11 сентября 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 1.

Тема: Траектории и конечномерные распределения случайных процессов. Процессы восстановления.

Крайний срок сдачи: 24 сентября 2019 г., 12:10.
Решение (набранное в LaTeX, Word,... или написанное от руки) нужно либо принести на занятие, либо прислать на e-mail Ольге Гниловой olyagnilova@gmail.com.
Если Вы решили отсканировать написанное от руки решение, то все сканы должны быть объединены в один PDF- файл.

1. Опишите траектории процесса X_t и найдите конечномерные распределения процесса X_t, если случайный процесс X_t определён для $t \in (0, \infty)$ следующим образом:

   (i) $X_t = e^{\xi t}$, где случайная величина ξ равномерно распределена на $[-1, 1]$;

   (ii) $X_t = (\xi + \eta)/t$, где ξ и η - независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $1/2$.

2. Пусть ξ_1, ξ_2 - 2 независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке [-1,1]. Определим случайный процесс

   $$X_t = t\left(\xi_1 + a(\xi_2 + 2a)\right), \qquad t \geq 0,$$

   где $a \in \mathbb{R}$ - детерминированный параметр (т.е. параметр, не являющийся случайной величиной). Найдите значения параметра a, при которых почти все траектории процесса X_t возрастают.

3. Найдите математическое ожидание считающего процесса N_t, построенного по процессу восстановления S_n, у которого плотность с.в. $\xi_n = S_n - S_{n-1}$ равна

   $$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, \qquad x > 0.$$

4. (i) Пусть ξ, η - 2 независимые, равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$ случайные велчины. Найдите плотность распределения случайной величины $|\xi - \eta|$.

   (ii) Пусть $\xi, \eta -$ 2 независимые случайные величины с одинаковым распределением, имеющим плотность

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

   Найдите плотность распределения случайной величины $\xi + \eta$.

5*. Случайное блуждание определяется рекуррентной формулой

$$S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

где $\xi_1, \xi_2, ...$ - независимые случайные величины, принимающие значения 1 и -1 с вероятностями $p \in (0,1)$ и $1-p$ соответственно.

   (i) Является ли процесс S_n процессом восстановления?

   (ii) Опишите траектории процесса S_n.

   (iii) Найдите конечномерные распределения процесса S_n.

   (iv) Вычислите $p_n := \mathbb{P}\{S_n = 0\}$ и определите, сходится ли ряд

$$\mathcal{S} := \sum_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Комментарий. Вопрос о сходимости ряда $\mathcal{S}$ крайне важен для изучения свойств процесса S_n как *марковской цепи.*

6*. Пусть S_n - процесс восстановления и N_t - соответствующий считающий процесс. Как известно, процессы S_n и N_t связаны соотношением

$$\{S_n > t\} = \{N_t < n\}$$

справедливым для любых $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$. Верно ли, что

$$\{S_n \geq t\} = \{N_t \leq n\}$$

для любых $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$?