GARCH-модель

Упр. $u_t \sim GARCH(1,1)$

$u_t = \nu_t \cdot \sigma_t$ $\quad \boxed{\nu_t \sim N(0;1)}$

здесь можно заменить !

$$\sigma_t^2 = 20 + 0.1\, u_{t-1}^2 + 0.2\, \sigma_{t-1}^2$$

$\boxed{\sigma_t > 0}$

(*) ν_t не зависит $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \nu_{t-3} \ldots\ldots$
$\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2 \ldots\ldots$

* $a_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ — стац-вест !

в широком:
$E(a_t) = \mu_a$
$Var(a_t) = \sigma_0$
$Cov(a_t, a_{t-k}) = \sigma_k$

в строгом смысле.
! не обяз-но конечное $E(a_t)$
$Law(a_t, a_{t+1}, \ldots\ldots a_{t+n})$ не зависит от t.

[„Толстые хвосты" есть ли?]

$E(u_t^4)$ сравним с нормальным.

Предв. упр. $R \sim N(0;1)$ $\quad E(R^4)$?

[stein's lemma]

Лемма Стейна [интегрирование по частям]

если $h(x)$ мажорируется сверху $\exp(\lambda x) \cdot Poly(x)$

и $R \sim N(0;1)$

$$E(h(R) \cdot R) = E(h'(R))$$

$$E(R^4) = E(R^3 \cdot R) = E(3R^2) = E(3R \cdot R) =$$
$$= E(3) = 3 \quad !!$$

док-во:

$$E(h(R)\cdot R) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\boxed{h(z)}}_{h} \cdot \underbrace{\boxed{z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}}_{u'} dz$$

ф. плотн $N(0;1)$

$$= \left. h \cdot u \right|_{z=-\infty}^{z=+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} h' \cdot u \, dz = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} h' \cdot u(z) dz = E(h'(R))$$

$$u = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

$h(R)$ не слишком быстро растёт

$$E(R^{2024}) \overset{?}{=} \qquad R \sim N(0;1)$$

$$= E(R^{2023} \cdot R) = E(2023 R^{2022}) =$$

$$= 2023 \cdot E(2021 R^{2020}) =$$

$$= 2023 \cdot 2021 \cdot 2019 \cdot \ldots \cdot 1$$

(полный) куртосис $= \dfrac{E((R-\mu)^4)}{(Var(R))^2}$

(избыточный) куртосис $= \dfrac{E((R-\mu)^4)}{(Var\, R)^2} - 3$

$R \sim N(0;1)$

полный куртосис $= \dfrac{E(R^4)}{(Var\, R)^2} = \dfrac{3}{1^2} = 3$

Упр.

посчитайте для GARCH(1,1) избыточный куртосис.

уже в прошл. раз.

$E(u_t) = 0$

$\nu_t \sim N(0;1)$

а) $Var(u_t)$?

б) $E(u_t^4)$?

в) $\boxed{\dfrac{E(u_t^4)}{(Var(u_t))^2} - 3 \quad vs \quad 0}$

$\left(\begin{matrix} \nu_t \\ \sigma_t^2 \end{matrix}\right)$ стац. и в широком и в узком смысле

$Var(u_t) = \underline{E(u_t^2)} - 0^2$

$u_t^2 = v_t^2 \cdot \sigma_t^2$

$E(u_t^2) = E(v_t^2 \cdot \sigma_t^2) = \underbrace{E(v_t^2)}_{1 \text{ т.к } v_t \sim N(0;1)} \cdot E(\sigma_t^2)$

$\boxed{\text{незав.}}$

$E(u_t^2) = E(\sigma_t^2)$ ☺

$$\boxed{\sigma_t^2 = 20 + 0.1 \cdot u_{t-1}^2 + 0.2 \cdot \sigma_{t-1}^2}$$

$$\underline{E(\sigma_t^2)} = 20 + 0.1 \underline{E(u_{t-1}^2)} + 0.2 \underline{E(\sigma_{t-1}^2)}$$

$0.7\, E(\sigma_t^2) = 20$

$$\boxed{Var(u_t) = E(\sigma_t^2) = \frac{20}{0.7} = \frac{200}{7}}$$

$\sigma_t^2 = w + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$

$Var(u_t) = \frac{w}{1-\alpha_1-\beta_1}$

Необход. условие для сущ-ия слабо-стационарн. решения: $\underline{\alpha_1 + \beta_1 < 1}$

$$\boxed{E(u_t^4) = E(v_t^4 \cdot \sigma_t^4) = E(v_t^4) \cdot E(\sigma_t^4) = 3 \times E(\sigma_t^4)}$$

незав $\qquad v_t \sim N(0;1)$

$\sigma_t^4 = (\sigma_t^2)^2 = (20 + 0.1 u_{t-1}^2 + 0.2 \sigma_{t-1}^2)^2$

$\sigma_t^4 = 400 + 0.01 u_{t-1}^4 + 0.04 \sigma_{t-1}^4 +$

$+ 4 u_{t-1}^2 + 8 \sigma_{t-1}^2 + 0.04 \cdot u_{t-1}^2 \cdot \sigma_{t-1}^2$

* $\sigma_t^4 = 400 + 0.01\, u_{t-1}^4 + 0.04\, \sigma_{t-1}^4 +$
$+ 4\, u_{t-1}^2 + 8\, \sigma_{t-1}^2 + 0.04 \cdot u_{t-1}^2 \cdot \sigma_{t-1}^2$

- $\boxed{E(u_t^4) = 3E(\sigma_t^4)}$
- $E(u_t^2 \cdot \sigma_t^2) = E(\underbrace{v_t^2}\cdot\underbrace{\sigma_t^2 \cdot \sigma_t^2}) = E(v_t^2)\cdot E(\sigma_t^4) =$

незав

$v_t \sim N(0;1)$

$= E(\sigma_t^4)$

- $E(u_{t-1}^2) = E(\sigma_{t-1}^2) = \dfrac{20}{0.7}$

$\sigma_t^4 = 400 + 0.01\, u_{t-1}^4 + 0.04\, \sigma_{t-1}^4 +$
$+ 4\, u_{t-1}^2 + 8\, \sigma_{t-1}^2 + 0.04 \cdot u_{t-1}^2 \cdot \sigma_{t-1}^2$

$$E(\sigma_t^4) = 400 + 0.03 \cdot E(\sigma_{t-1}^4) + 0.04 \cdot E(\sigma_{t-1}^4) + 12 \times \frac{200}{7} + 0.04 \cdot E(\sigma_{t-1}^4)$$

$$0.89\, E(\sigma_t^4) = 400 + \frac{2400}{7} = \frac{5200}{7}$$

$$\boxed{E(\sigma_t^4) = \frac{5200}{7 \cdot 0.89}}$$

$$\boxed{E(u_t^4) = \frac{3 \cdot 5200}{7 \cdot 0.89}}$$

«избыт.» куртосис $= \dfrac{\frac{3 \cdot 5200}{7 \cdot 0.89}}{\left(\frac{200}{7}\right)^2} - 3 =$

$$\boxed{\frac{E((R-\mu)^4)}{(\mathrm{Var}\, R)^2} - 3} = \frac{3 \cdot 5200 \cdot 7^2}{7 \cdot 0.89 \cdot 200 \cdot 200} - 3 = \frac{3 \cdot 26 \cdot 7}{0.89 \cdot 200} - 3 \approx$$
≈ 0.06

(!) Задача оптимизации „плохая" по оценке пар-в GARCH.

(пробл 1) → не сх-ся. [если данные плохо опис-ся GARCH моделью]

(пробл 2) → бывает так:

[для ARMA] Шаг 1. МНК для получения старт. точки.
Шаг 2. Градиентный метод от стартовой точки [стац. ся]

на шаге 1 МНК выдает стартовые оценки невозможные для стац. процесса.

Утв. $u_t \sim GARCH(1,1) \Rightarrow u_t^2 \sim ARMA(1,1)$

Упр. $u_t = \nu_t \cdot \sigma_t$ $\quad \nu_t \sim N(0;1)$

$$\boxed{\sigma_t^2 = 20 + 0.1 \cdot u_{t-1}^2 + 0.2 \cdot \sigma_{t-1}^2} \qquad \sigma_t > 0$$

* ν_t не зав: $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \nu_{t-3} \ldots$
$\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2 \ldots$

• $a_t = \begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ – [стац в строгом смысле] $\exists E(a_t), \exists Cov(a_t, a_{t+k})$ $\exists E(\sigma_t^4)$ $\exists Cov(\sigma_t^2, \sigma_{t-k}^2)$

Запишите ARMA(1,1) уравнение на u_t^2.

u_t^2 $\qquad E(u_t^2) = E(\sigma_t^2)$ [только что решали]

u_t^2 – наблюдаем
σ_t^2 – не наблюдаем.

$$\boxed{\sigma_t^2 = \boxed{20} + \boxed{0.1\cdot} u_{t-1}^2 + \boxed{0{,}2\cdot} \sigma_{t-1}^2}$$

ненабл.

$$u_t^2 = \sigma_t^2 + w_t \qquad E(u_t^2) = E(\sigma_t^2)$$

набл ненабл

$$\Downarrow$$

$$E(w_t) = 0.$$

$$u_t^2 - w_t = 20 + 0.1\cdot u_{t-1}^2 + 0{,}2\cdot(u_{t-1}^2 - w_{t-1})$$

$$\boxed{u_t^2 = \boxed{20} + \boxed{0{,}3}\, u_{t-1}^2 + w_t \boxed{-0{,}2}\, w_{t-1}}$$

ARMA(1,1) „ $y_t = 20 + 0{,}3\, y_{t-1} + u_t - 0{,}2\, u_{t-1}$ "

$\boxed{w_t \text{ – б. шум?}}$

$$E(w_t) = 0 \quad !!$$

$$Var(w_t) = \sigma_w^2 \quad ?$$

$$!! \quad cov(w_t, w_{t-k}) = 0 \quad k \neq 0?$$

$$Cov(w_t, w_{t-1}) = E(w_t \cdot w_{t-1}) - 0^2 =$$

$$= E\left((u_t^2 - \sigma_t^2)\cdot(u_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)\right) =$$

$$= E\left((v_t^2\cdot\sigma_t^2 - \sigma_t^2)\cdot(v_{t-1}^2\cdot\sigma_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)\right) =$$

$$= E\left((v_t^2 - 1)\cdot(v_{t-1}^2 - 1)\cdot\sigma_t^2\cdot\sigma_{t-1}^2\right) =$$

не зав

$$= E\left((v_t^2 - 1)\right)\cdot E\left((v_{t-1}^2 - 1)\cdot\sigma_t^2\cdot\sigma_{t-1}^2\right) =$$

$$= 0 \cdot B = 0$$

$$v_t \sim N(0;1)$$

в опр.

$$Var(w_t) = E(w_t^2) = E\left((u_t^2 - \sigma_t^2)^2\right) = const. \quad !!$$

практ. $u_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$

$u_t^2 \sim ARMA(1,1)$ - оценить

Q. А зачем тогда GARCH(1,1)?

A. Это утверждение для „чистого" GARCH(1,1), а для более хитрых модификаций, увы, не работает.