Привет !!

Задачи перед кр !!

Упр 1. ρ_k vs φ_{kk}.

Если возможно придумайте такой стац-ый процесс, что.

а) (x_t) что $\rho_1 = 0$ $\rho_2 = 0.99$

стац.

$\rho_k = Corr(y_t, y_{t-k})$

б) (y_t), что $\varphi_{11} = 0$ $\varphi_{22} = 0{,}99$

стац.

$\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t-k}; y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} \ldots y_{t-k+1})$

А) $\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{pmatrix}$

корр. м-ца $c_{ij} = Corr(y_i, y_j) = \rho_{|i-j|}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.99 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.99 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0{,}99 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}99 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 + 0 + 0 - 0{,}99^2 \cdot 1 > 0.$$

Есть такой процесс!

Как сконструир-ть?

AR(2) стац.
$E(y_t)=0$

$$x_t = \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + u_t \qquad u_t \text{ - б.шум}$$

$$x_t = \begin{cases} a_t & \text{если } t \text{ - четное} \\ b_t & \text{если } t \text{ - нечетное} \end{cases}$$

(a_t), (b_t) незав!

(x_t): $b_1 \; a_2 \; b_3 \; a_4 \; b_5 \; a_6 \; \ldots$

!! $\boxed{\rho_1 = 0}$ $\boxed{\rho_2 = 0{,}99}$

$a_2, a_4, a_6 \ldots$ AR(1) стац.

$a_t = \underbrace{0{,}99}_{\text{corr}(a_t,\, a_{t-2})} a_{t-2} + w_t$ ← б. шум.

незав.

$b_1, b_3, b_5 \ldots$ AR(1) стац.

$b_t = 0{,}99\, b_{t-2} + v_t$ ← б. шум

a) !! $\rho_1 = 0 \qquad \rho_2 = 0{,}99$

a') $\rho_1 = 0{,}99 \qquad \rho_2 = -0{,}99$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}99 & -0{,}99 \\ 0{,}99 & 1 & 0{,}99 \\ -0{,}99 & 0{,}99 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1^2 - 0{,}99^2 > 0$

$$\Delta_3 = 1 - 0{,}99^3 - 0{,}99^3 - 0{,}99^2 - 0{,}99^2 - 0{,}99^2 < 0$$

такого процесса нет!

δ) $\varphi_{11} = 0 \quad \varphi_{22} = 0{,}99$ $\boxed{\varphi_{11} = \rho_1}$

δ') $\varphi_{11} = 0{,}99 \quad \varphi_{22} = -0{,}99$

δ) тот же (x_t), что и для $(a)_t$.

$$x_t = \begin{cases} a_t & t - \text{чет} \\ b_t & t - \text{нечет} \end{cases}$$

$$a_t = 0{,}99\, a_{t-2} + w_t$$
$$b_t = 0{,}99\, b_{t-2} + v_t$$

$a_2, a_4, a_6 \ldots$ AR(1) стац.

$b_1, b_3, b_5 \ldots$ AR(1) стац.

δ') $\varphi_{11} = 0{,}99 \quad \varphi_{22} = -0{,}99.$

$\rho_1 = Corr(y_t, y_{t-1})$ $\quad$ $pCorr(y_t, y_{t-2}; y_{t-1})$

AR(2) [стац] $(y_t) \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)

$$y_t = \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 \cdot y_{t-2} + u_t$$

u_t - б. шум.

$pCorr(y_t, y_{t-2}; y_{t-1})$

$$y_t = \beta_1 \cdot y_{t-1} - 0{,}99\, y_{t-2} + u_t$$

$Var(u_t) = 1$

(u_t) - б. шум.

$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$?

$\rho_1 = 0{,}99$

$Var(LHS) = Var(RHS)$

$$\begin{cases} \boxed{\gamma_0 = \beta_1^2 \cdot \gamma_0 + 0{,}99^2 \gamma_0 + 1 - 2 \cdot 0{,}99\, \beta_1 \cdot \gamma_1} \\ Cov(LHS, y_{t-1}) = Cov(RHS, y_{t-1}) \\ \gamma_1 = \beta_1 \cdot \gamma_0 - 0{,}99 \cdot \gamma_1 + 0 \end{cases}$$

$$Var(LHS) = Var(RHS)$$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned}\gamma_0 &= \beta_1^2 \cdot \gamma_0 + 0{,}99^2 \gamma_0 + 1 \\ &- 2 \cdot 0{,}99 \beta_1 \cdot \gamma_1\end{aligned}} \\ cov(LHS, y_{t-1}) = cov(RHS, y_{t-1}) \\ \gamma_1 = \beta_1 \cdot \gamma_0 - 0{,}99 \cdot \gamma_1 + 0 \end{cases}$$

не нужно, хотя и верно!

$$\rho_1 = 0{,}99$$

поделим на γ_0

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \beta_1 - 0{,}99 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{Cov(y_t, y_{t-1})}{Var(y_t)} = \rho_1$$

$$\rho_1 = \beta_1 - 0{,}99\, \rho_1$$

$\rho_1 = 0{,}99$ цель

$$\rho_1 (1 + 0{,}99) = \beta_1$$

$$\beta_1 = 0{,}99 \cdot 1{,}99.$$

Ура!!

$$\boxed{y_t = 0{,}99 \cdot 1{,}99\, y_{t-1} - 0{,}99\, y_{t-2} + u_t} \quad (*)$$

стац. AR(2) с таким ур-ем.

хар-ое ур-ие:

$$\lambda^2 - 0{,}99 \cdot 1{,}99 \lambda + 0{,}99 = 0.$$

$$D = 0{,}99^2 \cdot 1{,}99^2 - 4 \cdot 0{,}99 < 0. \quad !$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0{,}99 \cdot 1{,}99 \pm i\sqrt{4 \cdot 0{,}99 - 0{,}99^2 \cdot 1{,}99^2}}{2}$$

$$\text{все } |\lambda_j| = \sqrt{\left(\frac{0{,}99 \cdot 1{,}99}{2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 0{,}99 - 0{,}99^2 \cdot 1{,}99^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{0{,}99} < 1.$$

У ур-ия (*) есть стац-ные реш-ия вида MA(∞).

Упр.

? 2.3 4.1 0,7 2.9

y_1 y_2 y_3 y_4 y_5

$$y_t = 0{,}3\,y_{t-1} - 0{,}02\,y_{t-2} + u_t$$

AR(2)

(y_t) – стац.

(u_t) – $N(0;25)$ незав.

а) восстановите пропущенное значение в начале

$$E(y_1 \mid y_2, y_3, y_4, y_5)$$

б) постройте 95% „предсказательный" интервал для y_1 с учётом всей информации.

Стратегия 1

(y_t) мн-но выр-ны через (u_t)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}; \underbrace{\begin{bmatrix} \end{bmatrix}}_{[5\times 5]}\right)$$

$$E(y_1 \mid y_2, y_3, \ldots y_5) = \alpha_2 y_2 + \alpha_3 \cdot y_3 + \alpha_4 y_4 + \alpha_5 y_5$$

$$e_1 = y_1 - E(y_1 \mid y_2 \ldots y_5)$$

$$\begin{cases} Cov(e_1, y_2) = 0 \\ Cov(e_1, y_3) = 0 \\ Cov(e_1, y_4) = 0 \\ Cov(e_1, y_5) = 0 \end{cases}$$

4-е ур-ия

4-е неизв-х

$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$

$E(y_t) = const = 0$

$$\gamma_1 = Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(y_t, y_{t+1})$$

Св-во 2 — Идея 1: Если у стац-го процесса обратить время вспять то $E(y_t)$, $\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k})$ сохр-ся.

Идея 2: для многом-го нор-го $E(y_t)$ и γ_k полностью опр-т процесс /закон распр-ия/

$$\begin{pmatrix} y_5 \\ y_4 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y_6 \\ y_5 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$$y_t = 0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_{t-2} + u_t \qquad [\text{вперёд}]$$

$$y_t = u_t + ?\, u_{t-1} + ?\, u_{t-2} + \ldots$$

$$y_{t-2} = 0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_t + v_t \qquad [\text{назад}]$$

v_t – б. шум

$$y_t = v_t + ?\, v_{t+1} + ?\, v_{t+2} + \ldots$$

?	2.3	4.1	0,7	2.9
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

$$y_t = 0{,}3\, y_{t-1} - 0{,}02\, y_{t-2} + u_t$$

а) $E(y_1 \mid y_2 \ldots y_5) = \underbrace{0{,}3 \cdot 2.3 - 0.02 \cdot 4{,}1}$!!

$$Var(y_1 \mid y_2, y_3) = Var(0{,}3\, y_2 - 0{,}02\, y_3 + v_1 \mid y_2, y_3) = $$
$$= Var(v_0) = 25.$$

б) 95% PI $[0{,}3 \cdot 2{,}3 - 0{,}02 \cdot 4{,}1 - 1{,}96 \cdot \sqrt{25};$
$0{,}3 \cdot 2{,}3 - 0{,}02 \cdot 4.1 + 1{,}96 \cdot \sqrt{25}]$

попр-те убедиться!

шаг 1) сгенерировать люб. стац. процесс. [дост. длинный]

шаг 2) постр-йте регрессию y_t на y_{t-1}, y_{t-2}

шаг 3) постр-йте регрессию y_{t-2} на y_{t-1}, y_t

Упр. (y_t) – стац $AR(1)$ } незав.
(x_t) ~ стац $AR(1)$

$s_t = y_t + x_t$ ЭКОНОМИКА? $s_t \sim ARMA(?,?)$

$$y_t = u_t + \alpha \cdot u_{t-1} + \alpha^2 u_{t-2} + \alpha^3 u_{t-3} + \ldots$$

$$y_t = \alpha \cdot y_{t-1} + u_t \qquad (1-\alpha L)\cdot y_t = \underline{u_t} \text{ б. шум.}$$

$$x_t = v_t + \beta \cdot v_{t-1} + \beta^2 v_{t-2} + \beta^3 v_{t-3} + \ldots$$

$$x_t = \beta \cdot x_{t-1} + v_t \qquad (1-\beta L)\cdot x_t = \underline{v_t} \text{ - б. шум.}$$

$s_t \sim ARMA(p,q)$

$$\underbrace{P(L)}_{\deg P = p} \cdot s_t \sim \underbrace{MA(q)}_{\text{б. шум.}}$$

Случ-ай А: $\alpha = \beta.$

$\rho_1 = \alpha \qquad \rho_1 = \beta \qquad \rho_1 = \alpha = \beta$

$AR(1) \underset{\text{незав}}{+} AR(1) = AR(1)$

$$(1-\alpha L)\cdot s_t = (1-\alpha L)\cdot y_t + (1-\alpha L)\cdot x_t = u_t + v_t$$

нов. белый шум

$Var(s_t) = Var(x_t) + Var(y_t)$

$w_t = u_t + v_t$

Случ-юй Б: $\alpha \neq \beta.$

$$(1-\alpha L)\cdot(1-\beta L)\cdot s_t = (1-\alpha L)\cdot(1-\beta L)\cdot y_t + (1-\alpha L)\cdot(1-\beta L)\cdot x_t =$$

$$= \boxed{(1-\beta L)\cdot u_t + (1-\alpha L)\cdot v_t} = u_t + v_t - \beta u_{t-1} - \alpha v_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = u_t + v_t - \beta u_{t-1} - \alpha v_{t-1}$$

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$Var(\varepsilon_t) = (1+\beta^2)\cdot\sigma_u^2 + (1+\alpha^2)\cdot\sigma_v^2$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-2}) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-3}) = \ldots = 0$$

$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = Cov(u_t + v_t - \beta u_{t-1} - \alpha v_{t-1},\; u_{t-1} + v_{t-1} - \beta u_{t-2} - \alpha v_{t-2})$$

$$= -\beta\sigma_u^2 - \alpha\sigma_v^2.$$

$$\varepsilon_t \sim MA(1)$$

$$\underbrace{(1-\alpha L)\cdot(1-\beta L)\cdot s_t}_{} \sim MA(1)$$

$$\boxed{s_t \sim ARMA(2,1)}$$

$$s_t - (\alpha+\beta)s_{t-1} + \alpha\beta s_{t-2} = \overbrace{w_t + \theta w_{t-1}}^{\varepsilon_t}$$

θ нах-ся из условия

$$corr(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \frac{-\beta\sigma_u^2 - \alpha\sigma_v^2}{(1+\beta^2)\sigma_u^2 + (1+\alpha^2)\sigma_v^2}$$