Привет !!

Видно/слышно?

Лирическое отступление про риски !!

полно одномерных законов:
бин, Пуасс, геометр, ...
бета, норм, эксп, гамма, ...

многомерных „удобных“
→ равном-ое на квадрат
→ $N(\mu; C)$
$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} C_{11} & \\ & \ddots C_{nn} \end{pmatrix}$

Копулы

Зачем? хороший механизм, позволяющий создать зависимые сл. величины с заданным частным законом распределения

Схема.

к примеру

$$\begin{aligned} Y_1 &\sim Exp(\lambda_1) \longrightarrow X_1 \sim U[0;1] \\ Y_2 &\sim Exp(\lambda_2) \longrightarrow X_2 \sim U[0;1] \\ Y_3 &\sim Exp(\lambda_3) \longrightarrow X_3 \sim U[0;1] \end{aligned}$$

увязываем $X_1, X_2, X_3$

зависимы.

часто!

Q1. как превращать произв-ую св. в равномерную и обратно?

Q2. как увязывать равномерно расп-ые случ-ые величины?

# 1. надо исп-ть ф-цию расп-ия!

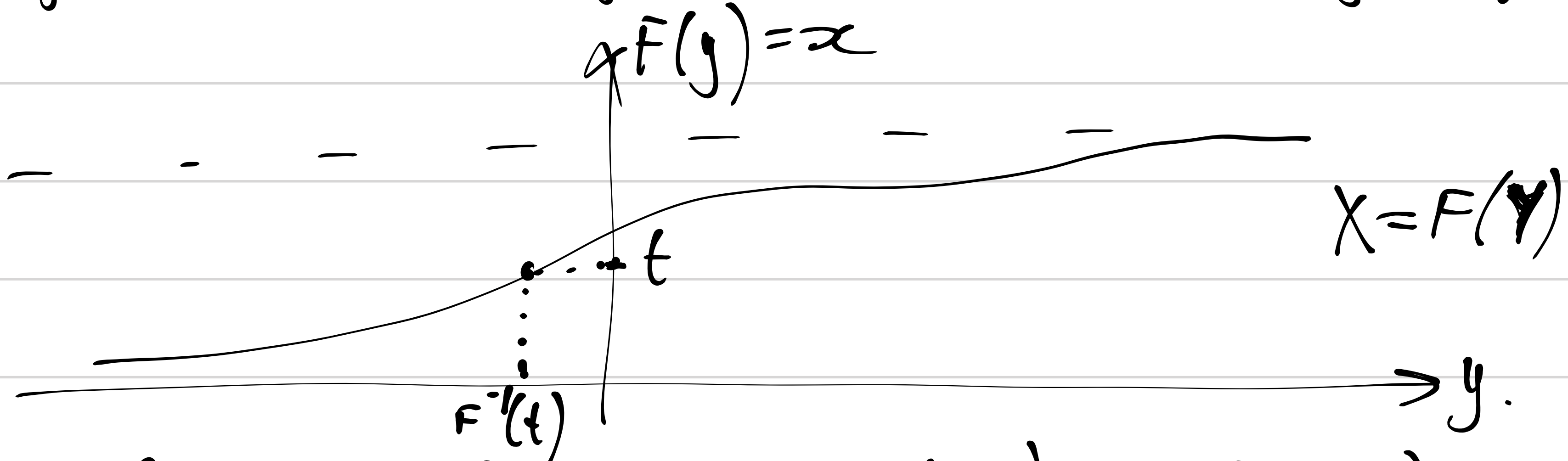
**Факт 1** Если у с.в $Y$ есть ф. плотности /абсолютно непр-ая/ то

$$F(Y) \sim U[0;1]$$

$F$ – ф. расп-ия.

исп-ие: проверка тестов на корректность.
при верной $H_0$ p-value $\sim U[0;1]$

док-во: [методом пристального взгляда]




$$F_X(t) = P(F_Y(Y) \leq t) = P(Y \leq F_Y^{-1}(t)) = F_Y(F_Y^{-1}(t)) = t$$

$$f_X(t) = F_X'(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$X \sim U[0;1]$ расп.

---

**Упр.** $Y$ с ф. плотности: $f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & y \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

а) как превратить равномерную $X$ в $Y$?
б) как – // — $Y$ в равномерную $X$?

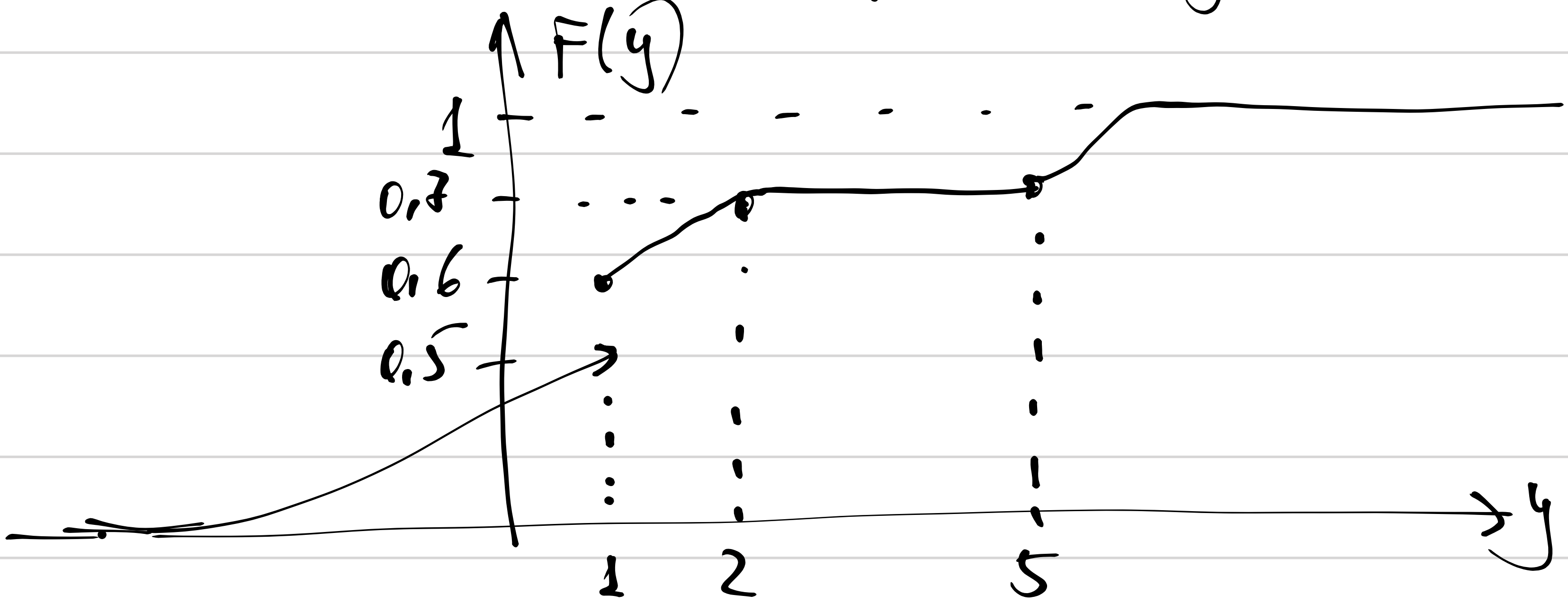
---

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y^3 & y \in [0;1] \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

а) $Y = (X)^{\frac{1}{3}}$ ← расп-на с плотн. $f_Y(y)$

б) $X = Y^3 \sim U[0;1]$

доопределяют $F^{-1}(q) = \inf\{y \mid F(y) \geq q\}$.




$$F^{-1}(0{,}55) = 1$$
$$F^{-1}(0{,}7) = 2$$

**Опр.** Копула $C(u_1, u_2, \ldots u_n)$ – любая многомерная совместная функция распр-ия для с.в-н $U_1, U_2 \ldots U_n$ имеющих по отдельности $Unif[0;1]$ распр-ие.

Люди напридумали огромное кол-во копул.

**Пример.**

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} 0 & \text{иначе} \\ u_1 \cdot u_2 & \text{если } u_1 \in [0;1], u_2 \in [0;1] \\ u_2 & u_1 > 1 \quad u_2 \in [0;1] \\ u_1 & u_2 > 1 \quad u_1 \in [0;1] \\ 1 & u_1 > 1, \ u_2 > 1 \end{cases}$$

$$P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2) = u_1 \cdot u_2$$

это пример: $U_1 \sim Unif[0;1]$
$U_2 \sim Unif[0;1]$
$U_1$ и $U_2$ незав.

**Пример** $U_1, U_2 \sim Unif\,[0;1]$

$$U_1 = U_2$$

копула C?

~~∀~~ при $u_1 \in [0;1]$, $u_2 \in [0;1]$

$$P(U_1 \le 0{,}2,\ U_2 \le 0{,}3) = P(U_1 \le 0{,}2) = 0{,}2$$

$$P(U_1 \le u_1 \text{ AND } U_2 \le u_2) = \min(u_1, u_2)$$

---

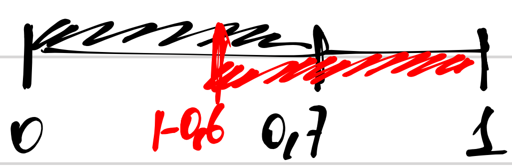
**Пример** $U_1, U_2 \sim Unif\,[0;1]$

$$U_1 = 1 - U_2$$

копула C? („основная" часть ф-ции распр-ия $u_1 \in [0;1]$ $u_2 \in [0;1]$)

$$P(U_1 \le 0{,}2,\ U_2 \le 0{,}3) = P(U_1 \le 0{,}2 \text{ AND } 1 - U_1 \le 0{,}3) = 0$$

$$P(U_1 \le 0{,}7 \text{ AND } U_2 \le 0{,}6) = \frac{0{,}7 - (1 - 0{,}6)}{1} = 0{,}7 + 0{,}6 - 1$$




$$P(U_1 \le u_1 \text{ AND } U_2 \le u_2) = \max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$$

Теорема [Sklar]

Если случ-ый вектор $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}$

имеет совместную ф-цию распр-ия $F(x_1, x_2 \dots x_k)$

и частные ф-ции распр-ия $F_1, F_2 \dots F_k$

то

существует [возможно не един-ая]

копула $C$ т. что

$$F(F_1^{-1}(u_1), \dots F_k^{-1}(u_k)) = C(u_1, u_2 \dots u_k)$$

$$F(x_1, x_2 \dots x_k) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots F_k(x_k))$$

---

Упр. $X_1, X_2, X_3 \sim$ незав. с ф. распр. $F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2 & x \in [0;1] \\ 1 & x>1 \end{cases}$

$L = \max\{X_1, X_2\}$ $R = \max\{X_2, X_3\}$

копулу для $L$ и $R$?

а) $F_L$? $F_R$?

б) $F_{L,R}$?

в) найдём $C$

а) $F_L(l) = P(L \le l) =$
$= P(\max\{X_1, X_2\} \le l)$
$= P(X_1 \le l, X_2 \le l) =$
$= P(X_1 \le l) \cdot P(X_2 \le l) =$
$= l^2 \cdot l^2 = l^4$

$R \sim L$ $F_R(r) = r^4$

б) $F_{L,R}(l, r) = P(L \le l \text{ AND } R \le r) =$

$= P(X_1 \le l, X_2 \le l, X_2 \le r, X_3 \le r) =$

$= P(X_1 \le l) \cdot P(X_2 \le l, X_2 \le r) \cdot P(X_3 \le r) =$

$$F_{L,R}(l,r) = l^2 \cdot \min(l^2, r^2) \cdot r^2$$

условие на копулу:

в) $$F_{L,R}(l,r) = \mathbb{C}(F_L(l), F_R(r))$$

$$\underbrace{l^2}\cdot \min(\underbrace{l^2}, r^2)\cdot \underbrace{r^2} = \mathbb{C}(l^4, r^4)$$

$$\boxed{\mathbb{C}(u_1,u_2) = \sqrt{u_1}\cdot\sqrt{u_2}\cdot\min(\sqrt{u_1},\sqrt{u_2})}$$

---

Какие форм-ые требования на копулу?

Валидная ф-ция распр-ия для $U_1 \dots U_k \sim \text{Unif}[0;1]$

занудно:

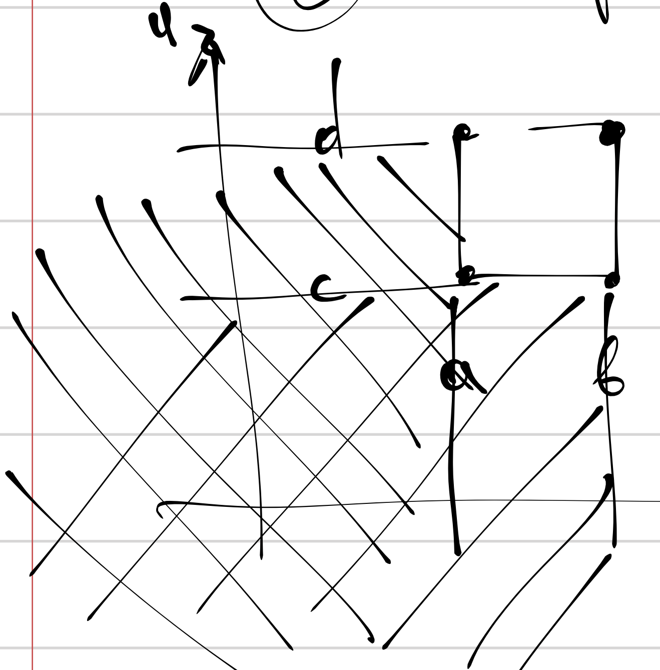
① $U_i \sim \text{Unif}[0;1]$

$$C(1,1,1,\dots 1, u_i, 1,1,1\dots 1) = u_i$$

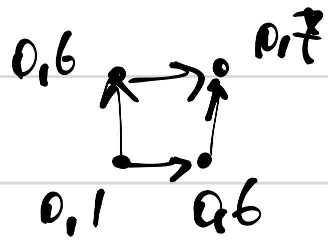
$$P(U_1 \le 1, \dots U_i \le u_i, U_{i+1} \le 1 \dots U_k \le 1)$$

② не уб-ая по $\forall$ аргументу.

③ вер-сть попасть в $\forall$ область $\ge 0$.




$$P(\text{квадр}) = \mathbb{C}(d,b) - C(b,c) - C(a,d) + C(a,c) \ge 0$$




т.В.С. ....