Содержание

1 Домашнее задание 1

1.1 Задача 1

1.1.1 i

Случайный процесс описан уравнением $X_t = e^{\xi t}$

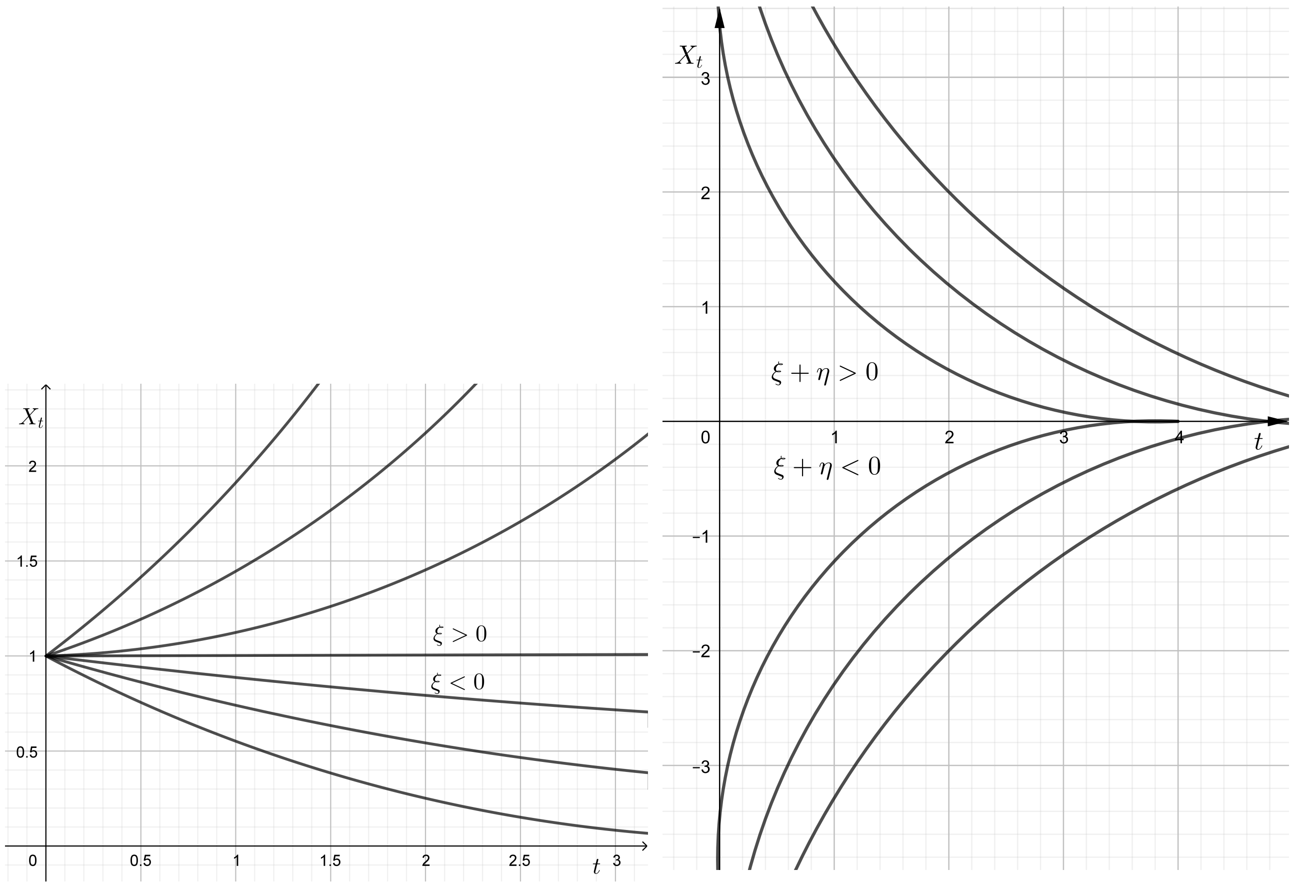


Рис. 1: Траектории

В зависимости от того, будет реализация случайной величины положительной или отрицательной, кривые будут либо экспоненциально возрастать, либо экспоненциально убывать, где ξ будет служить коэффициентом скорости роста. Чем ближе ξ к единице, тем быстрее будет возрастать кривая траектории, а чем ближе к минус единице, тем быстрее убывать. Соответственно, семейство кривых ограничено сверху кривой $X_t = e^{\xi}$, а снизу – кривой $X_t = e^{-\xi}$. Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 слева.

Найдём конечномерные распределения процесса. Для простоты записи покажу на двумерном примере, а далее расширим до многомерного случая.

☼ Очевидно, что $P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = 0$ при $x_1 \leq 0_2 \leq$, так как показательнаяя функция от экспоненты не может быть отрицательной или нулевой.

☼ При $x_1 \geq 1$ и $x_2 \geq 1$:

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{e^{\xi t_1} \leq x_1, e^{\xi t_2} \leq x_2\} = P\{\xi t_1 \leq ln(x_1), \xi t_2 \leq ln(x_2)\} = P\{\xi \leq min\left(\frac{ln(x_1)}{t_1}, \frac{ln(x_2)}{t_2}\right)\} \quad (1)$$

☼ При $x_1 \geq 1$ и $0 < x_2 < 1$:

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{e^{\xi t_1} \leq x_1, e^{\xi t_2} \leq x_2\} = P\{\xi t_1 \leq ln(x_1), \xi t_2 \leq ln(x_2)\} = P\{\xi \leq min\left(\frac{ln(x_1)}{t_1}, \frac{ln(x_2)}{t_2}\right)\} \quad (2)$$

Так как $ln(x_2)$, будет отрицательным, $ln(x_1)$ - положительным, то $P\{\xi \leq \frac{ln(x_2)}{t_2}\}$ будет ответом в данном случае.

☼ При $x_2 \geq 1$ и $0 < x_1 < 1$:

Абсолютно аналогично предыдущему случаю

☼ При $0 < x_2 < 1$ и $0 < x_1 < 1$:

$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = \cdots P\{\xi \leq min\left(\frac{ln(x_1)}{t_1}, \frac{ln(x_2)}{t_2}\right)\}$

В данном случае оба числа будут отрицательными и формула останется без сокращений.

Очевидно (нет, ну правда очевидно, можно я не буду объяснять?), что в многомерном случае будет ровно то же самое. Следовательно, без потери общности, можно записать ответ в сокращённом виде:

$$F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\} = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists j \text{ s.t. } x_j <= 0, j = 1 : n \\ F_\xi\left(min\left(\frac{ln(x_1)}{t_1}, \cdots, \frac{ln(x_n)}{t_n}\right)\right) \end{cases}$$

где $F_\xi(x)$ - функция распределения равномерной случайной величины ξ на $[-1, 1]$

1.1.2 ii

Случайный процесс описан уравнением $X_t = (\xi + \eta)/t$. В зависимости от того, будет ли реализация случайной величины $\xi + \eta$ положительной или отрицательной, траекториями будут семейства гипербол. Соответственно, чем ближе к нулю будет реализована данная случайная величина, тем более вогнуты будут гиперболы вогнуты в сторону точки (0.0). Графики возможных траекторий можно увидеть на Рис. 1 справа.

Что же касается конечномерного распределения, то здесь всё довольно похоже на предыдущий пунктб поэтому напишу с минимумом подробностей. Решим для двумерного случая и расширим на многомерный.

Для начала, однако, установим параметры нормального распределения случайной величины $\xi + \eta$. Математическое ожидание ноль. Ковариация двух величин тоже ноль, так что дисперсия равна 1. Получим стандартную нормальную величину.

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\} = P\{\xi + \eta \leq x_1t_1, \xi + \eta \leq x_2t_2\} = P\{\xi + \eta \leq min(x_1t_1, x_2t_2)\}$$

Рассмотрим 4 случая:

☼ $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$

В данном случае обе величины x_1t_1, x_2t_2 будут отрицательными и ответ будет: $F_{N_{(0,1)}}(min(x_1t_1, x_2t_2$

☼ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ Очевидно, обе величины x_1t_1, x_2t_2 будут положительными и ответ:$F_{N_{(0,1)}}(min(x_1t_1, x_2$

☼ $x_1 > 0, x_2 < 0$

x_1t_1 будет положительной величиной, а x_2t_2 - отрицательной. Ответ: $F_{N_{(0,1)}}(min(x_1t_1, x_2t_2)) = F_{N_{(0,1)}}(x_2t_2)$

☼ $x_1 < 0, x_2 > 0$ Ответ зеркален предыдущему.

Очевидно, что с повышением размерности ни один из этих вариантов не будет нарушаться. При наличии хотя бы одной отрицательной переменной x_j среди положительных, она автоматически станет минимумом, а при всех переменных одного знака формула и вовсе не упрощается. Следовательно, без потери общности, запишем ответ:

$$F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\} = F_{N_{(0,1)}}(min(x_1 t_1, \cdots, x_n t_n))$$

1.2 Задача 2

$$P\{X_{t_1} < X_{t_2}\} = P\{t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha)) < t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha))\} =$$
$$P\{(t_1 - t_2)\xi_1 + (t_1 - t_2)\alpha\xi_2 < (t_2 - t_1)2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 \geq -2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 + 2\alpha^2 \geq 0\} = 1$$

Чтобы вероятность того, что эта случайная величина была положительной стала равной единице, рассмотрим график. Так как указано, что параметр α является реальным числом, будем рассматривать только случаи с положительным дискриминантом. Чтобы учесть максимальное количество случаев, при которых значение функции в точке положительно, максимально "опустим"параболу, максимизировав дискриминант. Очевидно, что это произойдёт в двух точках относительно ξ: (1, -1), (-1, -1)

$$D = \xi_2^2 - 8\xi_1$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

Все мозможные случаи корней при $\xi_2 = + - 1$:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, при $\alpha \in [-1, 1]$ все возможные параболы будут принимать только неотрицательные значения. Ответ: $\alpha \in [-1, 1]$

1.3 Задача 3

$$f_z(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} L[p](u) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}\right) e^{-ux} dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x(1+u)} + e^{-x(2+u)} dx = \\ = \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2+u} = \frac{2+u+2+2u}{4+4u+2u+2u^2} = \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \end{aligned} \tag{3}$$

$$L[U](u) = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u\left(1 - \frac{4+3u}{2u^2+6u+4}\right)} = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u\left(\frac{2u^2+3u}{2u^2+6u+4}\right)} = \frac{3u+4}{2u^3+3u^2} = \frac{3u+4}{u^2(2u+3)} \tag{4}$$

$$\frac{3u+4}{u^2(2u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+3} = \frac{Au(2u+3) + B(2u+3) + Cu^2}{u^2(2u+3)} = \frac{2Au^2 + Cu^2 + 3Au + 2Bu + 3B}{u^2(2u+3)}$$

$$\begin{cases} C + 2A = 0 \\ 3A + 2B = 3 \\ 3B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \tag{5}$$

$$U(t) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\exp^{-\frac{3}{2}t}$$

1.4 Задача 4

1.4.1 i

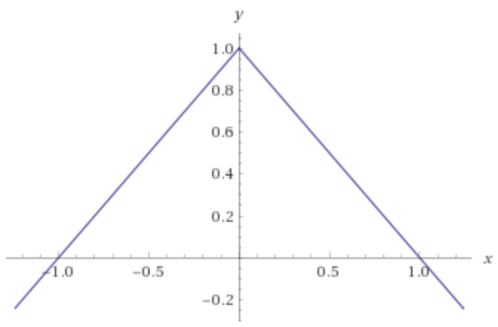


Рис. 2: $f_{\xi-\eta}(x)$

Для начала выведем несколько необходимых свойств функций плотностей.

$$\begin{gathered} F_{|\xi|} = P\{|\xi| \leq x\} = P\{-x \leq \xi \leq x\} = \\ P\{\xi \leq x\} - P\{\xi \leq -x\} = F_\xi(x) - F_\xi(-x) \end{gathered} \tag{6}$$

Следовательно:

$$f_{|\xi|}(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x)$$

Теперь по формуле свёртки выведем следующую плотность:

$$f_{\xi-\eta}(x) = f_{\xi+(-\eta)}(x)$$

Для этого выведем следующее свойство:

$$F_{-\eta}(x) = P\{-\eta \leq x\} = P\{\eta \geq -x\} = 1 - F_\eta(-x) \Rightarrow f_{-\eta}(x) = f_\eta(-x)$$

Теперь возьмём интеграл:

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} I\{u - x \in [0;1]\} I\{-x \in [0;1]\} = \int_{max(u-1,-1)}^{min(u,0)} 1dx = min(u{,}0) - max(u-1,-1)$$

Полученная фукнция изображена на 2.

Так как функция симметричная, $f_{|\xi|}(x) = f_\xi(x) + f_\xi(-x) = 2f_\xi(x)$. Следовательно:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = 2(min(u{,}0) - max(u-1,-1))$$

Однако следует сделать важное замечание. Так как модуль случайной величины неотрицателен, складывать функции распределения следует только на положительной полуоси. Таким образом, ответ:

$$f_{|\xi-\eta|}(x) = \begin{cases} 0, u < 0 \\ 2(min(u{,}0) - max(u-1,-1)), u \geq 0 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта функция будет соответствовать всем необходимым свойствам функции плотности.

1.4.2 ii

По формуле свёртки:

$$f_{\xi+\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \exp^{-|u-x|-|x|} dx = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{0} \exp^{-|u-x|+x} dx + \int_{0}^{\infty} \exp^{-|u-x|-x} dx \right) =$$
$$\frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^{min(u,0)} \exp^{-u+2x} dx + \int_{min(u,0)}^{0} \exp^{u} dx + \int_{0}^{max(u,0)} \exp^{-u} dx + \int_{max(u,0)}^{+\infty} \exp^{u-2x} dx \right) =$$
$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \exp^{-u+2x} \Big|_{-\infty}^{min(u,0)} + x \exp^{u} \Big|_{min(u,0)}^{0} + x \exp^{-u} \Big|_{0}^{max(u,0)} - \frac{1}{2} \exp^{u-2x} \Big|_{max(u,0)}^{+\infty} \right) =$$
$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \exp^{-u+2min(u,0)} - min(u,0) \exp^{u} + max(u,0) \exp^{-u} + \frac{1}{2} \exp^{u-2max(u,0)} \right)$$

Вольфрам сказал, что интеграл под этой функцией равен единице, так что всё должно быть верно. По форме распределение напоминает нормальное. Касательно возникших функций минимума и максимума, они призваны регулировать функцию в зависимости от знака параметра u. В зависимости от него один из четырёх интегралов во 2 строке будет схлопываться в нулевой.

1.5 Задача 5

1.5.1 i

Нет, не является процессом восстановления, так как $p\{\xi_i \geq 0\} \neq 1$

1.5.2 ii

Каждая траектория имеед вид ломаной кривой. Она начинается в точке ноль и образует один из путей (слева направо) в древовидной структуре на Рис. 3.Для примера одна из возможных траекторий окрашена в оранжевый. Данная фигура по виду очень напоминает треугольник Паскаля.

1.5.3 iii

Сколько-нибудь адекватный ответ в явном виде у меня не получился, остался только следующий вариант:

$$P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\} = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots, X_n \leq x_n\} =$$
$$P\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i \leq x_2, \cdots, \sum_{i=1}^{t_n} \xi_i \leq x_n\} =$$
$$P\{\sum_{i=1}^{t_1} \xi_i \leq x_1, \sum_{i=t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1, \cdots, \sum_{i=t_{n-1}+1}^{t_n} \xi_i \leq x_n - x_{n-1}\}$$

Логика такого перехода в следующем:

$$\sum_{t_1+1}^{t_2} \xi_i + x_1 \leq \sum_{1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 \Rightarrow \sum_{t_1+1}^{t_2} \xi_i \leq x_2 - x_1$$

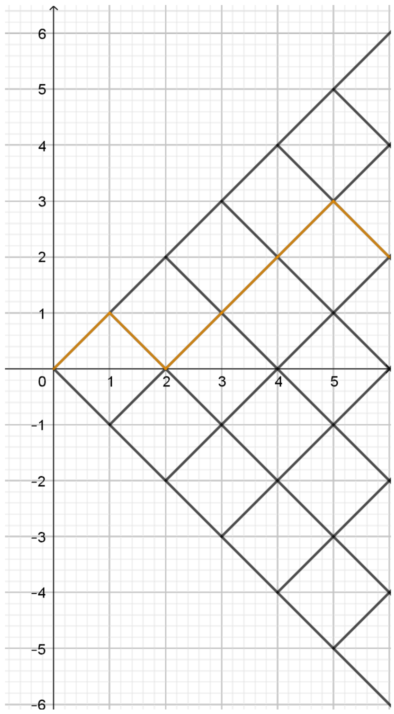


Рис. 3: Траектории S_n

Нетрудно проверить, что для каждого периода необходимо просто вычитать предыдущий. Я не доконца уверен в этом переходе, но выглядит красиво. Теперь события независимы. Можно разбить на произведение свёрток в смысле распределений:

$$P\{\sum_{i=1}^{t_1}\xi_i \le x_1, \sum_{i=t_1+1}^{t_2}\xi_i \le x_2 - x_1, \cdots, \sum_{i=t_{n-1}}^{t_n}\xi_i \le x_n - x_{n-1}\} =$$
$$F^{*t_1}(x_1) \cdot F^{*(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot F^{*(t_n-t_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

Единственное ограничение, которое можно наложить на переменные, это что при $x_j - x_{j-1} < t_j - t_{j-1}$ выражение $\sum_{i=t_{j-1}+1}^{t_j}\xi_i$ обратится в ноль. Это случится потому что сумма описанных выше величин не может быть мешьше чем (-1) * (количество величин в сумме). Итоговый ответ можно записать следующим образом:

$$F_\xi(x_1, \cdots, x_n) = \begin{cases} 0, \text{ если } \exists \text{ j s.t. } x_j - x_{j-1} < t_j - t_{j-1} \\ F^{*t_1}(x_1) \cdot F^{*(t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot F^{*(t_n-t_{n-1})}(x_n - x_{n-1}) \text{ иначе} \end{cases}$$

Мне самому не очень нравится этот ответ, так как она не даёт идей для следующего пункта и так как эти непонятные свёртки вообще неясно как брать в случае дискретных величин.

1.5.4 iv

1.6 Задача 6

Данное утверждение неверно. (Иначе бы его дали в лекции как более общее, ну логично же)

Событие $\{N_t \le n\}$ можно интерпретировать следующим образом. Возможны три варианта событий:

☼ К моменту времени t появилось менее n клиентов.

☼ В момент времени t подошёл n-ый покупатель.

☼ В какой-то из моментов времени до t подошёл n-ый покупатель, и вплоть до момента t более покупателей не приходило

Следовательно:

$$\{N_t \leq n\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\} \cup \{S_n < t\} \neq \{S_n \geq t\} = \{S_n > t\} \cup \{S_n = t\}$$

Исходное утверждение неверно.

2 Домашнее задание 2

2.1 Задача 1

Начальное условие: $Z_0 = c$

Обозначим случайную величину τ следующим образом:

$$\tau = \begin{cases} 1, 1 - F_\eta(R) \\ 0, F_\eta(R) \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{E}(\xi_n) = \mu$

Процесс восстановления: $Z_n = Z_{n-1} + \tau_n \xi_n$

Вычтем начальное условие из обоих частей:

$$Z_n - c = Z_{n-1} - c + \tau_n \xi_n$$

Переобозначим:

$$S_n = S_{n-1} + \tau_n \xi_n$$

$$N_t = max\{k, S_k \leq t\} = max\{k, Z_k - c \leq t\} = max\{k, Z_k \leq t + c\} = M(C)$$

$$t + c = C \Rightarrow t = C - c$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(\tau \xi_n)} = \frac{1}{(1 - F_\eta(R))\mu} = \lim_{C \to \infty} \frac{M(C)}{t(C)}$$

$$\mathbb{E}(\tau \xi_n) = \text{ независимость } = (1 - F_\eta(R))\mu$$

$$\lim_{C \to \infty} \frac{M(C)}{t(C)} = \frac{1}{(1 - F_\eta(R))\mu} \Rightarrow \lim_{C \to \infty} M(C) = \frac{C - c}{(1 - F_\eta(R))\mu}$$

2.2 Задача 2

2.2.1 i

Это событие будет подчиняться геометрическому распределению. По всем известной формуле математического ожидания это будет $\frac{1}{p}$

2.2.2 ii

Процесс восстановления: $S_n = S_{n-1} + \xi_n$

$\mathbb{E}\xi_i = 45$

Обозначим индикатор обнаружения :

$$\tau = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$$

Штраф: $\zeta \sim U[0, C(\frac{A}{B})]$,

Вознаграждение случайного процесса: $R_i = \tau\zeta \Rightarrow$ независимость $\Rightarrow \mathbb{E}(R_i) = \frac{pC}{2}$

$$\frac{Y(t)}{t} \to \frac{pC}{90} \Rightarrow Y(t) \to \frac{\tau pC}{90}$$

2.2.3 iii

Рассмотрим две альтернативы поведения. Первый вариант поведения владельца это экономия. Усредним возможные профиты и лоссы. В таком случае в любой конкретный день он в среднем будет получать профит $A - B$. Константу сколько не усредняй, останется константой. Однако он будет в среднем получать асимптотическиий штраф $Y(t) \to \frac{\tau pC}{90}$, который мы вычислили в предыдущем пункте.

В ином вариант, когда владелец выбирает не экономить, он не получает выгоды, но в среднем каждый день теряет рублей.

В таком случае владельцу будет выгодно экономить, если средяя "чистая прибыль"от экономии будет больше, чем от экономии, то есть:

$$A - B - \frac{Y(t)}{t} > -A$$

$$A - B - \frac{pC}{90} > -A$$

В таком случае владельцу будет выгодна первая стратегия даже если чистая прибыль от экономии будет отрицательной из-за штрафов, но будет больше чем $-A$, то экономия всё равно останется оптимальной. Преобразуя неравенство, получим:

$$2A - B - \frac{pC}{90} > 0 \Rightarrow \frac{90(2A - B)}{C(\frac{A}{B})} > p$$

Если честно, я не понял, как использовать зависимость от дроби. Разве что наложить дополнительные условия на производную C по A и B. Возможно это даст какие-то дополнительные условия на C, но особого смысла в этом не вижу.

2.3 Задача 3

Выпишем суммарное вознаграждение процесса востановления. Для начала обозначим пару вспомогательных индикаторов. τ – индикатор того, что ремонт возможно произвести самостоятельно. ρ – индикатор того, что самостоятельный ремонт был некачественным.

$$\tau = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 1, q \\ 0, 1-q \end{cases}$$

$$R_i = \tau\rho(m+\eta) + \tau(1-\rho)m + (1-\tau)\eta$$

2.3.1 i

В данном пункте необходимо только первое слагаемое. При $t \to \infty$ уммарные расходы будут следующими:

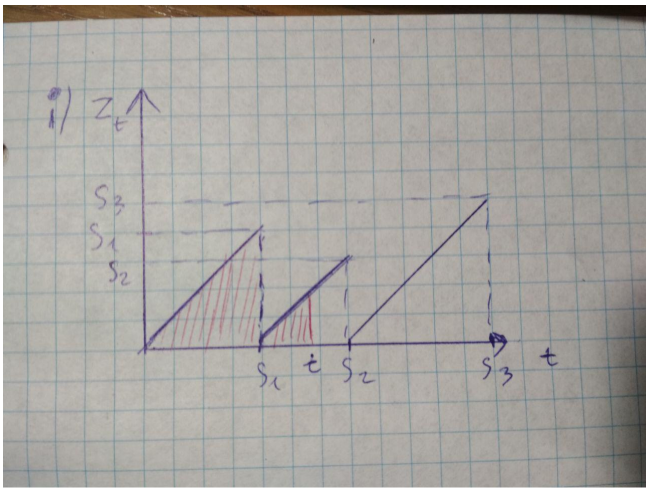
$$\frac{Y(t)}{t} \to \frac{\mathbb{E}(R_i^I)}{\mathbb{E}(\xi_i)} = \text{независимость} = \frac{pq\left(m + \frac{M+m}{2}\right)}{18} \Rightarrow Y(t) \to \frac{tpq\left(m + \frac{M+m}{2}\right)}{18}$$

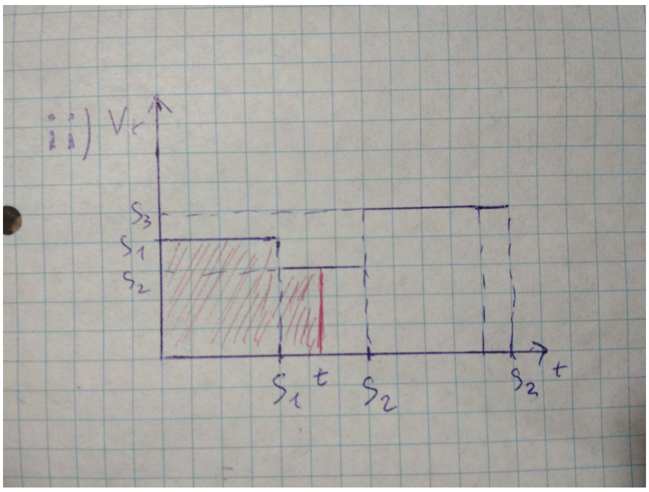
2.3.2 ii

Сравним ожидаемые вознаграждения за самостоятельный ремонт и за ремонт в автосервисе. Первое должно быть меньше второго. По-хорошему, нужно обе части неравенства ниже делить на $\mathbb{E}(xi_i)$б но все понимают, что я просто мысленно на это же положительное число 18 просто домножил обе части чтобы лишние дроби не тянуть. Матожидания позволю себе также вычислить в уме.

$$\begin{aligned}
pq\left(m + \frac{M+m}{2}\right) + p(1-q)m < \frac{(1-p)(M+m)}{2} \Rightarrow \Big| * 2 \text{ и } : q \\
q(M+3m) + 2m(1-q) < \frac{M+m}{p} - (M+m) \Rightarrow \Big| : (M+m) \\
\frac{q(M+3m) + 2m - 2qm}{M+m} < \frac{1-p}{p} \Rightarrow \frac{qM + qm + 2m}{M+m} < \frac{1-p}{p} \Rightarrow \\
q + \frac{2m}{M+m} < \frac{1-p}{p}
\end{aligned} \tag{7}$$

2.4 Задача 4





Как и в лекции, будем пользоваться теоремой о двух милиционерах. Это до ужаса скучно, но так и быть. Поправка к графикам, которые у меня уже нет сил перерисовывать: по оси ординат, конечно же, $\xi_1, \xi_2 ...$? а не $S_1, S_2 ...$

2.4.1 i

Функция под интегралом представляет собой просто куски прямой $Z(t) = t$, которя в каждый момент восстановления просто сдвигается на ξ_i. Как видно из графика слева на Рис. 2.4, искомый интеграл ограничен суммами площадей треугольников до точек N_t и $N_t + 1$. Найдём пределы границ неравенства.

$$\frac{\sum_1^{N_t} \frac{1}{2}\xi_i^2}{t} \leq \int_0^t Z_u^w du \leq \frac{\sum_1^{N_t+1} \frac{1}{2}\xi_i^2}{t}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \sum_1^{N_t} \xi_i^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{2N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2t} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 \frac{N_t+1}{N_t} \frac{N_t}{N_t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{2N_t} \frac{N_t+1}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}$$

Видим, что исходная функция зажата двумя абсолютно идентичными функциями. Следовательно, по теореме о двух милиционерах предел исходной функции тоже будет равен $\frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{2\mathbb{E}(\xi_1)}$

2.4.2 ii

Пункт абсолютно идентичен предыдущему. Единственная разница лишь в построении графика. Искомое время является ни чем иным как ξ_{N_t+1}. Скачки графика происходят непосредственно в моменты восстановления. Все вычисления и выводы абсолютно идентичны, с поправкой на $\frac{1}{2}$, так как площадь каждого квадрата будет ровно ξ_i^2.

$$\frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{t} \leq \int_0^t V_u^w du \leq \frac{\sum_1^{N_t+1} \xi_i^2}{t}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_1^{N_t} \xi_i^2 = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{\mathbb{E}(\xi_1)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 = \lim_{t\to\infty} \sum_1^{N_t+1} \xi_i^2 \frac{N_t+1}{N_t} \frac{N_t}{N_t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \frac{\sum_1^{N_t} \xi_i^2}{N_t} \frac{N_t+1}{N_t} = \frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{\mathbb{E}(\xi_1)}$$

Видим, что исходная функция зажата двумя абсолютно идентичными функциями. Следовательно, по теореме о двух милиционерах предел исходной функции тоже будет равен $\frac{\mathbb{E}(\xi_1^2)}{\mathbb{E}(\xi_1)}$

2.5 Задача 5

2.6 Задача 6

2.6.1 i

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu\mathbb{E}(N_t) + \mu$$

Далее сделаем ключевой переход. S_{N_t+1} это точка времени, в которую произойдёт следующий после точки t эпизод восстановления. Очевидно, что математическое ожидание этой случайной величины больше t, так как это событие должно произойти после t. Следовательно:

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu\mathbb{E}(N_t) + \mu > t \Rightarrow \mathbb{E}(N_t) > \frac{t}{\mu} - 1 \Rightarrow \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

2.6.2 ii

Снова воспользуемся тождеством Вальда. Начём доказывать с конца.

$$\mathbb{E}(\tilde{N}_t) \leq \frac{t}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{\sqrt{t}}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} \Rightarrow \tilde{\mu}(\sqrt{t})\mathbb{E}(\tilde{N}_t) \leq t + \sqrt{t}$$

Согласно тождеству Вальда:

$$\mathbb{E}(S_{N_t}) = \tilde{\mu}(\sqrt{t})\mathbb{E}(\tilde{N}_t)$$

Следовательно:

$$\mathbb{E}(S_{N_t}) \leq t + \sqrt{t}$$

Данное неравенство выполняется всегда, так как событие S_{N_t} – последний момент восстановлления до t, и его математическое ожидание должно быть меньше t. Следовательно, получаем тождество. Исходное предположение доказано.

Что же касается левой части неравенства, её можно доказать интуитивно. Так как в процессе восстановления в приращениях всегда будет прибавляться меньший чем ξ_n отрезок времени $\tilde{\xi}_n$, то до момента времени t произойдёт точно не меньше эпизодов восстановлени (если все реализации случайной величины ξ_n будут больше b) или больше. Следовательно, математическое ожидание количества восстановлений к моменту t тоже будет выше.

Оба положения неравенства доказаны.

2.6.3 iii

После первых двух пунктов получаем неравенство:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} < \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} < \frac{1}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\mu}(\sqrt{t})}$$

Теперь, очевидно, как и в задаче 4, нужно воспользоваться теоремой о двух милиционерах. Но сначала нужно доказать, что $\tilde{\mu}(\sqrt{t}) \to \mu \ t \to \infty$

Для этого нужно вычислить следующее:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}(min(\sqrt{t}, \xi_n))$$

Для этого так и напрашивается поменять местами предел и математическое ожидание. Однако для этого нужно выполнить условия Dominated convergence theorem. Как бы по-хорошему нужно выписать все предпосылки о вероятностном пространстве как метрическом пространстве и обозначить предпосылки, но сил уже на это мало. Обозначим самые главные. Нужно найти такую мажорирующую функцию g, что:

- ☼ Функция плотности g должна быть интегрируема
- ☼ Математическое ожидание модуля g конечно
- ☼ Функция g должна доминировать исходную функцию.

Всё просто. Обозначим $g = \xi_n$. Её математическое ожидание конечно по условию, и мы можем менять в исходном неравенстве предел и математическое ожидание.

Можно проиллюстрировать всё следующим примером.

Очевидно, что:

$$min(b, \xi_n) \leq \xi_n$$

Это было как раз условие доминирования. Оно верно с учётом того, что ξ_n неотрицательная случайная величина. Домножим на неотрицательную функцию плотности.

$$f_\xi(x) min(b, \xi_n) \leq f_\xi(x)\xi_n$$

Возьмём математическое ожидание обеих частей:

$$\int_0^{+\infty} f_\xi(x) min(\sqrt{t}, x) dx \leq \int_0^{+\infty} f_\xi(x) x dx$$

Математическое ожидание исходной функции тоже доминировано конечным математическим ожиданием ξ

По пунктам. Нужно ввести предпосылку о том, что функция плотности ξ интегрируема. Математическое ожидание модуля ξ равно математическому ожиданию ξ и конечно. Очевидно, что ξ_n доминирует исходную функцию.

Поменяем предел и математическое ожидание:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}(min(\sqrt{t}, \xi_n)) \Rightarrow \mathbb{E}(\lim_{t \to +\infty} min(\sqrt{t}, \xi_n)) = \mathbb{E}(\xi_n) = \mu$$

Следовательно, мы доказали, что $\tilde{\mu}(\sqrt{t}) \to \mu$ $t \to \infty$. Теперь воспользуемся-таки теоремой о двух милиционерах и возьмём пределы по двум границам исходного неравенства:

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{t} < \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leq \frac{1}{\tilde{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{1}{\sqrt{t}\tilde{\mu}(\sqrt{t})}$$

Очевидно, что при $t \to +\infty$ дроби с t в знаменателях занулятся, а в правой части по доказанной выше сходимости появится тоже ν В итоге:

$$\frac{1}{\mu} < \lim_{t \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

Следовательно, получаем:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

3 Домашнее задание 3

3.1 Номер 1

3.1.1 i

Докажем по индукции. Начальное условие:

$$S_1 = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$$

Индукционный переход:

$$n \to n+1, S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$$

$$f_{S_{n+1}}(x) = \int_{\mathbb{R}+} f_{S_n}(x-y) f_{\xi_{n+1}}(y)dy = \int_{\mathbb{R}+} \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} I\{x-y>0\} \cdot \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I\{y>0\} dy =$$
$$\frac{\beta^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)} e^{\beta x} \underbrace{\int_0^x (x-y)^{n\alpha-1} y^{\alpha-1} dy}_{I} = \dots \tag{8}$$

$$I = \int_0^x (x-y)^{n\alpha-1} y^{\alpha-1} dy = |z = \frac{y}{x}| = \int_0^1 (x-zx)^{n\alpha-1} zx^{\alpha-1} xdz =$$
$$= \text{По свойству Бета-функции} = x^{(n+1)\alpha-1} \frac{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)} \tag{9}$$

$$\dots = \frac{\beta^{(n+1)\alpha} x^{(n+1)\alpha-1}}{\Gamma((n+1)\alpha)} e^{-\beta x} = f_{S_{n+1}}(x) \tag{10}$$

3.1.2 ii

$$P\{N_t = n\} = P\{S_n \le t\} - \{S_{n+1} \le t\}$$

$$F_{S_n}(x) = \int_0^t \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} dx \tag{11}$$

$$P\{N_t = n\} = \int_0^t \frac{\beta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} dx - \int_0^t \frac{\beta^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} x^{(n+1)\alpha-1} e^{-\beta x} dx =$$
$$\int_0^t \beta^{n\alpha} x^{n\alpha-1} e^{-\beta x} \left(\frac{1}{\Gamma(N\alpha)} - \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)} x^{\alpha}\right) \tag{12}$$

Я не знаю, как дальше брать этот интеграл кроме как численно. Ну может тут тоже есть какой-то финт ушами через дискретную вариацию распределения аля Эрланг, но я не придумал, как его тут применить. Оставлю тут просто солнышко. Вот оно: ☼

3.2 Номер 2

Предположим независимость случайных величин S_2 и γ (суммарное время обслуживания первого клиента). Это тонкий момент. Я так и не смог привести контрпример к независимости. Вопрос в том, можно ли отделить время прихода первого покупателя от времени стрижки. В таком случае простое ручное вычисление $\mathrm{Cov}(\xi_1+\xi_2, \xi_2+\eta)$ Даст как минимум $\mathrm{Var}(\xi_1)$. Следственно, предположим, что вторая величиина неделима и независима от ξ_1. Иначе задача нерешаема в текущих условиях.

Где необходимо, будем пользоваться следующим утверждением (очевидно, по Лопеталю):

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$$

$$P\{\xi_1+\xi_2<\gamma\} = \iint_{x_1<x_2} \lambda_1^2 x_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}dx_1dx_2 = \lambda_1^2\lambda_2\int_0^{+\infty}\int_{x_1}^{+\infty} x_1 e^{-(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)}dx_2dx_1 =$$
$$\lambda_1^2\lambda_2\int_0^{+\infty}\left(-\frac{x_1 e^{-(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)}}{\lambda_2}\bigg|_{x_1}^{+\infty}\right)dx_1 = \lambda_1^2\lambda_2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x_1e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}}{\lambda_2}\right)dx_1 =$$
$$\lambda_1^2\int_0^{+\infty}\left(x_1e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}\right)dx_1 = \lambda_1^2\left(\frac{x_1e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}}{-(\lambda_1+\lambda_2)}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}}{-(\lambda_1+\lambda_2)}dx_1\right) =$$
$$-\lambda_1^2\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}}{-(\lambda_1+\lambda_2)}dx_1\right) = -\lambda_1^2\left(\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x_1}}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\bigg|_0^{+\infty}\right) = \frac{\lambda_1^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} = \frac{\frac{1}{100}}{(\frac{35}{250})^2} \approx 0.51 \tag{13}$$

3.3 Номер 3

3.4 Номер 4

Необходимо найти следующую вероятность:

$$P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} \geq 2\}$$

Эту вероятность можно расписать по формуле полной вероятности. Это событие реализуется при трёх возможных условиях:

$$N_t = 2, N_t = 3, N_t \geq 4$$

Важно отметить, что $(A|N_t = 2|N_t \geq 2) = (A|N_t = 2))$. Первый элемент уравнения – событие, на которое наложены сразу два условия. Вероятности условий также должны стать условными событиями. Только тогда их сумма будет равняться единице.

В таком случае, запишем формулу следующим образом:

$$P\{N_{30} \leq 3|N_{10} \geq 2\} = P\{N_{30} \leq 3|N_{10} = 2\}P\{N_{10} = 2|N_{10} \geq 2\}+$$
$$P\{N_{30} \leq 3|N_{10} = 3\}P\{N_{10} = 3|N_{10} \geq 2\} + P\{N_{30} \leq 3|N_{10} \geq 4\}P\{N_{10} \geq 4|N_{10} \geq 2\} =$$
$$(P\{N_{30} - N_{10} = 0\} + P\{N_{30} - N_{10} = 1\})P\{N_{10} = 2|N_{10} \geq 2\} + P\{N_{30} - N_{10} = 0\}P\{N_{10} = 3|N_{10} \geq 2\} \tag{14}$$

Найдём все необходимые нам вероятности. Для этого воспользуемся доказанным на лекции утверждением:

$$N_t - N_s \sim Pois(\lambda(t-s)) \forall t,s \geq 0, t > s$$

Следовательно:

$$P\{N_t - N_s = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}$$

При $t - s = 5$ получим математическое ожидание процесса приращений равное одной квартире. Соответственно, параметр интенсивности такого распределения вычисляется следующим образом:

$$\lambda(t-s) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{t-s} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

$$P\{N_{10} = 0\} = e^{-2} \approx 0.14$$

$$P\{N_{10} = 1\} = 2e^{-2} \approx 0.28$$

$$P\{N_{10} = 2\} = \frac{(\frac{1}{5}10)^2}{2!}e^{-2} \approx 0.27$$

$$P\{N_{10} = 3\} = \frac{(\frac{1}{5}10)^3}{3!}e^{-2} \approx 0.18$$

$$P\{N_{10} \geq 4\} = 1 - 0.14 - 0.28 - 0.27 - 0.18 = 0.13$$

$$P\{N_{30} - N_{10} = 0\} = \frac{1}{0!}e^{-\frac{1}{5}20} \approx 0.018$$

$$P\{N_{30} - N_{10} = 1\} = \frac{\frac{1}{5}(30-10)}{1!}e^{-\frac{1}{5}20} = 4e^{-4} \approx 0.073$$

$$P\{N_{10} = 2 | N_{10} >= 2\} = \frac{0.27}{0.27 + 0.18 + 0.13} \approx 0.465$$

$$P\{N_{10} = 3 | N_{10} >= 2\} = \frac{0.18}{0.27 + 0.18 + 0.13} \approx 0.31$$

$$P\{N_{10} \geq 4 | N_{10} >= 2\} = \frac{0.13}{0.27 + 0.18 + 0.13} \approx 0.22$$

Засунем всё обратно в формулу:

$$P\{N_{30} \leq 3 | N_{10} \geq 2\} = (0.018 + 0.073) \cdot 0.465 + 0.018 \cdot 0.31 = 0.0423 + 0.00558 = 0.04788 \tag{15}$$