Теорема Вольда.

проблема ! она оч. часто формул. неверно!

„deterministic" → ~~неслучайный~~ → предсказуемый

deterministic

Опр. d_t – линейно предсказуемый процесс

$$\boxed{d_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot d_{t-1} + \alpha_2 \cdot d_{t-2} + \dots}$$

инт: если знаем $d_{t-1}, d_{t-2}, \dots$ то идеально точно знаем d_t.

Пример.

подбр. два кубика X_1, X_2

$$\boxed{y_t = \begin{cases} X_1 & t \text{ нечет.} \\ X_2 & t \text{ чет.} \end{cases}}$$

$$E(y_5) = E(X_1) = \frac{1+6}{2} = 3.5$$

$$Var(y_5) = Var(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \dots > 0$$

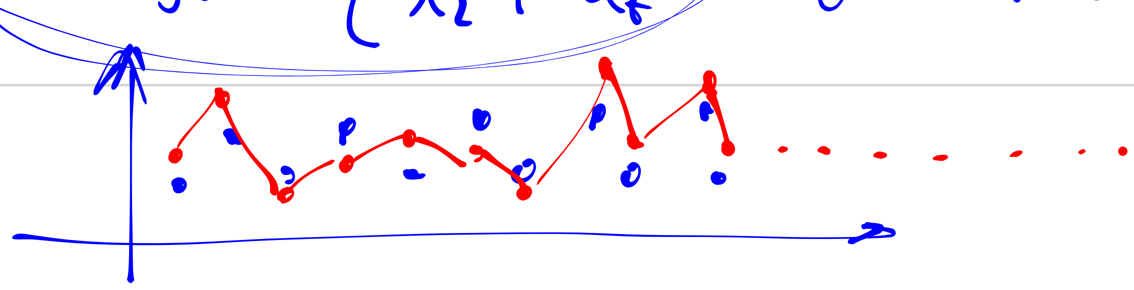
X_1, X_2 .... 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2 | ? 4, 2, 4, 2 .... идеал. прогн

Пример2

$$y_t = 1 \cdot y_{t-2}$$

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} x_1 + u_t & t - \text{нечет.} \\ x_2 + u_t & t - \text{чет.} \end{cases}$$

$u_t \sim$ б.шум (не зав. от X_1, X_2)



по длинному ряду $\Rightarrow X_1, X_2$ восстан.

Теор. Вольда (Wold decomposition theorem)

Если $(y_t)_{t=-\infty}^{t=+\infty}$ — стац-ый процесс, то его можно разложить в сумму MA(∞) + предсказуемый процесс.

$$y_t = \underbrace{\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \delta_i \cdot u_{t-i}}}_{MA(\infty)} + d_t$$

$\delta_0 = 1$

можно оценивать ARMA!

① $(u_t) \sim$ б. шум $E(u_t) = 0$, $Cov(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$, $Var(u_t) = \sigma_u^2$

② (d_t) — детерминистич. $E(d_t) = \mu$

(d_t) — стац-ый

③ $Cov(u_t, d_s) = 0 \quad \forall t, s.$

практ. идея:

регрессия. (выплачивать предсказ. теоков)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_t + \varepsilon_t$$

(ε_t) — ARMA(p, q)

[Много нестац-х процессов.]

- ETS – модель для нестац-х процессов [под него спец-ую модель]
- можем преобразовать его так, чтобы он стал стац-м., далее использ-ть ARMA-модель.

Все нестац. процессы.

стац-ый в разностях
Difference stationary.

"процесс с детерм. трендом"

стац-ый вокруг Тренда
Trend Stationary.

(y_t) нестац

def: $y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$

$(\varepsilon_t) \sim MA(\infty)$

$\varepsilon_t = u_t + \delta_1 u_{t-1} + \delta_2 u_{t-2} + \dots$

$E(y_t) = \alpha + \beta t$

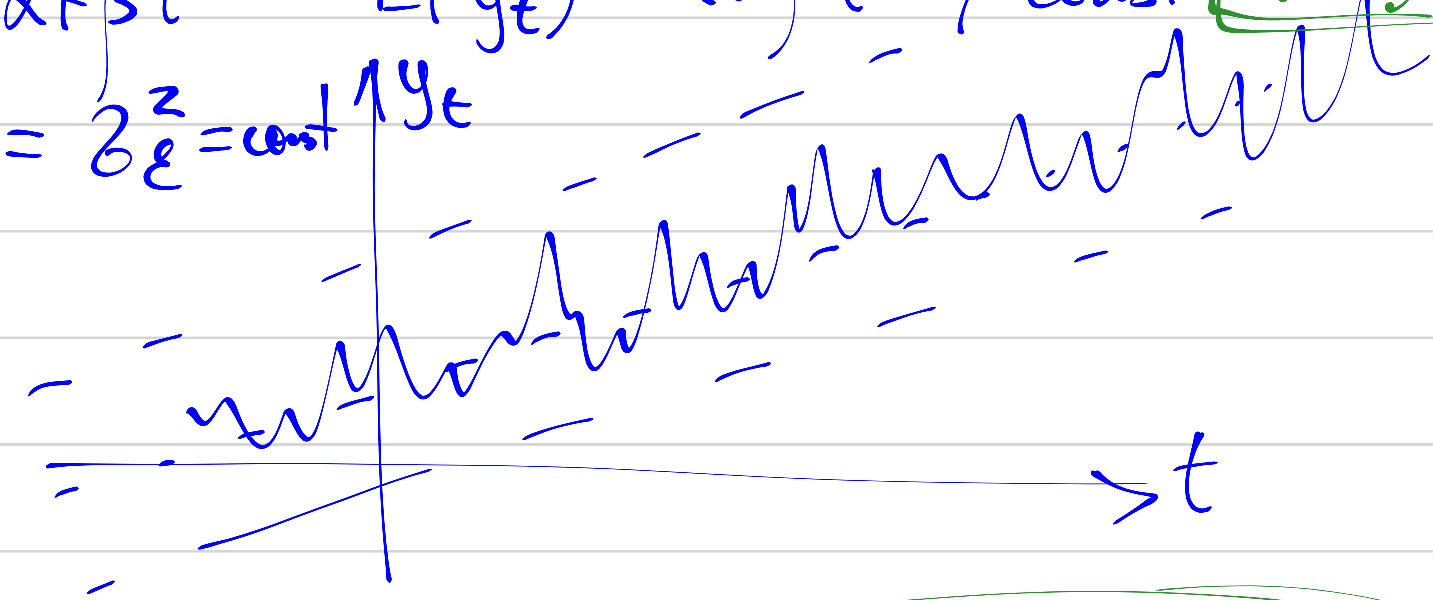
$Var(y_t) = \sigma^2_\varepsilon = const$

$E(y_t) = \alpha + \beta t \neq const$

$z_t = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \varepsilon_t$

$(\varepsilon_t \sim MA(\infty))$

$\Delta^2 z_t$ стац.



как оценивать?

$y_t = \alpha + \beta \cdot t + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim$ стац. $ARMA(p,q)$

→ метод макс. правдоподобия

раньше: Шаг 1. построить регрессию

$\hat{y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot t$

Шаг 2. $r_t = y_t - \hat{y}_t$

оценить для $(r_t) \sim ARMA(p,q)$

Difference stationary.

Опр (y_t) — стац-ый в разностях

если (1) (y_t) не стац-ый!

(2) не имеет вид $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t \sim MA(\infty)$

(3) $\Delta y_t \sim MA(\infty)$

↳ „процесс со стохастич. трендом"

Пример. $x_t = 2 + u_t + u_{t-1}$ ← $MA(1)$

$(u_t) \sim$ W.Noise.

$$y_t = \begin{cases} 0 & t=0 \\ \sum_{k=1}^{t} x_k & t>0 \end{cases}$$

$Var(y_0) = 0$

$Var(y_1) = 2\sigma_u^2$

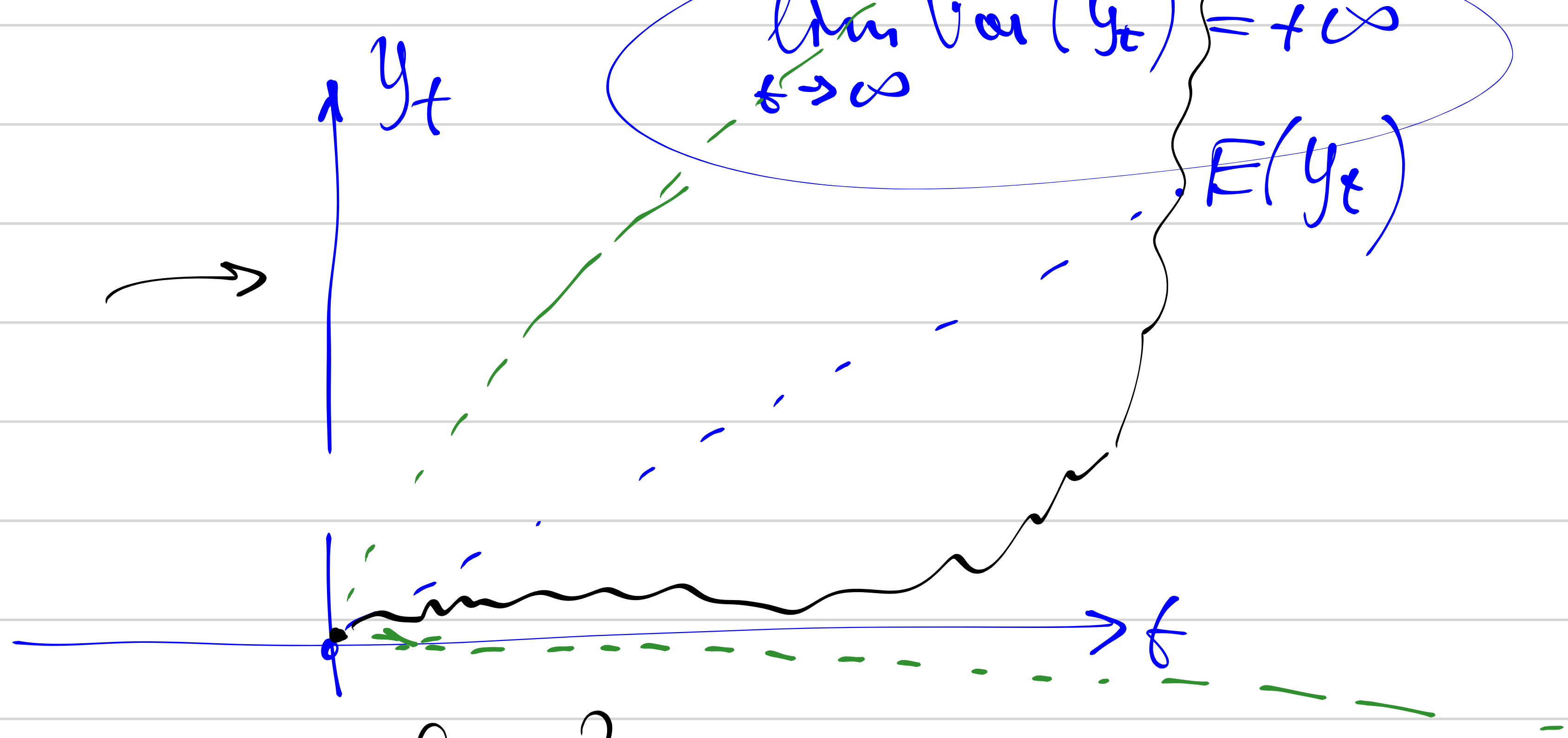
$Var(y_2) = Var(x_1+x_2) =$
$= Var(u_0 + u_1 + u_1 + u_2) = \sigma_u^2 + 4\sigma_u^2 + \sigma_u^2 = 6\sigma_u^2$

$\nexists \alpha, \beta$: $\lim_{t\to\infty} (Var(y_t) - \alpha - \beta t) = 0$?

$E(y_t) = 2 \cdot t$

$Var(y_t) \neq const.$

$\lim_{t\to\infty} Var(y_t) = +\infty$



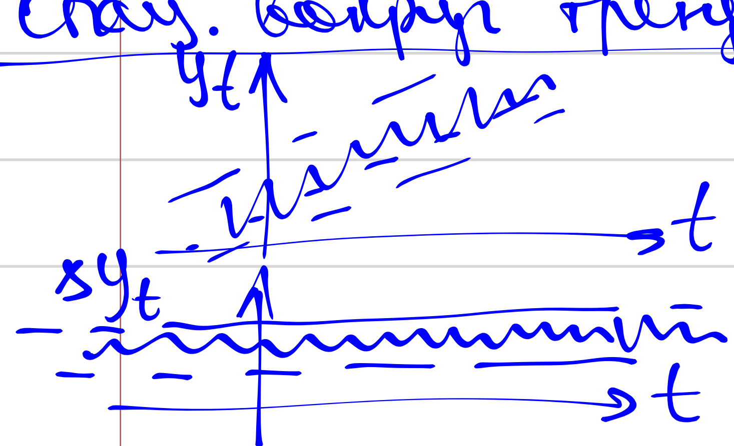
как оценивать?

Шаг 1. $y_t \to \Delta y_t$

Шаг 2. $\Delta y_t \sim ARMA(p,q)$.

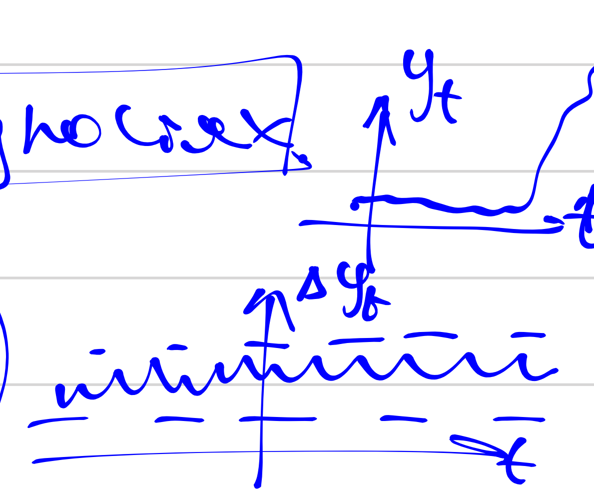
На графике.

стац. вокруг тренда	стац. в разностях



(y_t)

(Δy_t)



Как отличить? [может быть]

- по графику.
- оценить оба варианта и сравнить качество прогнозов.
- алгоритм Хандакара-Хайнмана (Khandakar - Hyndman) ← [след. пар.]

/и подобные ему: DDSR... /

по AIC сравнить нельзя.

$y_t \sim TS$ (trend stationary)

$\ln f(\underbrace{y_1, \ldots, y_T} | \alpha, \beta, \theta)$

θ — пар. ARMA

$y_t \sim DS$ (difference stationary)

$\Delta y_t = x_t \sim ARMA$

$\ln f(\underbrace{x_2, \ldots, x_T} | \theta)$

θ — пар ARMA.

def $(y_t) \sim ARIMA(p,d,q)$ — процесс.

"integrated"

d — порядок интеграции
order of integration

интуиция: чтобы сделать (y_t) стац-м надо d раз перейти к разностям.

формально:

y_t — не стац. [и не стац. вокруг тренда]

$\Delta^1 y_t$ — не стац. [и не стац. вокруг тренда]

⋮

$\Delta^{d-1} y_t$ — не стац. [и не стац. вокруг тренда]

$\Delta^d y_t \sim ARMA(p,q)$

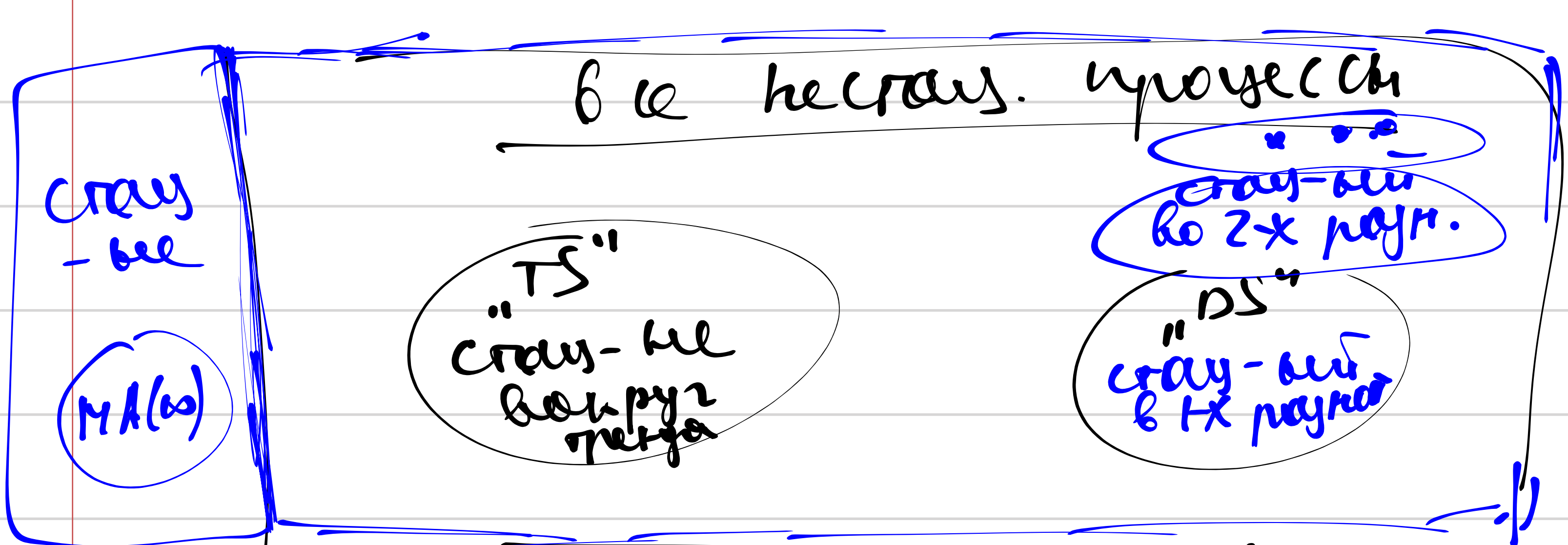
на практике: $d = 0, 1, 2$ разумно.

$y_t \sim ARMA(p,q)$

$\Delta y_t \sim ARMA(p,q)$

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta(y_t - y_{t-1}) = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} \sim ARMA(p,q)$$

Утв. некоторые ETS модели можно записать как $ARIMA(p,2,q)$



$x_t \sim ARMA(p,q)$ $\quad y_t = \sum_{k=1}^{t} x_t$ $\quad z_t = \sum_{k=1}^{t} y_t$ $\quad z_t \sim ARIMA(p,2,q)$

$y_t \sim ARIMA(p,1,q)$

$x_t \sim \boxed{MA(\infty)}$

$$\boxed{x_t = \mu + u_t + \delta_1 u_{t-1} + \delta_2 u_{t-2} + \ldots}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(u_t) - WN \\ \sum \delta_i^2 < \infty\end{array}}$$

идея 1: $x_t = \mu + u_t$

идея 2: шок контент

Утв. можно записать WN хотя $MA(q)$ в виде $MA(\infty)$ где все коэф-ты будут отличны от 0.

Утв. $u_t \sim WN$

$$\overset{WN}{u_t} = \underbrace{\boxed{v_t + \delta_1 v_{t-1} + \delta_2 v_{t-2} + \ldots}}_{MA(\infty)}$$

$\delta_i \neq 0$.

$$u_t = \frac{1+\frac{1}{2}F}{1+\frac{1}{2}L} \cdot v_t = \left(1 + \frac{1}{2}L + \left(\frac{1}{2}L\right)^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^3 + \ldots\right) \cdot \left(v_t + \frac{1}{2}v_{t+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}v_{t+1} + \left(1 + \frac{1}{4}\right)v_t$$

Утв.

$$\boxed{u_t = \frac{1+\frac{1}{2}F}{1+\frac{1}{2}L} \cdot 2v_{t-1}}$$

$(v_t) \sim$ б.шум.

$E(u_t) = 0$

$Cov(u_t, u_s) = 0$ при $t \neq s$

$$u_t = \boxed{v_t + \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot v_{t-1} + (\ldots) v_{t-2} + (\ldots) \cdot v_{t-3} + \ldots}$$

$MA(\infty)$

$MA(\infty)$
- $MA(1)$
- WN
- $MA(2)$
- $AR(3)$
- $ARMA(5,6)$