МА-процессы

def белый шум / white noise

$(u_t)_{t=-\infty}^{\infty}$ ~ б. шум

если: $E(u_t)=0$, $Var(u_t)=\sigma^2$, $Cov(u_t, u_s)=0$ при $t \neq s$.

кирпичик.

(!) u_t и u_s у б. шума могут хорошо зависеть. GARCH(2,3) — частн. случай б. шума всё время.

опр. $(y_t) \sim MA(q)$ moving average

$$y_t = \mu + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_2 u_{t-2} + \ldots + \alpha_q u_{t-q},$$

$\alpha_q \neq 0$.

где (u_t) — б. шум.

линейная комбинация белых шумов.

Кер. утв — „Большое кол-во" процессов могут быть приближены некими MA(q)

$Lx_t = x_{t-1}$ $L^2 x_t = x_{t-2}$

L - линейный оператор на множестве случайных процессов $(x_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$

опр. Процесс $(x_t)_{t=-\infty}^{t=\infty}$ наз-ся стационарным (в широком смысле) если:

$$\begin{cases} ① \; E(x_t) = \mu & \forall t \\ ② \; Cov(x_t, x_s) = \gamma_{t-s} \end{cases}$$

Например, ② : $Cov(x_5, x_7) = Cov(x_{100}, x_{102})$

2 дня 2 дня

$Cov(x_9, x_3) = Cov(x_{1000}, x_{1006})$

6 мес 6 мес.

$Var(x_t) = Cov(x_t, x_t) = \gamma_0$

0 дней

Ув.: $MA(q) \subseteq$ стац-х процессов

док-во (примере)

$$\boxed{y_t = 2 + \boxed{u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}}, \quad (u_t) - б. шум}$$

① $E(y_t) = E(2 + u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}) =$
$= 2 + 0 + 0 + 0 = 2$ ✓

②

$Cov(y_t, y_t) = Var(y_t) = Var(u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}) =$
$= \sigma_u^2 + 4\sigma_u^2 + 9\sigma_u^2 = 14\sigma_u^2 = \gamma_0$ (от t не зависит)

$Cov(y_t, y_{t-1}) = Cov(u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}, u_{t-1} + 2u_{t-2} + 3u_{t-3})$
$= 2 \cdot Cov(u_{t-1}, u_{t-1}) + 6\, Cov(u_{t-2}, u_{t-2}) = 2\sigma_u^2 + 6\sigma_u^2 =$
$= 8\sigma_u^2 = \gamma_1$

$$\gamma_2 = Cov(y_t, y_{t-2}) = Cov(u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2},\ u_{t-2} + 2u_{t-3} + 3u_{t-4})$$

$$= 3 \cdot Cov(u_{t-2}, u_{t-2}) = 3 \cdot \sigma_u^2 = \gamma_2$$ [не зав-т от t]

$$\gamma_3 = Cov(y_t, y_{t-3}) = Cov(u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2},\ u_{t-3} + 2u_{t-4} + 3u_{t-5}) = 0$$

$$\gamma_4 = Cov(y_t, y_{t-4}) = 0$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\gamma_0 = 14\sigma_u^2 \quad \gamma_1 = 8\sigma_u^2 \quad \gamma_2 = 3\sigma_u^2 \quad \gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0}$$

не зависят от t

Опр. для стационарного процесса (y_t) функция $\gamma_k = Cov(y_t, y_{t-k})$ наз-ся автоковариационной функцией.

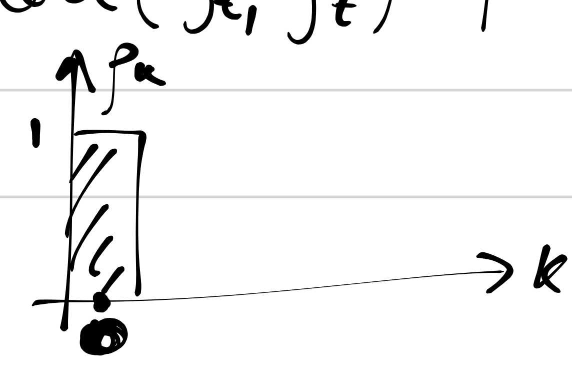
Опр. для стационарного процесса (y_t) функция $\rho_k = Corr(y_t, y_{t-k})$ наз-ся автокорреляционной. [ACF = autocorr. function]

Утверждение: $\rho_k = Corr(y_t, y_{t-k}) = \dfrac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)\,Var(y_{t-k})}} =$

процесс стац-н: $Var(y_t) = \gamma_0$

$$= \frac{\gamma_k}{\sqrt{\gamma_0 \cdot \gamma_0}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\rho_0 = Corr(y_t, y_t) = 1$$



Упр. $y_t = 2 + u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}$ $u_t \sim$ б. шум

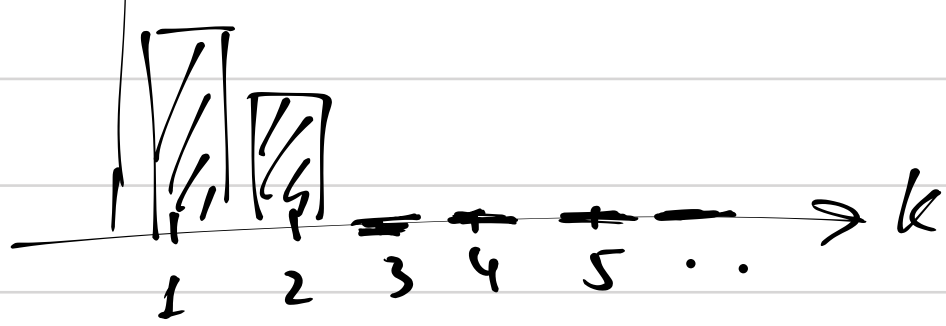
Q. найдите автокорр-ую ф-цию. (ACF.)

A. $\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{8\sigma^2}{14\sigma^2} = \frac{4}{7}$

$\rho_2 = \frac{3\sigma^2}{14\sigma^2} = \frac{3}{14}$

$\rho_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = 0$ $\rho_4 = \rho_5 = \ldots = 0.$

$(y_t) \sim MA(2)$ ρ_k (истинная/теор. ACF)



Утв. Если $(y_t) \sim MA(q)$, то $\rho_{q+1} = \rho_{q+2} = \ldots = 0$

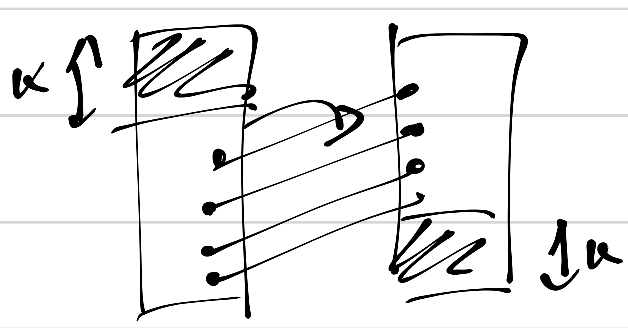
выборочная ACF (например)

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}$$

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} (y_t - \bar{y}) \cdot (y_{t-k} - \bar{y})}{T-k-1}$$

[нюансы м. быть]

с т. зр. теории лучше брать $\bar{y} = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}$



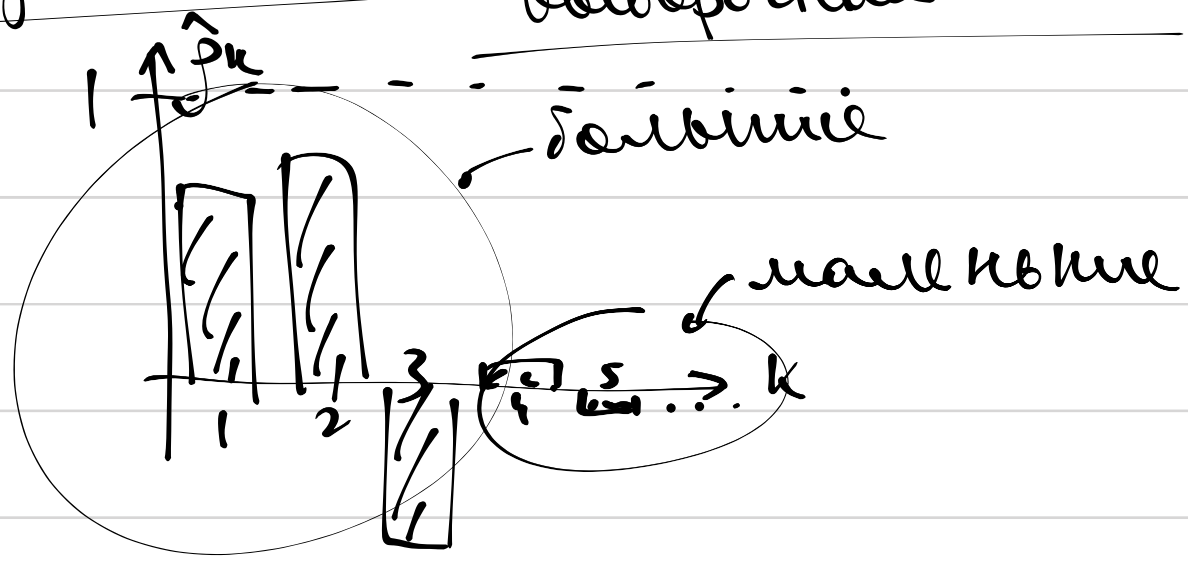
м. быть в практ. реализации

$$\bar{y} = \frac{\sum_{t=k+1}^{T} y_t}{T-k}$$

интуит. идея

выборочная ACF

$(y_t)_{t=1}^{T}$



→ здравый смысл попробовать MA(3)

$$\mathrm{Corr}(R,L)=\frac{\mathrm{Cov}(R,L)}{\sqrt{\mathrm{Var}R\,\mathrm{Var}L}}$$ — корреляция.

partial

$\mathrm{pCorr}(R,L;W)$ — частная корреляция

R и L очищаем от связи с W

$\mathrm{Corr}(R,L|W)$ — условная корреляция

фиксируем источник случ-сти в W.

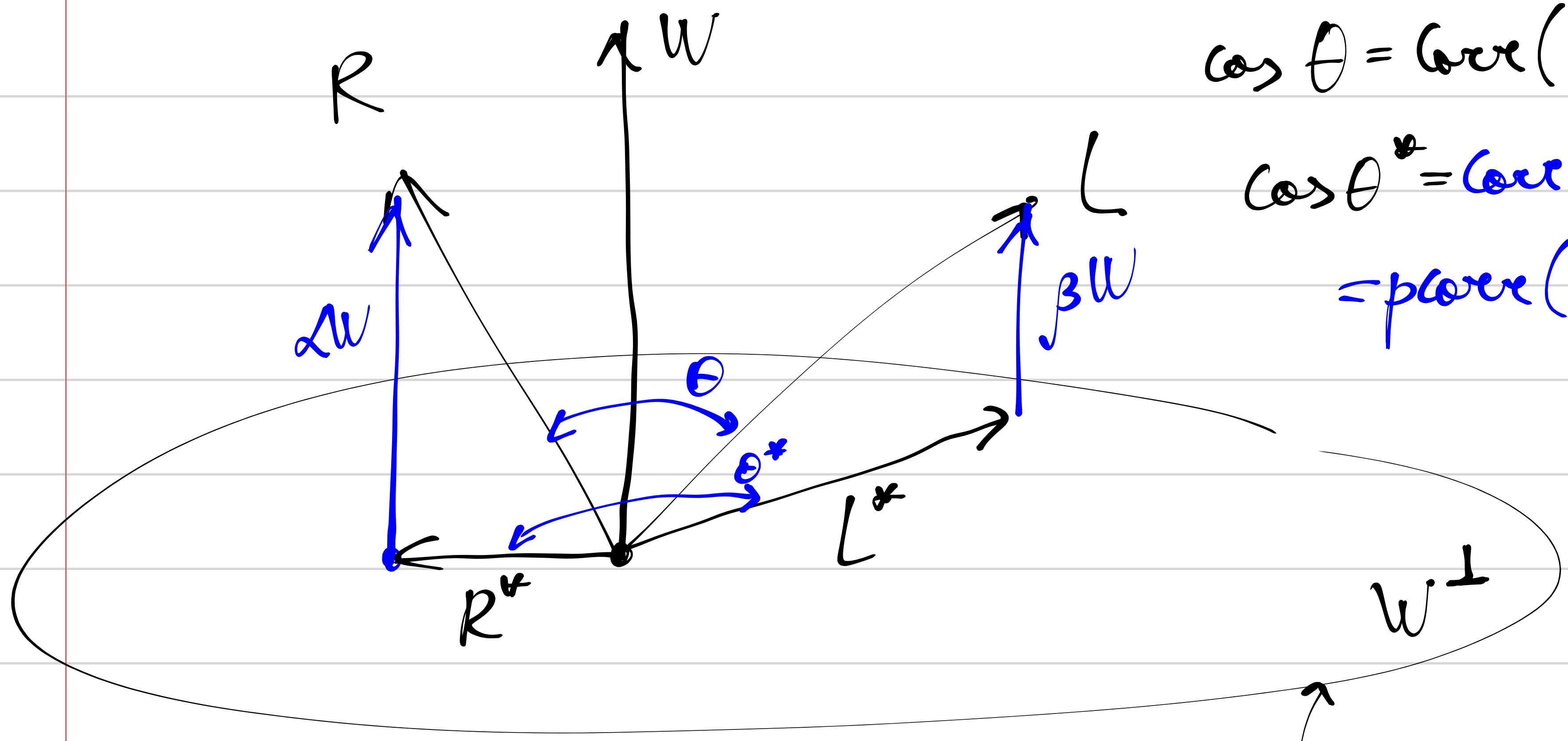
Опр. $$\mathrm{Corr}(R,L|W)=\frac{\mathrm{Cov}(R,L|W)}{\sqrt{\mathrm{Var}(R|W)\mathrm{Var}(L|W)}}$$ ← функция от W и т. образом случ-ая величина

$$\mathrm{Cov}(R,L|W)=E(R\cdot L|W)-E(R|W)\cdot E(L|W)$$
$$\mathrm{Var}(R|W)=E(R^2|W)-(E(R|W))^2$$

Опр $\mathrm{pCorr}(R,L;W)=\mathrm{Corr}(R^*,L^*)$, где ← константа

$R^*=R-\alpha W$ т. что $\mathrm{Cov}(R^*,W)=0$

$L^*=L-\beta W$; т. что $\mathrm{Cov}(L^*,W)=0$.



$\cos\theta = \mathrm{Corr}(R, L)$

$\cos\theta^* = \mathrm{Corr}(R^*, L^*) = \mathrm{pcorr}(R, L; W)$

все такие X, что $\mathrm{Cov}(X, W) = 0$

R^* - проекция R на $W^\perp$

L^* - проекция L на $W^\perp$

Упр. X_1, X_2, X_3 — результаты бросков кубика.

$\mathrm{pcorr}(X_1, X_2; S)$? $\qquad S = X_1 + X_2 + X_3$

$X_1^* = X_1 - \alpha S \qquad \mathrm{Cov}(X_1^*, S) = 0$

$$\mathrm{Cov}(X_1 - \alpha S, S) = 0$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, S) - \alpha\,\mathrm{Cov}(S, S) = 0$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, S)}{\mathrm{Cov}(S, S)} \leftarrow \text{похоже на } \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$

[Лир. отступление!]

[Кр. трюк.]

n	1	.....	100
$P(N=n)$	$\frac{1}{100}$	. . .	$\frac{1}{100}$

$\mathrm{Var}\,N \to E(N^2) - (E(N))^2$

$U[a;b]$

$\mathrm{Var}\,U[a;b] = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$N + U[0;1] = U[1;101]$$

$$\mathrm{Var}\,N + \frac{1}{12} = \frac{(101-1)^2}{12} \qquad \mathrm{Var}\,N = ?$$

$$\alpha = \frac{Cov(X_1, X_1 + X_2 + X_3)}{Var(S)} = \frac{\sigma^2}{3\sigma^2} = \frac{1}{3}$$

$$X_1^* = X_1 - \frac{1}{3} S$$

по симметрии $X_2^* = X_2 - \frac{1}{3} S$

$S = X_1 + X_2 + X_3$

$$pCorr(X_1, X_2; S) = Corr(X_1^*, X_2^*) =$$

$$= \frac{Cov(X_1^*, X_2^*)}{\sqrt{Var X_1^* \; Var X_2^*}} = \frac{Cov(X_1 - \frac{1}{3}S, X_2 - \frac{1}{3}S)}{Var(X_1 - \frac{1}{3}S)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma^2 + \frac{1}{9}\cdot 3\sigma^2}{\sigma^2 + \frac{1}{9}\cdot 3\sigma^2 - \frac{2}{3}\cdot\sigma^2} = \frac{-1/3}{2/3} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{Corr(X_1, X_2) = 0}$ $\quad pCorr(X_1, X_2; S) = -\frac{1}{2}$

интуитивно

X_1, X_2, X_3

$+1 \uparrow$ $\quad X_1 + \underbrace{X_2}_{\downarrow -\frac{1}{2}} + \underbrace{X_3}_{\downarrow -\frac{1}{2}} = S$

Опр. если (y_t) - стационарный процесс, то частной автокорреляционной ф-цией наз-ся (PACF = partial ACF)

$$\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t-k}; y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} \dots y_{t-k+1})$$

$\boxed{\text{Интуитивно:}}$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \qquad \rho_4 = Corr(y_1, y_5)$$

$$y_1 \; y_2 \; y_3 \; y_4 \; y_5$$

$$\varphi_{44} = pCorr(y_1, y_5; y_2, y_3, y_4)$$

$$pCorr(R, L; W_1, W_2, W_3) = Corr(R^*, L^*)$$

$R^* = R - \alpha_1 W_1 - \alpha_2 W_2 - \alpha_3 W_3$ где

$Cov(R^*, W_i) = 0 \quad \forall i$

$L^* = L - \beta_1 W_1 - \beta_2 W_2 - \beta_3 W_3$ где

$Cov(L^*, W_i) = 0 \quad \forall i$

Ув. Теорема Юла-Волкера (Yule-Walker)

Если (y_t) - стац-ый процесс и y_t представлен в виде

$$y_t = \varphi_{k1} \cdot y_{t-1} + \varphi_{k2} y_{t-2} + \ldots + \varphi_{kk} y_{t-k} + \nu_t$$

и $Cov(\nu_t, y_{t-1}) = Cov(\nu_t, y_{t-2}) = \ldots = Cov(\nu_t, y_{t-k}) = 0$

То:

$$\varphi_{kk} = pCorr(y_t, y_{t-k}; y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{t-k+1})$$

Упр $y_t = 2 + u_t + 2u_{t-1} + 3u_{t-2}$ $u_t \sim$ б шум

$\varphi_{22} = pCorr(y_t, y_{t-2}; y_{t-1})$?

способ 1

$y_t^* = y_t - \alpha y_{t-1}$

$y_{t-2}^* = y_{t-2} - \alpha y_{t-1}$

$\vdots$

$\varphi_{22} = Corr(y_t^*, y_{t-2}^*)$

способ 2. (Y-W)

$y_t = \varphi_{21} \cdot y_{t-1} + \boxed{\varphi_{22}} y_{t-2} + v_t$

$Cov(y_{t-1}, LHS) = Cov(y_{t-1}, RHS)$

$\gamma_1 = \varphi_{21} \cdot \gamma_0 + \varphi_{22} \cdot \gamma_1 + 0$

$Cov(y_{t-2}, LHS) = Cov(y_{t-2}, RHS)$

$\gamma_2 = \varphi_{21} \cdot \gamma_1 + \varphi_{22} \cdot \gamma_0 + 0$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \varphi_{21}\gamma_0 + \varphi_{22}\gamma_1 \\ \gamma_2 = \varphi_{21}\gamma_1 + \varphi_{22}\gamma_0 \end{cases}$$

$$\varphi_{22} = \frac{\det\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix}} = \dots$$

Упр

$W=0$

	$L=0$	$L=1$
$R=0$	$1/4$	0
$R=1$	0	$1/4$

$W=1$

	$L=0$	$L=1$
$R=0$	$1/8$	$1/8$
$R=1$	$1/8$	$1/8$

если $W=0$, то $R=L$
если $W=1$ то R и L нез.

$$\operatorname{Corr}(R, L \mid W) = \begin{cases} 1, & \text{если } W=0 \\ 0, & \text{если } W=1 \end{cases}$$

$$\operatorname{Corr}(R, L / W) = 1 - W \quad \leftarrow \text{ф-ция от } W.$$

$$\operatorname{pCorr}(R, L; W) = \text{число} = \operatorname{Corr}(R^*, L^*)$$