- L
- AR: уравнение vs процесс

L – лаговый оператор

$$L y_t = y_{t-1}$$
$$L^2 y_t = y_{t-2}$$
$$L 7 = 7$$

$$L : (a_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty} \to (b_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$$

$$L(\ldots, -2 \to y_{-2}, -1 \to y_{-1}, 0 \to y_0, 1 \to y_1, \ldots) =$$
$$= (\ldots, -2 \to y_{-3}, -1 \to y_{-2}, 0 \to y_{-1}, \ldots)$$

$$L(\ldots, \boxed{-2} \to y_7, -1 \to y_0, 0 \to y_5, 1 \to y_1, \ldots) =$$
$$= (\ldots -1 \to y_7, 0 \to y_0, 1 \to y_5, \ldots)$$

$$L^{-1} = F$$

$$y_t = \mu + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t + 0{,}5\,\varepsilon_{t-1}$$
$$(1 - \beta_1 L) y_t = \mu + (1 + 0.5L)\varepsilon_t$$

Можно ли обратить $1 - 0{,}5L$?

$$\boxed{\begin{aligned} A(\lambda x) &= \lambda A(x \\ A(x+y) &= A(x) + A(y) \end{aligned}} \longrightarrow A\,x$$

$$L(5x_t) = 5L(x_t)$$

$$L(y_t + x_t) = L(y_t) + L(x_t)$$

$$(a_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty} \xrightarrow{1-0{,}5L} (b_n)_{n=-\infty}^{n=+\infty}$$

$$\begin{array}{lccccccccc} & & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ x_n = (\ldots, & & 16, & 8, & 4, & 2, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \ldots) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc} y_n = (\ldots, & 8, & 4, & 2, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{8}) \\ & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}L\right)(x_n) = \left(\ldots, 16 - \tfrac{1}{2}32, 8 - \tfrac{1}{2}16, \ldots \right) = (\ldots, 0, 0, 0 \ldots)$$

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}L\right)(y_n) = (\ldots 0, 0, 0, \ldots)$$

Мораль: нет действия вида $D = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}L}$ для произвольных последовательностей

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}L} = 1 + \frac{1}{2}L + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \ldots$$

Aad van der Vaart

Теорема:

Для стационарных процессов полином $A(L)$ обратим если и только если у $A(L)$ нет корня ℓ с $|\ell| = 1$

$E(y_t) = \mu$
$cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k$

Последовательность (y_t) - стац. и неслучайна. Как она выглядит?

$$(y_t) = (\ldots, \mu, \mu, \mu, \ldots)$$

$$t=0$$

$$(1 - 0{,}5L) x_t = (\ldots, 7, 7, 7, \ldots)$$

$$t=0$$

$$x_t = (\ldots, 14, 14, 14 \ldots)$$

$$\mu - \frac{1}{2}\mu = 7 \Rightarrow 0{,}5\mu = 7$$

Пример

$$(1-L)(\ldots, 7, 7, 7, \ldots) = (\ldots 0, 0, 0 \ldots)$$
$$(1-L)(\ldots, 8, 8, 8, \ldots) = (\ldots 0, 0, 0 \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}L} = 1 + \frac{1}{2}L + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \ldots \quad \Big| \cdot \left(1-\frac{1}{2}L\right)$$

$$1 = 1 \cancel{- \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L} - \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{4}L^2 \ldots$$

$$\frac{1}{1-L} \quad \times$$

$$\frac{1}{1-2L} \rightarrow 1 + 2L + (2L)^2 + \ldots$$

$$F = L^{-1}$$

$$\frac{F}{F(1-2L)} = \frac{F}{F-2} = \frac{F\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}F} =$$

$$= -\frac{1}{2}F \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}F} = -\frac{1}{2}F - \left(\frac{1}{2}F\right)^2 - \left(\frac{1}{2}F\right)^3$$

$$M\left(\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

Рекурсивные уравнения

$$y_t = 0{,}5y_{t-1} + u_t, \quad u_t - WN$$

$$y_{t-1} = 2y_t - 2u_t$$

Утв. Есть много случайных процессов, порождаемых этим уравнением

(a_t)

$$y_0 = 42 \rightarrow y_1 = 0{,}5 \cdot 42 + u_1, \; y_2 = \ldots$$

$$\rightarrow y_{-1} = 84 - 2u_0, \; y_{-2} = \ldots$$

(b_t) $\quad y_0 = \dfrac{u_{56}}{u_{17}}$ $\nearrow y_1 = \ldots$ $\searrow y_{-1} = \ldots$

AR(1) - процесс.

$\boxed{\text{Группа 1}}$ Любое решение ур-я

$\circledast \quad y_t = \mu + \beta y_{t-1} + u_t, \quad u_t - WN$

$\boxed{\text{Группа 2}}$ Только стационарное решение

$\circledast \quad y_t = \mu + \beta y_{t-1} + u_t, \quad u_t - WN$

$\boxed{\text{Группа 3}}$ Только стационарное решение

$\circledast \quad y_t = \mu + \beta y_{t-1} + u_t, \quad u_t - WN$

$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$

$y_t \sim MA(\infty)$ отн u_t

$\boxed{\text{Группа 4}}$ То же, что и 3, но $u_t \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, (soft)

$\boxed{\text{Группа 4}}$ Не понимают разницу ур-я и процесса.

$y_t = 0{,}5 y_{t-1} + u_t$	$y_t = 2 \cdot y_{t-1} + u_t$
(y_t) - стац процесс	(y_t) - стац. процесс

$(1-0{,}5L)\,y_t = u_t$

$y_t = \frac{1}{1-0{,}5L}\,u_t$

$y_t = u_t + \frac{1}{2}u_{t-1} + \frac{1}{4}u_{t-2} + \ldots$

$MA(\infty)$

$(1-2L)\,y_t = u_t$

$y_t = \frac{1}{1-2L}\,u_t$

$y_t = -\frac{1}{2}u_{t+1} - \frac{1}{4}u_{t+2} - \frac{1}{8}\ldots$

$AR(p)$ – процесс (одно из возможных определений)

$$\begin{cases} A(L)(y_t - \mu) = u_t \\ y_t \text{ – стац} \\ y_t \sim MA(\infty) \text{ отн } u_t \\ y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots \\ \beta_p \neq 0 \\ A(L) = (1 - \beta_1 L - \ldots - \beta_p L^p) \iff A(0) = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Если $y_t \sim AR(p)$, то

$\varphi_{p+1,p+1} = \ldots = \varphi_{p+s,p+s} = 0 \quad \forall s \geq 1$

Ex. $y_t \sim AR(2)$ – процесс

$y_t = 5 + 0{,}3\,y_{t-1} \boxed{-0{,}2}\,y_{t-2} + u_t$

φ_{22}, φ_{33}, φ_{44} 1 − p-1

φ_{22} $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \boxed{\alpha_2} y_{t-2} + \vartheta_t$ "φ_{22}"

$$\begin{cases} cov(\vartheta_t, y_{t-1}) = 0 \\ cov(\vartheta_t, y_{t-2}) = 0 \end{cases}$$

φ_{33}

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \alpha_3 y_{t-3} + \vartheta_t$$

$$y_t = 5 + 0{,}3 y_{t-1} - 0{,}2 y_{t-2} + \boxed{0} y_{t-3} + u_t$$

Теорема. $A(L)(y_t - \mu) = u_t$

1) Если у $A(L)$ есть корень $|l| = 1$, то стац. решений нет

2) Если у $A(L)$ все корни $|l| > 1$, то стац решение решение единственно и имеет $MA(\infty)$ вид (стабильное)

3) Если у $A(L)$ есть корни $|l| < 1$, то стац решение единственно, но не имеет $MA(\infty)$ формы

$$y_t = 5 + 0{,}3 y_{t-1} - 0{,}02 y_{t-2} + u_t$$

$$y_t = 0{,}3 y_{t-1} - 0{,}02 y_{t-2}$$

$$y_t = \lambda^t$$

$$\lambda^t = 0{,}3\lambda^{t-1} - 0{,}02 L^{t-2}$$

$$char(\lambda) = \lambda^2 - 0{,}3\lambda + 0{,}02$$

$$A(L) = 1 - 0{,}3L + 0{,}02L^2$$

1) Если у char(λ) есть корень $|l| = 1$, то стац. решений нет

2) Если у char(λ) все корни $|l| < 1$, то стац решение решение единственно и имеет $MA(\infty)$ вид (стабильные)

3) Если у char(λ) есть корни $|l| > 1$, то стац решение единственно, но не имеет $MA(\infty)$ формы

$$x_t = 1 + 2x_t + \varepsilon_t$$

$$E(x_t) = \mu$$

$$(1 - 2L)\, x_t = 1 + \varepsilon_t$$

$$x_t = 1\left(1 + \tfrac{1}{2}F + \tfrac{1}{2}^2 F^2 + \dots\right)$$

$$\frac{1}{1 - 0{,}5}$$