1 ноября 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 6.

Цепи Маркова.

Данную домашнюю работу не нужно сдавать в письменном виде.

1. В правильной игральной кости сумма очков на противоположных гранях равна 7 (то есть 1 находится напротив 6, 2 -напротив 5 и т.д.). В каждый момент времени кость переворачивают на одну из четырёх соседних граней.

   (i) В начальный момент времени игральная кость лежит на столе на грани с 6. Найти распределение вероятностей положения кости в результате второго переворачивания.

   (ii) Найти стационарное распределение.

2. Цепь Маркова задана матрицей перехода за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

   (i) Найдите классы эквивалентности этой цепи Маркова и определите типы состояний (существенные/ несущественные, периодические/ непериодические).

   (ii) Найдите все стационарные распределения этой цепи Маркова.

   (iii) Найдите математическое ожидание количества шагов для перехода цепи в стационарный режим, если в начальный момент времени цепь находится в состоянии 2.

   Комментарий. Если на $n-$ом шаге распределение вероятностей на множестве состояний стационарное, то на всех последующих шагах оно остаётся таким же. Выражение "цепь перешла в стационарный режим на $n-$ ом шаге" означает, что начиная с $n-$го шага распределение вероятностей является стационарным.

3. Частица блуждает по прямой по целочисленным точкам $0, 1, .., , n$. Из любой внутренней точки (то есть точки $1, 2, .., n-1$) частица передвигается с вероятностью $p \in (0, 1)$ на один шаг вправо, и с вероятностью $1-p$ на один шаг влево. Попадая в точки 0 и n, частица остаётся в них навсегда.

   (i) Выпишите матрицу переходных вероятностей за 1 шаг.

   (ii) Укажите существенные и несущественные состояния и периоды состояний.

   (iii) Найдите стационарные распределения.

4. Цепь Маркова задана матрицей перехода за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

   Начальное распределение вероятностей $(1/3, 1/3, 1/3)$. Найдите математическое ожидание числа шагов, необходимых для перехода в состояние 1.

5*. Рассмотрим цепь Маркова, являющуюся случайным блужданием:

$$S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

   где $\xi_1, \xi_2, ...$ - i.i.d. с.в., принимающие значение 1 с вероятностью p и (-1) с вероятностью (1-p). Определите, являются ли возвратными состояния этой цепи.