GARCH - модели.

① Не улучшают качество прогнозов в смысле $E\left((y_{t+h}-\hat{y}_{t+h})^2\right)$

② Цель: качество прогноза волатильности, вер-сти дефолта, $\hat{P}(y_{t+h} > k)$
$\hat{P}(y_{t+h} < k)$

2000+ Granger, Engle Нобелевск. премия по экономике

Белый шум (u_t)

$E(u_t) = 0$
$Var(u_t) = \sigma_u^2 > 0$
$Cov(u_t, u_s) = 0$ (при $t \neq s$)

С одной стороны: простейший стац-ный процесс.

С другой стороны: $Cov(u_t, u_s) = 0$ не запрещает зависимости между u_t и u_s.

R и L

R и L независимы

① $[\,Cov(h(R), g(L)) = 0 \quad \forall g, h\,]$

$Cov(R, L) = 0 \quad Cov(R, L^3) = 0 \ldots$

$Cov(\cos R, L^2) = 0 \ldots$

① => ② => ③

② $E(R|L) = E(R)$

$[\,Cov(R, g(L)) = 0 \quad \forall g\,]$

③ линейная независимость

$[\,Cov(R, L) = 0\,]$

Стилизованные факты про лог-доходности

$$y_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} =$$

$$P_t = P_{t-1} * (1+r)$$

$$= \ln \frac{P_{t-1} \cdot (1+r)}{P_{t-1}} = \ln(1+r) \approx$$

$$\approx r$$

при $r \simeq 0$.

* Толстые хвосты (по сравнению с норм-м распределениям)

Модель: $y_t \sim N(\mu; \sigma^2)$

$\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ (макс. правд)

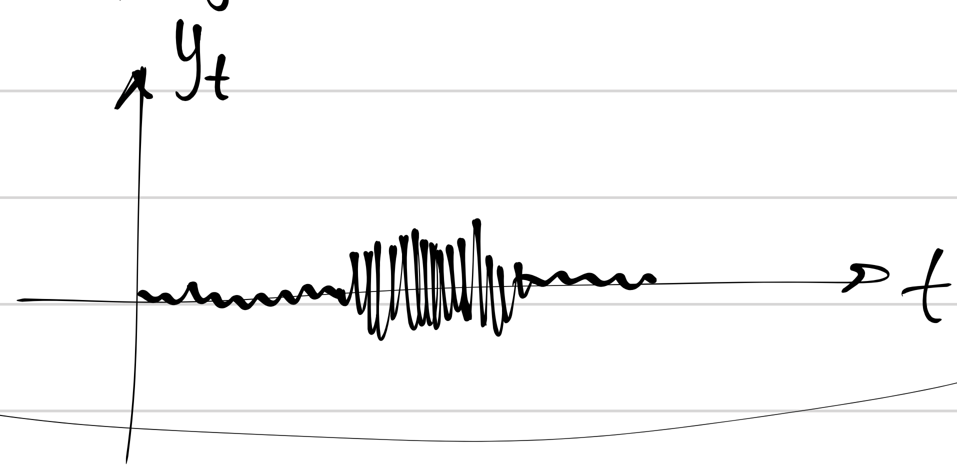
$\hat{P}(y_t > \mu + 2\sigma)$

Трад: не N

* Асимметрия — более сильная реакция на негативные новости

!! * нулевая автокорр для y_t — $\operatorname{Cov}(y_t, y_s) \approx 0$, $t \neq s$

!! * кластеризация волатильности.



$u_t \sim$ GARCH(1,1) [пример] GARCH(p,q)

generalized

AR = autoregressive

CH = conditional heteroskedasticity

Обобщенная авторегрессионная модель условной гетероскедастичности.

- $u_t = \nu_t \cdot \sigma_t$ — $\nu_t \sim$ незав.-ые $N(0;1)$

  σ_t — волатильность

  - $\sigma_t > 0$

- $\sigma_t^2 = 20 + 0.1 \cdot u_{t-1}^2 + 0.2 \cdot \sigma_{t-1}^2$

  [рекурр-ое уравнение не задаёт однозначно случ процесс]

$$\sigma_t^2 = c + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \sigma_{t-p}^2 + \beta_1 \cdot u_{t-1}^2 + \ldots + \beta_q \cdot u_{t-q}^2$$

- ν_t не зависит от: $u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3} \ldots$ $\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots$

- $\begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ — стационарное решение ур-ия.

Упр. u_t — белый шум?

$E(u_t) \overset{?}{=} 0$ $\quad Cov(u_t, u_s) \overset{?}{=} 0$!!

$$E(u_t) = E(\nu_t \cdot \sigma_t) = E(\nu_t) \cdot E(\sigma_t) = 0$$

незав $\qquad \nu_t \sim N(0;1)$

$$Cov(u_t, u_{t-1}) = E(u_t \cdot u_{t-1}) - 0^2 =$$

зави.

$$= E(\nu_t \cdot \sigma_t \cdot \nu_{t-1} \cdot \sigma_{t-1}) = E(\nu_t) \cdot E(\sigma_t \cdot \nu_{t-1} \cdot \sigma_{t-1}) =$$

не зависит

$$= 0 \cdot (?) = 0.$$

Упр.

$u_t \sim GARCH(1,1)$

$u_t = \nu_t \cdot \sigma_t \qquad \sigma_t^2 = 20 + 0.1 \cdot u_{t-1}^2 + 0.2\, \sigma_{t-1}^2$

* ν_t не зав от $\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \ldots$
  $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \nu_{t-3} \ldots$
  $u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots$
* $\nu_t \sim N(0;1)$
* $\begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ - стац.

95% PI для u_{t+1} если $u_t = -1$ $\sigma_t = 2$?

$$\sigma_{t+1}^2 = 20 + 0{,}1 \cdot (-1)^2 + 0{,}2 \cdot 2^2 = 20{,}9$$

$$(u_{t+1} \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) \sim N(0; 20.9)$$

PI для u_{t+1} $\quad [0 - 1.96 \cdot \sqrt{20.9};\ 0 + 1.96 \cdot \sqrt{20.9}]$

$$E(u_{t+1} \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) = E(\nu_{t+1} \cdot \sigma_{t+1} \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) =$$

$$= E(\nu_{t+1} \cdot \sqrt{20.9} \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) = E(\nu_{t+1} \cdot \sqrt{20.9}) = 0.$$

незав

$$Var(u_{t+1} \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) = E(u_{t+1}^2 \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) =$$

$$= E(\nu_{t+1}^2 \cdot \sigma_{t+1}^2 \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) =$$

$$= E(\nu_{t+1}^2 \cdot 20.9 \mid u_t = -1, \sigma_t = 2) =$$

не зав

$$= E(\nu_{t+1}^2 \cdot 20{,}9) = 20.9 \cdot Var(\nu_{t+1}) = 20{,}9 \times 1 = 20{,}9$$

$\nu_t \sim N(0;1)$

Заодно, увидим, что

$$Var(y_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots) = \sigma_t^2$$

условная дисперсия.

ARCH

conditional heteroskedasticity.

$$Var(y_t \mid u_{t-1}, u_{t-2} \ldots \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots) \neq const$$

Чаще всего.

финанс. ряд — длинный

можно первые наблюдения потерять

GARCH(1,1)

$u_t \to$ наблюдаем.

$\sigma_t, \nu_t \to$ ненаблюдаемы

u_t
⋮
⋮
⋮

① наивная $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\dfrac{\sum u_t^2}{T}}$ [куча статей про иниц.]

[c, α_1, β_1 - неизвестные пар-ры.]

② $(u_2 \mid u_1, \sigma_1) \sim N(0; c + \beta_1 \cdot u_1^2 + \alpha_1 \sigma_1^2)$

$f(u_2 \mid u_1, \sigma_1) \leftarrow$ зависит от c, β_1, α_1

③ $(u_3 \mid u_2, u_1, \sigma_1)$ $\quad u_3 = \nu_3 \cdot \sigma_3$

неизв: c, β_1, α_1

$$\sigma_3^2 = c + \alpha_1 \sigma_2^2 + \beta_1 \cdot u_2^2 = \boxed{c + \alpha_1 \cdot (c + \alpha_1 \sigma_1^2 + \beta_1 u_1^2) + \beta_1 \cdot u_2^2}$$

$$f(u_T, u_{T-1}, u_{T-2}, \dots u_2 \mid u_1, \sigma_1) =$$

$$= \underbrace{f(u_2 \mid u_1, \sigma_1)} \cdot \underbrace{f(u_3 \mid u_2, u_1, \sigma_1)} \cdot \ldots \cdot f(u_T \mid u_{T-1}, u_{T-2} \dots u_1, \sigma_1)$$

зависит от σ_1, c, β_1, α_1

есть начально

$u_1 \dots u_T$ наблюдаемые

$$f(u_T, u_{T-1} \dots u_2 \mid u_1, \sigma_1) \to \max_{c, \beta_1, \alpha_1}$$

GRETL EVIEWS

БАЙКА (правда)

Куча настроек.

* $(y_t) \sim ARMA(p,q) - GARCH(a,b)$

→ $A(L)(y_t - \mu) = B(L) \cdot u_t$ — y_t – стац. процесс. $y_t \sim ARMA(p,q)$, (u_t) – б. шум

уравнение для условного среднего

→ $(u_t) \sim GARCH(a,b)$

$$u_t = v_t \cdot \sigma_t$$

$$C(L)\sigma_t^2 = c + D(L) \cdot u_t^2$$

ур-ие для волатильности.

* ARSV (Auto-regression stochastic volatility)

$$u_t = v_t \cdot \sigma_t \qquad v_t \sim N(0;1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = c + \alpha_1 \cdot \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t$$

$$\eta_t \sim N(0; \sigma_\eta^2)$$

EGARCH / TGARCH / fGARCH / ....

разные вар-ты ур-ия условной дисперсии.

ГАРЧИ прилетели.