ARMA - процесс

$y_t \sim ARMA(p,q)$ процесс отн u_t, если

1) y_t ~ стац. процесс
2) $A(L)(y_t - \mu) = B(L)\, u_t$
3) y_t можно выразить как $MA(\infty)$
4) $A(0) = 1$, $B(0) = 1$
5) $\boxed{A(L) \text{ и } B(L) \text{ несократимы}}$
6) $degree(A) = p$, $degree(B) = q$

Пример

$$y_t = 0,5 y_{t-1} + 6 + u_t - 0,5$$

а) Сколько у этого ур-я несчетн решений
б) — " — стац. решений
в) Правда ли, что все стац решения - $MA(\infty)$

$$(1-0,5L)\, y_t = 6 + (1-0,5L)\, u_t$$

$$y_t = \frac{6}{1-0,5L} + u_t = \boxed{12 + u_t}$$

$$\frac{6}{1-0,5L} = \frac{6}{1-0,5} \qquad L^k 6 = 6$$

$$6(1 + 0,5L + 0,5^2 L^2 + \ldots)$$

$$6 + 6 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5^2 + \ldots$$

$ARMA(1,1) \to ARMA(0,0)$

1) $MA(\infty)$ может описать широкий класс процессов

2) Аппроксимируем $MA(\infty)$ через $\underline{MA(q)}$

3) $AR(p)$ процессы может быть описан MA-∞ моделью

4) $ARMA$-процессы могут быть. выписаны через $MA(\infty)$

$$A(L)(y_t - \mu) = B(L)\,u_t$$

$$y_t - \mu = \underline{\frac{B(L)}{A(L)}}\,u_t$$

$$\frac{u_t}{A(L)}$$

Через $ARMA$-процессы можно аппрокс. широкий класс $MA(\infty)$

Теорема Вольда

Wold representation theorem

(decomposition)

Теорема часто формулируется неверно

„deterministic" $\to$ неслучайный

↳ предсказуемый

Опр. d_t – линейно предсказуемый

$$d_t = \alpha_0 + \alpha_1 d_{t-1} + \alpha_2 d_{t-2} + \dots$$

$d_{t-1}, d_{t-2} \dots \to$ мы можем идеально предсказать d_t

Пример. Два кубика X_1, X_2

$$y_t = \begin{cases} X_1, & t - \text{нечёт.} \\ X_2, & t - \text{чётн} \end{cases}$$

$y(t = -\infty)^{(t=+\infty)}$

$E(y_5) = E(X_1) = 3,5$

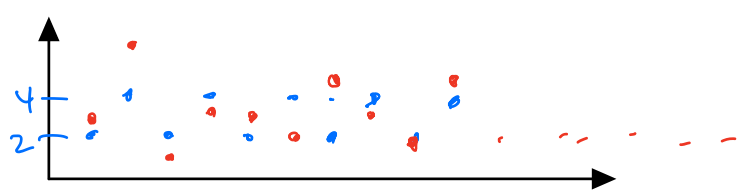
$Var(y_5) = Var(X_1) = \dots$

$X_1, X_2 \} \dots\dots 2, 4, 2, 4, 2, 4 \mid 2\ 4\ 2\ 4\ 2\ 4$

origin

$$\tilde{y} = \begin{cases} X_1 + u_t, & t - \text{четн} \\ X_2 + u_t & t - \text{нечетн} \end{cases}$$

u_t – WN независ от (X_1, X_2)



По длинной траектории можно найти реализ. X_1, X_2

Теорема Вольда

Если $(y_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ – стац. процесс, то его можно разложить в сумму

$MA(\infty)$ + предсказуемый процесс.

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i u_{t-i} + d_t$$

$\delta_0 = 1$

~ARMA

– линейный ?

– регрессия

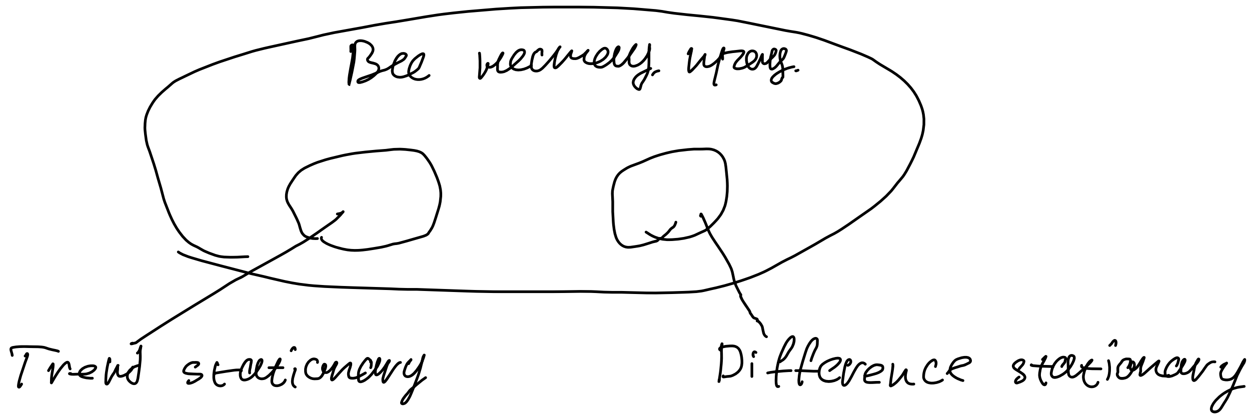
1. u_t – WN, $E(u_t) = 0$, $cov(u_t, u_s) = 0 \; \forall t \neq s$
   $Var(u_t) = \sigma_u^2$

2. d_t – детерминистич.
   d_t – стац $E(d_t) = \mu$

3) $cov(u_t, d_s) = 0 \; \forall t, s$

Нестац. ряды.

1) Модель для нестац. данных
2) Преобразовать ряд к стац.



Trend - stat.

Стац. вокруг. тренда

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

стац. процесс

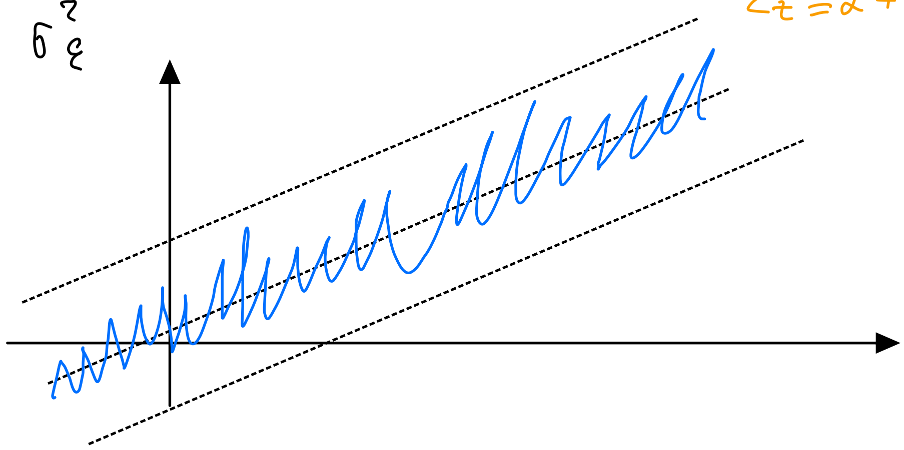
модель тренда

$(\varepsilon_t) \sim MA(\infty)$

$E(y_t) = \alpha + \beta t$

$Var(y_t) = \sigma^2_\varepsilon$

$z_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t$



Как оценивать.

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

$\sim ARMA(p, q)$

$\to$ ММП

Раньше: шаг 1. Регрессия

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} t$$

Шаг 2. $e_t = y_t - \hat{y}_t$

оценить ARMA(p, q)

Difference stationary

Опр. (y_t) - стац. в разностях, если

① (y_t) - не стац.

② не имеет вид с детерм. трендом

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

3) $\Delta y_t \sim MA(\infty)$

ARMA(p, q)

Δy_t - стац.

Пример. $x_t = 2 + u_t + u_{t-1}$ $(MA(1))$

$$MA(1) \sim MA(\infty)$$

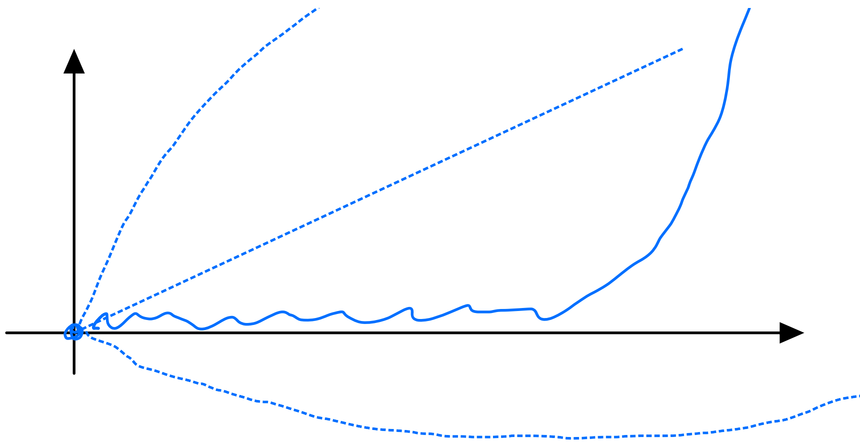
$$y_t = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sum_{k=1}^{t} x_k, & t > 0 \end{cases}$$

$E(y_t) = 2t$

$Var(y_0) = 0$

$Var(y_1) = 2\sigma^2$

$Var(y_2) = Var(u_0 + u_1 + u_1 + u_2) = 6\sigma^2$



Как оценивать?

Шаг 1 $y_t \to \Delta y_t$.

Шаг 2 $\Delta y_t \sim ARMA(p,q)$

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t^{\sim ARMA}$$

$$y_t = \begin{cases} 0 \\ \sum_{k=1}^{t} x_k \end{cases}$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \cancel{\alpha} + \beta t + \varepsilon_t - \cancel{\alpha} - \beta(t-1) - \varepsilon_{t-1} = \beta + \underbrace{(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})}_{\text{стац.}}$$

$$\Delta y_t = \sum_{k=1}^{t} x_k - \sum_{p=1}^{t-1} x_p = \underbrace{x_t}_{\text{стац.}} \sim MA(1)$$

Как отличить.

- По графику
- Оценить обе и сравнить качество
- Алгоритм Хандакара – Хендмана

AIC

$y_t \sim TS$

$\ln f(y_1, \ldots, y_T | \alpha, \beta, \theta)$

ARMA

$y_t - DS$

$\Delta y_t = x_t \sim ARMA$

$\ln f(x_2, \ldots, x_T | \theta)$

def $(y_t) \sim ARIMA(p, d, q)$ - процесс

Integrated

d - порядок интеграции

integration order

Интуиция: чтобы сделать (y_t) стац., d раз возьмём разность

y_t - не стац

Δy_t - не стац,

...

$\Delta^d y_t \sim ARMA(p, q)$

На практике $d = 0, 1, 2$