27 ноября 2019 г.

# Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 9.

*Стационарность. Эргодичность.*
*Крайний срок сдачи - 10 декабря 2019 г., 12:10*

1. Определим процесс
$$X_t = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) Z_k,$$
где $Z_1, ..., Z_n$ - последовательность i.i.d. случайных величин со стандартным нормальным распределением, и, кроме того,

   (i) $\psi_k(t) = t^k$, $k = 1..n$;

   (ii) $\psi_k(t) = \cos(kt)$, если $k$ - чётное, и $\psi_k(t) = \sin(kt)$, если $k$ - нечётное, $k = 1..n$. Число $n$ - чётное.

   Определите, является ли процесс $X_t$ стационарным в каждом из случаев.

2. Обозначим через $\varepsilon_1, \varepsilon_2...$ - последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин, и через $\alpha, \beta$ - положительные константы. Определите, является ли следующие процессы стационарными в широком смысле и эргодическими $(t = 1, 2, ...)$:

   (i) $X_t = \varepsilon_1 + \cos(\varepsilon_2)$;

   (ii) $X_t = \varepsilon_t + \alpha t$;

   (iii) $X_t = \varepsilon_t + e^{-\beta t}$;

   (iv) $X_t = \varepsilon_t + e^{-\beta t} + \alpha t^2$.

3. Обозначим через $X_t$ случайный процесс с постоянным математическим ожиданием и коварционной функцией

$$K(t,s) = e^{-\alpha|t-s|},$$

где $\alpha > 0$ - константа. Известно, что случайная величина $\xi$ имеет положительную дисперсию. Определите, является ли эргодическим процесс $Y_t = X_t + \xi$.

4. Про процесс $Y_t$ известно, что

$$\mathbb{E}\left[Y_t\right] = \alpha + \beta t, \qquad \operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+h}) = e^{-\lambda h}, \qquad \forall\, t > 0, h \geq 0,$$

где $\lambda > 0$, $\alpha, \beta$ - некоторые константы. Определите, является ли эргодическим процесс

$$X_t := Y_{t+1} - Y_t.$$

5*. Является ли Броуновское движение (рассмотренное в целочисленные моменты времени $t = 0, 1, 2, ..$) эргодическим процессом?

6*. В условиях задачи 2, определите, является ли случайный процесс

$$X_t = \varepsilon_t + \alpha\ t/(t+1)$$

эргодическим.