Видно / слышно?

UCM и DLT.

UCM — Unobserved Component Model
Модель с ненаб-мыми комп-ми.

ETS(AAA) — $y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + s_{t-12} + u_t$ [мес]

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$

$s_t = s_{t-12} + \gamma \cdot u_t$

$b_t = b_{t-1} + \beta \cdot u_t$

$l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha \cdot u_t$

нач. усл: $l_0, b_0, s_0, s_{-1}, \ldots, s_{11}$

с огр-м

$s_0 + s_{-1} + \ldots + s_{-11} = 0$

[недостаток: нет предикторов.]

* добавим предикторы
* альтернативная сущность.

UCM (~1990) ⟶ DLT (~2021)

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + c_t + \beta \cdot x_t + u_t$$

„тренд" „сезон" „цикл" предикторы

условные названия.

$\beta_1 \cdot x_{1t} + \beta_2 \cdot x_{2t} + \beta_3 \cdot x_{3t}$

$u_t \sim N(0; \sigma^2)$

„Сезонная" сост. y_t

Ур-ие: [мес. данных]

$$y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + \ldots + y_{t-11} = w_t$$

$w_t \sim N(0; \sigma_w^2)$ незав.

[месяц] $$y_t = -\sum_{j=1}^{11} y_{t-j} + w_t$$

старт. знач: $y_0, y_{-1}, y_{-2} \ldots y_{-11}$

$y_0 + y_{-1} + \ldots + y_{-11} = 0$

① → только фикс. частота

② → много стартовых y_j при большом кол-ве „мелких" периодов в крупном

③ → иногда нецелое число мелких периодов в крупном

ровно 12 месяц в году

≈ 52 недели в году

два решения:

[решение 1:] добавить в качестве предикторов $[x_t]$ $\cos(\lambda t)$, $\sin(\lambda t)$

λ по смыслу !!

$365.25/7 \approx 52.18$

Упр t [неделях]

какие $\cos(\lambda t)$ и $\sin(\lambda t)$ логично добавить?

	период
$\sin t$, $\cos t$	2π
$\sin(2\pi t)$, $\cos(2\pi t)$	1
$\sin\left(\frac{2\pi t}{52.18}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi t}{52.18}\right)$	52.18

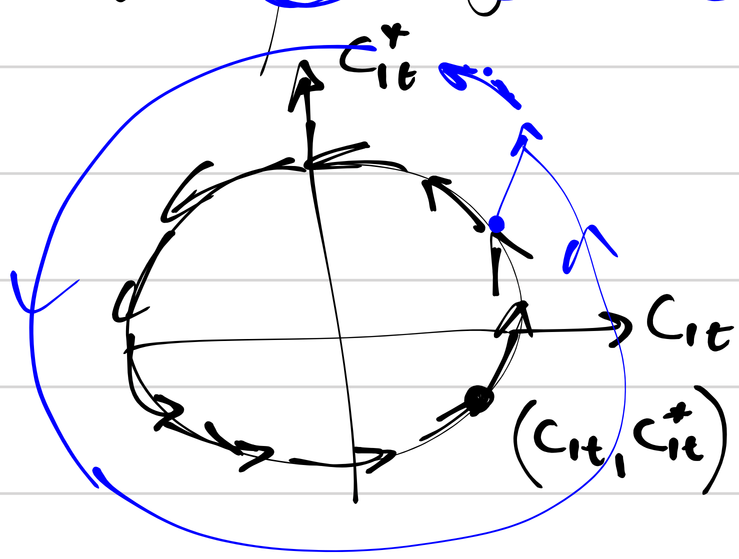
$\lambda = \frac{2\pi}{52.18}$

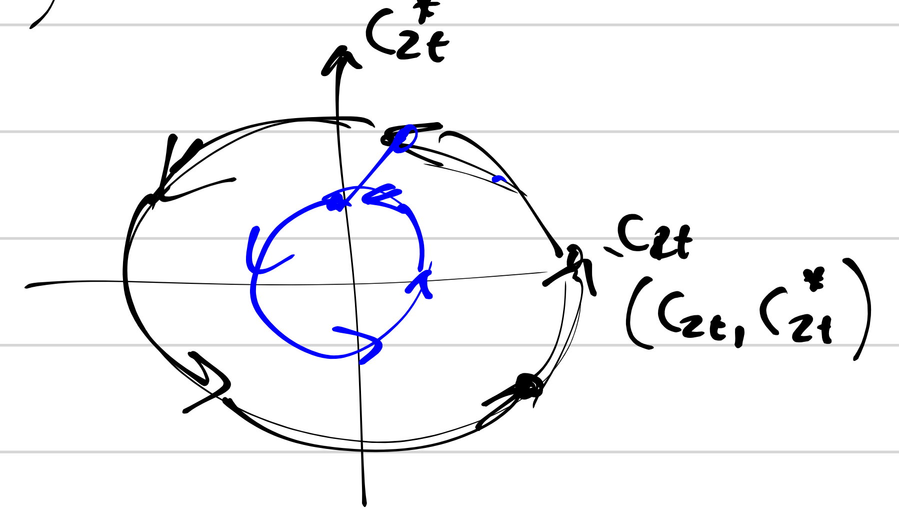
$\sin(\lambda t)$, $\cos(\lambda t)$,
$\sin(2\lambda t)$, $\cos(2\lambda t)$,
$\sin(3\lambda t)$, $\cos(3\lambda t)$ …..

$$\hat{\beta}_1 \cdot \sin(\lambda t) + \hat{\beta}_2 \cdot \cos(\lambda t) + \ldots + \hat{\beta}_6 \cdot \cos(3\lambda t)$$

решение 2. C_t

$$y_t = \mu_t + \gamma_t + C_t + \beta x_t + u_t$$





C_t – $\boxed{\text{сумма [зашумлённых] абсцисс, нескольких точек, гуляющих по окр-сти.}}$

$$C_t = c_{1t} + c_{2t}$$

$$\begin{pmatrix} c_{1t} \\ c^*_{1t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_1 & \sin\lambda_1 \\ -\sin\lambda_1 & \cos\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1t-1} \\ c^*_{1t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^c_{1t} \\ w^{c*}_{1t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w^c_{1t} \\ w^{c*}_{1t} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2_{1c} & 0 \\ 0 & \sigma^{2*}_{1c} \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} c_{2t} \\ c^*_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda_2 & \sin\lambda_2 \\ -\sin\lambda_2 & \cos\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{2t-1} \\ c^*_{2t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^c_{2t} \\ w^{c*}_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w^c_{2t} \\ w^{c*}_{2t} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma^2_{2c} & 0 \\ 0 & \sigma^{2*}_{2c} \end{pmatrix}\right)$$

число пар-в:

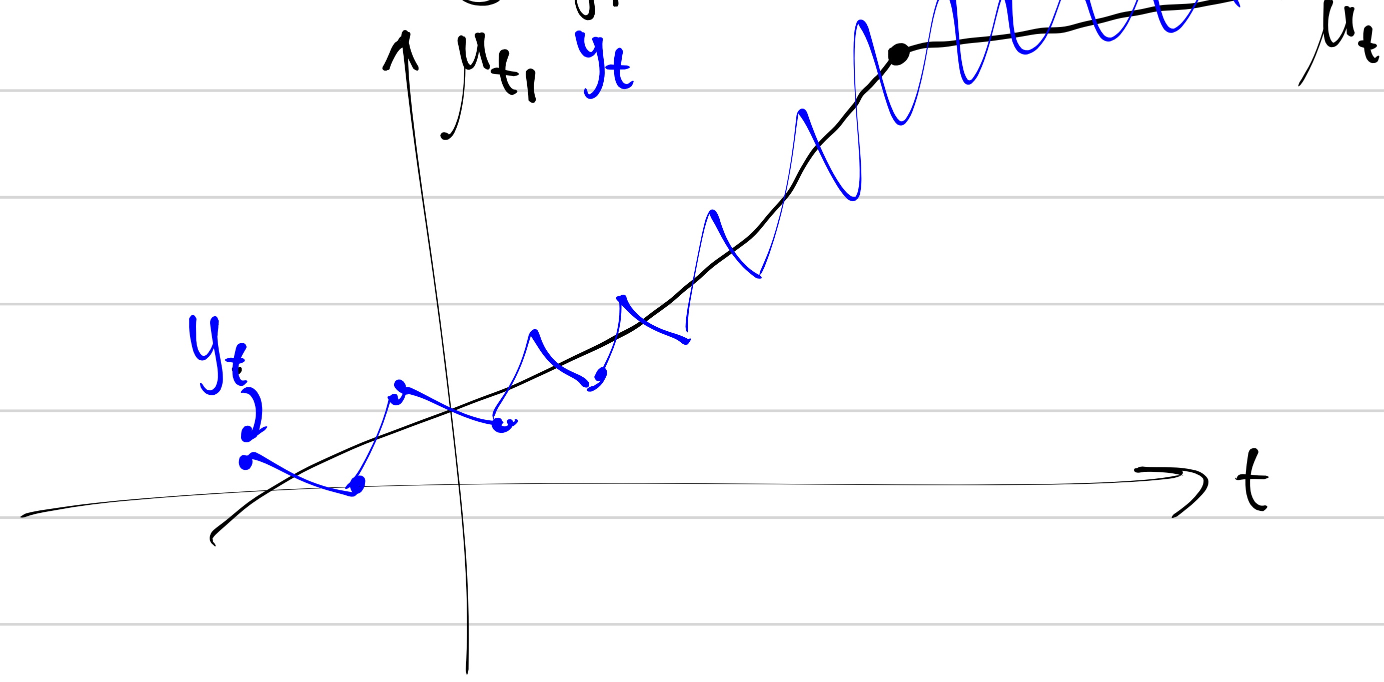
! λ_1, λ_2 по смыслу данных задаёт иссл-ль.

дисперсии: $\boxed{\sigma^2_{1c}, \sigma^{2*}_{1c}, \sigma^2_{2c}, \sigma^{2*}_{2c}}$

нач. условия: $c_{10}, c^*_{10}, c_{20}, c^*_{20}$

$\Big\}$ оцениваем с помощью max lik.

μ_t [тренд/ур-нь ... trend/level]



базовый вар-т для μ_t

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \nu_{t-1} + u_t^\mu \qquad u_t^\mu \sim N(0; \sigma_\mu^2)$$

„уровень"

$$\nu_t = \nu_{t-1} + u_t^\nu \qquad u_t^\nu \sim N(0; \sigma_\nu^2)$$

„лок. скорость роста."

нач. усл: ν_0, μ_0 [4 пар]

бюджетный вар-т

занулим ($u_t^\mu = 0$ $\quad u_t^\nu = 0$)

$$\mu_t = \mu_0 + t \cdot \nu_0$$ [2 пар]

лоукост:

$\nu_0 = 0$

$$\mu_t = \mu_0$$ [1 пар]

проблемы UCM.

→ нет автоподбора

→ много пар-в.

↓

байесовский подход

Ответ:

плюсы UCM

→ конструктор лего

Хочу зависимость от предиктора, меняющуюся во времени!

$+ \beta_t \cdot x_t +$

набл. предиктор

$\beta_t = \beta_{t-1} + u_t^\beta$

$u_t^\beta \sim N(0; \sigma_\beta^2)$

два параметра: σ_β^2 и β_0 нач. усл.

μ_t : $\sigma_\mu^2, \sigma_v^2, \mu_0, v_0$

Байесовский Подход.

1) все пар-ры модели — случ. ые величины

задаём априорное распр-ие.

чистый байес: $\mu_0 \sim N(0; 100)$?

$\sigma_y^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{T-1}$

наивн.

$\mu_0 \sim N(0; \sigma_y^2)$

реализации:
- STAN
- pystan/cmdstanpy
- pymc3/4
- ...

(куча их)

[много времени]

2) [MCMC : HMC/NUTS] алгоритмы.

выборка из $f(\mu_0, v_0, \sigma_\mu^2, \sigma_v^2 \ldots \mid y_1 \ldots y_T)$

3) предиктивный интервал для $y_{T+1} \ldots$
$\ldots y_{T+2}$

самые популярные модели с байесов-
ским подходом — prophet (fb)
— DLT (Uber)
orbit

DLT

dynamic local trend

глоб тренд

лок. тренд

$$\begin{cases} y_t = g_t + (l_{t-1} + \phi b_{t-1}) + \boxed{S_t} + \beta x_t + u_t \\ g_t = \gamma_1 + \gamma_2 \cdot t \\ S_t = S_{t-12} + \gamma u_{t-12} \\ l_t = l_{t-1} + \phi b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = \phi b_{t-1} + \beta u_t \\ \frac{u_t}{\sigma} \sim \text{Student}(df = \nu) \end{cases}$$

Априорное распр-ие пар-в.

$$\begin{cases} \sigma \sim \gamma_0 \cdot \text{half Cauchy} \\ \beta \sim N(\mu = 0,\ \sigma = 1) \\ S_1, S_2, S_3 \ldots S_{11} \sim N(0;\ \sigma = ?) \\ \vdots \end{cases}$$

чёрт ногу сломит