Привет

Хотим сложную модель

$\Downarrow$

Много параметров

$\Downarrow$

риск переподгонки

$\Downarrow$

желание „прижать" параметры к „разумным" константам

$\Downarrow$

например, можно взять байесов. подход.

Короткая схема б.п.

θ – пар-ры. $\quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \end{pmatrix}$

y – набл. ряд $\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$

Всё есть случайная величина!

одни с. величины набл-мы: y

другие с. величины ненабл.: θ.

на вход:

1 нов Априорное мнение о пар-х: $f(\theta)$

2 Модель для набл-ий $f(y|\theta)$, $f(y_{new}|y,\theta)$

3 данные y. издев-ва над обозначениями

$f(\theta)$ $\leftarrow$ $f_\theta(t)$

$f(y)$ $\quad$ $f_Y(y)$

на выходе:

(в нек-ром виде) приближение к: $f(\theta|y)$

$f(y_{new}|y)$

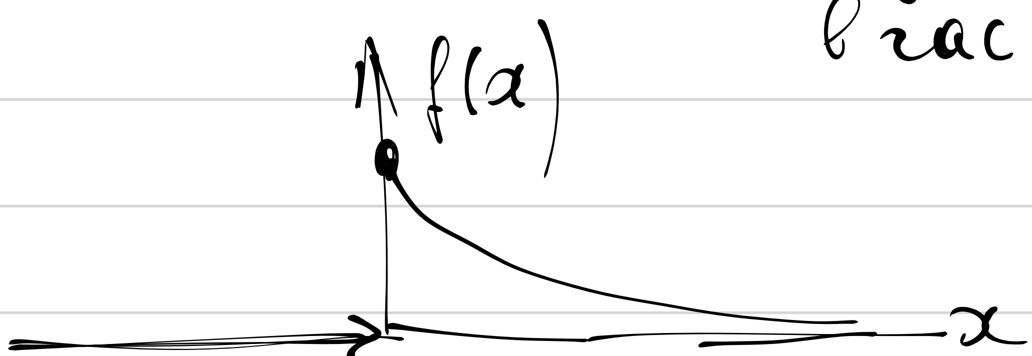
Априорное мнение задаётся (обычно) парам. и распр-ем

N, U, Exp, $\boxed{\text{Beta, Gamma, InvGamma.}}$

$$\begin{tikzcd} & \text{Exp} \arrow[d] & \\ & \text{Gamma} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{InvGamma} & & \text{Beta.} \end{tikzcd}$$

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad X \geq 0$ $\quad$ { время между происш-иями.

λ − ожид-ое кол-во происшествий в час [шт/час]



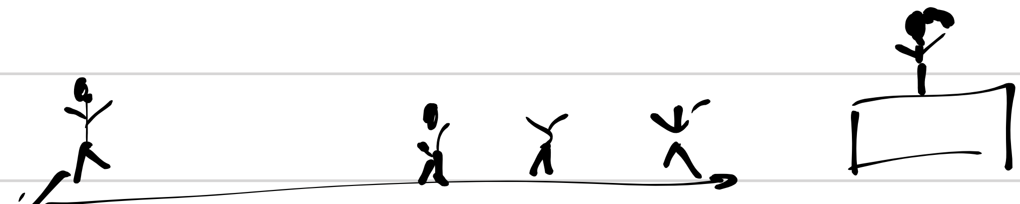
$E(X) = \int_0 x f(x) dx$

$\hookrightarrow E(X) = \frac{1}{\lambda}$ (шт)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Упр.



a чел.

$X_i \sim Exp(\lambda)$ незав. (время обсл. i-го)

$S = X_1 + \dots + X_a$

а) $E(S)$, $Var(S)$ $\quad E(S) = \frac{a}{\lambda}$ $\quad Var(S) = \frac{a}{\lambda^2}$

б) $f_S(s)$?

def S $\boxed{\text{наз-ся}}$ Gamma(a, λ) − распр-ой с.в-ой.

$\boxed{a=1}$ $\quad Exp(\lambda) = \text{Гамма}(1, \lambda)$ | $f_1(s) = \lambda \cdot \exp(-\lambda s)$

$\boxed{a=2}$

$$f(s) = \boxed{\int_0^s f_{X_1}(u) \cdot f_{X_2}(s-u)\, du} =$$

$$= \int_0^s \lambda \cdot \exp(-\lambda u) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda(s-u))\, du =$$

$$= \int_0^s \boxed{\lambda^2 \cdot \exp(-\lambda s)}\, du = \boxed{s \cdot \lambda^2 \cdot \exp(-\lambda s)}$$

$f_2(s)$

$X_1, X_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

$$P(X_1 + X_2 = s) = P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = s) + P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = s-1) + \ldots + P(X_1 = s) \cdot P(X_2 = 0)$$

$$\boxed{\sum_u P(X_1 = u) \cdot P(X_2 = s-u)}$$

$\boxed{a=3}$

$$f_3(s) = \int_0^s f_{X_1+X_2}(u) \cdot f_{X_3}(s-u)\, du =$$

$$= \int_0^s f_2(u) \cdot f_1(s-u)\, du = \int_0^s u \cdot \lambda^2 \cdot \exp(-\lambda u) \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda(s-u)) \cdot du =$$

$$= \lambda^3 \cdot \exp(-\lambda s) \cdot \int_0^s u\, du = \lambda^3 \cdot \exp(-\lambda s) \cdot \frac{s^2}{2}$$

для Гамма$(3, \lambda)$

Гамма(a, λ) $\quad \boxed{f_a(s) = \lambda^a \cdot \exp(-\lambda s) \cdot \frac{s^{a-1}}{(a-1)!}}$

для $a \in \mathbb{N}$

есть обобщение для $a \in (0; \infty)$:

Гамма (a, λ) $\quad f(s) = \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \boxed{\lambda^a \cdot \exp(-\lambda s) \cdot s^{a-1}}$

$\Gamma(a) = (a-1)!$

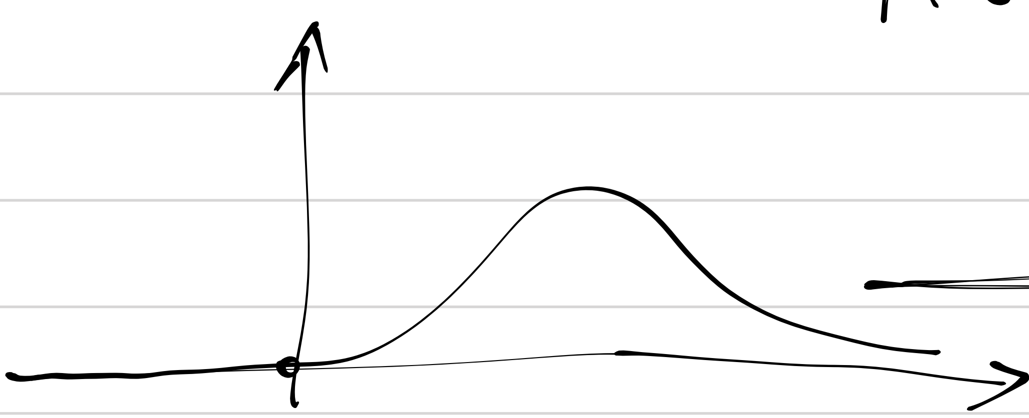
Упр.

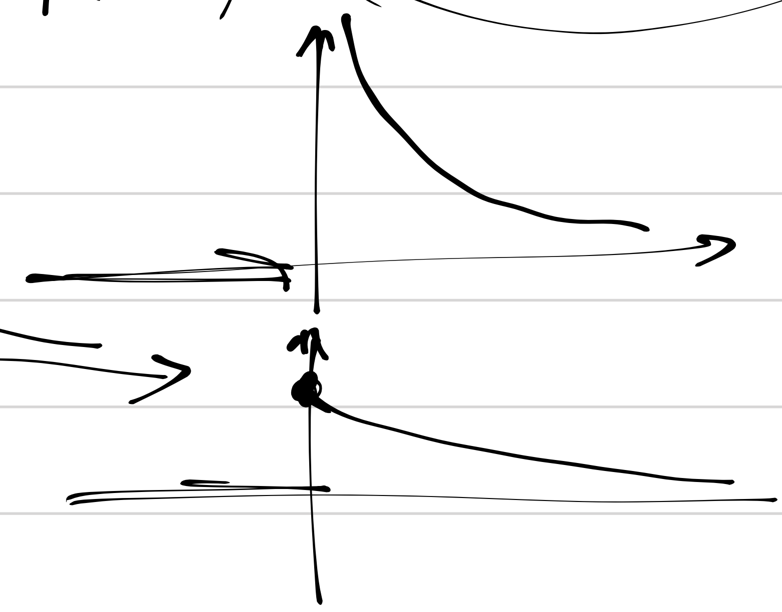
$X \sim Exp(\lambda)$

$Y \sim Gamma(a, \lambda)$

Как распр-е $5X$? $\lambda \cdot Y$?

$Exp\left(\frac{\lambda}{5}\right)$ $\quad$ $Gamma(a, 1)$





Упр-Опр

$X \sim Gamma(a, \lambda)$ $\quad$ $Y = \frac{1}{X} \sim InvGamma(a, \lambda)$

$f(y)$?

$\sigma_n^2 = a + b \cdot \sigma_{n-1}^2 + c \cdot u_{t-1}^2$

$$|f_Y(y)\,dy| = |f_X(x) \cdot dx| = \qquad x = \frac{1}{y}$$

$$= \left| \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^a \cdot x^{a-1} \cdot \exp(-\lambda x) \cdot dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^a \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{a-1} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy \right| =$$

$$= \boxed{\underbrace{\frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^a \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{a+1} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{y}\right)}_{f_Y(y)}}\, dy$$

$E(Y)$? $\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^a \cdot y \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{a+1} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{y}\right) dy = \left\{ \frac{1}{y} = x \right\}$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a \cdot \frac{1}{x}\, x^{a-1} \cdot \exp(-\lambda x)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)} \cdot \lambda^a \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{a-1} \cdot \exp(-\lambda x)\, dx =$$

$$= \frac{\lambda}{\Gamma(a)} \underbrace{\boxed{\int_0^\infty \lambda^{a-1} \cdot x^{a-2} \cdot \exp(-\lambda x)\, dx}}_{\Gamma(a-1)} =$$

$$= \frac{\lambda \cdot \Gamma(a-1)}{\Gamma(a)} = \frac{\lambda}{a-1}$$

инт (почему?)

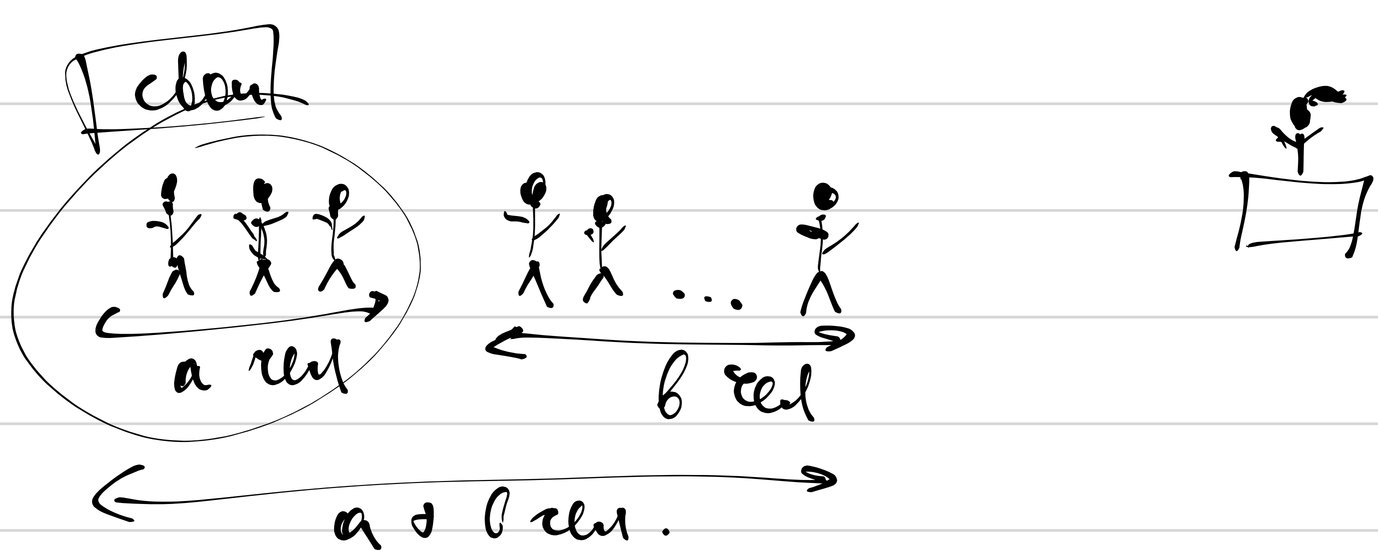
Exp

↓

Gamma

↙ ↘

InvGamma Beta



$X_1, \dots X_a \; X_{a+1} \dots X_{a+b}$ $X_i \sim$ нез $\exp(\lambda)$

Упр-Опр

R – доля времени на обслуж-ие „своих"

$$R = \frac{Y_a}{Y_a + Y_b}$$ $Y_a \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$, $Y_b \sim \text{Gamma}(b, \lambda)$

$R \in [0; 1]$ $E(R) = \frac{a}{a+b}$.

$$R = \frac{\lambda Y_a}{\lambda Y_a + \lambda Y_b} \qquad \lambda Y_a \sim \text{Gamma}(a, 1)$$

$\text{Beta}(a, b)$

$f(r)$

Упр.

Трюк!

$$W_a = \lambda \cdot Y_a \sim \text{Gam}(a, 1)$$
$$W_b = \lambda \cdot Y_b \sim \text{Gam}(b, 1)$$

незав.

$$R = \frac{W_a}{W_a + W_b} \qquad f(r)\,?$$

$$S = W_a + W_b \sim \text{Gamma}(a+b, 1)$$

а) $f(r, s)$?

зависимы ли R и S?

б) $f(r)$?

$$f(r,s) = f(w_a, w_b) \cdot \left| \frac{\partial(w_a, w_b)}{\partial(r, s)} \right| =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(a)} \cdot w_a^{a-1} \cdot \exp(-w_a)}_{f(w_a)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\Gamma(b)} \cdot w_b^{b-1} \cdot \exp(-w_b)}_{f(w_b)} \cdot s$$

$$r = \frac{w_a}{w_a + w_b} \qquad w_a = r \cdot s$$
$$s = w_a + w_b \qquad w_b = (1-r) \cdot s$$

$$\det J = \det \begin{pmatrix} s & r \\ -s & 1-r \end{pmatrix} =$$
$$= s - sr + sr = s$$

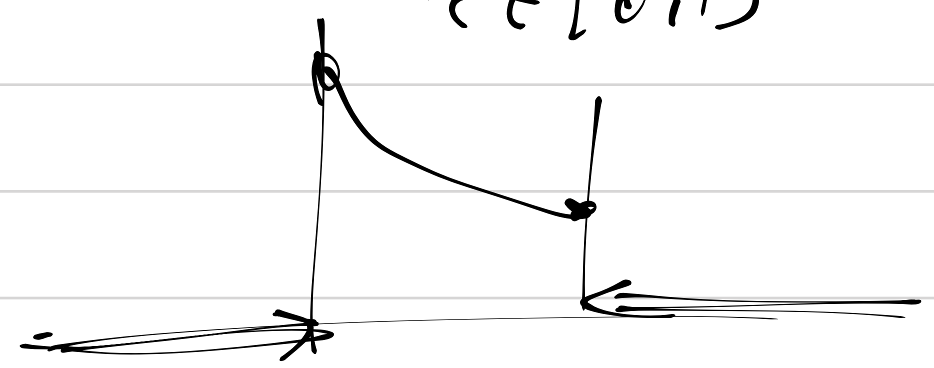
$$= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot (rs)^{a-1} \cdot \exp(-s) \cdot ((1-r)\cdot s)^{b-1} \cdot s =$$

$$f(r,s) = \boxed{\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot r^{a-1} \cdot (1-r)^{b-1}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{\Gamma(a+b)} \cdot s^{a+b-1} \cdot \exp(-s)}}_{f(s)}$$

ф. плотн. Beta(a, b)

$$f(t) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \cdot t^{a-1}(1-t)^{b-1}$$

$t \in [0;1]$



Упр. $X \sim Beta(a, b)$ $\quad 1 - X \sim ?\ Beta(b, a)$

$a = 1$
$b = 10^6$

$Var(X) \overset{?}{\approx} 0$

$E(X) = \frac{1}{10^6+1} \approx 0.$

Почему?

пр. $N(\ .\ )$

Gamma $\longrightarrow \chi^2$

E(Inv Gamma) = !