Привет !!

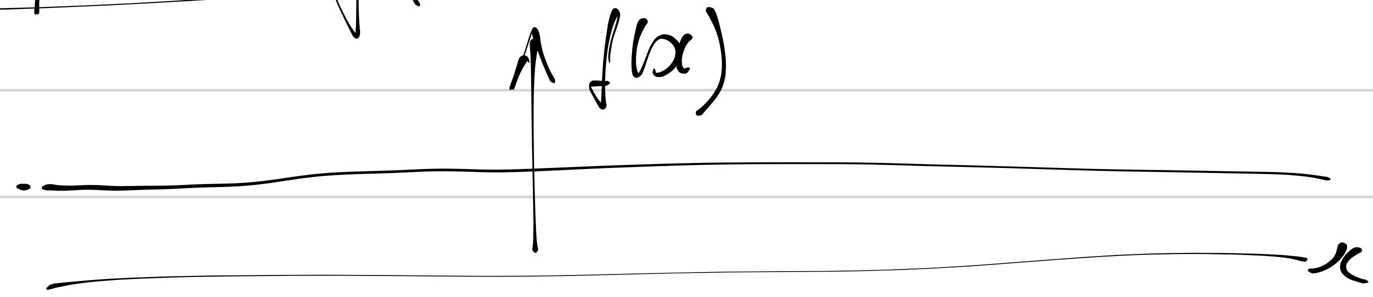
→ несобств. априорн. распр.
→ апр. распр-ие Джеффриса
→ навесим байеса на ETS (AAN)

Несобств. распр. $f(x) \geq 0$

$U(-\infty;\infty)$ — не существует!

Ересь: $X \sim U(-\infty;\infty)$ $\quad P(X>100)$?

Ересь: $f(x) = 1$ при $x \in (-\infty;\infty)$



Но! Работа с корр-ой плотн.

$f(\theta)$ — апр. мнение о θ
$f(y|\theta)$ — модель.

апостер. вер-сть $\quad f(\theta|y) = \dfrac{f(\theta)\cdot f(y|\theta)}{f(y)} \propto$

$$\propto \boxed{f(\theta)\cdot f(y|\theta)}$$

Бывает (часто) $\int_{\mathbb{R}^p} f(\theta)\cdot f(y|\theta)\,d\theta < \infty$
даже если $f(\theta)$ — была несобств. плот.

Упр — Пример.

Априор: $\mu \sim U(-\infty; \infty)$ $\quad f(\mu) = 1$

Модель: $y_1, y_2, \ldots, y_{T+h} \mid \mu \sim$ нз $N(\mu; 1)$

а) Апост. $f(\mu \mid y_1, \ldots, y_T)$?

$$\underbrace{f(\mu \mid y_1 \ldots y_T)}_{\text{как функция от } \mu} \propto \underbrace{f(\mu)}_{\text{Априор}} \cdot \underbrace{f(y_1 \ldots y_T \mid \mu)}_{\text{модель}} =$$

$$= 1 \cdot \prod_{i=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y_i-\mu)^2}{2}\right) \propto \exp\left(-\frac{\sum (y_i-\mu)^2}{2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{n\mu^2 - 2\mu \sum y_i + \sum y_i^2}{2}\right) \propto$$

$$\propto \exp\left(-\frac{\mu^2 - 2\mu \bar{y}}{2/n}\right) \propto \exp\left(-\frac{(\mu-\bar{y})^2}{2 \cdot \frac{1}{n}}\right)$$

$$\mu \mid y_1 \ldots y_T \sim N\left(\bar{y}; \frac{1}{n}\right)$$

б) $y_{T+1} \mid y_1, \ldots, y_T \sim$?

$$y_{T+1} \mid \mu \sim N(\mu; 1)$$

$$(y_{T+1} \mid \mu, y_1 \ldots y_T) \sim N(\mu; 1)$$

На практике

сгенер $\rightarrow$ $\mu_1, \ldots, \mu_{10000}$ $\rightarrow$ сим $y_{T+1}^{(1)}, y_{T+1}^{(2)}, \ldots, y_{T+1}^{(1000)}$

$$f(y_{T+1}) = \int_{\mathbb{R}} f(y_{T+1}\mid\mu)\cdot f(\mu)\, d\mu$$

$$f(y_{T+1}\mid y_1\dots y_T) = \int_{\mathbb{R}} f(y_{T+1}\mid\mu, y_1\dots y_T)\cdot f(\mu\mid y_1\dots y_T)\, d\mu$$

$$\propto \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(y_{T+1}-\mu)^2}{2\cdot 1}\right)\cdot\exp\left(-\frac{(\mu-\bar{y})^2}{2\cdot\frac{1}{n}}\right) d\mu =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y_{T+1}^2+\mu^2-2y_{T+1}\mu}{2} - \frac{\mu^2+\bar{y}^2-2\mu\bar{y}}{2\cdot\frac{1}{n}}\right) d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_{T+1}^2+\bar{y}^2+\mu^2+n\mu^2-2\mu\left(y_{T+1}+n\bar{y}\right)\right)\right) d\mu$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_{T+1}^2+\bar{y}^2\right)\right)\cdot\int \exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\left(\mu^2-2\mu\frac{y_1+\dots+y_{T+1}}{n+1}\right)}{1/(n+1)}\right) d\mu$$

$(n+1)\,2$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_{T+1}^2+\bar{y}^2-\bar{u}_+^2\right)\right)\cdot\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{(\mu-\bar{y}_+)^2}{1/(n+1)}\right) d\mu$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_{T+1}^2+\bar{y}^2-(n+1)\cdot\bar{y}_+^2\right)\right)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(y_{T+1}^2-(n+1)\cdot\frac{y_{T+1}^2}{(n+1)^2} - \frac{n}{n+1}\,2\cdot y_{T+1}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{T} y_i}{n}\right)\right)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{(y_{T+1}-\bar{y})^2}{\frac{n+1}{n}}\right)$$

$$1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1} \qquad \boxed{y_{T+1}\mid y_1\dots y_T \sim \mathcal{N}\left(\bar{y};\ \frac{n+1}{n}\right)}$$

Распр-ние Джеффриса.

$y_1 \dots y_T \sim Exp(\lambda)$ ну. Лёша

$y_1 \dots y_T \sim Exp\left(\frac{1}{\mu}\right)$ ну Маша

Правило выбора априорного расп-ия (у Лёши для λ). (у Маши для μ), чтоб итоговое расп-ие было один.

① $f(\lambda)\,d\lambda = f(\mu)\,d\mu$

② $f \geq 0$

$$\lambda \in [1; 1.01] \Leftrightarrow \mu \in \left[\frac{1}{1.01}; 1\right]$$

опр $P(\lambda \in [a; a+da]) = P(\mu \in [b; b+db])$

$$\sqrt{E\left(\left(\frac{d\ell}{d\lambda}\right)^2\right)} \cdot d\lambda \qquad \sqrt{E\left(\left(\frac{d\ell}{d\mu}\right)^2\right)} \cdot d\mu$$

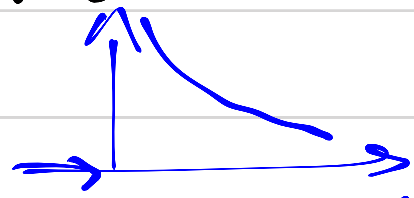
$$f(\theta) \propto \sqrt{I_y^F(\theta)} = \sqrt{E\left[\left(\frac{d \ln f(y|\theta)}{d\theta}\right)^2\right]}$$

$$I_F = Var\left(\frac{d \ln f(y|\theta)}{d\theta}\right) = E\left[\left(\frac{d \ln f(y|\theta)}{d\theta}\right)^2\right] = -E\left[\frac{d^2 \ln f(y|\theta)}{d\theta^2}\right]$$

Упр. $Y_1 \dots Y_n | \lambda \sim Exp(\lambda)$ ну.

Апр. $\lambda \sim$ р. Джеффриса.

a) $f(\lambda)? = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$



б) $f(\lambda | y_1 \dots y_n)$?

$$f(y|\lambda) = \lambda \cdot \exp(-\lambda y)$$

$$\ell(\lambda) = \ln f(y|\lambda) = \ln \lambda - \lambda y$$

$$\ell'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - y$$

$$\ell''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}$$

в) $f(\lambda | y_1 \dots y_n) \propto \underbrace{f(\lambda)}_{\frac{1}{\lambda}} \cdot \prod_{i=1}^{T} \lambda \cdot \exp(-\lambda y_i) =$

$= \lambda^{T-1} \cdot \exp(-\lambda \cdot \Sigma y_i)$

$(\lambda | y_1 \dots y_n) \sim \text{Gamma}\left(T ; \sum_{i=1}^{T} y_i\right)$

$S \sim \text{Gamma}(a, b)$ $f(s) \propto \boxed{s^{a-1} \cdot \exp(-bs)} \cdot \boxed{\frac{b^a}{\Gamma(a)}}$

Маша: $f(y | \mu) = \frac{1}{\mu} \cdot \exp\left(-\frac{y}{\mu}\right)$

$\ell(\mu) = \ln f = -\ln \mu - \frac{y}{\mu}$

$\ell''(\mu) = +\frac{1}{\mu^2} - \frac{2y}{\mu^3}$

$I_F = -E(\ell''(\mu)) = -\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2\mu}{\mu^3}\right) = +\frac{1}{\mu^2}$

Маша: $f(\mu) = \frac{1}{\mu}$

Упр $Y_1, \dots, Y_T \sim \text{Bernoulli}(p)$ незав.

а) Апр. Дж-са для p?

б) $f(p | Y_1 \dots Y_T)$

Упр $Y_1 \dots Y_T \sim N(\mu ; 1)$ незав.

а) Апр Дж для μ?

в) $f(\mu | Y_1 \dots Y_T)$?