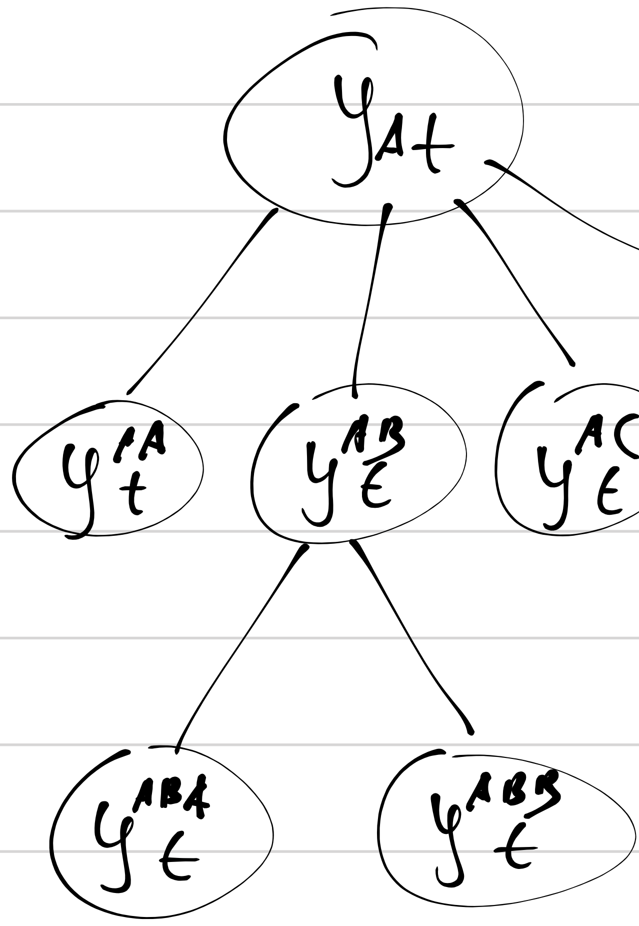
Иерархические и сгруппированные ряды



$$\boxed{\begin{aligned} y_t^A &= y_t^{AA} + y_t^{AB} + y_t^{AC} + y_t^{AD} \\ y_t^{AB} &= y_t^{ABA} + y_t^{ABB} \end{aligned}}$$

$$y_t^X = \sum_j y_t^{Xj}$$

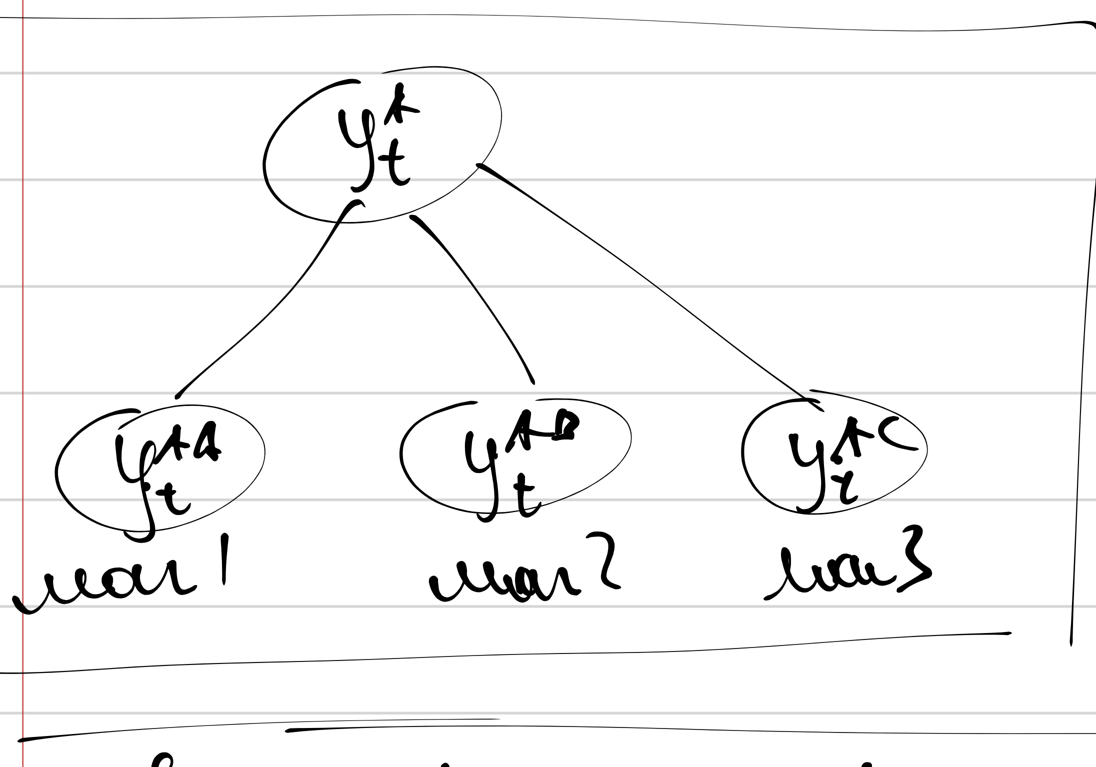
Любой алгоритм

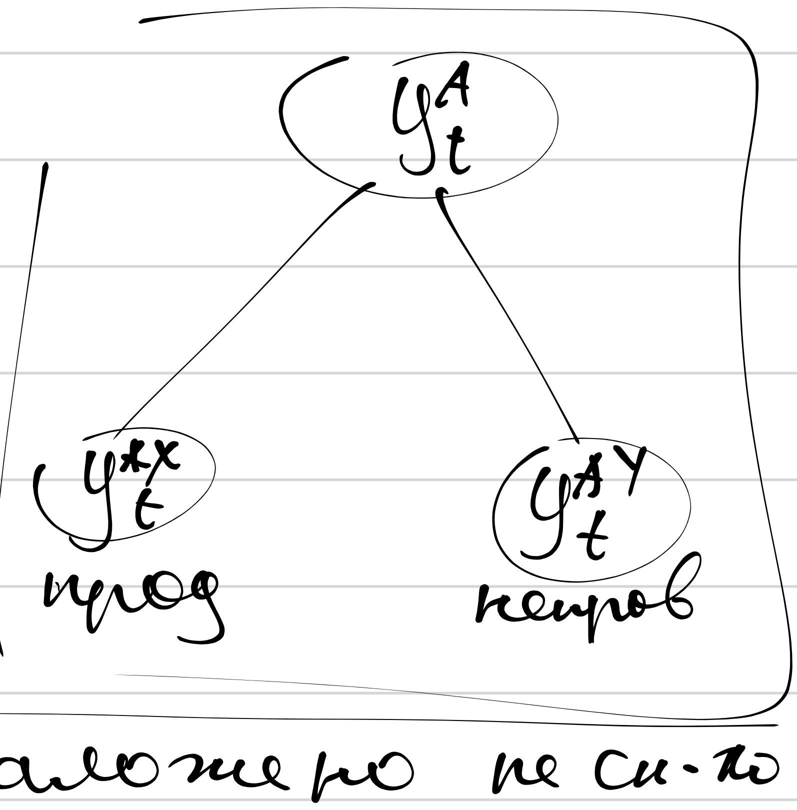
$\hat{y}_{t+1}^{A}$, $\hat{y}_{t+1}^{AB}$, $\hat{y}_{t+1}^{ABA}$, $\hat{y}_{t+1}^{ABB}$

согласованности не ожидаем

$$\hat{y}_{t+1}^{AB} \overset{?}{=} \hat{y}_{t+1}^{ABA} + \hat{y}_{t+1}^{ABB}$$

иерарх-х структур. (древесных) может быть несколько.





Если на данные наложено не ск-то иерарх-х структур, то данные наз-ся сгруппированными.

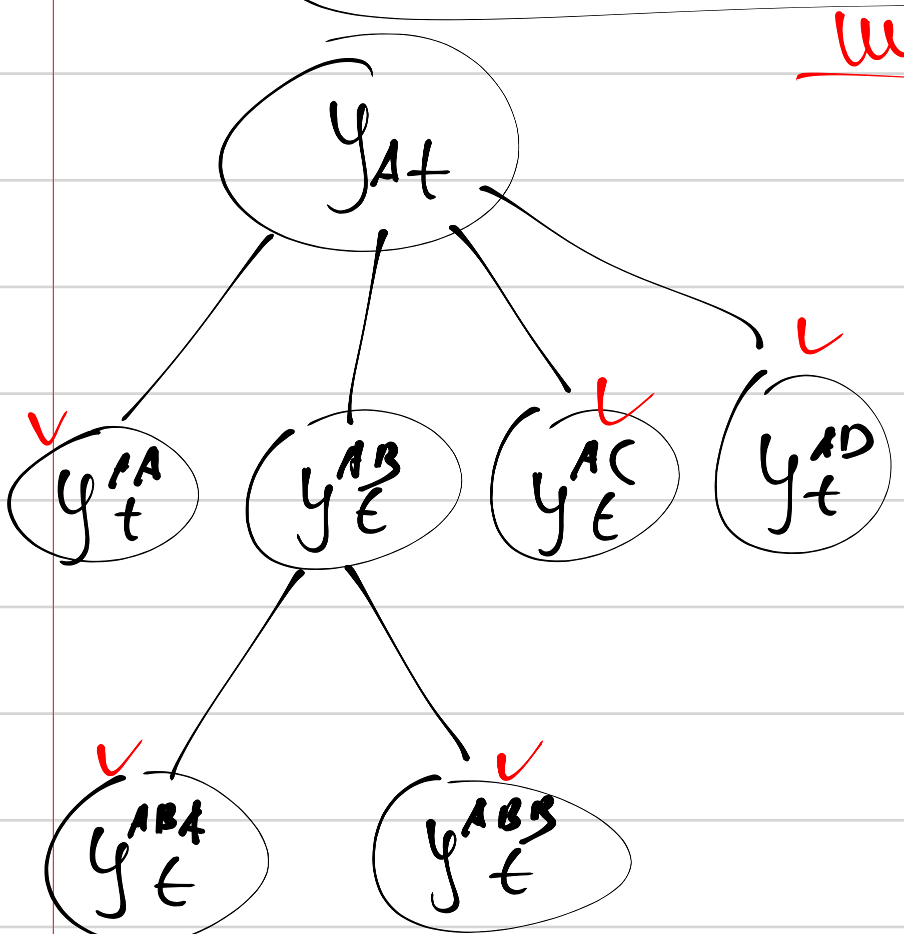
Цель: согласовать прогнозы.

Метод А [простейший]
Согласование „снизу-вверх"

Шаг 1. Спрогнозировать нижние ряды иерархии.

Шаг 2. Агрегировать простым суммированием

> y_t — сам ряд.
>
> $\hat{y}_{t+h}$ — прогноз с помощью нек-рого алгоритма [не соглас]
>
> $\tilde{y}_{t+h}$ — соглас-ный прогноз по иерархии.



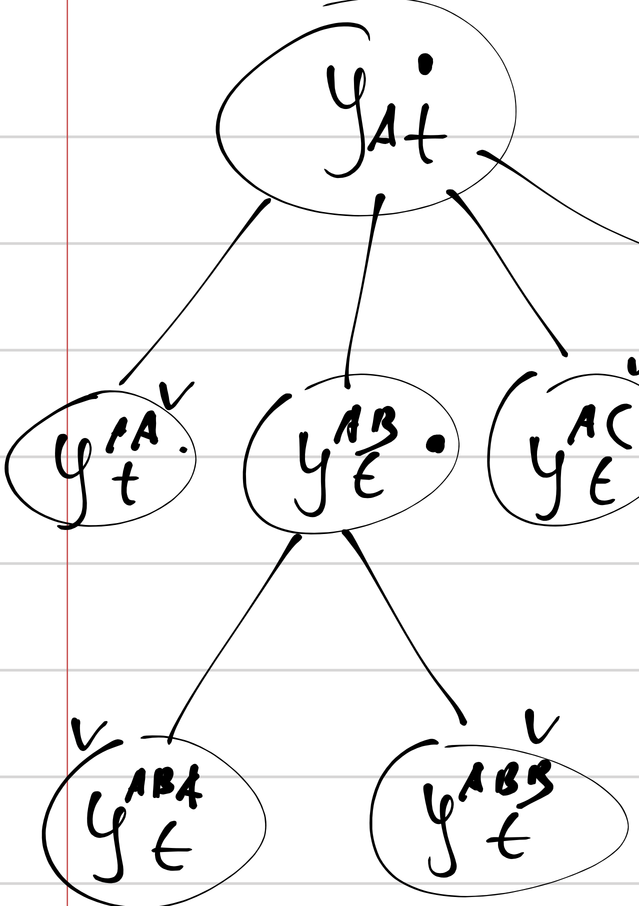
Шаг 1

$$\hat{y}^{AA}_{t+1}, \quad \hat{y}^{ABA}_{t+1}, \quad \hat{y}^{ABB}_{t+1}, \quad \hat{y}^{AC}_{t+1}, \quad \hat{y}^{AD}_{t+1}$$

Шаг 2

$$\tilde{y}^{AB}_{t+1} = \hat{y}^{ABA}_{t+1} + \hat{y}^{ABB}_{t+1}$$

$$\tilde{y}^{A}_{t+1} = \hat{y}^{AA}_{t+1} + \tilde{y}^{AB}_{t+1} + \hat{y}^{AC}_{t+1} + \hat{y}^{AD}_{t+1}$$



$$y_t = \begin{bmatrix} y_t^{A} \\ y_t^{AA} \\ y_t^{AB} \\ y_t^{AC} \\ y_t^{ABA} \\ y_t^{ABB} \end{bmatrix} \qquad b_t = \begin{bmatrix} y_t^{AA} \\ y_t^{AC} \\ y_t^{AD} \\ y_t^{ABA} \\ y_t^{ABB} \end{bmatrix}$$

$$y_t = S \cdot b_t$$

$$\underset{7\times 5}{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 1. $\hat{b}_{t+1}$ (по какому-то алгоритму)

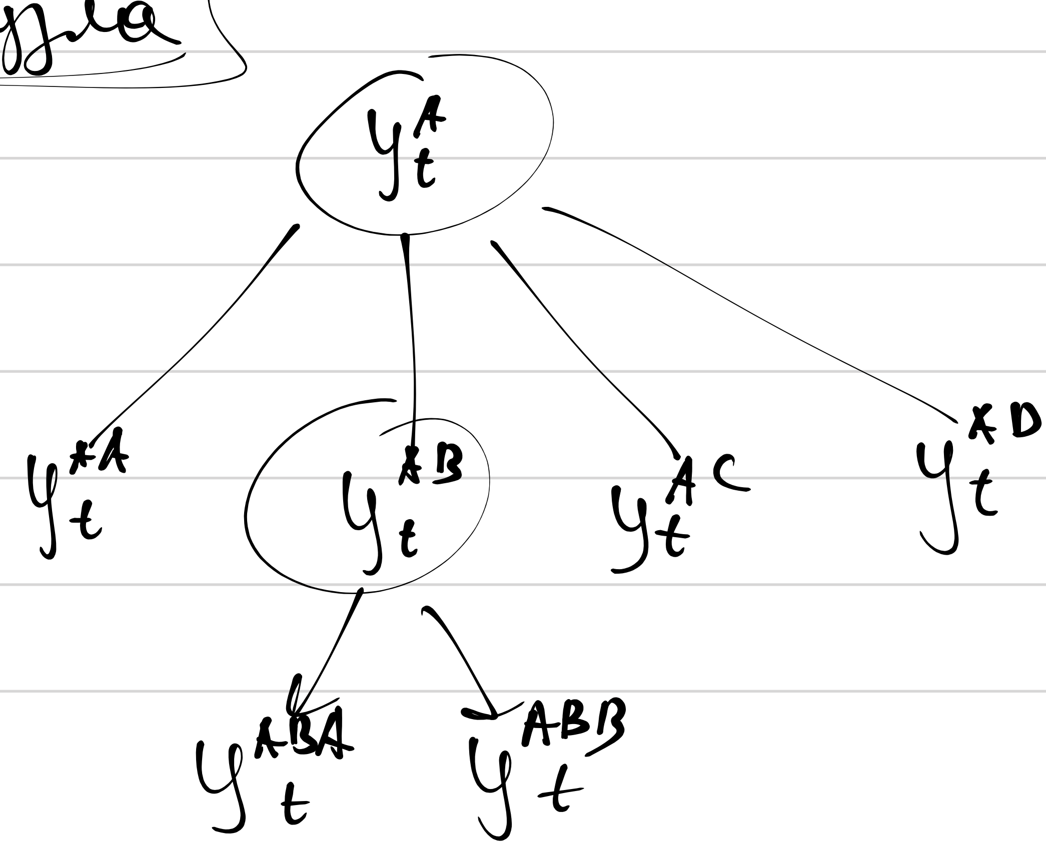
Шаг 2.

$$\tilde{y}_{t+1} = S \cdot \hat{b}_{t+1}$$

Подход „сверху вниз"

Forecasting principles & practice (3) (hierarchical series)

для одного узла



дезагрегирование с помощью долей.

$$\tilde{y}^{AA}_{t+1} = p_{AA} \cdot \hat{y}^{A}_{t+1}$$

$$\tilde{y}^{AB}_{t+1} = p_{AB} \cdot \hat{y}^{A}_{t+1}$$

$$\tilde{y}^{AC}_{t+1} = p_{AC} \cdot \hat{y}^{A}_{t+1}$$

$$\tilde{y}^{AD}_{t+1} = p_{AD} \hat{y}^{A}_{t+1}$$

$\hat{y}^{A}_{t+1}$

$$\boxed{\underset{\geq 0}{p_{AA}} + \ldots + \underset{\geq 0}{p_{AD}} = 1}$$

откуда взять p_i?

исторически:

усреднить доли

$$p_{AA} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{y^{AA}_t}{y^A_t} \right)}{T}$$

$$p_{AB} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{y^{AB}_t}{y^A_t} \right)}{T}$$

$\vdots$

отношение средних

$$p_{AA} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y^{AA}_t / T}{\sum_{t=1}^{T} y^{A}_t / T}$$

$$p_{AB} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y^{AB}_t / T}{\sum_{t=1}^{T} y^{A}_t / T}$$

$\vdots$

оценивать из прогнозов

$$p_{AA} = \frac{\hat{y}^{AA}_{t+1}}{\hat{y}^{AA}_{t+1} + \hat{y}^{AB}_{t+1} + \hat{y}^{AC}_{t+1} + \hat{y}^{AD}_{t+1}}$$

подход „сверху-вниз" в м-цах.

$$y_t = \begin{pmatrix} y_t^{A} \\ y_t^{AA} \\ \vdots \\ y_t^{AD} \\ y_t^{ABA} \\ y_t^{ABB} \end{pmatrix} \qquad b_t = \begin{pmatrix} y_t^{AA} \\ y_t^{AC} \\ y_t^{AD} \\ y_t^{ABA} \\ y_t^{ABB} \end{pmatrix}$$

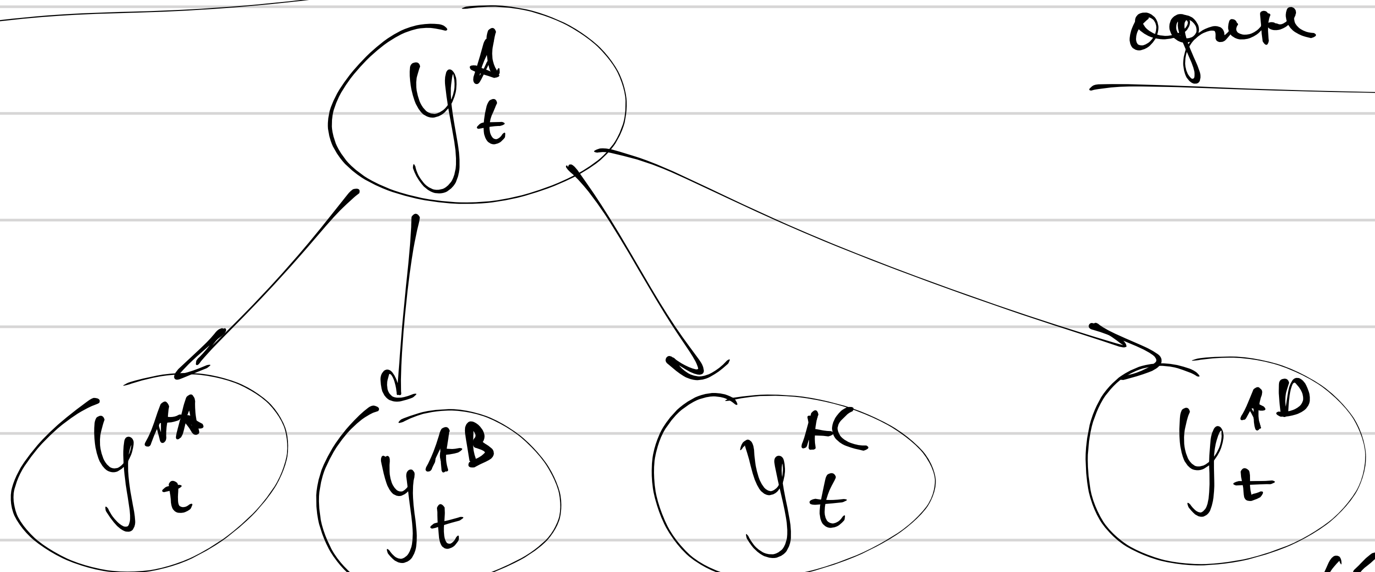
$$\hat{y}_{t+1} \xrightarrow[\text{„согласование"}]{G} \tilde{b}_{t+1}$$

$$\tilde{b}_{t+1} = G \cdot \hat{y}_{t+1}$$

как выглядит?

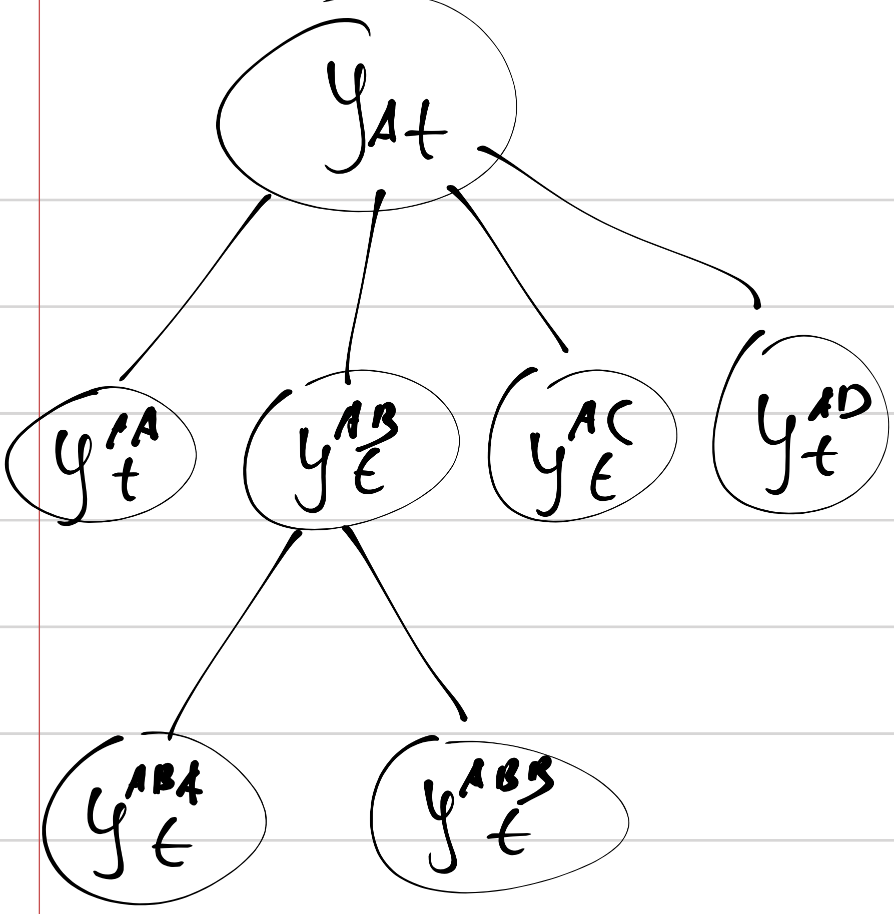
$$\tilde{y}_{t+1} = S \cdot \tilde{b}_{t+1}$$

один узел.



$$\tilde{b}_{t+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{AA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AB} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AC} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AD} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{} \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}^{A}_{t+1} \\ \hat{y}^{AA}_{t+1} \\ \vdots \\ \hat{y}^{AD}_{t+1} \end{pmatrix}$$

счит-ся по ист-и данным



$$\tilde{y}_{t+1} = \begin{pmatrix} \tilde{y}^{AA}_{t+1} \\ \tilde{y}^{AC}_{t+1} \\ \tilde{y}^{AD}_{t+1} \\ \tilde{y}^{ABA}_{t+1} \\ \tilde{y}^{ABB}_{t+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{AA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AC} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AD} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AB} \cdot p_{ABA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{AB} \cdot p_{ABB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{y}^{A}_{t+1} \\ \hat{y}^{AA}_{t+1} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\hat{y}_{t+1}}$$

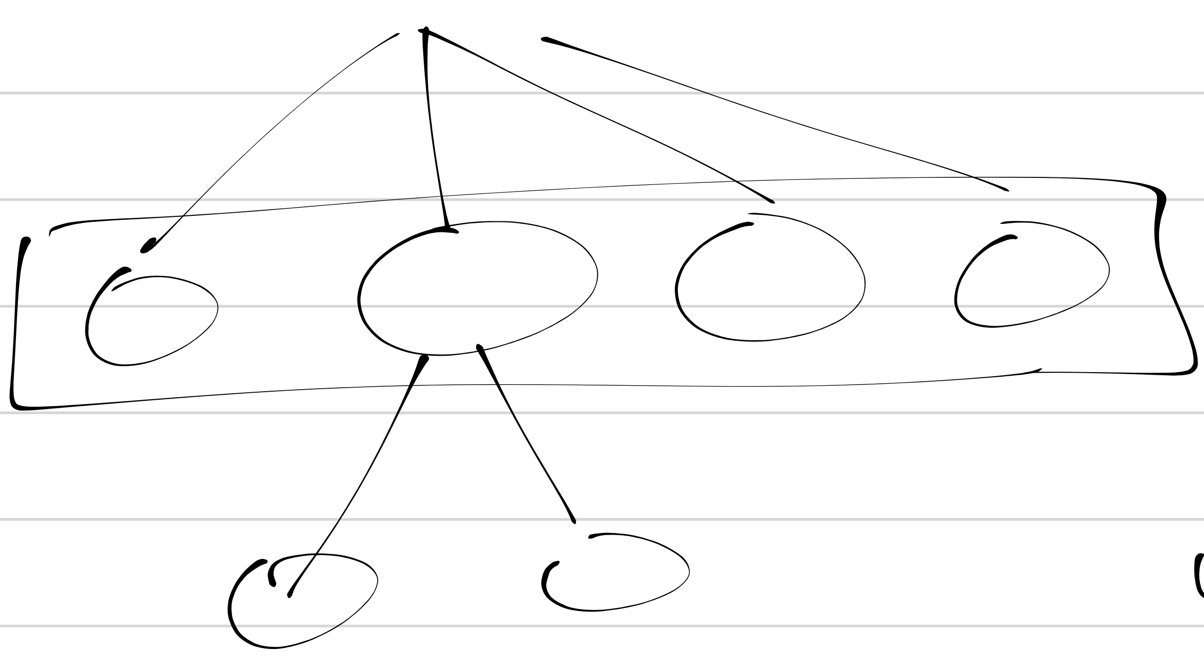
расчёт пропорций по прогнозам

$$p_{AA} = \frac{\hat{y}^{AA}_{t+1}}{\hat{y}^{AA}_{t+1} + \hat{y}^{AB}_{t+1} + \hat{y}^{AC}_{t+1} + \hat{y}^{AD}_{t+1}}$$

$$p_{ABA} = \frac{\hat{y}^{ABA}_{t+1}}{\hat{y}^{ABA}_{t+1} + \hat{y}^{ABB}_{t+1}}$$

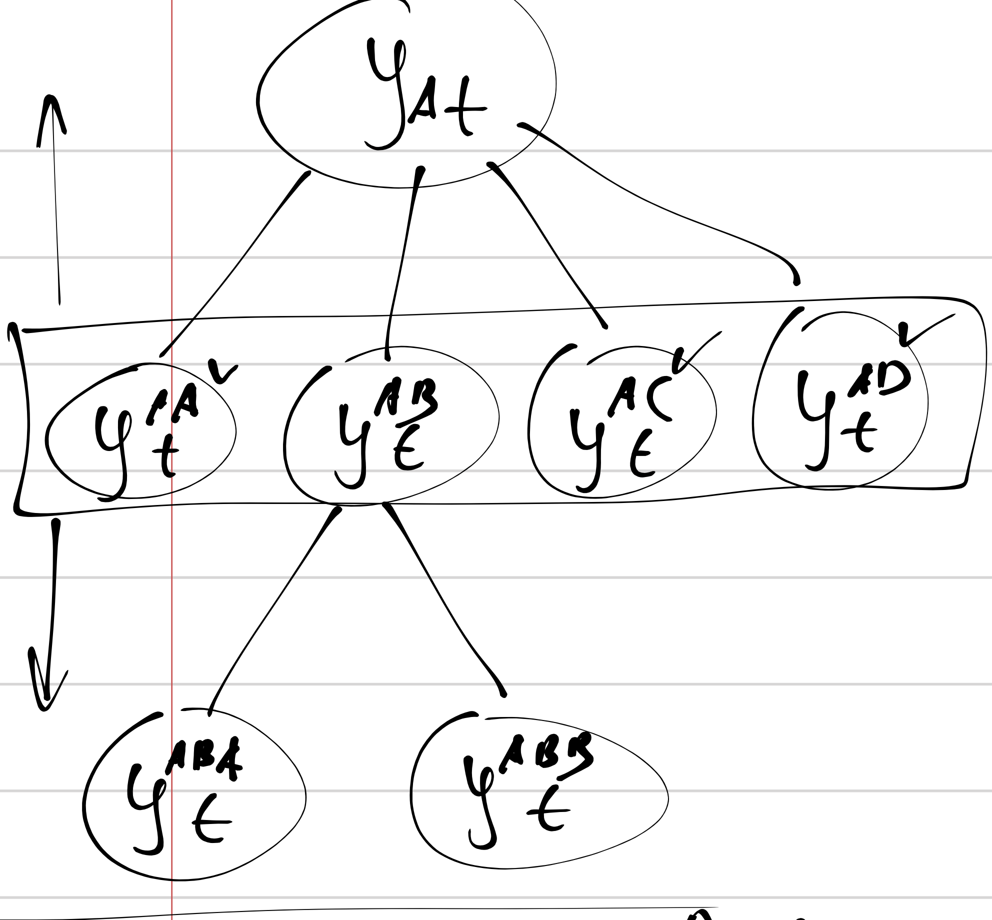
. . . .

подход „с промежуточного уровня"



„снизу-вверх"

„сверху вниз"



$\tilde{b}_{t+1}$ $\qquad$ $\boxed{\hat{y}_{t+1}}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}^{AA}_{t+1} \\ \tilde{y}^{AC}_{t+1} \\ \tilde{y}^{AD}_{t+1} \\ \tilde{y}^{ABA}_{t} \\ \tilde{y}^{ABB}_{t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ABA} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{ABB} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{G} \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}^{A}_{t+1} \\ \hat{y}^{AA}_{t+1} \\ \hat{y}^{AB}_{t+1} \\ \hat{y}^{AC}_{t+1} \\ \hat{y}^{AD}_{t+1} \\ \hat{y}^{ABA}_{t+1} \\ \hat{y}^{ABB}_{t+1} \end{pmatrix}$$

$$p_{ABA} = \frac{\hat{y}^{ABA}_{t+1}}{\hat{y}^{ABA}_{t+1} + \hat{y}^{ABB}_{t+1}}$$

Самая „лучшая" G?

$\boxed{y_{t+1}} - \boxed{\tilde{y}_{t+1}}$ ← ошибка согл-го прогноза

$$\tilde{y}_{t+1} = S \cdot \underbrace{G \cdot \hat{y}_{t+1}}$$

прогн-ые (не согл) по иерарх

прогнозы „листьев"

$$y_{t+1} \neq S \cdot G \cdot y_{t+1}$$

$$\tilde{y}_{t+1} = S \cdot G \cdot \tilde{y}_{t+1}$$

$\mathrm{Var}\left(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}\right)$ $\qquad$ $\mathrm{Var}\left(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}\right)$

повторное согл-ние не меняет прогнозы

$$\boxed{SGS = S}$$

$$\underline{\mathrm{Var}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1})} = \mathrm{Var}(SG(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})) =$$

$$= SG\,\underbrace{\mathrm{Var}(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1})}_{W}\,G^T S^T$$

опр-ся алгоритмом для несовм-х прогнозов

задача оптимизации

$$\min_G \ \mathrm{trace}\,\mathrm{Var}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1})$$

ответ (обобщ. МНК):

$$\boxed{G^* = (S^T \underline{W}^{-1} S)^{-1} S^T \underline{W}^{-1}}$$

$$\tilde{y}_{t+1} = S \cdot G^* \cdot \hat{y}_{t+1}$$

S - задано деревом.

W - не знаем → W_{cv} (по тому алгоритму, к-рый ит-ся для $\hat{y}_{t+1}$)

→ $W = I$ (наивное: прогнозы рядов не корр-ны с одинаковой дисперсией)