$\boxed{\text{VAR}}\text{MA}$

$\text{SARIMA}\cancel{\boxed{\text{X}}}$

$$\vec{X}_t = (x_t^1, \ldots x_t^K)^T$$

Сильная стац:

$$f_2(x_t^1, x_t^2) = f_2(x_{t+\tau}^1, x_{t+\tau}^2) \quad \forall \tau$$

Слабая стац:

$$\underline{E}(\vec{X}_t) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_K \end{pmatrix} \quad \forall t$$

$\operatorname{Corr}(x_t^i, x_{t+\tau}^j)$ зависит только от τ

$$\begin{cases} Y_t = C_t + Z_t \\ C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t \end{cases}$$

Y_t - национальный доход

C_t - потребление

Z_t - экзогенная

Z_t - инвестиции, u_t - WN

$$
\begin{cases}
C_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{\beta}{1-\beta} z_t + \dfrac{1}{1-\beta} u_t \\
Y_t = \dfrac{\alpha}{1-\beta} + \dfrac{1}{1-\beta} z_t + \dfrac{1}{1-\beta} u_t
\end{cases}
$$

В 1980 Симс предложил исп. VAR

Tsay, 300

$\vec{r}_t$ — доходность (лог-доходность)

$$\vec{\mu} = E(r_t) \quad \Gamma_0 = E[(\vec{r}_t - \vec{\mu}_t)(\vec{r}_t - \vec{\mu}_t)^T]$$

$$\Gamma_0 = [\Gamma_{ij}(0)]$$

$$D = \operatorname{diag}\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \ldots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\}$$

$$\rho_0 \equiv [\rho_{ij}(0)] = D^{-1}\Gamma_0 D^{-1}$$

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{\operatorname{Cov}(r_{it}, r_{jt})}{\operatorname{std}(r_{it})\operatorname{std}(r_{jt})}$$

$\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$, $\quad -1 \le \rho_{ij}(0) \le 1$,

$\rho_{ii}(0) = 1$

$$\Gamma_\ell \equiv [\Gamma_{ij}(\ell)] = E[(\vec{r}_t - \vec{\mu})(\vec{r}_{t-\ell} - \mu)^T$$

$$\Gamma_{ij}(l) = cov(r_{i,t}, r_{j,t-l})$$

$$\rho_l \equiv [\rho_{ij}(l)] = D^{-1} \Gamma_l D^{-1}$$

$$\rho_{ij}(l) = \frac{cov(r_{it}, r_{j,t-l})}{std(r_{it})\, std(r_{jt})}$$

$$\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l)$$

$$\{\rho_l \mid l = 0, 1, \ldots\}$$

1) $\{\rho_{ii}(l) \mid l = 0, 1, \ldots\}$ - ACF

2) $\rho_{ij}(0)$, $i \neq j$ - concurrent корреляции в рамках одного периода

3) $l > 0$, $\rho_{ij}(l)$ s.t. $i \neq j$ корреляции переменных с лагом по времени

Интерпретация

1) r_{it}, r_{jt} не имеют лин. связи, если $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0 \quad \forall\, l \geq 0$

2) r_{it}, r_{jt} одновр. скоррелированы, если $\rho_{ij}(0) \neq 0$

Стр. 302.

Оценки:

$$\hat{\Gamma}_\ell = \frac{1}{T} \sum_{t=\ell+1}^{T} (\vec{r}_t - \bar{\vec{r}})(r_{t-\ell} - \bar{\vec{r}})^T, \quad \ell \geq 0$$

$$\hat{\rho}_\ell = \hat{D}^{-1} \hat{\Gamma}_\ell \hat{D}^{-1}, \quad \ell \geq 0$$

VARMA(p, q)

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{t-i} + \vartheta_t + \sum_{i=1}^{q} \Psi_i \vartheta_{t-i}$$

$$\vartheta \sim N(0, \Omega)$$

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_{i11} & \cdots & \varphi_{i1n} \\ \vdots & & \\ \varphi_{in1} & & \varphi_{inn} \end{pmatrix}$$

$$n + p \cdot n^2 + \underbrace{n + \frac{n(n-1)}{2}}_{\frac{n(n+1)}{2}} + q n^2$$

$$5 + 250 + \frac{25+5}{2} + 10 \cdot 25$$

VAR(p)

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{t-i} + \upsilon_t$$

$$\left(I - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i L^i\right) y_t = \mu + \upsilon_t$$

$$\left| I - \sum_{i=1}^{p} \Phi_i z^i \right| = 0$$

$$|z_i| > 1$$

$$\hat{y}_t = \hat{\mu} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\Phi}_i y_{t-i} \quad , \quad \hat{\Omega}$$

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{t-i} + \upsilon_t$$

$$E(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) = \mu + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i y_{T-i}$$

$$\hat{E}(y_{T+1} \mid \mathcal{F}_T) = \hat{\mu} + \sum_{i=1}^{p} \hat{\Phi}_i \boxed{y_{T-i}}$$

IRF

Impulse Response Function

VAR(p) → VMA(∞)

VAR(1)

$$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \nu_t =$$

$$= \mu + \Phi_1(\mu + \Phi_1 y_{t-2} + \nu_{t-1}) + \nu_t$$

$$\ldots$$

$$= (I + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots)\mu + \nu_t + \Phi_1 \nu_{t-1} + \Phi_1^2 \nu_{t-2} + \ldots$$

$$= (I - \Phi_1)^{-1}\mu + \nu_t + \Phi_1 \nu_{t-1} + \Phi_1^2 \nu_{t-2} + \ldots$$

VAR(p) → VAR(1)

$$y_t = \mu + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \ldots + \Phi_p y_{t-p} + \nu_t$$

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+2} \\ y_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & & \Phi_p \\ I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \\ y_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_t = M + \Phi Y_{t-1} + U_t$$

Способ 2.

$$\Phi(L) y_t = \mu + \nu_t$$

$$\Phi(L) = I - \Phi_1 L - \ldots - \Phi_p L^p$$

$$C(L) = C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + \dots$$

$$C(L)\,\Phi(L) = I$$

$$C(L)\,\Phi(L)\,y_t = C(L)\,\mu + C(L)\,\nu_t$$

$$y_t = C(L)\,\mu + C(L)\,\nu_t)$$

$$y_t = \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i\right)\mu + C_0\,\nu_t + C_1\,\nu_{t-1} + C_2\,\nu_{t-2} + \dots$$

$$y_t = \tilde{\mu} + C_0\,\nu_t + C_1\,\nu_{t-1} + C_2\,\nu_{t-2} + \dots$$

$$I = C(L)\,\Phi(L) =$$

$$= (C_0 + C_1 L + C_2 L^2 + \dots)(I - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L)$$

$$= C_0 + (C_1 - C_0\Phi_1)L + (C_2 - C_1\Phi_1 - C_0\Phi_2)L^2 + \dots$$

$$+ (C_i - C_{i-1}\Phi_1 - C_{i-2}\Phi_2 - \dots - C_0\Phi_i)L^i \dots$$

$$I = C_0$$

$$0 = C_1 - C_0\Phi_1$$

$$0 = C_2 - C_1\Phi_1 - C_0\Phi_0$$

$$\vdots$$

$$0 = C_i - C_{i-1}\Phi_1 - C_{i-2}\Phi_2 - \dots - C_0\Phi_i$$

$C_0 = I$

$C_i = C_{i-1}\Phi_1 + C_{i-2}\Phi_2 + \ldots + C_0\Phi_i$

ν_t - iid

$E(\nu_t) = 0$

$Var(\nu_t) = \Omega$

$$y_t = \tilde{\mu} + C_0\nu_t + C_1\nu_{t-1} + C_2\nu_{t-2} + \ldots$$

Импф

KR

$$\begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}^1 \\ \tilde{\mu}^2 \end{pmatrix} + C_0 \begin{pmatrix} \nu_t^1 \\ \boxed{\nu_t^2} \end{pmatrix} + \boxed{C_1} \begin{pmatrix} \nu_{t-1}^1 \\ \boxed{\nu_{t-1}^2} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \nu_{t-2}^1 \\ \nu_{t-2}^2 \end{pmatrix}$$

1) Ω - диаг.

2) Ω - не диаг.

$$\begin{pmatrix} C_{111} & \boxed{C_{112}} \\ C_{121} & C_{122} \end{pmatrix}$$

2) $\boxed{\nu_t \sim (0, \Omega)}$ не диаг. , $\boxed{\varepsilon_t \sim (0, I)}$

$B_0\nu_t = \varepsilon_t$

$\nu_t = B_0^{-1}\varepsilon_t$

$B_0\nu_t = \boxed{\varepsilon_t}$

$\nu_t = B_0^{-1}\varepsilon_t$

$Var(\nu_t) = Var(B_0^{-1}\varepsilon_t)$

$\Omega = B_0^{-1} I B_0^{-1T}$

$$\boxed{\Omega = B_0^{-1} B_0^{-1T}}$$

B_0^{-1}

идентиф. матрица

$$\overset{B_0^{-1}\varepsilon_t}{}$$

$$y_t = \tilde{\mu} + \underbrace{C_0 \vartheta_t + C_1 \vartheta_{t-1}} + C_2 \vartheta_{t-2} + \dots$$

$$y_t = \tilde{\mu} + C_0 B_0^{-1} \varepsilon_t + C_1 B_0^{-1} \varepsilon_{t-1} + \dots$$

$$y_t = \tilde{\mu} + \Psi_0 \varepsilon_t + \Psi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots$$

Orthogonal IRF

1) На графиках мы стоим в 0 и смотрим на реакцию в будущем

2) Можно смотреть кумулятивно