Видно / слышно? ✓

VAR = vector auto-regression.

VAR(2) – модель.

Ур-ие: $y_t = v + A_1 \cdot y_{t-1} + A_2 \cdot y_{t-2} + u_t$

y_t $[d\times 1]$

v $[d\times 1]$

u_t $[d\times 1]$

A_1, A_2 $[d\times d]$

Закон распр u_t: $u_t \sim WN(0;\Sigma)$ white Noise

$E(u_t)=0$

$Cov(u_t, u_{t-k})=0 \quad k\neq 0$

$Var(u_t)=\Sigma$ ← не обяз. диаг.

Проблема: у этого ур-ия ∞ решений!

$\forall$ 9 школьника в курсе, что (даже) $y_t = A_1 \cdot y_{t-1}$ имеет ∞ реш-ий

Пример: $y_t \in \mathbb{R}^2$ $\quad y_t = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$ $\quad u_t = \begin{pmatrix} u_t^a \\ u_t^b \end{pmatrix}$

подставим любые y_0, y_1 и далее по рекурр-ой ф-ле находим $y_2, y_3, y_4, \ldots$

$$\begin{cases} y_0 = \begin{pmatrix} u_1^a + 2u_0^b - 3u_2^a \\ 0 \end{pmatrix} \\ y_1 = \begin{pmatrix} 42 \\ \cos(u_1^b) + \sin(u_2^a) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Мораль: ур-ие + закон распр-ия (u_t) ещё не задают случ-ный процесс.

Опр. Хар-ий многочлен

→ идея: убираем стр-сть и сдвиг-ние и ищем решение - геометр-ую прогрессию.

$$y_t = \cancel{\nu} + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \cancel{u_t}$$

$$y_t = a \cdot z^t$$

$$I \cdot a z^t = A_1 \cdot a z^{t-1} + A_2 a z^{t-2} \quad / z^{t-2}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I \cdot z^2 - A_1 \cdot z - A_2) \cdot a = 0$$

когда ур-ие с нулевой RHS имеет нетрив-ое решение?

$a = 0$ (решение)

$a = a_{нетрив}$ (2-ое решение)

→ ∞ решений

$$\boxed{\det(Iz^2 - A_1 z - A_2)} = 0.$$

$z^2 - ?z - ?$ $[d \times d]$

Опр. $\mathrm{char}(z) = \det(I \cdot z^2 - A_1 z - A_2)$

$\mathrm{char}(z) = 0 \leftarrow \deg(\mathrm{char}(z)) = 2d$

для VAR(p) $\deg(\mathrm{char}(z)) = pd$

Теорема 1. $\boxed{\text{Ур-ие}}$ VAR(p) с $u_t \sim WN(0; \Sigma)$ есть единственное стац-ое решение, если и только если у $\mathrm{char}(z) = 0$ нет корней $|z| = 1$.

$$\begin{cases} \boxed{\text{ур-ие}} & y_t = v + A_1 \cdot y_{t-1} + A_2 \cdot y_{t-2} + u_t & [\text{VAR-EQ}] \\ \boxed{\text{закон для шума}} & u_t \sim WN(0; \Sigma) & [u_t \sim WN] \\ & (y_t) - \text{стац. бек.} & [y_t \sim Stat] \end{cases}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t^a \\ u_t^b \end{pmatrix}$$

$$char(z) = \det(Iz^1 - A_1) = \det\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{pmatrix} = (z-1)^2 \qquad z_1 = 1 \quad z_2 = 1$$

любое решение ур-ия нестац-ное.

$[\text{„causal"}]$ $y_t = \mu_y + u_t + B_1 \cdot u_{t-1} + B_2 \cdot u_{t-2} + \ldots$

$y_t \sim VMA(\infty)$

Теорема 2 Ур-ие VAR-EQ с $u_t \sim WN(0; \Sigma)$ имеет единственное решение $y_t \sim VMA(\infty)$ если и только если $|z| < 1$ у всех корней $char(z) = 0$. [корни $lag(\ell) = 0$]

$[|\ell| > 1]$

у $char(z) = 0$:

- $\exists\, |z| = 1$ ($\exists\, |\ell| = 1$) $\to$ у VAR-EQ нет стац. решения
- $\forall\, |z| < 1$ ($\forall\, |\ell| > 1$) $\to$ есть 1 стац. реш-ие $VMA(\infty)$
- $\forall\, |z| \neq 1$, $\exists\, |z| > 1$ ($\forall\, |\ell| \neq 1$, $\exists\, |\ell| < 1$) $\to$ есть 1 стац. реш, но не всегда $VMA(\infty)$.

[по умолчанию] в софте
„оценки мне VAR(2)"

→ VAR-EQ

→ $u_t \sim N(0 ; \Sigma)$ нуль $\Rightarrow u_t \sim WN(0;\Sigma)$

→ $y_t \sim VMA(\infty) \Rightarrow y_t$ - стац

и еще есть лаговый полином

$$\underbrace{(I - A_1 \cdot L - A_2 \cdot L^2)} \cdot y_t = v + u_t$$

$$lag(\ell) = \det (I - A_1 \ell - A_2 \cdot \ell^2)$$

корни связаны соотн-ием

$$z_k = \frac{1}{\ell_k}$$

Оценивание:

→ $\boxed{\text{честный метод максим-го правдоподобия.}}$

[чаще мне] → условное правдоподобие.

$$\max_\theta \ell(y_1 \ldots y_T | \theta)$$

$$\max_\theta \underline{\ell(y_3, y_4, y_5 \ldots y_T | y_1, y_2, \theta)} \quad VAR(2)$$

→ МНК по отдельным ур-ниям.

$$y_t = v + A_1 \cdot y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + u_t \quad u_t = \begin{pmatrix} u_t^a \\ u_t^b \end{pmatrix}$$

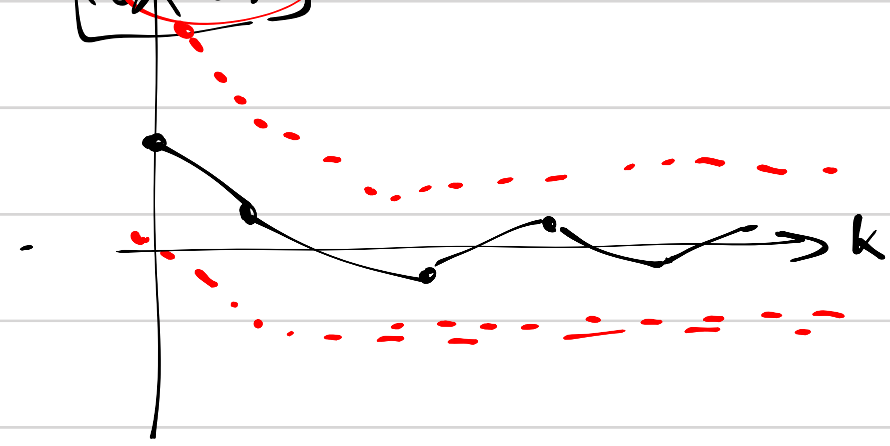
$$\boxed{a_t = v_a + A_{11}^{(1)} \cdot a_{t-1} + A_{12}^{(1)} b_{t-1} + A_{11}^{(2)} a_{t-2} + A_{12}^{(2)} b_{t-2} + u_t^a}$$

Для интерпретации рисуют импульсные ф-ции реакции

FEIR = forecast error impulse response (function)

$$y_t = \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} \qquad u_t = \begin{pmatrix} u^a_t \\ u^b_t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial a_t}{\partial u^b_{t-k}}}$$



$$y_t = v + A_1 \cdot y_{t-1} + A_2 \cdot y_{t-2} + I \cdot u_t$$

VAR(2)

$$\Phi_0 = I$$

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cdot A_1$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 \cdot A_2 + \Phi_1 \cdot A_1$$

$$A_k = 0 \quad (k > 2)$$

$$\Phi_k = \Phi_0 \cdot A_k + \Phi_1 \cdot A_{k-1} + \ldots + \Phi_{k-1} \cdot A_1$$

$$y_t = v + A_1 \cdot (v + A_1 \cdot y_{t-2} + A_2 \cdot y_{t-3} + u_{t-1}) + A_2 \cdot y_{t-2} + I \cdot u_t$$

$$y_t = (A_1 \cdot A_1 + A_2)$$

OIR Orthogonal Impulse Response (function)

$$u_t = \begin{pmatrix} u_t^a \\ u_t^b \end{pmatrix} \qquad \boxed{Var(u_t) = \Sigma} = \underline{P \cdot P'}$$

$$\begin{pmatrix} u_t^a \\ u_t^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_t^a \\ \alpha \tilde{u}_t^a + \beta \tilde{u}_t^b \end{pmatrix} \qquad \boxed{Var \begin{pmatrix} \tilde{u}_t^a \\ \tilde{u}_t^b \end{pmatrix} \leftarrow \text{guar.}}$$