ETS, | w06 | Врем. ряды.

стац: MA, AR, ARMA.

Мат. упр.

$y_t \sim ETS(AAN)$

а) стац-на ли эта модель? нет!!

б) правда ли, что $(y_t) \sim ARMA(p,q)$? нет!!

в) — // — $(\Delta y_t) \sim ARMA(p,q)$? нет!!

[MA(2)] г) — // — $(\Delta^2 y_t) \sim ARMA(p,q)$? да!!

[MA(3)] д) — // — $(\Delta^3 y_t) \sim ARMA(p,q)$? да!!

не стац! ибо ETS(AAN)

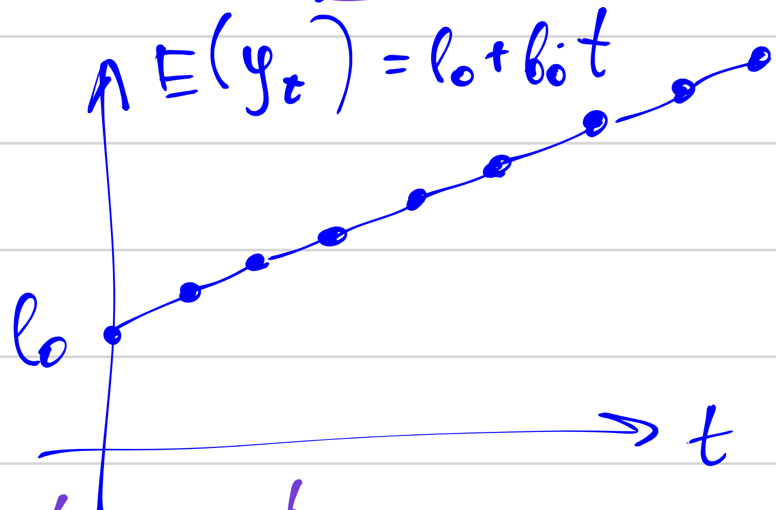
$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ l_t = l_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ незав.} \end{cases}$$

пар-ры: $\alpha, \beta, \sigma^2, b_0, l_0$

$$E(y_1) = E(l_0 + b_0 + \boxed{u_1}) = l_0 + b_0 + 0$$

$$E(y_2) = E(l_1 + b_1 + u_2) = E(l_0 + b_0 + \boxed{\alpha u_1} + b_0 + \boxed{\beta u_1} + \boxed{u_2}) = l_0 + 2b_0$$

$E(y_t) = l_0 + b_0 \cdot t$



$Var(y_1) = \sigma^2$

$Var(y_2) = (\alpha+\beta)^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2$

$E(y_t) \neq const$

$Var(y_t) \neq const$ ETS(AAN)

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ незав.} \end{cases}$$

b_t – текущий наклон линии тренда

$$\ell_t - \ell_{t-1} = b_{t-1} + \alpha u_t$$

$$\Delta \ell_t = b_{t-1} + \alpha u_t$$

$$\Delta b_t = \beta \cdot u_t$$

$$\Delta y_t = \Delta \ell_{t-1} + \Delta b_{t-1} + \Delta u_t =$$

$$= (b_{t-2} + \alpha u_{t-1}) + \Delta b_{t-1} + \Delta u_t =$$

$$= b_{t-2} + \alpha u_{t-1} + \beta \cdot u_{t-1} + \Delta u_t$$

$$\Delta y_t = b_{t-2} + (\alpha + \beta) \cdot u_{t-1} + u_t - u_{t-1}$$

$$\Delta y_t = b_{t-2} + (\alpha + \beta - 1) u_{t-1} + u_t$$

$$b_t = b_{t-1} + \beta u_t = b_{t-2} + \beta u_{t-1} + \beta u_t = \ldots =$$

$$\boxed{b_t = b_0 + \beta(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_t)}$$

$$\boxed{\Delta y_t = b_0 + \beta(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{t-2}) + (\alpha + \beta - 1) u_{t-1} + u_t}$$

$E(\Delta y_t) = b_0 + 0 = \text{const}$ $\quad E(u_t) = 0$ т.к. (u_t) – б. шум

$$Var(\Delta y_t) = 0 + \beta^2 \cdot (t-2) \cdot \sigma^2 + (\alpha + \beta - 1)^2 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 \neq \text{const}.$$

(Δy_t) – не стац.

$(\Delta y_t) \sim \cancel{ARMA(p,q)}$

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = b_0 - b_0 + \beta u_{t-2} + (\alpha + \beta - 1) \Delta u_{t-1} + \Delta u_t$$

$$\Delta^2 y_t = (\beta - \alpha - \beta + 1) \cdot u_{t-2} + (\alpha + \beta - 1 - 1) u_{t-1} + u_t$$

$$\Delta^2 y_t = \underbrace{(1-\alpha)\, u_{t-2} + (\alpha+\beta-2)\, u_{t-1} + u_t}_{}$$

MA(2) стац. всег.

Утв: Если $(y_t) \sim ETS(AAN)$, то
$$\Delta^2 y_t \sim MA(2)$$

$$\Delta^3 y_t = (1-\alpha)\cdot \Delta u_{t-2} + (\alpha+\beta-2)\,\Delta u_{t-1} + \Delta u_t$$

$$\Delta^3(y_t) = (1-\alpha)\cdot u_{t-3} + (1-\alpha-\alpha-\beta+2)\, u_{t-2} + (\alpha+\beta-2-1)\, u_{t-1} + u_t$$

$\Delta^3(y_t) \sim MA(3)$. [с каким-то доп. ограничением на коэффиц-ты]

$(y_t) \sim \cancel{ARMA(p,q)}$ $\qquad \Delta^2 y_t \sim ARMA(0,2)$

integrated

Опр. $(y_t) \sim ARIMA(p,d,q)$ процесс, если

difference

(y_t) – не стац

(Δy_t) – не стац.

$(\Delta^2 y_t)$ – не стац

⋮

$(\Delta^{d-1} y_t)$ – не стац

$\Delta^d y_t \sim ARMA(p,q)$

Утв. процесс ETS(AAN) явл-ся ARIMA(0,2,2) процессом

$y_t \sim ARIMA(5,1,3)$
$$\begin{cases} y_t \text{ не стац.} \\ (\Delta y_t) \sim ARMA(5,3) \text{ стац.} \end{cases}$$

Опр [вар] $(y_t) \sim ARIMA(p,d,q)$ отн-но (u_t) процесс, если.

$(y_t), (\Delta y_t), \ldots \underline{(\Delta^{d-1} y_t)}$ – не стац-ны

① $\Delta^d y_t \sim MA(\infty)$ отн-но б. шума (u_t)

② $\underline{P_{AR}(L)} \cdot (1-L)^d \cdot y_t = \underline{P_{MA}(L)} \cdot u_t$

$\Delta = 1 - L$

degree $P_{AR} = p$

degree $P_{MA} = q$

$P_{AR}(0) = P_{MA}(0) = 1$

многочлены P_{AR} и P_{MA} несокр-мы.

$\Delta^d y_t = (1-L)^d \cdot y_t$

(!) Нюанс. Разница оценивания

$y_t \sim ETS(AAN)$

$y_t \sim ARIMA(0,2,2)$

Q. Сколько пар-в?

Q. Закон распр-ия какого вектора опис-ет модель?

ETS(AAN)

$$\begin{cases} y_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + b_{t-1} + \alpha u_t \\ b_t = b_{t-1} + \beta u_t \\ u_t \sim N(0; \sigma^2) \text{ незав.} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \ell_0 + b_0 \\ \ell_0 + 2b_0 \end{pmatrix}; C \right)$$

$y_1 \sim N(\ell_0 + b_0, \sigma^2)$

$$C = \begin{pmatrix} Var(y_1) & Cov(y_1, y_2) \\ Cov(y_1, y_2) & Var(y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & (\alpha+\beta)\cdot\sigma^2 \\ (\alpha+\beta)\cdot\sigma^2 & \sigma^2((\alpha+\beta)^2+1) \end{pmatrix}$$

$$Cov(y_1, y_2) = Cov(u_1, u_2 + (\alpha+\beta)u_1) = (\alpha+\beta)\cdot\sigma^2$$

ETS(AAN):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \sim N\left(\mu;\ C\right)$$

$$\mu = \begin{pmatrix} l_0+b_0 \\ l_0+2b_0 \\ \vdots \\ l_0+Tb_0 \end{pmatrix} \qquad C = \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta & \cdots & \\ \alpha+\beta & (\alpha+\beta)^2+1 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$\theta = (l_0, b_0, \alpha, \beta, \sigma^2)$$

$$\boxed{\max_{\theta} \ln f(y \mid \theta)}$$

f – совм. плотность y.

пар-в: $\boxed{5 \text{ шт.}}$

$$\boxed{y_t \sim ARIMA(0,2,2)} \qquad \Delta^2 y_t \sim MA(2)$$

$$(u_t) \sim N(0; \sigma^2)$$

$$\Delta^2 y_t = u_t + (1-\alpha)u_{t-1} + (\alpha+\beta-2)u_{t-2}$$

$$E(\Delta^2 y_t) = 0$$

$$\gamma_0 = Var(\Delta^2 y_t) = \sigma^2\left(1 + (1-\alpha)^2 + (\alpha+\beta-2)^2\right)$$

$$\gamma_1 = Cov(\Delta^2 y_t, \Delta^2 y_{t-1}) = (1-\alpha)\cdot\sigma^2 + (1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = Cov(\Delta^2 y_t, \Delta^2 y_{t-2}) = (\alpha+\beta-2)\cdot\sigma^2$$

$$\gamma_3 = Cov(\Delta^2 y_t, \Delta^2 y_{t-3}) = 0.$$

$T-2$ сл. вел. $\left\{ \begin{pmatrix} \Delta^2 y_3 \\ \Delta^2 y_4 \\ \vdots \\ \Delta^2 y_T \end{pmatrix} \sim N(0; C) \right.$

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & & & \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & & & \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix} =$$

$y_t \sim ARIMA(0,2,2)$

$\boxed{\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2)}$

нет ℓ_0, b_0 !!

$\Delta^2 y_t = u_t + \alpha_1 \cdot u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2}$

или:

$\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \sigma^2)$

$$\max_{\theta} \ln f(y_3, y_4, y_5, y_6 \ldots y_T \mid y_1, y_2, \theta)$$

ETS(AAN) (и другие ETS)
описывает совм. вер закон расп-ия
вектора $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$

при оцен-ии максим-ся
совм. плотность $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix}$
по θ.

ARIMA(0,2,2) (и другие ARIMA(p,d,q) с $d>0$)
опис-т совм-вер закон расп-ия
вектора $\begin{pmatrix} \Delta^d y_{d+1} \\ \Delta^d y_{d+2} \\ \Delta^d y_T \end{pmatrix}$

при оцен.-ии максимиз-ся
[экв-но] → совм плотность $\begin{pmatrix} \Delta^d y_{d+1} \\ \vdots \\ \Delta^d y_T \end{pmatrix}$
→ усл. плотность.
$f(y_{d+1}, y_{d+2}, \ldots y_T \mid y_1 \ldots y_d, \theta)$.

! информ-ые критерии (AIC/BIC/...)
можно исп-ть для сравнения моделей,
задающих совм-ую ф-цию плотности
одного и того же вектора.

Упр. Можно ли с помощью AIC выбрать между моделями?

да а) ETS(AAA) vs ARMA(1,1) vs MA(2)

да б) AR(2) vs AR(3) vs MA(4)

нет в) ARMA(2,2) vs ARIMA(1,1,1)

нет г) ETS(AAN) vs ARIMA(2,2,2)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_T \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta^2 y_3 \\ \vdots \\ \Delta^2 y_T \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_T \end{pmatrix}$$

$$AIC = 2 \cdot p - 2 \ln L$$

p - число всех (св-х) пар-в в модели

Как моделировать сезонность с помощью ARIMA моделей?

$\boxed{\text{Идея 1}}$ $y_t \xrightarrow{STL} (trend_t + seas_t + rem_t)$

- $trend_t$ – ARIMA(p, d, q)
- прогноз сезонности: наивный
  $\widehat{seas}_{T+h} = seas_{T+h-12}$ $\boxed{h \in (1, ..12)}$
- прогноз остатка: нулевой
  $\widehat{rem}_{T+h} = 0$

$$\hat{y}_{T+h} = \widehat{trend}_{T+h} + \widehat{seas}_{T+h} + 0$$

(по ARIMA)

+ это работает
– без предскаэ. инт-в.

Идея 2 Больше лаговых полиномов!

опр. SARIMA $(p, d, q)(P, D, Q)[12]$:

$\Delta = 1 - L \qquad \Delta_s = 1 - L^{12} \qquad \Delta_s y_t = y_t - y_{t-12}$

(1) $P_{AR}(L) \cdot P_{SAR}(L^{12}) \cdot \Delta^d \cdot \Delta_s^D \cdot y_t = P_{MA}(L) \cdot P_{SMA}(L^{12}) \cdot u_t$

где (u_t) - б. шум

многочлен	P_{AR}	P_{MA}	P_{SAR}	P_{SMA}
степень	p	q	P	Q

мелкий шрифт

$P_{AR}(L) \cdot P_{SAR}(L^{12})$ не сокр с $P_{MA}(L) \cdot P_{SMA}(L^{12})$

$P_{AR}(0) = P_{SAR}(0) = P_{SMA}(0) = P_{MA}(0) = 1$

(2) d и D в ур-ии (1) наим меньшие возм-ое

ч.!!