25 сентября 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 3.

Процессы Пуассона.
Крайний срок сдачи - 8 октября 2019, 12:10

1. Пусть приращения процесса восстановления S_n, обозначенные через $\xi_n := S_n - S_{n-1}, \ n = 1, 2, ...$ имеют распределение $\Gamma(\alpha, \beta)$ с плотностью
$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \qquad x > 0,$$
где $\alpha > 0, \beta > 0$, $\Gamma(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ - гамма-функция.
   (i) Докажите, что S_n имеет распределение $\Gamma(n\alpha, \beta)$.
   Подсказка: используйте свойства бета-функции
$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$
   (ii) Найдите распределение считающего процесса N_t при фиксированном t.

2. Приход клиентов в парикмахерскую моделируется при помощи процесса Пуассона. В среднем за 10 минут приходит 1 клиент. В начальный момент времени в парикмахерской нет клиентов. Известно также, что время, потраченное мастером на первого клиента (время ожидания первого клиента + время стрижки), имеет экспоненциальное распределение, и среднее время обслуживания - 25 минут. Найдите вероятность того, что второму клиенту придётся подождать в связи с тем, что мастер будет занят первым клиентом.

3. Счётчик регистрирует автомобили, проезжающие по некоторой трассе. Движение автомобилей моделируется процессом Пуассона с интенсивностью λ: за t суток проезжает N_t автомобилей. В случайный момент времени η, имеющим равномерное распределение на

$[0,1]$, счётчик отключается до конца дня. Найдите математическое ожидание и ковариационную функцию процесса, показывающего количество зарегистрированных автомобилей к моменту времени $t \in [0,1]$.

4. Продажи квартир в новом жилом комплексе моделируются процессом Пуассона, причём в среднем за 5 дней продаётся 1 квартира. Найти вероятность того, что за первые 30 дней будет продано не более трёх квартир при условии, что за первые 10 дней было продано не менее двух (то есть, найти вероятность того, что темп продаж существенно замедлится после первых 10 дней).

5*. Пусть задан процесс Пуассона $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, ...$ имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Докажите, что вектор $(S_1, ..., S_n)$ имеет плотность равную

$$p_{(S_1,...,S_n)}(x_1, ..., x_n) = \lambda^n \exp\left\{-\lambda x_n\right\}$$

для векторов $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ таких, что $x_1 \leq ... \leq x_n$, и равную 0 для всех остальных векторов $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n_+$.

6*. Автобусы прибывают к остановке в соответствии с процессом Пуассона, т.е. $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, ...$ имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Пассажир подходит к остановке в детерминированный момент времени t^*. Обозначим через S_{k^*} момент времени прихода следующего автобуса, т.е.,

$$S_{k^*-1} < t^* \leq S_{k^*}.$$

(i) Докажите, что плотность ξ_{k^*} равна

$$p_{k^*}(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{если } 0 < x \leq t^*, \\ \lambda\left(1 + \lambda t^*\right) e^{-\lambda x}, & \text{если } x > t^*. \end{cases}$$

(ii) Докажите, что случайная величина $(S_{k^*} - t^*)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.

Комментарий. Из второго пункта данной задачи следует, что математическое ожидание времени ожидания автобуса равно $1/\lambda$. Данный результат является парадоксальным - из интуитивных соображений кажется, что время ожидание вдвое меньше, т.е. равно

$1/(2\lambda)$, поскольку $\mathbb{E}\xi_n = 1/\lambda$. Причина парадокса состоит в том, что номер интервала k^* является случайной величиной, и поэтому математическое ожидание его длины не равно $1/\lambda$.