

1. Рассмотрим стационарную $ARCH(1)$ модель $u_t = \sigma_t \nu_t$, где $\nu_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы, а $\sigma_t^2 = 4 + 0.5u_{t-1}^2$.

(a) Постройте 95%-й предиктивный интервал для u_{101} , u_{102} , если $u_{100} = 2$.

(b) Найдите автокорреляционную функцию процесса u_t^2 .

2. Посчитайте DTW расстояние между рядами $a = (0, 1, 3, 1)$ и $b = (1, 2, 0)$. Отличие двух конкретных наблюдений измеряйте с помощью $|a_i - b_j|$.

3. Функция $f(x)$ описывается гауссовским процессом с нулевым ожиданием $GP(0, K)$. Задающая ковариации ядерная функция K имеет вид $K(a, b) = \exp(-(a - b)^2)$.

Постройте 95%-й интервал для $f(1)$, если $f(0) = 0$ и $f(3) = 1$.

На всякий: $\exp(-1) = 0.368$, $\exp(-2) = 0.135$.

4. Винни-Пух использует тест Диболда-Мариано для сравнения доходности двух стратегий добычи мёда. Каждый день он добывает мёд у правильных пчёл и у неправильных пчёл, обозначим d_t разницу добытого количества.

Помогите Винни-Пуху проверить гипотезу об одинаковой эффективности стратегий против гипотезы о разной эффективности.

Известно, что стационарная $AR(1)$ модель для d_t дала оценки $\hat{d}_t = 0.3 + 0.7d_{t-1}$ с оценкой дисперсии случайной составляющей $\hat{\sigma}_u^2 = 1$.

5. В байесовской авторегрессии априорное распределение параметра имеет вид $\beta \sim \mathcal{N}(1, 1)$. Модель предполагает первое наблюдение фиксированным, а далее $y_t = \beta y_{t-1} + u_t$, где $u_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ и независимы.

Ряд короткий: $y_1 = 5$, $y_2 = 6$, $y_3 = 7$.

(a) Найдите апостериорное распределение β .

(b) Постройте апостериорный 95% предиктивный интервал для y_4 .

6. Структура иерархического временного ряда описывается матрицей S . Мы хотим найти оптимальную матрицу согласования G , преобразующую вектор всех рядов в вектор рядов нижнего уровня. Выполнено естественное требование $SGS = S$.

Вспомним задачу минимизации суммы всех дисперсий ошибок согласованных прогнозов, $\text{tr Var}(y - \tilde{y} \mid \mathcal{F}_T) \rightarrow \min$ при известной матрице $W = \text{Var}(y - \hat{y} \mid \mathcal{F}_T)$.

Докажите, что она полностью эквивалентна задаче нахождения вектора $\hat{\beta}$ оценок с наименьшими дисперсиями вида $\hat{\beta} = Ga$ в модели $a = S\beta + u$, при $E(u) = 0$, $\text{Var}(u) = W$.

Здесь y — вектор всех рядов иерархии, \hat{y} — вектор несогласованных прогнозов, \tilde{y} — вектор согласованных прогнозов.