# BVAR

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$\boxed{y = X \cdot \Theta + \varepsilon} \qquad \underbrace{\Theta : f_\Theta(\theta)}$$

$$f_{post}(\theta|x) = \frac{\mathcal{L}(x|\theta) \cdot f_{prior}(\theta)}{\cdots\cdots}$$

$$f_{post}(\Theta|x) \propto \underbrace{\mathcal{L}(x|\Theta)} \cdot \underbrace{f_{prior}(\Theta)}$$

---

$$VAR(p): y_t = \Phi_0 + \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \Sigma)$$

$$y_t = \Phi x_t + \varepsilon_t$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_p & \Phi_0 \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{pmatrix} y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}$$

$$\underline{Y = X \cdot \Phi + E} \qquad \varphi = \mathrm{VEC}(\Phi)$$

$p(\varphi, \Sigma \mid Y)$ – post. плотность

$$p(\varphi, \Sigma \mid Y) \propto \underbrace{p(\varphi, \Sigma)}_{\text{prior}} \cdot \underbrace{p(y \mid \varphi, \Sigma)}_{\text{likelihood}}$$

$$p(y \mid \varphi, \Sigma) \propto |\Sigma|^{T/2} e^{-\frac{1}{2}\left[(y - X\varphi)^T \Sigma^{-1} (y - X\varphi)\right]}$$

---

## Minnesota prior

Предполагает в кач-ве prior:

$y_j$ – случайное блуждание / $AR(1)$

---

$$\varphi \sim N(\underline{\varphi}, \underline{\Xi}) \qquad \Xi \text{ - diag}$$

Prior:

$$p(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\cdots} \, |\underline{\Xi}|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\varphi - \underline{\varphi})^T \underline{\Xi}^{-1} (\varphi - \underline{\varphi})}$$

Post: $\varphi | y \sim N(\bar{\varphi} ; \bar{\Xi})$

$$\bar{\Xi} = \left[\underline{\Xi}^{-1} + \Sigma^{-1} \otimes (X^T X)\right]^{-1}$$

$$\bar{\varphi} = \bar{\Xi}\left[\underline{\Xi}^{-1}\underline{\varphi} + (\Sigma^{-1} \otimes X^T) y\right]$$

$$\underline{\Phi} : \underline{\varphi} = \mathrm{vec}(\underline{\Phi})$$

$$(\underline{\Phi}_\ell)_{ij} = \begin{cases} \delta_i, & \text{if } i=j, \ \ell=1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$\delta_i = 1 \Rightarrow$ RW $b$ prior

$|\delta_i| < 1 \Rightarrow AR(1)$

m - число пр.

p - число лагов

$$\underline{\Xi} = \begin{pmatrix} \underset{(1+mp)\times(1+mp)}{\underline{\Xi}_1} & & 0 \\ & \underline{\Xi}_2 & \\ 0 & & \ddots \ \underline{\Xi}_m \end{pmatrix}$$

$\underline{\Omega}_1$ – prior для коэф для $y_{1t}$

$\underline{\Omega}_j$ – prior для коэф. для $y_{jt}$

**TETTA**

$$\underline{\Omega}_j = \begin{pmatrix} \underset{(m\times m)}{\underline{\Omega}_{j,lag=1}} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \underset{(m\times m)}{\underline{\Omega}_{j,lag=p}} & \\ 0 & & & \underset{(1\times 1)}{\underline{\Omega}_{j,const}} \end{pmatrix}$$

$$y_{jt} = \beta^{(j)}_{11} y_{1\,t-1} + \beta^{(j)}_{12} y_{2\,t-1} + \ldots + \beta^{(j)}_{1m} y_{m\,t-1} +$$
$$+ \beta^{(j)}_{21} y_{1\,t-2} + \ldots + \beta^{(j)}_{2m} y_{m\,t-2} +$$
$$+ \ldots \beta^{(j)}_{p1} y_{1\,t-p} + \ldots + \beta^{(j)}_{pm} y_{m\,t-p} + \beta^{(j)}_{0} + \varepsilon_{t}$$

$\left[\underline{\Omega}_{j,lag=p}\right]_{ii}$ – дисперсия $\boxed{\beta^{(j)}_{pi}}$

$$y_{jt} = \ldots + \underline{\underline{\beta^{(j)}_{p_i}}} \cdot y_{i\,t-p}$$

$$\left[\underline{\Omega} \ldots\right] = \left(\left(\frac{\lambda\ \text{tight}}{\lambda \ldots}\right)^2, \quad i=j\right.$$

$$\left[\Sigma_{j,lag=p}\right]_{ii} = \begin{cases} \left( p^{\lambda_{lag}} \right) \\ \dfrac{(\lambda_{tight}\cdot\lambda_{kron}\cdot\sigma_j)^2}{(p^{\lambda_{lag}}\cdot\sigma_i)^2}, & j\neq i \end{cases}$$

$$\left[\Sigma_{j,lag=p}\right]_{ik} = 0 \quad \forall i\neq k$$

$$\Sigma_{j,const} = \lambda_{tight}^2 \cdot \lambda_{const}^2 \cdot \sigma_i^2$$

$\lambda_{tight}$ — общая жёсткость prior-а

$\lambda_{lag}$ — насколько быстро убывает дисперсия prior при росте лага

[$\uparrow\lambda_{lag} \Rightarrow \uparrow$ уверенности в том, что старые значения (большие лаги) не влияют]

$\lambda_{kron}$ — жёсткость эффектов других переменных в ур-ии данной переменной

$\lambda_{const}$ — жёсткость prior на константу

Independent normal-inverse Wishart

$$\varphi \sim N(\underline{\varphi}; \underline{\Sigma}), \quad \Sigma \sim IW(\underline{S}; \underline{\nu})$$

$\varphi$; $\Sigma$ независимы

post:

$$\varphi | y \sim N(\bar{\varphi}; \bar{\Sigma}); \quad \Sigma | y \sim IW(\bar{S}; \bar{\nu})$$

---

Conjugated normal-inverse Wishart

$$\Sigma \sim IW(\underline{S}; \underline{\nu})$$

$$\varphi | \Sigma \sim N(\underline{\varphi}; \Sigma \otimes \underline{\Omega})$$

---

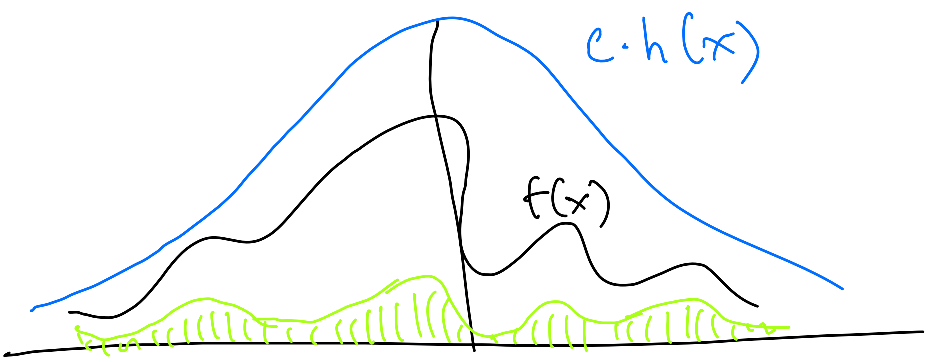
$$\underline{\underline{\underline{p(\varphi | y)}}} \propto p(\varphi) \cdot L(y | \varphi)$$

# Accept - reject sampling

$f(x)$ - что-то, пропорциональное плотности

$h(x)$ [плотность] - что-то, из чего мы умеем сэмплить

$$\exists c: f(x) \leq c \cdot h(x) \quad \forall x$$



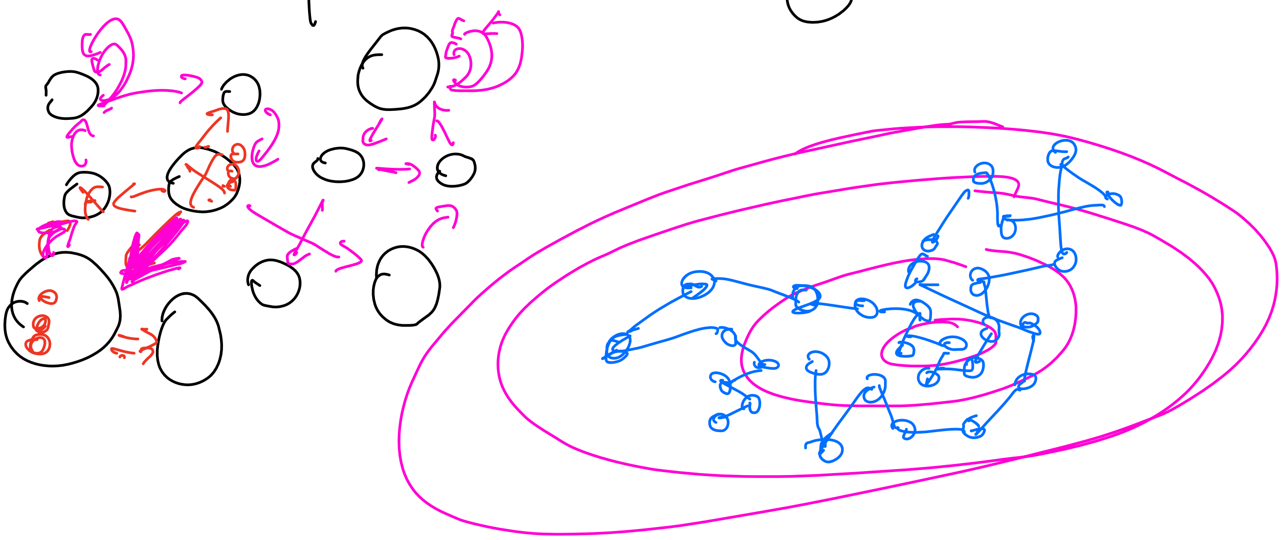

Алгоритм:

1) Сэмплим $z$ из $h$; $u$ из $U[0;1]$

2) если $u \leq \frac{f(z)}{c \cdot h(z)} \longrightarrow$ берём $z$

$> \;\; \longrightarrow$ не берём $z$

# Metropolis-Hastings



$\theta_0$ — начальная точка

$f(x)$ — что-то, чему

апостериорн. плотность

$$\left[f(x) = \underline{f_{prior} \cdot Likelihood}\right]$$

на итерации $i$:

1) $\theta_p = \theta_{i-1} + \Delta$, $\Delta \sim N(0; \sigma^2)$

2) $\rho = \dfrac{f(\theta_p)}{f(\theta_{i-1})}$

3) if $\rho > 1 \Rightarrow \theta_i = \theta_p$

$\rho < 1 \Rightarrow \theta_i = \begin{cases} \theta_p, & \rho \\ \theta_{i-1}, & 1-\rho \end{cases}$