FEVD

Forecast Error Variance Decomposition

VAR(p) $\rightarrow$ VMA(∞)

$$y_{T+h} = \tilde{\mu} + \boxed{C_0 \vartheta_{T+h} + C_1 \vartheta_{T+h-1} +} \dots + C_h \vartheta_T$$

$$y_{T+h|T} = \tilde{\mu} + C_h \vartheta_T + C_{h+1} \vartheta_{T-1} + \dots$$

$$y_{T+h} - y_{T+h|T} = C_0 \vartheta_{T+h} + C_1 \vartheta_{T+h-1} + \dots + C_{h-1} \vartheta_{T+1}$$

$$\vartheta_t = B_0^{-1} \varepsilon_t \qquad \Psi_i = C_i B_0^{-1}$$

$$y_{T+h} - y_{T+h|T} = \Psi_0 \varepsilon_{T+h} + \Psi_1 \varepsilon_{T+h-1} + \dots + \Psi_{h-1} \varepsilon_{T+1}$$

$h = 2$, $n = 2$

$$\begin{array}{l} \text{GDP} \\ \begin{pmatrix} y_{1,T+2} - y_{1,T+2|T} \\ y_{2,T+2} - y_{2,T+2|T} \end{pmatrix} \\ \text{KR} \end{array} = \begin{pmatrix} \Psi_{011} & \Psi_{012} \\ \Psi_{021} & \Psi_{022} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,T+2} \\ \varepsilon_{2,T+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{111} & \Psi_{112} \\ \Psi_{121} & \Psi_{122} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,T+1} \\ \varepsilon_{2,T+1} \end{pmatrix}$$

$$FEV_1 = (\psi_{011}^2 + \psi_{111}^2) + (\psi_{012}^2 + \psi_{112}^2)$$

$$FEV_2 = (\psi_{021}^2 + \psi_{121}^2) + (\psi_{022}^2 + \psi_{122}^2)$$

	ε_1	ε_2	Σ
y_1	$\dfrac{\psi_{011}^2 + \psi_{111}^2}{FEV_1}$	$\dfrac{\psi_{012}^2 + \psi_{112}^2}{FEV_1}$	1
y_2	$\dfrac{\psi_{021}^2 + \psi_{121}^2}{FEV_2}$	$\dfrac{\psi_{022}^2 + \psi_{122}^2}{FEV_2}$	1

SVAR(p)

AB

A-mat

B-mat
$\downarrow$
$D\,\varepsilon_t$

$$B_0 y_t = \lambda + B_1 y_{t-1} + \ldots + B_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid\, N(0, \underline{\Sigma})$$

1) SVAR → VAR

2) Оценивание VAR

3) VAR → SVAR

1. $$B_0 y_t = \lambda + B_1 y_{t-1} + \ldots + B_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$n^2 \qquad\qquad n + n^2 p + n$$

$$y_t = B_0^{-1}\lambda + B_0^{-1}B_1 y_{t-1} + \dots + B_0^{-1}B_p y_{t-p} + B_0^{-1}\varepsilon_t$$

(2) $$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \nu_t$$

$$\mu = B_0^{-1}\lambda, \quad \Phi_i = B_0^{-1}B_i, \quad \nu_t = B_0^{-1}\varepsilon_t$$

$$n + n^2 p + \frac{n(n+1)}{2} \qquad \nu_t \sim iid\ N(0, \underline{\hat{\Omega}})$$

$$\cancel{n^2 p} + \cancel{2}n + n^2 \quad \vee \quad \cancel{n^2 p} + \cancel{n} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n + n^2 \quad \vee \quad \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$n_{SVAR} > n_{VAR} \rightarrow$ SVAR не идентиф.

$n_{SVAR} = n_{VAR} \rightarrow$ SVAR exactly identified
точная идентиф.

$n_{SVAR} < n_{VAR} \rightarrow$ SVAR сверхидентифиц

1) рекурсивная
2) Short-run
3) Long-run
4) Sign restrictions
5) Bayes

6) Heteroschedasticity

Recursive

$$B_0 = \begin{pmatrix} \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \lambda + B_1 y_{t-1} + \dots$$

$$\frac{(n-1)n}{2} + Var(\varepsilon_t): \Sigma \to I$$

$$\vartheta_t = B_0^{-1} \varepsilon_t$$

$$E(\vartheta_t \vartheta_t^T) = B_0^{-1} \overset{I}{\overset{\parallel}{E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T)}} (B_0^{-1})^T =$$

$$= B_0^{-1} (B_0^{-1})^T = \hat{\Omega}$$

1) SVAR → VAR

2) Оценивание VAR $\to \hat{\Omega}, \hat{\Phi}_i, \hat{\mu}$

3) VAR → SVAR

$\hat{B}_i$ ✓

$\hat{B}_0$ ✓

$\hat{\lambda}$

$$\hat{B}_0^{-1} = \mathrm{chol}(\hat{\Omega})$$

$$\hat{B}_i = \underbrace{\hat{B}_0}\,\underbrace{\hat{\Phi}_i}$$

$$\hat{\lambda} = \hat{B}_0 \hat{\mu}$$

Short-run

лог. цен

$$y_t = [\ln x_t,\ r_t,\ \ln p_t,\ \ln m_t]$$

лог. выпуска, ставка, лог. ден. массы

$$\ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right) = b_1(\ln x_t - \varepsilon_{as,t}),$$ Agg supply

$$\ln x_t = -b_2\left(r_t - \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)\right) - \varepsilon_{is,t}$$ IS

$$\ln m_t - \ln p_t = b_3 \ln x_t - b_4 r_t - \varepsilon_{md,t}$$

Money demand.

$$\ln m_t = \varepsilon_{ms,t}$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b_1^{-1} & 0 \\ b_2^{-1} & 1 & -1 & 0 \\ b_3 & -b_4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_0 y_t = B_1 y_{t-1} + D \varepsilon_t$$

$$D = \begin{pmatrix} b_1^{-1} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_t = B_0^{-1} D \varepsilon_t$$

$$E(\vartheta_t \vartheta_t^T) = B_0^{-1} \underbrace{\Sigma}_{D D^T} (B_0^{-1})^T$$

$$\Omega \to B_0, D$$

Long-run restrictions

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots \quad =$$

IRF

Cumulative IRF $(+\infty)$

$$\left(\underbrace{(I - \Phi_1 - \dots - \Phi_p)}_{}\right)^{-1} B_0^{-1} D =$$

$$= F B_0^{-1} D = \Psi$$

$$\Psi \Psi^T = F B_0^{-1} D D^T B_0^{-1 T} F^T$$

$$\nu_t = B_0^{-1} D \varepsilon_t \sim \quad \varepsilon_t \sim iid\, N(0, I)$$

$$E(\nu_t \nu_t^T) = B_0^{-1} D \underbrace{E(\varepsilon_t \varepsilon_t^T)}_{= I} D^T B_0^{T-1}$$

$$\Omega = B_0^{-1} D D^T B_0^{T-1}$$

$$\Psi \Psi^T = F \Omega F^T$$

Если мы ограничим Ψ как нижнетреуг., то Халецкий сработает

$$\hat{\Psi} = \hat{F}\, chol(\hat{\Omega})$$

$$\hat{B}_0^{-1} \hat{D} = \hat{F}^{-1} \hat{\Psi}$$

Blanchar, Quah 1989

ΔQ – growth rate of output

u_t – unemployment

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Q_t \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + A_1 \begin{pmatrix} \Delta Q_{t-1} \\ u_{t-1} \end{pmatrix} +$$

$$+ A_p \begin{pmatrix} \Delta Q_{t-p} \\ u_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t^Q \\ \varepsilon_t^u \end{pmatrix}$$

$\Psi(1,2)=0$

Sign Restrictions

1) $B_0 y_t = \lambda + B_1 y_{t-1} + \ldots + B_p y_{t-p} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim iid\, N(0, \Sigma)$

$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \ldots + \Phi_p y_{t-p} + u_t$

$u_t \sim iid\, N(0, \Omega)$

$u_t = B_0^{-1} \varepsilon_t$

B_0 – нижне треугольная

2) $\tilde{B}_0 y_t = \tilde{\lambda} + \tilde{B}_1 y_{t-1} + \ldots + \tilde{B}_p y_{t-p} + \omega_t \sim iid\, N(0, I)$

$\tilde{B}_i = Q B_i \quad \tilde{\lambda} = Q\lambda, \quad Q^T = Q^{-1}$

$Q Q^T = Q^T Q = I$

$Q B_0 y_t = Q\lambda + Q B_1 y_{t-1} + \ldots + Q B_p y_{t-p} + \omega_t$

$B_0 y_t = \lambda + B_1 y_{t-1} + \ldots + B_p y_{t-p} + \underbrace{Q^T \omega_t}_{\varepsilon_t}$

$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \ldots + \Phi_p y_{t-p} + u_t$

$u_t = (Q B_0)^{-1} \omega_t, \quad \Phi_i = B_0^{-1} B_i, \quad \mu = B_0^{-1} \lambda$

$$E(u_t u_t^T) = (QB_0)^{-1} E(w_t w_t^T)\left((QB_0)^{-1}\right)^T =$$

$$= B_0^{-1} \underbrace{Q^T Q}_{I} (B_0^{-1})^T = B_0^{-1} (B_0^{-1})^T = \Omega$$

$$\varepsilon_t = Q^T w_t$$

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \quad 0 \le \gamma \le \pi$$

$$w_t = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_0 = \underline{Q B_0}$$

1) $\gamma = 0 \Rightarrow \tilde{B}_0$ нижнетреуг.

2) $\gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tilde{B}_0$ - верхнетреугольная

Step 1. Оцениваем VAR → VMA

$\hat{C}_i$, $\hat{B}_0^{-1}$, $B_0^{-1}(B_0^{-1})^T = \Omega$

Step 2. Сэмпл. γ, считаем Q, $\hat{\tilde{B}}_0$, $\hat{\tilde{\Psi}}_i$

Step 3. Вычисляем IRF для конечного числа шагов (напр. 4 для квартальных)

Step 4. Если все знаки IRF совпадают с ожидаемыми, запоминаем.

Step 5. Повторяем 2-4