Утверждение 8.5. *Носителем двумерного гауссовского вектора является либо вся плоскость $\mathbb{R}^2$, либо прямая, либо точка.*

Доказательство. Отметим, что если $\det(\Sigma) \neq 0$, то распределение вектора $\vec{X}$ имеет плотность, равную

$$p_{\vec{X}}(\vec{u}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{u}-\vec{\mu})},$$

и носителем вектора $\vec{X}$ является всё пространство $\mathbb{R}^2$. Если же $\det(\Sigma) = 0$, то $\det(\Sigma^{1/2}) = 0$. Отсюда следует, что система строчек матрицы $A = \Sigma^{1/2}$ зависима, то есть найдутся b_1, b_2 (не равные одновременно нулю), что

$$b_1 a_{11} + b_2 a_{21} = 0, \qquad b_1 a_{12} + b_2 a_{22} = 0.$$

Поэтому из представления $\vec{X} = A\vec{X}^\circ + \mu$ получаем, что

$$\begin{aligned} b_1 X_1 + b_2 X_2 &= b_1\big(a_{11}X_1^\circ + a_{12}X_2^\circ + \mu_1\big) + b_2\big(a_{21}X_1^\circ + a_{22}X_2^\circ + \mu_2\big) \\ &= \big(b_1 a_{11} + b_2 a_{21}\big)X_1^\circ + \big(b_1 a_{12} + b_2 a_{22}\big)X_2^\circ + \big(b_1\mu_1 + b_2\mu_2\big) \\ &= b_1\mu_1 + b_2\mu_2 =: c. \end{aligned}$$

Значит, в этом случае носителем вектора (X_1, X_2) является либо прямая, либо точка. $\square$