Видно? Слышно?

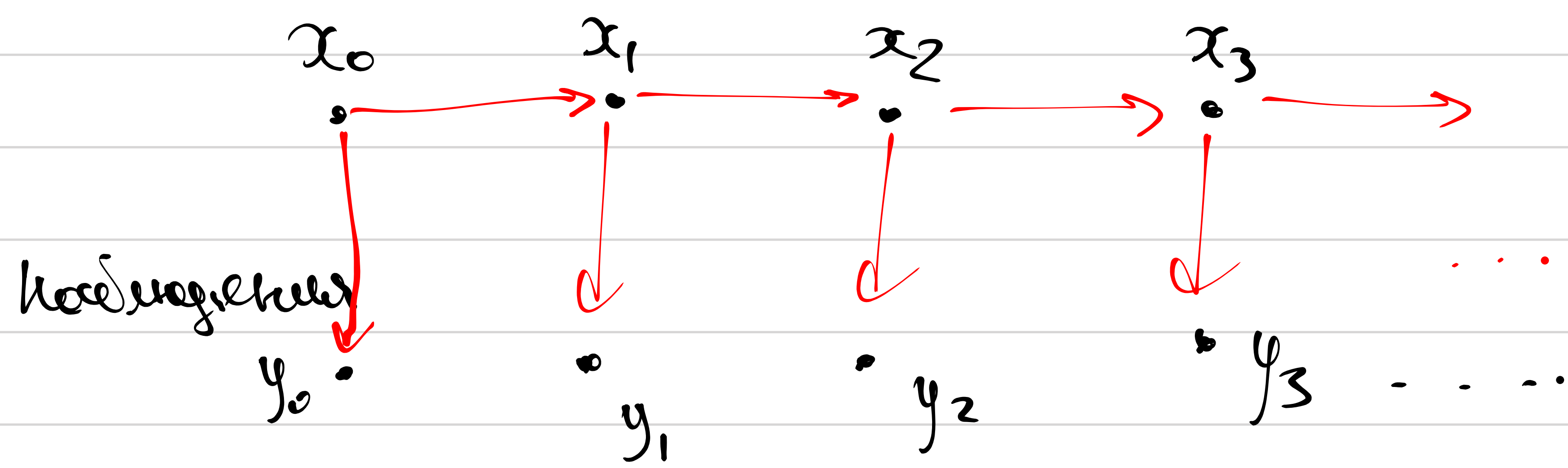
Фильтр Калмана.

→ техник.

→ „под капотом" многих алгоритмов

State space models.

состояния (не наблюдаем)



$$\begin{cases} x_t = F\cdot x_{t-1} + v_t \\ y_t = G\cdot x_t + w_t \end{cases}$$

линейный вар-т.

Пример. стац-ный процесс с ур-нем

AR(2) $\quad a_t = 0{,}5\, a_{t-1} + 0.06\, a_{t-2} + u_t$

$$x_t = \underbrace{\begin{pmatrix} a_t \\ a_{t-1} \end{pmatrix}}_{x_t} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.06 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{t-1} \\ a_{t-2} \end{pmatrix}}_{x_{t-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$

$$y_t = (1 \quad 0)\cdot x_t + 0$$

Задача

в реальном времени наблюдая по очереди $y_1, y_2 \dots$ „восстанавливать" $x_1, x_2, x_3 \dots$

---

x_t - коорд в момент t

y_t - показания приборов

$$\begin{cases} \underline{y_t} = G \cdot \underline{x_t} + \underline{w_t} \\ x_t = F \cdot x_{t-1} + v_t \end{cases}$$

м-цы F и G из-вны

$$x_0, \begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} \dots$$

некорр-ные

Aad van der Vaart "Time Series"

$\Pi_t(\heartsuit)$ - наилучший линейный прогноз $\heartsuit$ с исп-м доступной к моменту t информации.

проекция $\heartsuit$ на H_t

$$H_t = \operatorname{Span}(1, y_0, y_1, y_2, \dots, y_t)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot y_8 + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot y_9 \quad \in H_9$$

у x_t индекс +1 у Π_t индекс +1

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix}\Pi_0(x_0)\\ Var(\Pi_0(x_0))\\ Var(x_0)\end{matrix}} \arrow[r, "1"] & \boxed{\begin{matrix}\Pi_0(x_1)\\ Var(\Pi_0(x_1))\\ Var(x_1)\end{matrix}} \arrow[r, "2"] & \boxed{\begin{matrix}\Pi_1(x_1)\\ Var(\Pi_1(x_1))\\ Var(x_1)\end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

Фильтр Калмана. $\sim 10^4$

$\boxed{\text{Init.}}$ $\Pi_0(x_0)$, $Var(\Pi_0(x_0))$, $Var(x_0)$

→ спец.-но к задаче (эвристики)

→ тривиально:

$$\boxed{\begin{matrix}\Pi_0(x_0)=0\\ Var(\Pi_0(x_0))=I\end{matrix}}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] \\
2 \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
1 & \boxed{\begin{matrix}\Pi_0(x_0)\\ Var(\Pi_0(x_0))\\ Var(x_0)\end{matrix}} \arrow[r, "1"] & \boxed{\begin{matrix}\Pi_0(x_1)\ !! & 1A\\ Var(\Pi_0(x_1))\ !! & 1Б\\ Var(x_1)\ !! & 1В\end{matrix}}
\end{tikzcd}$$

1A: $\Pi_0(x_1) = \Pi_0(F\cdot x_0 + \nu_1) =$

$= \Pi_0(Fx_0) + \Pi_0(\nu_1) =$

$= F\cdot \Pi_0(x_0) + 0 = F\cdot \Pi_0(x_0)$

1Б: $Var(\Pi_0(x_1)) = Var(F\cdot \Pi_0(x_0)) = F\,Var(\Pi_0(x_0))\cdot F^T$

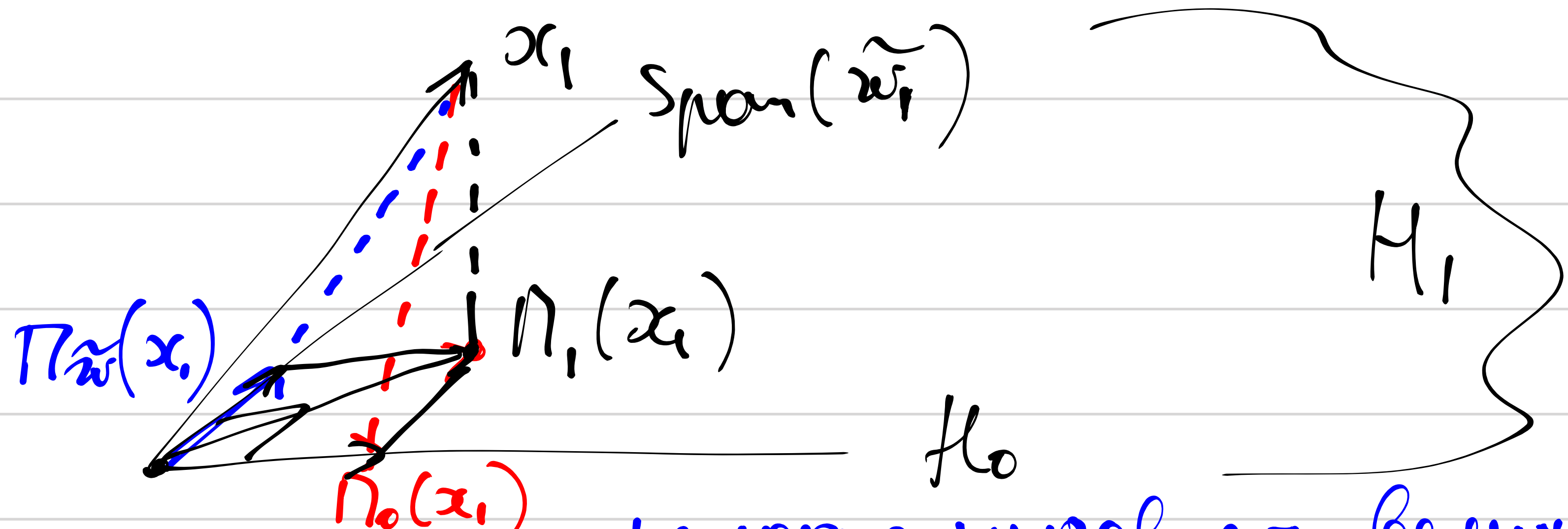
1В: $Var(x_1) = Var(Fx_0 + \nu_1) = Var(Fx_0) + Var(\nu_1) =$

$= F\,Var(x_0)\cdot F^T + Var(\nu_1)$

$$\boxed{\begin{array}{c} \Pi_0(x_1) \\ Var(\Pi_0(x_1)) \\ Var(x_1) \end{array}} \xrightarrow{②} \boxed{\begin{array}{cl} \Pi_1(x_1) & 2А \\ Var(\Pi_1(x_1)) & 2Б \\ Var(x_1) & 2В\ !! \end{array}}$$

получили инфо о y, хотим обновить „предсказанный" $\Pi_0(x_1)$ до „восстановленного" $\Pi_1(x_1)$

2В: $Var(x_1) = Var(x_1)$!!



некоррелиров-сть величин из H_0 и $Span(\tilde{w}_1)$

$$H_1 = H_0 \oplus Span(\tilde{w}_1)$$

2А: $\Pi_1(x_1) = \Pi_0(x_1) + \Pi_{\tilde{w}}(x_1)$

есть перед шагом ②

посчитаем на шаге 2

Найдём $\Pi_{\tilde{w}}(x_1) = \Lambda \cdot \tilde{w}$

$$x_1 - \Pi_{\tilde{w}}(x_1) \perp \tilde{w}_1$$

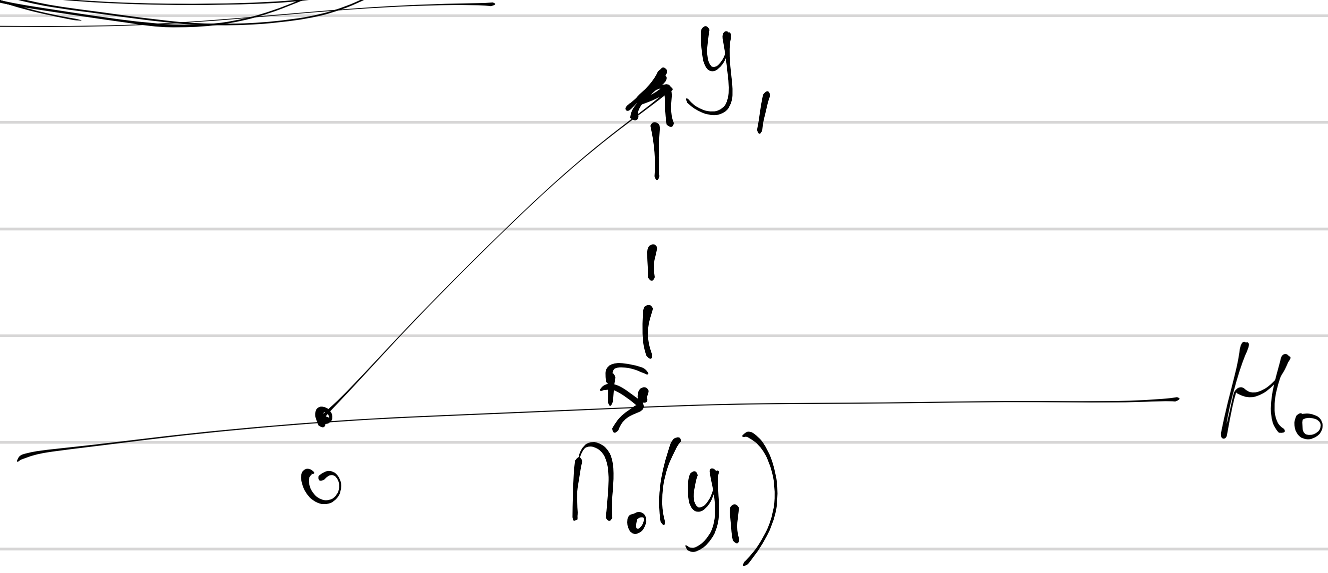
$$Cov(x_1 - \Lambda \cdot \tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = 0$$

$$Cov(x_1, \tilde{w}_1) - \Lambda\, Cov(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = 0$$

$$Cov(x_1, \tilde{w}_1) = \Lambda \cdot Var(\tilde{w}_1)$$

$$\Lambda = Cov(x_1, \tilde{w}_1) \cdot \left(Var(\tilde{w}_1)\right)^{-1} = \ldots$$

$$\boxed{\widetilde{w}_1 = \underbrace{y_1 - \Pi_0(y_1)}}$$ $\widetilde{w}_1$ орт H_0



$\Pi_0(y_1)$ - проекция y_1 на H_0

$y_1 - \Pi_0(y_1)$ – проекция y_1 на $H_0^{\perp}$

$$\widetilde{w}_1 = y_1 - \Pi_0(y_1) = y_1 - \Pi_0(6 \cdot x_1 + w_1) =$$

$$= y_1 - 6 \cdot \Pi_0(x_1) = 6x_1 + w_1 - 6 \cdot \Pi_0(x_1) =$$

$$= 6 \cdot (x_1 - \Pi_0(x_1)) + w_1$$

$$H_1 = \mathrm{Span}(H_0, \widetilde{w}_1)$$

(2Б): $\operatorname{Var}(\Pi_1(x_1)) = \operatorname{Var}(\Pi_0(x_1) + \Pi_{\tilde{w}}(x_1)) =$

$\perp$ (некорр)

$$= \operatorname{Var}(\Pi_0(x_1)) + \operatorname{Var}(\Pi_{\tilde{w}}(x_1)) =$$

$$= \underbrace{\operatorname{Var}(\Pi_0(x_1))}_{\text{есть перед шагом 2}} + \operatorname{Var}(\Lambda \cdot \tilde{w}_1) =$$

$$= \operatorname{Var}(\Pi_0(x_1)) + \Lambda \cdot \boxed{\operatorname{Var}(\tilde{w}_1)} \cdot \Lambda^T ;$$

$$\operatorname{Var}(\tilde{w}_1) = \operatorname{Var}\left(G \cdot (x_1 - \Pi_0(x_1)) + w_1\right) =$$

$$= \operatorname{Var}\left(G(x_1 - \Pi_0(x_1))\right) + \operatorname{Var}(w_1) =$$

$$= G \cdot \underbrace{\operatorname{Var}(x_1 - \Pi_0(x_1))}_{\text{по т. Пифагора.}} \cdot \underbrace{G^T}_{\text{знаем}} + \underbrace{\operatorname{Var}(w_1)}_{\text{знаем}} ;$$

$$x_1 = \Pi_0(x_1) + (x_1 - \Pi_0(x_1))$$

$\perp$ (незав)

$$\operatorname{Var}(x_1) = \operatorname{Var}(\Pi_0(x_1)) + \operatorname{Var}(x_1 - \Pi_0(x_1))$$

$$\operatorname{Var}(x_1 - \Pi_0(x_1)) = \operatorname{Var}(x_1) - \operatorname{Var}(\Pi_0(x_1))$$

знаем в начале шага 2

последний штрих, находим Λ:

$$\Lambda = \mathrm{Cov}(x_1, \tilde{w}_1) \cdot \left(\mathrm{Var}(\tilde{w}_1)\right)^{-1}$$

$$\mathrm{Cov}(x_1, \tilde{w}_1) = \mathrm{Cov}\left(x_1, G\cdot\left(x_1 - \Pi_0(x_1)\right) + w_1\right) =$$

$$= \underbrace{\mathrm{Cov}(x_1, x_1 - \Pi_0(x_1))}_{\text{незав}} \cdot G^T + \mathrm{Cov}\left(\underbrace{F\cdot x_0 + v_1, w_1}_{\text{зав}}\right) =$$

$$= \mathrm{Cov}\left(x_1 - \Pi_0(x_1), x_1 - \Pi_0(x_1)\right)\cdot G^T + \mathrm{Cov}(v_1, w_1) =$$

$$= \left(\mathrm{Var}(x_1) - \mathrm{Var}(\Pi_0(x_1))\right)\cdot G^T + \mathrm{Cov}(v_1, w_1)$$

$$\mathrm{Var}(\tilde{w}_1) = \mathrm{Var}\left(G\cdot\left(x_1 - \Pi_0(x_1)\right) + w_1\right) =$$

$\mathrm{Var}(x_1) - \mathrm{Var}(\Pi_0(x_1))$

$$= G\cdot \boxed{\mathrm{Var}(x_1 - \Pi_0(x_1))}\cdot G^T + \mathrm{Var}(w_1) +$$

$$+ \mathrm{Cov}\left(G\cdot(x_1 - \Pi_0(x_1)), w_1\right) +$$

$$+ \mathrm{Cov}\left(w_1, G\cdot(x_1 - \Pi_0(x_1))\right);$$

связаны транспонир-ем.

$$\mathrm{Cov}\left(G(x_1 - \Pi_0(x_1)), w_1\right) =$$

$$= G\cdot\left[\underbrace{\mathrm{Cov}(x_1, w_1)}_{\shortparallel} - \underbrace{\mathrm{Cov}(\Pi_0(x_1), w_1)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}\right] =$$

$$= G\cdot \mathrm{Cov}(v_1, w_1)$$

$$\shortparallel$$