrace{\int_{-\infty}^0 -x e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_I + \underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{II} \right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \\ I &= e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^0 = 1 \\ II &= -e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

### 7.3.3 iii

#### ОЛЯ, СПОЙЛЕР

Этот пункт можно не читать, он неверный, но понял я это только в конце. Можешь просто прочесть последнюю строчку и посмеяться.

Докажем от противного. Пусть вектор  $\vec{Z}$  - гауссовский. Тогда должно быть верно, что  $\vec{Z} = \Sigma^{\frac{1}{2}} \vec{Z}^0 + \vec{\mu}$ , где  $\vec{Z}^0$  - вектор стандартных нормальных случайных величин.

Как мы знаем из предыдущего пункта:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} & 1 \end{pmatrix}$$

Разложим по спектральной теореме эту матрицу, чтобы возвести её в степень  $\frac{1}{2}$ . Тут я предлагаю поверить мне на слово, что она раскладывается следующим образом, подробно не вижу смысла описывать.

$$\Sigma^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi+2}{\pi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi+2}{\pi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^0 \\ Z_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Перемножив первые три матрицы:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1^0 \\ Z_2^0 \end{pmatrix}$$

где  $\alpha = \sqrt{\frac{\pi+2}{\pi}} + \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}, \beta = \sqrt{\frac{\pi+2}{\pi}} - \sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}$

По исходным данным,  $Z_1, Z_2$  - стандартные нормальные величины. Что же  $Z_1^0, Z_2^0$

Давайте выразим их из системы уравнений. Опять же, я пропущу никому не нужное решение. Подставив ответ в исходную систему, легко проверить его.

$$Z_1^0 = \frac{2(\alpha Z_1 - \beta Z_2)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

$$Z_2^0 = \frac{2(\alpha Z_2 - \beta Z_1)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Сейчас осознал, что мог просто обратить матрицу и не городить в тетради страницу вычислений, но да какая теперь разница.

Итак, теперь посчитаем дисперсию любой из величин. Допустим,  $Z_1$ :

$$\text{Var}(Z_1^0) = \frac{4}{(\alpha^2 - \beta^2)^2} (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \frac{2}{\pi})$$

$$\alpha^2 = 2 + \frac{2\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}, \beta^2 = 2 - \frac{2\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

Нетрудно показать, что  $\alpha^2 + \beta^2 = 4$  и  $\alpha\beta = \frac{4}{\pi}$

И вот на этом моменте я на бумажке всё досчитал, и понял, что там будет единица. А значит, всё было зря. Ну и ладно.





## 7.4 Задача 4

### 7.4.1 i

$$Y_{n+1} = \alpha(\alpha Y_{n-1} + X_{n-1}) + X_n = \alpha^2 Y_{n-1} + \alpha X_{n-1} + X_n = \sum_{i=0}^n \alpha^i X_{n-i}$$

Рассмотрим вектор  $(Y_{t_1}, Y_{t_2} \dots Y_{t_n})$

$$(Y_{t_1}, Y_{t_2} \dots Y_{t_n}) = \left( \sum_{i=0}^{t_1-1} \alpha^i X_{t_1-i-1}, \sum_{i=0}^{t_2-1} \alpha^i X_{t_2-i-1}, \dots, \sum_{i=0}^{t_n-1} \alpha^i X_{t_n-i-1} \right)$$

Очевидно, что линейные комбинации компонент этого вектора можно записать следующим образом:

$$\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_{\max(t_1, \dots, t_n)} X_{\max(t_1, \dots, t_n)} \sim N$$

как линейная комбинация стандартных нормальных величин

Следовательно,  $(Y_{t_1}, Y_{t_2} \dots Y_{t_n})$  - гауссовский вектор  $\Rightarrow Y_t$  - гауссовский процесс

### 7.4.2 ii

$$\text{Cov}(Y_t, Y_s) = \text{Cov}\left(\sum_{i=0}^{t-1} \alpha^i X_{t-1-i}, \sum_{i=0}^{s-1} \alpha^i X_{s-1-i}\right) = \text{независимость и смена порядка суммирования} =$$

$$\sum_{i=0}^{\min(t-1, s-1)} \alpha^{t+s-2i-2} \text{Var}(X_i) = \alpha^{t+s-2} \frac{1 - \alpha^{-2(\min(t-1, s-1)+1)}}{1 - \alpha^{-2}} = \alpha^{t+s} \frac{1 - \alpha^{-2\min(t, s)}}{\alpha^2 - 1}$$

## 7.5 Задача 5

Вместо доказательства неотрицательной определённости функции докажем неотрицательную, а точнее положительную определённость матрицы  $M_n = (e^{-|t_i - t_j|})_{i,j=1}^n$

Для случая  $3 \times 3$  матрица выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-|t_1 - t_2|} & e^{-|t_1 - t_3|} \\ e^{-|t_1 - t_2|} & 1 & e^{-|t_2 - t_3|} \\ e^{-|t_1 - t_3|} & e^{-|t_2 - t_3|} & 1 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра все главные миноры должны быть положительными. Докажем по индукции.

Базовый случай:

$$\Delta_1 = 1 > 0$$

Индукционный переход. Положим, что  $\Delta_{n-1} > 0$ . Докажем то же самое для  $n$ . Показывать будем всё на примере  $3 \times 3$  для простоты. Для подсчёта определителя матрицы  $n \times n$  видоизменим матрицу внутри определителя таким образом, чтобы сам определитель не изменился.

Во-первых, можно предположить  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ . Допустим, не выполняется только первое неравенство. Тогда, поменяв местами первую и вторую строки, а также первый и второй столбец, и переобозначив моменты времени, получим новую матрицу со старым определителем, у которого дважды сменился знак. В итоге определитель не изменился. Таким образом, преобразовав матрицу до выполнения временного условия, можно раскрыть все модули со знаком минус и получить примерно следующее:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{t_1 - t_2} & e^{t_1 - t_3} \\ e^{t_1 - t_2} & 1 & e^{t_2 - t_3} \\ e^{t_1 - t_3} & e^{t_2 - t_3} & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь каждую строку  $i$  домножим на  $e^{t_i}$ , а каждый столбец  $j$  - поделим на  $e^{-t_j}$ . Определитель матрицы снова не изменится, так как если мы вынесем множители из каждой строки (аналогично строкам можно выносить множители из столбцов, так как определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы), и все множители в итоге сократятся. Матрица будет выглядеть примерно следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{2(t_1 - t_2)} & e^{2(t_1 - t_3)} \\ 1 & 1 & e^{2(t_2 - t_3)} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее вычтем вторую строку из третьей, что не изменит определителя.

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{2(t_1 - t_2)} & e^{2(t_1 - t_3)} \\ 1 & 1 & e^{2(t_2 - t_3)} \\ 0 & 0 & 1 - e^{2(t_2 - t_3)} \end{pmatrix}$$

Очевидно, что последний элемент третьей строки при любой размерности будет положительным. Теперь раскладываем определитель полученной матрицы по последней строке и получаем:

$$\Delta_n = 1 - e^{2(t_{n-1} - t_n)} \Delta_{n-1} > 0$$

Следовательно, индукционный переход доказан и исходное утверждение о положительной определённости матрицы верно. Все её главные миноры положительны. Матрица положительно определена и, соответственно, функция положительно определена.

## 7.6 Задача 6

### 7.6.1 i

Для доказательства этого утверждения воспользуемся несколькими результатами, известными для независимых величин.  $z$  - вектор-столбец.  $\xi$  - вектор i.i.d. стандартных нормальных случайных величин.

Во-первых, для  $k$  независимых величин совместная плотность равна произведению отдельных плотностей:

$$f_{\xi}(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^k f_{\xi_i}(z_i) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-z_i^2/2\sigma_i^2}, \quad \sigma_i^2 = \overline{z_i^2}$$

Аналогично можно переписать в матричной форме:

$$f_{\xi}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Lambda_{\xi}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \Lambda_{\xi}^{-1} z\right)$$

$\Lambda_{\xi}$  - диагональная матрица. Возведение в любую степень - поэлементное.  $|\Lambda_{\xi}| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_k^2$   
Пусть  $\Sigma^{-\frac{1}{2}} = A$  Так как исходный вектор гауссовский, его можно представить в виде

$$\vec{X} = A\xi + \vec{\mu}_x = m(\vec{X})$$

Это матричное преобразование обратимо, так как матрица  $\Sigma$  невырождена.

$$\xi = B(\vec{X} - \vec{\mu}_x) = g(\vec{X}), B = A^{-1}$$

Далее, как завещал нам матан, для получения функции от новых переменных, произведём в функции от независимых величин преобразование переменных ( $\xi$ ), не забыв домножить на определитель Якобиана замены. Элла Львовна Хабина всегда говорила не забывать домножать на Якобиан замены. Грубо говоря, просто подставим, выразив новую плотность:

$$f_{\vec{X}}(\mathbf{x}) = f_{\xi}(g(\mathbf{x})) |J_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})| \star$$

По определению, элемент Якобиана:

$$J_{ij} = \frac{\partial g_i(x)}{\partial \beta_j}$$

Из определения функции  $g(x)$ :

$$g(x) = B(x - \vec{\mu}_x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}$$

Обозначив элемент матрицы  $B$  как  $b_{ij}$ , можно записать элемент  $g_i$  следующим образом:

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k b_{ij} (x_j - \vec{\mu}_{xj})$$

Получается,  $|J_{\mathcal{G}}(\mathbf{x})| = |B|$

Подставляем всё в исходную формулу  $\star$ :

$$f_{\tilde{\mathbf{X}}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \left( \frac{|B|^2}{|\Lambda_\xi|} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \vec{\mu}_{xi})^T B^T \Lambda_\xi^{-1} B (x - \vec{\mu}_{xi}) \right]$$

$$\Lambda_{\tilde{X}} = \mathbf{E} \left[ \left( \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_x \right) \left( \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{m}_x \right)^T \right] = \mathbf{E} [\mathbf{A} \xi^T \xi \mathbf{A}^T] = \mathbf{A} \mathbf{E} [\xi^T \xi] \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \Lambda_\xi \mathbf{A}^T$$

$$\mathbf{B}^T \Lambda_\xi^{-1} \mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1})^T \Lambda_{xi}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} \Lambda_x \mathbf{A}^T)^{-1} = \Lambda_{\tilde{X}}^{-1}$$

Засовывая всё обратно, получим:

$$f_{\tilde{\mathbf{X}}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \left( \frac{|B|^2}{|\Lambda_\xi|} \right)^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \vec{\mu}_{xi})^T \Lambda_{\tilde{X}}^{-1} (x - \vec{\mu}_{xi}) \right]$$

Далее, пользуясь свойствами определителей, преобразуем оставшееся:

$$\frac{|\mathbf{B}|^2}{|\Lambda_\xi|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|^2 |\Lambda_\xi|} = \frac{1}{|\mathbf{A}| |\Lambda_\xi| |\mathbf{A}^T|} = \frac{1}{|\mathbf{A} \Lambda_\xi \mathbf{A}^T|} = \frac{1}{|\Lambda_{\tilde{X}}|}$$

Получаем искомое:

$$f_{\tilde{\mathbf{X}}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Lambda_{\tilde{X}}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (x - \vec{\mu}_{xi})^T \Lambda_{\tilde{X}}^{-1} (x - \vec{\mu}_{xi}) \right]$$

## 7.6.2 ii

Мы знаем, что  $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{f_{\tilde{X}}(y)}{f_{X_1}(x_1)}$

Нам повезло, мы уже знаем  $f_{\tilde{X}}(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(y-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(y-\vec{\mu})}$

И мы даже знаем  $f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}$

Сделаем предварительные расчеты, а затем найдем нужную функцию:

$$\text{corr}(X_1, X_2) = \rho \Rightarrow \text{Cov}(X_1, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2 \Rightarrow |\Sigma| = \sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2) \neq 0$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}$$

$$(y - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (y - \vec{\mu}) = (x_1 - \mu_1 \ x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_2^2(1 - \rho^2)} - \frac{2\rho(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2(1 - \rho^2)} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2(1 - \rho^2)}$$

Осталось подставить и поделить:

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1) = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(y-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(y-\vec{\mu})}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}} = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} - \frac{2\rho(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2}{\sigma_1^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2(x_1-\mu_1)^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2) + \sigma_2^2(x_2-\mu_2)^2 + x_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2-\rho(x_1-\mu_1)\sigma_2/\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} \quad \square$$

## 7.7 Домашнее задание 8

### 7.7.1 Задача 1

$\tilde{W}_t$  – гауссовский процесс?

$$\gamma = \left( \alpha_1 \tilde{W}_{t_1} + \alpha_2 \tilde{W}_{t_2} + \dots + \alpha_n \tilde{W}_{t_n} \right) = (\lambda_1 W_{t_1} + \lambda_2 W_{t_2} + \dots + \lambda_n W_{t_n} + \lambda_T W_T) =$$

= линейная комбинация нормальных величин  $\Rightarrow \gamma$  – нормальная величина

Следственно,  $\tilde{W}_t$  – гауссовский процесс

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_t) = 0?$$

При  $t \leq T$ :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_t) = \mathbb{E}(W_t) = 0$$

При  $t > T$ :

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_t) = \mathbb{E}(2W_T - W_t) = 0$$

Найдём ковариационную функцию

При  $t, s \leq T$ :

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(W_t, W_s) = \min(t, s)$$

При  $t, s > T$ :

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(2W_T - W_t, 2W_T - W_s) = 4T - 2T - 2T + \min(t, s)$$

При  $t > T, s \leq T$  ( $t \leq T, s > T$  – аналогично):

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(2W_T - W_t, W_s) = 2s - \min(t, s) = 2s - s = s = \min(t, s)$$

Следовательно,  $\tilde{W}_t$  – BM

### 7.7.2 Задача 2

#### 7.7.3 i

$$X = e^{2W_t}$$

$$\vec{X} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = (e^{2W_1}, e^{2W_2}, \dots, e^{2W_n})$$

$$\gamma = \lambda_1 e^{2W_1} + \lambda_2 e^{2W_2} + \dots + e^{2W_n} \not\sim N$$

Так как при  $\lambda_i > 0 \forall i \in \overline{1, n}$  случайная величина  $\gamma > 0$

### 7.7.4 ii

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{2W_t}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{2x - \frac{x^2}{2t}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{4xt - x^2}{2t}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-2t)^2}{2t} + 2t} dx = \\ &= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2t)^2}{2t}} dx = \left| \frac{x-2t}{\sqrt{2t}} = u \right| = \frac{e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2t} du = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2t} du =\end{aligned}$$

Далее замечаем в интеграле кусочек error function:

$$\text{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-r^2} dt$$

Преобразуем наше выражение:

$$= \frac{2\sqrt{2t}e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} dx = e^{2t} \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} dx = e^{2t}$$

Предел error function равен 1 на  $+\infty$

### 7.7.5 Задача 3

### 7.7.6 Задача 4

Воспользуемся формулой из предыдущего дз, осознавая  $t_1 < t_2$  и  $\vec{\mu}_{xi} = \vec{0}$ :

$$f_{\vec{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} |\Lambda_{\vec{X}}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \vec{\mu}_{xi})^T \Lambda_{\vec{X}}^{-1} (\mathbf{x} - \vec{\mu}_{xi}) \right]$$

Где

$$\begin{aligned}\Lambda_{\vec{X}} &= \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \\ \Lambda_{\vec{X}}^{-1} &= \frac{1}{t_1 t_2 - t_1^2} \begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix} \\ |\Lambda_{\vec{X}}|^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{t_1 t_2 - t_1^2}\end{aligned}$$

Засунем всё это в формулу.

$$\begin{aligned}f_{\vec{W}} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{t_1 t_2 - t_1^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{t_1 t_2 - t_1^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{t_1 t_2 - t_1^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_1^2 t_2 - 2x_1 x_2 t_1 + x_2^2 t_1}{t_1 t_2 - t_1^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{t_1 t_2 - t_1^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{-x_1^2 (t_2 - t_1) - t_1 (x_2 - x_1)^2}{t_1 t_2 - t_1^2}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{t_1 t_2 - t_1^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_1^2}{t_1} - \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t_2 - t_1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t_1}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x_1^2}{t_1}} = \phi_{(0, t_2 - t_1)}(x_2 - x_1) \phi_{(0, t_1)}(x_1)\end{aligned}$$

### 7.7.7 Задача 5

### 7.7.8 Задача 6