GARCH

можно заменить

$u_t \sim GARCH(1,1)$

$u_t = \nu_t \cdot \sigma_t \qquad \nu_t \sim N(0,1)$

$\sigma_t^2 = 20 + 0{,}1\, u_{t-1}^2 + 0{,}2\,\sigma_{t-1}^2, \quad \sigma_t > 0$

ν_t не зависит от $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \dots$
$\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \dots$

$a_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ — стац. ! — в широком смысле

$$\boxed{\begin{aligned} E(a_t) &= \mu_a \\ Var(a_t) &= \gamma_0 \\ Cov(a_t, a_{t-k}) &= \gamma_k \end{aligned}}$$

в узком смысле

$f(a_t, a_{t+1}, \dots, a_{t+n})$ не зависит от t.

„Тяжёлые хвосты", есть ли они.

$E(u_t^4)$ сравним с нормальным

Утв. $R \sim N(0,1)$, $E(R^4) = 3$

Лемма Стейна

Полный куртозис: $\frac{E((R-\mu)^4)}{(Var(R))^2}$ $\quad R \sim N(0,1)$ куртозис $=3$

Избыточный куртозис:

$$\frac{E((R-\mu)^4)}{(Var(R))^2} - 3$$

Упр.

Вычислить для GARCH(1, 1) избыточный куртозис.

$E(u_t)=0 \qquad \nu_t \sim N(0,1)$

$\begin{pmatrix} u_t \\ \sigma^2_t \end{pmatrix}$ стац и в широком, и в узком смысле

а) $Var(u_t) = ?$

б) $\frac{E(u_t^4)}{(Var(u_t))^2} - 3 \vee 0$

$Var(u_t) = E(u_t^2) - 0^2$

$u_t^2 = \nu_t^2 \sigma_t^2$

$E(u_t^2) = E(\nu_t^2 \sigma_t^2) = E(\nu_t^2) E(\sigma_t^2) =$

$= 1 \cdot E(\sigma_t^2)$

$E(u_t^2) = E(\sigma_t^2)$

$$\sigma_t^2 = 20 + 0.1\, u_{t-1}^2 + 0.2\, \sigma_{t-1}^2$$

$$E(\sigma_t^2) = 20 + 0.1\, E(u_{t-1}^2) + 0.2\, E(\sigma_{t-1}^2)$$

$$E(\sigma_t^2) = 20 + 0.1\, E(\sigma_{t-1}^2) + 0.2\, E(\sigma_{t-1}^2)$$

$$\mu = E(\sigma_t^2)$$

$$\mu = 20 + 0.1\mu + 0.2\mu$$

$$0.7\mu = 20 \qquad \mu = \frac{200}{7}$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

$$E(\sigma_t^2) = \underbrace{E(u_t^2)}_{Var(u_t)} = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$$

$\alpha + \beta < 1$ – необход. условие для сущ-я слабо-стационарного решения.

$$E(u_t^4) = E(\nu_t^4 \cdot \sigma_t^4) = E(\underbrace{\nu_t^4}_{\sim N(0,1)}) \cdot E(\sigma_t^4) = 3\, E(\sigma_t^4)$$

$$\sigma_t^4 = (\sigma_t^2)^2 = (20 + 0.1\, u_{t-1}^2 + 0.2\, \sigma_{t-1}^2)^2$$

$$\sigma_t^4 = 400 + 0.01\, u_{t-1}^4 + 0.04\, \sigma_{t-1}^4 + 4u_{t-1}^2 + 8\sigma_{t-1}^2 + 0.04\, u_{t-1}^2\, \sigma_{t-1}^2$$

- $E(u_t^4) = 3E(\sigma_t^4)$
- $E(u_t^2 \cdot \sigma_t^2) = E(\nu_t^2 \cdot \sigma_t^2 \cdot \sigma_t^2) = \underbrace{E(\nu_t^2)}_{1} \cdot E(\sigma_t^4)$

$= E(\sigma_t^4)$

• $E(u_{t-1}^2) = E(\sigma_{t-1}^2) = \frac{200}{7}$

$$\sigma_t^4 = 400 + 0{,}01\,u_{t-1}^4 + 0.04\,\sigma_{t-1}^4 + 4\,u_{t-1}^2 + 8\,\sigma_{t-1}^2 + 0{,}04\,u_{t-1}^2\,\sigma_{t-1}^2 \quad \Big|\; E(\cdot)$$

$$E(\sigma_t^4) = 400 + 0{,}03\,E(\sigma_{t-1}^4) + 0{,}04\,E(\sigma_{t-1}^4) + 12\cdot\frac{200}{7} + 0{,}04\,E(\sigma_{t-1}^4)$$

$$0{,}89\,E(\sigma_t^4) = 400 + \frac{2400}{7} = \frac{5200}{7}$$

$$\boxed{E(\sigma_t^4)} = \frac{5200}{7\cdot 0{,}89}$$

$$E(u_t^4) = \frac{3\cdot 5200}{7\cdot 0{,}89}$$

$$\frac{E((R-\mu)^4)}{(Var(R))^2} - 3 = \frac{E(u_t^4)}{(Var(u_t))^2} - 3 =$$

$$= \frac{\frac{3\cdot 5200}{7\cdot 0{,}89}}{\left(\frac{200}{7}\right)^2} - 3 \approx 0{,}06$$

! Задача оптимизации по оценке параметров GARCH — неустойчивая

Проблема 1 — Не сходится, если данные плохо описываются GARCH

Проблема 2.

1) МНК для получения старт. точки

2) Градиентные методы из точки МНК.

Утв. $u_t \sim GARCH(1,1) \Rightarrow u_t^2 \sim ARMA(1,1)$

$u_t = \nu_t \cdot \sigma_t \qquad \nu_t \sim N(0,1)$

$\sigma_t^2 = 20 + 0{,}1 u_{t-1}^2 + 0{,}2\sigma_{t-1}^2, \quad \sigma_t > 0$

ν_t не зависит от $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \ldots$
$\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \ldots$

$a_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ - стац. в узком смысле

$\exists E(a_t), \exists cov(a_t, a_{t+k})$

$\exists E(\sigma_t^4), \exists cov(\sigma_t^2, \sigma_{t-k}^2)$

$u_t^2 \quad \{ E(u_t^2) = E(\sigma_t^2)$

u_t^2 – набл.

σ_t^2 – не набл

$$\sigma_t^2 = 20 + 0{,}1\, u_{t-1}^2 + 0{,}2\,\sigma_{t-1}^2 \qquad w_t = u_t^2 - \sigma_t^2$$

$$\underset{\text{набл}}{u_t^2} = \underset{\text{ненабл}}{\sigma_t^2} + w_t \text{ - ненабл} \to E(w_t) = E(u_t^2) - E(\sigma_t^2) = 0$$

$$\cancel{u_t^2 - w_t} = 20 + 0{,}1\, u_{t-1}^2 + 0{,}2(u_{t-1}^2 - w_{t-1})$$

$$u_t^2 = 20 + 0{,}3\, u_{t-1}^2 + w_t - 0{,}2\, w_{t-1}$$

$E(w_t) = 0$ ✓

$Var(w_t) = \sigma_w^2$

$cov(w_t, w_{t-k}) = 0, \; k \neq 0$

$$Var(w_t) = E(w_t^2) = E((u_t^2 - \sigma_t^2)^2) =$$

$$\underset{3E(\sigma_t^4)}{E(u_t^4)} + E(\sigma_t^4) + 2E(u_t^2 \sigma_t^2)$$

$$4E(\sigma_t^4) + 2E(\sigma_t^4) =$$

$$= 6 \cdot const \text{ (см. выше)}$$

$$cov(w_t, w_{t-1}) = E(w_t w_{t-1}) - 0^2$$

$$= E((u_t^2 - \sigma_t^2)(u_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)) =$$

$$= \mathbb{E}\left((\nu_t^2 \sigma_t^2 - \sigma_t^2)(\nu_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\underbrace{(\nu_t^2 - 1)}_{0} \underbrace{(\nu_{t-1}^2 - 1)}_{0} \sigma_t^2 \sigma_{t-1}^2 \right) = 0$$

$$u_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

$$u_t^2 \sim ARMA(1,1)$$