1. Все величины (u_t), $v(0)$, $v(1)$, $v(2)$ независимы, одинаково распределены и равновероятно принимают значения $+1$ и (-1). Рассмотрим процесс

$$\begin{cases} r_t = t \bmod 3, \text{ (остаток от деления } t \text{ на 3)} \\ y_t = 100v(r_t) + u_t + 0.5u_{t-1}. \end{cases}$$

   (a) [2] Нарисуйте пару «типичных» траекторий процесса (y_t).

   (b) [3] Является ли процесс (y_t) слабо стационарным?

   (c) [3] Представим ли данный процесс в виде $MA(\infty)$ процесса?

   (d) [2] Правда ли, что выборочная ковариации сходится к теоретической,

$$\operatorname{plim} \sum_{t=2}^{T} y_t y_{t-1}/T = \mathbb{C}\text{ov}(y_1, y_2)?$$

2. Динамика количества ежей в лесу (y_t) описывается полугодовым $ETS(AAdA)$ процессом:

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0, 9) \\ s_t = s_{t-2} + 0.1u_t \\ b_t = 0.9b_{t-1} + 0.1u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + 0.9b_{t-1} + 0.2u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + 0.9b_{t-1} + s_{t-2} + u_t \end{cases}$$

   Известно, что $s_{100} = 2$, $s_{99} = -3$, $\ell_{100} = 200$, $b_{100} = 1$.

   (a) [6] Постройте 95%-й предиктивный интервал количества ежей y_{102} через год.

   (b) [4] Запишите эту модель в виде $A(L)y_t = B(L)u_t$, где $A(L)$ и $B(L)$ взаимно-простые лаговые многочлены.

3. Величины W_1, W_2 независимы и имеют функцию плотности $f(w) = 2w$ на отрезке $[0, 1]$. Определим $X_1 = \min\{W_1, W_2\}$ и $X_2 = \max\{W_1, W_2\}$.

   (a) [3] Найдите функцию распределения F_1 величины X_1 и функцию распределения F_2 величины X_2.

   (b) [4] Найдите копулу $C(u_1, u_2)$ для пары (X_1, X_2).

   (c) [3] Найдите условную вероятность $\mathbb{P}(F_1(X_1) \leq u_1 \mid F_2(X_2) = u_2)$.

4. Рассмотрим разностное уравнение $y_t = 10 + 0.5y_{t-1} + u_t + 2u_{t-1}$, где (u_t) — белый шум.

   (a) [2] Сколько нестационарных решений у этого уравнения? Привидете в качестве примера хотя бы одно нестационарное решение.

   Винни-Пух использует в качестве модели для численности пчёл единственное стационарное решение этого уравнения.

   (b) [3] Выпишите явно решение, которое использует Винни-Пух.

   (c) [3] Сможет ли Винни-Пух восстановить u_0, если он знает весь бесконечный ряд y_0, y_{-1}, y_{-2}, …?

   (d) [2] Предложите уравнение, единственное стационарное решение которого имеет ожидание и автоковариационную функцию идентичные ожиданию и автоковариационной функции исходного процесса, но при этом по прошлым значениям нового процесса можно восстановить ненаблюдаемое значение случайного шока.

5. Строго стационарный процесс (u_t) описывается $ARCH(1)$ моделью $\sigma_t^2 = 3 + 0.2u_{t-1}^2$, где $u_t = \sigma_t \nu_t$ и шумы $\nu_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ независимы.

   (a) [3] Найдите $\mathbb{E}(u_t)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t)$.

   (b) [5] Постройтие 95%-й предиктивный интервал для u_{101} если $u_{100} = -1$.

   (c) [2] Верно ли, что условное распределение u_{102} при $u_{100} = -1$ является нормальным?

6. Рассмотрим двумерный слабо стационарный $VAR(2)$ процесс $y_t = (y_{1t}, y_{2t})$, являющийся решением уравнения

$$y_t = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} y_{t-1} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} y_{t-2} + u_t,$$

   где двумерный белый шум $u_t = (u_{1t}, u_{2t})$ с $\mathbb{E}(u_t) = 0$ и $\mathbb{V}\mathrm{ar}(u_t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (a) [2] Найдите $\mathbb{E}(y_t)$.

   (b) [4] Найдите первые два значения кросс-ковариационной функции $\gamma_{12}(k) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(y_{1,t}, y_{2,t-k})$: $\gamma_{12}(1)$ и $\gamma_{12}(2)$.

   (c) [4] Перепишите данный процесс в виде $VAR(1)$ процесса более высокой размерности, $w_t = c + Aw_{t-1} + v_t$. Явно укажите матрицу A, вектор c, выразите вектор w_t через вектор y_t, выпишите ковариационную матрицу белого шума $\mathbb{V}\mathrm{ar}(v_t)$.