16 октября 2019 г.

Курс "Теория случайных процессов". Домашнее задание номер 5.

Цепи Маркова.
Крайний срок сдачи - 29 октября 2019, 12:10

1. Склад вмещает S коробок с готовой продукцией, и в 9 часов утра дня с номером $n = 0, 1, 2, ...$ на складе находится X_n коробок. Если $X_n < s$ коробок, то к началу $(n+1)-$го дня склад полностью заполняют. Кроме того, со склада отгружают коробки в соответствии с поступившими заказами; в день номер n поступают заказы на D_n коробок. Величины s и S детерминированы, а величины $D_1, D_2, ...$ - случайные, i.i.d. Покажите, что процесс X_n является марковским.

2. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (i) Найдите классы эквивалентности этой цепи Маркова.

   (ii) Определите типы состояний (существенные/ несущественные, периодические/ непериодические).

   (iii) Найдите стационарное распределение.

3. Найти вероятность перехода из состояния 2 в состояние 3 за n шагов цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

4. Если футбольный клуб Крылья Советов выиграет матч чемпионата России по футболу, то следующий матч он также выигрывает с вероятностью 0.7 и проигрывает с вероятностью 0.3. Если же Крылья Советов проигрывает матч, то следующий также будет проигран с вероятностью 0.4, и выигран с вероятностью 0.6. В предположении, что результат матча зависит только от предыдущей игры, найдите вероятность того, что клуб Крылья Советов выиграет четвёртую игру при условии, что он выиграл первую.

5*. Верно ли следующее утверждение:

   если $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность i.i.d. случайных величин, то процесс

$$\eta_n = \xi_n + \xi_{n+1}, \quad n = 1, 2, ...$$

   является цепью Маркова ?

6*. Цепь Маркова X_n задана матрицей переходных вероятностей за один шаг:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & .... & p_n \\ p_n & p_1 & p_2 & .... & p_{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ p_2 & p_3 & p_4 & .... & p_1 \end{pmatrix},$$

   где $p_i \in (0,1)$, $\forall i = 1..n$, и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{X_n = k\Big\} = \frac{1}{n}, \qquad \forall\, k = 1..n.$$