

1. (15 баллов) При каких  $p$  и  $q$  указанный процесс будет являться белым шумом?

$$X_t = A_t \cdot (-1)^{S_t},$$

где:

- $A_t$  — i.i.d. Бернулли ( $P(A_t = 1) = p$ ),
- $S_t = \sum_{k=1}^{t-1} B_k$ , где  $B_k$  — i.i.d. Бернулли ( $P(B_k = 1) = q$ ).
- $B_k$  и  $A_t$  независимы

2. (20 баллов) Пересвет Матрёшкин считает, что его данные могут быть описаны следующим уравнением:

$$y_t - 0.5y_{t-1} + 0.06y_{t-2} = 10 + \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1} + 0.08\varepsilon_{t-2} - 0.024\varepsilon_{t-3}$$

- а) (4 балла) Проверьте, сколько у этого уравнения нестационарных, стационарных и стабильных решений? В ответе укажите три числа. Ответ обоснуйте.
- б) (4 балла) Классифицируйте это уравнение как ARMA. Укажите  $p$  и  $q$ .
- в) (4 балла) Найдите ACF(k) и PACF(k) в явном виде как функцию от  $k$ .
- г) (4 балла) Найдите предел  $E(y_{T+h} | \mathcal{F}_T)$  при  $h \rightarrow \infty$
- д) (4 балла) Выразите  $\varepsilon_t$  через предыдущие лаги  $y_t$  (это называется  $AR(\infty)$ ), или докажите, что это невозможно.

3. (10 баллов) Рассмотрим модель  $ETS(AAdN)$ :

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0; 20) \\ b_t = 0.8b_{t-1} + 0.3u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + 0.8b_{t-1} + 0.2u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + 0.8b_{t-1} + u_t \end{cases}$$

где  $\ell_{100} = 20$  and  $b_{100} = 1$ .

- а) (5 баллов) Найдите 95% доверительный интервал  $y_{102}$ .
- б) (5 баллов) Приблизительно вычислите прогноз для  $y_{2025}$ .

4. (15 баллов) Рассмотрим следующую VAR(2) - модель.

$$\begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-2} \\ y_{2,t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \end{pmatrix}$$

- а) (5 баллов) Кратко опишите, в чём отличия обычных IRF и ортогональных IRF?
- б) (5 баллов) В чём отличия интерпретации обычных IRF и кумулятивных?
- в) (5 баллов) Одним из преимуществ VAR(2) является тот факт, что через её оценку можно проводить тест Гранжера. Гипотеза:  $y_2$  является каузальным для  $y_1$ . Сформулируйте тест Гранжера относительно коэффициентов  $\phi_{ij}^{(p)}$ , выпишите нулевую и альтернативную гипотезы.

5. (15 баллов) У Лукоморья дуб зелёный. Златая цепь на дубе том. Пусть  $H$  – размах кроны дуба в кошачьих шагах. Каждые  $H$  шагов кот учёный меняет направление своего движения и тема его повествования меняется.  $\rho$  – параметр креативности кота.  $|\rho| < 1$ ,  $\varepsilon_t$  – белый шум. Тогда историю можно описать следующим процессом:

$$x_t = \begin{cases} \rho x_{t-1} + \varepsilon_t, & \text{mod}(t/H) \neq 0 \\ \varepsilon_t, & \text{mod}(t/H) = 0, \end{cases}$$

где  $\text{mod}(\cdot)$  означает остаток от деления. При каком условии на  $H$  процесс будет стационарным?

6. (20 баллов) Рассмотрим модель парной регрессии с AR(1) ошибками:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2),$$

где  $|\rho| < 1$ , а  $x_t$  — экзогенная переменная.

- а) (5 баллов) Найдите распределение  $\varepsilon_1$
- б) (5 баллов) Найдите распределение  $p(y_1 | x_1)$
- в) (5 баллов) Найдите распределение  $p(y_t | y_{t-1}, x_t, x_{t-1})$
- г) (5 баллов) Запишите полное правдоподобие  $p(y_1, \dots, y_T | x_1, \dots, x_T)$