

WD3 ETS - модели

- * хорошо подходит: реальные показатели не от высокой частоты [месяц/квартал/год]
- * почти все статичны - а.

ETS = error trend seasonality

ETS(AAA)

E \rightarrow A
E \rightarrow M

T \rightarrow N
T \rightarrow A
T \rightarrow Ad
T \rightarrow M
T \rightarrow Md

S \rightarrow N
S \rightarrow A
S \rightarrow M

A = add
M = mult
N = no
Ad = Additive
olimped

$$2 \times 5 \times 3 = 30$$

(часть не учтены) поэтому
е - часть учтены меньше 30.

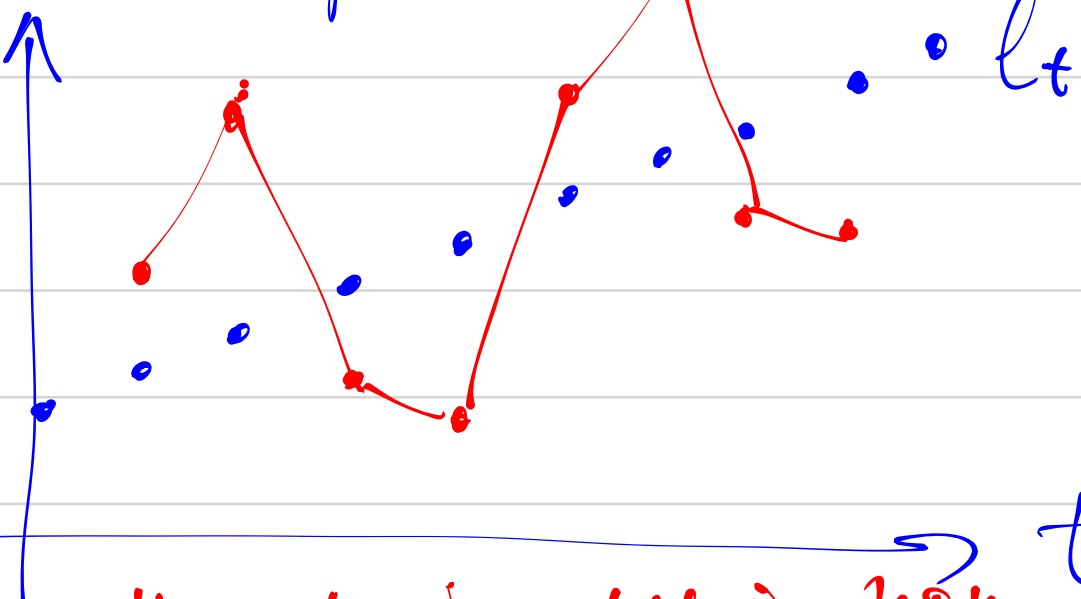
Rob Hyndman

Forecasting principles
& practices.

[хорошо учтены]

[для старта] рассмотрим ETS(MAA)

$$\begin{aligned} l_t &= l_{t-1} + b_{t-1} \quad (1) \\ b_t &= b_{t-1} \quad (2) \\ y_t &= l_t + s_t \quad (3) \\ s_t &= s_{t-4} \quad (4) \end{aligned}$$



y_t - факт-уалы по т-м
 l_t - уровень, сезон-ный (y_t)
оценки без сезонности

$$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} \quad (1)$$

$$b_t = b_{t-1} \quad (2)$$

$$y_t = l_t + s_t \quad (3)$$

$$s_t = s_{t-4} \quad (4)$$

$$(3 \text{ bis}) \quad y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4}$$

цель: вероятность полн. и только перу предыдущие

Max Lik. $\max_{\text{пар-ры}} f(y_1, \dots, y_T)$

$$f(y_1, y_2, \dots, y_T) = f(y_1) \cdot f(y_2 | y_1) \cdot f(y_3 | y_2, y_1) \cdot f(y_4 | y_3, y_2, y_1) \cdot \dots \cdot f(y_T | y_{T-1}, y_{T-2}, \dots, y_1)$$

цель 2: добавим шум в каждое ур-не.

можно доб-ть в каждое ур-не свой вектор случ-ств

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + u_t^y \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t^l \\ b_t = b_{t-1} + u_t^b \\ s_t = s_{t-4} + u_t^s \end{cases}$$

$$u_t \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; C\right)$$

каждо пар-в

ETS : единые векторы случ-ств:

$$\text{ETS(AAA)} \rightarrow \begin{cases} y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + \underline{u_t} \\ u_t \sim N(0; \sigma^2), \text{ незав.} \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ s_t = s_{t-4} + \gamma \cdot u_t \end{cases}$$

пар-ры шума
 $\sigma^2, \alpha, \beta, \gamma$

ETS(AAA) →
$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + \underbrace{u_t}_{\text{пар-б миним}} \\ u_t \sim N(0; \sigma^2), \text{ неав.} \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ s_t = s_{t-4} + \gamma \cdot u_t \end{cases}$$

$\sigma^2, \alpha, \beta, \gamma$

пар-ры начальные условия: l_0, b_0
 $[s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}]$ углы.
 для ген. ур-на на кар-ве $y_t = l_t + s_t$
 $s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}$ могут не углы
 [убеждаем все кар-ные $s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}$ на const и уменьшаем b_0 на const
 год-е условие углы - сче $s_0 + s_{-1} + s_{-2} + s_{-3} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{дифф.} \\ s_{-3} = 0 \end{array} \right.$

ETS(AAA)

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-4} + \underbrace{u_t}_{\text{пар-б миним}} \\ u_t \sim N(0; \sigma^2), \text{ неав.} \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t \\ s_t = s_{t-4} + \gamma \cdot u_t \end{cases}$$

пар-ры: $\sigma^2, \alpha, \beta, \gamma, l_0, b_0, s_0, s_{-1}, s_{-2}, s_{-3}$
 с сопр-лем $s_0 + s_{-1} + s_{-2} + s_{-3} = 0$

$$\theta = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ s_{-2} \end{pmatrix}$$

$$\max_{\theta} \ln f(y_1, y_2, \dots, y_T)$$

$$\ln f(y_1, \dots, y_T) = \ln f(y_1) + \ln f(y_2/y_1) + \ln f(y_3/y_1, y_2) + \dots + \ln f(y_T/y_1, \dots, y_{T-1})$$

$y_1 \sim N(\cdot, \cdot)$
 $(y_2/y_1) \sim N(\cdot, \cdot)$
 $(y_i/y_{1, \dots, y_{i-1}}) \sim N(\cdot, \cdot)$

→ этого параметра нет
 → можно опустить.

$$(y_3 | y_2, y_1) \sim N(l_2 + b_2 + s_1; \sigma^2)$$

$$y_3 = \underbrace{l_2 + b_2 + s_1}_{\text{пар-р.}} + \underbrace{u_3}_{N(0; \sigma^2)}$$

выражаем
через y_2, y_1 и
пар-ры

	y_t	l_t	b_t	s_t	u_t
$t=0$	—	l_0	b_0	s_0	
$t=1$	y_1	l_1	b_1	s_1	u_1
$t=2$	y_2	l_2	b_2	s_2	u_2
$t=3$	y_3	l_3	b_3	s_3	u_3

пар-ры.
(независимые)

наблюдаемые
сущ: вел.

кажд. л. сущ.
величины.

ув: каждая с.в. нах-ся через пар-ры и
наблюдаемые значения.

$$u_1? \quad y_1 = l_0 + b_0 + s_{1-1} + u_1$$

$$u_1 = y_1 - l_0 - b_0 - s_{-1}$$

$$b_1? \quad b_1 = b_0 + \beta \cdot u_1$$

$$s_1? \quad s_1 = s_{-1} + \gamma \cdot u_1$$

$$l_1? \quad l_1 = l_0 + b_0 + \alpha \cdot u_1 =$$

$$l_1 = l_0 + b_0 + \alpha \cdot (y_1 - l_0 - b_0 - s_{-1})$$

ETS(MA, I, M)

модель FPP

при аддит-ой
сезонности
 $S_t \rightarrow +100p$
 $S_t \rightarrow -100p$

при мультипл.
сезонности
 $S_t \rightarrow 1,2$
 $S_t \rightarrow 0,8$

$$\begin{cases} y_t = (l_{t-1} + \phi \cdot b_{t-1}) \cdot S_{t-1} \cdot (1 + u_t) \\ l_t = (l_{t-1} + \phi \cdot b_{t-1}) \cdot (1 + \alpha u_t) \\ b_t = \phi \cdot b_{t-1} + \beta \cdot (l_{t-1} + \phi \cdot b_{t-1}) \cdot u_t \\ S_t = S_{t-1} \cdot (1 + \gamma u_t) \end{cases}$$

Маг Магн.

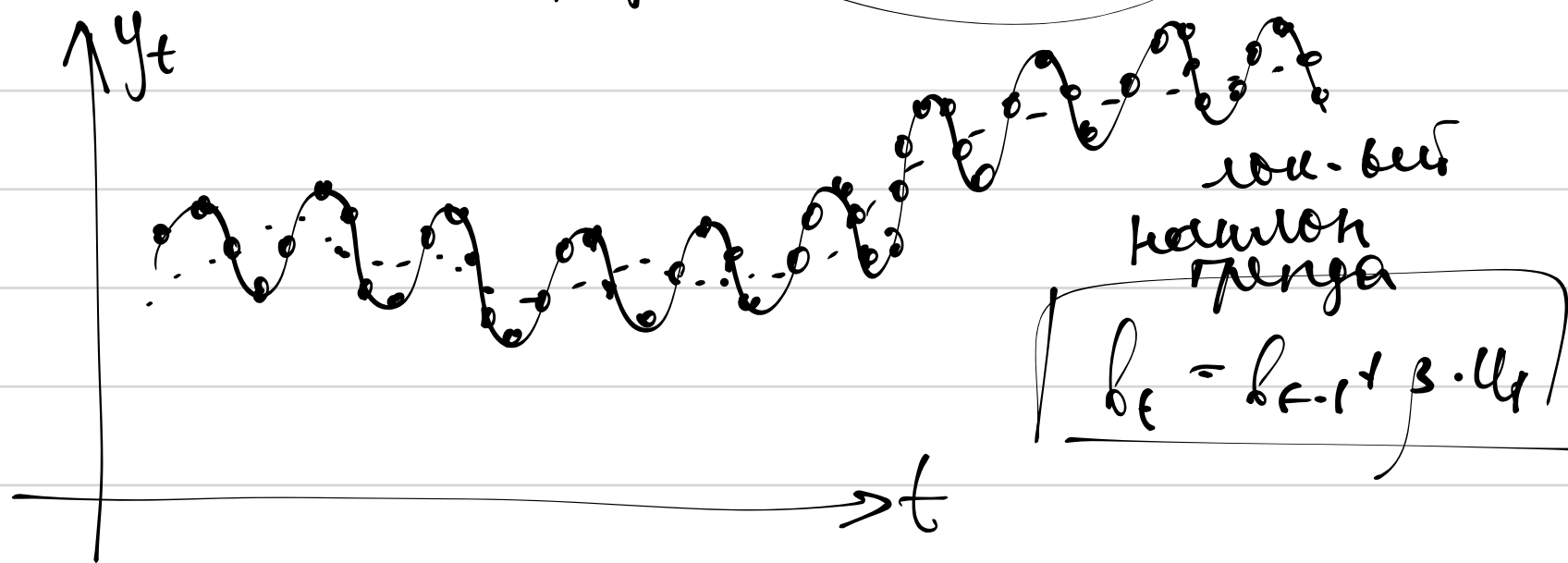
Магн.

Ad hoc
пар-ры: $\sigma^2, \alpha, \beta, \gamma$
пар. регу: ϕ
наб. уел: $l_0, b_0, s_0, s_1, s_2, s_3$
услов: $s_0 + s_1 + s_2 + s_3 = 0$

* можно прогнозировать
[точечно/интервально]

* можно вывести
параметры ряда

$$\begin{matrix} \hat{l}_1, \hat{l}_2 \dots \hat{l}_T \\ \hat{s}_1, \dots \hat{s}_T \end{matrix}$$



→ упр на упр.

упр.	ETS(AAA)	$s_{t+m} = 4$	квар. данные
T=97	y_t	l_t	b_t
T=98	~	~	~
T=99	~	~	~
T=100	~	80	2

$$\sigma^2 = 16$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

найдете 95% PI для y_{101} и для y_{102}

$$y_{101} = l_{100} + b_{100} + s_{97} + u_{101}$$

$$(y_{101} / y_{100} \dots y_1) \sim N(\underline{80 + 2 - 4}; 16)$$

$$PI \text{ для } y_{101} : [78 - 1.96 \cdot \sqrt{16}; 78 + 1.96 \cdot \sqrt{16}]$$

$$y_{102} = l_{101} + b_{101} + s_{98} + u_{102} =$$

$$= (l_{100} + b_{100} + \alpha \cdot u_{101}) + (b_{100} + \beta \cdot u_{101}) + s_{98} + u_{102} =$$

$$= \underline{l_{100} + 2b_{100}} + s_{98} + \underline{(\alpha + \beta) \cdot u_{101} + u_{102}}$$

упр. тренд

PI для y_{102}

$$[88 - 1.96 \cdot \sqrt{32}; 88 + 1.96 \cdot \sqrt{32}]$$

$$(y_{102} / y_{100} \dots y_1) \sim N(\underline{80 + 2 \cdot 2 + 4}; 16 + 16)$$

не забудем от
того, что я знаю