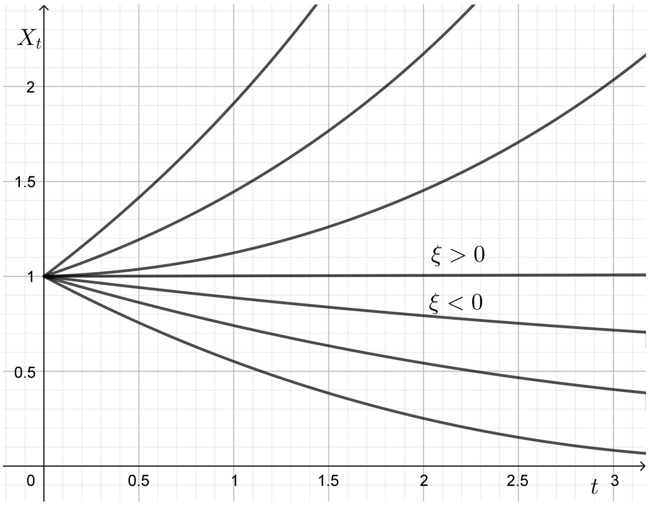
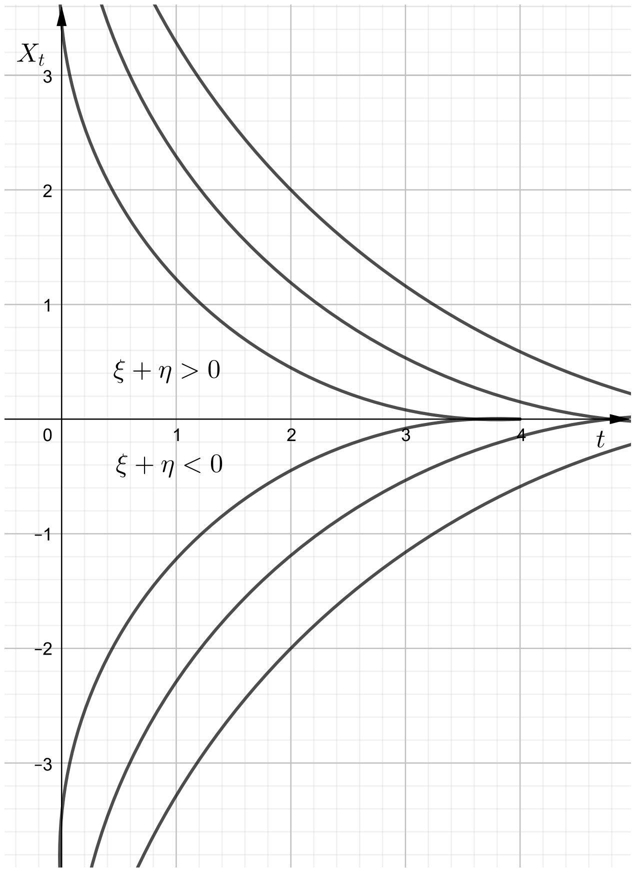
# 1 ДЗ 1

## 1.1 Номер 1




## 1.2 Номер 2

$$P\{X_{t_1} < X_{t_2}\} = P\{t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha)) < t_1(\xi_1 + \alpha(\xi_2 + 2\alpha))\} =$$

$$P\{(t_1 - t_2)\xi_1 + (t_1 - t_2)\alpha\xi_2 < (t_2 - t_1)2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 \geq -2\alpha^2\} = P\{\xi_1 + \alpha\xi_2 + 2\alpha^2 \geq 0\} = 1$$

Чтобы вероятность того, что эта случайная величина была положительной стала равной единице, рассмотрим график. Так как указано, что параметр $\alpha$ является реальным числом, будем рассматривать только случаи с положительным дискриминантом. Чтобы учесть максимальное количество случаев, при которых значение функции в точке положительно, максимально "опустим"параболу, максимизировав дискриминант. Очевидно, что это произойдёт в двух точках относительно $\xi$: (1, -1), (-1, -1)

$$D = \xi_2^2 - 8\xi_1$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

$$\alpha_1 = \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

Все мозможные случаи корней при $\xi_2 = + - 1$:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = -\frac{1}{2} \\ \alpha_{12} = -1 \\ \alpha_{21} = \frac{1}{2} \\ \alpha_{22} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, взяв значения параметра $\alpha \in [-1, 1]$, парабола будет гарантированно будет принимать положительные значения. Ответ: $\alpha \in [-1, 1]$

## 1.3 Задача 3

$$f_z(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}, x > 0$$

$$\begin{aligned} L[p](u) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}e^{-x} + e^{-2x}\right) e^{-ux} dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-x(1+u)} + e^{-x(2+u)} dx = \\ = \frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2+u} = \frac{2+u+2+2u}{4+4u+2u+2u^2} = \frac{4+3u}{2u^2+6u+4} \end{aligned} \tag{1}$$

$$L[u](u) = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u\left(1 - \frac{4+3u}{2u^2+6u+4}\right)} = \frac{\frac{4+3u}{2u^2+6u+4}}{u\left(\frac{2u^2+3u}{2u^2+6u+4}\right)} = \tag{2}$$

$$= \frac{3u+4}{2u^3+3u^2} = \frac{3u+4}{u^2(2u+3)} \tag{3}$$

$$\frac{3u+4}{u^2(2u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+3} = \frac{Au(2u+3)+B(2u+3)+Cu^2}{u^2(2u+3)} = \frac{2Au^2+Cu^2+3Au+2Bu+3B}{u^2(2u+3)} \tag{4}$$

$$\begin{cases} C + 2A = 0 \\ 3A + 2B = 3 \\ 3B = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{9} \\ B = \frac{4}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases} \tag{5}$$

$$U(t) = \frac{1}{9} + \frac{4}{3}t - \frac{1}{9}\exp^{-\frac{3}{2}t}$$