TS07

- → L
- → AR: уравнение VS процесс
- → разложение Вольда

L на бытовом уровне

$$Ly_t = y_{t-1}$$
$$L^2 y_t = y_{t-2}$$
$$L7 = 7$$

лаг определен на последовательностях!

нюанс 1. $L : (a_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty} \to (b_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$

$L' = L$

y_t → речь об одной случ. величине y_t

y_t → речь о последовательности $(y_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$

$$L(\ldots -2 \to y_{-2}, -1 \to y_{-1}, 0 \to y_0, 1 \to y_1 \ldots) =$$

$$= (\ldots -2 \to y_{-3}, -1 \to y_{-2}, 0 \to y_{-1}, 1 \to y_0 \ldots)$$

$$L(\ldots -2 \to y_7, -1 \to y_5, 0 \to y_3, 1 \to y_1 \ldots) =$$

$$\overset{?}{=} (\ldots -1 \to y_7, 0 \to y_5, 1 \to y_3 \ldots)$$

$L^{-1} = F^1$ (лаг обратный)

Нюанс: А можно ли обратить $1-0{,}3L$?

$$(a_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty} \xrightarrow{1-0{,}5L} (b_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$$

?

нет !

$$(x_n) = (\ldots 16, 8, 4, 2, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4} \ldots)$$

-2, -1, $t=0$, 1, 2

$$(y_n) = (\ldots 8, 4, 2, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{8} \ldots)$$

-2, -1, $t=0$, 1, 2

$x_n \neq y_n$!

Пример.

$x_n \to 1\cdot x_n - \frac{1}{2} x_{n-1}$

$t=-1$, $t=0$, $t=1$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}L\right)\cdot(x_n) = \left(\ldots\ldots 4-\tfrac{1}{2}8,\ 2-\tfrac{1}{2}4,\ 1-\tfrac{1}{2}2, \ldots\right) = (\ldots, 0, \ldots)$$

$$\left(1-\tfrac{1}{2}L\right)\cdot(y_n) = \left(\ldots, 1-\tfrac{1}{2}2, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}1 \ldots\right) = (\ldots, 0, \ldots)$$

$t=0$.

$$A(x) \longrightarrow A\cdot x \qquad \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda\cdot A(x),\quad \Rightarrow A(x+y) = A(x) + A(y)$$

$t=0$

$$(x_n) \quad (\ldots -9, 5, 3, 6 \ldots)$$

$$(0{,}1\cdot x_n) \quad (\ldots -0{,}9, 0.5, 0.3, 0.6 \ldots)$$

$$L\left((0.1\cdot x_n)_{n=-\infty}^{\infty}\right) = 0{,}1\cdot L\left((x_n)_{n=-\infty}^{\infty}\right)$$

$L\cdot$ 🐭 $= L($🐭$)$ ~~cos · 🐭~~

$$\frac{d}{dt}\cdot(t^2)$$

мораль $D = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}L}$ для произв-х послед-стей.

нет действия

в учебниках

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}L} = 1+\frac{1}{2}L+\left(\frac{1}{2}L\right)^2+\left(\frac{1}{2}L\right)^3+\ldots$$

Теорема. Для стационарного процесса полином от лага $A(L)$ обратим если и только если у $A(L)$ нет корня ℓ с $|\ell|=1$.

$E(y_t)=\mu \quad \forall t,k$

$Cov(y_t, y_{t-k})=\gamma_k$

→ Aad van der Vaart

Q. послед-сть (y_t) – стационарная и неслучайная. Как она выглядит?

A. $(y_t) = (\ldots \mu, \mu, \mu, \mu, \mu \ldots)$

Q. (x_n) – послед-сть констант.

$$\left(1-\frac{1}{2}L\right)\cdot(x_n) = (\ldots 7, 7, \underset{t=0}{7}, 7, 7, 7 \ldots)$$

(x_n)?

$$\mu-\frac{1}{2}\mu = 7$$

$$(x_n) = (\ldots 14, \underset{t=0}{14}, 14, \ldots\ldots)$$

Пример.

$$(1-L)\cdot(\ldots 7, 7, 7, 7 \ldots) = (\ldots 0, 0, 0 \ldots)$$

$$(1-L)\cdot(\ldots 8, 8, 8, 8 \ldots) = (\ldots 0, 0, 0 \ldots)$$

$(1-\frac{1}{2}L)$ $(1-\frac{1}{2}L)$ способ 1

способ 2

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}L} \overset{?}{=} 1+\frac{1}{2}L+\left(\frac{1}{2}L\right)^2+\left(\frac{1}{2}L\right)^3+\ldots$$

$$(1-2L)^{-1}=\frac{1}{1-2L} \overset{?}{=} \to 1+(2L)+(2L)^2+(2L)^3+\ldots$$

плохой вариант

нет сходимости даже для последа конст.

$1-2L=0$

$L=\frac{1}{2}$

$$\left(1+(2L)+(2L)^2+(2L)^3+\ldots\right)\cdot(\ldots 1,1,1,1,\ldots)$$

$1 \to 1+2+4+8+16+\ldots$

$$\frac{1}{1-2L}=\frac{F}{F(1-2L)}=\frac{F}{F-2}=$$

$F^{-1}=L$

$L^{-1}=F$

$$=\frac{F\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}F}=-\frac{1}{2}F\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}F}=$$

$$=-\frac{1}{2}F\cdot\left(1+\frac{1}{2}F+\left(\frac{1}{2}F\right)^2+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}F-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot F^2-\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot F^3\ldots$$

Рекур. ур-ия.

$$y_t=0{,}5y_{t-1}+u_t$$

$\to y_{t-1}=2y_t-2u_t$

, $u_t \sim$ б. шум

$E(u_t)=0$

$Var(u_t)=\sigma_u^2$

Ут. Есть много случайных процессов подходящих в это уравнение.

пример!

$(a_t)\to$ $y_0=42$ $\quad y_1=21+u_1 \quad y_2=10.5+\frac{u_1}{2}+u_2 \ldots$

$\to y_{-1}=84-2u_0 \quad y_{-2}=168-4u_0-2u_1 \ldots$

$(b_t)\to$ $y_0=\frac{456}{417} \to y_1=2\cdot\frac{456}{417}+u_1 \quad y_2=\ldots$

$\to y_{-1} \to y_{-2} \ldots$

AR(1) - процесс

[Группа 1] любое решение ур-ия

Андрей (*) $y_t = \mu + \beta \cdot y_{t-1} + u_t$, u_t - б. шум.

[Группа 2] только стац-ое решение

Борис (*) $y_t = \mu + \beta y_{t-1} + u_t$, u_t - б. шум.

[Группа 3] [только стац-ое решение]

Вова (*) $y_t = \mu + \beta \cdot y_{t-1} + u_t$, u_t - б. шум

$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$

[$y_t \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)]

[Группа 4] [soft] 95% statsmodels.

Гоша только стац-ое решение

(*) $y_t = \mu + \beta \cdot y_{t-1} + u_t$ $u_t \sim N(0;\sigma^2)$ керас

и [$y_t \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)]

[Группа 5] те, кто не понимают разницу

Дима !! ур-ие и процессом.

(u_t) - б. шум	(u_t) - б. шум
$y_t = 0{,}5 y_{t-1} + u_t$ (1)	$y_t = 2 \cdot y_{t-1} + u_t$ (2)
(y_t) - стац. процесс	(y_t) - стац. процесс.
Борис: AR(1)	Борис: AR(1)
$\boxed{(1-0{,}5L)} \cdot y_t = u_t$	$\boxed{(1-2L)} \cdot y_t = u_t$
$y_t = \frac{1}{1-0{,}5L} \cdot u_t$	$y_t = \frac{1}{1-2L} \cdot u_t$
$y_t = \left(1 + \frac{1}{2}L + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^3 \ldots\right) \cdot u_t$	$y_t = -\frac{1}{2}F\left(1 + \left(\frac{1}{2}F\right) + \left(\frac{1}{2}F\right)^2 + \ldots\right) \cdot u_t$
$y_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \frac{1}{4}u_{t-2} + \frac{1}{8}u_{t-3} + \ldots$	$y_t = -\frac{1}{2}u_{t+1} - \frac{1}{4}u_{t+2} - \frac{1}{8}u_{t+3} \ldots$
Вова: $(y_t) \sim AR(1)$	Вова: $(y_t) \not\sim AR(1)$

AR(p) процесс [одно из возможных опр-ий]

$$\begin{cases} A(L)\cdot(y_t-\mu)=u_t \\ (u_t) - \text{б. шум.} \\ y_t - \text{стац-н.} \\ y_t \sim MA(\infty) \text{ отн-но } u_t \\ y_t=\mu+u_t+\alpha_1\cdot u_{t-1}+\alpha_2\cdot u_{t-2}+\ldots \\ A(0)=1 \iff A(L)=(1-\beta_1 L-\beta_2 L^2-\ldots-\beta_p L^p) \\ \beta_p\neq 0 \end{cases}$$

+ [$u_t \sim N(0;\sigma^2)$ и незав.]

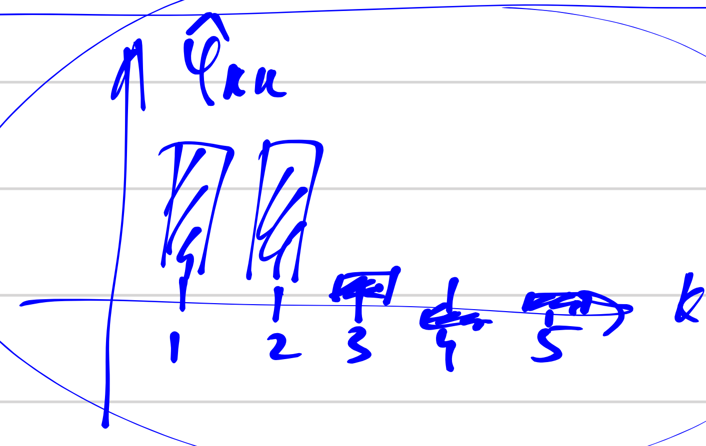
Теор. Если (y_t) − AR(p) процесс, то

$$\varphi_{p+1,p+1}=\varphi_{p+2,p+2}=\ldots=\varphi_{p+s,p+s}=0, \quad s\geq 1$$

$$\varphi_{kk}=pCorr(y_t, y_{t-k}; y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots y_{t-k+1})$$

$$\boxed{y_{t-k}}, \underbrace{y_{t-k+1}, y_{t-k+2} \ldots y_{t-2}, y_{t-1}}, \boxed{y_t}$$

Мораль.



→ гипотеза: разумно оценить AR(2) для (y_t).

Ex. (y_t) − AR(2) процесс с ур-нием:

$$y_t=5+0{,}3\,y_{t-1}-0{,}02\,y_{t-2}+u_t$$

φ_{22}? φ_{33}? φ_{44}?

$u_{t-2}, u_{t-3}, \ldots$

$Cov(u_t, y_{t-2})=0$

$Cov(u_t, y_{t-1})=0$

решение: $\varphi_{22}=-0{,}02$

$$y_t = 5 + 0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_{t-2} + u_t$$

φ_{33} ?

$$y_{t-3} \quad \underset{\text{FIX}}{y_{t-2}} \quad \underset{\text{FIX}}{y_{t-1}} \quad y_t$$

$$y_t = 5 + \boxed{0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_{t-2}} + 0 \cdot y_{t-3} + u_t$$

$\operatorname{cov}(u_t, y_{t-1}) = 0$

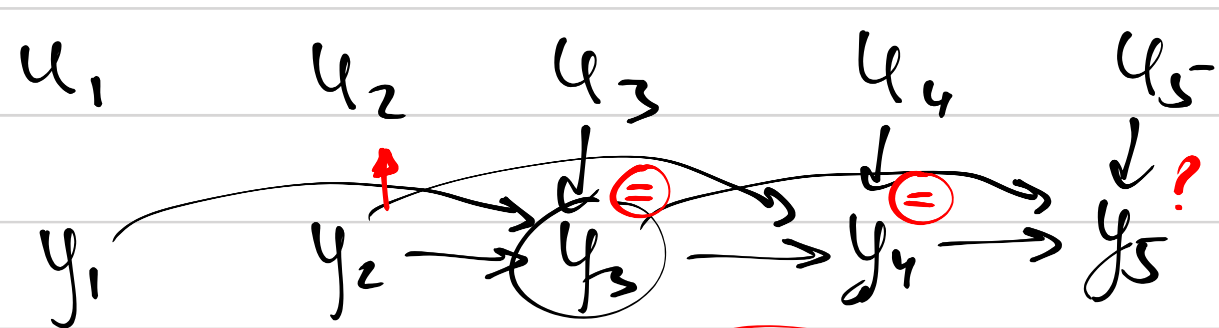
$\operatorname{cov}(u_t, y_{t-2}) = 0$

$\operatorname{cov}(u_t, y_{t-3}) = 0$

$\varphi_{33} = 0.$

$$y_t = 5 + 0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_{t-2} + 0 \cdot y_{t-3} + 0 \cdot y_{t-4} + u_t$$

$\varphi_{44} = 0$



$\boxed{\varphi_{33} = 0}$

Теорема. $A(L) \cdot (y_t - \mu) = u_t$ u_t – б. шум.

Если у $A(L)$ есть корень $|l| = 1$, то стац. реш. нет.

Если у $A(L)$ все корни $|l| > 1$, то стац. реш. единственно и имеет $MA(\infty)$ вид отн. по (u_t)

Если у $A(L)$ есть корни $|l| < 1$, нет $|l| = 1$, то стац. решение единственно, но не имеет $MA(\infty)$ вид

$$y_t = 5 + 0{,}3\,y_{t-1} - 0{,}02\,y_{t-2} + u_t$$

характеристический многочлен.

лаговый многочлен

$A(L) = 1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2$

$y_t = 0{,}3\,y_{t-1} - 0{,}02\,y_{t-2}$

$A(L)\cdot y_t = y_t - 0{,}3y_{t-1} + 0{,}02y_{t-2}$

$y_t = \lambda^t$

$\lambda^t = 0{,}3\lambda^{t-1} - 0{,}02\lambda^{t-2}$

$char(\lambda) = 1\cdot\lambda^2 - 0{,}3\lambda + 0{,}02$

$char(\lambda) = 0 \iff A(l) = 0$

$\lambda = l^{-1}$ $\quad l = \lambda^{-1}$

$\lambda^2 - 0{,}3\lambda + 0{,}02 = 0$

$\lambda_1 = 0{,}2 \quad \lambda_2 = 0{,}1 \qquad |\lambda_1| < 1 \quad |\lambda_2| < 1$

Теорема. $A(L)\cdot(y_t - \mu) = u_t$ $\quad u_t$ - б. шум.

Если у $char(\lambda)$ есть корень $|\lambda| = 1$, то стац. реш. нет.

Если у $char(\lambda)$ все корни $|\lambda| < 1$, то стац. реш. единственно и имеет $MA(\infty)$ вид отн. по (u_t)

Если у $char(\lambda)$ есть корни $|\lambda| > 1$, нет $|\lambda| = 1$, то стац. решение единственно, но не имеет $MA(\infty)$ вид

!!