1. Рассмотрим стационарную $VAR(1)$ модель

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix},$$

где (u_t) и (v_t) — некоррелированные белые шумы.

а) Является ли (a_t) причиной по Гренджеру для (b_t)? Является ли (b_t) причиной по Гренджеру для (a_t)?

б) Постройте импульсную функцию реакции (a_t) на единичное одноразовое изменение (v_t) на 0, 1 и 2 шага.

в) Постройте прогноз (a_t) из момента времени t на два шага вперед. В каком процентном соотношении дисперсия ошибки прогноза переменной a_{t+2} определяется шоками в переменных (u_t) и (v_t)? Эти проценты по-умному называются FEVD, forecast error variance decomposition.

2. Рассмотрим уравнение на векторный процесс (y_t)

$$y_t = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.04 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{pmatrix} y_{t-2} + \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix},$$

где (u_t) и (v_t) — некоррелированные белые шумы.

а) Имеет ли это уравнение стационарное решение? Правда ли, что в этом стационарном решении y_t не зависит от будущих значений u_{t+s} и v_{t+s}?

б) Рассмотрим векторный процесс $w_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}$. Докажите, что (w_t) удовлятворяет некоторому $VAR(1)$ уравнению вида $w_t = Aw_{t-1} + \nu_t$. Явно укажите вид матрицы A и вектора ошибок ν_t.

3. В байесовских VAR моделях часто предполагается, что ковариационная матрица вектора ошибок Σ имеет в качестве априорного обратное распределение Уишарта, $\Sigma \sim IW(S, v)$. Это означает, что функция плотности имеет вид

$$f(\Sigma) = \frac{1}{\Gamma_m(v/2)} (\det S)^{v/2} (\det \Sigma)^{-(v+m+1)/2} 2^{-vm/2} \exp \operatorname{tr}\big(-S\Sigma^{-1}/2\big),$$

где m — размерность вектора ошибок и Γ_m — многомерная гамма-функция.

К какой функции от Σ (с точностью до умножения на что-то от Σ не зависящее) стремится плотность обратного распределения Уишарта при $S = v^{1/m} I$ и $v \to 0$, где I — единичная матрица подходящего размера?

Примечание: формально получающаяся функция является несобственной функцией плотности, то есть интеграл под ней не равен единице, но это не мешает затем получить корректную апостериорную плотность. Данный частный случай вполне применяется на практике.

4. Рассмотрим копулу Клейтона,

$$C(u_1, u_2) = \max\{0, (u_1^t + u_2^t - 1)^{1/t}\},$$

где $t \le 1$.

а) Как связаны между собой величины U_1 и U_t при $t \to 0$?

б) Найдите условное распределение U_2 при $U_1 = 0.5$ и $t = -1$.

5. Рассмотрим стационарный процесс $AR(1) - GARCH(1,1)$:

$$\begin{cases} y_t = 2 + 0.3y_{t-1} + u_t \\ u_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \nu_t \sim \mathcal{N}(0;1) \\ \sigma_t^2 = 2 + 0.4\sigma_{t-1}^2 + 0.2u_{t-1}^2 \end{cases}.$$

Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(y_t)$.

6. Рассмотрим стационарный процесс со стохастической волатильностью $ARSV(1)$:

$$\begin{cases} u_t = \exp(h_t/2)\nu_t \\ \nu_t \sim \mathcal{N}(0;1) \\ h_t = 2 + 0.4h_{t-1} + \eta_t \\ \eta_t \sim \mathcal{N}(0;\sigma^2) \end{cases},$$

где последовательности ошибок (ν_t) и (η_t) независимы.

а) Найдите $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t \mid \mathcal{F}_{t-1})$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t)$.

б) Может оказаться, что в пункте (а) условная дисперсия будет меньше безусловной?

7. Предложите прикольную задачку по временным рядам. Лучше с решением, а то вдруг мы не сможем? Задачи из подборки задач, лекций, семинаров и контрольной не предлагать! :)