(3 декабря 2019 г.)

Теория случайных процессов

Владимир Панов

Высшая Школа Экономики
Департамент статистики и анализа данных
Лаборатория стохастического анализа и его приложений
Москва, 109028, Покровский бульвар, д. 11, комн. S-432
e-mail: vpanov@hse.ru

Аннотация: Данный файл представляет собой конспект лекций по курсу "Случайные процессы", прочитанного автором в 2019 году на факультете экономических наук НИУ Высшая Школа Экономики.

Содержание

1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов.

Литература по теме: [11], [5]

Определение 1.1. Пусть T - произвольное множество, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ - вероятностное пространство. Тогда отображение

$$X:\, T \times \Omega \to \mathbb{R}$$

называется случайной функцией, если для любого $t \in T$ функция

$$X(t,\omega) =: X_t(\omega) = X_t, \qquad w \in \Omega,$$

является случайной величиной на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

Наиболее важные виды случайных функций:

1. случайные процессы (stochastic processes, random processes): $T \subset \mathbb{R}$;
   - случайные процессы с дискретным временем: $T = \mathbb{Z}_+$ (иногда $T = \mathbb{Z}$);
   - случайные процессы с непрерывным временем: $T = [0, +\infty)$ (иногда $T = \mathbb{R}$);
2. случайные поля: $T \subset \mathbb{R}^k,\ k \geq 2$.

Определение 1.2. Траекторией случайного процесса X_t называется отображение $t \to X_t(\omega)$ при фиксированном ω. Конечномерным распределением случайного процесса X_t называется распределение вектора $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ для фиксированного набора моментов времени $t_1, t_2, .., t_n$.

Часть I
Процессы с дискретным временем

2. Процесс восстановления

Литература по теме: [4], [5], [8], [14]

2.1. Процесс Бернулли

Простым примером случайного процесса с дискретным временем является процесс Бернулли, определённый для $t = 1, 2, ...$ следующим образом:

$$N_t = \sum_{i=1}^{t} \eta_i,$$

где $\eta_1, \eta_2, ...$ - последовательность независимых бернуллиевских случайных величин, то есть $\eta_i = 1$ с вероятностью $p \in (0, 1)$ и $\eta_i = 0$ с вероятностью $1 - p$.

Данный процесс можно определить и другим образом. Обозначим через ξ_i время ожидания $i-$го успеха в схеме Бернулли. Величины ξ_i имеют геометрическое распределение,

$$\mathbb{P}\{\xi_i = k\} = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, ...$$

Тогда моменты $i-$го успеха могут быть получены по рекурсивным формулам

$$S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

а процесс Бернулли можно определить как

$$N_t := \max\{k: \ S_k \le t\}.$$

Процессы восстановления, определённые в следующем подразделе, являются обобщением этой модели на случай, когда ξ_i имеют любое распределение на $\mathbb{R}_+$.

2.2. Определение процесса восстановления. Считающий процесс

Определение 2.1. Процесс восстановления (renewal process) - это случайный процесс $S_n, \ n = 0, 1, 2, ...$, задаваемый следующим образом:

$$\boxed{S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,} \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность независимых, одинаково распределённых, п.н. положительных случайных величин.

В дальнейшем мы будем обозначать функцию распределения величины ξ_1 через $F(\cdot)$. Согласно данному выше определению, $F(0) = 0$.

По любому процессу восстановления можно определить считающий процесс (counting process) N_t:

$$\boxed{N_t := \max\{k: \ S_k \le t\}.}$$

Из определения считающего процесса следует свойство

$$\boxed{\{S_n > t\} = \{N_t < n\}.} \tag{2}$$

Примерами процесса восстановления являются моменты возвращения в начальное состояние марковской цепи, а также процесс Пуассона.

Утверждение 2.2. *(i) Ряд*

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t),$$

где F^{n*} - свёртка n функций распределений F (см. Приложение A), сходится для любого t и любой функции распределения F положительной случайной величины.

(ii) Математическое ожидание количества моментов восстановления к моменту времени t (т.е. математическое ожидание процесса N_t) задаётся формулой

$$\boxed{\mathbb{E}\left[N_t\right] = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t).} \tag{3}$$

Доказательство. (i*) [1] Операция свёртки (см. приложение A) обладает свойством

$$F^{n*}(t) \le F^n(t).$$

Значит, положительный ряд $U(t)$ мажорируется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} F^n(t)$, который сходится для любого t такого, что $F(t) < 1$. Поэтому по теореме сравнения положительных рядов, ряд $U(t)$ сходится для всех таких t. Пусть теперь существует точка t° такая, что $F(t^\circ) = 1$. Так как по условию $F(0) = 0$, распределение с.в. сосредоточено на некотором конечном интервале $I \subset [0, t]$. Следовательно, сумма r с.в. с таким распределением будет сосредоточена на интервале rI, и найдётся такое $r \in \mathbb{Z}$, что $F^{r*}(t^\circ) < 1$. Обозначим через $\tilde{U}(t^\circ)$ ряд, состоящий из членов ряда $U(t^\circ)$ с номерами $r, 2r, 3r, ...$ Этот ряд имеет вид

$$\tilde{U}(t^\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{n*}(t^\circ), \quad \text{где} \quad G(t^\circ) = F^{r*}(t^\circ) < 1.$$

Применяя ещё раз теорему сравнения, мы получаем, что ряд $\tilde{U}(t^\circ)$ сходится. Но члены исходного ряда $U(t)$ монотонны, т.к.

$$F^{n*}(t) \ge F^{(n+1)*}(t), \qquad \forall t,$$

и поэтому $U(t^\circ) \le \sum_{n=1}^{r-1} F^{n*}(t^\circ) + r\tilde{U}(t^\circ)$, и ряд $U(t^\circ)$ сходится.

(ii) Первый способ.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t] &= \mathbb{E}\left[\sharp\left\{n: \ S_n \le t\right\}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}\left\{S_n \le t\right\}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\mathbb{I}\left\{S_n \le t\right\}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{S_n \le t\right\}. \end{aligned}$$

Остаётся отметить, что $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, и поэтому функция распределения S_n равна $F^{n*}(\cdot)$.

Второй способ. Отметим, что

$$\{N_t = n\} = \{S_n \le t\} \cap \{S_{n+1} > t\} = \{S_n \le t\} \setminus \{S_{n+1} \le t\},$$

где последнее равенство следует из того, что для любых событий A и B выполнено $A \cap B = A/B^c$ (B^c - дополнение к множеству B). Поскольку в нашем случае $\{S_{n+1} \le t\} \subset \{S_n \le t\}$, то

$$\mathbb{P}\left\{N_t = n\right\} = \mathbb{P}\left\{S_n \le t\right\} - \mathbb{P}\left\{S_{n+1} \le t\right\} = G_n(t) - G_{n+1}(t),$$

[1] Здесь и далее звёздочкой помечены те элементы теории, которые не войдут в итоговую контрольную работу.

где $G_n(t)$ - функция распределения S_n. Формула (3) теперь получается при непосредственном подсчёте математического ожидания N_t:

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n\ \left(G_n(t) - G_{n+1}(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\ G_n(t).$$

Остаётся только ещё раз заметить, что $G_n(t) = F^{n*}(t)$.

□

Из сходимости ряда $U(t)$ следует, что

$$U = F + F * U. \tag{4}$$

Действительно, согласно Утверждению 2.2,

$$U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F^{n*}(t) = F(t) + \left[F * \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}\right](t).$$

Равенство (4) может быть эффективно использовано для нахождения математического ожидания моментов восстановления на $(0, t]$ (совпадающего с функцией $U(t)$) по плотности распределения одного прыжка $p(x)$. Действительно, воспользуемся свойствами преобразования Лапласа (см.приложение B) и возьмём преобразование Лапласа от левой и правых частей (4):

$$\mathscr{L}_U(s) = \frac{\mathscr{L}_p(s)}{s} + \mathscr{L}_U(s)\mathscr{L}_p(s),$$

где $\mathscr{L}_U(s)$ - преобразование Лапласа функции U, $\mathscr{L}_p(s)$ - преобразование Лапласа функции p. Мы приходим к равенству

$$\mathscr{L}_U(s) = \frac{\mathscr{L}_p(s)}{s\left(1 - \mathscr{L}_p(s)\right)}, \tag{5}$$

которое можно использовать следующим образом:

1. по $p(x)$, вычислить $\mathscr{L}_p(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} p(x) dx$;
2. по $\mathscr{L}_p(s)$, вычислить $\mathscr{L}_U(s)$ по формуле (5);
3. по $\mathscr{L}_U(s)$, восстановить $U(x)$.

2.3. Тождество Вальда

Определение 2.3. Пусть задана некоторая последовательность величин $X_1, X_2, ...$ (возможно, зависимых и разнораспределённых). *Дискретный момент остановки* (discrete stopping time, stopping trial) τ - это случайная величина, принимающая значения $1, 2, 3, ...$, такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}\{\tau = n\}$ является детерминированной функцией от $X_1, X_2, ..., X_n$.

Пример 2.4. Несколько игроков передвигают фишки по игровому полю в соответствии с подбрасыванием кубика. Пусть $X_1, X_2, ...$ - это результаты поочерёдных подбрасываний кубика, то есть i.i.d. случайные величины, имеющие равномерное распределение на $\{1,..,6\}$. Тогда случайная величина *"количество ходов до окончания игры"* является моментом остановки.

Теорема 2.5. *(Тождество Вальда, Wald's equality) Пусть $X_1, X_2, ...$ - i.i.d. случайные величины, $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Пусть $\tau-$ момент остановки, $\mathbb{E}\tau < \infty$. Тогда*

$$\mathbb{E}\big[X_1 + ... + X_\tau\big] = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau. \tag{6}$$

Доказательство. Запишем математическое ожидание в следующем виде:

$$\mathbb{E}\big[X_1 + ... + X_\tau\big] \quad = \quad \mathbb{E}\big[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}\big]. \tag{7}$$

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$, случайные величины X_n и $\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}$ являются независимыми. Действительно,

$$\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\} = 1 - \mathbb{I}\big\{\tau = 1\big\} - ... - \mathbb{I}\big\{\tau = n-1\big\}. \tag{8}$$

По определению момента остановки, для любого $k = 1..(n-1)$, $\mathbb{I}\left\{\tau = k\right\}$ является детерминированной функцией от $X_1, ..., X_k$, и поэтому левая и правая части (8) являются функцией от $X_1, ..., X_{n-1}$. Значит, X_n и $\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}$ независимы. Продолжим равенство в (7):

$$\mathbb{E}\big[X_1 + ... + X_\tau\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n \cdot \mathbb{E}\big[\mathbb{I}\big\{\tau \geq n\big\}\big]$$

$$= \mathbb{E}X_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\big\{\tau \geq n\big\} = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau.$$

□

Теперь применим Теорему 2.5 к процессу восстановления. В качестве последовательности величин возьмём $\xi_1, \xi_2, ...$ Важно отметить, что N_t не является моментом остановки: для любого натурального n , по $\xi_1, ..., \xi_n$ нельзя определить, выполнено ли $N_t = n$. Действительно, если $t > \xi_1 + .. + \xi_n$, то события $N_t = n$ может быть выполнено (если $t < \xi_1 + ... + \xi_n + \xi_{n+1}$), а может быть не выполнено.

Однако $(N_t + 1)$ является моментом остановки: если $t \geq \xi_1 + .. + \xi_n$ или $t < \xi_1 + .. + \xi_{n-1}$, то $\big\{N_t = n-1\big\}$ не выполнено, а если $\xi_1 + .. + \xi_{n-1} \leq t < \xi_1 + .. + \xi_n$, то выполнено.

Таким образом, из Теоремы 2.5 следует такое утверждение.

Следствие 2.6. *Пусть задан процесс восстановления $S_n = S_{n-1} + \xi_n$, где $\xi_1, \xi_2, ...$ -i.i.d., $\mathbb{E}\xi_1 < \infty$. Обозначим через N_t соответствующий считающий процесс. Тогда*

$$\mathbb{E}\big[S_{N_t+1}\big] = \mathbb{E}\big[\xi_1\big] \cdot \Big(\mathbb{E}\big[N_t\big] + 1\Big).$$

Замечание 2.7. *Если случайная величина τ, принимающая натуральные значения, и $X_1, X_2, \ldots$ независимы, то тождество (6) может быть доказано более простым способом. Действительно, в этом случае*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[X_1 + \ldots + X_\tau\big] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\big[X_1 + \ldots + X_n | \tau = n\big] \mathbb{P}\{\tau = n\} \\ &= \mathbb{E}X_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\{\tau = n\} = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}\tau.\end{aligned}$$

2.4. Предельные теоремы для процессов восстановления

Формулировки и доказательства классических предельных теорем теории вероятностей приведены в Приложении E.

Теорема 2.8 (закон больших чисел для процессов восстановления)**.** *Рассмотрим процесс (1) с $\mu := \mathbb{E}[\xi_n] < \infty$. Тогда*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \left[\frac{N_t}{t}\right] = \frac{1}{\mu} \qquad \text{п.н.}}$$

Доказательство. Из определения считающего процесса N_t следует, что

$$S_{N_t} \leq t \leq S_{N_t+1},$$

и, следовательно,

$$\frac{N_t}{S_{N_t+1}} \leq \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_t}{S_{N_t}}.$$

Можно показать (см. [5], Lemma 5.3.2), что $\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{S_{N_t}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\xi_1 + \ldots + \xi_n} = \frac{1}{\mu},$$

где последнее равенство следует из усиленного ЗБЧ. Аналогичным образом,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{S_{N_t+1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{S_{N_t+1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{N_t+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{S_{n+1}} = \frac{1}{\mu}.$$

Применение леммы о двух милиционерах завершает доказательство. □

Теорема 2.9 (центральная предельная теорема для процессов восстановления)**.** *Рассмотрим процесс (1) с $\mu := \mathbb{E}[\xi_n]$, $\sigma^2 := \mathbb{D}[\xi_n] < \infty$. Тогда*

$$\boxed{\frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}} \xrightarrow[t\to+\infty]{Law} \mathcal{N}(0,1).}$$

Доказательство. Применим ЦПТ к сумме i.i.d. с.в. ξ_i,

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[t\to+\infty]{Law} \mathcal{N}(0,1),$$

что по определению сходимости по распределению означает, для любого $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left\{S_n \le \alpha\sigma\sqrt{n} + \mu n\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \le \alpha\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Phi(\alpha),$$

где $\Phi(\cdot)$ - функция распределения стандартной нормальной с.в. По свойству (2), $\{S_n \le t\} = \{N_t \ge n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, и, следовательно,

$$\mathbb{P}\left\{S_n \le \alpha\sigma\sqrt{n} + \mu n\right\} = \mathbb{P}\left\{N_t \ge n\right\}, \qquad \text{где} \quad t := \alpha\sigma\sqrt{n} + \mu n.$$

Выразим n через t:

$$n = \frac{t}{\mu} - \frac{\alpha\sigma\sqrt{n}}{\mu} \approx \frac{t}{\mu} - \frac{\alpha\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}},$$

где последнее (нестрогое) равенство мотивировано тем, что $n \approx t/\mu$. Таким образом,

$$\mathbb{P}\left\{N_t \ge \frac{t}{\mu} - \frac{\alpha\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Phi(\alpha),$$

или

$$\mathbb{P}\left\{Z_t \ge -\alpha\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Phi(\alpha), \qquad \text{где } Z_t = \frac{N_t - \frac{t}{\mu}}{\frac{\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}}.$$

Осталось заметить, что

$$\mathbb{P}\left\{Z_t \le \alpha\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{Z_t \ge \alpha\right\} + \mathbb{P}\left\{Z_t = \alpha\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 - \Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha).$$

□

2.5. Процесс восстановления с вознаграждением

Определение 2.10. Пусть $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ - процесс восстановления и пусть задана последовательность случайных величин (вознаграждений) $R_1, R_2, ...$, независимая от процесса восстановления. Тогда

$$Y_t := \sum_{i=1}^{N_t} R_i$$

(суммарное вознаграждение к моменту времени t) называется процессом восстановления с вознаграждением (renewal-reward process).

Утверждение 2.11. *Пусть задан процесс восстановления с вознаграждением, причём $\mathbb{E}\xi_1 < \infty$, $\mathbb{E}|R_1| < \infty$. Тогда*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\left[\frac{Y_t}{t}\right] = \frac{\mathbb{E}R_1}{\mathbb{E}\xi_1} \qquad \text{п.н.}}$$

Доказательство.

$$\frac{Y_t}{t} = \frac{\sum_{i=1}^{N_t} R_i}{N_t}\cdot\frac{N_t}{t},$$

причём по закону больших чисел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N_t} R_i}{N_t} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n} = \mathbb{E}R_1,$$

а по Теореме 2.8

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}\xi_1}.$$

□

2.6. Процесс времени ожидания

Случайный процесс

$$\boxed{Y_t := S_{N_t+1} - t, \qquad t \geq 0}$$

называется процессом времени ожидания. Среднее время ожидания за интервал времени $[0, t]$ обычно вычисляется как $t^{-1}\int_0^t Y_u du$.

Теорема 2.12. *Рассмотрим процесс (1) с $\mu := \mathbb{E}[\xi_n]$, $\sigma^2 = \mathbb{D}[\xi_n]$. Тогда*

$$\boxed{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Y_u du = \frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]}.}$$

Доказательство. Исходя из геометрических соображений, легко видеть, что

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k^2 \leq \int_0^t Y_u du \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_t+1}\xi_k^2.$$

Разделим все части последнего неравенства на t,

$$\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k^2 \leq \frac{1}{t}\int_0^t Y_u du \leq \frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{N_t+1}\xi_k^2, \tag{9}$$

и найдём пределы левых и правых частей. Начнём с левой части:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k^2=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{N_t}{t}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k^2}{N_t}\right]=\frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]},$$

т.к. $N_t/t\to 1/\mathbb{E}\xi$ по теореме 2.8, и

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k^2/N(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2/n=\mathbb{E}\xi^2$$

по УЗБЧ. Теперь рассмотрим правую часть:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{N_t+1}\xi_k^2=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{N_t}{t}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{N_t+1}\xi_k^2}{N_t+1}\cdot\frac{N_t+1}{N_t}\right]=\frac{\mathbb{E}[\xi^2]}{2\mathbb{E}[\xi]},$$

где в последнем равенстве мы использовали те же аргументы, что и при рассмотрении левой части, и, кроме того, воспользовались равенством

$$\lim_{t\to\infty}(N_t+1)/N_t=\lim_{n\to\infty}(n+1)/n=1.$$

Следовательно, левая и правая части (9) имеют один и тот же предел. □

3. Процесс Пуассона

Литература по теме: [5], [8], [14]

Определение 3.1. Процесс Пуассона (пуассоновский процесс, Poisson process) - это процесс восстановления $S_n=S_{n-1}+\xi_n$, где $\xi_1,\dots,\xi_n$ - независимые с.в. с экспоненциальным распределением, имеющим плотность

$$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{I}\{x>0\}$$

с параметром $\lambda>0$.

Считающий процесс, определённый по процессу Пуассона,

$$N_t:=\max\left\{k:\ S_k\le t\right\},$$

также называется (считающим) процессом Пуассона.

Важным отличием процесса Пуассона от большинства процессов восстановления является возможность выписать распределение S_n и N_t в явном виде.

Теорема 3.2. *1. Процесса $S_n, n=1,2,\dots$ имеет распределение Эрланга с параметрами n и λ. Плотность распределения процесса S_n имеет вид*

$$\boxed{p_{S_n}(x)=\lambda\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}\cdot\mathbb{I}\{x>0\},\qquad n=1,2,\dots,}$$

а функция распределения равна

$$\boxed{F_{S_n}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}}$$

2. *Для любого t, считающий процесс N_t имеет распределение Пуассона с параметром λt, то есть*

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{N_t = n\right\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Доказательство. 1. Докажем формулу для плотности по индукции. Для $n = 1$ формула верна, т.к. $S_1 = \xi_1$ и $p_{\xi_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}$. Предположим теперь, что формула верна для n и покажем, что она верна и для $n+1$. Действительно, плотность суммы двух независимых случайных величин S_n и ξ_{n+1} для любого $x > 0$ вычисляется по формуле свёртки

$$\begin{aligned} p_{S_{n+1}}(x) &= \int_0^x p_{S_n}(x-y) p_{\xi_{n+1}}(y) dy \\ &= \int_0^x \lambda \frac{(\lambda(x-y))^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda(x-y)} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \int_0^x (x-y)^{n-1} dy \\ &= \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

2. Ранее было доказано, что

$$\mathbb{P}\left\{N_t = n\right\} = \mathbb{P}\left\{S_n \leq t\right\} - \mathbb{P}\left\{S_{n+1} \leq t\right\},$$

см. второй способ доказательства утверждения 2.2(ii). Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{N_t = n\right\} &= \left(1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

□

Определение 3.3. Говорят, что положительная случайная величина обладает свойством отсутствия памяти (memoryless property, absence of memory), если для любых положительных u, v:

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{X > u + v\right\} = \mathbb{P}\left\{X > u\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{X > v\right\}.} \tag{10}$$

Отметим, что если v выбрано так, что $\mathbb{P}\{X > v\} > 0$, то данное определение можно переписать в следующем виде

$$\mathbb{P}\left\{X > u + v | X > v\right\} = \mathbb{P}\left\{X > u\right\}. \tag{11}$$

Утверждение 3.4. *С.в. X с плотностью $p(x)$ обладает свойством отсутствия памяти тогда и только тогда, когда $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}\{x > 0\}$ для некоторого $\lambda > 0$ (т.е. X имеет экспоненциальное распределение $\mathrm{Exp}(\lambda)$).*

Доказательство. (i) $\underline{\mathrm{Exp}(\lambda) \Rightarrow \text{memoryless.}}$ Равенство (10) очевидно, т.к. и левая, и правая части равны $e^{-\lambda(u+v)}$.

(ii*) $\underline{\text{Memoryless} \Rightarrow \mathrm{Exp}(\lambda).}$ Введём обозначение $h(x) = \ln \mathbb{P}\{X > x\}$. Согласно свойству (10),

$$h(u + v) = h(u) + h(v), \qquad u, v \in \mathbb{R}_+. \tag{12}$$

Покажем, что из последнего равенства и из того, что h-монотонно убывающая функция, следует, что $h(x) = \lambda x$ для некоторого $\lambda < 0$. Действительно, итеративно применяя (12), получаем

$$h(u_1 + ... + u_k) = h(u_1) + ... + h(u_k) \tag{13}$$

для любого $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя в последнее равенство $u_1 = ... = u_k = a$ с некоторым $a \in \mathbb{R}$, получаем, что $h(ka) = kh(a)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Подставляя в (13) $u_1 = ... = u_k = a/k$, мы получаем, что $h(a/k) = h(a)/k,\ k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $h(x) = xh(1)$ для любого $x \in \mathbb{Q}$.
Покажем теперь, что $h(x) = xh(1)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Возьмём $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Как известно, любое иррациональное число можно сколько угодно точно приблизить рациональным, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists q_1(\varepsilon) \in \mathbb{Q}: \quad |q_1(\varepsilon) - x| < \varepsilon.$$

Так как

$$q_1(\varepsilon) - \varepsilon < x < q_1(\varepsilon) + \varepsilon,$$

и функция $h(x)$ монотонно убывает, мы получаем

$$h(q_1(\varepsilon) + \varepsilon) \le h(x) \le h(q_1(\varepsilon) - \varepsilon).$$

Выберем теперь $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Отметим, что аргументы функции h в левой и правой частях являются рациональными. По уже доказанному,

$$(q_1(\varepsilon) + \varepsilon)\, h(1) \le h(x) \le (q_1(\varepsilon) - \varepsilon)\, h(1).$$

Применение леммы о двух миллиционерах завершает доказательство:

$$h(x) = \left[\lim_{\varepsilon \to 0} q_1(\varepsilon)\right] h(1) = xh(1).$$

□

Замечание 3.5. *Неформально рассмотрим несколько ситуаций, в которых процесс Пуассона не может быть использован для моделирования.*

1. *Допустим, что автобусы приезжают на остановку каждые* 20 ± 2 *минуты. Тогда для случайной величины* X *- времени между двумя последовательными автобусами - нарушено свойство* (11). *Действительно, выберем* $v = 18, u = 5$. *Тогда в левой части равенства* (11) *стоит 0: если автобуса не было более 18 минут, то он скоро приедет (ждать осталось не более 4 минут), и тогда вероятность ожидания более 23 минут равна 0. Однако в правой части* (11) *стоит 1: вероятность того, что ждать более 5 минут, равна 1.*
2. *Другая ситуация: пусть автобусы приезжают в соответствии с некоторым распределением (возможно, экспоненциальным), в среднем каждые 20 минут. Известно, что автобусы иногда ломаются, и тогда соответствующие рейсы отменяют. В такой ситуации, свойство* (11) *также нарушено, причём в качестве примера можно также взять* $v = 18, u = 5$. *Условная вероятность в левой части не равна 1 - может быть, автобус сломался. А в правой части вероятность равна (или близка) к 1.*

Ниже приведены 2 альтернативных определения процесса Пуассона.

Определение 3.6. Целочисленный процесс $N_t,\ t \geq 0$ называется процессом Пуассона с интенсивностью λ, если

0. $N_0 = 0$ п.н.
1. N_t имеет независимые приращения, т.е. для любого набора моментов времени $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ случайные величины

$$N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

являются независимыми.
2. N_t имеет стационарные приращения, т.е. для любых моментов времени t_1, t_2 и любого $h > 0$ выполнено

$$N_{t_2+h} - N_{t_1+h} \overset{d}{=} N_{t_2} - N_{t_1}.$$

3. Для любых моментов времени t и s,

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}\left(\lambda(t-s)\right).$$

Замечание 3.7. *Отметим, что Определение 3.6 избыточно - если выполнено свойство 3, то автоматически выполнено и свойство 2. Данное определение подчёркивает тот факт, что по приращениям процесса можно сказать, является ли процесс пуассоновским.*

4. Неоднородные процессы Пуассона

Литература по теме: [5], [8].

Одним из недостатков процесса Пуассона, которого мы теперь будем называть однородным процессом Пуассона, является тот факт, что его математическое ожидание линейно по времени, $\mathbb{E}N_t = \lambda t$. В данном разделе мы обсудим неоднородные процессы Пуассона, математическое ожидание которых может быть любой возврастающей положительной функцией от времени.

Определение 4.1. Пусть $\Lambda(t)$ - некоторая дифференцируемая монотонно-возрастающая функция такая, что $\Lambda(0) = 0$. Неоднородный процесс Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t) := \Lambda'(t)$ - это целочисленный неубывающий процесс $N_t,\ t \geq 0$ ("неубывающий процесс" означает, что $N_{t+h} - N_t \geq 0$ п.н., $\forall t \geq 0,\ \forall h > 0$), такой что

0. $N_0 = 0$ п.н.;
1. N_t имеет независимые приращения;
2. $(N_{t+h} - N_t)$ имеет распределение Пуассона с параметром $(\Lambda(t+h) - \Lambda(t))$.

Утверждение 4.2. *Если функция интенсивности неоднородного процесса N_t равна константе, то N_t на самом деле является однородным процессом Пуассона.*

Доказательство. Сравнивая определение 4.1 неоднородного процесса Пуассона с определением 3.6, мы приходим к выводу, что для доказательства этого факта достаточно показать стационарность приращений. Но для любых положительных t_1, t_2, h, приращение $N_{t_2+h} - N_{t_1+h}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda(t_2+h) - \Lambda(t_1+h) = \lambda(t_2 - t_1)$, которое совпадает с распределением $N_{t_2} - N_{t_1}$. □

Пример 4.3. Типичным выбором функции интенсивности является функция $\lambda(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$, где $\alpha, \beta > 0$. Такой выбор параметризации обусловлен тем, что $\mathbb{E}[N_t] = \int_0^t \lambda(u)du = \alpha t^\beta$, см. ниже.

5. Составные процессы Пуассона

Литература по теме: [8].

Определение 5.1. Составным процессом Пуассона (compound Poisson process - CPP) называется случайный процесс вида

$$\boxed{X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,}$$

где

1. $Y_1, Y_2, \ldots$ - независимые и одинаково распределённые с.в.;
2. N_t - однородный процесс Пуассона с параметром λ;

3. $Y_1, Y_2, \ldots$ и N_t независимы.

Составной процесс Пуассона является процессом восстановления с вознаграждением, при построении которого в качестве процесса восстановления используется однородный процесс Пуассона (см. главу 2.5).

Теорема 5.2. *Составной процесс Пуассона имеет стационарные и независимые приращения, и кроме того, для любого* $t > s$,

$$\boxed{\phi_{X_t - X_s}(u) = e^{\lambda(t-s)(\phi_Y(u)-1)},} \tag{14}$$

где $\phi_{X_t-X_s}(u)$ *- характеристическая функция приращения* $X_t - X_s$*, а* $\phi_Y(u)$ *- характеристическая функция с.в.* $Y_1, Y_2, \ldots$ *(см приложение D).*

Доказательство. Распишем характеристическую функция приращения $X_t - X_s$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(X_t - X_s)u}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(X_t - X_s)} | N_t - N_s = k\right] \mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(Y_1 + \ldots + Y_k)} | N_t - N_s = k\right] \mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}u(Y_1 + \ldots + Y_k)}\right] \mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_Y(u))^k \, \mathbb{P}\{N_t - N_s = k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\phi_Y(u))^k \, e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\phi_Y(u)\lambda(t-s))^k}{k!} = e^{\lambda(t-s)(\phi_Y(u)-1)},
\end{aligned}$$

где первое равенство следует из свойств условного математического ожидания, второе - из формы составного процесса Пуассона, третье - из независимости $Y_1, Y_2, \ldots$ и N_t, четвёртое - из независимости $Y_1, Y_2, \ldots$ и свойства 2 хар. функций (см приложение D), пятое - из определения 3.6 однородного процесса Пуассона. □

Следствие 5.3. *Сумма двух независимых однородных процессов Пуассона* $N_t^{(1)}$ *и* $N_t^{(2)}$ *является однородным процессом Пуассона. При этом интенсивность процесса* $N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$ *равна сумме интенсивностей процессов* $N_t^{(1)}$ *и* $N_t^{(2)}$.

Доказательство. Из Определения 4.1 следует, что для доказательства следствия достаточно показать

$$N_t^{(1)} + N_t^{(2)} - N_s^{(1)} - N_s^{(2)} \sim Pois\Big((\lambda_1 + \lambda_2)(t-s)\Big), \qquad \forall t > s \geq 0,$$

где λ_1, λ_2 - интенсивности процессов $N_t^{(1)}, N_t^{(2)}$. По предыдущей теореме,

$$\phi_{N_t^{(j)}-N_s^{(j)}}(u) = e^{\lambda_j(t-s)\left(e^{\mathrm{i}u}-1\right)}, \qquad j=1,2,$$

поскольку процесс Пуассона можно рассматривать как составной процесс Пуассона, у которого все слагаемые тождественно равны 1. Поскольку $N_t^{(1)}-N_s^{(1)}$ и $N_t^{(2)}-N_s^{(2)}$ независимы, хар. функция их суммы равна произведению соответствующих хар. функций, т.е.

$$\phi_{N_t^{(1)}-N_s^{(1)}+N_t^{(2)}-N_s^{(2)}}(u) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)\left(e^{\mathrm{i}u}-1\right)}, \qquad j=1,2.$$

Хар. функция в правой части последнего равенства есть хар.функция распределения Пуассона с параметром $(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)$. □

Следствие 5.4. *Для математического ожидания и дисперсии составного процесса Пуассона верны следующие формулы:*

$$\boxed{\mathbb{E}[X_t] = \lambda t \cdot \mathbb{E}[Y], \qquad \mathbb{D}[X_t] = \lambda t \cdot \mathbb{E}[Y^2].}$$

Доказательство. Положим в формуле (14) $s=0$:

$$\phi_{X_t}(u) = e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)},$$

Согласно свойству 5 хар. функций (см приложение D),

$$\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{\mathrm{i}}\phi'_{X_t}(0) = \lambda t \cdot \frac{1}{\mathrm{i}}\phi'_Y(u)e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)}|_{u=0} = \lambda t \cdot \mathbb{E}[Y],$$

т.к. любая хар. функция в нуле равна 1. Аналогично вычисляется второй момент процесса X_t,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t^2] = -\phi''_{X_t}(0) &= -(\lambda t)^2\left(\phi'_Y(u)\right)^2 e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)}|_{u=0} \\
&\qquad -\lambda t\phi''_Y(u)e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)}|_{u=0} \\
&= -(\lambda t)^2\left(\phi'_Y(0)\right)^2 - \lambda t\phi''_Y(0) \\
&= \left(\lambda t\mathbb{E}[Y]\right)^2 + \lambda t\mathbb{E}[Y^2].
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbb{D}[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2] - \left(\mathbb{E}[X_t]\right)^2 = \lambda t\mathbb{E}[Y^2].$$

Отметим, в заключение данного раздела, что формула для математического ожидания может быть также получена из тождества Вальда, см. Замечание 2.7. □

6. Цепи Маркова

Литература по теме: [5], [10], [13]

6.1. Определение. Примеры.

Определение 6.1. Марковская цепь - это процесс X_n с дискретным временем $n = 0, 1, 2, ..$ и со значениями в счётном множестве S, для которого выполнено марковское свойство:

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\right\} = \mathbb{P}\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right\}}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых наборов $j, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$ таких, что

$$\mathbb{P}\left\{X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0\right\} \neq 0.$$

Смысл марковского свойства: положение в каждый момент времени зависит от положения в ближайший предыдущий момент времени и не зависит от более далёкого прошлого.

Так как S - счётное множество, мы будем обозначать его элементы натуральными числами (1,2,3...).

Мы будем изучать однородные цепи Маркова - такие, что вероятности

$$\mathbb{P}\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\right\} = p_{ij}$$

не зависят от n для любых $i, j \in S$.

Для любой цепи Маркова справедлива формула

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{X_n = j,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, ... X_0 = i_0\right\} \\
&\qquad = \mathbb{P}\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}\right\} \cdot \\
&\qquad\qquad ... \cdot \mathbb{P}\left\{X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{X_0 = i_0\right\},
\end{aligned}$$

показывающая, что завимость, выраженная марковским свойством, является обобщением понятия независимости.

Пример 6.2. Случайное блуждание:

$$S_0 = 0, \qquad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 1, 2, ...,$$

где $\xi_1, \xi_2, ...$ - i.i.d. с.в., принимающие значение 1 с вероятностью p и -1 с вероятностью (1-p). Случайное блуждание является цепью Маркова, т.к. значение в данный момент времени определяется значением в предыдущий:

$$\mathbb{P}\left\{S_n = j \mid S_{n-1} = i\right\} = \begin{cases} p, & \text{если } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{если } j = i - 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 6.3. Опишем построение процесса Гальтона-Ватсона - классического примера ветвящего процесса (branching process). Пусть в момент времени 0 есть одна частица. В момент времени 1 эта частица погибает, но производит ξ потомков, причём

$$\mathbb{P}\left\{\xi = k\right\} = p_k \geq 0, \qquad k = 1, 2, ..., \tag{15}$$

где $p_1 + p_2 + ... = 1$. Каждая из новорожденных частиц $\xi_1^{(1)}, ..., \xi_1^{(k)}$ погибает в момент времени 2, и в конце жизни производит (независимо от других частиц) некоторое (случайное) количество потомков в соответствии с распределением (15). Процесс продолжается далее с новыми частицами.

Если обозначить через X_n количество частиц в момент времени n, то получается, что

$$\mathbb{P}\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = \sum_{j_1+...+j_k=j} p_1^{j_1}...p_k^{j_k}, \qquad i = 1, 2, ...,$$

и $\mathbb{P}\{X_n = j | X_{n-1} = 0\} = \mathbb{I}\{j = 0\}$. Поэтому процесс X_n является марковской цепью.

Пример 6.4. На стоянку такси в аэропорту прибывают машины, по одной в каждый момент времени. Если машина подъехала, а в очереди нет ни одного человека, то машина сразу уезжает, а если есть - то в машину садится только 1 человек. Пусть X_k - длина очереди в момент времени k а Y_k - число прибывших в момент времени k $(k = 0, 1, 2, ..,)$. Тогда

$$X_k = Y_k + (X_{k-1} - 1)^+ = \begin{cases} Y_k + (X_{k-1} - 1), & \text{если } X_{k-1} \geq 1; \\ Y_k, & \text{если } X_{k-1} = 0. \end{cases}$$

X_k является цепью Маркова.

Пример 6.5. * Некоторые процессы можно свести к процессам Маркова. Для примера предположим, что значения некоторого процесса Z_n определяются значениями в m предыдущих моментов времени, т.е.

$$\mathbb{P}\{Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_{n-1}, ..., Z_0 = i_0\} \\ = \mathbb{P}\{Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_{n-1}, ..., Z_{n-m} = i_{n-m}\} \qquad (16)$$

для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}$, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых наборов $j, i_{n-1}, ..., i_0 \in S$. Сам процесс Z_n не является марковским, но процесс

$$X_n := (Z_n, ..., Z_{n-m+1}), \quad n = (m-1), m, ...$$

марковским является. Действительно, используя сокращённые записи вида

$$\mathbb{P}\{Z_n \mid Z_{n-1}, ..., Z_0\} := \mathbb{P}\{Z_n = j \mid Z_{n-1} = i_{n-1}, ..., Z_0 = i_0\},$$

можно переписать левую часть (16) в виде

$$\mathbb{P}\{Z_n \mid Z_{n-1}, ..., Z_0\} = \frac{\mathbb{P}\{Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_0\}}{\mathbb{P}\{Z_{n-1}, ..., Z_0\}} \\ = \frac{\mathbb{P}\{(Z_n, ..., Z_{n-m+1}), (Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}), ..., (Z_{m-1}, ..., Z_0)\}}{\mathbb{P}\{(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}), ..., (Z_{m-1}, ..., Z_0)\}} \\ = \frac{\mathbb{P}\{X_n, X_{n-1}, ..., X_{m-1}\}}{\mathbb{P}\{X_{n-1}, ..., X_{m-1}\}} = \mathbb{P}\{X_n \mid X_{n-1}, ..., X_{m-1}\}.$$

Аналогично можно переписать правую часть:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{Z_n \mid Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right\} &= \frac{\mathbb{P}\left\{Z_n, Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right\}}{\mathbb{P}\left\{Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left\{\left(Z_n, ..., Z_{n-m+1}\right), \left(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right)\right\}}{\mathbb{P}\left\{\left(Z_{n-1}, ..., Z_{n-m}\right)\right\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left\{X_n, X_{n-1}\right\}}{\mathbb{P}\left\{X_{n-1}\right\}} = \mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}\right\}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что для процесса X_n выполнено марковское свойство:

$$\mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}, ..., X_{m-1}\right\} = \mathbb{P}\left\{X_n \mid X_{n-1}\right\}.$$

6.2. Классификация состояний

В данном разделе мы используем графическое представление цепи Маркова (transition diagrams). Каждый узел графа представляет собой некоторое состояние. Узлы графа i в j соединены ориентированным ребром (из i в j), если вероятность p_{ij} перехода цепи Маркова из состояния i в состояние j больше 0.

Под маршрутом мы пониманием конечную последовательность вершин, в котором каждая вершина (кроме последней) соединена со следующей вершины ориентированным ребром.

Определение 6.6. Состояние j достижимо из состояния i (обозначение: $i \to j$), если существует маршрут из i в j. Состояния i и j называются сообщающимися (обозначение: $i \leftrightarrow j$), если $i \to j$, $j \to i$.

На множестве состояний конечной цепи Маркова можно определить классы эквивалентности $B_1, B_2, ..$ (см приложение F) следующим образом. Каждый класс B_i характеризуется тем, что

$$\forall j \in B_i, \quad \forall k \neq j : \begin{cases} k \in B_i \Leftrightarrow k \leftrightarrow j; \\ k \notin B_i \Leftrightarrow k \not\leftrightarrow j. \end{cases}$$

Существенные/несущественные состояния.

Определение 6.7. Состояние i называется несущественным (transient), если существует состояние j такое, что $i \to j$, $j \not\to i$ (можно уйти так, что обратно вернуться не получится). Состояние i называется существенным (recurrent), если для любого состояния j такого, что $i \to j$, выполнено также $j \to i$ (в какое бы состояния цепь не перешла, можно с положительной вероятностью вернуться обратно).

Утверждение 6.8. *В классе эквивалентности либо все состояния существенные, либо все несущественные.*

Доказательство. Выберем несущественное состояние i. По определению, существует состояние j такое, что $i \to j,\ j \not\to i$.

Выберем теперь другое состояние k из того же класса, что i и покажем, что k - тоже несущественное состояние. Действительно, j достижимо из k, т.к. $k \to i,\ i \to j \Rightarrow k \to j$. Вместе с этим, k не достижимо из j, т.к. иначе $j \to k,\ k \to i \Rightarrow j \to i$, а мы знаем, что $j \not\to i$. Утверждение доказано. □

Утверждение 6.9. *(i) Любая конечная цепь Маркова имеет хотя бы одно существенное состояние.*

(ii) Из существенного состояния можно перейти только в существенное состояние.

(iii) Все существенные состояния, в которые можно перейти из заданного существенного состояния, образуют один класс эквивалентности.

Доказательство. Доказательство первого факта будет приведено позднее, в то время как 2 и 3 непосредственно следуют из определения и предыдущего утверждения. □

Период состояния.

Определение 6.10. Период состояния i (обозначение: $d(i)$) - это наименьшее натуральное число, обладающее свойством $p_{ii}(m) = 0$ для всех m не кратных $d(i)$. Эквивалентно можно сказать, что $d(i)$ - наибольший общий делительно всех чисел m таких, что $p_{ii}(m) \neq 0$.

Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим; если $d(i) \geq 2$, то состояние i называется периодическим.

Теорема 6.11. *Все состояния в одном классе эквивалентности имеют одинаковый период.*

Доказательство. Возьмём 2 элемента i, j из одного класса. Обозначим длину маршрута из i в j через n, а длину маршрута из j в i через m. Из i в i можно попасть за $n + m$ шагов, поэтому $n + m$ делится на $d(i)$.

Возьмём теперь произвольное k такое,что $p_{jj}(k) > 0$. Это означает, что существует маршрут из j в j длиной k. Таким образом, можно попасть из i в i за $n + m + k$ шагов ($i \to j \to j \to i$), поэтому $n + m + k$ делится на $d(i)$. Значит, k делится на $d(i)$. Но k - произвольное число такое, что $p_{jj}(k) > 0$, и, следовательно, $d(i)$ является общим делителем чисел k таких, что $p_{jj}(k) > 0$. Так как $d(j)$ - наибольший общий делитель всех таких k, то $d(j)$ делится на $d(i)$. Аналогично доказывается, что $d(i)$ делится на $d(j)$. В итоге получаем, что $d(i) = d(j)$. □

Возвратные/невозвратные состояния.

Определение 6.12. Состояние i цепи Маркова называется возвратным, если

$$\mathbb{P}\Big\{\exists n > 0 : X_n = i |\ X_0 = i\Big\} = 1.$$

Иначе состояние называется невозвратным.

Утверждение 6.13. *(i) Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) = 1,$$

где через $f_{ii}(n)$ обозначена вероятность возвращения в i-ое состояние на n-ом шаге в первый раз.

(ii) Состояние i является возвратным тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty,$$

где $p_{ii}(n)$ - вероятность перехода из состояния i в состояние i за n шагов.

(iii) В классе эквивалентности либо все элементы возвратны, либо все невозвратны.

(iv) В любой конечной цепи Маркова есть хотя бы одно возвратное состояние.

(v) В конечной цепи Маркова состояние является возвратным тогда и только тогда, когда оно является существенным.

Доказательство. * (i) Очевидно.

(ii) Доказательство состоит из двух этапов.

1. Рассмотрим события

$$\begin{aligned} A_i^{(k)} &= \{\text{цепь впервые возвращается в состояние } i \text{ на } k \text{ -ом шаге}\} \\ &= \{X_k = i, X_{k-1} \neq i, ...X_1 \neq i, X_0 = i\}. \end{aligned}$$

В наших обозначениях, $\mathbb{P}\{A_i^{(k)}\} = f_{ii}(k)$. Тогда

$$p_{ii}(n) = \mathbb{P}\{X_n = i | X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{X_n = i | A_i^{(k)}, X_0 = i\right\} \mathbb{P}\left\{A_i^{(k)}\right\}.$$

По марковскому свойству,

$$\mathbb{P}\left\{X_n = i | A_i^{(k)}, X_0 = i\right\} = \mathbb{P}\left\{X_n = i | X_k = i\right\} = p_{ii}(n-k),$$

где первое равенство следует из следующего общего факта:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{X_n = i | X_k = i_k, ..., X_0 = i_0\right\} \\ &= \sum_{i_{n-1},...,i_{k+1}} \mathbb{P}\left\{X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_{k+1} = i_{k+1} | X_k = i_k, ..., X_0 = i_0\right\} \\ &\qquad = \sum_{i_{n-1},...,i_{k+1}} \mathbb{P}\left\{X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_{k+1} = i_{k+1} | X_k = i_k\right\} \\ &\qquad\qquad = \mathbb{P}\left\{X_n = i | X_k = i_k\right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} p_{ii}(n-k) f_{ii}(k).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} p_{ii}(n-k) f_{ii}(k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)\left[\sum_{n=k}^{\infty} p_{ii}(n-k)\right] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n)\right] = \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k)\right]\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)\right].\end{aligned}$$

Поэтому если $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$, то состояние не является возвратным, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}(k) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)}{1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)} < 1.$$

2. Наоборот, пусть $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$. Аналогично первому пункту, получаем, что для любого фиксированного натурального N,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} p_{ii}(n) &= \sum_{n=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{n} p_{ii}(n-k) f_{ii}(k)\right] = \sum_{k=1}^{N} f_{ii}(k)\left[\sum_{n=k}^{N} p_{ii}(n-k)\right] \\ &\leq \left[\sum_{k=1}^{N} f_{ii}(k)\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{N} p_{ii}(n)\right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N} f_{ii}(k) \geq \frac{\sum_{n=1}^{N} p_{ii}(n)}{1+\sum_{n=1}^{N} p_{ii}(n)} \to 1, \qquad N \to \infty.$$

(iv) Аналогично (ii), этап 2, можно показать, что если состояние j невозвратно, то $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) < \infty$ для любого i.

Отсюда следует, что в любой конечной цепи Маркова есть хотя бы одно возвратное состояние. Действительно, для любых i, j,

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij}(n) = 1$$

и поэтому найдётся хотя бы один индекс j такой, что $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) \neq 0$. Но для этого индекса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)$ расходится, и поэтому состояние j не является возвратным.

(v) Теперь предположим, что состояние i в конечной цепи Маркова является несущественным. Тогда найдётся такое индекс j, что для некоторого n, $p_{ij}(n) > 0$ и для любого k $p_{ji}(k) = 0$. Получается, что

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{цепь вернулась в состояние } i\} &= \mathbb{P}\{\text{цепь не переходила из } i \text{ в } j\}\\ &= 1 - \mathbb{P}\{\text{цепь переходила из } i \text{ в } j\}\\ &\le 1 - \mathbb{P}\{\text{цепь переходила из } i \text{ в } j \text{ за } n \text{ шагов}\} \le 1 - p_{ij}(n) < 1,\end{aligned}$$

и поэтому цепь не является возвратной.

С другой стороны, если состояние i существенно, то возможно 2 варианта.

1) Состояние i не сообщается ни с одним другим состоянием. Тогда оно является возвратным по определению.

2) Состояние i сообщается с состояниями $i_1, ..., i_m$. Тогда можно ограничить цепь только на данный класс. По доказанному выше (см. (iv)), в этой цепи будет хотя бы одно возвратное состояние. Значит, по п. (iii), все состояния в этом классе будут возвратными. □

Замечание 6.14. *Доказательство утверждения 6.9(i) непосредственно вытекает из п. (iv), (v) предыдущего утверждения.*

6.3. Матричное представление цепи Маркова

В первом разделе мы ввели обозначение p_{ij} - вероятность перехода из i в j за 1 шаг. Матрица $P = (p_{ij})$ называется матрицей переходных вероятностей. Обозначим вероятность перехода из состояния i в состояние j за m шагов через $p_{ij}(m)$. Аналогично можно определить матрицу перехода за m шагов $P^{(m)} := (p_{ij}(m))$.

Теорема 6.15. *Для конечной цепи Маркова (т.е. для цепи Маркова с конечным количеством состояний), имеет место равенство*

$$\boxed{P^{(m)} = P^m.}$$

Доказательство. Распишем $p_{ij}(m)$ по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}p_{ij}(m) &= \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\}\\ &= \sum_{k\in S} \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i, X_{n+m-1} = k\}\,\mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k \mid X_n = i\}\\ &= \sum_{k\in S} \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_{n+m-1} = k\}\,\mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k \mid X_n = i\}\\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \cdot p_{ik}(m-1).\end{aligned}$$

Следовательно, $P^{(m)} = P^{(m-1)}P$. Итеративно применяя доказанное равенство, мы получаем

$$P^{(m)} = P^{(m-1)}P = P^{(m-2)}P^2 = ... = P^{(1)}P^{m-1} = P^m,$$

где последнее равенство следует из того, что $P^{(1)} = P$. $\square$

Следствие 6.16. *Из последней теоремы непосредственно следует уравнение Колмогорова-Чепмена:*

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Обозначим количество элементов в конечной цепи Маркова через M. Обозначим распределение цепи Маркова на k-ом шаге ($k = 0, 1, 2, ...$) через $\vec{\pi}^{(k)} = \left(\pi_1^{(k)}, ..., \pi_M^{(k)}\right)$, т.е.

$$\mathbb{P}\left\{X_k = j\right\} = \pi_j^{(k)}, \qquad j = 1..M, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Отметим, что

$$\mathbb{P}\left\{X_k = j\right\} = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{P}\left\{X_k = j \mid X_{k-1} = i\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{X_{k-1} = i\right\} = \left(\vec{\pi}^{(k-1)} P\right)_j,$$

то есть

$$\boxed{\vec{\pi}^{(k)} = \vec{\pi}^{(k-1)} P,} \qquad k = 1, 2, ...$$

Итеративно применяя последнее равенство, получаем

$$\vec{\pi}^{(k)} = \vec{\pi}^{(0)} P^k, \qquad k = 1, 2, ...$$

Определение 6.17. Распределение $\vec{\pi}$ на множестве состояний цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P называется стационарным, если $\vec{\pi} P = \vec{\pi}$.

Отметим, что если в начальный момент времени распределение $\vec{\pi}^{(0)}$ является стационарным, то для момента времени k, $\vec{\pi}^{(k)} = \vec{\pi}^{(0)}$.

Утверждение 6.18. *У конечной цепи Маркова есть хотя бы одно стационарное состояние, причём если состояние не единственное, то таких состояний бесконечно много.*

Доказательство. * Как известно из курса линейной алгебры, уравнение $\vec{\pi} P = \vec{\pi}$ (относительно $\vec{\pi} = (\pi_1, ... \pi_M)$) может иметь либо не иметь решений, либо иметь одно решение, либо бесконечно много решений. Покажем, что поскольку P- стохастическая матрица, это уравнение всегда имеет хотя бы одно решение такое, что $\sum_{k=1}^{M} \pi_k = 1$ и все $\pi_k, k = 1..M$ положительны.

Согласно утверждению 6.9 (i), любая конечная цепь Маркова имеет хотя бы одно существенное состояние. Переобозначим состояния - пусть состояние номер 1 является существенным. Обозначим количество состояний, в которое можно перейти из этого состояния, через K - без ограничения общности можно считать, что это состояния $1, ..., K$. По утверждению 6.9 (iii), все эти состояния существенны и относятся к одному классу эквивалентности, и матрица P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1K} & 0 & ... & 0 \\ p_{21} & ... & p_{2K} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ p_{K1} & ... & p_{KK} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Покажем, что стационарное состояние может быть найдено среди состояний, у которых $\pi_{K+1} = ... = \pi_M = 0$. Действительно, на таких состояниях задача может быть переформулирована: требуется найти стационарное состояние цепи Маркова с матрицей перехода за 1 шаг

$$P^\circ = \begin{pmatrix} p_{11} & ... & p_{1K} \\ p_{21} & ... & p_{2K} \\ ... & ... & ... \\ p_{K1} & ... & p_{KK} \end{pmatrix}.$$

Некоторые элементы этой матрицы могут быть равны 0, но для любых индексов i, j существует натуральное число m такое, что (i, j)-ый элемент матрицы $P^{\circ m}$ строго положителен. Тогда по теореме Фробениуса -Перрона для неотрицательных матриц (Perron–Frobenius theorem for irreducible matrices), максимальное собственное значение r матрицы P° удовлетворяет неравенствам

$$\min_i \sum_{j=1}^{K} p^\circ_{ij} \le r \le \max_i \sum_{j=1}^{K} p^\circ_{ij},$$

то есть равно 1, и для этого собственного значения существует левый собственный вектор $\vec{v}$ (т.е. $\vec{v}P^\circ = \vec{v}$) со строго положительными компонентами. Для завершения доказательства осталось отметить, что собственный вектор определён с точностью до множителя, поэтому всегда можно подобрать вектор с суммой компонент равной 1. □

Замечание 6.19. *На практике при решении системы*

$$\vec{\pi}P = \vec{\pi}, \qquad \sum_{k=1}^{M} \pi_k = 1$$

($M+1$ уравнение с M неизвестными) удобно отбросить $M-$ое уравнение. Действительно, M-ое уравнение следует из всех остальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{M} \pi_i p_{iM} = \sum_{i=1}^{M} \pi_i \Big(1 - \sum_{j=1}^{M-1} p_{ij}\Big)$$
$$= 1 - \sum_{j=1}^{M-1} \Big(\sum_{i=1}^{M} \pi_i p_{ij}\Big) = 1 - \sum_{j=1}^{M-1} \pi_j = \pi_M.$$

Поэтому исходная система эквивалентна системе

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \dots & \pi_M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11} & \dots & p_{1(M-1)} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ p_{M1} & \dots & p_{M(M-1)} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_1 & \dots & \pi_{M-1} & 1\end{pmatrix}. \tag{17}$$

6.4. Эргодическая теорема

В рамках данной главы все цепи Маркова предполагаются конечными. Количество состояний цепи обозначено через M.

Определение 6.20. Эргодический класс состояний - класс, все элементы которого существенны и непериодичны. Цепь, состоящая из одного эргодического класса называется эргодической цепью.

Отметим, что если цепь состоит из 1 класса, то все состояния существенны. Действительно, хотя бы 1 состояние является существенным (утверждение 6.9 (i)), и поэтому все элементы являются существенными (утверждение 6.8).

Утверждение 6.21. *Цепь Маркова является эргодической тогда и только тогда, когда*

$$\exists m \in \mathbb{N}: \quad p_{ij}(m) > 0 \quad \forall i, j. \tag{18}$$

Кроме того, если цепь эргодическая, то (18) *выполнено для любого* $m \geq (M-1)^2 + 1$.

Теорема 6.22. *Для эргодической цепи существуют пределы*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j^*,} \tag{19}$$

причём π_j^* *не зависят от* i *и, кроме того,* $\pi_j^* > 0$, $\forall j = 1..M$, *и* $\sum_{j=1}^M \pi_j^* = 1$.

Замечание 6.23. *Отметим, что свойство* (19) *не может быть выполнено для неэргодической цепи Маркова. Действительно, если в цепи есть хотя бы одно несущественное состояние* j, *то найдется такое состояние* i, *что* $p_{ij}(n) = 0$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$. *Но тогда* $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = 0$.

Если же цепь состоит из нескольких классов, но все элементы этих классов являются существенными, то состояния из разных классов не сообщаются друг с другом. Это значит, что предельные значения в (18) *зависят от* i.

Доказательство. Обозначим $s_j(n) = \min_i p_{ij}(n)$, $S_j(n) = \max_i p_{ij}(n)$, $j =$

$1..M$. Последовательность $s_j(n)$ возрастает по n для любого $j = 1..M$:

$$s_j(n) = \min_i p_{ij}(n) = \min_i \Big[\sum_{k=1}^{M} p_{ik} p_{kj}(n-1)\Big]$$
$$\geq \min_i \big[\sum_{k=1}^{M} p_{ik}\big] \cdot \min_k \big[p_{kj}(n-1)\big] = s_j(n-1). \quad (20)$$

Аналогично, $S_j(n)$ убывает по n для любого $j = 1..M$, и поэтому разность $S_j(n) - s_j(n)$ также монотонно убывает. Докажем, что эта разность стремится к нулю.

Выберем $m \in \mathbb{N} : p_{ij}(m) > 0,\ \forall i, j$ (см. Утверждение 6.21), и обозначим $\varepsilon := \min_{i,j} p_{ij}(m) > 0$. Рассмотрим для произвольных $i, j = 1..M, n \in \mathbb{N}$, вероятность перехода из i в j за $m + n$ шагов:

$$\begin{aligned} p_{ij}(m+n) &= \sum_{k=1}^{M} p_{ik}(m) p_{kj}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{M} \left(p_{ik}(m) - \varepsilon p_{jk}(n)\right) p_{kj}(n) + \varepsilon \sum_{k=1}^{M} p_{jk}(n) p_{kj}(n). \end{aligned}$$

Поскольку $p_{ik}(m) \geq \varepsilon$ и $1 \geq p_{jk}(n), \forall i, j, k$, то $p_{ik}(m) - \varepsilon p_{jk}(n) \geq 0$. Значит,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{M} \left(p_{ik}(m) - \varepsilon p_{jk}(n)\right) p_{kj}(n) &\geq s_j(n) \cdot \sum_{k=1}^{M} \left(p_{ik}(m) - \varepsilon p_{jk}(n)\right) \\ &\geq s_j(n) \cdot \left(\sum_{k=1}^{M} p_{ik}(m) - \varepsilon \sum_{k=1}^{M} p_{jk}(n)\right) \\ &= (1-\varepsilon) s_j(n). \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\sum_{k=1}^{M} p_{jk}(n) p_{kj}(n) = p_{jj}(2n)$, получаем, что

$$p_{ij}(m+n) \geq (1-\varepsilon) s_j(n) + \varepsilon p_{jj}(2n).$$

Поэтому

$$s_j(m+n) \geq (1-\varepsilon) s_j(n) + \varepsilon p_{jj}(2n),$$

и, аналогично,

$$S_j(m+n) \leq (1-\varepsilon) S_j(n) + \varepsilon p_{jj}(2n),$$

Наконец, мы заключаем, что

$$S_j(m+n) - s_j(m+n) \leq (1-\varepsilon) \left(S_j(n) - s_j(n)\right).$$

Значит, можно выбрать подпоследовательность $n_k := m + nk,\ \ k \in \mathbb{N}$ такую,что

$$S_j(n_k) - s_j(n_k) \leq (1-\varepsilon)^k \left(S_j(0) - s_j(0)\right) \to 0, \qquad k \to \infty$$

(в этом месте ключевую роль играет тот факт, что $\varepsilon \in (0,1)$). Но по уже доказанному, $(S_j(n) - s_j(n))$ - монотонная последовательность, поэтому $S_j(n) - s_j(n) \to 0, n \to \infty$.

Для любого $j = 1..M$ и любого $n > m$ выполнено

$$\min_i p_{ij}(n) \geq \min_i p_{ij}(m) \geq \varepsilon > 0,$$

см. (20), и поэтому

$$\pi_j^* = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) \geq \varepsilon > 0.$$

Наконец,

$$\sum_{j=1}^{M} \pi_j^* = \sum_{j=1}^{M} \lim_{n\to\infty} \pi_{ij}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{M} \pi_{ij}(n) = 1. \tag{21}$$

□

Утверждение 6.24. *Если распределение $\vec{\pi}^* = (\pi_1^*, ..., \pi_M^*)$ получено по формуле* (19)*, то*

- *(i) $\vec{\pi}^*$ является единственным стационарным распределением для цепи Маркова с переходной матрицей P;*
- *(ii) $\pi_j^* = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)},\ j = 1..M$, независимо от того, какое распределение было в начальный момент времени.*

Доказательство. (i) Действительно,

$$\left(\vec{\pi}^* P\right)_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{M} \pi_j^* p_{ji} = \sum_{j=1}^{M} \left(\lim_{n\to\infty} p_{kj}(n)\right) p_{ji},$$

где k - произвольное целое число от 1 до M. Далее,

$$\begin{aligned} \left(\vec{\pi}^* P\right)_i = \sum_{j=1}^{M} \left(\lim_{n\to\infty} p_{kj}(n)\right) p_{ji} \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{M} p_{kj}(n) p_{ji}\right) \\ &= \quad \lim_{n\to\infty} \left(P^{(n)} P\right)_{ki} = \lim_{n\to\infty} \left(P^{(n+1)}\right)_{ki}, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из Теоремы 6.15. Осталось заметить, что

$$\left(\vec{\pi}^* P\right)_i = \lim_{n\to\infty} \left(P^{(n+1)}\right)_{ki} = \lim_{n\to\infty} p_{ki}(n+1) = \pi_i^*,$$

то есть $\vec{\pi}^* P = \vec{\pi}^*$. Таким образом, мы показали, что распределение $\vec{\pi}^*$ является стационарным.

Покажем теперь, что других стационарных распределений нет. Пусть $\vec{\pi}^\circ$ - стационарное распределение, $\vec{\pi}^\circ = \vec{\pi}^\circ P$. Тогда $\vec{\pi}^\circ = \vec{\pi}^\circ P^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и, значит, $\vec{\pi}^\circ = \lim_{n\to\infty} \vec{\pi}^\circ P^n$. Поэтому для любого $j = 1..M$,

$$\pi_j^\circ = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^M \pi_i^\circ p_{ij}(n) = \sum_{i=1}^M \pi_i^\circ \left[\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)\right] = \sum_{i=1}^M \pi_i^\circ \pi_j^* = \pi_j^*,$$

и, следовательно, $\vec{\pi}^\circ = \vec{\pi}^*$.

(ii) Поскольку $\vec{\pi}^{(n)} = \vec{\pi}^{(0)} P^{(n)}$, то для любого $j = 1..M$ имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \big[\sum_{k=1}^M \pi_k^{(0)} p_{kj}(n)\big] = \sum_{k=1}^M \pi_k^{(0)} \lim_{n\to\infty} \big[p_{kj}(n)\big]$$
$$= \pi_j^* \cdot \big[\sum_{k=1}^M \pi_k^{(0)}\big] = \pi_j^*.$$

$\square$

6.5. Момент первого достижения

1. Обозначим момент первого достижения (hitting time) состояния j

$$\tau_j = \inf\{n \geq 0 : \ X_n = j\}.$$

Событие "цепь когда-либо перейдёт в состояние j" совпадает с событием "$\tau_j < \infty$". Введём обозначение

$$h_{ij} := \mathbb{P}\{\tau_j < \infty \mid X_0 = i\}$$

- вероятность когда-либо перейти в состояние j, если цепь стартует из состояния i. Очевидно, что $h_{ii} = 1$.

Утверждение 6.25. *Для любых $i, j \in S, i \neq j$, имеет место равенство*

$$h_{ij} := \sum_{k\in S} p_{ik} h_{kj}. \tag{22}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_0 = i\big\} = \sum_k \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty, \ X_1 = k | X_0 = i\big\} \\ &= \sum_k \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_1 = k, X_0 = i\big\} \mathbb{P}\big\{X_1 = k | X_0 = i\big\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_1 = k, X_0 = i\big\} = \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_1 = k\big\}, \qquad \forall i, j, k,\ i \neq j. \qquad (24)$$

Действительно, если $j = k$, то обе части равенства равны 1. Если $j \neq k$, то равенство следует из марковского свойства. Подставляя (57) в (56), получаем (22). $\square$

Пример 6.26. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность того, что цепь когда-либо будет находиться в состоянии 6, если

(i) цепь стартует из детерминированного состояния (то есть начальное распределение вероятностей - вырожденное, равное 1 для одного состояния и 0 для всех остальных);

(ii) начальное распределение вероятностей - произвольное.

В первом пункте задачи нас просят найти $h_{16}, h_{26}, .., h_{66}$. Очевидно, что $h_{66} = 1$.

В данной цепи Маркова 3 класса - $\{1, 3, 6\}, \{2, 4\}, \{5\}$. По графическому представлению сразу делаем вывод, что $h_{56} = 0$.

Отметим, что состояния $\{1, 3, 6\}$ - существенные. Справедливо такое утверждение: вероятность когда-либо перейти в существенное состояние j из любого состояния, входящего в один класс эквивалентности с j, равна 1. Действительно, пусть j состоит в одном классе с состояниями $i_1, ..., i_n \in S$. Тогда соответствующие уравнения (22) объединяются в систему уравнений

$$h_{i_k j} = p_{i_k i_1} h_{i_1 j} + ... + p_{i_k i_n} h_{i_n j}, \qquad k = 1..n,$$

решением которой является $h_{i_1 j} = ... = h_{i_n j} = 1$. Поэтому $h_{16} = h_{36} = 1$.

Записывая (22) для $i = 2, j = 6$ и $i = 4, j = 6$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} h_{26} &= \frac{1}{5}h_{26} + \frac{1}{5}h_{46} + \frac{2}{5}, \\ h_{46} &= \frac{1}{6}h_{26} + \frac{1}{6}h_{46} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

решая которые получаем $h_{26} = 13/19, h_{46} = 14/19$.

Второй пункт задачи:

$$\mathbb{P}\big\{\tau_6 < \infty\big\} = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}\left\{\tau_6 < \infty \mid X_0 = i\right\} \mathbb{P}\big\{X_0 = i\big\} = \sum_{k=1}^{6} h_{i6} \mathbb{P}\big\{X_0 = i\big\}.$$

2. Обозначим через ν_{ij} математическое ожидание количества шагов до перехода в состояние j, если цепь изначально находилась в состоянии i,

$$\nu_{ij} := \mathbb{E}\left[\tau_j \mid X_0 = i\right].$$

Очевидно, что $\nu_{ii} = 0$.

Утверждение 6.27. *Для любых $i, j \in S, i \neq j$, справедливы соотношения*

$$\nu_{ij} = 1 + \sum_k p_{ik}\nu_{kj}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 6.25, имеем

$$\nu_{ij} \quad = \quad \sum_k \mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] \mathbb{P}\big\{X_1 = k | X_0 = i\big\}.$$

Заметим, что для $j = k$, то $\mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] = 1$, а если $j \neq k$, то

$$\mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] = \mathbb{E}\big[1 + \tau_j | X_0 = k\big].$$

Значит,

$$\begin{aligned} \nu_{ij} \quad &= \quad \sum_k \mathbb{P}\big\{X_1 = k | X_0 = i\big\} + \sum_{k \neq j} \mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] \mathbb{P}\big\{X_1 = k | X_0 = i\big\} \\ &= \quad 1 + \sum_{k \neq j} \nu_{kj} p_{ik} = 1 + \sum_k \nu_{kj} p_{ik}, \end{aligned}$$

где последнее равенство верно, поскольку $\nu_{jj} = 0$. □

Пример 6.28. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Спрашивается, чему равно математическое ожидание количества шагов до перехода в состояние 1, если в начальный момент времени цепь находилась в состоянии 2.

Имеем

$$\nu_{21} = 1 + p_{22}\nu_{21} = 1 + (2/5)\nu_{21}.$$

Поэтому $\nu_{21} = 5/3$.

Часть II
Процессы с непрерывным временем

7. Гауссовские процессы. Броуновское движение. Стационарность.

Литература по теме: [11], [5].

7.1. Гауссовский вектор

В данном разделе удобно дополнить определение одномерной нормальной с.в. следующим образом. Мы будем говорить, что одномерная с.в. X имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ^2 (об. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), если её плотность равна

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \qquad \sigma > 0,$$

или же

$$\mathbb{P}\{X = \mu\} = 1, \qquad \sigma = 0.$$

Определение 7.1. Вектор $\vec{X} = (X_1, ..., X_n)$ называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ с.в. $Y := \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$ имеет нормальное распределение.

Утверждение 7.2. *Вектор $\vec{X}$ является гауссовским тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих свойств:*

(i) характеристическая функция вектора $\vec{X}$ представима в виде

$$\boxed{\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \exp\left\{ \mathrm{i}\,(\vec{u}, \vec{\mu}) - \frac{1}{2}\vec{u}^T \Sigma \vec{u} \right\},} \tag{25}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$ и Σ - симметричная неотрицательно определённая матрица размера $n \times n$;

(ii) вектор $\vec{X}$ представим в виде

$$\boxed{\vec{X} = A\vec{X}^\circ + \vec{\mu},} \tag{26}$$

где $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathrm{Matr}(n, n)$ и $\vec{X}^\circ \in \mathbb{R}^n$ - стандартный нормальный вектор, т.е. все компоненты этого вектора независимы в совокупности и распределены по закону $\mathcal{N}(0, 1)$.

Замечание 7.3. *Из доказательства данного утверждения следует, что*

- *вектор $\vec{\mu}$ является вектором средних значений, то есть*
$$\vec{\mu} = (\mathbb{E}X_1, ..., \mathbb{E}X_n)\,;$$
- *матрица $\Sigma = (\Sigma_{jk})_{j,k=1}^n$ является ковариационной матрицей вектора $\vec{X}$, то есть $\Sigma_{jk} = \operatorname{cov}(X_j, X_k)$;*
- *матрицу A можно выбрать такой, что*
$$AA = AA^\top = \Sigma,$$
и поэтому в дальнейшем будет использовано обозначение $A = \Sigma^{1/2}$, см. Приложение H.

Доказательство. Опр. 7.1 $\Rightarrow$ (i). По определению хар. функции
$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(u_1X_1+...+u_nX_n)}\right], \qquad \vec{u} \in \mathbb{R},$$
где выражение в правой части можно трактовать как значение хар. функции одномерной нормальной случайной величины $Y = u_1X_1 + ... + u_nX_n$ в точке 1. Таким образом,
$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = e^{\mathrm{i}\mu_Y - \sigma_Y^2/2},$$
где
$$\begin{aligned} \mu_Y &= \mathbb{E}Y = \sum_{k=1}^n u_k \cdot \mathbb{E}X_k = (\vec{u}, \vec{\mu})\,, \qquad \vec{\mu} := (\mathbb{E}X_1, ..., \mathbb{E}X_n)\,, \\ \sigma_Y^2 &= \mathbb{D}Y = \mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^n u_k X_k\right] = \sum_{k,s} u_k u_s \operatorname{cov}(X_k, X_s) = \vec{u}^T\Sigma\vec{u}, \end{aligned}$$
при этом матрица ковариаций $(\Sigma)_{k,s} := \operatorname{cov}(X_k, X_s)$ является симметричной (т.к. $\operatorname{cov}(X_k, X_s) = \operatorname{cov}(X_s, X_k)$) и неотрицательно определённой, т.к. для любого вектора $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ имеет место представление
$$\vec{u}^T\Sigma\vec{u} = \operatorname{cov}\left(\sum_{k=1}^n u_k X_k, \sum_{s=1}^n u_s X_s\right) = \mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^n u_k X_k\right) \geq 0.$$

(i) $\Rightarrow$ опр. 7.1. Этот факт следует из взаимнооднозначного соответствия хар. функций и распределений случайных величин.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Покажем теперь, что хар. функция с.в. $\vec{X} = A\vec{X}^\circ + \vec{\mu}$ имеет вид (25). Действительно, по уже доказанному, хар. функция вектора $\vec{X}^\circ$ имеет вид
$$\phi_{\vec{X}^\circ}(\vec{u}) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{u}^T\vec{u}\right\},$$
а по свойству (55),
$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = e^{\mathrm{i}(\vec{\mu},\vec{u})}\phi_{\vec{X}^\circ}(A^\top\vec{u}) = \exp\left\{\mathrm{i}\,(\vec{u}, \vec{\mu}) - \frac{1}{2}\vec{u}^T\Sigma\vec{u}\right\},$$

где $\Sigma = AA^T$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Так как матрица Σ является симметричной неотрицательно определённой, то найдётся матрица $\Sigma^{1/2}$, , см Приложение H.

По уже доказанному, хар. функция вектора $\Sigma^{1/2}\vec{X}^\circ + \vec{\mu}$ имеет вид (25), и значит, всилу взаимнооднозначности, вектор $\vec{X}$ представим в виде (26). $\square$

Утверждение 7.4. *Если матрица ковариаций вектора $\vec{X}$ невырождена (т.е.* $\det(\Sigma) \neq 0$*), то распределение вектора $\vec{X}$ имеет плотность, равную*

$$p_{\vec{X}}(\vec{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{u}-\vec{\mu})}.$$

В данном случае используется обозначение $\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$ по аналогии с одномерным нормальным распределением.

Утверждение 7.5. *Носителем двумерного гауссовского вектора является либо вся плоскость $\mathbb{R}^2$, либо прямая, либо точка.*

Доказательство. Отметим, что если $\det(\Sigma) \neq 0$, то распределение вектора $\vec{X}$ имеет плотность, равную

$$p_{\vec{X}}(\vec{u}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{u}-\vec{\mu})},$$

и носителем вектора $\vec{X}$ является всё пространство $\mathbb{R}^2$. Если же $\det(\Sigma) = 0$, то $\det(\Sigma^{1/2}) = 0$. Отсюда следует, что система строчек матрицы $A = \Sigma^{1/2}$ зависима, то есть найдутся b_1, b_2 (не равные одновременно нулю), что

$$b_1 a_{11} + b_2 a_{21} = 0, \qquad b_1 a_{12} + b_2 a_{22} = 0.$$

Поэтому из представления $\vec{X} = A\vec{X}^\circ + \mu$ получаем, что

$$\begin{aligned} b_1 X_1 + b_2 X_2 &= b_1\big(a_{11}X_1^\circ + a_{12}X_2^\circ + \mu_1\big) + b_2\big(a_{21}X_1^\circ + a_{22}X_2^\circ + \mu_2\big) \\ &= \big(b_1 a_{11} + b_2 a_{21}\big)X_1^\circ + \big(b_1 a_{12} + b_2 a_{22}\big)X_2^\circ + \big(b_1\mu_1 + b_2\mu_2\big) \\ &= b_1\mu_1 + b_2\mu_2 =: c. \end{aligned}$$

Значит, в этом случае носителем вектора (X_1, X_2) является либо прямая, либо точка. $\square$

Утверждение 7.6. *(i) Если 2 некоррелированные случайные величины ξ, η имеют нормальное распределение, и, **кроме того, вектор** (ξ, η) **является гауссовским,** то ξ и η независимы.*

(ii) Если 2 независимые случайные величины ξ, η имеют нормальное распределение, то вектор (ξ, η) является гауссовским.

(iii) Существуют 2 зависимые некоррелированные случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

Доказательство. (i) Отметим, что если $\xi \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\eta \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, причём ξ, η некоррелированы, то матрица ковариаций гауссовского вектора (ξ, η) имеет вид

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2) := \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Из доказательства утверждения 7.2 (i) $\Rightarrow$ (ii) следует, что

$$(\xi, \eta)^\top = \Sigma^{1/2} (\xi^\circ, \eta^\circ)^\top + \vec{\mu},$$

где $\Sigma^{1/2} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, а вектор (ξ°, η°) является стандартным гауссовским вектором. Следовательно, случайные величины

$$\xi = \sigma_1 \xi^\circ + \mu_1 \quad \text{и} \quad \eta = \sigma_2 \eta^\circ + \mu_2$$

являются независимыми как функции от независимых с.в. ξ° и η°.

(ii) Действительно, ввиду независимости ξ и η, для любых чисел u_1 и u_2 с.в. $u_1 \xi + u_2 \eta$ имеет нормальное распределение, и значит, вектор (ξ, η) является гауссовским по определению.

(iii) Рассмотрим с.в. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и с.в. $Y = |X| \cdot Z$, где с.в. Z принимает значения 1 и -1 с вероятностями 1/2. Заметим, что

- $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т.к. для любого $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y < x\} &= \mathbb{P}\{|X| < x\} \mathbb{P}\{Z = 1\} + \mathbb{P}\{|X| > -x\} \mathbb{P}\{Z = -1\} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}\{|X| < x\} + 1) = \mathbb{P}\{X < x\}. \end{aligned}$$

  Аналогичные рассуждения верны для любого $x < 0$.

- С.в. X и Y некоррелированы, т.к.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[X \cdot |X| \cdot Z] = \mathbb{E}[X \cdot |X|] \cdot \mathbb{E}[Z] = 0 \\ \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] &= 0, \end{aligned}$$

  и, следовательно, $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$.

- Докажем, что с.в. X и Y зависимы методом от противного. Допустим, что они независимы - значит, по пункту (ii), вектор (X, Y) является гауссовским, и, значит, любая комбинация комбинент этого вектора имеет нормальное распределение - в частности, с.в. $\xi = X - Y = X - |X| Z$ имеет нормальное распределение. Отметим, что

$$\mathbb{P}\{\xi > 0\} \geq \mathbb{P}\{X > 0,\ Z < 0\} = \mathbb{P}\{X > 0\} \cdot \mathbb{P}\{Z < 0\} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}\{\xi = 0\} \geq \mathbb{P}\{X > 0,\ Z > 0\} = \mathbb{P}\{X > 0\} \cdot \mathbb{P}\{Z > 0\} = \frac{1}{4}.$$

  Мы пришли к противоречию, т.к. с.в. с нормальным распределением равна 0 либо с вероятностью 0 (если $\sigma > 0$), либо 1 (если $\sigma = 0,\ \mu = 0$).

□

Отметим, что последнее утверждение эквивалентно следующему факту.

Утверждение 7.7. *Пусть $\xi, \eta-$ 2 некоррелированные гауссовские случайные величины. Эти величины независимы тогда и только тогда, когда вектор (ξ, η) является гауссовским.*

7.2. Определение гауссовского процесса. Ковариационная функция

Определение 7.8. Случайный процесс X_t называется гауссовским, если все его конечномерные распределения являются гауссовскими векторами, т.е. для любого набора положительных чисел $t_1, ..., t_n$ вектор $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ является гауссовским.

С любом процессом (не обязательно гауссовским) связаны следующие функции:

- $m(t) := \mathbb{E}X_t$ - математическое ожидание;
- $K(s,t) := \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}X_s)(X_t - \mathbb{E}X_t)\right]$ - ковариационная функция.

Любая ковариационная функция обладает следующими свойствами:

- симметричность: $K(s,t) = K(t,s)$;
- неотрицательная определённость (positive semidefinite function): для любого набора моментов времени $t_1, .., t_n$ и для любых вещественных чисел $u_1, ..., u_n$ выполнено

$$\sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k K(t_j, t_k) \geq 0$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k K(t_j, t_k) &= \sum_{j,k=1}^{n} u_j u_k \operatorname{cov}(X_{t_j}, X_{t_k}) \\ &= \operatorname{cov}(\sum_j u_j X_{t_j}, \sum_k u_k X_{t_k}) \\ &= \mathbb{D}[\sum_j u_j X_{t_j}] \geq 0. \qquad (27)\end{aligned}$$

Более общее определение (верное и для комплекснозначных процессов $X_t : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$): для любого набора моментов времени $t_1, .., t_n$ и для любых вещественных чисел $z_1, ..., z_n$ выполнено

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \bar{z}_k K(t_j, t_k) \geq 0,$$

где $\bar{z}$– комплексно-сопряженное число к z. Доказательство этого свойства такое же, только нужно учесть, что

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mathbb{E}X_t)\overline{(X_s - \mathbb{E}X_s)}\right].$$

Отметим, что функция является положительно определённой тогда и только тогда, когда для для любого n определитель матрицы

$$\mathcal{K}_n = \begin{pmatrix} K(t_1, t_1) & ... & K(t_1, t_n) \\ ... & ... & ... \\ K(t_n, t_1) & ... & K(t_n, t_n) \end{pmatrix}$$

положителен (критерий Сильвестра).

- $K(t, t) = \mathbb{D}[X_t]$.

Теорема 7.9. *Для любых вещественнозначных функций $m(t)$ и $K(s, t)$, где $K(s, t)$ обладает свойствами симметричности и неотрицательной определённости, существует гауссовский случайный процесс X_t, такой что $\mathbb{E}X_t = m(t)$ и $\operatorname{cov}(X_s, X_t) = K(s, t)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\vec{t} = (t_1, .., t_n)$ и определим матрицу $\Sigma_{\vec{t}} \in \mathrm{Matr}(n, n) : (\Sigma_{\vec{t}})_{k,s} = K(t_k, t_s)$. Как уже было показано выше,

- матрица $\Sigma_{\vec{t}}$ является неотрицательно определённой, см. (27),
- существует матрица $A = \Sigma_{\vec{t}}^{1/2}$, т.е. такая матрица, что $A \cdot A = \Sigma_{\vec{t}}$, см. доказательство Утверждения 7.2.

Отметим, что случайный вектор $\vec{X}_{\vec{t}} = \Sigma_{\vec{t}}^{1/2}\vec{X}^{\circ}$, где $\vec{X}^{\circ}$-стандартный гауссовский вектор, имеет математическое ожидание $m(t)$ и ковариационную матрицу $\Sigma_{\vec{t}}$, т.к.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\vec{X}_{\vec{t}} &= \Sigma_{\vec{t}}^{1/2} \cdot \mathbb{E}\vec{X}^{\circ} = 0, \\ \operatorname{cov}(X_{t_k}, X_{t_s}) &= \left(\Sigma_{\vec{t}}^{1/2} \cdot \mathbb{E}\left[\vec{X}^{\circ}(\vec{X}^{\circ})^{\top}\right] \Sigma_{\vec{t}}^{1/2}\right)_{ks} = (\Sigma_{\vec{t}})_{ks}. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что найдётся случайный процесс, у которого все конечномерные распределения совпадают с распределением $\vec{X}_{\vec{t}}$. Доказательство этого факта не входит в данный курс. □

Пример 7.10. Теорему 7.9 можно использовать для построения примеров неотрицательных функций, которые не являются неотрицательно определёнными. Например, такой функцией является $K(t, s) = |t - s|$.

Действительно, если бы эта функция была неотрицательно определённой, то существовал бы гауссовский процесс X_t такой, что

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = |t - s|, \qquad \forall t, s \geq 0.$$

Тогда $\operatorname{Var} X_t = 0$ для любого $t \geq 0$, и поэтому X_t является для любого t почти наверное постоянной величиной. Но в этом случае

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[X_t X_s] - \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_s] = X_t X_s - X_t X_s = 0 \neq |t - s|,$$

и мы приходим к противоречию.

Пример 7.11. Покажем, что существует гауссовский процесс с математическим ожиданием $m(t) = 0$ и ковариационной функцией $K(s,t) = \min(s,t)$. Симметричность функции $K(s,t)$ очевидна. Для того, чтобы показать её неотрицательную определённость, введём функцию $f_s(x) = \mathbb{I}_{[0,s]}(x)$ и заметим, что

$$\min(s,t) = \int_0^\infty f_s(x) f_t(x) dx.$$

Следовательно, для любого набора моментов времени $t_1, .., t_n$ и для любых вещественных чисел $u_1, ..., u_n$ выполнено

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^n u_j u_k K(t_j, t_k) &= \sum_{j,k=1}^n u_j u_k \min(t_j, t_k) = \sum_{j,k=1}^n u_j u_k \int_0^\infty f_{t_j}(x) f_{t_k}(x) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^n u_j f_{t_j}(x)\right)\left(\sum_{k=1}^n u_k f_{t_k}(x)\right) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\sum_{j=1}^n u_j f_{t_j}(x)\right)^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Значит, функция $K(s,t)$ является неотрицательно определённой и условия Теоремы 7.9 выполнены.

8. Винеровский процесс

Литература по теме: [7],[9],[11].

8.1. Определение

В данном подразделе под мы определим понятие одномерного винеровского процесса. В рамках данного конспекта, термин “винеровский процесс” используется для одномерного процесса.

Определение 8.1. Винеровский процесс (броуновское движение) - это гауссовский процесс W_t с математическим ожиданием $m(t) = 0$ и ковариационной функцией $K(s,t) = \min(s,t)$.

Определение 8.2. Винеровский процесс (броуновское движение) - это случайный процесс W_t, такой что:

1. $W_0 = 0$ п.н.;
2. W_t имеет независимые приращения;

3. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, для любых $t > s \geq 0$.

Теорема 8.3. *Определения 8.1 и 8.2 эквивалентны.*

Доказательство. Опр. 8.1 $\Rightarrow$ Опр. 8.2.

1. Отметим, что $\mathbb{E}W_0 = m(0) = 0$ и $\mathbb{D}W_0 = K(0,0) = 0$. Следовательно, $W_0 = 0$ п.н.
2. Зафиксируем произвольный набор чисел $0 \leq a < b < c < d$ и рассмотрим 2 приращения $W_d - W_c$ и $W_b - W_a$. Заметим, что эти приращения некоррелированы,
$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left((W_d - W_c)(W_b - W_a)\right) \\
&\quad = \operatorname{cov}(W_d, W_b) - \operatorname{cov}(W_d, W_a) - \operatorname{cov}(W_c, W_b) + \operatorname{cov}(W_c, W_a) \\
&\qquad = \min(d,b) - \min(d,a) - \min(c,b) + \min(c,a) \\
&\qquad\qquad = b - a - b + a = 0.
\end{aligned}$$
Кроме того, вектор $(W_d - W_c, W_b - W_a)$ является гауссовским, т.к. любая комбинация компонент этого вектора $u_1(W_d - W_c) + u_2(W_b - W_a)$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ является комбинацией значений гауссовского процесса W в точках a, b, c, d и потому имеет нормальное распределение. Значит, по утверждению 7.6(i), приращения $W_d - W_c$ и $W_b - W_a$ являются независимыми. Аналогично доказывается, что любого набора моментов времени $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, приращения
$$W_{t_2} - W_{t_1},\ ...,\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$
являются независимыми.
3. Из того, что процесс W_t является гауссовским, непосредственно следует, что приращение $W_t - W_s$ имеет нормальное распределение как комбинация значений гауссовского процесса W_t в точках t, s с коэффициентами 1 и -1. Математическое ожидание и дисперсия этого приращения вычисляются следующим образом:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_t - W_s] &= \mathbb{E}[W_t] - \mathbb{E}[W_s] = m(t) - m(s) = 0, \\
\mathbb{D}[W_t - W_s] &= \operatorname{cov}(W_t - W_s, W_t - W_s) \\
&= K(t,t) - K(t,s) - K(s,t) + K(s,s) \\
&= t - s - s + s = t - s.
\end{aligned}$$

Опр. 8.2 $\Rightarrow$ Опр. 8.1. Покажем, что процесс W_t является гауссовским. Зафиксируем произвольные моменты времени $t_1, ..., t_n$ и произвольные числа $u_1, ..., u_n$ и рассмотрим линейную комбинацию значений процесса W_t:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k W_{t_k} &= u_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}) + (u_n + u_{n-1})W_{t_{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} u_k W_{t_k} \\
&= ... = \sum_{k=1}^{n} d_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),
\end{aligned}$$

где $t_0 = 0$, и $d_1, d_2, ...d_n$ - некоторые числа. Таким образом, любая линейная комбинация значений процесса W_t является линейной комбинаций приращений $W_{t_k} - W_{t_{k-1}}, k = 1..n$, которые являются независимыми и нормально распределёнными. Следовательно, любая линейная комбинация значений процесса W_t имеет нормальное распределение, и поэтому процесс W_t является гауссовским.

Из п.1 и 3 определения 8.2 следует, что $W_t \sim \mathcal{N}(0, t),\ \forall t$, и, следовательно, $m(t) = \mathbb{E}W_t = 0$. Кроме того, для любых $t > s$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(W_t, W_s) &= \mathbb{E}\left[(W_t - \mathbb{E}W_t)(W_s - \mathbb{E}W_s)\right] \\
&= \mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}\left[W_s(W_t - W_s)\right] + \mathbb{E}W_s^2 \\
&= \mathbb{E}\left[W_s\right] \cdot \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] + \mathbb{E}W_s^2 = s = \min(t, s).
\end{aligned}$$

□

8.2. Непрерывность траекторий

Определение 8.4. Говорят, что процесс X_t стохастически эквивалентен процессу Y_t, (X_t - модификация Y_t), если

$$\mathbb{P}\left\{X_t = Y_t\right\} = 1, \qquad \forall t.$$

Следует отметить, что траектории случайных процессов могут существенно отличаться. Например, рассмотрим процесс $\xi_t = 0$ и процесс $\eta_t = \mathbb{I}\left\{t \neq \tau\right\}$, где τ - непрерывная случайная величина. Процесс ξ_t и η_t стохастически эквивалентны, но все траектории ξ_t являются непрерывными (тождественно равными 0), а все траектории η_t разрывны.

Теорема 8.5 (теорема Колмогорова о непрерывных траекториях)**.** *Пусть имеется процесс X_t, $t \in [a, b]$, и существуют константы $C, \alpha, \beta > 0$ такие, что для любых $s, t \in [a, b]$ выполнено:*

$$\boxed{\mathbb{E}\left|X_t - X_s\right|^{\alpha} \leq C\left|t - s\right|^{1+\beta}.} \tag{28}$$

Тогда процесс X_t имеет непрерывную модификацию, т.е. существует процесс Y_t, у которого все траектории непрерывны и который стохастически эквивалентен процессу X_t.

Пример 8.6. Броуновское движение обладает непрерывной модификацией. Действительно, условие (28) выполнено с $\alpha = 4, \beta = 1, C = 3$:

$$\mathbb{E}\left[|W_t - W_s|^4\right] = \mathbb{E}\left[\xi^4\right] \cdot (t - s)^2 = 3(t - s)^2,$$

где ξ - стандартная нормальная случайная величина. Зачастую в определение Броуновского движения (как 8.1, так и 8.2) добавляется условие, что процесс обладает непрерывными траекториями.

8.3. Вариация и квадратическая вариация

Утверждение 8.7. *(i) Квадратичная вариация Броуновского движения на отрезке* $[0,t]$ *равна* t*, то есть*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)^2=t,$$

где разбиение отрезка $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$ *измельчается с ростом* n *так, что* $\max(t_i-t_{i-1})\to 0$*, а сходимость понимается в смысле среднего квадратического.*

(ii) Броуновское движение - процесс неограниченной вариации, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right|=\infty,$$

где $\max(t_i-t_{i-1})\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. (i) Обозначим $\Delta W_i:=W_{t_i}-W_{t_{i-1}}$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2-t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2-\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\right)^2\right]\\ &= \mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left[\Delta W_i^2\right],\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из независимости $W_i, i=1..n$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta W_i^2-t\right)^2\right] &= \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}\left[\Delta W_i^4\right]-\left(\mathbb{E}\left[\Delta W_i^2\right]\right)^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(3(\Delta t_i)^2-(\Delta t_i)^2\right)=2\sum_{i=1}^{n}(\Delta t_i)^2\\ &\le 2\max(\Delta t_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i\to 0,\end{aligned}$$

и утверждение доказано.

(ii) Так как последовательность $\xi_n:=\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_i)^2$ сходится в среднем квадратическом к числу t (следовательно, и по вероятности), то по теореме Рисса, найдётся подпоследовательность ξ_{n_k}, сходящаяся к t почти наверное. Кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n_k}(\Delta W_i)^2\le\max_i|\Delta W_i|\cdot\sum_{i=1}^{n_k}|\Delta W_i|\,.$$

При устремлении диаметра разбиения к нулю, $\max_i |\Delta W_i|$ также стремится к нулю всилу непрерывности Броуновского движения. Осталось заметить, что если бы последовательность $\sum_{i=1}^{n} |\Delta W_i|$ была бы ограниченной, то и последовательность $\sum_{i=1}^{n_k} |\Delta W_i|$ являлась бы ограниченной, и, следовательно, $\sum_{i=1}^{n_k} (\Delta W_i)^2 \to 0$ при $k \to \infty$. Полученное противоречие показывает, что Броуновское движение имеет неограниченную вариацию.

□

8.4. Принцип отражения

Фильтрация - это семейство σ - алгебр $\mathscr{F}_t$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, такое, что

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}, \qquad \forall s \leq t.$$

С любым случайным процессом X_t связана фильтрация $\mathscr{F}_t$, порождённая случайными величинами $\big\{X_s,\ s \in [0,t]\big\}$.

Определение 8.8. Случайная величина τ называется моментом остановки, если для любого момента времени t, событие $\big\{\tau \leq t\big\}$ включено в сигму-алгебру $\mathscr{F}_t$.

Напомним, что дискретный момент остановки был введён в разделе 2.3.

Классический пример момента остановки - это момент первого достижения фиксированного уровня $a \in \mathbb{R}$,

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : \ \ W_t = a\}. \tag{29}$$

Теорема 8.9. *Пусть W_t - Броуновское движение, $\tau-$ момент остановки, причём $\tau < \infty$ п.н. Тогда выполнены следующие 2 свойства.*

(i) Строгое Марковское свойство (strong Markov property): процесс

$$W_{\tau+t} - W_\tau, \qquad t \geq 0$$

является Броуновским движением, независимым от сигма-алгебры $\{A \cap \{\tau < t\},\ A \in \mathscr{F}_t\}$;

(ii) Принцип отражения: процесс, полученный отражением Броуновского движения в момент времени τ относительно горизонтальной прямой $y = W_\tau$,

$$W_t^* = W_t \cdot \mathbb{I}\{t \leq \tau\} + \big(2W_\tau - W_t\big) \cdot \mathbb{I}\{t > \tau\},$$

является Броуновским движением.

Доказательство. Доказательство дано в главе 2 книги [7]. □

Следствие 8.10. *Для любого $t \geq 0$ и для любого $a > 0$,*

$$\mathbb{P}\big\{\max_{0 \leq s \leq t} W_s > a\big\} = 2\mathbb{P}\big\{W_t > a\big\}.$$

Доказательство.

$$\left\{\max_{0\le s\le t} W_s > a\right\} = \left\{\max_{0\le s\le t} W_s > a,\ W_t > a\right\} \sqcup \left\{\max_{0\le s\le t} W_s > a,\ W_t \le a\right\}.$$

Первое событие есть

$$\left\{\max_{0\le s\le t} W_s > a,\ W_t > a\right\} = \left\{W_t > a\right\}. \tag{30}$$

Для анализа второго события вспомним, что (29) является моментом остановки. Обозначим через W_t^* процесс, полученный отражением в момент времени τ_a,

$$\left\{\max_{0\le s\le t} W_s > a,\ W_t \le a\right\} = \left\{W_t^* \ge a\right\}. \tag{31}$$

Поскольку W_t^*– Броуновское движение, мы получаем что вероятность этого события также равна $\left\{W_t > a\right\}$. Для завершения доказательства осталось заметить, что события (30) и (31) не пересекаются. $\square$

Часть III
Свойства случайных процессов

9. Стационарность

Литература по теме: [5], [8], [11].

Определение 9.1. Случайный процесс X_t называется стационарным (stationary, стационарным в узком смысле), если все его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвигов, т.е. для любых наборов моментов времени $t_1, .., t_n$, любых вещественных $x_1, ..., x_n$ и любого $h > 0$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left\{X_{t_1} \leq x_1, ..., X_{t_n} \leq x_n\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{t_1+h} \leq x_1, ..., X_{t_n+h} \leq x_n\right\}.}$$

Определение 9.2. Случайный процесс X_t называется стационарным в широком смысле (wide sense stationary, weakly stationary, covariance stationary, second-order stationary), если $m(t)$ является постоянной величиной (не зависящей от t), и кроме того, для любых $h > 0,\ s, t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\boxed{K(t+h, s+h) = K(t, s).} \tag{32}$$

Другими словами, процесс с постоянным математическим ожиданием является стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда существует функция $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $K(t, s) = \gamma(t-s)$ для любых t, s. Функция $\gamma(\cdot)$ называется автоковариационной функцией (autocovariance function) и обладает следующими свойствами.

Утверждение 9.3. *Пусть $\gamma-$ автоковариационная функция некоторого стационарного в широком смысле случайного процесса. Тогда*

(i) $\gamma(0) = \operatorname{Var} X_t \geq 0$*, и, кроме того,* $|\gamma(u)| \leq \gamma(0)$.
(ii) γ *является чётной функцией.*

Доказательство. (i) Для любого t, $\gamma(0) = K(t, t) = \gamma_0 = \operatorname{Var}(X_t) \geq 0$. Вторая часть утверждения следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$|\gamma(u)| = |\operatorname{cov}(X_{t+u}, X_t)| \leq \sqrt{\operatorname{Var} X_{t+u}}\sqrt{\operatorname{Var} X_t} = \sqrt{\gamma(0)}\sqrt{\gamma(0)} = \gamma(0),$$

где $t-$ произвольный момент времени.

(ii) Для любого $u \in \mathbb{R}$

$$\gamma(u) = \operatorname{cov}(X_{t+u}, X_t) = \operatorname{cov}(X_t, X_{t+u}) = \gamma(-u),$$

где $t-$ произвольный момент времени.

□

Отметим, что

(i) если процесс стационарен в узком смысле и у него в любой момент времени t конечен второй момент (т.е. существуют мат. ожидание и дисперсия), то он является стационарным и в широком смысле;
(ii) для гауссовских процессов стационарность в узком и в широком смыслах есть одно и то же.

Приведём несколько примеров.

Пример 9.4. Процесс белого шума (white noise process) $X_t,\ t = 0, 1, 2, ...$ (иногда рассматриваются и отрицательные целочисленные моменты времени, т.е. $t = 0, \pm 1, \pm 2...$) - последовательность некоррелированных случайных величин:

$$\mathbb{E}X_t = \mu, \quad \operatorname{Var} X_t = \sigma^2, \quad K(t, s) = 0 \ \forall t \neq s,$$

причём обычно $\mu = 0$. Процесс обозначается как $WN(0, \sigma^2)$.

Таким образом, мат. ожидание этого процесса является константой, а ковариационная функция равна

$$K(t, s) = \sigma^2 \mathbb{I}\left\{t = s\right\},$$

и поэтому процесс является стационарным в широком смысле с автоковариационной функцией

$$\gamma(x) = \sigma^2 \mathbb{I}\left\{x = 0\right\}.$$

В общем случае, $WN(0, \sigma^2)$ нестационарен в узком смысле. Некоторые частные случаи, когда процесс стационарен в узком смысле:

1. $X_1, X_2, ...$ - последовательность i.i.d. случайных величин (X_t - i.i.d. white noise).
2. X_t - гауссовский процесс.

Приведём примеры ситуаций, в которых процесс белого шума не является стационарным.

1. Пусть $\xi_t, t = 0, 1, 2, ...$ - последовательность i.i.d. стандартных нормальных случайных величин. Тогда последовательность

$$X_t = \begin{cases} \xi_t, & t \neq 0, \\ \left(\xi_t^2 - 1\right)/\sqrt{2}, & t = 0, \end{cases}$$

является белым шумом $WN(0, 1)$. Однако, последовательность не является стационарной в узком (и в широком) смысле, поскольку X_0 и X_0 имеют разные распределения.
2. Много примеров можно построить, исходя из разложения Вольда (см. главу 2.6 в [2]):

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j Y_j, \tag{33}$$

где $a_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 < \infty$, и Y_t - $WN(0,\sigma^2)$. Действительно, данный процесс является стационарным в широком смысле, но может быть нестационарным в узком.

Пример 9.5. Случайное блуждание (см. пример 6.2). В этом случае $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$, и поэтому

$$\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}\xi_1 = n(2p-1).$$

Поэтому если $p \neq 1/2$, то процесс не стационарен в широком (и, значит, и в узком) смысле. Однако если $p = 1/2$, то процесс тоже не стационарен, поскольку для любого $m < n$

$$\begin{aligned} K(n,m) &= \operatorname{cov}(S_m + \xi_{m+1} + ... + \xi_n,\ S_m) \\ &= \operatorname{cov}(S_m, S_m) + \operatorname{cov}(\xi_{m+1} + ... + \xi_n,\ S_m) \\ &= \operatorname{Var}(S_m) = m \operatorname{Var}(\xi_1) = m, \end{aligned}$$

и поэтому

$$K(n,m) = \min(n,m),$$

свойство (32) не выполнено.

Более простой способ доказательства, что этот процесс не является стационарным - обратить внимание на непостоянство дисперсии, $\operatorname{Var}(S_n) = n \operatorname{Var}(\xi_1)$. Действительно, для стационарного в широком смысле процесса дисперсия не зависит от момента времени и равна $\gamma(0)$.

Пример 9.6. Броуновское движение W_t также не стационарно ни в узком, ни в широком смыслах. Этот факт можно показать например так: если бы W_t был стационарным процессом, то существовала бы автоковариационная функция γ, и дисперсия W_t не зависела бы от t :

$$\operatorname{Var} W_t = \operatorname{cov}(W_t, W_t) = \gamma(0).$$

Пример 9.7. Процесс скользящего среднего $MA(q)$ (MA - moving average):

$$X_t = Y_t + a_1 Y_{t-1} + ... + a_q Y_{t-q}, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

где Y_t - $WN(0,\sigma^2)$, $(a_1, ..., a_q) \in \mathbb{R}^q$. Этот процесс является частным случаем разложения Вольда 33. Математическое ожидание X_t равно 0, а ковариационная функция равна

$$\begin{aligned} K(t,s) &= \operatorname{cov}\left(\sum_{j=0}^{q} a_j Y_{t-j}, \sum_{k=0}^{q} a_k Y_{t-k}\right) \\ &= \sum_{j,k=0}^{q} a_j a_k \sigma^2 \mathbb{I}\Big\{t - s = j - k\Big\}, \end{aligned}$$

где $a_0 = 1$. Поэтому процесс является стационарным в широком смысле. Например, автоковариационная функция процесса $MA(1)$ равна

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ a_1\sigma^2, & |x| = 1, \\ (a_1^2+1)\sigma^2, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 9.8. Авторегрессионная модель $AR(p)$:

$$X_t = b_1 X_{t-1} + ... + b_p X_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

где ε_t - $WN(0, \sigma^2)$, $\operatorname{cov}(\varepsilon_t, X_s) = 0$ при $t > s$, и $(b_1, ..., b_p) \in \mathbb{R}^p$. Решение этого уравнения не единственное. Например, если $p = 1$, одним из решений уравнения

$$X_t = bX_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

является процесс

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b^j \varepsilon_{t-j}.$$

Аналогично Примеру 9.7, математическое ожидание равно 0, а ковариационная функция есть

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b^{j+k}\sigma^2 \mathbb{I}\Big\{t - s = j - k\Big\}.$$

Ряд в правой части сходится для любого значения $t - s$ тогда и только тогда, когда $|b| < 1$. Поэтому при таком ограничении на параметр b процесс является стационарным в широком смысле.

Более общий результат: процесс $AR(p)$ является стационарным в широком смысле тогда и только тогда, когда все комплексные корни уравнения

$$z^p - \sum_{i=1}^{p} b_i z^{p-i} = 0$$

лежат внутри единичного круга, то есть их модули меньше 1.

10. Эргодичность

Литература по теме: [8]

Понятие эргодичности мотивировано законом больших чисел. Рассмотрим процесс X_t, наблюдаемый в дискретные моменты времени $t = 1, 2, ..., T$ и зададимся вопросом, сходится ли процесс

$$M_T := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t$$

при устремлении горизонта времени T к бесконечности.

Определение 10.1. Процесс X_t с дискретным временем $t = 1, 2, ...$ называется эргодическим, если

$$\boxed{M_T \xrightarrow{\mathbb{P}} c, \qquad \text{при} \quad T \to \infty,}$$

где c - некоторая константа.

Отметим, что в данном случае сходимость по вероятности эквивалентна сходимости по распределению (см. Приложение G).

Пример 10.2. Разберём несколько простых примеров.

1. $X_t = \xi, \ t = 1, 2, ...,$ где ξ - стандартная нормальная величина. Этот процесс является стационарным, $m(t) = 0, \ K(s,t) \equiv 1$, но не является эргодическим, т.к. $M_T = \xi \not\to c$.
2. $X_t = \varepsilon_t + a\cos(\pi t/6), \ t = 1, 2, ...$ где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$ - последовательность i.i.d. стандартных нормальных с.в., $\alpha \neq 0$ - некоторая константа. В данной модели t обычно ассоциируется с месяцами, а сама модель используется для описания сезонных колебаний (в этой связи отметим, что случайный процесс как функция от t имеет период 12).
   Отметим, что
   $$X_t \sim \mathcal{N}(a\cos(\pi t/6), 1), \quad t = 1, 2, ...,$$
   и эти случайные величины являются независимыми. Отсюда следует, что процесс не является стационарным, т.к. функция среднего $m(t) = \alpha\cos(\pi t/6)$ не равна константе. Вместе с этим, процесс является эргодическим, т.к.
   $$M_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{a}{T}\sum_{t=1}^{T}\cos(\pi t/6), \ \frac{1}{T}\right), \quad T = 1, 2, ...,$$
   и математическое ожидание $|\mathbb{E}[M_T]| \leq 3a/T$, как и дисперсия $\mathbb{D}[M_T] = 1/T$, стремятся к нулю при $T \to \infty$.

В следующей теореме сформулирован критерий, при котором $\mathbb{D}[M_T]$ стремится к нулю при $T \to \infty$. Сразу после теоремы даны пояснения, как этот критерий может быть использован для доказательства эргодичности случайного процесса.

Теорема 10.3. *Пусть X_t - случайный процесс с дискретным временем, причём ковариационная функция $K(s,t)$ является ограниченной, т.е.*

$$\exists \alpha : \qquad |K(s,t)| \leq \alpha, \qquad \forall s, t. \tag{34}$$

Обозначим ковариацию между последним наблюдением и средним значением по предыдущим наблюдениям через $C(T)$,

$$C(T) := \operatorname{cov}(X_T, M_T).$$

Тогда

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \mathbb{D}\left[M_T\right] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{T\to\infty} C(T) = 0.}$$

Замечание 10.4. *Отметим, что условие (34) эквивалентно условию*

$$\mathbb{D}\left[X_t\right] \le \alpha, \qquad \forall t. \tag{35}$$

Действительно, из (34) очевидно следует (35) (подстановка $s = t$). Наоборот, из (35) следует (34) из неравенства Коши-Буняковского,

$$|K(s,t)| \le \sqrt{\mathbb{D}X_s} \cdot \sqrt{\mathbb{D}X_t} \le \alpha \qquad \forall s, t.$$

Следствие 10.5. *(i) Стационарный в широком смысле процесс является эргодическим, если*

$$\boxed{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{r=0}^{T-1} \gamma(r) = 0,} \tag{36}$$

где $\gamma(r)$ - такая функция, что $K(t,s) = \gamma(t-s)$ для любых t, s.

(ii) Свойство (36) выполнено, если $\boxed{\gamma(r) \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to \infty}$.

Доказательство следствия. (i) Отметим, что для любого случайного процесса X_t,

$$\begin{aligned} C(T) &= \operatorname{cov}(X_T, M_T) = \operatorname{cov}\left(X_T, \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \operatorname{cov}\left(X_T, X_t\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} K(T,t). \end{aligned}$$

Для стационарных процессов последнее выражение может быть переписано следующим образом:

$$C(T) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \gamma(T-t) = \frac{1}{T}\sum_{r=0}^{T-1} \gamma(r).$$

По теореме 10.3, из того, что $C(T) \to 0$ следует, что $\mathbb{D}M_T \to 0$ при $T \to \infty$. Отметим также, что сходимость $\mathbb{D}M_T \to 0$ есть в точности сходимость $M_T \to \mathbb{E}[M_T]$ в среднем квадратическом. Так как для стационарных процессов $m(t) = c$ (математическое ожидание есть некоторая константа), то $\mathbb{E}[M_T] = c$, и $M_T \to c$ при $T \to \infty$ в среднем квадратическом. Осталось заметить, что из сходимости в среднем квадратическом следует сходимость по вероятности, и поэтому процесс является эргодическим.

(ii) Напомним теорему Штольца из мат.анализа: если a_n, b_n - две последовательности, причём b_n - положительная неограниченная возрастающая последовательность, и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =: q.$$

Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n)$, и он тоже равен q.
Воспользуемся теперь теоремой Штольца с $a_n = \sum_{r=0}^{n-1}\gamma(r)$ и $b_n = n$. Все условия теоремы выполнены, и кроме того

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\gamma(n) = 0,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\gamma(r) = 0.$$

□

Пример 10.6. Применим следствие 10.5 к процессу

$$X_t = N_{t+p} - N_t,$$

где N_t - однородный считающий процесс Пуассона с интенсивностью λ, а $p > 0$ - фиксированное число. Данный процесс является стационарным в широком смысле, т.к. $m(t) = \lambda p$ и

$$K(s,t) = \begin{cases} \lambda\,(p - |t-s|) & , \quad |t-s| \le p \\ 0 & , \quad |t-s| > p. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\gamma(r) = \begin{cases} \lambda\,(p - |r|) & , \quad |r| \le p \\ 0 & , \quad |r| > p. \end{cases}$$

Отметим, что $\gamma(r) \to 0$ при $r \to \infty$, и поэтому процесс X_t является эргодическим.

Доказательство теоремы 10.3. (i) $[\lim_{T\to\infty}\mathbb{D}M_T = 0] \Longrightarrow [\lim_{T\to\infty} C(T) = 0.]$.

Это утверждение напрямую следует из неравенства Коши-Буняковского,

$$|C(T)|^2 = |\mathrm{cov}(X_T, M_T)|^2 \le \mathbb{D}X_T \cdot \mathbb{D}M_T \le \alpha \cdot \mathbb{D}M_T,$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались замечанием 10.4.

(ii) $[\lim_{T\to\infty} C(T) = 0] \Longrightarrow [\lim_{T\to\infty}\mathbb{D}M_T = 0]$

Докажем сначала такую формулу:

$$\mathbb{D}\,[M_T] = -\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\,[X_t] + \frac{2}{T^2}\sum_{t=1}^{T} tC(t). \tag{37}$$

Действительно,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}\left[M_T\right] &= \mathbb{D}\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right] = \frac{1}{T^2}\mathbb{D}\left[\sum_{t=1}^{T} X_t\right] \\
&= \frac{1}{T^2}\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\sum_{t>s}\operatorname{cov}(X_t, X_s)\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\left(-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + \sum_{t>s}\operatorname{cov}(X_t, X_s)\right)\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\left(-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\sum_{t\geq s}\operatorname{cov}(X_t, X_s)\right) \\
&= \frac{1}{T^2}\left(-\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + 2\sum_{t=1}^{T} t\operatorname{cov}\left(X_t, \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t} X_s\right)\right) \\
&= -\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] + \frac{2}{T^2}\sum_{t=1}^{T} tC(t),
\end{aligned}
$$

и формула (37) доказана. Осталось заметить, что оба слагаемых стремятся к нулю при $T \to \infty$:

- первое слагаемое:

$$
\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{D}\left[X_t\right] \leq \frac{1}{T}\alpha \to 0, \qquad \text{при} \quad T \to \infty,
$$

  т.к. дисперсия X_t ограничена числом α;
- второе слагаемое:

$$
\frac{2}{T^2}\left|\sum_{t=1}^{T} tC(t)\right| \leq \frac{2}{T^2}\sum_{t=1}^{T} t\left|C(t)\right| \leq \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|C(t)\right| \to 0,
$$

  так как $C(t) \to 0$ и доказательство следствия 10.5 (ii) может быть применено и к данной ситуации.

$\square$

11. Стохастическое интегрирование

Литература по теме: [1], [6], [8]

11.1. Интегралы вида $\int X_t dt$

В данном разделе мы определим интеграл $\int_0^T X_t dt$, который естественным образом возникает при обобщении понятия среднего значения процесса за интервал $[0, T]$, определённого в предыдущем разделе как $T^{-1}\sum_{t=1}^T X_t$, на непрерывный случай:

$$M_T = \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt.$$

Отметим также, что этот объект уже возникал в разделе 2.6.

Определение 11.1. Для любого отрезка $[a, b]$, интеграл процесса X_t по этому отрезку определяется следующим образом:

$$\int_a^b X_t dt = \lim_{\substack{\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0 \\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b}} \sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}} \left(t_k - t_{k-1}\right),$$

где предел понимается в среднем квадратическом, т.е.

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}} \left(t_k - t_{k-1}\right) - \int_a^b X_t dt\right)^2\right] \xrightarrow[\substack{\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0 \\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b}]{} 0.$$

Утверждение 11.2. *Пусть X_t - процесс с непрерывным временем и с конечным вторым моментом, причём функция $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ является непрерывной функцией от t, а $K(t, s) = \operatorname{cov}(X_t, X_s)$ является непрерывной функцией от t, s. Тогда $\int_a^b X_t dt$ существует.*

Свойство непрерывности ковариационной функции тесно связано с непрерывностью самого процесса в среднем квадратическом.

Утверждение 11.3. *Пусть X_t - случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией $K(t, s)$.*

(i) Если $K(t, s)$ непрерывна в точке (t_0, t_0), то процесс X_t непрерывен в точке t_0 в смысле среднего квадратического, то есть

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_{t_0}\right)^2\right] \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

(ii) Если процесс X_t непрерывен в точках t_0 и s_0 в смысле среднего квадратического, то ковариационная функция $K(t, s)$ непрерывна в точке (t_0, s_0).

Доказательство. Действительно, пункт (i) следует из представления

$$\mathbb{E}\left[\left(X_t - X_{t_0}\right)^2\right] = K(t, t) - 2K(t, t_0) + K(t_0, t_0) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to t_0.$$

Пункт (ii) является следствием неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} K(t, s) - K(t_0, s_0) &= K(t, s) - K(t_0, s) + K(t_0, s) - K(t_0, s_0) \\ &= \mathbb{E}\left[\left(X_t - X_{t_0}\right) X_s\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_0}\left(X_s - X_{s_0}\right)\right] \to 0, \\ &\qquad \text{при} \quad t \to t_0, s \to s_0, \end{aligned}$$

так как $|\mathbb{E}\left[(X_t - X_{t_0})\, X_s\right]| \leq \sqrt{\mathbb{D}\,(X_t - X_{t_0})}\sqrt{\mathbb{D}\,[X_s]} \to 0$. □

Из предыдущего утверждения вытекает следующее любопытное следствие.

Следствие 11.4. *Ковариационная функция $K(t,s)$ непрерывна во всех точках (t,s), где $t,s \geq 0$, тогда и только тогда, когда эта функция непрерывна во всех точках вида $(t,t), t \geq 0$ (как говорят в таких случаях, ковариационная функция непрерывна на диагонали).*

Это следствие особенно эффективно при рассмотрении стационарных в широком смысле процессов, поскольку проверка непрерывности ковариационной функции сводится к проверке непрерывности автоковариационной функции в нуле. Так, например, процесс белого шума (см. пример 9.4) имеет автоковариационную функцию, разрывную в нуле, и поэтому для него утверждение 9.4 не применимо.

Свойства стохастического интеграла:

1. знаки математического ожидания и интеграла можно менять местами:

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b X_t dt\right] = \int_a^b \mathbb{E}\,[X_t]\,dt;$$

2. для вычисления второго момента можно использовать следующую формулу:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dt\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dt\right)\left(\int_a^b X_s ds\right)\right] \\ &= \int_a^b\int_a^b \mathbb{E}\,[X_t X_s]\,dsdt;\end{aligned}$$

3. из последних двух пунктов следует, что

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\left[\int_a^b X_t dt\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b X_t dt\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\int_a^b X_t dt\right]\right)^2 \\ &= \int_a^b\int_a^b K(t,s)dsdt = 2\int_a^b\int_a^t K(t,s)dsdt,\end{aligned}$$

   где в последнем равенстве используется свойство симметричности ковариационной функции;

4. для любых отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$ справедливо равенство

$$\operatorname{cov}\left(\int_a^b X_t dt, \int_c^d X_t dt\right) = \int_a^b\int_c^d \operatorname{cov}\,(X_t, X_s)\,dsdt.$$

Пример 11.5. Для примера вычислим математическое ожидание, дисперсию и ковариацию случайного процесса

$$X_T = \int_0^T W_t dt,$$

называемого интегрированным винеровским процессом (integrated Wiener process). По свойству 1,

$$\mathbb{E}\left[X_T\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[W_t\ \right] dt = 0.$$

Для вычисления дисперсии воспользуемся последним равенством из свойства 3:

$$\mathbb{D}\left[X_T\right] = 2\int_0^T \int_0^t \min(t,s) ds dt = 2\int_0^T \int_0^t s\ ds dt = \int_0^T t^2\ dt = \frac{1}{3}T^3.$$

Наконец, ковариационная функция процесса X_T может быть вычислена при помощи свойства 4 стохастического интеграла. Для $T_1 < T_2$ выполнено:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(X_{T_1}, X_{T_2}\right) &= \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \operatorname{cov}\left(W_t, W_s\right) ds dt \\
&= \int_0^{T_1} \left(\int_0^t \operatorname{cov}\left(W_t, W_s\right) ds + \int_t^{T_2} \operatorname{cov}\left(W_t, W_s\right) ds \right) dt \\
&= \int_0^{T_1} \left(\int_0^t s\ ds + \int_t^{T_2} t\ ds \right) dt \\
&= \int_0^{T_1} \left(\frac{1}{2}t^2 + t(T_2 - t) \right) dt = -\frac{1}{6}T_1^3 + \frac{1}{2}T_2 T_1^2.
\end{aligned}$$

Отметим, что такое же выражение для ковариационной функции можно получить исходя из несколько других соображений. Действительно, представим X_{T_2} в виде

$$X_{T_2} = X_{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \left(W_t - W_{T_1}\right) dt + \left(T_2 - T_1\right) W_{T_1}$$

и распишем ковариационную функцию процесса X_T следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}\left(X_{T_1}, X_{T_2}\right) = \mathbb{E}\left[X_{T_1} X_{T_2}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[X_{T_1}^2\right] + \int_0^{T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}\left[\left(W_t - W_{T_1}\right) W_s\right] dt ds + \left(T_2 - T_1\right) \mathbb{E}\left[X_{T_1} W_{T_1}\right] \\
&\qquad\qquad = \mathbb{E}\left[X_{T_1}^2\right] + \left(T_2 - T_1\right) \mathbb{E}\left[X_{T_1} W_{T_1}\right],
\end{aligned}$$

где последнее равенство следует из наблюдения, что приращения $\{W_t - W_{T_1},\ t > T_1\}$ и $\{W_s - W_0, s < T_1\}$ независимы. Осталось заметить, что

$$\mathbb{E}\left[X_{T_1} W_{T_1}\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{T_1} W_t dt \cdot W_{T_1}\right] = \int_0^{T_1} \mathbb{E}\left[W_t \cdot W_{T_1}\right] dt = \frac{1}{2}T_1^2.$$

11.2. Интегралы вида $\int f(t)dW_t$

В данной секции мы определим интегралы вида

$$I(f) := \int_a^b f(t)dW_t,$$

где $f(t)-$ детерминированная функция из пространства $L^2([a,b])$. Интегралы такого типа называются винеровскими интегралами (Wiener integrals). Определение состоит из двух этапов.

Этап 1. Для ступенчатой функции $f(t)$ (step function), то есть для функции вида

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mathbb{I}\left\{t \in [t_{i-1}, t_i)\right\},$$

где $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = b$ и $\alpha_1, ..., \alpha_m$ - фиксированные числа, определим интеграл $I(f)$ следующим образом:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right). \tag{38}$$

Пример 11.6. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ 10, & t \in [1,2), \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

Для такой функции интеграл $\int_0^T f(t)dW_t$ равен

$$\int_0^T f(t)dW_t = \begin{cases} W_T, & T \leq 1, \\ W_1 + 10\left(W_T - W_1\right), & T \in [1,2), \\ W_1 + 10\left(W_2 - W_1\right), & T \geq 2. \end{cases}$$

Утверждение 11.7. *Для любой ступенчатой функции f, стохастический интеграл $I(f)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\int_a^b f^2(t)dt$.*

Доказательство. Из определения (38) непосредственно следует, что $I(f)$ является суммой независимых нормально распределенных случайных величин. Поэтому $I(f)$ имеет нормальное распределение со средним значением

$$\mathbb{E}[I(f)] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \mathbb{E}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right] = 0$$

и дисперсией

$$\mathbb{D}[I(f)] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \cdot \mathbb{D}\left[W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right] = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \cdot (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f^2(t)dt.$$

□

Этап 2. Теперь определим интеграл $I(f)$ для любой функции f из пространства $L^2([a,b])$. Выберем последовательность ступенчатых функций $f(t)$ таких, что $f_n \to f$ в пространстве $L^2([a,b])$, то есть

$$\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 \, dt \to 0, \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$I(f) = \int_a^b f(t) dW_t := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) dW_t = \lim_{n\to\infty} I(f_n),$$

где предел понимается в смысле среднего квадратического, то есть

$$\mathbb{E}\left[(I(f_n) - I(f))^2\right] \to 0.$$

Следующее утверждение показывает, что данное определение не зависит от выбора последовательности фукнций f_n и поэтому является корректным.

Утверждение 11.8. *Для любых двух последовательностей функций f_n и $\tilde{f}_n$ таких, что $f_n \to f$ и $\tilde{f}_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве $L^2([a,b])$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) dW_t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \tilde{f}_n(t) dW_t,$$

где пределы понимаются в смысле среднего квадратического.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\mathbb{E}\left[\left(I(f_n) - I(\tilde{f}_n)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(I(f_n - \tilde{f}_n)\right)^2\right] = \int_a^b \left(f_n(t) - \tilde{f}_n(t)\right)^2 dt,$$

где последнее равенство следует из утверждения 11.7 и того факта, что разница двух ступенчатых функций сама является ступенчатой функцией. Осталось показать, что последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(f_n(t) - \tilde{f}_n(t)\right)^2 dt &= \int_a^b \left(\left(f_n(t) - f(t)\right) - \left(\tilde{f}_n(t) - f(t)\right)\right)^2 dt \\ &\le 2\int_a^b (f_n(t) - f(t))^2 \, dt + 2\int_a^b \left(\tilde{f}_n(t) - f(t)\right)^2 dt \to 0, \end{aligned}$$

где мы воспользовались тривиальным неравенством $(a-b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$. $\square$

Утверждение 11.9. *Для любой функции f из пространства $L^2([a,b])$, стохастический интеграл $I(f)$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\int_a^b f^2(t)dt$.*

Доказательство. Для ступенчатых функций f это утверждение уже было доказано, см. утверждение 11.7. В общем случае, достаточно отметить, что предел последовательности нормальных случайных величин с параметрами (μ_n, σ_n^2) является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ и дисперсией $\sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2$. □

Докажем так же свойство изометрии стохастического интеграла $I(f)$.

Утверждение 11.10. *Для любых двух функций $f, g \in L^2([a,b])$ выполнено*

$$\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] = \int_a^b f(t)g(t)dt. \tag{39}$$

Доказательство. Распишем $\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right]$ двумя способами. С одной стороны,

$$\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right] = \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] + 2\,\mathbb{E}\left[I(f)I(g)\right] + \mathbb{E}\left[(I(g))^2\right]. \tag{40}$$

С другой стороны, согласно предыдущему утверждению,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(I(f)+I(g))^2\right] &= \int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt \\
&= \int_a^b (f(t))^2\,dt + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b (g(t))^2\,dt \\
&= \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] + 2\int_a^b f(t)g(t)dt + \mathbb{E}\left[(I(g))^2\right]. \qquad (41)
\end{aligned}$$

Сравнивая (40) с (41), мы приходим к искомому равенству. □

Из утверждения 11.10 следует, что если функции $f(t)$ и $g(t)$ ортогональны в пространстве $L^2([a,b])$, то соответствующие интегралы $I(f)$ и $I(g)$ будут независимы. Действительно, согласно формуле (39), $I(f)$ и $I(g)$ являются некоррелированными случайными величины. Кроме того. вектор $(I(f), I(g))$ является гауссовским по определению, т.к. для любых констант λ_1 и λ_2 комбинация компонент этого вектора $\lambda_1 I(f) + \lambda_2 I(g) = I(\lambda_1 f + \lambda_2 g)$ имеет нормальное распределение по утверждению 11.9. Осталось воспользоваться утверждением 7.6 (i).

В заключении этого раздела приведём формулу для вычисления интеграла Винера при выборе базиса пространства $L^2([a,b])$.

Утверждение 11.11. *Пусть в пространстве $L^2([a,b])$ выбран некоторый ортонормированный базис $g_1, g_2, \ldots$. Тогда для любой функции $f \in L^2([a,b])$ справедлива формула*

$$\int_a^b f(t)dW_t = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\langle f, g_n\rangle \int_a^b g_n(t)dW_t\right],$$

где треугольные скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L^2([a,b])$, то есть $\langle f, g_n\rangle = \int_a^b f(t)g_n(t)dt$.

Доказательство. Действительно, разложим функцию $f(t)$ по базису $g_1, g_2, \ldots$. При этом имеет место тождество Парсеваля

$$\int_a^b f^2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle^2. \tag{42}$$

Покажем, что

$$G_N := \mathbb{E}\left[\left(I(f) - \sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle I(g_n)\right)^2\right] \to 0, \qquad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Представим G_N в следующем виде

$$G_N = \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] - 2\sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle \mathbb{E}\left[I(f)I(g_n)\right] + \sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle^2 \mathbb{E}\left[(I(g_n))^2\right],$$

где мы использовали свойство независимости $I(g_n)$ и $I(g_m)$ при $n \neq m$. Кроме того, по формуле (39),

$$\mathbb{E}\left[I(f)I(g_n)\right] = \langle f, g_n \rangle \qquad \text{и} \qquad \mathbb{E}\left[(I(g_n))^2\right] = \|g_n\|^2 = 1$$

всилу ортонормальности базиса. Следовательно,

$$G_N = \mathbb{E}\left[(I(f))^2\right] - \sum_{n=1}^{N} \langle f, g_n \rangle^2,$$

причём правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$ всилу тождества Парсеваля (42). Значит, $G_N \to 0$, и утверждение доказано. □

11.3. Интегралы вида $\int X_t dW_t$

В данном разделе, мы дадим нестрогое определение интеграла $I(X_t) = \int X_t dW_t$, где X_t принадлежит некоторому классу интегрируемых случайных процессов. Также, как и в предыдущем разделе, определение состоит из двух этапов.

Этап 1. Для ступенчатого случайного процесса X_t (step stochastic process), то есть для процессов вида

$$X_t = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \cdot \mathbb{I}\left\{t \in [t_{i-1}, t_i)\right\},$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ и $\xi_1, \ldots, \xi_m$ - случайные величины, определим интеграл $I(X_t)$ следующим образом:

$$I(X_t) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \cdot \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right). \tag{43}$$

<u>Этап 2.</u> В общем случае предположим, что существует последовательность ступенчатых случайных процессов $X_t^{(1)}, X_t^{(2)}, \ldots$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}\left[\left(X_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] dt = 0. \tag{44}$$

Тогда интеграл $I(X_t)$ определяется как

$$I(X_t) = \int_a^b X_t dW_t := \lim_{n\to\infty} \int_a^b X_t^{(n)} dW_t = \lim_{n\to\infty} I(X_t^{(n)}),$$

где предел понимается в смысле среднего квадратического, то есть

$$\mathbb{E}\left[\left(I(X_t^{(n)}) - I(X_t)\right)^2\right] \to 0.$$

Рассмотрим более подробно частный случай, с которым мы уже сталкивались в разделе 11.1: предположим, что случайный процесс X_t имеет непрерывное математическое ожидание $m(t)$ и непрерывную ковариационную функцию $K(t,s)$. Покажем, что в данном случае в качестве последовательности ступенчатых стохастических процессов можно выбрать

$$\widetilde{X}_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} X_{t_{i-1}} \cdot \mathbb{I}\left\{t \in [t_{i-1}, t_i)\right\},$$

где разбиение отрезка $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ измельчается с ростом n так, что $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$.

Утверждение 11.12. *Если случайный процесс X_t имеет непрерывное математическое ожидание $m(t)$ и непрерывную ковариационную функцию $K(t,s)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] dt = 0. \tag{45}$$

Доказательство. Отметим сначала, что функция

$$\mathbb{E}[X_t X_s] = K(t,s) + m(t)m(s)$$

также является непрерывной, и, кроме того, процесс X_t является непрерывным в среднем квадратическом, так как

$$\mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - 2\mathbb{E}[X_t X_s] + \mathbb{E}\left[X_s^2\right] \to 0, \qquad \text{при} \quad s \to t.$$

Следовательно, для любого $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] = 0,$$

и для обоснования (45) достаточно обосновать возможность поменять местами интеграл и предел, то есть достаточно доказать, что

$$\int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right]\right] dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right]\right] dt.$$

Последнее равенство следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, так как

$$\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)} - X_t\right)^2\right] \le 2\mathbb{E}\left[\left(\widetilde{X}_t^{(n)}\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(X_t\right)^2\right] \le 4 \sup_{t\in[a,b]} \mathbb{E}\left[\left(X_t\right)^2\right],$$

где супремум в правой части конечен ввиду непрерывности функции $\mathbb{D}[X_t]$. $\square$

Пример 11.13. Для примера вычислим интеграл $\int_0^t W_s dW_s$. Отметим, что процесс W_t удовлетворяет условиям утверждения 11.12, и поэтому

$$\int_0^t W_s \, dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right).$$

Отметим, что выражение в правой части может быть представлено в следующем виде

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 + \frac{1}{2} W_t^2.\end{aligned}$$

Осталось отметить, что квадратическая вариация процесса W_t равна t (см. утверждение 8.7), и поэтому

$$\int_0^t W_s dW_s = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}W_t^2.$$

Замечание 11.14. **Для строгого определения интегралов вида $\int_a^b X_t dW_t$, необходимо сначала ввести понятие фильтрации.*

Фильтрация - это семейство σ - алгебр $\mathscr{F}_t$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, такое, что

$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}, \qquad \forall s \le t.$$

Случайный процесс Y_t называется согласованным с фильтрацией $\mathscr{F}_t$, если Y_t измерим относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ для любого $t \ge 0$.

Зафиксируем теперь некоторую фильтрацию $\mathscr{F}_t$ вместе с вероятностным пространством $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Определение интеграла $\int_a^b X_t dW_t$, данное выше, корректно при одновременном выполнении следующих свойств:

1. *процесс* W_t *является* $\mathscr{F}_t$*- Броуновским движением, то есть,*
   (i) процесс W_t *согласован с фильтрацией* $\mathscr{F}_t$*, и кроме того,*
   (ii) для любых $s \le t$*, случайная величина* $W_t - W_s$ *независима от* σ*-алгебры* $\mathscr{F}_s$*;*
2. X_t *согласован с фильтрацией* $\mathscr{F}_t$*, и* $\int_a^b \mathbb{E}\left[X_t^2\right] dt < \infty$.

Кроме того, при определении интеграла от ступенчатого процесса, необходимо предположить, что ξ_i *измеримы относительно* $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$ *для любого* $i = 1, 2, ..$

Для решения задач часто пригождается следующее свойство стохастических интегралов.

Лемма 11.15. *Пусть* X_t *- случайный процесс с непрерывным математическим ожиданием и непрерывной ковариационной функцией. Пусть* $\xi-$ *некоторая случайная величина (возможно, зависимая с* X_t*), причём случайный процесс* ξX_t *также имеет непрерывное математическое ожидание и непрерывную ковариационную функцию. Тогда*

$$\xi \int_a^b X_s dW_s = \int_a^b (\xi X_s)\, dW_s.$$

Доказательство. По утверждению 11.12 и определению стохастического интеграла,

$$\int_a^b X_s dW_s = \lim_{\max|t_i - t_{i-1}| \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}),$$

где предел понимается в смысле среднего квадратического. Тогда для доказательства леммы нам достаточно показать, что

$$\mathbb{E}\left[\xi^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \int_a^b X_s dW_s\right)^2\right] \to 0$$

Действительно, последовательность

$$\eta_n := \sum_{i=1}^{\infty} X_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) - \int_a^b X_s dW_s$$

сходится к нулю в среднем квадратическом, значит сходится к нулю и по вероятности. В то же время, ξ сходится к самому себе в любом смысле, в том числе, и по распределению. Значит, по лемме Слуцкого, последовательность $\xi\eta_n$ сходится к нулю по распределению. Поэтому если $\xi\eta_n$ имеет предел в среднем квадратическом, то этот предел равен также 0. Но $\xi\eta_n$ действительно имеет предел, поскольку по условию леммы, математическое ожидание и ковариационная функция этого процесса непрерывны. □

11.4. Интегралы вида $\int H_t dX_t$. Формула Ито.

В данном разделе мы рассмотрим интегралы вида $\int_a^b H_t dX_t$, где X_t - процесс Ито.

Определение 11.16. Назовём процессами Ито процессы X_t, задаваемые в виде

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \tag{46}$$

где W_t - Броуновское движение, и b_s, σ_s - случайные процессы. Вместо равенства (46) зачастую пишут

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t,$$

что по определению является просто сокращенной записью равенства (46).

Определение 11.17. Пусть X_t - процесс Ито, и H_t - случайный процесс такой, что $\int_a^b \left(|H_s b_s| + H_s^2 \sigma_s^2\right) ds < \infty$. Тогда стохастическим интегралом от процесса H_t по процессу X_t называется процесс

$$\int_a^b H_s dX_s := \int_a^b H_s b_s ds + \int_a^b H_s \sigma_s dW_s.$$

Замечание 11.18. ** Более строго, в Определение 11.16 необходимо добавить, что*

(i) W_t является $\mathscr{F}_t$ - Броуновским движением (см. Замечание 11.14);
(ii) процессы b_t и σ_t согласованы с фильтрацией $\mathscr{F}_t$;
(iii) случайная величина X_0 измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_0$.

В Определение 11.17 следует добавить, что H_t - согласованный с фильтрацией $\mathscr{F}_t$ процесс.

Теорема 11.19. *Пусть X_t - процесс Ито вида (46). Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - дважды непрерывно-дифференцируемая функция. Тогда $f(t, X_t)$ также процесс Ито, и кроме того,*

$$\boxed{f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_1'(s, X_s) ds + \int_0^t f_2'(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{22}''(s, X_s) \sigma_s^2 ds,}$$

где через $f_i', f_{ij}'', i = 1, 2, j = 1, 2$ - обозначены производные по i - ой переменной и вторые производные по $i-$ и $j-$ ой переменной. Данная формула называется формулой Ито и может быть сокращенно записана как

$$\boxed{df = f_1' dt + f_2' dX_t + \frac{1}{2} f_{22}'' \sigma_t^2 dt.} \tag{47}$$

Доказательство. * Ниже приведены некоторые нестрогие рассуждения, являющиеся мотивацией формулы (47). Идея доказательства формулы Ито основана на разложении функции f в ряд Тейлора с точностью до второго члена:

$$\begin{aligned} df &\approx f(t+\Delta t, X_t + \Delta X_t) - f(t, X_t) \\ &\approx f_1' dt + f_2' dX_t + \frac{1}{2}\left(f_{11}''(dt)^2 + 2f_{12}'' dt dX_t + f_{22}''(dX_t)^2\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Отметим, что первые 2 члена этого разложения есть и в формуле (47). Далее,

$$\begin{aligned} (dt)^2 &\approx \sum_{i=1}^{n}(\Delta t_i)^2 \le \max(\Delta t_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \to 0; \\ dtdX_t &= dt\,(b_t dt + \sigma_t dW_t) = \sigma_t\ dt\ dW_t \\ &\approx \sigma_t \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \Delta W_{t_i} \le \sigma_t\cdot\max(\Delta t_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta W_{t_i} \to 0; \\ (dX_t)^2 &= (b_t dt + \sigma_t dW_t)^2 = \sigma_t^2 dW_t^2 \approx \sigma_t^2 \sum (\Delta W_{t_i})^2 \to \sigma_t^2 t, \end{aligned}$$

где в последней строчке используется тот факт, что квадратическая вариация процесса W_t равна t (см. утверждение 8.7). Подставляя все "полученные" формулы в (48), мы приходим к формуле (47). □

11.5. Вычисление стохастических интегралов при помощи формулы Ито

При помощи формулы Ито можно вычислять интегралы вида $\int_a^b f(t, W_t)dW_t$. Действительно, пусть $f(t,x)$ - дифференцируемая по второй переменной функция. Обозначим через $F(t,x)$ - первообразную этой функции по второй переменной, и применим к $F(t,x)$ формулу Ито для процесса Ито $X_t = W_t$:

$$F(t, W_t) = F(0,0) + \int_0^t F_1'(s, W_s)ds + \int_0^t F_2'(s, W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t F_{22}''(s, W_s)ds.$$

Так как справедливы равенства

$$F_2'(t,x) = f(t,x), \quad \text{и} \quad F_{22}''(t,x) = f_2'(t,x),$$

мы приходим к следующему представлению стохастического интеграла

$$\boxed{\int_0^t f(s, W_s)dW_s = F(t, W_t) - F(0,0) - \int_0^t \left(F_1'(s, W_s) + \frac{1}{2}f_2'(s, W_s)\right)ds.} \tag{49}$$

Из последней формулы в частности следует, что

$$\begin{aligned}\int_a^b f(s,W_s)dW_s &= \int_0^b f(s,W_s)dW_s - \int_0^a f(s,W_s)dW_s \\ &= F(b,W_b) - F(a,W_a) - \int_a^b \left(F_1'(s,W_s) + \frac{1}{2}f_2'(s,W_s)\right) ds.\end{aligned} \tag{50}$$

Пример 11.20. Вычислим при помощи формулы (49) интеграл $\int_0^t W_s dW_s$, уже рассмотренный нами в примере 11.13. Для этого примера, $f(t,x) = x$ и $F(t,x) = x^2/2$. Поэтому

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \int_0^t \frac{1}{2}ds = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Пример 11.21. Формула (49) позволяет также доказать формулу интегрирования по частям для винеровских интегралов:

$$\int_a^b g(s)dW_s = g(b)W_b - g(a)W_a - \int_a^b g'(s)W_s ds.$$

Действительно, эта формула получается при применении (50) к функции $f(t,x) = g(t)$ и её первообразной $F(t,x) = g(t)x$.

11.6. Применение формулы Ито к стохастическому моделированию

В данном разделе мы рассмотрим несколько стохастических моделей, широко применяемых при описании динамики цен.

Модель Блэка-Шоулза (геометрическое Броуновское движение). В данной модели цена финансового инструмента описается как решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$dX_t = X_t\mu\, dt + X_t\sigma\, dW_t, \tag{51}$$

где $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Напомним, что такое СДУ является просто сокращенной записью

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dW_s.$$

При помощи формулы Ито процесс X_t может быть найден в явном виде. Для этого воспользуемся формулой (47) для функции $f(t,x) = \ln(x)$ и процесса Ито X_t :

$$\begin{aligned} d(\ln X_t) &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)(X_t\sigma)^2\,dt \\ &= \frac{1}{X_t}\left(X_t\mu\,dt + X_t\sigma\,dW_t\right) - \frac{\sigma^2}{2}dt \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\,dW_t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\ln(X_t) - \ln(X_0) = \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)ds + \int_0^t \sigma\,dW_s = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t,$$

и решением СДУ (51) является процесс

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

Модель Васичека. В данной модели процесс X_t определяется как решение СДУ

$$dX_t = (a - bX_t)\,dt + c\,dW_t, \tag{52}$$

где $a \in \mathbb{R}, b, c > 0$. Для нахождения решения данного СДУ, воспользуемся формулой Ито (47) для функции $f(t,x) = xe^{bt}$ и процесса Ито X_t :

$$\begin{aligned} d\left(X_t e^{bt}\right) &= bX_t e^{bt}dt + e^{bt}dX_t \\ &= e^{bt}\left(a\,dt + c\,dW_t\right). \end{aligned}$$

Значит, решением СДУ (52) является процесс

$$X_t = e^{-bt}X_0 + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + c\int_0^t e^{b(s-t)}dW_s.$$

Модель Кокса-Ингерсолла-Росса (CIR - Cox-Ingersoll-Ross) похожа на модель Васичека (52),

$$dX_t = (a - bX_t)\,dt + c\,\sqrt{X_t}dW_t. \tag{53}$$

Модели (52) и (53) обладают свойством "возвращения к среднему"(mean-reverting models). Кроме того, процесс, задаваемый СДУ (53), строго положителен, если $2a \geq \sigma^2$. Применяя формулу Ито с $f(t,x) = xe^{bt}$ (как для модели Васичека), приходим к равенству

$$X_t = e^{-bt}X_0 + \frac{a}{b}\left(1 - e^{-bt}\right) + c\int_0^t e^{b(s-t)}\sqrt{X_s}dW_s.$$

Пользоваться этой формулой затруднительно из-за интегрирования $\sqrt{X_s}$ в правой части.

Процесс Орнштейна-Уленбека является частным случаем модели Васичека. В классической записи, он задаётся как решение СДУ

$$m\,dX_t = -\lambda X_t dt + dW_t, \tag{54}$$

где $m, \lambda > 0$. Физический смысл этого уравнения: X_t задаёт скорость частицы массы m в некоторой среде с коэффициентом трения λ. Решая уравнение также, как и в случае модели Васичека, приходим к равенству

$$X_t = e^{-(\lambda/m)t}\left(X_0 + \frac{1}{m}\int_0^t e^{(\lambda/m)s} dW_s\right).$$

Если теперь дополнительно предположить, что $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1/(2\lambda m))$, X_0 независим от W_t, то процесс X_t является гауссовским с нулевым мат. ожиданием и ковариационной функцией

$$K(t_1, t_2) = \frac{1}{2\lambda m} e^{-(\lambda/m)\cdot|t_1 - t_2|}.$$

Часть IV

Приложение

Приложение A: Свёртка функций

В теории вероятности понятие свёртки возникает в следующих двух (близких) смыслах.

1. В смысле свёртки функций распределений: если случайные величины X и Y независимы, то функция распределения их суммы вычисляется по формуле
$$F_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} F_X(x-y) F_Y(dy),$$
где $F_X(\cdot)$ - функция распределения X, $F_Y(\cdot)$ - функция распределения Y. Операция с функциями F_1 и F_2 в правой части называется свёрткой и обозначается $F_1 * F_2$.
2. В смысле свёртки плотностей распределений: если случайные величины X и Y независимы, X имеет плотность p_X, Y имеет плотность p_Y, то плотность их суммы вычисляется по формуле
$$p_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} p_X(x-y) p_Y(y) dy.$$
Операция с функциями p_X и p_Y в правой части также называется свёрткой и обозначается $p_X * p_Y$.

Перечислим некоторые свойства свёртки функции распределения:

1. Если $F(0) = 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{n*}(x) \leq F^n(x),$$

где в левой части стоит свёртка функции распределения $F(x)$ сама с собой n раз (т.е. функция распределения с.в., представляющей собой сумму n i.i.d. с.в. с функцией распределения $F(x)$), а в правой части - функция $F(x)$ в n -ой степени.

2. Если $F(0) = 0$, то для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{n*}(x) \geq F^{(n+1)*}(x).$$

3. Свойство коммутативности: для любых функций распределения F_1 и F_2,

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1.$$

4. Свойство ассоциативности: для любых функций распределения F_1, F_2, F_3,

$$F_1 * (F_2 * F_3) = (F_1 * F_2) * F_3.$$

Приложение B: Преобразование Лапласа

Литература по теме: [4]

Определение B.1. Преобразование Лапласа функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется функция

$$\mathscr{L}_f(s) := \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx, \qquad s \geq 0.$$

Перечислим наиболее важные свойства преобразования Лапласа

1. Если $f(x)$ является функцией плотности некоторой случайной величины ξ, то $\mathscr{L}_f(s) = \mathbb{E}[e^{-s\xi}]$.
2. Для любых функций f_1 и f_2,

$$\mathscr{L}_{f_1 * f_2}(s) = \mathscr{L}_{f_1}(s) \cdot \mathscr{L}_{f_2}(s),$$

где свёртка в левой части подразумевается как свёртка плотностей, т.е.

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x-y)f_2(y)dy.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{f_1 * f_2}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx}\left[\int_0^\infty f_1(x-y) f_2(y) dy\right] dx \\
&= \int_0^\infty f_2(y)\left[\int_0^\infty f_1(x-y) e^{-sx} dx\right] dy \\
&= \int_0^\infty f_2(y)\left[\int_0^\infty f_1(u) e^{-s(u+y)} du\right] dy \\
&= \left[\int_0^\infty f_2(y) e^{-sy} dy\right]\left[\int_0^\infty f_1(u) e^{-su} du\right] \\
&= \mathscr{L}_{f_1}(s) \cdot \mathscr{L}_{f_2}(s).
\end{aligned}$$

3. Если $F(x)$ - функция распределения некоторой положительной с.в. (т.е. $F(0)=0$), а $p(x)$ - её плотность, то

$$\mathscr{L}_F(s) = \mathscr{L}_p(s)/s.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_F(s) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-sx} F(x) dx = -\int_{\mathbb{R}_+} F(x) d(e^{-sx}/s) \\
&= -F(x)\frac{e^{-sx}}{s}\bigg|_0^\infty + \int_{\mathbb{R}_+} p(x)\frac{e^{-sx}}{s} dx = \mathscr{L}_p(s)/s.
\end{aligned}$$

Аналогично, если функция $f(x)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx < \infty$, то

- $\mathscr{L}_{\int_0^x f(u)du}(s) = \mathscr{L}_f(s)/s$, где $s>0$,
- $\mathscr{L}_{\int_x^\infty f(u)du}(s) = \left(\mathscr{L}_f(0) - \mathscr{L}_f(s)\right)/s$, где $s>0$.

4. Следующие формулы верны, если преобразования Лапласа, которые входят в эти формулы, существуют:

- $\mathscr{L}_{x^m}(s) = \Gamma(m+1)/s^{m+1}$, где $m>-1$ и $s>0$,
- $\mathscr{L}_{f'}(s) = s \cdot \mathscr{L}_f(s) - f(0)$,
- $\mathscr{L}_{f^{(r)}}(s) = s^r \cdot \mathscr{L}_f(s) - s^{r-1} f(0) - s^{r-2} f'(0) - ... - f^{(r-1)}(0)$,

Приложение C: Производящие функции

Определение C.1. Проиводящей функцией целочисленной неотрицательной случайной величины X называется функция

$$\varphi_X(u) = \mathbb{E}\left[u^X\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \cdot \mathbb{P}\left\{X=k\right\}, \qquad |u|<1.$$

Для примера вычислим производящую функцию пуассоновской с.в. с параметром λ:

$$\varphi_X(u) \quad = \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)}.$$

Важные свойства производящей функции:

1. для независимых с.в. X и Y,

$$\varphi_{X+Y}(u) = \mathbb{E}\left[u^{X+Y}\right] = \mathbb{E}[u^X] \cdot \mathbb{E}[u^Y] = \varphi_X(u)\varphi_Y(u);$$

2. существует взаимнооднозначное соответствие между производящими функциями и распределениями целочисленных неотрицательных с.в., т.к.

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{k!}\varphi_X^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Приложение D: Характеристические функции

Определение D.1. Характеристической функцией одномерной случайной величины X называется

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}uX}\right], \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Любая характеристическая функция обладает следующими свойствами:

1. $\phi_X(0) = 1, \quad |\phi_X(u)| \le 1, \ \forall u \in \mathbb{R}$;
2. если с.в. X и Y независимы, то $\phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$;
3. $\phi_{aX+b}(u) = e^{\mathrm{i}bu}\phi_X(au)$, где a, b - константы;
4. Любая характеристическая функция является равномерно непрерывной на всей числовой прямой. Действительно,

$$\begin{aligned} \sup_u |\phi(u+h) - \phi(u)| \quad &= \quad \sup_u \left|\mathbb{E}\left(e^{\mathrm{i}(u+h)\xi} - e^{\mathrm{i}u\xi}\right)\right| \\ &\le \quad \sup_u \mathbb{E}\left[\left|e^{\mathrm{i}u\xi}\right| \cdot \left|e^{\mathrm{i}h\xi} - 1\right|\right] \\ &= \quad \mathbb{E}\left[\left|e^{\mathrm{i}h\xi} - 1\right|\right] \to 0, \end{aligned}$$

т.к. функция $|e^{\mathrm{i}h\xi} - 1|$ ограничена сверху числом 2, и поэтому можно применить теорему Лебега о мажорируемой сходимости.
5. Любая функция распределения однозначно определяется своей характеристической функцией. Это является следствием формулы

$$F(x_1) - F(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\mathrm{i}ux_2} - e^{-\mathrm{i}ux_1}}{\mathrm{i}u} \phi(u) du,$$

где $F(x)$ -функция распределения с.в. ξ, а x_1, x_2 - точки непрерывности функции $F(x)$.

6. Если у распределения ξ существует $r-$ый момент, то существует $r-$ая производная хар. функции в нуле, и кроме того

$$\phi^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k \mathbb{E}[\xi^k], \quad k = 0, 1...r.$$

Действительно, если существует 1- ый момент, то

$$|\phi'(u)| = \left| \mathrm{i} \int x e^{\mathrm{i}ux} dF(x) \right| \leq \int |x| \, dF(x) = \mathbb{E}|\xi|,$$

и поэтому первая производная хар. функции существует. Аналогично (по индукции) доказывается для любого целого r. Из этого свойства следует формула Тейлора для хар. функций: если существует $r-$ ый момент распределения, то в окрестности нуля имеет место формула

$$\phi(u) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{(\mathrm{i}u)^j}{j!} \mathbb{E}\xi^j + o(|u|^r).$$

7. Функция $\phi(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является характеристической функции некоторой случайной величины тогда и только тогда, когда ϕ непрерывна и положительно определена (теорема Бохнера). Функция называется положительно определённой, если $\forall s_1, .., s_n \in \mathbb{R}$, $\forall z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ выполнено $\sum_{j,k=1}^{n} \phi(s_j - s_k) z_j \bar{z}_k \geq 0$.

Пример D.2. Найдём характеристическую функцию стандартной нормальной величины. Имеем

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}ux - x^2/2} dx.$$

Производная характеристической функции по u равна

$$\begin{aligned} \phi'(u) &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{\mathrm{i}ux - x^2/2} dx \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}} \Big[-e^{\mathrm{i}ux - x^2/2} |_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}u e^{\mathrm{i}ux - x^2/2} dx \Big] = -u\phi(u). \end{aligned}$$

где во второй строчке мы воспользовались формулой интегрирования по частям для функций $-e^{-x^2/2}$ и $e^{\mathrm{i}ux}$. Решая полученное дифференциальное уравнение с начальным условием $\phi(0) = 1$, приходим к выводу, что

$$\phi(u) = e^{-u^2/2}.$$

По свойству 3, отсюда следует, что характеристическая функция с.в. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ равна

$$\phi_X(u) = e^{\mathrm{i}u\mu - \sigma^2 u^2/2}.$$

Аналогично можно определить характеристическую функцию многомерной случайной величины $\vec{X}$:

$$\phi_{\vec{X}}(\vec{u}) = \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}(\vec{u},\vec{X})}\right], \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Все свойства характеристической функции распространяются на многомерный случай. В частности, свойство 3 можно переписать как

$$\phi_{A\vec{X}+\vec{\mu}}(\vec{u}) = e^{\mathrm{i}(\vec{\mu},\vec{u})}\phi_{\vec{X}}(A^{\top}\vec{u}), \tag{55}$$

где $A \in \mathrm{Matr}(n \times n)$, $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^n$.

Приложение E: Две предельные теоремы теории вероятностей

E.1. Закон больших чисел

ЗБЧ, Law of large numbers (LLN).

Теорема E.1. 1. *"Классическая" формулировка: $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность i.i.d. сл.вел., $\mathbb{E}[\xi_1^2] < \infty$. Тогда*

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\xi_1], \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2. *В форме Хинчина: $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность i.i.d. сл.вел., $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Тогда*

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[\xi_1], \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

3. *Усиленный ЗБЧ (strong LLN): $\xi_1, \xi_2, ...$ - последовательность i.i.d. сл.вел., $\mathbb{E}[\xi_1] < \infty$. Тогда*

$$\frac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}[\xi_1], \qquad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Докажем в форме Хинчина. Обозначим $\eta_i = \xi_i - \mathbb{E}[\xi_i]$. Поскольку $\mathbb{E}[\eta_i] = 0$, хар.функция η_i может быть представлена в следующем виде

$$\eta_i(u) = 1 + o(|u|), \qquad u \to 0.$$

Поэтому

$$\phi_{(\sum_{i=1}^n \eta_i)/n}(u) = \phi_{\sum \eta_i}(u/n) = (\phi_{\eta_1}(u/n))^n = (1 + o(u/n))^n \to 1, \qquad n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность хар. функций с.в. $(\sum_{i=1}^n \eta_i)/n$ сходится к функции, непрерывной в нуле (и соответствующей нулевой константе) - значит, по утверждению G.4, $(\sum_{i=1}^n \eta_i)/n \xrightarrow{d} 0$ и по утверждению G.2, $(\sum_{i=1}^n \eta_i)/n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Теорема доказана. □

E.2. Центральная предельная теорема

ЦПТ, Central limit theorem (CLT).

Теорема E.2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ - последовательность i.i.d. сл.вел., $\mathbb{E}[\xi_1^2] < \infty$. Тогда*

$$\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \qquad n \to \infty,$$

where $\mu = \mathbb{E}[\xi_1]$ и $\sigma^2 = \mathbb{D}[\xi_1]$.

ЗБЧ в классической форме непосредственно следует из ЦПТ. Действительно, воспользуемся Теоремой G.3 с

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}, \qquad Y_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Имеем $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Значит,

$$X_n Y_n = \frac{S_n}{n} - \mu \xrightarrow{d} 0.$$

Отсюда следует, что $(S_n/n) - \mu \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, то есть закон больших чисел в классической форме выполнен.

Доказательство. В общем случае, обозначим $\eta_i = \xi_i - \mu,\ i = 1..n$. Очевидно, $\mathbb{E}[\eta_i] = 0, \mathbb{D}[\eta_i] = \sigma^2$. Разложим хар. функцию η_i в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\phi_{\eta_i}(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

Значит,

$$\phi_{(\sum_{i=1}^n \eta_i)/(\sigma\sqrt{n})}(u) = \left(\phi_{\eta_1}\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{u^2}{2n}\right)\right)^n \to e^{-u^2/2}.$$

Осталось заметить, что по утверждению G.4, $(\sum_{i=1}^n \eta_i)/(\sigma\sqrt{n}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. □

Приложение F: Отношение эквивалентности

Пусть задано некоторое конечное множество A, и на нём определено отношение $\sim$. Это отношение называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:

1. рефлексивность: $a \sim a,\ \forall a \in A$;
2. симметричность: $a \sim b,\ \Rightarrow\ b \sim a,\ \forall a, b \in A$;

3. транзитивность: $a \sim b,\ b \sim c \ \Rightarrow \ a \sim c,\ \forall a, b, c \in A$.

Любое отношение эквивалентности задаёт разбиение на классы эквивалентности, т.е. на непересекающиеся подмножества $B_1, B_2, ...$, объединение которых есть всё A. Обратное утверждение также верно - для любого разбиения на классы эксивалентности, можно определить отношение эквивалентности: $a \sim b \Leftrightarrow a, b$ лежат в одном классе.

Приложение G: Виды сходимости случайных величин

1. Говорят, что последовательность ξ_n случайных величин сходится к с.в. ξ *почти наверное* ($\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi$, almost sure convergence), если

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)\right\} = 1;$$

2. Говорят, что последовательность ξ_n случайных величин сходится к с.в. ξ *по вероятности* ($\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$, convergence in probability), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \to 0;$$

Утверждение G.1. *(i)* $\left[\xi_n \xrightarrow{a.s.} \xi\right] \quad \Longrightarrow \quad \left[\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi\right]$.

(ii) $\left[\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi\right], \xi_n-$ *монотонная* $\quad \Longrightarrow \quad \left[\xi_n \xrightarrow{a.s} \xi\right]$.

3. Говорят, что последовательность ξ_n случайных величин сходится к с.в. ξ *в среднем квадратическом* ($\xi_n \xrightarrow{\text{ср.кв.}} \xi$, convergence in mean square), если

$$\mathbb{E}\left[(\xi_n - \xi)^2\right] \to 0;$$

Из сходимости в среднем квадратическом следует сходимость по вероятности - этот факт вытекает из неравенства Чебышева:

$$\mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\right\} = \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi|^2 \geq \varepsilon^2\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\left[|\xi_n \ - \xi|^2\right]}{\varepsilon^2} \to 0, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

4. Говорят, что последовательность функций распределений F_{ξ_n} случайных величин ξ_n *слабо сходится* к фукнции распределения с.в. ξ ($F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi$, weak convergence, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, convergence in distribution, $\xi_n \xrightarrow{Law} \xi$, convergence in law), если выполнено любое из следующих (эквивалентных) условий:

1. $F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$ для любой точки x, являющейся точкой непрерывности $F_\xi(x)$.
2. Для любой непрерывной и ограниченной функции g,

$$\int g(x) dF_n(x) \to \int g(x) dF(x),$$

т.е. $\mathbb{E}\left[g(\xi_n)\right] \to \mathbb{E}\left[g(\xi)\right]$.

Утверждение G.2. *1.* $\left[\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi\right] \implies \left[F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F(\xi).\right]$.

2. $\left[F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F(\xi)\right], \left[\xi = c \;\; a.s.\right] \implies \left[\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi\right]$.

Теорема G.3. *(Теорема Слуцкого):*

$$\left[X_n \xrightarrow{d} X\right],\ \left[Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c\right] \implies \left[X_n Y_n \xrightarrow{d} cX\right],\ \left[X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c\right].$$

5. Сходимость характеристических функций - сходимость функций из $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Утверждение G.4. *(i)* $\left[F_{\xi_n} \xrightarrow{w} F_\xi\right] \implies \left[\phi_{\xi_n} \xrightarrow{w} \phi_\xi\right]$.

(ii) Если последовательность хар. функций $\phi_n(\cdot)$ сходится к функции $\phi(\cdot)$, непрерывной в нуле, то функция $\phi(\cdot)$ сама является характеристической. При этом последовательность функций распределений F_n, соответствующие хар. функциям $\phi_n(\cdot)$ слабо сходится к функции распределения, соответствующей хар.функции $\phi(\cdot)$.

В заключении приведём несколько примеров, показывающих связь между сходимостью по вероятности и сходимостью почти наверное.

Пример G.5. Пусть ξ_n $(n = 1, 2, ...)$ - случайная величина, принимающая значение n с вероятностью $1/n$ и значение 0 с вероятностью $(1-1/n)$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n

$$\mathbb{P}\left\{|\xi_n| \geq \varepsilon\right\} = \mathbb{P}\left\{|\xi_n| = n\right\} = 1/n \to 0.$$

Вместе с этим, $\mathbb{E}\xi_n = 1$ не сходится к 0. Более того, если бы ξ_n принимала значение n^2 вместо n, то мат. ожидание стремилось бы к бесконечности при $n \to \infty$.

Про сходимость в смысле п.н. можно говорить, только если известно вероятностное пространство, и известно, на каких элементах пространства элементарных событий ξ_n принимает ненулевые значения. Допустим, что $\Omega = [0, 1]$, вероятностная мера является Лебеговой мерой на $[0, 1]$, а $\xi_n(\omega) = \mathbb{I}\left\{\omega \in [1 - 1/n, 1]\right\}$ (отметим, что при таком определении ξ_n, эти случайные величины являются зависимыми). Тогда для любого $\omega \in [0, 1]$, $\xi_n(\omega) = 0$ для всех достаточно больших n, и поэтому предел в смысле почти наверное также равен 0.

Пример G.6. На пространстве состояний $\Omega = [0, 1]$ с Лебеговой мерой, определим последовательность случайных величин, принимающих значения 0 и 1, следующим образом. Первые 2 величины равны

$$\xi_{11}(w) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, 1/2], \\ 0, & \omega \in (1/2, 1], \end{cases} \qquad \xi_{12}(w) = \begin{cases} 0, & \omega \in [0, 1/2], \\ 1, & \omega \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Случайные величины $\xi_{21}, \xi_{22}, \xi_{23}, \xi_{24}$ получены делением отрезка $[0, 1]$ на 4 части - каждая из величин принимает значение 1 на одном отрезке длины

$1/4$ и значение 0 на всех остальных. Продолжая аналогичным образом, приходим к последовательности случайных величин ξ_{kn}, таких что величина из $k-$ ой группы принимает значение 1 с вероятностью 2^{-k} и 0 с вероятностью $(1-2^{-k})$. Последовательность величин $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \ldots$ стремится к 0 по вероятности:

$$\mathbb{P}\left\{|\xi_{kn}| > \varepsilon\right\} = \mathbb{P}\left\{|\xi_{kn}| = 1\right\} = 2^{-k} \to 0,$$

для любого $\varepsilon \in (0,1]$ (для $\varepsilon > 1$) вероятность в левой части тождественно равна 0. С другой стороны, $\xi_{kn}(\omega)$ не имеет предела в смысле почти наверное, посколько для любого ω эта последовательность содержит бесконечно много единиц и бесконечно много нулей.

Приложение H: Свойства симметричных матриц

Утверждение H.1. *(i) Все собственные значения симметричной вещественной матрицы вещественны.*

(ii) Все жордановы клетки симметричной вещественной матрицы имеют размер 1.

Доказательство. Пусть $\Sigma-$ симметричная вещественная матрица.

(i). Пусть $\lambda-$ некоторое собственное значение, $v-$ соответствующий собственный вектор, $\Sigma v = \lambda v$. Умножим обе части равенства справа на вектор $\bar{v}^\top$ (транспонированный и комплексно-сопряженный к v):

$$\bar{v}^\top \Sigma v = \lambda \bar{v}^\top v. \tag{56}$$

Теперь транспонируем обе части этого равенства:

$$v^\top \Sigma \bar{v} = \lambda v^\top \bar{v},$$

и берём комплексное сопряжение:

$$\bar{v}^\top \Sigma v = \bar{\lambda} \bar{v}^\top v. \tag{57}$$

Сравнивая (56) и (57), получаем, что $\lambda = \bar{\lambda}$, то есть $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii). Если жорданова клетка имеет размер более 1, то существуют обобщенные собственные значения порядка 2 или больше. То есть, найдется собственное значение λ и вектор v такие, что

$$\left(\Sigma - \lambda I\right) v \neq 0, \qquad \left(\Sigma - \lambda I\right)^2 v = 0.$$

Но из последнего равенства следует, что

$$\bar{v}^T \left(\Sigma - \lambda I\right)^2 v = \|\left(\Sigma - \lambda I\right) v\|^2 = 0,$$

а это невозможно, если $\left(\Sigma - \lambda I\right) v \neq 0$. Получаем противоречие. □

Из этого утверждения следует, что матрица Σ диагонализируема, то есть существует диагональная матрица D и ортогональная матрица U (т.е. такая матрица U, что $U^{-1} = U^\top$), такие что

$$\Sigma = U^\top DU,$$

причём диагональ матрицы D состоит из собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Если дополнительно потребовать, что матрица Σ - неотрицательно определенная, то все элементы на диагонали матрицы D будут неотрицательными, поскольку из равенства $\Sigma v = \lambda v$ следует, что

$$\lambda = \frac{v^\top \Sigma v}{v^\top v} \geq 0.$$

Поэтому для любой симметричной неотрицательно определенной матрицы Σ существует матрицу $\Sigma^{1/2}$, обладающая свойством $\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2} = \Sigma$:

$$\Sigma^{1/2} := U^\top \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, .., \sqrt{\lambda_n})U.$$

Список литературы

[1] Applebaum, D. (2009). *Lévy processes and stochastic calculus.* Cambridge University Press.

[2] Brockwell, P. and Davis, R. (2013). *Time series: theory and methods.* Springer Science & Business Media.

[3] Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial modelling with jump process.* Chapman & Hall, CRC Press UK.

[4] Cox, D. R. (1962). *Renewal theory.* Methuen Co. Ltd.

[5] Gallager, R. G. (2013). *Stochastic processes: theory for applications.* Cambridge University Press.

[6] Kuo, H. -H. (2006). *Introduction to stochastic integration.* Springer.

[7] Mörters, P. , and Peres, Y. (2010). *Brownian motion* **30**. Cambridge University Press.

[8] Parzen, E. (1999). *Stochastic processes.* SIAM, Philadelphia.

[9] Sato, K. (1999). *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press.

[10] Shiryaev, A. N. (1996). *Probability.* Springer-Verlag, New York.

[11] Курс лекций по случайным процессам (2005). Лектор-Б.М.Гуревич. http://dmvn.mexmat.net/ptms.php.

[12] Волков, И. К. , Зуев, С. М. , Цветкова, Г. М. (1999). *Случайные процессы.* Издательство МГТУ им. Баумана.

[13] Прохоров, А. В. , Ушаков, В. Г. , Ушаков, Н. Г. (1986). *Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы.* Москва: Наука.

[14] Феллер, В. (1984). *Введение в теорию вероятностей и её приложения, том 2.* Москва: Мир.