GARCH-модели

① Не улучшают качество прогнозов в смысле $E((y_{t+h}-\hat{y}_{t+h})^2)$

② Цель: качество прогноза волатильности вероятности дефолта

2000 + Granger, Engle

Tsay.

Белый Шум. u_t $E(u_t)=0$

$Var(u_t)=\sigma_u^2>0$

1) Простейший стац процесс $cov(u_t,u_s)=0,\ t\neq s$

2) $Cov(u_t,u_s)=0$ не запрещает зависимость

R и L

R и L независимы.

1) $cov(h(R),g(L))=0\ \forall h,g$

$cov(R,L)=0,\ cov(R,L^2)=0$

$cov(\cos(R),L^2)=0$

① ⇒ ② ⇒ 3

2) $E(R|L)=E(R)$

$$\mathrm{cov}(R, g(L)) = 0 \quad \forall g$$

3) Линейная независимость

$$\mathrm{cov}(R, L) = 0$$

Стилизованные факты про лог-доходности

$$P_t = P_{t-1}(1+r)$$

$$y_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} =$$

$$= \ln \frac{P_{t-1}(1+r)}{P_{t-1}} = \ln(1+r) \underset{r \to 0}{\approx} r$$

* Тяжёлые хвосты (по сравнению с нормальным распр, kurtosis > 3)

$$y_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

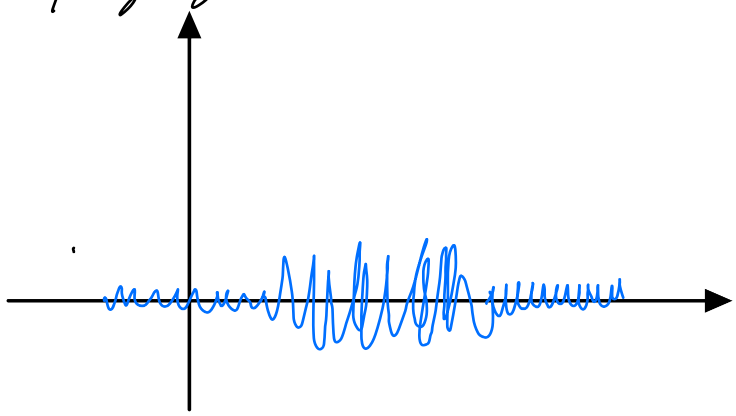
$$\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2 \ (\text{ММП})$$

Используют не N.

* Асимметрия, более сильная реакция на негативные новости

* Нулевая автокорр. для y_t, $\mathrm{cov}(y_t, y_s) \approx 0$, $t \neq s$

* Кластеризация волатильности



$u_t \sim GARCH(1,1)$ $\qquad$ $GARCH(p,q)$

generalized

AR – autoregressive

CH – conditional heteroschedasticity

- $u_t = \nu_t \cdot \sigma_t$ $\qquad$ ν_t – $N(0,1)$, iid

  σ_t – волатильность
- $\sigma_t > 0$
- $\sigma_t^2 = 20 + 0{,}1\, u_{t-1}^2 + 0{,}2\, \sigma_{t-1}^2$

$$\sigma_t^2 = c + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \sigma_{t-p}^2 + \beta_1 u_{t-1}^2 + \dots + \beta_q u_{t-q}^2$$

рекуррентные ур-е, не задают однозначно с. п.

- ν_t не зависит от $u_{t-1}, u_{t-2}, \dots$ $\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \dots$

• $\begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ – стац. решение ур-я

Упр. u_t – WN?

$E(u_t)=0 \qquad cov(u_t, u_s)=0$

$E(u_t) = E(\nu_t \sigma_t) = 0 \cdot E(\sigma_t) = 0$

$cov(u_t, u_s) = cov(\nu_t \sigma_t, \nu_s \sigma_s) =$

$= E(\nu_t \sigma_t \nu_s \sigma_s) = 0$

Упр. $u_t \sim GARCH(1.1)$, $\nu_t \sim N(0,1)$

$\underline{u_t = \nu_t \sigma_t} \qquad \sigma_t^2 = 20 + 0{,}1 u_{t-1}^2 + 0{,}2 \sigma_{t-1}^2$

* ν_t не зав от

$\sigma_t^2, \sigma_{t-1}^2, \ldots$

$\nu_{t-1}, \nu_{t-2}, \ldots$

$u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots$

$\begin{pmatrix} u_t \\ \sigma_t^2 \end{pmatrix}$ - стац

95% PI для u_{t+1}, $u_t = -1$, $\sigma_t = 2$

$u_{t+1} | u_t = -1, \sigma_t = 2) \sim N$

$E(u_{t+1} | u_t = -1, \sigma_t = 2) = E(\boxed{\nu_{t+1}}\sigma_{t+1} | u_t=-1, \sigma_t=2)$

$= 0$

$Var(u_{t+1} | u_t = -1, \sigma_t = 2) = E(u_{t+1}^2 | u_t = -1, \sigma_t = 2)$

$= E(\nu_{t+1}^2 \cdot \sigma_{t+1}^2 | u_t = -1, \sigma_t = 2) = 20{,}9$

ν_{t+1}^2: 1

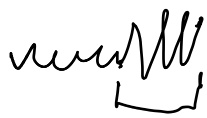
σ_{t+1}^2: $20 + 0{,}1(-1)^2 + 0{,}2 \cdot 4 = 20{,}9$

PI для u_{t+1}: $[0 - 1{,}96\sqrt{20{,}9}; 0 + 1{,}96\sqrt{20{,}9}]$

$Var(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots, \sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2 \ldots) = \sigma_t^2$

Условная дисперсия

SARIMA – GARCH



Обычно выписывается условное правдоподобие

u_1, σ_1^2

Наивный: $\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\sum u_t^2}{T}}$

$(u_2 | u_1, \sigma_1) \sim N(0, c + \beta_1 u_1^2 + \alpha_1 \sigma_1^2)$

$f(u_2 | u_1, \sigma_1)$

$$(u_3 | u_2, u_1, \sigma_1) \sim N(0, \sigma_3^2)$$

$$\sigma_3^2 = c + \alpha_1 \sigma_2^2 + \beta_1 u_2^2 =$$

$$= c + \alpha_1 (c + \alpha_1 \underline{\sigma_1^2} + \beta_1 \underline{u_1^2}) + \beta_1 \underline{u_2^2}$$

$$f(u_T, u_{T-1}, u_{T-2}, \dots u_2 | \underline{u_1}, \underline{\sigma_1}) =$$

$$= f(u_T | u_{T-1}, \dots, u_1, \sigma_1) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot f(u_3 | u_2, u_1, \sigma_1) \cdot f(u_2 | u_1, \sigma_1) \to \max_{c, \beta_1, \alpha_1}$$

Надстройки

$y_t \sim$ ARMA – GARCH

$$A(L)(y_t - \mu) = B(L) u_t$$

$y_t \sim$ ARMA

u_t – WN

$u_t \sim$ GARCH(α, β)

ARSV (Auto-Regressive Stochastic Volat.)

$$u_t = \nu_t \cdot \sigma_t \qquad \nu_t \sim N(0,1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = c + \alpha_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t$$

$$\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

EGARCH / TGARCH, FGARCH