Привет!

Весна! GARCH и прилетели!

g = generalized

AR = auto regressive

ch = conditional heteroskedast.

Зачем?

* иногда важно прогнозировать [не точно y_{t+1}] а скорее его разброс

популярная финансовая хар-ка связанная с разбросом
≈ сумма под риском
value at risk
VaR $\neq$ [Var = variance = дисперсия]

- квантиль убытка как случ-ой величины.

S = прибыль / убытки
(+) [-]

$VaR_{\alpha}(S) = b$

$P(-S \leq b) = \alpha$

$\boxed{VaR_{0.99}(S) = 1 \text{ млн}}$

традиция может отлич-ся

$VaR_{0.01}(S) = 1 \text{ млн}$

* как будем прогнозировать волатильность y_t?

кратк. ответ: с помощью белого шума!

white noise (u_t)
$$\begin{cases} E(u_t)=0 \\ Var(u_t)=\sigma_u^2 \\ Cov(u_t, u_s)=0 \quad \text{при } t\neq s \end{cases}$$

мы тут:

$ARCH(1) \to GARCH(1,1) \to GARCH(a,b)$

$ARIMA(p,d,q) - GARCH(a,b)$

def

(u_t) – $ARCH(1)$ если:

1. (u_t) – б. шум.
2. $u_t = \sigma_t \cdot \nu_t$

   $\nu_t \sim N(0;1)$ (источник случ-сти) незав.

   $\sigma_t^2 = w + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2$ (*)
3. (u_t^2) – стац-ный процесс
$$\begin{cases} E(u_t^2) = const \\ Var(u_t^2) = const \\ Cov(u_t^2, u_{t-k}^2) \text{ не зав от } t \end{cases}$$

   $\alpha_1 \in (0;1)$ $w>0$

σ_t не зав от ν_t

в σ_t^2 входит только $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \nu_{t-3}, \ldots$

Упр.

$u_t = \sigma_t \cdot \nu_t$

$\nu_t \sim N(0;1)$ незав

$\sigma_t^2 = 5 + 0{,}3\, u_{t-1}^2$

$u_t \sim ARCH(1)$ $\Rightarrow$ u_t – б. шум, u_t^2 – стац-н.

а) $u_{100} = 1$ 95% PI для u_{101}?

б) $u_{100} = -5$ 95% PI для u_{101}?

а) $u_{100} = 1$ $\sigma_{101}^2 = 5{,}3$ $u_{101} = \sqrt{5{,}3} \cdot \nu_{101}$

б) $u_{100} = -5$ $\sigma_{101}^2 = 12.5$ $u_{101} = \sqrt{12.5} \cdot \nu_{101}$

а) PI: $u_{101} \in [0 - 1.96 \cdot \sqrt{5.3}; 0 + 1.96 \cdot \sqrt{5.3}]$

б) PI: $u_{101} \in [0 - 1.96 \cdot \sqrt{12.5}, 0 + 1.96 \cdot \sqrt{12.5}]$

$$(u_{101} \mid \sigma_{101}) \sim N(0; \sigma_{101}^2)$$

$$(u_t \mid \sigma_t) \sim N(0; \sigma_t^2)$$

σ_t^2 – усл-ая дисперсия u_t [при условии u_{t-1}] = волатильность

в) $\underline{Var(u_t)?}$

$$E(u_t) = E(\underbrace{v_t \cdot \sigma_t}_{\text{незав}}) = E(v_t) \cdot E(\sigma_t) = 0 \cdot (?) = 0$$

$$\underline{Var(u_t) = E(u_t^2)} = E(\underbrace{v_t^2 \cdot \sigma_t^2}_{\text{незав}}) =$$

$v_t \sim N(0;1)$

$$= \underbrace{E(v_t^2)}_{1} \cdot E(\sigma_t^2) = E(\sigma_t^2) \text{ факт}$$

$$\boxed{Var(u_t) = E(u_t^2) = E(\sigma_t^2)}$$

$$\boxed{\sigma_t^2 = 5 + 0.3 u_{t-1}^2}$$

по стац-сти $E(u_t^2)$

$$\underbrace{E(\sigma_t^2)}_{\sigma_u^2} = 5 + 0.3 \underbrace{E(u_{t-1}^2)}_{\sigma_u^2}$$

$$0.7 \sigma_u^2 = 5$$

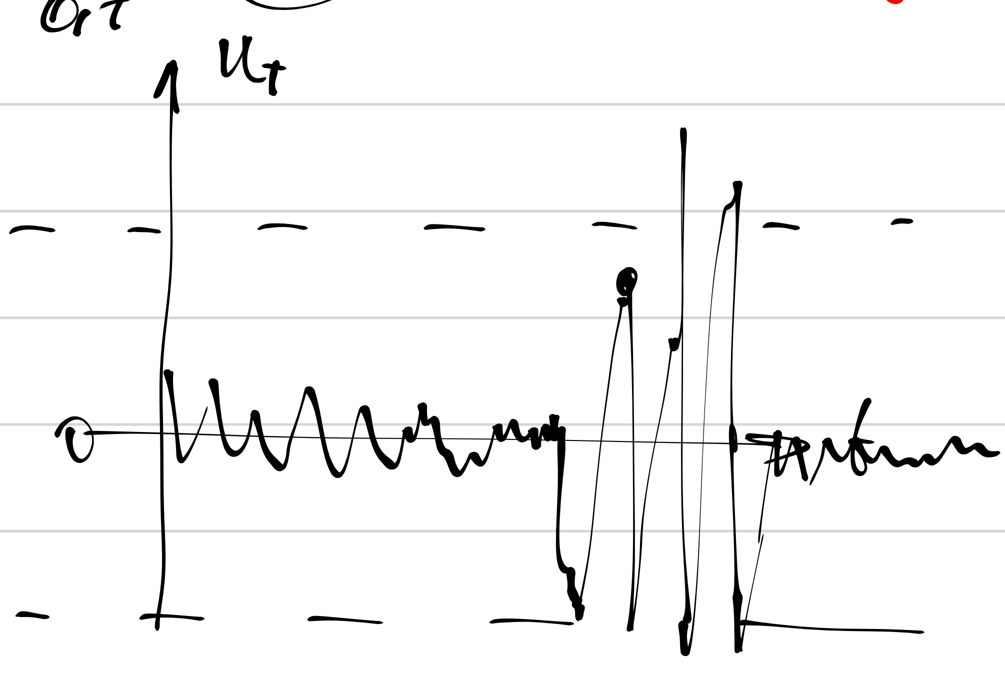
$$\sigma_u^2 = \frac{5}{0.7} \approx 7$$

[при коэф $\alpha_1 = 1.3$]

$\sigma_u^2 = 5 + 1.3 \cdot \sigma_u^2$

$-0.3 \sigma_u^2 = 5$

процесс не стац-р.



доходность:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad [\text{в долях}]$$

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} \leftarrow \text{аддитивн.}$$

способы эквив-ны при малых r_t

$$\ln P_t - \ln P_{t-1} =$$

$$= \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = \ln \frac{P_t - P_{t-1} + P_{t-1}}{P_{t-1}} =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

$\ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha)$ ← если $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ мало

Стилизованный факт 4

распределение r_t имеет толстые хвосты (heavy tails) (по сравнению с N)

приятный бонус! в ARCH(1) модели тоже!

$$\boxed{u_t = v_t \cdot z_t} \qquad v_t \sim N(0;1)$$

$$u_t \nsim N\left(0; \frac{5}{0.7}\right)$$

$$E(u_t) = 0$$

$$Var(u_t) = \frac{5}{0.7}$$

$ARCH(1) \to ARCH(p)$

$$\boxed{\sigma_t^2 = w + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2 + \alpha_2 \cdot u_{t-2}^2 + \dots \alpha_p \cdot u_{t-p}^2}$$

$$w > 0 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_p < 1 \quad \forall \alpha_j > 0$$

GARCH модель GARCH (1,1) - Bollerslev + Engle

$ARCH(1) \to \boxed{GARCH(1,1)}$ оч. успешная на практ!

$$\sigma_t^2 = w + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2 + \beta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2$$

$ARCH(1) \to GARCH(p,q)$

$$\sigma_t^2 = w + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2$$

Связь с ARMA(p,q)?

A. можно довести GARCH на ARMA !!

$$\underset{\substack{\uparrow \\ y_t}}{ARMA(1,2)} - \underset{\substack{\uparrow \\ u_t}}{ARCH(2)}$$

ур-ие усл-го для среднего [ARMA]: $(y_t - \mu) = \beta \cdot (y_{t-1} - \mu) + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 \cdot u_{t-2}$

ур-ие для усл. дисперсии ARCH (2)

$$\begin{cases} \sigma_t^2 = w + \delta_1 \cdot u_{t-1}^2 + \delta_2 \cdot u_{t-2}^2 \\ u_t = \sigma_t \cdot v_t \\ v_t \sim N(0;1) \text{ незав.} \\ w, \delta_1, \delta_2 > 0 \\ u_t^2 - \text{стац.} \\ (u_t) - \text{б. шум} \end{cases}$$

A2. GARCH для u_t $\longleftrightarrow$ ARMA для u_t^2

Упр.

$u_t \sim ARCH(1)$ $\qquad u_t = \sigma_t \cdot \nu_t$

$\nu_t \sim N(0;1)$ незав.

$\sigma_t^2 = 5 + 0{,}3\, u_{t-1}^2$

какому ARMA процессу удовл-т u_t^2?

$$u_t^2 + \sigma_t^2 = 5 + 0{,}3\, u_{t-1}^2 + u_t^2$$

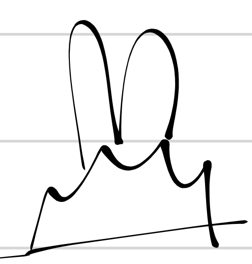
$$\boxed{u_t^2 = 5 + 0{,}3\, u_{t-1}^2 + v_t}$$

$u_t^2 \sim AR(1)$

$$\boxed{u_t^2 = 5 + 0{,}3\, u_{t-1}^2 + \underbrace{(u_t^2 - \sigma_t^2)}_{v_t}}$$

$$\boxed{v_t = u_t^2 - \sigma_t^2}$$

$$E(v_t) = E(u_t^2) - E(\sigma_t^2) = 0$$

доп-ка!  (v_t) — б. шум.

v_t - стац. [по предп. ARCH u_t^2 - стац-н

$v_t = u_t^2 - (5 + 0{,}3\, u_{t-1}^2)$]

$$Cov(v_t, v_{t-1}) = E(v_t \cdot v_{t-1});$$

$$v_t = u_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 \cdot \nu_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2 \cdot (\nu_t^2 - 1)$$

$$Cov(v_t, v_{t-1}) = E\left(\sigma_t^2 \cdot (\nu_t^2 - 1) \cdot \sigma_{t-1}^2 \cdot (\nu_{t-1}^2 - 1)\right) =$$

зав-т только от $\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \nu_{t-3} \dots$

$$= E(\nu_t^2 - 1) \cdot E\left(\sigma_t^2 \cdot \sigma_{t-1}^2 (\nu_{t-1}^2 - 1)\right) = 0.$$