ну!! №05 Временные ряды !!

было: Ly_t, $L^2 y_t$, $\frac{1}{1-0{,}5L} y_t$, $\frac{1}{1-2L}\cdot y_t$

AR, ARMA, ARIMA !!

[нот.] $(y_t) \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t) если

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \dots$$

где (u_t) - б.шум

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 < \infty \right\}$$

опр. AR(p) - модель

(y_t) - AR(p) модель отн-но б.шума (u_t), если:

① $(y_t) \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t) (*)

②

$$(y_t - \mu) = \beta_1 (y_{t-1} - \mu) + \beta_2 (y_{t-2} - \mu) + \dots + \beta_p (y_{t-p} - \mu) + u_t.$$

$\beta_p \neq 0$

! есть авторы к-рые не включают требование (1)' и осуждают это

есть — // — / — требование (1) и не осуждают это.

ну/R/gretl/....

хочу AR(1) честно оценить ⟹ ① ②

Утв. По определению AR(p) с требованиями ① и ② он всегда стац-н!

① $y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$

$\hookrightarrow E(y_t) = \mu, \quad Var(y_t) = \sigma^2 + \alpha_1^2 \cdot \sigma^2 + \alpha_2^2 \sigma^2 + \ldots$

$Cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_k.$

/любой MA(∞) стац-н/.

Утв.

$$(y_t - \mu) = \beta_1 (y_{t-1} - \mu) + \ldots + \beta_p (y_{t-p} - \mu) + u_t$$

в лагах запис-ся как.

$$P_{AR}(L) \cdot (y_t - \mu) = u_t$$

где $P_{AR}(L) = 1 - \beta_1 L - \beta_2 L^2 - \ldots \beta_p L^p$

$P_{AR}(0) = 1$ $\quad$ deg $P_{AR} = p$

Теор. Если y_t стац-ный то:

$\tilde{y}_t = \frac{1}{1 - qL} \cdot y_t$ — тоже стац-ный при $|q| \neq 1$.

$\tilde{y}_t = \frac{1}{1 - qL} \cdot y_t$ — стац-ный

и $\tilde{y}_t = y_t + q y_{t-1} + q^2 y_{t-2} + \ldots$ при $|q| < 1$.

Упр. $\forall t \in \mathbb{Z}$ (u_t) - б. шум

$$y_t = 0{,}3 y_{t-1} + u_t$$

∞ а) сколько у этого ур-ия нестац. решений?

1 б) — // — стац-х решений?

да в) правда ли, что все стац-ые решения имеют вид $MA(\infty)$ отн-но (u_t)?

а) ∞ много нестац. решений!

$\boxed{y_3 = 5u_2}$ ← от фонаря!

$y_4 = 0{,}3 \cdot (5u_2) + u_4$

$y_5 = 0{,}3(0{,}3 \cdot 5u_2 + u_4) + u_5$

$y_6 = \ldots$

$5u_2 = 0{,}3 y_2 + u_3$

$y_2 = \dfrac{5u_2 - u_3}{0{,}3}$

$\dfrac{5u_2 - u_3}{0{,}3} = 0{,}3 \cdot y_1 + u_2$

$y_1 = \dfrac{\dfrac{5u_2 - u_3}{0{,}3} - u_2}{0{,}3}$

$\ldots$

$Var(y_3) = 25 \cdot \sigma^2$

$Var(y_4) = 1{,}5^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2$ $\neq$

при $y_3 = 5u_2$ мы получили нестац. решение

б) $y_t = 0{,}3 y_{t-1} + u_t$

(1) $\boxed{(1 - 0{,}3L) \cdot y_t = u_t}$ ← б. шум ← стац. процесс

если мы ищем только стац-ые решения, то можем поделить на $(1 - 0{,}3L)$!

(2) $\boxed{y_t = \dfrac{1}{1 - 0{,}3L} u_t} = \boxed{u_t + 0{,}3u_{t-1} + 0{,}3^2 u_{t-2} + \ldots}$

ответ: единств-нное стац-ое решение!

в) да

ур-ие $y_t = 5y_{t-1} + u_t$ (u_t) - б.шум

∞ а) сколько нестац-х решений?

1 б) — // — стац-х решений?

нет в) правда ли, его стац-ое решение имеет вид $MA(\infty)$ отн-но (u_t)?

а) ∞ много!

$y_{17} = 8$ $\quad y_{18} = 5\cdot 8 + u_{18}$

y_{16} $\quad y_{19} = 5\cdot 5\cdot 8 + 5\cdot u_{18} + u_{19}$

y_{15} ...

... $E(y_{17}) = 8$ $\quad E(y_{18}) = 40$ не стац.

б) $(1-5L)\cdot y_t = u_t \leftarrow$ б.шум $\leftarrow$ стац. процесс

$$y_t = \frac{1}{1-5L}\cdot u_t = \qquad F\cdot L = 1$$

$$= \frac{F}{F-5}\cdot u_t =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot F\cdot\left(\frac{1}{1-0{,}2F}\cdot u_t\right) =$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot F\cdot\left(u_t + 0{,}2u_{t+1} + 0{,}2^2 u_{t+2} + \ldots\right) =$$

$$\boxed{y_t = -0{,}2u_{t+1} - 0{,}2^2 u_{t+2} - 0{,}2^3 u_{t+3} - \ldots}$$

не $MA(\infty)$ $\quad$ стац. решение исх-го ур-ия единственное!

$MA(\infty)$ $\quad y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots$

$$y_t = 0{,}3\, y_{t-1} + u_t \qquad (1)$$

это уравнение! это не AR(1) модель!

единств. стац-ое решение.

← все решения (1)

болото нестац-х решений

Среди решений этого ур-ия есть MA(∞) отн-но (u_t), стац-ое. Вот это стац-ое решение наз-ся AR(1) моделью!

$$y_t = 7 y_{t-1} + u_t$$

← это ур-ие.

одно стац-ое решение.

болото нестац-х решений.

ни одно решение не наз-ся AR(1) процессом.

Теор.

Рассмотрим ур-ие на процесс (y_t)

$$(y_t - \mu) = \beta_1 \cdot (y_{t-1} - \mu) + \beta_2 (y_{t-2} - \mu) + \ldots + \beta_p (y_{t-p} - \mu) + u_t,$$

где $\beta_p \neq 0$, (u_t) — б. шум и хар-ое ур-ие

$$\lambda^p - \beta_1 \lambda^{p-1} - \beta_2 \lambda^{p-2} - \ldots - \beta_p = 0.$$

$\boxed{A.}$ Всегда найдется ∞ кол-во нестац-х решений.

$\boxed{B}$ Будет единственное стац-ное решение, если $\forall\, |\lambda_i| \neq 1$ где λ_i — корни хар-го ур-ия.

$\boxed{B^+}$ Будет единственное стац-ое решение вида MA(∞) отн-но (u_t) если $\forall\, |\lambda_i| < 1$.

def. $(y_t) \sim ARMA(p,q)$ процесс отн-но (u_t), если:

$\boxed{1}$ $(y_t) \sim MA(\infty)$ отн-но (u_t)

$\boxed{2}$ (y_t) удовл-т ур-ию

$$\boxed{P_{AR}(L)\cdot y_t = P_{MA}(L)\cdot u_t}, \text{ где}$$

$P_{AR}=1 \to$ def MA-процесса

$P_{MA}=1$ def AR-процесса

degree $(P_{AR}) = p$ degree $(P_{MA}) = q$

$P_{AR}(0)=1$ $P_{MA}(0)=1$

и полиномы P_{AR} и P_{MA} не сократимы.

Пример. $$y_t = 0.5 y_{t-1} + 6 + u_t - 0.5 u_{t-1}$$

ур-ие!

∞ а) сколько у этого ур-ия не стац. реш?

1 б) — // — стац. реш?

да в) правда ли, что все стац-ые реше-ния — это MA(∞) процессы отн-но u_t?

$$(1-0.5\cdot L)\, y_t = 6 + (1-0.5L)\, u_t$$

$\cancel{(1-0.5L)}$

$L\cdot 6 = 6$

$$y_t = \frac{6}{1-0.5} + u_t$$

$$\boxed{y_t = 12 + u_t} \Leftarrow \boxed{\text{ед. стац-ое решение}}$$

$MA(\infty) = 12 + u_t + 0\cdot u_{t-1} + 0\cdot u_{t-2} + \dots$

не нац-ие ~~ARMA(1,1)~~

нац-ие ARMA(0,0)

Упр.

(u_t) – б. шум } незав-мы.
(v_t) – б. шум

$(y_t) \sim MA(1)$ отн-но (u_t)
$(x_t) \sim MA(1)$ отн-но (v_t)

$z_t = y_t + x_t$

а) явл-ся ли z_t $MA(1)$ отн-но (u_t)? нет!
б) — // — отн-но (v_t)? нет!
в) — // — отн-но хоть б какого-ни-будь белого шума?

$$z_t = \cancel{\mu} \boxed{u_t + \alpha \cdot u_{t-1} + v_t + \beta v_{t-1}}$$

?

$$z_t = \nu_t + \delta \cdot \nu_{t-1}$$

где ν_t – б. шум?

да можно.

$$y_t + \delta y_{t-1} = u_t + \alpha u_{t-1} + v_t + \beta v_{t-1}$$

$$(1-\delta L)\cdot y_t = u_t + \alpha u_{t-1} + v_t + \beta v_{t-1}$$

$$y_t = \frac{1}{1-\delta L} u_t + \alpha \cdot \frac{1}{1-\delta L} u_{t-1} + \frac{1}{1-\delta L} v_t + \beta \frac{1}{1-\delta L} v_t$$

Система: $Cov(y_t, y_{t-1}) = 0 \rightarrow$

$Cov(y_t, y_{t-2}) = 0 \rightarrow$

$Cov(y_t, y_{t-3}) = 0. \rightarrow$

$\ldots$

д.з. убедитесь, что ур-ие на α, β, δ выходит одно и то же.

$$Cov(y_t, y_{t-2}) =$$

$$Cov\Big(u_t + \delta u_{t-1} + \delta^2 u_{t-2} + \ldots + \alpha(u_{t-1} + \delta u_{t-2} + \ldots) + v_t + \delta v_{t-1} + \delta^2 v_{t-2} + \ldots + \beta(v_{t-1} + \delta v_{t-2} + \ldots),$$

$$u_{t-2} + \delta u_{t-3} + \delta^2 u_{t-4} \ldots + \alpha(u_{t-3} + \delta u_{t-4} + \delta^2 u_{t-5}) + \text{—//— сдвиг на 2}\Big) =$$

$$0 = \sigma_u^2 \cdot (\delta^2 + \ldots) + \sigma_v^2 \cdot (\ldots)$$

δ!

$MA(1) + MA(1) = MA(1)$

независ

$AR(1) + MA(1) = ?$

незав