Задача 1

Докажем последовательно: 1) $\widetilde{W}_t$ – гауссовский процесс

2) $E[\widetilde{W}_t] = 0$; 3) $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = \min\{t,s\}$

1) Пусть $t_1 < t_2 < \dots t_n$; $t_k \leqslant T < t_{k+1}$

Тогда для $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{W}_{t_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \widetilde{W}_{t_i} + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j \widetilde{W}_{t_j} =$

$= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i W_i + \sum_{j=k+1}^{n} 2\lambda_j W_T - \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j W_j$ – линейн. комбинац. $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n}, W_T)$ имеет

нормальное распределение, т.к. W_t – гауссовский процесс; зн. $\boxed{\widetilde{W}_t \text{ – тоже гауссовский процесс.}}$

2) Если $t \leqslant T$; то $E[\widetilde{W}_t] = E[W_t] = 0$.

Если $t > T$; то $E[\widetilde{W}_t] = 2E[W_T] - E[W_t] = 2 \cdot 0 - 0 = 0$ $\Longrightarrow \boxed{E[\widetilde{W}_t] = 0}$

3) Найдём $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s)$.

Пусть БОО $t \geqslant s$. Рассмотрим три случая:

1. $s \leqslant t \leqslant T$ $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = Cov(W_t, W_s) = \min\{t,s\} = s$.

2. $s \leqslant T \leqslant t$ $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = Cov(2W_T - W_t, W_s) = 2\underbrace{Cov(W_T, W_s)}_{\min\{W_t, W_s\}} - \underbrace{Cov(W_t, W_s)}_{\min\{W_t, W_s\}} = 2s - s = s$

3. $T < s < t$ $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = Cov(2W_T - W_t, 2W_T - W_s) =$

$= Cov(2W_T, 2W_T - W_s) - Cov(W_t, 2W_T - W_s) = 4\underbrace{Cov(W_T, W_T)}_{T} - 2\underbrace{Cov(W_T, W_s)}_{T} - 2\underbrace{Cov(W_t, W_T)}_{T} + \underbrace{Cov(W_t, W_s)}_{s}$

$= 4T - 2T - 2T + s = s$.

Итак, если $t \geqslant s$; то $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = s$.

Аналогично, если $t < s$; то $Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = t$. $\Longrightarrow Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = \min\{t,s\}$.

$\begin{cases} \widetilde{W}_t \text{ – гаусс. процесс} \\ E[\widetilde{W}_t] = 0 \\ Cov(\widetilde{W}_t, \widetilde{W}_s) = \min\{t,s\} \end{cases} \Longrightarrow \widetilde{W}_t$ является броуновским движением.

Задача 2

(i) Данный процесс принимает только положительные значения, а значит, не может быть гауссовским.

$$\mathbb{P}\{X_t > 0\} = 1 \Leftrightarrow X_t \text{ — константа} \Leftrightarrow W_t \text{ — константа}$$

Однако $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ — не константа.

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}\left(e^{2W_t}\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2t}+2x} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2t}} - \sqrt{2t}\right)^2 + 2t\right) dx \\
&= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2t}} - \sqrt{2t}\right)^2\right) dx \\
&= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2t} e^{-u^2} du \\
&= \frac{e^{2t}}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sqrt{2t} \cdot \sqrt{\pi} \\
&= e^{2t}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_t, X_s) &= \mathbb{E}(X_t X_s) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_s) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{2(W_t+W_s)}\right) - e^{2(t+s)} \\
&= \mathbb{E}\left(e^{2(W_t-W_s+2W_s)}\right) - e^{2(t+s)} \\
&= \mathbb{E}\left(e^{2(W_t-W_s)+4(W_s-W_0)}\right) - e^{2(t+s)} \\
&= \mathbb{E}\left(e^{2(W_t-W_s)}\right) \mathbb{E}\left(e^{2\cdot 2W_s}\right) - e^{2(t+s)} \\
&= e^{2(t-s)} e^{8s} - e^{2(t+s)}
\end{aligned}$$

При подсчёте ковариации было использовано свойство независимости приращений Броуновского движения, а также результаты для $\mathbb{E}(X_t)$.

Задача 3

#3.

Найти плотность $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$, $a > 0$ – фиксир. параметр.

$\mathbb{P}\{\tau_a \leq t\} = \mathbb{P}\{\max\limits_{0 \leq s \leq t} W_s \geq a\} = 2\mathbb{P}\{W_t \geq a\} = 2(1 - \mathbb{P}\{W_t < a\}) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$, где

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Отсюда

$f_{\tau_a}(t) = F'_{\tau_a}(t) = -2 \cdot \left(-\frac{a}{2t^{3/2}}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} \cdot t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$ $\forall t > 0$. (было исп., что $W_t \sim N(0, t)$).

Задача 4

Заметим, что W_t является гауссовским процессом; а это значит, что (W_{t_1}, W_{t_2}) – гауссовский вектор; а это значит, что мы можем воспользоваться результатом из 6.1 Д/З №7:

положим $t_1 < t_2$

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det\Sigma}}\, e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} W_{t_1}\sim N(0,t_1) \\ W_{t_2}\sim N(0,t_2) \end{matrix} \quad Cov(W_{t_1}, W_{t_2}) = t_1$$

Тогда в случае Броун. движ. $\vec{\mu} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$

$$\det\Sigma = t_1t_2 - t_1^2 = t_1(t_2-t_1) \Longrightarrow \sqrt{\det\Sigma} = \sqrt{t_1}\cdot\sqrt{t_2-t_1}.$$

Итак, $p_{\vec{W}}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1}\sqrt{t_2-t_1}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}\vec{x}}$. Упростим показатель степени.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix};\ \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{\det\Sigma}\begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t_1(t_2-t_1)}\begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^T\Sigma^{-1} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_2 \end{pmatrix}\frac{1}{t_1(t_2-t_1)} = \frac{1}{t_1(t_2-t_1)}\cdot(x_1t_2 - t_1x_2,\ -t_1x_1 + t_1x_2)$$

$$\frac{1}{2}\vec{x}^T\Sigma^{-1}\vec{x} = \frac{1}{2t_1(t_2-t_1)}\cdot(x_1t_2 - t_1x_2,\ -t_1x_1 + t_1x_2)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{t_2x_1^2 - 2t_1x_1x_2 + t_1x_2^2}{2t_1(t_2-t_1)}$$

$$p_{\vec{W}}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_1}\sqrt{t_2-t_1}}\cdot e^{-\frac{t_2x_1^2 - 2t_1x_1x_2 + t_1x_2^2}{2t_1(t_2-t_1)}}$$

Заметим, что $\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)} + \frac{x_1^2}{2t_1} = \frac{t_1(x_2-x_1)^2 + (t_2-t_1)x_1^2}{2t_1(t_2-t_1)} =$

$$= \frac{t_1x_2^2 - 2t_1x_1x_2 + t_1x_1^2 + t_2x_1^2 - t_1x_1^2}{2t_1(t_2-t_1)} = \frac{t_2x_1^2 - 2t_1x_1x_2 + t_1x_2^2}{2t_1(t_2-t_1)}.$$

Зн. $e^{-\underbrace{\frac{t_2x_1^2 - 2t_1x_1x_2 + t_1x_2^2}{2t_1(t_2-t_1)}}_{\text{это показат. степени}}} = e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)} - \frac{x_1^2}{2t_1}} = e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}}\cdot e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}.$

$$\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{Итак, } p_{\vec{W}}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_2-t_1}}\cdot e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}}\cdot e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_1}}\cdot e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t_2-t_1}}\cdot e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}}\right) = \varphi_{(0,t_2-t_1)}(x_2-x_1)\cdot\varphi_{(0,t_1)}(x_1),$$