w04 MA, ARIMA

по умолчанию [далее в это лекции]

(u_t) – б. шум

$$\begin{cases} E(u_t)=0 \\ Var(u_t) = \sigma^2 \\ Cov(u_t, u_{t+k})=0 \text{ при } k\neq 0. \end{cases}$$

форм-но u_t и u_s м. быть зав-мы

опр. (y_t) – процесс скользящего среднего порядка q [$MA(q)$ = moving average] по отношению к бел. шуму (u_t) если

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots + \alpha_q u_{t-q}$$

где $\alpha_q \neq 0$.

утв

У $MA(q)$ процесс $\rho_k = Corr(y_t, y_{t-k})$:

$$\rho_q \neq 0 \quad \rho_{q+1} = \rho_{q+2} = \rho_{q+3} = \ldots = 0.$$

$$Cov(y_t, y_{t+q}) = Cov(\mu + \boxed{u_t} + \alpha_1 u_{t-1} + \ldots + \alpha_q u_{t-q},$$

$$\mu + u_{t+q} + \alpha_1 u_{t+q-1} + \ldots + \boxed{\alpha_q u_{t+q-q}}) \neq 0$$

$\neq 0$

пример.

$MA(2)$ $\quad y_t = 5 + u_t + 6u_{t-1} + 0{,}2u_{t-2}$

$Cov = 0$ $\quad y_{t+3} = 5 + u_{t+3} + 6u_{t+2} + 0{,}2u_{t+1}$

$\quad y_{t+4} = 5 + u_{t+4} + 6u_{t+3} + 0{,}2u_{t+2}$

Опр. (y_t) – процесс $MA(\infty)$ отн-но б. шума (u_t), если

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots\ldots$$

$$\sum \alpha_i^2 < \infty$$

[иногда нав-т доп. условие]

$MA(2)$ – это частный случай $MA(\infty)$

Запись с лагами (и форвардами).

(y_t) $\ldots\ldots y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2 \ldots \ldots\ldots$

def. $L((y_t)) = (\tilde{y}_t)$ $\tilde{y}_t = y_{t-1}$ часто: $\tilde{y}_t = L y_t$

def $F((y_t)) = (\tilde{y}_t)$ $\tilde{y}_t = y_{t+1}$ $\tilde{y}_t = F y_t$

Ловушка: $\ldots y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots \ldots$

$x_t = y_{-t}$

$x_2 = y_{-2}$ $x_{-3} = y_3$

$L x_5$? $L y_{-5} = y_{-6} = x_6$

x_4

$L((x_t))_{t=5} = x_4$

$z_t = x_5$ $L z_{10} = z_9 = x_5$

$\| $

$L x_5$

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

def $(y_t) \sim MA(q)$ процесс по отн-ию к б.шуму (u_t) если

$$y_t = \mu + P_{MA}(L) \cdot u_t, \text{ где}$$

$$P_{MA}(L) = 1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \ldots + \alpha_q L^q \text{ и } \alpha_q \neq 0.$$

$$(1 + L + 3L^2) \cdot u_t = u_t + u_{t-1} + 3u_{t-2}$$

Утв. $L^{-1} = F, \quad F^{-1} = L$

док-во:

$$L(F((y_t))) = (y_t) \quad !!$$

$$A := \frac{1}{1 - 0.5L} \stackrel{?}{=} 1 + 0.5L + 0.5^2 L^2 + 0.5^3 \cdot L^3 + \ldots \quad \text{предел?}$$

Вопрос: А правда ли, что $A(B((y_t))) = (y_t)$?

$$A = \frac{1}{1 - 0.5L} \qquad B = 1 - 0.5L$$

$$y_t = 4^{-t} \qquad (1 - 0.5L) \cdot y_t = 4^{-t} - \frac{1}{2} 4^{-t+1} =$$

$$= 4^{-t} - 2 \cdot 4^{-t} = -4^{-t}$$

$t=0$	-1
$t=-1$	-4
$t=-2$	-16
$\vdots$	

$$A(B((y_t))) =$$

$$= -4^{-t} - \frac{1}{2} 4^{-(t-1)} - \frac{1}{4} 4^{-(t-2)} \ldots$$

$$= -\infty$$

пример пок-т, что $A \cdot B = \text{Identity}$

[!] пример 2

$$y_t = u_1 \cdot \cos t + u_2 \cdot \sin t$$

[u_1, u_2 - б. шум]

a) y_t - стац - ный? !!

б) $A = \frac{1}{1-0{,}5L}$ $B = (1-0{,}5L)$

верно ли, $A \cdot B \cdot ((y_t)) = (y_t)$?

$$E(y_t) = 0$$

$$Var(y_t) = \sigma^2 \cdot \cos^2 t + \sigma^2 \sin^2 t$$

$$Cov(y_t, y_s) =$$

$$= Cov(u_1 \cos t + u_2 \sin t, u_1 \cos s + u_2 \sin s) =$$

$$= \sigma^2 (\cos t \cos s + \sin t \sin s) = \sigma^2 \cos(t-s)$$

$$\underline{By_t} = u_1 \cos t + u_2 \cdot \sin t - \frac{1}{2}\left(u_1 \cos(t-1) + u_2 \sin(t-1)\right)$$

$$= u_1\left(\cos t - \frac{1}{2}\cos(t-1)\right) + u_2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin(t-1)\right)$$

$$A\left(B((y_t))\right) = u_1\left(\cos t - \frac{1}{2}\cancel{\cos(t-1)}\right) + u_2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin(t-1)\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[u_1\left(\cancel{\cos(t-1)} - \frac{1}{2}\cancel{\cos(t-2)}\right) + u_2\left(\sin(t-1) - \frac{1}{2}\sin(t-2)\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[u_1\left(\cancel{\cos(t-2)} - \frac{1}{2}\cancel{\cos(t-3)}\right) + u_2\left(\sin(t-2) - \frac{1}{2}\sin(t-3)\right)\right]$$

$$\ldots$$

<u>def</u> при $|q| < 1$ определим

$$\frac{1}{1-qL} = 1 + qL + q^2L^2 + q^3L^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-qF} = 1 + qF + q^2F^2 + q^3F^3 + \ldots$$

при $|q| > 1$ определим

$$\frac{1}{1-qL} = -\frac{1}{q} \cdot F \cdot \left(1 + qF + q^2F^2 + q^3F^3 + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{1-qF} = -\frac{1}{q} L\left(1 + qL + q^2L^2 + q^3L^3 + \ldots\right)$$

Теорема. для стац-го процесса.

$$(1-qL)^{-1} = \frac{1}{1-qL} \qquad (1-qF)^{-1} = \frac{1}{1-qF} \quad \text{при } |q| \neq 1$$

почему невозможно обратить $\left(1-\frac{1}{2}L\right)$ для произв-го процесса?

$$\dots\ y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3 \ \dots\dots$$

не видите

видите
$$\begin{cases} x_{-1} = y_{-1} - \frac{1}{2}y_{-2} \\ x_0 = y_0 - \frac{1}{2}y_{-1} \\ x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_0 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases}$$

y_2 ...
y_1 =

берем любой y_0!

$y_0 = 56 + 4_7$

y_{-1}

y_{-2}

y_{-3}

$\vdots$

как логично определить?

$$\frac{1}{1-5L}$$

идея 1 пров-ая:

$$1 + 5L + 5^2L^2 + 5^3L^3 + \dots$$

не ср-т даже для посл-сти из 1, 1, ...

$$\frac{1}{1-5L} = \frac{1/(-5L)}{(1-5L)/(-5L)} = \frac{-0{,}2F}{1-0{,}2F} = -0{,}2\cdot F\cdot\frac{1}{1-0{,}2F} =$$

$$= -0{,}2F\cdot\left(1 + 0{,}2F + 0{,}2^2F^2 + 0{,}2^3F^3 + \dots\right)$$

пример.

$$\tilde{u}_t = \frac{1}{1-5L}\cdot u_t \overset{?}{=} \boxed{-0{,}2F\left(1+0{,}2F+0{,}2^2F^2+\ldots\right)}\cdot u_t =$$

$$= -0{,}2\,u_{t+1} - 0{,}2^2 u_{t+2} - 0{,}2^3 u_{t+3} - \ldots\ldots$$

$$(1-5L)\cdot\tilde{u}_t = \tilde{u}_t - 5\tilde{u}_{t-1} =$$

$$= -0{,}2\,u_{t+1} - 0{,}2^2 u_{t+2} - 0{,}2^3 u_{t+3} - \ldots\ldots$$

$$- 5\left(-0{,}2\,u_t - 0{,}2^2 u_{t+1} - 0{,}2^3 u_{t+2} - \ldots\right) =$$

$$= u_t$$

$$\frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4} \rightarrow \cancel{1+5+5^2+5^3+\ldots}$$

$$\frac{-0{,}2}{1-0{,}2} = -0{,}2\left(1+0{,}2+0{,}2^2+0{,}2^3+\ldots\right)$$

Упр. а) найдите явно $\tilde{u}_t = \dfrac{1-5L}{1-5F}\cdot u_t \;(=)$

где (u_t) – б. шум

б) правда ли, что $(\tilde{u}_t)$ – б. шум?

$$(=)\,(1-5L)\cdot(-0{,}2L)\cdot\frac{1}{1-0{,}2L}\cdot u_t =$$

$$= (L^2 - 0{,}2L)\cdot\left(1+0{,}2L+0{,}2^2L^2+0{,}2^3L^3+\ldots\right)\cdot u_t$$

$$\tilde{u}_t = \boxed{-0{,}2\,u_{t-1} + (1-0{,}2^2)\cdot u_{t-2} + 0{,}2(1-0{,}2^2)\cdot u_{t-3} + 0{,}2^2(1-0{,}2^2)\cdot u_{t-4} + \ldots\ldots}$$

$$E(\tilde{u}_t) = 0 \qquad Var(\tilde{u}_t) = \left[0{,}2^2 + \frac{1-0{,}2^2}{1-0{,}2^2}\right]\cdot\sigma^2$$

$$\boxed{\tilde{u}_t^{(2)} = -0{,}2\,u_{t-1} + (1-0{,}2^2)\cdot u_{t-2} + 0{,}2(1-0{,}2^2)\cdot u_{t-3} + 0{,}2^2(1-0{,}2^2)\cdot u_{t-4} + \ldots}$$

все коэфф-ты отличны от 0.

MA(∞)

б. шум

док-во:

$$Cov(\tilde{u}_t, \tilde{u}_{t+2}) =$$

$$Cov(-0{,}2\,u_{t-1} + (1-0{,}2^2)u_{t-2} \xrightarrow{\times 0{,}2} 0{,}2(1-0{,}2^2)u_{t-3} + \ldots,$$

$$-0{,}2\,u_{t+1} + (1-0{,}2^2)u_t \quad 0{,}2(1-0{,}2^2)u_{t-1} + 0{,}2^2(1-0{,}2^2)u_{t-2} \xrightarrow{\times 0{,}2} 0{,}2^3(1-0{,}2^2)u_{t-3} + \ldots$$

$$= -0{,}2^2(1-0{,}2^2) + \frac{\boxed{0{,}2^2(1-0{,}2^2)^2}}{1-0{,}2^2} = -0{,}2^2(1-0{,}2^2) + 0{,}2^2(1-0{,}2^2) = 0$$

$$u_t^* = -0{,}2\,u_{t-1}$$

(2) $\tilde{u}_t = u_t^* + 5\cdot(1-0{,}2^2)\cdot u_{t-1}^* + 5\cdot 0{,}2(1-0{,}2^2)\cdot u_{t-2}^* + \ldots$

итог: MA(q), MA(∞)

пара примеров: $u_1 \cos t + u_2 \sin t$ (1)

(2)

определили $\frac{1}{1-qL}$, $\frac{1}{1-qF}$ при $|q| \neq 1$.