Привет !! "$\overset{\circ}{\smile}$"

Тест Дики - Фуллера [Dickey - Fuller]
[Расширенный]
Augmented DF - test.

Q. надо ли моделир-ть y_t или Δy_t?

ADF-тест „с константой"

H_0: Δy_t - стац-ый $AR(p)$ процесс с [возможно] ненулевым $E(\Delta y_t)$.

H_A: y_t - стац-ый $AR(p+1)$ процессом с [возможно] ненулевым ожид-ием

$$\Delta y_t = c + \gamma \cdot y_{t-1} + \alpha_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \ldots + \alpha_p \Delta y_{t-p} + u_t$$

(u_t) - б. шум

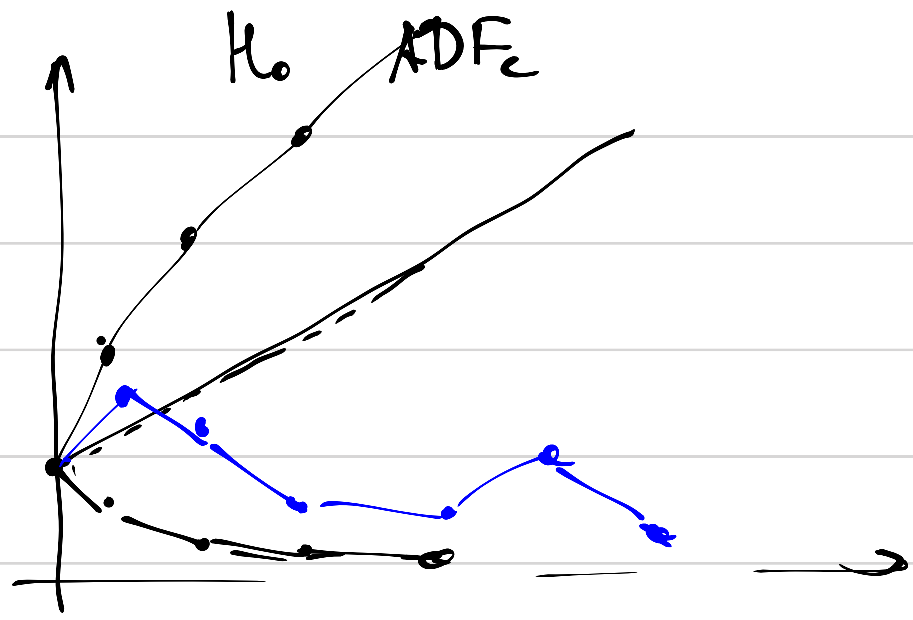
H_0: $\gamma = 0$.

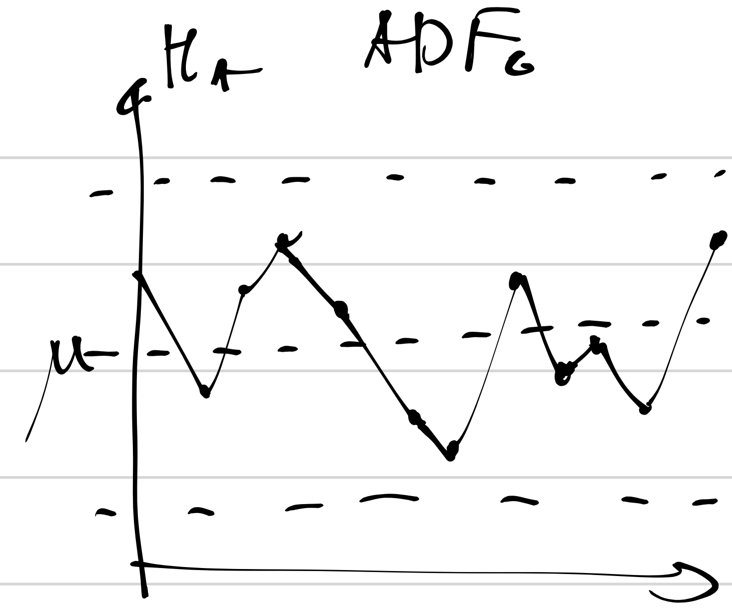
H_A: $\gamma < 0$

$$y_t - y_{t-1} = c + \gamma \cdot y_{t-1} + \ldots + \ldots - \alpha_p \cdot y_{t-p-1} + u_t$$

H_0: $y_t = y_0 + \mu \cdot t + \sum_{i=1}^{t} x_i$ $x_i \sim$ стац. $AR(p)$ с $E(x_i) = 0$

H_A: $y_t = \mu + x_t$, где $x_t \sim$ стац $AR(p+1)$ с $E(x_t) = 0$





техническое устройство

регрессия (МНК)

$$\widehat{\Delta y_t} = \hat{c} + \hat{\gamma} \cdot y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \dots + \hat{\alpha}_p \Delta y_{t-p}$$

$$ADF = \frac{\hat{\gamma} - 0}{se(\hat{\gamma})}$$

$\hat{\gamma}$ – МНК-оценка коэф-та

в нулевой гипотезе (y_t) зависимы, нестац-ый процесс при верной H_0

$ADF \xrightarrow[T\to\infty]{dist} ADF_c$ специальное распр-ие

$se(\hat{\gamma})$ ← корень из соотв. го элемента оценки ков-ой м-цы

$$\hat{y} = X \cdot \hat{\beta} \qquad RSS = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

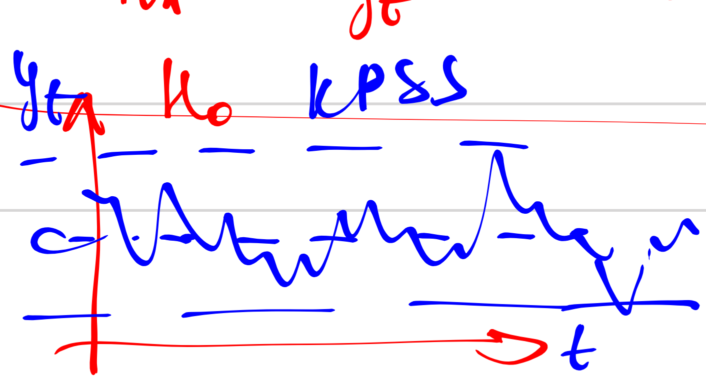
$$\widehat{Var}(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} \cdot \frac{RSS}{n-k}$$

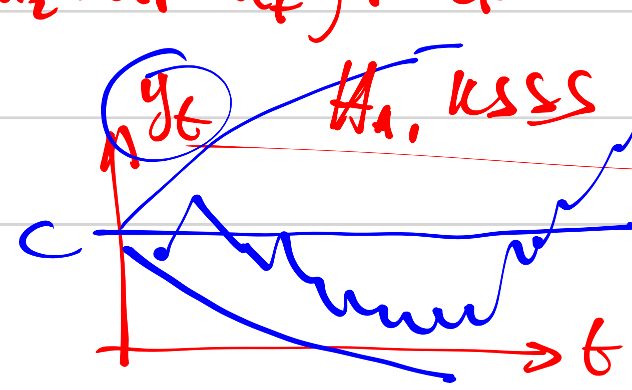
KPSS

H_0: $y_t = c + x_t$

$x_t \sim$ стац. с $E(x_t) = 0$.

H_1: $y_t = c + (u_1 + u_2 + \dots + u_t) + x_t$ независ. (u_t)





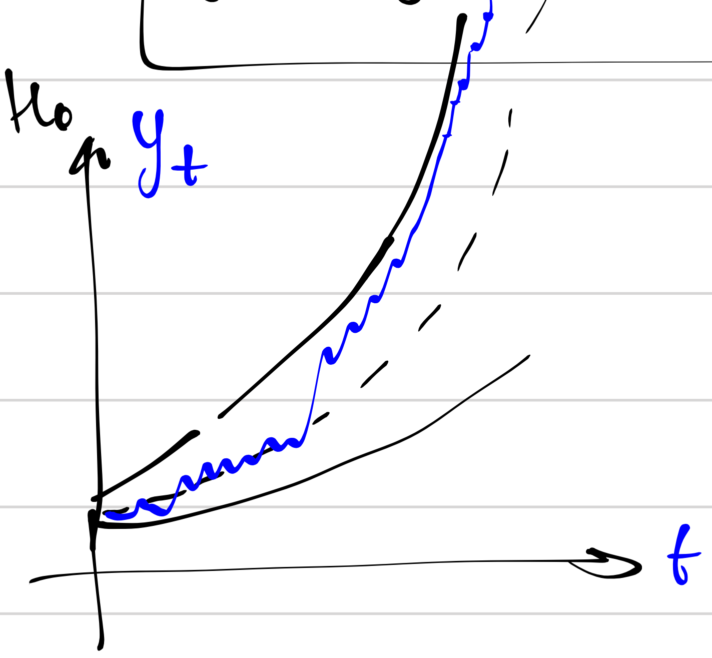
ADF-тест с константой и трендом

$$\Delta y_t = c + b\cdot t + \gamma y_{t-1} + \alpha_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \dots + \alpha_p \Delta y_{t-p} + u_t$$

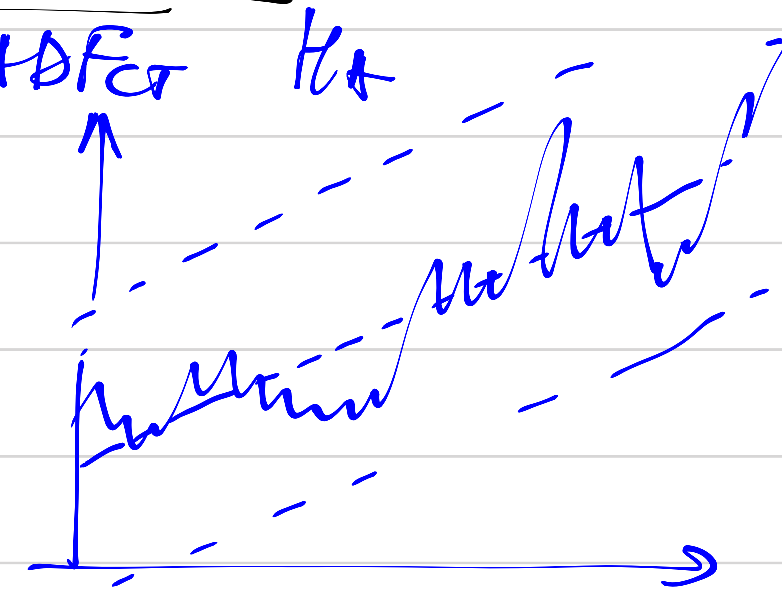
H_0: $\gamma = 0$. $\quad \Delta y_t = k_1 + k_2 \cdot t + x_t \quad$ x_t ~ стац AR(p) с $E(x_t)=0$.

$$\boxed{y_t = y_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \sum_{i=1}^{t} x_i}$$

$ADF_{ст}$ H_0



$ADF_{ст}$ H_A



H_A: $\gamma < 0$ $\quad y_t = y_0 + \mu_1 t + x_t \quad$ x_t ~ стац AR(p+1)

Технич-ие

$$ADF = \frac{\hat\gamma - 0}{se(\hat\gamma)} \qquad ADF \xrightarrow[T\to\infty]{H_0,\,dist} \underbrace{ADF_{ст}}_{\text{особое распред-ие}}$$

ADF без константы [и без тренда]

$$\Delta y_t = \gamma \cdot y_{t-1} + \alpha_1 \cdot \Delta y_{t-1} + \dots + \alpha_p \Delta y_{t-p} + u_t$$

(u_t) − б.шум

H_0:

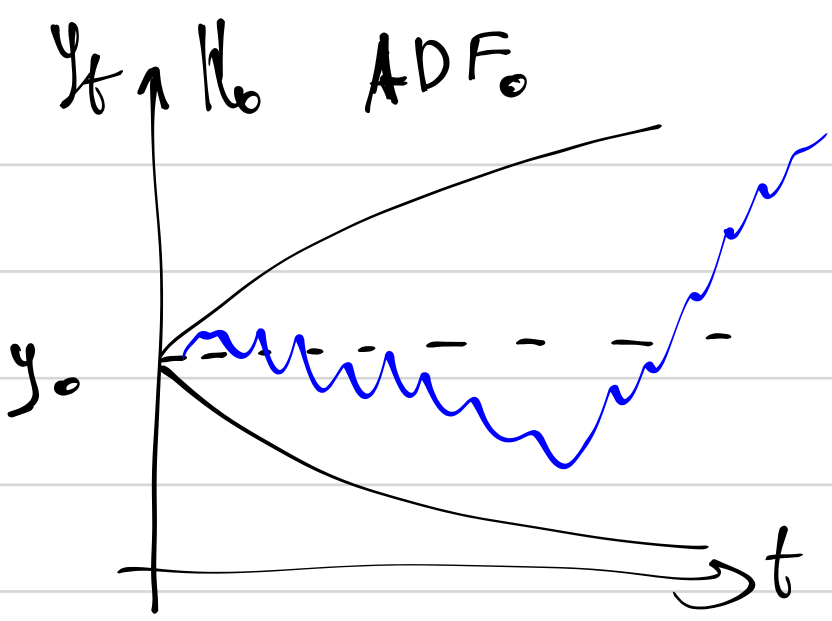
$\Delta y_t = x_t$

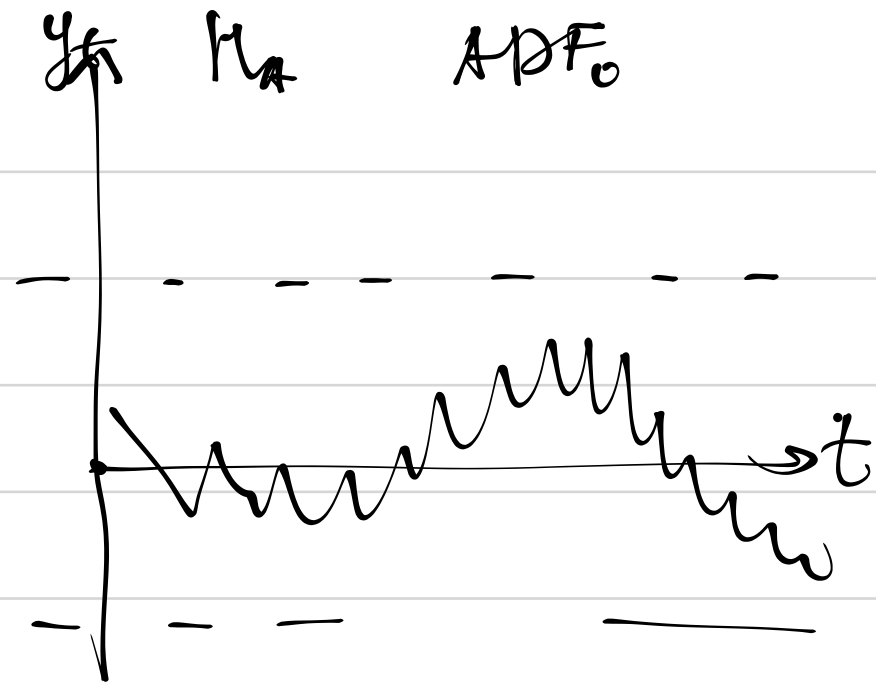
$y_t = y_0 + \sum_{i=1}^{t} x_i$

x_i ~ стац AR(p) с $E(x_i)=0$

H_A:

y_t − стац-ый AR(p+1) с $E(y_t)=0$.





не оч. верно
в нулевое ожид-ие
от y_t

Q. Почему ARMA модели популярны для стац-х процессов?

[набл.]

одно набл-ие за случ. величиной
не позволяет отличить её от константы

? ⇐ множ-ие случ вел-ны
или константа?

З.Б.Ч. Если $y_i \sim$ нузав, $E(y_i)=\mu$, то

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \xrightarrow[prob]{n \to \infty} \mu.$$

перф. ЗБЧ. Если y_i – зависимые!

$y_i = R + u_i$ R – сл. вел.

$u_i \sim$ нузав с $E(u_i)=0$, то

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \xrightarrow[prob]{n \to \infty} R$$

$cov(y_1, y_2) = Var(R)$

Wold theorem → обобщ-т З.Б.Ч.
→ объясняет почему ARMA модели столь успешны

Если (x_t) - стац-ый процесс
то
x_t можно представить в виде

$$x_t = \boxed{\mu + a_t} + \boxed{b_t}, \quad \text{где } \mu \in \mathbb{R}$$

„предсказ-ая" $MA(\infty)$

хорошо приближ-ся $ARMA(p,q)$

$MA(\infty)$

$$b_t = u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \dots$$

где (u_t) - б. шум $\quad \sum \beta_i^2 < \infty$

a_t - предск. процесс с $E(a_t) = 0$.

$$a_t = \alpha_{11} x_{t-1} + \alpha_{12} x_{t-2} + \alpha_{13} x_{t-3} + \dots$$
$$a_{t+1} = \alpha_{21} x_{t-1} + \alpha_{22} x_{t-2} + \alpha_{23} x_{t-3} + \dots$$
$$a_{t+2} = \alpha_{31} x_{t-1} + \alpha_{32} x_{t-2} + \alpha_{33} x_{t-3} + \dots$$

и $Cov(a_t, u_s) = 0$

$R_1, \dots R_{12}$

предск. $\quad MA(\infty)$

$$y_1 = R_1 + b_1$$
$$y_2 = R_2 + b_2$$
$$\vdots$$
$$y_{12} = R_{12} + b_{12}$$
$$y_{13} = R_1 + b_{13}$$
$$\vdots \quad \vdots$$

$(b_t) \sim MA(\infty)$

eng
[deterministic] - предск. !!

ошибочно: ~~постоянный~~

STL → удаляю сезонную сост.