7.5. Момент первого достижения

1. Обозначим момент первого достижения (hitting time) состояния j

$$\tau_j = \inf\{n \geq 0 : \ X_n = j\}.$$

Событие "цепь когда-либо перейдёт в состояние j" совпадает с событием "$\tau_j < \infty$". Введём обозначение

$$h_{ij} := \mathbb{P}\{\tau_j < \infty \mid X_0 = i\}$$

- вероятность когда-либо перейти в состояние j, если цепь стартует из состояния i. Очевидно, что $h_{ii} = 1$.

Утверждение 7.24. *Для любых $i, j \in S, i \neq j$, имеет место равенство*

$$h_{ij} := \sum_{k \in S} p_{ik} h_{kj}. \tag{27}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_0 = i\big\} = \sum_k \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty, \ X_1 = k | X_0 = i\big\} \\ &= \sum_k \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_1 = k, X_0 = i\big\}\mathbb{P}\big\{X_1 = k | X_0 = i\big\}. \end{aligned} \tag{28}$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_1 = k, X_0 = i\big\} = \mathbb{P}\big\{\tau_j < \infty | X_1 = k\big\}, \qquad \forall i, j, k, \ i \neq j. \tag{29}$$

Действительно, если $j = k$, то обе части равенства равны 1. Если $j \neq k$, то равенство следует из марковского свойства. Подставляя (29) в (28), получаем (27). □

Пример 7.25. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность того, что цепь когда-либо будет находиться в состоянии 6, если

(i) цепь стартует из детерминированного состояния (то есть начальное распределение вероятностей - вырожденное, равное 1 для одного состояния и 0 для всех остальных);

(ii) начальное распределение вероятностей - произвольное.

В первом пункте задачи нас просят найти $h_{16}, h_{26}, .., h_{66}$. Очевидно, что $h_{66} = 1$.

В данной цепи Маркова 3 класса - $\{1, 3, 6\}, \{2, 4\}, \{5\}$. По графическому представлению сразу делаем вывод, что $h_{56} = 0$.

Отметим, что состояния $\{1, 3, 6\}$ - существенные. Справедливо такое утверждение: вероятность когда-либо перейти в существенное состояние j из любого состояния, входящего в один класс эквивалентности с j, равна 1. Действительно, пусть j состоит в одном классе с состояниями $i_1, ..., i_n \in S$. Тогда соответствующие уравнения (27) объединяются в систему уравнений

$$h_{i_k j} = p_{i_k i_1} h_{i_1 j} + ... + p_{i_k i_n} h_{i_n j}, \qquad k = 1..n,$$

решением которой является $h_{i_1 j} = ... = h_{i_n j} = 1$. Поэтому $h_{16} = h_{36} = 1$.

Записывая (27) для $i = 2, j = 6$ и $i = 4, j = 6$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} h_{26} &= \frac{1}{5} h_{26} + \frac{1}{5} h_{46} + \frac{2}{5}, \\ h_{46} &= \frac{1}{6} h_{26} + \frac{1}{6} h_{46} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

решая которые получаем $h_{26} = 13/19, h_{46} = 14/19$.

Второй пункт задачи:

$$\mathbb{P}\big\{\tau_6 < \infty\big\} = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}\left\{\tau_6 < \infty \mid X_0 = i\right\} \mathbb{P}\big\{X_0 = i\big\} = \sum_{k=1}^{6} h_{i6} \mathbb{P}\big\{X_0 = i\big\}.$$

2. Обозначим через ν_{ij} математическое ожидание количества шагов до перехода в состояние j, если цепь изначально находилась в состоянии i,

$$\nu_{ij} := \mathbb{E}\left[\tau_j \mid X_0 = i\right].$$

Очевидно, что $\nu_{ii} = 0$.

Утверждение 7.26. *Для любых $i, j \in S, i \neq j$, справедливы соотношения*

$$\nu_{ij} = 1 + \sum_k p_{ik} \nu_{kj}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 7.24, имеем

$$\nu_{ij} \quad = \quad \sum_k \mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] \mathbb{P}\big\{X_1 = k | X_0 = i\big\}.$$

Заметим, что для $j = k$, то $\mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] = 1$, а если $j \neq k$, то

$$\mathbb{E}\big[\tau_j | X_1 = k\big] = \mathbb{E}\big[1 + \tau_j | X_0 = k\big].$$

Значит,

$$\begin{aligned}\nu_{ij} &= \sum_k \mathbb{P}\big\{X_1 = k|X_0 = i\big\} + \sum_{k\neq j} \mathbb{E}\big[\tau_j|X_1 = k\big]\mathbb{P}\big\{X_1 = k|X_0 = i\big\} \\ &= 1 + \sum_{k\neq j} \nu_{kj} p_{ik} = 1 + \sum_k \nu_{kj} p_{ik},\end{aligned}$$

где последнее равенство верно, поскольку $\nu_{jj} = 0$. □

Пример 7.27. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей за 1 шаг

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Спрашивается, чему равно математическое ожидание количества шагов до перехода в состояние 1, если в начальный момент времени цепь находилась в состоянии 2.

Имеем

$$\nu_{21} = 1 + p_{22}\nu_{21} = 1 + (2/5)\nu_{21}.$$

Поэтому $\nu_{21} = 5/3$.