

1. Недолго думая, храбрый исследователь Василий сказал «Эх, была не была!», бросил шапку оземь и оценил с помощью statsmodels  $ARMA(1, 1)$  модель.

Аккуратно опишите все предпосылки, которые используются для оценки параметров модели.

2. Величины  $X_1, X_2, X_3$  независимы и равномерны на  $[0; 1]$ . Определим  $M_2 = \max\{X_1, X_2\}$  и  $M_3 = \max\{X_1, X_2, X_3\}$ .

Найдите копулу величин  $M_2, M_3$  и схематично нарисуйте любую её линию уровня.

3. По народным приметам определите, имеет ли стационарное решение уравнение

$$\begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ b_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{t-2} \\ b_{t-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_t^a \\ u_t^b \end{pmatrix},$$

где  $(u_t)$  — многомерный белый шум.

4. Стационарный в сильном смысле белый шум  $(u_t)$  описывается  $GARCH(1, 0)$  моделью:  $u_t = \nu_t \sigma_t$ ,  $\nu_t \sim \mathcal{N}(0; 1)$ ,  $\sigma_t^2 = 3 + 0.1\sigma_{t-1}^2$ . Помимо уравнений предполагают, что  $\nu_t$  не зависит от  $u_{t-1}, \nu_{t-1}, u_{t-2}, \nu_{t-2}, \dots$

а) Найдите безусловную дисперсию  $u_t$ .

б) Докажите, что  $u_t^2$  — это некий  $ARMA$ -процесс и выпишите его уравнение.

5. Перепишите стационарную  $ARMA(1, 1)$  модель с уравнением  $y_t = 0.2y_{t-1} + u_t + 0.5u_{t-1}$ , где  $(u_t)$  — белый шум, в виде модели пространства состояний

$$\begin{cases} x_t = Fx_{t-1} + v_t \\ y_t = Gx_t + w_t, \end{cases}$$

где величины  $x_0, (v_1, w_1), (v_2, w_2), \dots$  некоррелированы.

Нужно явно выписать, как устроен вектор  $x_t$ , матрицы  $F$  и  $G$ , как связаны  $v_t$  и  $w_t$  с исходным шумом  $u_t$ .

6. Возможны ли значения автокорреляционной функции, равные  $\rho_1 = 0, \rho_2 = 0.9$ ? Возможны ли значения частной автокорреляционной функции, равные  $\phi_{11} = 0, \phi_{22} = 0.9$ ?

Для каждого случая докажите невозможность или предъявите явный контр-пример процесса.