Копулы

Опр. Ф-ция $C: [0,1]^d \to [0,1]$ — копула, если:

1) $C(u_1, \dots, u_d)$ — возр. по u_i, $i \in \{1 \dots d\}$

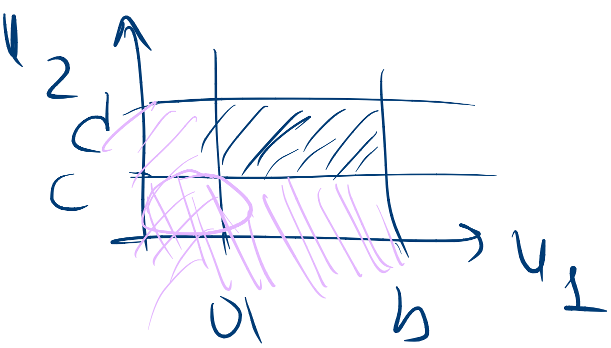
2) $C(u_1, \dots, u_{k-1}, 0, u_{k+1}, \dots, u_d) = 0$ для всех $u_i \in [0,1]$, $i \neq k$, $k \in \{1, \dots, d\}$

3) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ для всех $u_i \in [0,1]$, $i \in \{1 \dots d\}$

4) Для всех $(a_1 \dots a_d), (b_1 \dots b_d) \in [0,1]^d$: $a_i \le b_i$

$$\sum_{i_1=1}^{2} \dots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(X_{1 i_1}, \dots, X_{d i_d}) \geq 0$$

$X_{j1} = a_j$ и $X_{j2} = b_j$, $j \in \{1 \dots d\}$



C – ф-ция распр. $(U_1 \ldots U_d)$,

$U_i \sim \mathcal{U}(0,1)$

$\boxed{1}$ $C(u_1, u_2) = u_1 \cdot u_2, \quad u_1, u_2 \subset [0,1]$

$\boxed{2}$ $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$

$U_2 = 1 - U_1$

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2) =$$

$$= \mathbb{P}(U_1 \le u_1, 1 - U_1 \le u_2) =$$

$$= \mathbb{P}(U_1 \le u_1, U_1 \ge 1 - u_2) =$$

$$= \mathbb{P}(1 - u_2 \le U_1 \le u_1) = \left|u_1 - (1 - u_2)\right| \cdot \mathbb{I}\{u_1 \ge 1 - u_2\} =$$

$$= \max(u_1 + u_2 - 1, 0)$$

$\boxed{3}$ $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$

$U_2 = U_1$

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}(U_1 \le u_1, U_2 \le u_2) =$$

$$= \mathbb{P}(U_1 \le u_1, U_1 \le u_2) = \min(u_1, u_2)$$

Т1. X - абс. непр. с.в., F - ее ф.р.

$F(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$

Док-во: $\mathbb{P}(F(X) \le t) = \mathbb{P}(F^{-1}(F(X)) \le$
$\le F^{-1}(t)) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}(t)) =$
$= F(F^{-1}(t)) = t, \quad t \in [0,1)$ ☒

$F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \ge t\}$ - квант. ф-ция

Т2. X - абс. нпр. с.в., F - ее ф.р.
$U \sim \mathcal{U}[0,1]$. Тогда $X \overset{d}{=} F^{-1}(U)$

Док-во: в силу Т.1, $F(X) \overset{d}{=} U$. Тогда

$$F^{-1}(F(X)) \overset{d}{=} F^{-1}(U),$$

$$X \overset{d}{=} F^{-1}(U)$$

☒

Пример: $U \sim \mathcal{U}[0,1)$,

$X: F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \ \lambda > 0$

$$y = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)$$

$$X \stackrel{d}{=} -\frac{1}{\lambda}\log(1-U)$$

$(X_1 \ldots X_d)$, $X_i \sim F_i$,

$i \in \{1 \ldots d\}$

$$(F_1(X_1), \ldots, F_d(X_d)) \stackrel{d}{=}$$

$$\stackrel{d}{=} (U_1 \ldots U_d)$$

$$C(u_1 \ldots u_d) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \ldots, U_d \leq u_d)$$

$$= \mathbb{P}(F_1(X_1) \le u_1, \dots, F_d(X_d) \le u_d)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \le F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \le F_d^{-1}(u_d))$$

<u>Тз [Sklar, 1959]</u>

Для любого совместного распр. $(X_1 \dots X_d)$ с марг. распр. F_i, $i \in \{1 \dots d\}$ существует копула C:

$$\mathbb{P}(X_1 \le x_1 \dots X_d \le x_d) = C(F_1(x_1) \dots F_d(x_d))$$

Если $X_1 \dots X_d$ – абс. непр. с.в., то C единственна:

$$C(u_1 \dots u_d) = \mathbb{P}(X_1 \le F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \le F_d^{-1}(u_d))$$

<u>Док-во:</u> $U_i \overset{d}{=} F_i(X_i) \Rightarrow X_i \overset{d}{=} F_i^{-1}(U_i)$

Тогда: $\mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_d \le x_d) =$

$$= \mathbb{P}(U_1 \le F_1(x_1), \dots, U_d \le F_d(x_d))$$

$$= C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

$$F_i(F_i^{-1}(u_i)) = u_i :$$

$$C(u_1 \dots u_d) = C(F_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots$$

$$\dots F_d(F_d^{-1}(u_d))) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \le F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \le F_d^{-1}(u_d))$$

Семейства: $\exists$ эллиптические

и

архимедовы

1) $C_{Gauss}(u_1 \ldots u_d) =$

$$= \Phi_{\Sigma}\left(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_d)\right)$$

2) $C(u_1 \ldots u_d) = \psi^{[-1]}\left(\psi(u_1; \theta) + \ldots + \psi(u_d; \theta); \theta\right)$

$\psi : [0, 1] \times \Theta \to [0, \infty)$, непр, строго убыв, выпукла,

$\psi(1, \theta) = 0.$

$$\psi^{[-1]}(t, \theta) = \begin{cases} \psi^{-1}(t, \theta), & t \in [0, \psi(0, \theta)] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$C_{FRANK}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\psi(t) = -\log\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$$

[Marshal, Olkin, 1988]

0. Выбрали C

$\boxed{1.}$ $C \Rightarrow (u_1 \dots u_d)$

2. $F_1 \dots F_d \Rightarrow F_1^{-1} \dots F_d^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{F_1^{-1}(u_1)} \dots \underline{F_d^{-1}(u_d)} \Rightarrow$

$\Rightarrow X_1 \dots X_d$

Пример Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)

$$C_{FGM}(u_1, u_2) = u_1 u_2 (1 + \theta (u_1 - 1)(u_2 - 1)), \quad \theta \in [-1, 1]$$

$$corr(U_1, U_2) = \frac{\mathbb{E}[U_1 \cdot U_2] - \underset{1/2}{\mathbb{E}[U_1]} \, \underset{1/2}{\mathbb{E}[U_2]}}{\sqrt{\underset{\frac{1}{12}}{Var(U_1)} \cdot \underset{\frac{1}{12}}{Var(U_2)}}} =$$

$$=$$

$$c_{FGM}(u_1, u_2) = 1 + \theta (2u_1 - 1)(2u_2 - 1)$$

$$\mathbb{E}[U_1 \cdot U_2] = \int_0^1 \int_0^1 u_1 \cdot u_2 \cdot c_{FGM}(u_1, u_2) \, du_1 \, du_2$$

$$= \frac{9 + \theta}{36}$$

$$corr(U_1, U_2) = \frac{\frac{9+\theta}{36} - \frac{1}{4}}{1/12} = \frac{1}{3}\theta = corr(X_1, X_2)$$

$\theta \in [-1, 1] \Rightarrow corr(u_1, u_2) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$