

1. Василиса Прекрасная подбрасывает игральный кубик и записывает результат броска как  $y_1$ . Далее при  $t \geq 2$  она считает  $y_t$  по формуле  $y_t = y_{t-1} + 1$ . Величину  $x_t$  Василиса определяет как остаток от деления  $y_t$  на три.

- а) Является ли процесс  $(x_t)$  стационарным?
- б) Постройте график теоретической автокорреляционной функции этого процесса.

2. Полугодовые наблюдения  $(y_t)$  описываются  $ETS(ANA)$  моделью

$$\begin{cases} u_t \sim \mathcal{N}(0; 4) \\ s_t = s_{t-2} + 0.1u_t \\ \ell_t = \ell_{t-1} + 0.3u_t \\ y_t = \ell_{t-1} + s_{t-2} + u_t \end{cases}$$

Постройте 95% предиктивный интервал для  $y_{102}$ , если  $s_{100} = 3$ ,  $s_{99} = -2$ ,  $\ell_{100} = 100$ .

3. У стационарного процесса  $(y_t)$  с математическим ожиданием 100 автокорреляционная функция равна  $\rho_k = 0.1^k$ .

- а) Найдите первые две частные автокорреляции,  $\phi_{11}$  и  $\phi_{22}$ .
- б) Запишите возможное разностное уравнение для данного процесса.

4. Рассмотрим разностное уравнение  $y_t - 0.7y_{t-1} + 0.1y_{t-2} = u_t - 0.5u_{t-1}$ , где величины  $u_t$  независимы и нормально распределены  $\mathcal{N}(0; 1)$ .

- а) Сколько нестационарных и стационарных решений имеет это уравнение?
- б) Запишите *более простое* разностное уравнение с тем же множеством стационарных решений.

5. Часто говорят, что у рекуррентного уравнения  $y_t = y_{t-1} + u_t$  не может быть стационарного решения  $(y_t)$ , если последовательность  $(u_t)$  — белый шум. Из этого утверждения есть одно маленькое и (подсказка!) *очень простое* исключение.

Приведите явный пример последовательности  $(u_t)$  одинаково распределённых и независимых величин таких, что упомянутое уравнение будет иметь бесконечное количество стационарных решений.

6. Иван Дурак раздобыл длинный временной ряд и оценил параметры уравнения  $y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + u_t$  двумя способами. Во-первых, с помощью метода наименьших квадратов,  $\hat{\beta}_1 = 0.3$ ,  $\hat{\beta}_2 = 1.05$ . Во-вторых, с помощью метода максимального правдоподобия,  $\hat{\beta}_1 = 362$ ,  $\hat{\beta}_2 = 0.999$ , предполагая стационарную  $AR(1)$  модель, представимую в виде  $MA(\infty)$ .

Затем Иван переставил наблюдения в обратном порядке и повторно оценил параметры двумя способами.

- а) Какие примерно результаты дал метод наименьших квадратов?
- б) Какие примерно результаты дал метод максимального правдоподобия?