Белый шум (White noise)

> $(u_t)_{t=-\infty}^{+\infty}$ ~ белый шум,
>
> если $E(u_t)=0$
>
> $Var(u_t)=\sigma^2$, $cov(u_t, u_s)=0$, $t \neq s$

MA(q) – процесс

Скользящее среднее порядка q

Moving Average

Опр. $y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots + \alpha_q u_{t-q}$

$\alpha_i \neq 0$,

где u_t – белый шум

Неформальное утв. Большое кол-во процессов могут быть приближены MA(q).

Оператор лага.

$L x_t = x_{t-1}$ $\quad L^2 x_t = x_{t-2}$

Lag operator

B

Backshift operator

L - линейный оператор на мн-ве случайных процессов $(x_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$

Стационарность

1) Строгая стационарность

$(x_t)_{-\infty}^{+\infty}$

$$f(x_t, \ldots, x_{t+k}) = f(x_{t+h}, \ldots, x_{t+k+h})$$

f зависит только от k, но не от h.

2) Нестрогая стационарность (covariance/weak stationary)

1) $E(x_t) = \mu \quad \forall t$

2) $\operatorname{cov}(x_t, x_s) = \gamma_{t-s} = \operatorname{cov}(x_{t+h}, x_{s+h})$

$$\operatorname{cov}(\underbrace{x_5, x_7}_{2\text{ дня}}) = \operatorname{cov}(\underbrace{x_{100}, x_{102}}_{2\text{ дня}})$$

$$\operatorname{cov}(\underbrace{x_3, x_9}_{6\text{ мес}}) = \operatorname{cov}(\underbrace{x_{1000}, x_{1006}}_{6\text{ мес}})$$

$$\operatorname{Var}(x_t) = \operatorname{cov}(x_t, x_t) = \gamma_0 \quad \forall t$$

Утв. $MA(q) \subseteq$ Стационарные процессы

$$y_t = \boxed{2} + u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}, \quad u_t - WN$$

$$\operatorname{Var}(u_t) = \sigma^2$$

1) $E(y_t) = E(2 + \overset{\text{"}0}{u_t} + 2\overset{\text{"}0}{u_{t-1}} + 3\overset{\text{"}0}{u_{t-2}}) = 2$

2) $cov(y_t, y_t) = Var(y_t) =$

$= Var(\cancel{2} + u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}) =$

$= \sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2 = 14\sigma^2 = \gamma_0$

$cov(y_t, y_{t-1}) = cov(\cancel{u_t} + 2u_{t-1} + 3u_{t-2},$

$u_{t-1} + 2u_{t-2} + 3\cancel{u_{t-3}}) = 2\sigma^2 + 6\sigma^2 = 8\sigma^2 = \gamma_1$

$cov(y_t, y_{t-2}) = 3\sigma^2$

$cov(y_t, y_{t-k}) = 0, \quad k > 2$

$\gamma_0 = 14\sigma^2, \ \gamma_1 = 8\sigma^2, \ \gamma_2 = 3\sigma^2, \ \gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0$

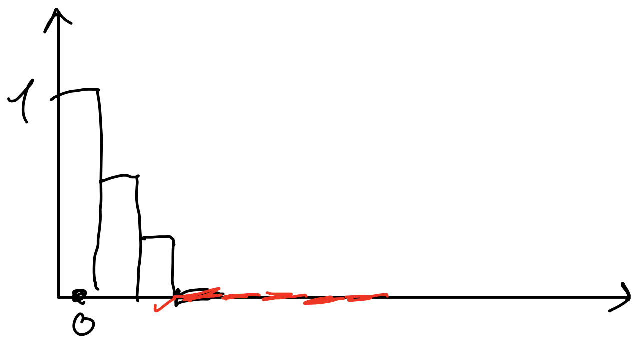
не зависит от t.

Опр. Для стационарного процесса (y_t) ф-я $\gamma_k = cov(y_t, y_{t-k})$ называется автоковариационной функцией

Опр. Для стац процесса (y_t) ф-я $\rho_k = corr(y_t, y_{t-k})$ называется автокорреляционной. ACF

Утв $\rho_k = corr(y_t, y_{t-k}) = \dfrac{cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)\,Var(y_{t-k})}} =$

$= \dfrac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_0}} = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}$



Упр. ACF

$y_t = 2 + u_t + u_{t-1} + 3u_{t-2}$

$\rho_1 = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_0} = \dfrac{8\sigma^2}{14\sigma^2} = \dfrac{4}{7}$

$\rho_2 = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_0} = \dfrac{3\sigma^2}{14\sigma^2} = \dfrac{3}{14}$

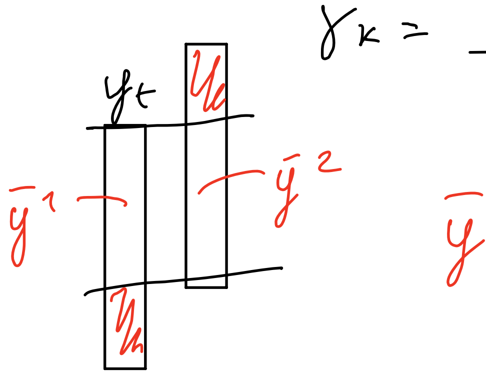
$\rho_3 = \rho_4 = \dots 0$

Утв $(y_t) \sim MA(q)$, то $\rho_{q+1} = \rho_{q+2} = 0, \dots$

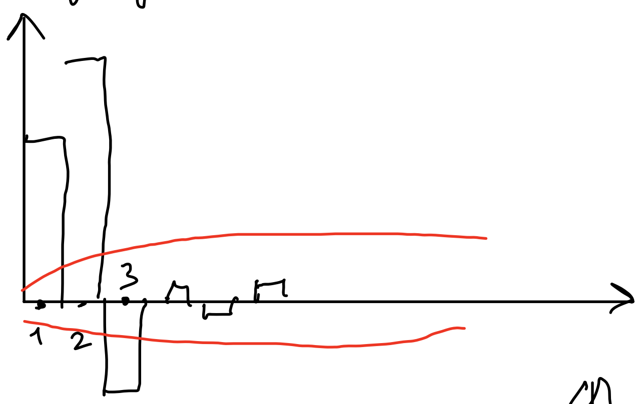
$\hat\rho_k = \dfrac{\hat\gamma_k}{\hat\gamma_0}$

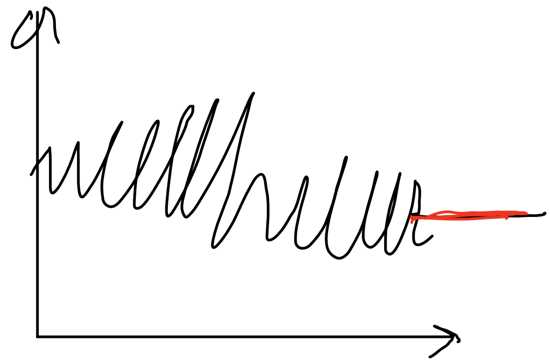
$\bar y^1 \qquad \bar y^2$

$\hat\gamma_k = \dfrac{\sum_{t=k+1}^{T} (y_t - \bar y)(y_{t-k} - \bar y)}{T - k - 1}$



Идея: По рисунку ACF можно предположить структуру процесса





$$corr(R, L) = \frac{cov(R, L)}{\sqrt{Var(R) Var(L)}}$$

partial

$p\,Corr(R, L; W)$ — частная корреляция,
R и L очищаются от связей с W

$Corr(R, L \mid W)$ — условная корреляция
фиксируется источник случайности в W.

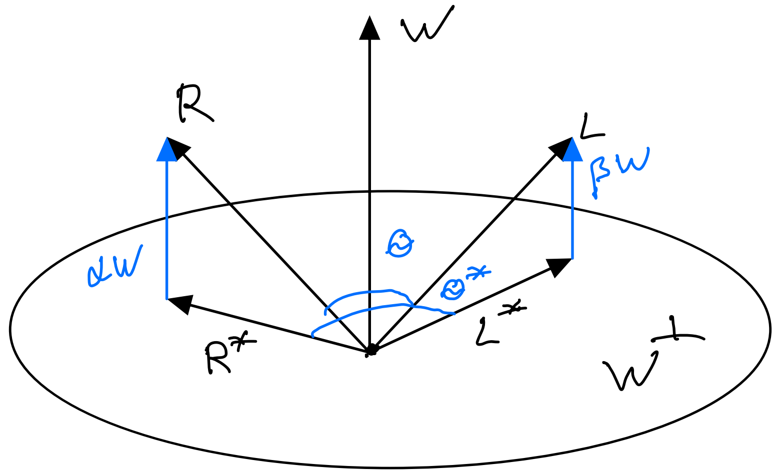
опр. $$Corr(R, L \mid W) = \frac{cov(R, L \mid W)}{\sqrt{Var(R \mid W) Var(L \mid W)}}$$

$$\operatorname{cov}(R,L|W) = E(RL|W) - E(R|W)E(L|W)$$
$$\operatorname{Var}(R|W) = E(R^2|W) - E(R|W)^2$$

Опр. $\operatorname{pCorr}(R, L; W) = \operatorname{corr}(R^*, L^*)$ — const, где

$R^* = R - \alpha W$ т.ч. $\operatorname{cov}(R^*, W) = 0$

$L^* = L - \beta W$ т.ч. $\operatorname{cov}(L^*, W) = 0$



Упр.

	$W=0$, $L=0$	$W=0$, $L=1$	$W=1$, $L=0$	$W=1$, $L=1$
$R=0$	$1/4$	0	$1/8$	$1/8$
$R=1$	0	$1/4$	$1/8$	$1/8$

Упр. X_1, X_2, X_3 — броски кубиков

$$S = X_1 + X_2 + X_3$$
$$\operatorname{pCorr}(X_1, X_2; S)$$

$$x^* = x_1 - \alpha S \qquad cov(x^*, S) = 0$$

$$cov(x_1 - \alpha S, S) = 0$$

$$cov(x_1, S) - \alpha\, cov(S, S) = 0$$

$$\alpha = \frac{cov(x_1, S)}{cov(S, S)} \qquad \frac{\Sigma(x_i y_i)}{\Sigma x_i^2}$$

$$\alpha = \frac{cov(x_1, x_1 + x_2 + x_3)}{Var(S)} = \frac{\cancel{\sigma^2}}{3\cancel{\sigma^2}} = \frac{1}{3}$$

$$x^* = x_1 - \frac{1}{3} S$$

$$x_2^* = x_2 - \underset{= 1/3}{\beta} S$$

$$pcorr(x_1, x_2; S) = \frac{cov(x_1 - \frac{1}{3}S, x_2 - \frac{1}{3}S)}{Var(x_1 - \frac{1}{3}S)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma^2 + \frac{1}{9}3\sigma^2}{\sigma^2 + \frac{1}{9}3\sigma^2 - \frac{2}{3}\sigma^2} = \frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2}$$

$$corr(x_1, x_2) = 0 \qquad p\,corr(\underline{x_1, x_2}; S) = -\frac{1}{2}$$

$$+1 \uparrow x_1 + \underset{\downarrow -\frac{1}{2}}{x_2} + \underset{\downarrow -\frac{1}{2}}{x_3} = S$$

Опр. Если (y_t) — стац. процесс, то частной автокорреляцией (PACF) будет называться

$$\varphi_{kk} = p\,corr(y_t, y_{t-k}; y_{t-1}, ..., y_{t-k+1})$$

Интуитивно:

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left=50] & y_2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & y_3 \arrow[r] & y_4 \end{tikzcd} \qquad \rho_4 = corr(y_1, y_5)$$

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r] \arrow[rrr, bend left] & y_2 \arrow[r] & y_3 \arrow[r] & y_4 \end{tikzcd}$$

$$\varphi_{33} = p\,corr(y_1, y_4; y_2, y_3$$

Теорема Юла-Волкера
(Yule-Walker)

Если y_t — стац. процесс и представим в виде

$$y_t = \varphi_{k1} \cdot y_{t-1} + \varphi_{k2} y_{t-2} + ... + \varphi_{kk} y_{t-k} + \nu_t$$

и $cov(\nu_t, y_{t-1}) = cov(\nu_t, y_{t-2}) = ... = cov(\nu_t, y_{t-k}) = 0$

то

$$\varphi_{kk} = p\,corr(y_t, y_{t-k}; y_{t-1}, ..., y_{t-k+1})$$

Упр. $y_t = 2 + u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}$

$u_t - WN$

φ_{22}

Способ 1.

$y_t^* = y_t - \alpha y_{t-1}$

$y_{t-2}^* = y_{t-2} - \beta y_{t-1}$

$\vdots$

$\varphi_{22} = corr(y_t^*, y_{t-2}^*)$

Способ 2. (Y-W)

$y_t = \cancel{\varphi_{20}} + \varphi_{21} y_{t-1} + \boxed{\varphi_{22}} y_{t-2} + \nu_t$

$$\begin{cases} \cancel{E(\nu_t)=0} \\ cov(\nu_t, y_{t-1}) = 0 \\ cov(\nu_t, y_{t-2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} cov(y_t - \underline{\varphi_{21}} y_{t-1} - \underline{\underline{\varphi_{22}}} y_{t-2}, y_{t-1}) = 0 \\ cov(y_t - \underline{\varphi_{21}} y_{t-1} - \underline{\underline{\varphi_{22}}} y_{t-2}, y_{t-2}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 - \varphi_{21}\gamma_0 - \varphi_{22}\gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 - \varphi_{21}\gamma_1 - \varphi_{22}\gamma_0 = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_{22} = \frac{\det\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}}$$