Задача 1

Задача 1. $Y_t = X_t \cdot \eta$; X_t - гаусс. процесс; $\eta = \begin{cases} 1, & p \\ -1, & 1-p \end{cases}$.

Докажем, что Y_t тоже является гауссовским процессом.

Нам надо доказать, что для $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\lambda_1 Y_{t_1} + \lambda_2 Y_{t_2} + \dots + \lambda_n Y_{t_n} \sim N$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i} \cdot \eta = \eta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}.$$

По условию X_t - гаусс. процесс; зн. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}$ имеет нормальное распределение.

Пусть $\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}$. Нам надо показать, что сл. вел. $\underline{\eta \hat{X}}$ имеет норм. распред.

X_t имеет нулевое мат. ожидание; зн. $E[\hat{X}] = E\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E[X_{t_i}] = 0$; т.к. $\forall i$ $E[X_{t_i}] = 0$.

Нам известно, что $\hat{X}$ имеет норм. распред. и что $E[\hat{X}] = 0$.

$\hat{X} \sim N(0, \sigma^2)$. Найдём распределение $\eta \hat{X}$. $\eta \hat{X} = \begin{cases} \hat{X}, & p \\ -\hat{X}, & 1-p \end{cases}$.

$$P\{\eta \hat{X} \leqslant x\} = p \cdot P\{\hat{X} \leqslant x\} + (1-p) \cdot P\{-\hat{X} \leqslant x\} =$$

$$= p \cdot P\{\hat{X} \leqslant x\} + (1-p) P\{\hat{X} \geqslant x\} \underset{*}{=} (p + 1 - p) \cdot P\{\hat{X} \leqslant x\} = P\{\hat{X} \leqslant x\}.$$

Мы воспользовались симметричн. норм. распред. и тем, что $E\hat{X} = 0$.

Итак, $P\{\eta \hat{X} \leqslant x\} = P\{\hat{X} \leqslant x\}$; зн. $\eta \hat{X}$ и $\hat{X}$ одинаково распределены $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \eta \hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_{t_i}$ имеет нормальн. распред. при $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Y_t$ - гауссовский процесс.

Ответ: Y_t является гауссовским процессом.

Задача 2

(i) Заметим, что первое слагаемое данной ковариационной функции есть ковариационная функция Броуновского движения. Чтобы получить данное в условии выражение, нужно вычесть из W_t константу, умноженную W_k, где $k >= 1$. Тогда ковариация между W_t и W_k будет равна наименьшему из индексов, то есть t, умноженному на константу. Подходящим процессом будет $X_t = W_t - tW_1$:

$$\begin{aligned}
K(t,s) &= \operatorname{Cov}(W_t - tW_1, W_s - sW_1) \\
&= \operatorname{Cov}(W_t, W_s) - s\operatorname{Cov}(W_t, W_1) - t\operatorname{Cov}(W_1, W_s) + st\operatorname{Cov}(W_1, W_1) \\
&= \min(t,s) - st - ts + st \\
&= \min(t,s) - ts
\end{aligned}$$

(ii) Предположим, что существует процесс X_t с данной ковариационной функцией. Тогда дисперсия этого процесса равна

$$K(t,t) = \operatorname{Var}(X_t) = t - t(t+1) = -t^2 < 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

Случайного процесса с отрицательной дисперсией не существует.

(iii) $K(t,s) = \min\{t,s\} + \cos(t-s)$.

$\min\{t,s\} = \min\{s,t\}$; из чётности $f=\cos(x)$ $\cos(t-s) = \cos(-(t-s)) = \cos(s-t)$.

Итак, ф. $K(t,s)$ симметричная; $K(t,s) = K(s,t)$. Осталось показать неотриц. определ.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j K(t_i,t_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \min\{t_i,t_j\} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \cos(t_i - t_j).$$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min\{t_i,t_j\}\lambda_i\lambda_j \geqslant 0$ при $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n$, доказано на лекции при изучении Броуновского движения.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \cos(t_i - t_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \cos(t_i)\cos(t_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \sin(t_i)\sin(t_j) = \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(t_k)\right]^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin(t_k)\right]^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Итак, для $\forall \lambda_1,\dots,\lambda_n$ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j K(t_i,t_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \min\{t_i,t_j\}}_{\geqslant 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \cos(t_i - t_j)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

Зн. $K(t,s)$ симм. и неотриц. опред. ф-ция $\Longrightarrow$ $\exists$ случ. процесс с такой ков. ф-цией

(iii)

Задача 3

(i) Рассмотрим функцию распределения случайной величины Z_2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Z_2 \le x\} &= \mathbb{P}\{|\eta| \cdot \operatorname{sign}(\xi) \le x\} \\
&= \mathbb{P}\{|\eta| \le x \mid \xi > 0\} \cdot \mathbb{P}\{\xi > 0\} + \mathbb{P}\{-|\eta| \le x \mid \xi < 0\} \cdot \mathbb{P}\{\xi < 0\} + 0 \\
&\overset{x \ge 0}{=} (2\Phi(x) - 1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Случай $x \leq 0$ аналогичен:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{|\eta| \leq x \mid \xi > 0\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{\xi > 0\right\} + \mathbb{P}\left\{-|\eta| \leq x \mid \xi < 0\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{\xi < 0\right\} + 0 \\ &= 0 + \mathbb{P}\left\{|\eta| \geq -x\right\} \cdot \frac{1}{2} \\ &= (1 - (2\Phi(-x) - 1)) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x)\end{aligned}$$

(ii) Выпишем ковариацию случайных величин Z_1 и Z_2:

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}\left(\xi \cdot |\eta| \operatorname{sign}(\xi)\right) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(|\eta| \operatorname{sign}(\xi))$$

По условию, $\mathbb{E}(\xi) = 0$ и случайные величины ξ и η независимы. Получаем:

$$\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) = \mathbb{E}(|\eta|) \cdot \mathbb{E}(\xi \operatorname{sign}(\xi))$$

Поскольку случайная величина $|\eta|$ принимает только положительные значения, $\mathbb{E}(|\eta|) > 0$. Распишем второй множитель:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi \operatorname{sign}(\xi)) &= \mathbb{E}(\xi \mid \xi > 0) \cdot \mathbb{P}\{\xi > 0\} + \mathbb{E}(-\xi \mid \xi < 0) \cdot \mathbb{P}\{\xi < 0\} + 0 \\ &= \mathbb{E}(\xi \mid \xi > 0) \cdot \frac{1}{2} - \mathbb{E}(\xi \mid \xi < 0) \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Предположим, что $\mathbb{E}(\xi \mid \xi > 0) = a$, где a некоторое положительное число. Тогда в силу симметрии нормального распределения должно быть выполнено, что $\mathbb{E}(\xi \mid \xi < 0) = -a$. А значит,

$$\mathbb{E}(\xi \operatorname{sign}(\xi)) = \frac{1}{2}(a - (-a)) = a > 0$$

Следовательно, $\operatorname{Cov}(Z_1, Z_2) > 0$.

(iii) Предположим, что вектор $\vec{Z}$ является гауссовским. Тогда верно, что условное распределение $Z_2 \mid Z_1$ является нормальным распределением. Пусть ковариационная матрица вектора $\vec{Z}$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

где σ_1^2, σ_2^2 – дисперсии Z_1 и Z_2 соответственно, а ρ – корреляция между ними. И пусть математические ожидания Z_1 и Z_2 равны μ_1 и μ_2. Тогда выпишем условную плотность случайной величины $Z_2|Z_1$ и покажем, что она должна быть плотностью случайной величины с нормальным распределением:

$$
\begin{aligned}
f_{Z_2|Z_1}(z_2, z_1) &= \frac{f(z_2, z_1)}{f_{Z_1}(z_1)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(z_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{z_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{z_2-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(z_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{1-\rho^2}} \\
&\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}\left(\rho^2\frac{(z_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{z_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{z_2-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(z_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}\left(\rho\cdot\frac{z_1-\mu_1}{\sigma_1} - \frac{z_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Получаем, что $Z_2 \mid Z_1$ имеет нормальное распределение с

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_2 \mid Z_1 = z_1) &= \mu_2 + \rho\cdot\sigma_2\cdot\frac{z_1-\mu_1}{\sigma_1} \\
\mathrm{Var}(Z_2 \mid Z_1 = z_1) &= \sigma_2^2(1-\rho^2)
\end{aligned}
$$

Однако в нашем случае

$$
Z_2|Z_1 = \begin{cases} |\eta|, & \mathbb{Z}_1 > 0 \\ 0, & \mathbb{Z}_1 = 0 \\ -|\eta|, & Z_1 < 0 \end{cases}
$$

Поскольку это распределение не является нормальным, мы получили противоречие, а значит, вектор $\vec{Z}$ не является гауссовским.

Задача 4

#4.

Y_n: $Y_{n+1} = \alpha Y_n + X_n$, $Y_0 = 0$; $n = 0, 1, \dots$, $|\alpha| < 1$, посл-ть X_n – посл-ть i.i.d. ст. норм. р. с. в.

(i). процесс Y_n – гаусс.

$Y_1 = X_0$, $Y_2 = \alpha X_0 + X_1, \dots \Rightarrow Y_n = \alpha^{n-1}X_0 + \alpha^{n-2}X_1 + \dots + X_{n-1} = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\alpha^{n-j-1}X_j$

Р-м к/м распр. процесса Y_t: $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) = (X_0, \alpha X_0 + X_1, \dots, \sum\limits_{j=0}^{n-1}\alpha^{n-j-1}X_j)$; лин. комб. компонент к/м распред-я: $\sum\limits_{m=1}^{n} d_m \sum\limits_{j=0}^{m-1}\alpha^{m-j-1}X_j = \sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m-1}\underbrace{d_m\alpha^{m-j-1}}_{const}X_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ как лин. комб. ст. норм. распр. с. в., $\Rightarrow$ лин. комб. компонент к/м распр. процесса Y_n имеют норм распр., $\Rightarrow$ к/м распр. – гаусс. векторы, $\Rightarrow$ Y_n – гаусс. процесс.

(ii). $\mathbb{E}[Y_n]$, $\mathrm{cov}(Y_n, Y_m)$ – ?

$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[\sum\limits_{j=0}^{n-1}\alpha^{n-j-1}X_j] = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\underbrace{\mathbb{E}[X_j]}_{=0} = 0$;

$\mathrm{cov}(Y_n, Y_m) = \mathrm{cov}(\sum\limits_{j=0}^{n-1}\alpha^{n-j-1}X_j, \sum\limits_{k=0}^{m-1}\alpha^{m-k-1}X_k) = \{$т.к. $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, $i \neq j \Rightarrow$ ковариации обнуляются $\} =$

$= \sum\limits_{i=0}^{\min(n,m)-1}\alpha^{n-i-1}\alpha^{m-i-1}\underbrace{\mathrm{Var}(X_i)}_{=1} = \sum\limits_{i=0}^{\min(n,m)-1}\alpha^{n+m-2i-2} = \{$т.к. $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ беск. уб. геом. п. $\} = \dfrac{\alpha^{n+m-2}(1-\alpha^{-2\min(n,m)})}{1-\alpha^{-2}} =$

$= \dfrac{\alpha^{n+m-2}(\alpha^{2\min(n,m)}-1)\alpha^2}{\alpha^{2\min(n,m)}(\alpha^2-1)} = \dfrac{\alpha^{n+m-2\min(n,m)}(\alpha^{2\min(n,m)}-1)}{\alpha^2-1}$