→ закроем небольшой сюжет про GARCH

$\ln L$ ?

→ вернёмся к копулам!

## Как выглядит $\ln L$ для GARCH?

ARCH(2) - модель. = [для WN]

$$\begin{cases} u_t = \sigma_t \cdot \nu_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2 + \alpha_2 \cdot u_{t-2}^2 \\ y_t = u_t \end{cases}$$

волатильность

$\nu_t \sim \boxed{N(0;1)}$ незав.

$$\ln L = \ln f(y_1, y_2, \dots, y_T) =$$

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = f(y_1, y_2) \cdot f(y_3 | y_2, y_1) \cdot f(y_4 | y_3, y_2, y_1)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$= \ln f(y_1, y_2) + \ln f(y_3 | y_1, y_2) + \ln f(y_4 | y_1, y_2, y_3) + \dots + \ln f(y_T | y_1 \dots y_{T-1})$$

численно

явно формулу

[фин. прилож-ия] → T дост-но велико.

$$(u_3 | u_1, u_2) \sim (u_3 | \sigma_3) \sim N(0; \sigma_3^2)$$

$$\ln f(y_3 | y_1, y_2) =$$

$$= \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_3^2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y_3 - 0)^2 / \sigma_3^2\right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma_3^2 - \frac{1}{2} \frac{y_3^2}{\sigma_3^2} =$$

$$\ln f(y_3 | y_1, y_2) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(\alpha_0 + \alpha_1 y_2^2 + \alpha_2 y_1^2\right) - \frac{1}{2}\frac{y_3^2}{\alpha_0 + \alpha_1 y_2^2 + \alpha_2 y_1^2}}$$

зависит → от наблюдений $y_1, y_2, y_3$
→ от неизв-х $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$

$$\ln f(y_4 | y_1, y_2, y_3) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\left(\alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_3^2 + \alpha_2 \cdot y_2^2\right) - \frac{1}{2}\frac{y_4^2}{\alpha_0 + \alpha_1 y_3^2 + \alpha_2 y_2^2}}$$

→ max [град. спуск]

$$\ln L = \underbrace{\ln f(y_1, y_2)}_{\text{трудное}} + \sum_{t=3}^{T} \ln f(y_t | y_1, y_2, \ldots y_{t-1})$$

$$(y_4 | y_1, y_2, y_3) \sim ?\ N\left(0; \alpha_0 + \alpha_1 \cdot y_3^2 + \alpha_2 \cdot y_2^2\right)$$

$$y_4 = \sigma_4 \cdot \nu_4$$

не зав от $y_1, y_2, y_3$

$$\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 y_3^2 + \alpha_2 \cdot y_2^2}$$

[conditional likelihood]

$$\max_{\Theta} \ln f(y_3, y_4, \ldots y_T | y_1, y_2)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Копулы возвращаются

идея: ← способ моделировать зависимые случ-ые величины

формально: копула – ф-ция распределения для $U_1, U_2, \ldots U_k$, где $\forall U_i \sim \text{Uniform}[0;1]$.

$X \sim$ RV_continuous
$F(X) \sim \text{Uniform}[0;1]$

def Гаусс-ая копула (семейство)

$X_1 \ldots X_k$ – моделируемые. $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} F_1(X_1) = U_1 \\ F_2(X_2) = U_2 \\ \vdots \\ F_k(X_k) = U_k \end{array}\right\}$ Uniform $[0;1]$

$W_1 \ldots W_k$ $\quad W = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_k \end{pmatrix} \sim N(0; \Sigma)$

$W_i \sim N(0;1)$ $\quad$ $0_{[k \times 1]}$ $\quad$ $\Sigma$ – ков. м-ца

$Var(W_i) = 1$

$\Sigma$ – корр. м-ца

$$C_\Sigma^{Gauss}(\Phi(x_1), \Phi(x_2) \ldots, \Phi(x_k)) = \Phi_\Sigma(x_1, x_2 \ldots x_k),$$

где $\Phi$ – ст. норм ф-ция распр-ия

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$\Phi_\Sigma$ – многом. ф-ция распр-ия для $N(0:\Sigma)$

Упр

$k=2$

$C^{Gauss}_{\Sigma}$

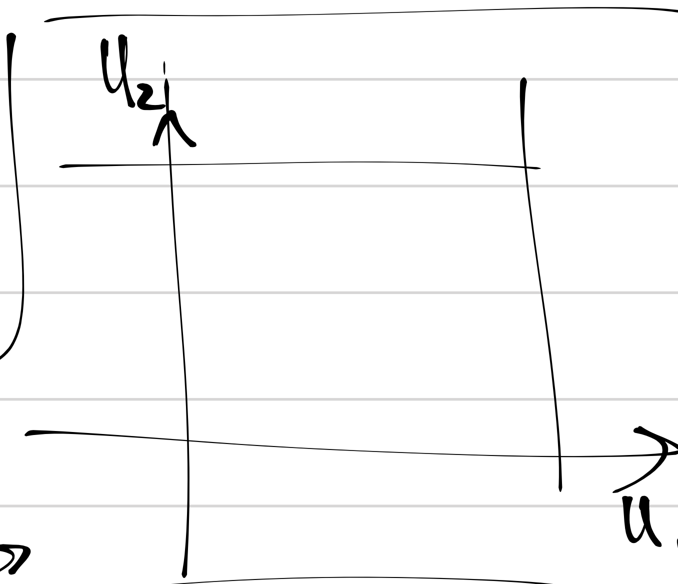
$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$

а) $C^{GAUSS}_{\Sigma}(0, 0)$ ?

$C^{GAUSS}_{\Sigma}(1, 1)$ ?

(*) $C^{GAUSS}_{\Sigma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ?

б) $C^{GAUSS}_{\Sigma}\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ?




вы-ть на компе

набросать 100 точек на квадрат $[0;1]^2$ согласно копуле

$P(U_1 \le 0, U_2 \le 0) = 0$

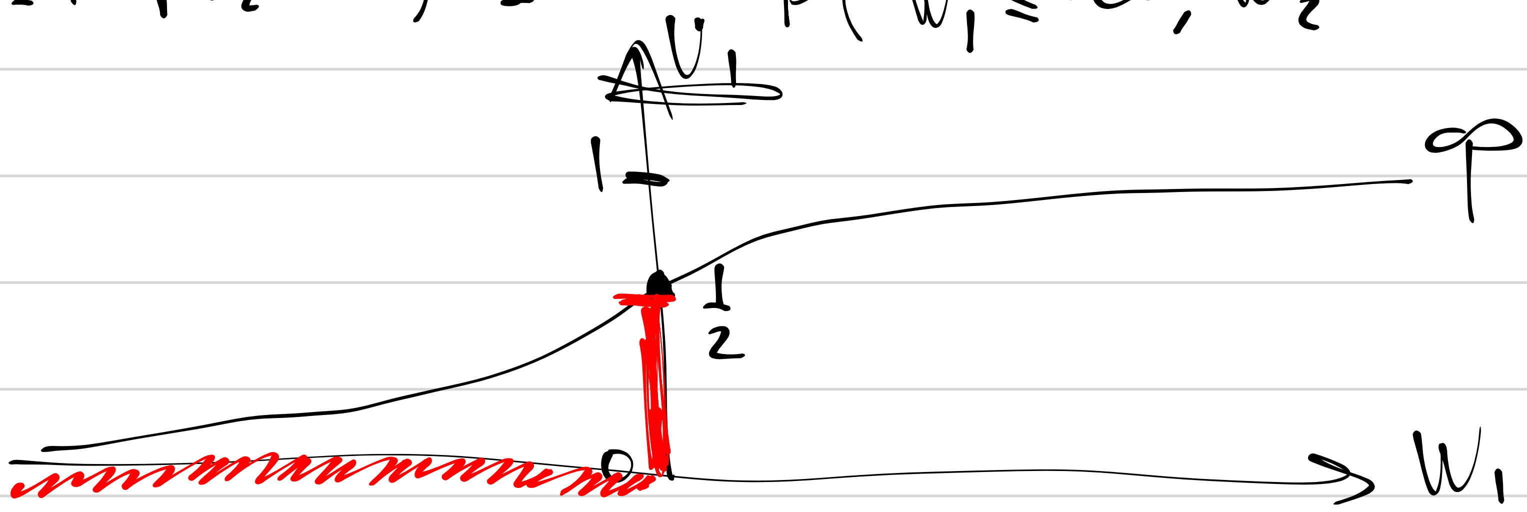
$U_1 = \varphi(W_1)$

$U_2 = \varphi(W_2)$

$P(W_1 \le -\infty; W_2 \le -\infty) = 0$

$P(U_1 \le 1, U_2 \le 1) =$

$= P(W_1 \le +\infty, W_2 \le +\infty) = 1$




б) $C^{Gauss}_{\Sigma}\left(1, \frac{1}{2}\right) = P\left(U_1 \le 1, U_2 \le \frac{1}{2}\right) =$

$= P\left(U_2 \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

в(*) $C^{GAUSS}_{\Sigma}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = P\left(U_1 \le \frac{1}{2}, U_2 \le \frac{1}{2}\right) =$

$= P(W_1 \le 0, W_2 \le 0) = ?$

$W \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\right)$

$= \iint\limits_{\substack{w_1 \le 0 \\ w_2 \le 0}} \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det \Sigma}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} (w_1 \ w_2) \cdot \Sigma^{-1} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \cdot dw_1 \, dw_2$

$$\begin{pmatrix}W_1\\ W_2\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$W_2 = \rho\cdot W_1 + \alpha\cdot W_1^*$$

$$\begin{pmatrix}W_1\\ W_1^*\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} Var(W_2) = 1 \\ Cov(W_1, W_2) = \rho \text{ !!} \end{cases}$$

$$Cov(\rho W_1 + \alpha\cdot W_1^*, W_1) = \rho\cdot Cov(W_1, W_1) = \rho \text{ !!}$$

$$Var(W_2) = \rho^2 + \alpha^2 = 1$$

$$\alpha^2 = 1-\rho^2$$

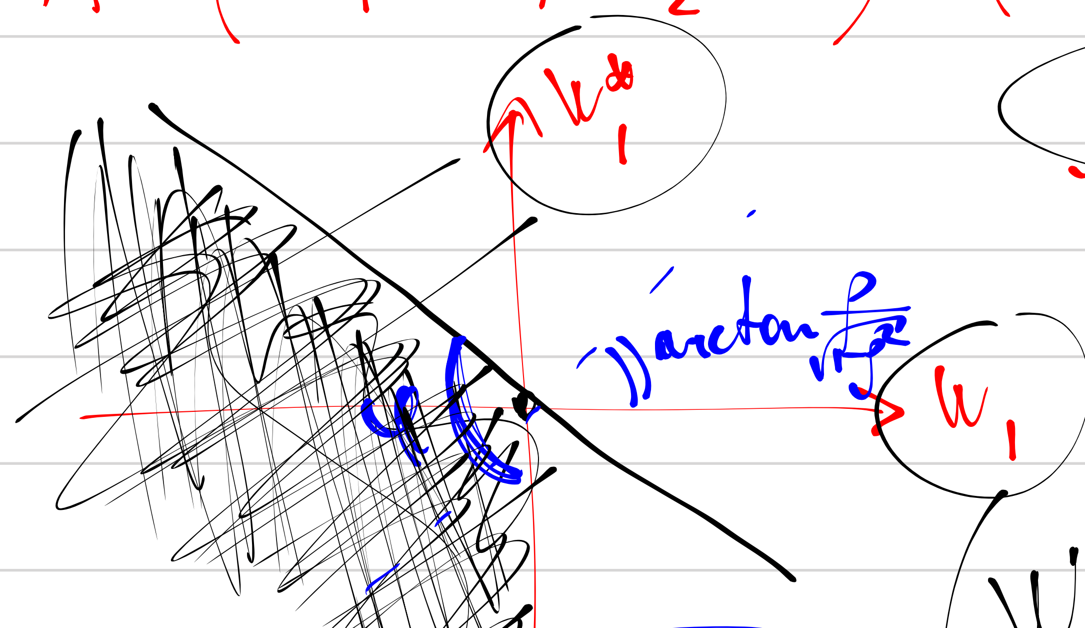
$$\alpha = \sqrt{1-\rho^2} \text{ (напр)}$$

$$W_1$$

$$W_2 = \rho\cdot W_1 + \sqrt{1-\rho^2}\cdot W_1^*$$

$$A = (W_1 \le 0, W_2 \le 0) = (W_1 \le 0, \rho W_1 + \sqrt{1-\rho^2} W_1^* \le 0)$$

$$W_1^* \le -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} W_1$$




$$\varphi = \boxed{\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}}$$

$$\boxed{\rho > 0}$$

$$\begin{pmatrix}W_1\\ W_1^*\end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

$f(w_1, w_1^*)$ — инвар-на к повороту


$$C_\Sigma^{Gauss}\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = P\left(U_1 \le \tfrac{1}{2}, U_2 \le \tfrac{1}{2}\right) =$$

$$= P(W_1 \le 0, W_2 \le 0) = P\left(W_1 \le 0, W_1^* \le -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot W_1\right) = \frac{\varphi}{2\pi}$$

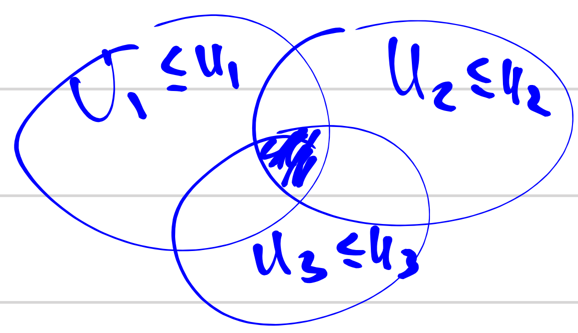
# Общие приятные свойства копул

**Утв.** Для произв-ой копулы:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_k) \le \min(u_1, u_2, \dots, u_k)$$

$\boxed{\text{Док-во}}$

$$C(u_1, \dots, u_k) = P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2, \dots, U_k \le u_k) \le$$




$$\le P(U_1 \le u_1) = u_1$$

$$C(u_1, \dots, u_k) \le u_1$$

/по аналогии $C(u_1 \dots u_k) \le u_2$/

...

**Упр.** $\min(u_1, \dots, u_k)$ - копула для ?

$$\boxed{U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_k}$$

$$P(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2, \dots, U_k \le u_k) =$$

$$= P(U_1 \le u_1, U_1 \le u_2, \dots U_1 \le u_k) =$$

$$= P(U_1 \le \min\{u_1, u_2, \dots, u_k\}) =$$

$$= \min\{u_1, u_2 \dots u_k\}$$

---

**Теор.** Если $X_1, \dots, X_k$ - абс. непр. сл. вел., и $h_1, h_2, \dots h_d$ - строго мон-ные [возр], то копула для $X_1, \dots X_k$ совпадает с копулой для $h_1(X_1), h_2(X_2), \dots$ $\dots h_k(X_k)$.

Иллюстрация: упр — показательство

$U_1 \leftarrow X_1 \sim Exp(\lambda = 1)$

$U_2 \leftarrow X_2 \sim Exp(\lambda = 1)$

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & x \geq 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

копула $C_X(u_1, u_2) = \sqrt{u_1 \cdot u_2} \cdot \min(\sqrt{u_1}, \sqrt{u_2})$

$Y_1 = X_1^2$ $\quad Y_2 = X_2^3$

а) $P(X_1 \leq 3, X_2 \leq 5)$?

б) $C_Y$?

а) $P(X_1 \leq 3, X_2 \leq 5) = P(F_1(X_1) \leq F_1(3), F_2(X_2) \leq F_2(5))$

$= P(U_1 \leq F_1(3), U_2 \leq F_2(5)) = \sqrt{F_1(3) F_2(5)} \cdot \min(F_1(3), F_2(5))$

$= \sqrt{(1-\exp(-3)) \cdot (1-\exp(-5))} \cdot \min(1-\exp(-3), 1-\exp(-5)) =$

$= \sqrt{(1-\exp(-3)) \cdot (1-\exp(-5))} \cdot (1-\exp(-3))$

б) $C_Y(u_1, u_2) = P(\underset{\sim}{U_1} \leq u_1, \underline{U_2} \leq u_2) =$

$= P(\underline{F_{Y_1}(Y_1)} \leq u_1, \underline{F_{Y_2}(Y_2)} \leq u_2) =$ [осознать, почувств., явно выписать $F_{Y_1}$]

$= P(F_{X_1}(X_1) \leq u_1, F_{X_2}(X_2) \leq u_2) = C_X(u_1, u_2)$