Фильтр Калмана.

top 10 алгор 20 века

* оценивание кучи моделей основано на ФК.

Aad van der Vaart „Time series"

+ картинки
+ поясняющие примеры.

Модель состояние - наблюдение
State space model.

состояния [ненаблюдаемые]

$$\begin{array}{ccccccccc} x_0 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_2 & \longrightarrow & x_3 & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_3 \end{array}$$

наблюдения

$$\begin{cases} x_0 = \text{вектор конст} \\ x_{t+1} = F x_t + v_{t+1} \\ y_t = G x_t + w_t \end{cases}$$

м-цы F, G - известны.

$Var\left(\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix}\right)$ - изв.

$E\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} = 0$

Например.

Стац-ый AR(2) с ур-ием $u_t \sim WN(0; \sigma^2)$

$$a_t = 0.5\, a_{t-1} + 0.06\, a_{t-2} + u_t$$

State-Space model

$$x_t = \begin{pmatrix} a_t \\ a_{t-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_t \\ a_{t-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & 0.06 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F} \cdot \begin{pmatrix} a_{t-1} \\ a_{t-2} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} u_t \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_t}$$

$$y_t = \underbrace{(1\ 0)}_{G} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ a_{t-1} \end{pmatrix} + \underbrace{0}_{w_t}$$

Задачи:

наблюдаем $y_0, y_1, \dots\dots, y_t$

хотим „предсказать" $x_0, x_1 \dots x_t$, y_{t+1}, x_{t+1}

неслуч.
веса - матрицы

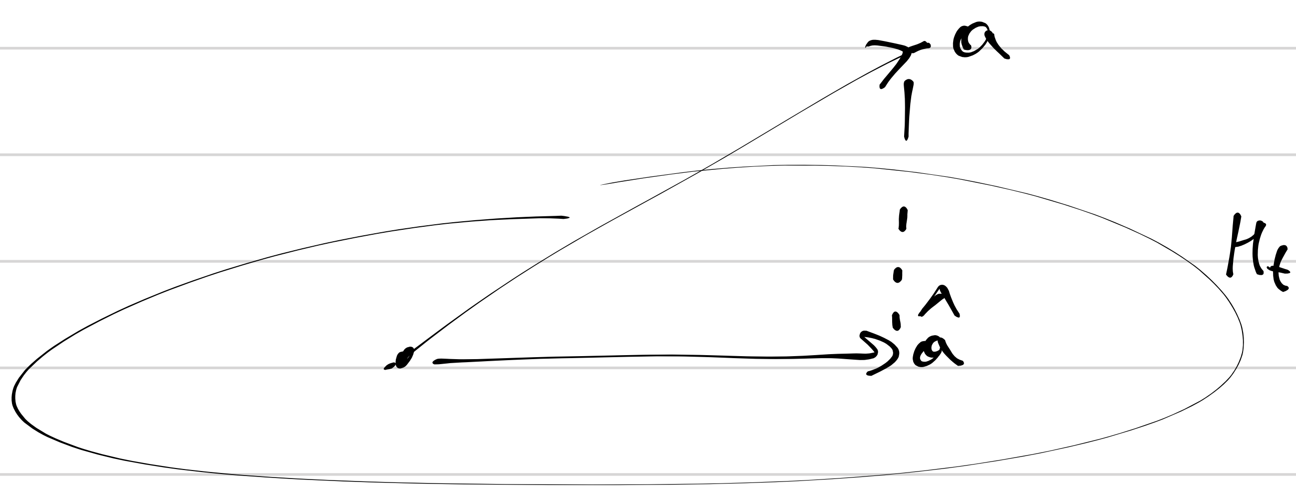
Обозначения

$$H_t = \mathrm{Span}(1, y_0, y_1, \dots\dots, y_t)$$

H_3

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot 1 + \begin{pmatrix}7&5\\2&1\end{pmatrix}\cdot y_0 + \begin{pmatrix}2&1\\7&3\end{pmatrix}\cdot y_1 + \begin{pmatrix}7&8\\2&1\end{pmatrix}\cdot y_2 + \begin{pmatrix}2&1\\3&7\end{pmatrix}\cdot y_3$$

$\Pi_t(\;)$ = проекция на H_t



$\hat{a}$ = проекция a на H_t = $\Pi_t a$

$$= \underset{h \in H_t}{\arg\min}\, E(\|a - h\|^2)$$

в случае многомерного нормального: $\Pi_t a = E(a \mid y_t, y_{t-1}, \dots, y_0)$

Ф.К с высоты птичьего полёта.

Инициализ. [10^4 статей, как это делать]

Init. $\boxed{\begin{matrix} \Pi_0(x_0) \\ Var(\Pi_0(x_0)) \\ Var(x_0) \end{matrix}}$

наивное

$$\Pi_0 x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Var(\Pi_0 x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Var(x_0) = Var\begin{pmatrix} a_0 \\ a_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

Эволюция:

$$\begin{pmatrix} \Pi_t x_t \\ Var(\Pi_t x_t) \\ Var(x_t) \end{pmatrix} \xrightarrow{x_t \to x_{t+1}} \begin{pmatrix} \Pi_t x_{t+1} \\ Var(\Pi_t x_{t+1}) \\ Var(x_{t+1}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\Pi_t \to \Pi_{t+1}} \begin{pmatrix} \Pi_{t+1} x_{t+1} \\ Var(\Pi_{t+1} x_{t+1}) \\ Var(x_{t+1}) \end{pmatrix}$$

Двояк обозн.

$\Pi_t x_{t+1}$ → случ. вектор $\in H_t$

→ реализация этого случ-го вектора.

Свойства Π_t

① $\Pi_t(A \cdot r) = A\, \Pi_t r$

A — неслуч. м-ца; r — случ. вектор.

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r] \arrow[d] & x_1 \arrow[r] \arrow[d] & x_2 \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ y_0 & y_1 & y_2 & \dots \end{tikzcd}$$

$$* \begin{cases} x_0 = \text{вект. конст} \\ x_t = F \cdot x_{t-1} + v_t \\ y_t = G \cdot x_t + w_t \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix}$ не зависят от прошлых $\begin{pmatrix} v_{t-1} \\ w_{t-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_{t-2} \\ w_{t-2} \end{pmatrix}, \dots$

$Var\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix}$ = известная м-ца $\quad E\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} = 0. \Rightarrow \Pi_t\begin{pmatrix} v_{t+1} \\ w_{t+1} \end{pmatrix} = 0$

Интуиция:

$$\begin{pmatrix} \Pi_t x_t \\ Var(\Pi_t x_t) \\ Var(x_t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{1}\,!!\;\; x_t \to x_{t+1}} \begin{pmatrix} \Pi_t x_{t+1} \\ Var(\Pi_t x_{t+1}) \\ Var(x_{t+1}) \end{pmatrix} \xrightarrow{\boxed{2}\;\; \Pi_t \to \Pi_{t+1}} \begin{pmatrix} \Pi_{t+1} x_{t+1} \\ Var(\Pi_{t+1} x_{t+1}) \\ Var(x_{t+1}) \end{pmatrix}$$

Шаг $x_t \to x_{t+1}$

1A $\underbrace{\Pi_t x_t}_{\text{знаем}} \longrightarrow \Pi_t x_{t+1}$?

$$\Pi_t x_{t+1} = \Pi_t (F x_t + v_{t+1}) = F \cdot \Pi_t x_t + \overbrace{\Pi_t \cdot v_{t+1}}^{0} =$$

$$= \underbrace{F}_{\text{знаем}} \cdot \underbrace{\Pi_t x_t}_{\text{знаем}}$$

1B: $\underbrace{Var(\Pi_t x_t)}_{\text{знаем}} \longrightarrow Var(\Pi_t x_{t+1})$?

$$Var(\Pi_t x_{t+1}) = Var(F \Pi_t x_t) = F \cdot Var(\Pi_t x_t) \cdot F^T$$

1C: $\underbrace{Var(x_t)}_{\text{знаем}} \longrightarrow Var(x_{t+1})$

$$Var(x_{t+1}) = Var(F x_t + v_{t+1}) =$$

$$= Var(F x_t) + Var(v_{t+1}) + \underbrace{0}_{Cov(Fx_t,\, v_{t+1})} + \underbrace{0}_{Cov(v_{t+1},\, Fx_t)} =$$

$$= \underbrace{F\, Var(x_t) \cdot F^T + Var(v_{t+1})}_{\text{знаем всё !!}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Var(z+s) &= Var(z) + Var(s) \\ &+ Cov(z,s) + Cov(s,z) \end{aligned}}$$

Эволюция:

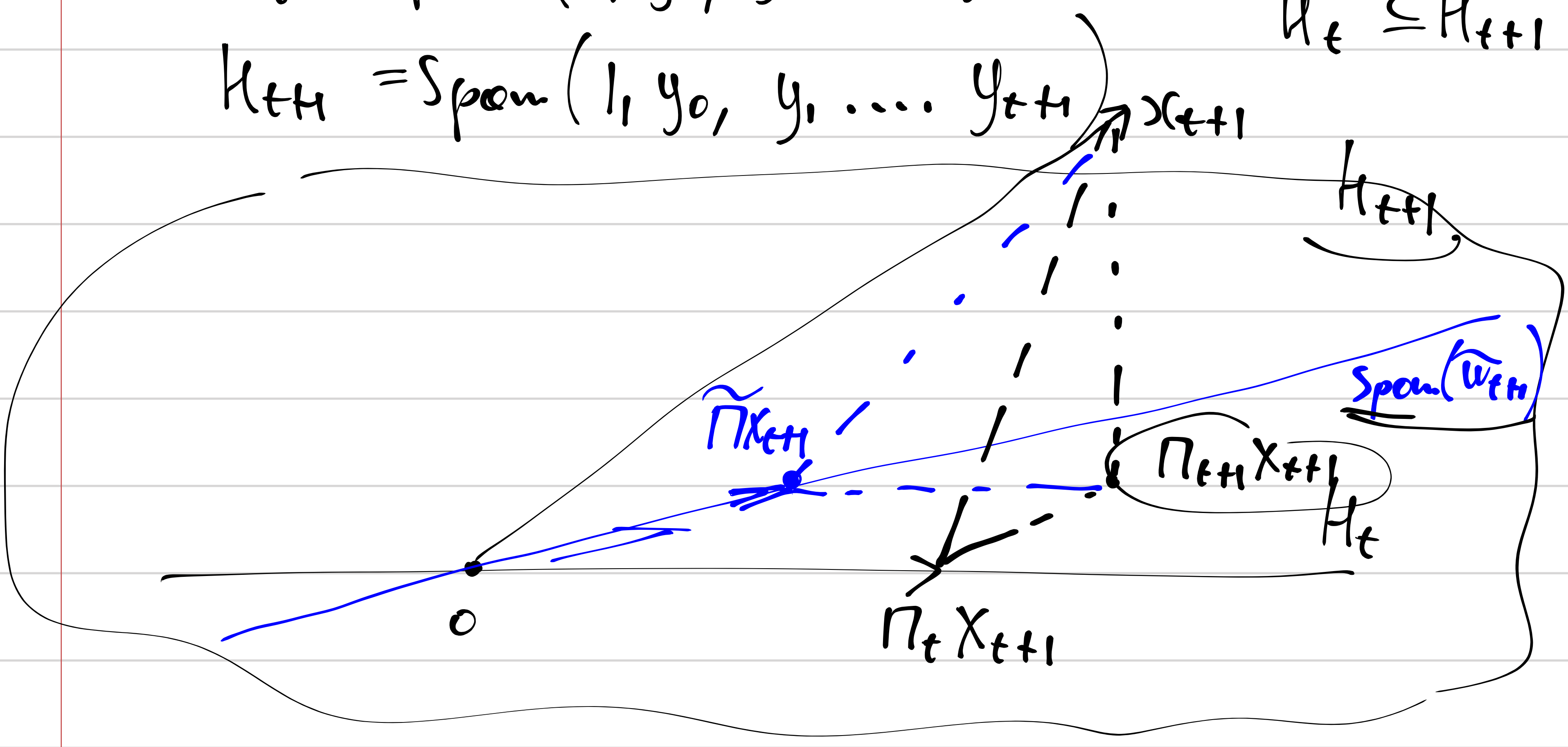
$$\begin{pmatrix} \Pi_t x_t \\ Var(\Pi_t x_t) \\ Var(x_t) \end{pmatrix} \xrightarrow{x_t \to x_{t+1}} \begin{pmatrix} \Pi_t x_{t+1} \\ Var(\Pi_t x_{t+1}) \\ Var(x_{t+1}) \end{pmatrix} \xrightarrow[\boxed{2}]{\Pi_t \to \Pi_{t+1}} \begin{pmatrix} \Pi_{t+1} x_{t+1} \\ Var(\Pi_{t+1} x_{t+1}) \\ Var(x_{t+1}) \end{pmatrix}$$

2c: $\underset{\text{знаем}}{Var(x_{t+1})} \longrightarrow Var(x_{t+1})$. знаем !!

Геометрия получения новой информации

$$H_t = Span(1, y_0, y_1, \dots, y_t)$$
$$H_{t+1} = Span(1, y_0, y_1, \dots, y_{t+1})$$

$$H_t \subseteq H_{t+1}$$



$$H_{t+1} = H_t \oplus Span(\tilde{w}_{t+1})$$

$$H_{t+1} = H_t + Span(y_{t+1})$$

$s \perp r \qquad Cov(r, s) = 0.$

$\tilde{\Pi}$ = проекция на $Span(\tilde{w}_{t+1})$

$$\Pi_{t+1}(x_{t+1}) = \Pi_t(x_{t+1}) + \tilde{\Pi} x_{t+1}$$

Q. Кто такой $\tilde{w}_{t+1}$?

A. $\tilde{w}_{t+1} = y_{t+1} - \Pi_t(y_{t+1}) = G x_{t+1} + w_{t+1} - \Pi_t(G x_{t+1} + w_{t+1})$

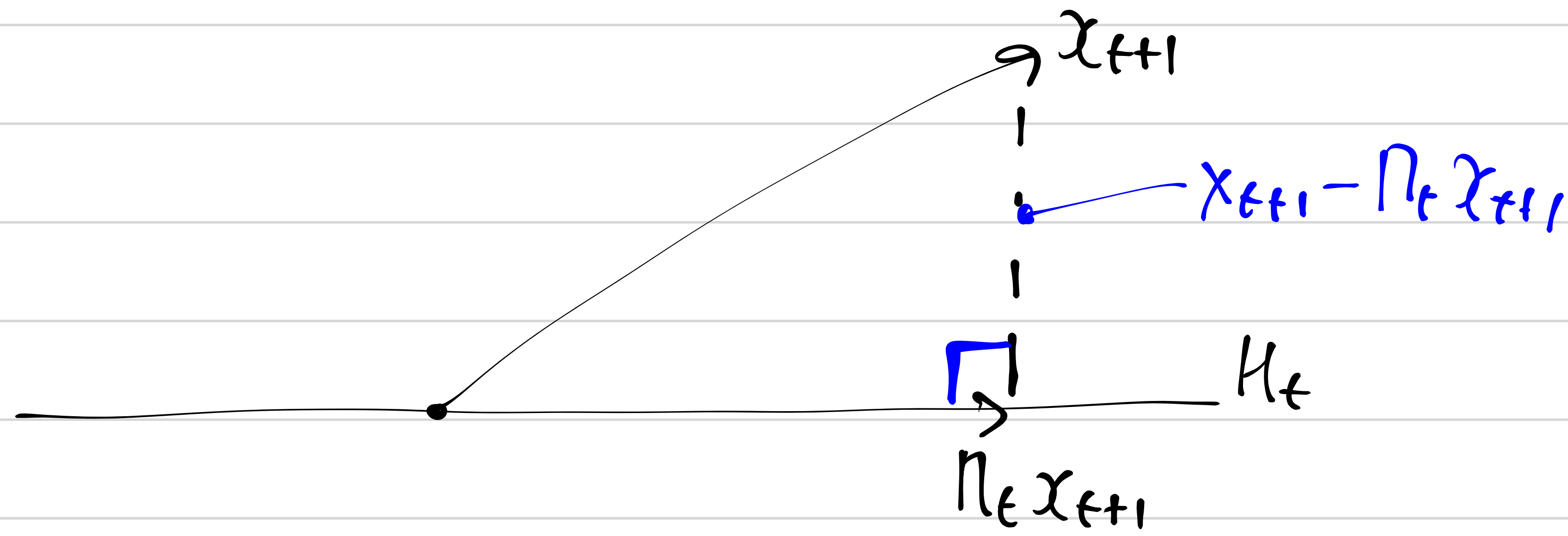
$= G x_{t+1} - G \cdot \Pi_t x_{t+1} + w_{t+1} = G \cdot (x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) + w_{t+1}$

Лемма !!

Q1. $\mathrm{Var}(x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) = ?$

Q2. $\mathrm{Cov}(x_{t+1}, x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) = ?$

Ответ: $\mathrm{Var}(x_{t+1}) - \mathrm{Var}(\Pi_t x_{t+1})$



Доказательство.

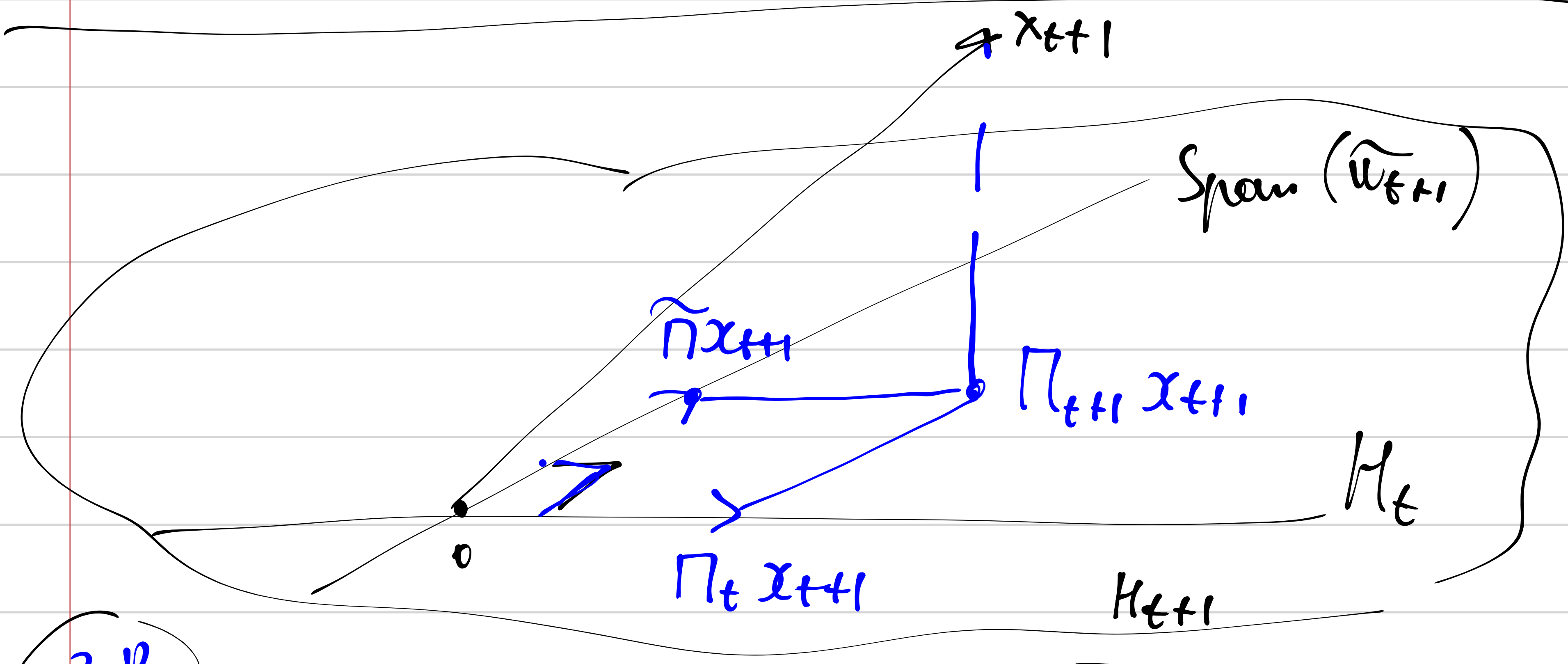
$$\Pi_t x_{t+1} \perp x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}$$

$$\mathrm{Cov}(\Pi_t x_{t+1}, x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) = 0.$$

$$\mathrm{Cov}(x_{t+1}, x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) =$$

$$= \mathrm{Cov}(x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}, x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) =$$

$$= \mathrm{Var}(x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) = \mathrm{Var}(x_{t+1}) - \mathrm{Var}(\Pi_t x_{t+1})$$



2B

$$\Pi_{t+1} x_{t+1} = \underbrace{\Pi_t x_{t+1}}_{\text{есть}} + \tilde{\Pi} x_{t+1}$$

$$\tilde{\Pi} x_{t+1} = \lambda \cdot \tilde{w}_{t+1}$$ λ – какое-то ч-ло.

$$\underbrace{\mathrm{Var}(\Pi_t x_{t+1})}_{\text{знаем}} \xrightarrow{?} \mathrm{Var}(\Pi_{t+1} x_{t+1}) =$$

$$= \mathrm{Var}(\Pi_t x_{t+1}) + \mathrm{Var}(\lambda \cdot \tilde{w}_{t+1}) + 0 + 0 =$$

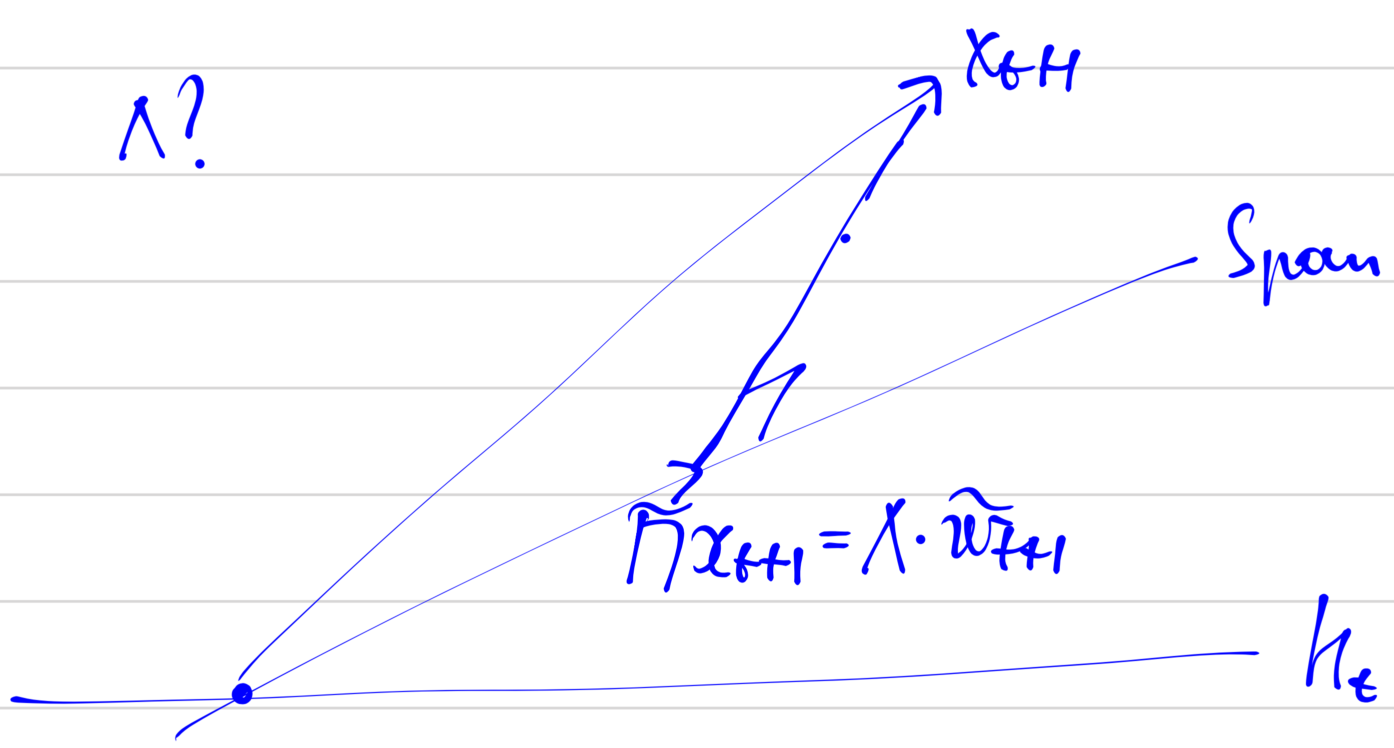
$$\operatorname{Var}(\Pi_{t+1} x_{t+1}) = \operatorname{Var}(\Pi_t x_{t+1}) + \Lambda \cdot \operatorname{Var}(\tilde{w}_{t+1}) \cdot \Lambda^T ;$$

уже нашли: $\tilde{w}_{t+1} = G(x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) + w_{t+1}$

$$\operatorname{Var}(\tilde{w}_{t+1}) = G \cdot \operatorname{Var}(x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) \cdot G^T + \operatorname{Var}(w_{t+1})$$

$$= G\left(\operatorname{Var}(x_{t+1}) - \operatorname{Var}(\Pi_t x_{t+1})\right) G^T + \operatorname{Var}(w_{t+1})$$

(2A) Λ?



$$\operatorname{Cov}(x_{t+1} - \Lambda \cdot \tilde{w}_{t+1}, \tilde{w}_{t+1}) = 0$$

$$\operatorname{Cov}(x_{t+1}, \tilde{w}_{t+1}) = \Lambda \cdot \operatorname{Cov}(\tilde{w}_{t+1}, \tilde{w}_{t+1})$$

$$\Lambda = \operatorname{Cov}(x_{t+1}, \tilde{w}_{t+1}) \cdot \operatorname{Var}^{-1}(\tilde{w}_{t+1})$$

образ $\hat{\beta}$ в МНК $\quad \hat{\beta} = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad (\hat{y}_i = \hat{\beta} \cdot x_i)$

- $\operatorname{Cov}(x_{t+1}, \tilde{w}_{t+1}) = \operatorname{Cov}(x_{t+1}, G(x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1}) + w_{t+1}) =$

$$= \underbrace{\operatorname{Cov}(x_{t+1}, x_{t+1} - \Pi_t x_{t+1})}_{\text{лемма}} \cdot G^T + \underbrace{\operatorname{Cov}(x_{t+1}, w_{t+1})}_{x_{t+1} = F x_t + v_t}$$

$$= \underbrace{\left(\operatorname{Var}(x_{t+1}) - \operatorname{Var}(\Pi_t x_{t+1})\right) \cdot G^T + \operatorname{Cov}(v_{t+1}, w_{t+1})}_{\text{всё знаем}}$$

$$\cdot \operatorname{Var}(\tilde{w}_{t+1}) = \operatorname{Var}\left(G\left(x_{t+1} - \Pi_t X_{t+1}\right) + w_{t+1}\right) =$$

$$= \operatorname{Var}\left(G\left(x_{t+1} - \Pi_t X_{t+1}\right)\right) + \underbrace{\operatorname{Var}(w_{t+1})}_{\text{знаем}} +$$

$$+ \operatorname{Cov}\left(G(x_{t+1} - \Pi_t X_{t+1}), w_{t+1}\right) +$$

$$+ \operatorname{Cov}\left(w_{t+1}, G(x_{t+1} - \Pi_t X_{t+1})\right)$$

отлич-ся транспонированием

лемма.

$$= \underline{G \cdot \left(\operatorname{Var}(x_{t+1}) - \operatorname{Var}(\Pi_t X_{t+1})\right) \cdot G^T + \operatorname{Var}(w_{t+1})} +$$

$$+ C + C^T;$$

$$C = \operatorname{Cov}\left(G \cdot (x_{t+1} - \Pi_t X_{t+1}), w_{t+1}\right) =$$

$$= G \cdot \operatorname{Cov}\left(x_{t+1} - \Pi_t X_{t+1}, w_{t+1}\right) =$$

$$= G \cdot \underbrace{\operatorname{Cov}(v_{t+1}, w_{t+1})}_{\text{знаем.}} \ !!$$

$\to$ $\boxed{F, G, \operatorname{Var}(v_t), \operatorname{Var}(w_t), \operatorname{Cov}(v_t, w_t) \text{ известно для ФК.}}$

$$\ell(y_1 \ldots y_n) = \ln \underbrace{f(y_n | y_{n-1} \ldots y_1)}_{\Pi_{n-1}(y_n)} + \ln \underbrace{f(y_{n-1} | y_{n-2} \ldots y_1)}_{\Pi_{n-2}(y_{n-1})} + \ldots$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}, \operatorname{Var}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

зависит от пар. в ARMA-процесса.

$$f = \text{—} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\mu)^T \cdot \operatorname{Var}^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \cdot (y-\mu)\right)$$

[400 наблюд.] $\to$ $[400 \times 400]^{-1}$

этого уже совсем не считаем