Модель Васичека. В данной модели процесс X_t определяется как решение СДУ

$$dX_t = (a - bX_t)\,dt + c\,dW_t, \tag{62}$$

где $a \in \mathbb{R}, b, c > 0$. Для нахождения решения данного СДУ, воспользуемся формулой Ито (57) для функции $f(t,x) = xe^{bt}$ и процесса Ито X_t :

$$\begin{aligned} d\left(X_t e^{bt}\right) &= bX_t e^{bt} dt + e^{bt} dX_t \\ &= e^{bt}\left(a\,dt + c\,dW_t\right). \end{aligned}$$

Значит, решением СДУ (62) является процесс

$$X_t = e^{-bt}X_0 + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + c\int_0^t e^{b(s-t)}dW_s. \tag{63}$$

Модель Кокса-Ингерсолла-Росса (CIR - Cox-Ingersoll-Ross) похожа на модель Васичека (62),

$$dX_t = (a - bX_t)\,dt + c\,\sqrt{X_t}dW_t. \tag{64}$$

Модели (62) и (64) обладают свойством "возвращения к среднему"(mean-reverting models). Кроме того, процесс, задаваемый СДУ (64), строго положителен, если $2a \geq c^2$. Применяя формулу Ито с $f(t,x) = xe^{bt}$ (как для модели Васичека), приходим к равенству

$$X_t = e^{-bt}X_0 + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + c\int_0^t e^{b(s-t)}\sqrt{X_s}dW_s.$$

Пользоваться этой формулой затруднительно из-за интегрирования $\sqrt{X_s}$ в правой части.

Процесс Орнштейна-Уленбека является частным случаем модели Васичека. В классической записи, он задаётся как решение СДУ

$$m\,dX_t = -\lambda X_t dt + dW_t, \tag{65}$$

где $m, \lambda > 0$. Физический смысл этого уравнения: X_t задаёт скорость частицы массы m в некоторой среде с коэффициентом трения λ. Применяя формулу (63) с $a = 0, b = \lambda/\mu, c = 1/m$, мы получаем, что

$$X_t = e^{-\alpha t}\left(X_0 + \frac{1}{m}\int_0^t e^{\alpha s}dW_s\right),$$

где $\alpha = \lambda/m$. Если теперь дополнительно предположить, что $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1/(2\lambda m))$, X_0 независим от W_t, то процесс X_t является гауссовским с нулевым мат. ожиданием и ковариационной функцией

$$\begin{aligned} K(t_1,t_2) &= \mathbb{E}[X_{t_1}X_{t_2}] = e^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big(\operatorname{Var} X_0 + \frac{1}{m^2}\mathbb{E}\Big[\int_0^{\min(t_1,t_2)} e^{2\alpha s}ds\Big]\Big) \\ &= e^{-\alpha(t_1+t_2)}\Big(\frac{1}{2\lambda m} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{2\alpha}\big(e^{2\alpha\min(t_1,t_2)} - 1\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2\lambda m}e^{-\alpha\cdot|t_1-t_2|}. \end{aligned}$$

Любопытно, что процесс Орнштейна Уленбека совпадает (по распределению) с процессом

$$Y_t = \frac{1}{\sqrt{2\lambda m}} e^{-\alpha t} W_{e^{2\alpha t}}.$$

Действительно, процесс Y_t также является гауссовским процессом с нулевым средним и ковариационной функцией

$$K(t_1, t_2) \quad = \quad \frac{1}{2\lambda m} e^{-\alpha(t_1+t_2)} \min\left\{e^{2\alpha t_1}, e^{2\alpha t_2}\right\} = \frac{1}{2\lambda m} e^{-\alpha \cdot |t_1 - t_2|}.$$