№ 1. $S_1 = 0$

$S_n = S_{n-1} + \mu_n$, где $\mu_n = \begin{cases} \xi_n, & \eta_n > R \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$; $\xi_i \perp\!\!\!\perp \eta_i$ i.i.d.

$N_c = \max\{n : S_n \leqslant C - c\}$

F – ф-ция распр. η.

по т-ме: $\dfrac{N_c}{C-c} \xrightarrow[C \to \infty]{} \dfrac{1}{\mathbb{E}\mu_n}$,

поэтому посчитаем $\mathbb{E}\mu_n = \mathbb{E}\left(\xi_n \cdot \mathbb{I}\{\eta_n > R\}\right) =$

$= \mathbb{E}\xi_n \cdot \mathbb{E}\left(\mathbb{I}\{\eta_n > R\}\right) = \mathbb{E}\xi_n \cdot \mathbb{P}(\eta_n > R) = \mathbb{E}\xi_n \cdot (1 - F(R))$.

$$\Rightarrow \boxed{N_c \underset{\text{асимптотически}}{\asymp} (C-c)\,\frac{1}{\mathbb{E}\xi_n \cdot (1 - F(R))}.}$$

(2) A рублей – тратим раньше.

B рублей – тратим сейчас.

$B < A$.

$S_n = S_{n-1} + \xi_n$ – процесс восстановления, описывающий проведение проверок.

$E[\xi_i] = 45$ дней

p – вер-ть обнаружить нарушение при проверке.

η – величина штрафа в случае обнаружения нарушения.

$\eta \sim U(0, C)$

$C = f(A/B)$

(i) Пусть J – stopping trial для последовательности п.н. положительных случ. величин $\xi_1, \xi_2, \dots$

Тогда тождество Вальда гласит: $E[S_J] = E[J] \cdot E[\xi_i]$

J – момент обнаружения первого нарушения (номер проверки, при которой выявили первое нарушение).

S_J – время до обнаружения первого нарушения.

ξ_i – время между проверками.

$$E[J] = 1 \cdot p + 2 \cdot (1-p) \cdot p + 3 \cdot (1-p)^2 \cdot p + \dots = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1}$$

Рассмотрим ф-цию $g(1-p) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}.$$

То есть ~~с одной стороны~~ $g(1-p) = \frac{1}{p}$.

$$g'(1-p) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (1-p)^{i-1}$$

С другой стороны, $g'(1-p) = -1 \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2}$

Таким образом, $E[J] = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$.

$$E[S_J] = \frac{1}{p} \cdot 45 = \frac{45}{p}.$$

(ii) Пусть $Y(t) = \sum_{i=1}^{N_t} R_i$ – суммарный штраф за время t.

R_i – размер штрафа при i-й проверке.

$$R_i = \begin{cases} \eta_i \text{ с вер-ю } p \\ 0, \text{ с вер-ю } 1-p \end{cases}$$

Заметим, что $R_1, R_2, \dots$ i.i.d.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{t} \underset{a.s.}{=} \frac{E(R_i)}{E(\xi_i)}$$

$$E(R_i) = p \cdot E[\eta_i] + (1-p)\cdot 0 = p \cdot \frac{C}{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Y(t)}{t} \underset{a.s.}{=} \frac{p\cdot C}{90} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} R_i \underset{a.s}{=} \frac{p\cdot C}{90} t$$ – ассимптотическое поведение суммарного штрафа.

(iii) Пусть статус-кво – полное соблюдение санитарных норм. Выигрыш в этом состоянии положим равным нулю.

При переходе к стратегии экономии мы с одной стороны будем экономить $(A-B)$ рублей в день, а с другой – при проверке можем потерять определенную сумму. ~~Ассимптотическое поведение суммарного штрафа было подсчитано нами в (ii) и равно $\frac{p\cdot C}{90}$. В среднем нас штрафуют раз в 45 дней, а потому ассимптотическое поведение выгод от экономии равно $45\cdot(A-B)$.~~ Пусть $\widetilde{Y}(t) = (A-B)\cdot t - \sum_{i=1}^{N_t} R_i$ – суммарное изменение нашего благосостояния за время t относительно статуса-кво.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widetilde{Y}(t)}{t} = (A-B) - \frac{p\cdot C}{90}$$

Если $\boxed{A - B - \frac{p\cdot C}{90} > 0,}$ то в ассимптотике стратегия экономии выгоднее.

3. $\xi_1, \xi_2, \dots$ - i.i.d. - Время между поломками.

$E\,\xi_1 = 18$

p - вероятность того, что можно починить самостоятельно.

$p \in (0;1)$

m - мат. ожидание затрат на собственноручный ремонт.

$\frac{m+M}{2}$ - мат. ожидание затрат на ремонт в сервисе.

q - вероятность самостоятельного некачественного ремонта.

$q \in (0;1)$

...

(i) Пусть R_i - затраты на некачественный ремонт при i-й поломке.

$$E[R_i] = p \times m \times q$$

вероятность того, что свой ремонт неудачен

мат. ожидание затрат на ремонт самим.

вероятность того, что можно починить самостоятельно.

Перемножать всё законно, так как по условию соответствующие события независимы.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N_t} R_i}{t} \underset{a.s.}{=} \frac{E[R_i]}{E[\xi_i]} = \frac{m \times p \times q}{18}.$$

(ii) В асимптотике:

• Ожидаемые затраты при стратегии „каждый раз отдавать в сервис" $= \frac{m+M}{2}$;

• Ожидаемые затраты при стратегии „если есть возможность - чинить самому" =

$$= \underbrace{(1-p) \times \frac{m+M}{2}}_{\text{Самому чинить нельзя.}} + \underbrace{pq \cdot \left(m + \frac{M+m}{2}\right)}_{\text{Попытался починить сам, не вышло, пришлось платить ещё и за ремонт.}} + \underbrace{p(1-q) \cdot m}_{\text{Сделал сам качественно.}}$$

Имеет смысл пытаться чинить самому, если

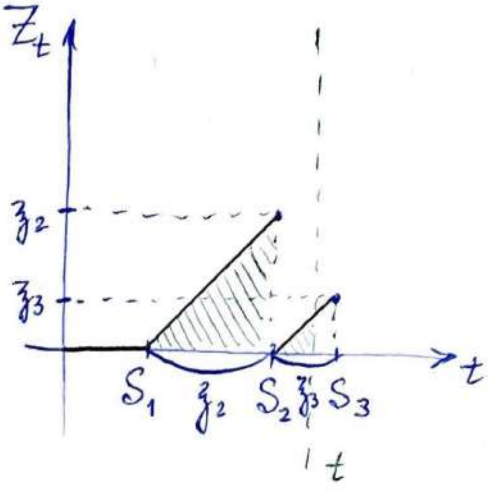
$$(1-p) \times \frac{m+M}{2} + pq\left(m + \frac{M+m}{2}\right) + p(1-q)\cdot m < \frac{m+M}{2}$$

$$\cancel{p}q\left(m + \frac{M+m}{2}\right) + \cancel{p}(1-q)m < \cancel{p} \cdot \frac{m+M}{2}$$

$$\cancel{qm} + q \cdot \frac{M+m}{2} + m - \cancel{qm} < \frac{m+M}{2}$$

$$m < \frac{M+m}{2}(1-q) \Rightarrow \frac{2m}{M+m} < 1-q \Rightarrow q < -\frac{2m}{M+m} + 1 \Rightarrow \boxed{q < \frac{M-m}{M+m}}$$

Задание 4.



(i) $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int_0^t Z_u\,du\right] = \frac{\mathbb{E}(\zeta^2)}{2\mathbb{E}(\zeta)}$.

$Z_t = t - S_{N_t}$.

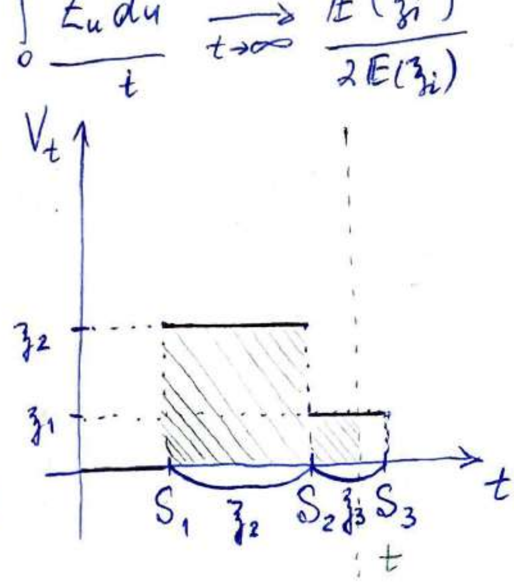
$$\frac{\sum_{i=1}^{N_t}\frac{1}{2}\zeta_i^2}{t} \le \frac{\int_0^t Z_u\,du}{t} \le \frac{\sum_{i=1}^{N_{t+1}}\frac{1}{2}\zeta_i^2}{t}.$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N_t}\frac{1}{2}\zeta_i^2}{t} = \lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N_t}\frac{1}{2}\zeta_i^2}{N_t}}_{\to\frac{1}{2}\mathbb{E}(\zeta_i^2)}\cdot\overbrace{\frac{N_t}{t}}^{\to\frac{1}{\mathbb{E}(\zeta_i)}} = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}(\zeta_i^2)}{\mathbb{E}(\zeta_i)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N_{t+1}}\frac{1}{2}\zeta_i^2}{t} = \lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{\sum_{t}^{N_{t+1}}\frac{1}{2}\zeta_i^2}{N_{t+1}}}_{\to\frac{1}{2}\mathbb{E}(\zeta_i^2)}\cdot\underbrace{\frac{N_{t+1}}{N_t}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{N_t}{t}}_{\to\frac{1}{\mathbb{E}(\zeta_i)}} = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{E}(\zeta_i^2)}{\mathbb{E}(\zeta_i)}$$

По т. о 2-х милиционерах, $\frac{\int_0^t Z_u\,du}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}(\zeta_i^2)}{2\mathbb{E}(\zeta_i)}$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int_0^t V_u\,du\right] = \frac{\mathbb{E}(\zeta^2)}{\mathbb{E}(\zeta)}$



$V_t = S_{N_{t+1}} - S_{N_t}$

$$\sum_{i=1}^{N_t}\frac{\zeta_i^2}{t} \le \frac{\int_0^t V_u\,du}{t} \le \sum_{i=1}^{N_{t+1}}\frac{\zeta_i^2}{t}$$

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{N_t}\frac{\zeta_i^2}{t} = \lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N_t}\zeta_i^2}{N_t}}_{\to\mathbb{E}(\zeta_i^2)}\cdot\underbrace{\frac{N_t}{t}}_{\to\frac{1}{\mathbb{E}(\zeta_i)}} = \frac{\mathbb{E}(\zeta_i^2)}{\mathbb{E}(\zeta_i)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{N_{t+1}}\frac{\zeta_i^2}{t} = \lim_{t\to\infty}\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N_{t+1}}\zeta_i^2}{N_{t+1}}}_{\to\mathbb{E}(\zeta_i^2)}\cdot\underbrace{\frac{N_{t+1}}{N_t}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{N_t}{t}}_{\to\frac{1}{\mathbb{E}(\zeta_i)}} = \frac{\mathbb{E}(\zeta_i^2)}{\mathbb{E}(\zeta_i)}$$

По т. о 2-х милиц-х, $\frac{1}{t}\int_0^t V_u\,du \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{\mathbb{E}(\zeta_i^2)}{\mathbb{E}(\zeta_i)}$.