POLITECHNIKA GDAŃSKA

Clique-Width: Harnessing the Power of Atoms

Narzędzie do rozwiązywania wielu problemów jednocześnie?

Paulina Brzęcka

16 października 2024

Motywacje do badań

Wiele trudnych problemów z grafami można rozwiązać, ograniczając dane wejściowe do jakiejś klasy grafów. Dwa główne pytania brzmią:

- Dla jakich klas grafów problem grafowy jest wykonalny?
- Dla jakich klas grafów jest on trudny obliczeniowo?

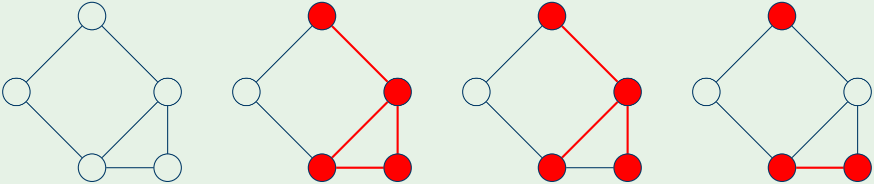
Idealnie byłoby, gdybyśmy chcieli odpowiedzieć na te pytania w odniesieniu do dużego zestawu problemów jednocześnie, zamiast rozważać poszczególne problemy jeden po drugim.
Parametry szerokości grafu pomagają w umożliwieniu takich wyników.
Klasa grafów ma ograniczoną szerokość, jeśli istnieje stała c taka, że szerokość wszystkich jej elementów wynosi co najwyżej c.

Definicje

Podgraf indukowany.

Jest to graf, którego zbiór wierzchołków jest zawarty (jest podzbiorem) w zbiorze wierzchołków grafu G, a zbiór krawędzi składa się ze wszystkich krawędzi grafu G, których końce należą do zbioru wierzchołków podgrafu.

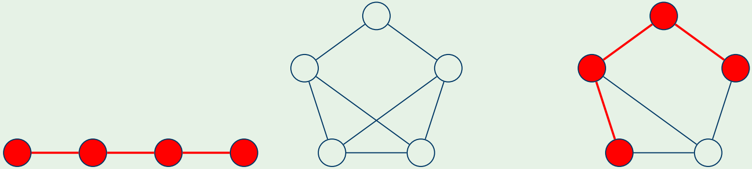
Przykłady



Klasa grafów heredytalnych (dziedzicznych).

Klasa jest dziedziczna wtedy i tylko wtedy, gdy może być scharakteryzowana przez unikalny zbiór H minimalnych, zabronionych podgrafów indukowanych.
Graf G jest H-wolny jeśli G nie ma podgrafu indukowanego, izomorficznego do H.
Graf G jest $(H_1, ..., H_p)$-wolny jeśli G nie ma podgrafów indukowanych, izomorficznych do H_i dla każdego i.

Przykłady



Szerokość kliki.

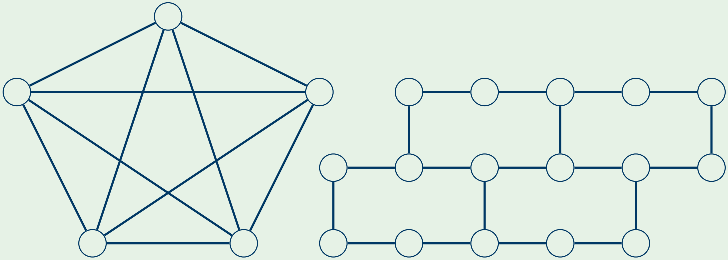
Szerokość kliki grafu G, oznaczona jako cw(G), to minimalna liczba etykiet potrzebnych do skonstruowania G przy użyciu czterech następujących operacji:

- utworzenie nowego grafu składającego się z pojedynczego wierzchołka v z etykietą i;
- przyjęcie sumy rozłącznej dwóch grafów oznaczonych etykietami G_1 i G_2;
- dodanie krawędzi pomiędzy każdym wierzchołkiem o etykiecie i a każdym wierzchołkiem o etykiecie j $(i \neq j)$;
- oznaczenie każdego wierzchołka etykietą i tak, aby miał etykietę j.

Szerokość kliki

Klasa grafów G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli istnieje stała c taka, że $cw(G) \leqslant c$ dla każdego $G \in G$; w przeciwnym razie szerokość kliki G jest nieograniczona.

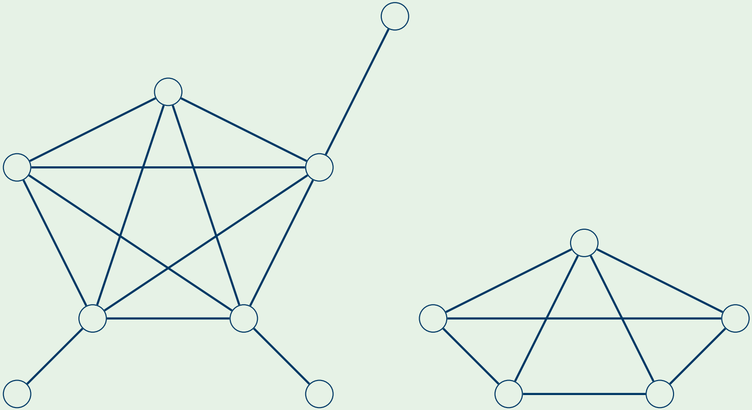
Przykłady



Atom.

Spójny graf, który nie posiada podgrafu rozpinającego będącego kliką.

Przykłady



Dlaczego atomy?

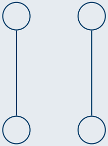
Wiele NP-zupełnych problemów grafowych można rozwiązać w czasie wielomianowym na klasach grafów o ograniczonej szerokości kliki. Część z nich, między innymi:

- Kolorowanie
- Minimalne dopełnienie
- Maksymalna klika
- Maksymalny ważony zbiór niezależny
- Maksymalne indukowane dopasowanie

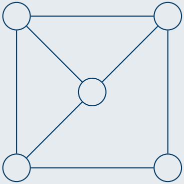
są rozwiązywalne w czasie wielomianowym na grafie dziedzicznym klasy G wtedy i tylko wtedy, gdy ma to miejsce w przypadku atomów G.

Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze że klasa grafów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych ma nieograniczoną szerokość kliki)



$2P_2$



$\overline{P_2 + P_3}$

Z czego będziemy korzystać?

Dla stałej $k \geqslant 0$ i operacji na grafach γ, klasa grafów G' jest *(k, γ)-uzyskana* z klasy grafów G, jeśli:

(i) każdy graf w G' został uzyskany z grafu w G poprzez wykonanie γ co najwyżej k razy, oraz

(ii) dla każdego $G \in G$, istnieje co najmniej jeden graf w G', uzyskany z G poprzez wykonanie γ co najwyżej k razy.

1. Usuwanie wierzchołków zachowuje ograniczoność szerokości kliki.
2. Dopełnienie podgrafu zachowuje ograniczoność szerokości kliki.
3. Dopełnienie grafu dwudzielnego zachowuje ograniczoność szerokości kliki.

Lemat. Grafy łańcuchowe dwudzielne mają szerokość kliki co najwyżej 3.
Lemat. Atomy grafów podzielonych są grafami pełnymi i mają szerokość kliki co najwyżej 2.

Schemat działania

Dowód.

Podejście opiera się na trzech następujących twierdzeniach:

1. $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_5 ma ograniczoną szerokość kliki.
2. $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_4 ma ograniczoną szerokość kliki.
3. $(C_4, C_5, 2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów ma ograniczoną szerokość kliki.

$(C_4, C_5, 2P_2)$-wolne grafy są grafami podzielonymi i na mocy lematu, atomy tej klasy są grafami pełnymi, więc mają szerokość kliki wynoszącą co najwyżej 2.

Schemat działania

Dowód.

1. Dzielimy zbiór wierzchołków dowolnego $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnego atomu G na różne podzbiory w zależności od ich sąsiedztw w indukowanym C_5 lub C_4.
2. Analizujemy właściwości podzbiorów $V(G)$ oraz ich połączenia, a także wykorzystujemy tę wiedzę do zastosowania odpowiednich operacji γ.
3. Te operacje zmienią G w graf G' będący rozłącznym grafem kilku mniejszych grafów, które mają ograniczoną szerokość kliki.

To podejście działa, ponieważ:

- stosujemy operacje usuwania wierzchołków, dopełnień podgrafów i dopełnień grafów dwudzielnych tylko ograniczoną liczbę razy;
- nie wykorzystujemy właściwości bycia atomem ani bycia $(2P2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnym, gdy opuszczamy klasę grafów po zastosowaniu powyższych operacji grafowych.

Lemat

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_5 ma ograniczoną szerokość kliki.

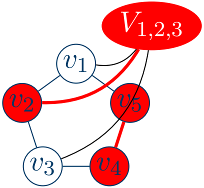
Dowód.

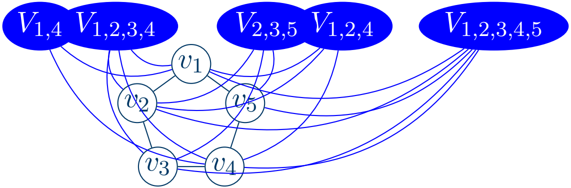
Niech G będzie atomem wolnym od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$, który zawiera indukowany cykl $C = v_1, \ldots, v_5$. Wprowadzamy następujące oznaczenia: dla $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, niech V_S oznacza zbiór wierzchołków $x \in V(G) \setminus V(C)$, takich że $N(x) \cap V(C) = \{v_i \mid i \in S\}$.
Rozważamy możliwe wartości S.

Twierdzenie

$V_i \cup V_{i,i+1} \cup V_{i-1,i,i+1}$ *jest puste dla każdego* i.

Dowód przez sprzeczność: $x \in V_2 \cup V_{2,3} \cup V_{1,2,3}$

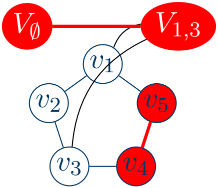


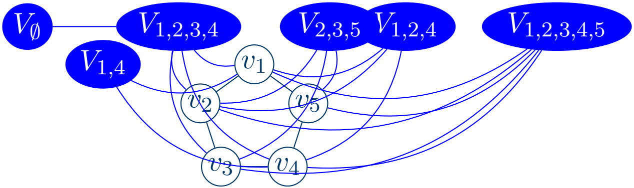


Twierdzenie

Zbiory $V_\emptyset \cup V_{i,i+2}$ dla każdego i są niezależne.

Dowód przez sprzeczność: $x, y \in V_\emptyset \cup V_{1,3}$

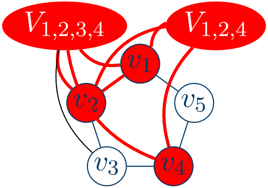


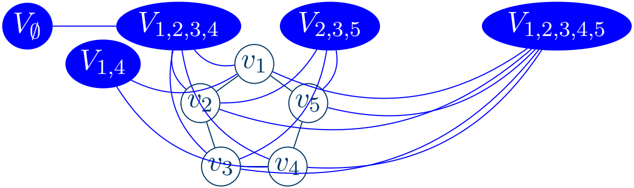


Twierdzenie

Dla każdego i, $|V_{i,i+1,i+3} \cup V_{i,i+1,i+2,i+3}| \leqslant 1$.

Dowód przez sprzeczność: $x, y \in V_{1,2,4} \cup V_{1,2,3,4}$

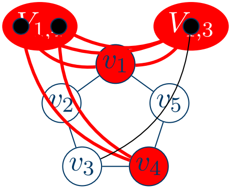


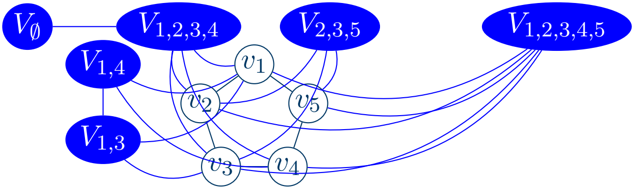


Twierdzenie

Dla każdego i istnieje co najwyżej jedną krawędź między $V_{i,i+2}$ a $V_{i,i-2}$.

Dowód przez sprzeczność: $x \in V_{1,3}$ i ma dwóch sąsiadów $y, y' \in V_{1,4}$

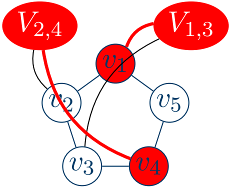


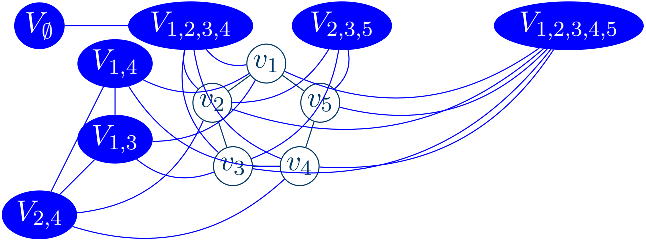


Twierdzenie

Dla każdego i, $V_{i,i+2}$ jest pełne w stosunku do $V_{i-1,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$.

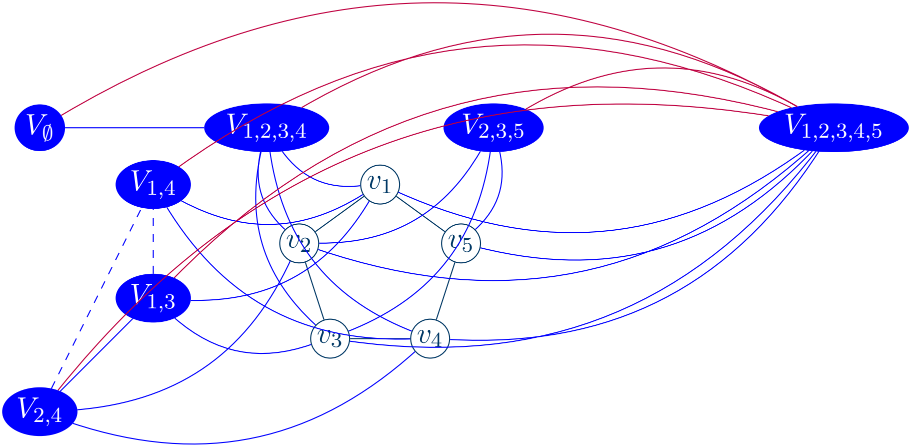
Dowód przez sprzeczność: $x \in V_{1,3}$ i $y \in V_{2,4}$



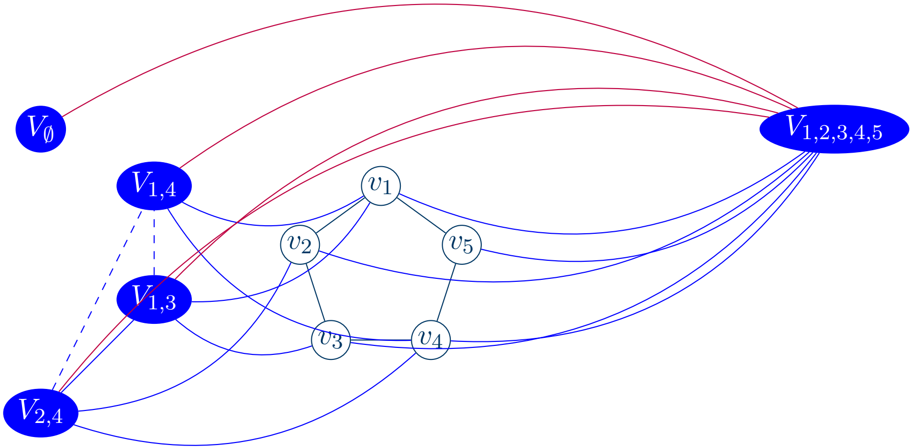


Twierdzenie

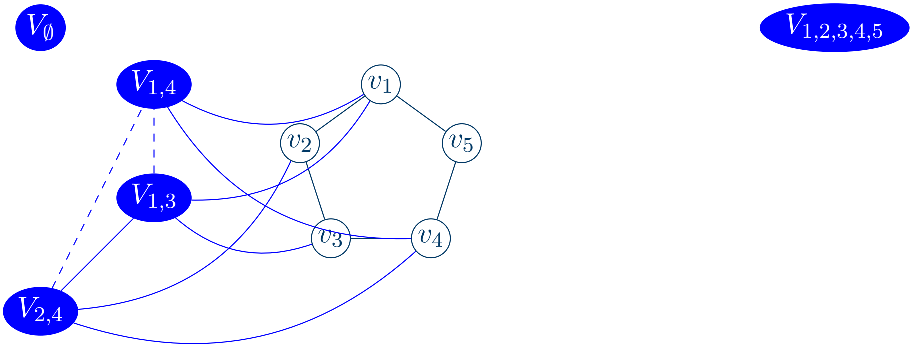
Jeżeli $x \in V_{1,2,3,4,5}$, to x jest pełne w stosunku do $V(G) \setminus \{x\}$. W szczególności, $V_{1,2,3,4,5}$ jest kliką.



1. Dla każdego i, $|V_{i,i+1,i+3} \cup V_{i,i+1,i+2,i+3}| \leqslant 1$. - usuwamy co najwyżej 5 wierzchołków.

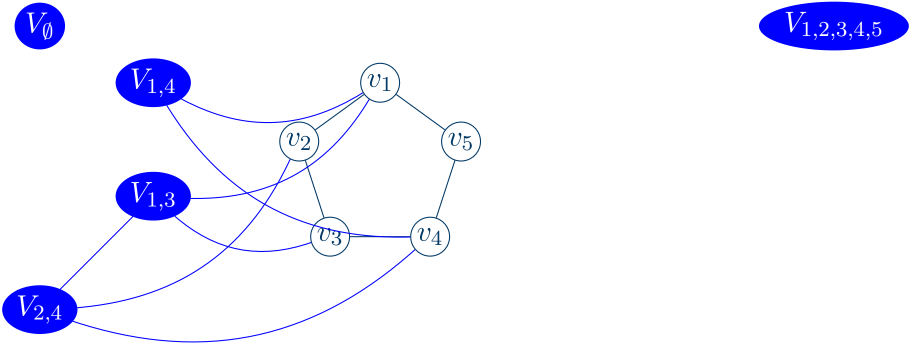


2. Jeżeli $x \in V_{1,2,3,4,5}$, to x jest pełne w stosunku do $V(G) \setminus \{x\}$. W szczególności, $V_{1,2,3,4,5}$ jest kliką. - dopełnienie dwudzielne na $V_{1,2,3,4,5}$ względem reszty grafu.
3. Wykonujemy dopełnienie na $V_{1,2,3,4,5}$ - staje się on zbiorem niezależnym.

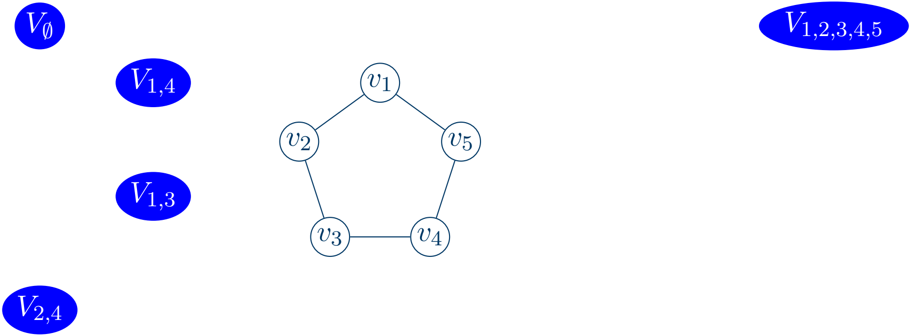


4. Dla każdego i istnieje co najwyżej jedna krawędź między $V_{i,i+2}$ a $V_{i,i-2}$.
- usuwamy co najwyżej 5 wierzchołków.

Pozostałe zbiory V są niezależne.



5. Dla każdego i, $V_{i,i+2}$ jest pełne w stosunku do $V_{i-1,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$. - wykonujemy 5 dopełnień dwudzielnych. Między parami $V_{i-1,i+1} \cup \{v_i\}$, a $V_{i,i+2} \cup \{v_{i+1}\}$



Dowód.

Z powyższych twierdzeń wynika, że odpowiednia liczba operacji na G (10 usunięć wierzchołków, 1 dopełnienia podgrafu, 6 dopełnień dwudzielnych) prowadzi do grafu, który ma ograniczoną szerokość kliki. $\square$

Lemat

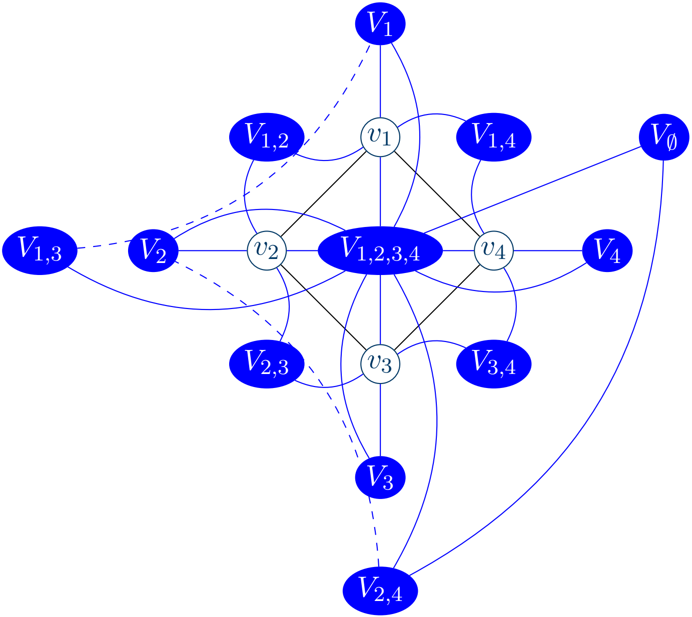
Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_4 ma ograniczoną szerokość kliki.

Dowód.

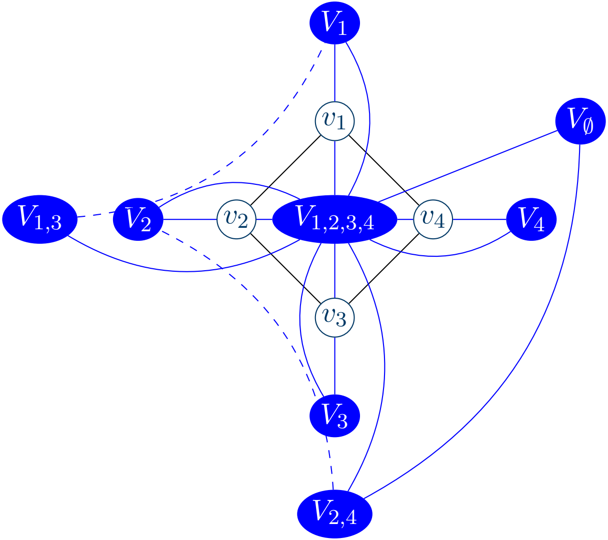
Załóżmy, że G jest atomem wolnym od $(2P_2, P_2 + P_3)$, który zawiera indukowany cykl $C = v_1, v_2, v_3, v_4$. Na mocy wcześniejszego lematu, możemy założyć, że G jest wolny od C_5. Dla $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, niech V_S oznacza zbiór wierzchołków $x \in V(G) \setminus V(C)$, takich że $N(x) \cap V(C) = \{v_i \mid i \in S\}$.

Twierdzenie

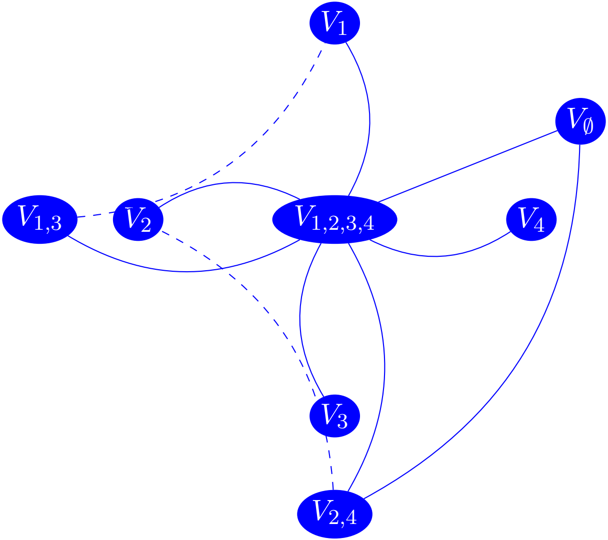
1. *Dla każdego* i, $V_{i,i+1,i+2}$ *jest pusty.*
2. *Zbiór* $V_\emptyset \cup V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i,i+1}$ *jest niezależny dla każdego* i.
3. *Dla każdego* i, *zbiory* $V_{i,i+1} \cup V_{i,i+2}$ *i* $V_{i,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$ *są niezależne.*
4. *Graf* $G[V_{1,2,3,4}]$ *jest wolny od* $P_1 + P_2$, *a więc ma ograniczoną szerokość kliki.*
5. *Dla* $i \in \{1, 2\}$, $V_{i,i+2}$ *jest pełne względem* $V_{1,2,3,4}$.
6. *Dla każdego* i, *albo* $V_{i-1} \cup V_{i-1,i}$, *albo* $V_{i,i+1} \cup V_{i+1}$ *jest puste.*
7. *Jeżeli* $x \in V_\emptyset$, *to* x *ma co najmniej dwóch sąsiadów w jednym z* $V_{1,3}$ *lub* $V_{2,4}$ *i jest antykompletny względem drugiego zbioru. Ponadto,* x *jest pełny względem* $V_{1,2,3,4}$.
8. *Dla każdego* $i \in \{1, 2\}$, $|V_{i,i+1} \cup V_{i+2,i+3}| \leqslant 2$.
9. *Dla każdego* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, V_i *jest pełne względem* $V_{1,2,3,4}$, *a co najwyżej jeden wierzchołek z* $V_{i,i+2}$ *ma sąsiadów w* V_i.


V_1
$V_{1,2}$
v_1
$V_{1,4}$
$V_\emptyset$
$V_{1,3}$
V_2
v_2
$V_{1,2,3,4}$
v_4
V_4
$V_{2,3}$
v_3
$V_{3,4}$
V_3
$V_{2,4}$

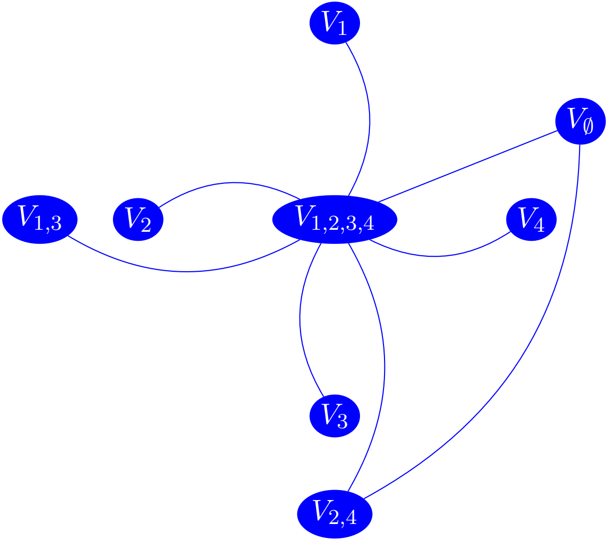
1. Dla każdego i, albo $V_{i-1} \cup V_{i-1,i}$, albo $V_{i,i+1} \cup V_{i+1}$ jest puste.
Dla każdego $i \in \{1, 2\}$, $|V_{i,i+1} \cup V_{i+2,i+3}| \leqslant 2$. - co najwyżej 2 operacje usunięcia wierzchołków. Graf na tym etapie może już nie być atomem.



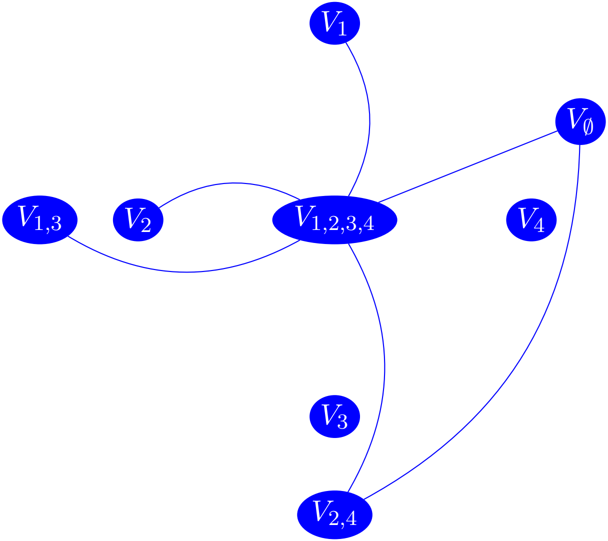
2. Usunięcie cyklu poprzez 4 operacje usunięcia wierzchołka.



3. Dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, V_i jest pełne względem $V_{1,2,3,4}$, a co najwyżej jeden wierzchołek z $V_{i,i+2}$ ma sąsiadów w V_i. - usunięcie dwóch wierzchołków.



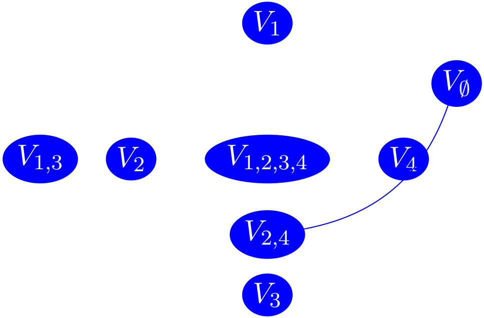
4. Dla każdego i, albo $V_{i-1} \cup V_{i-1,i}$, albo $V_{i,i+1} \cup V_{i+1}$ jest puste. - przyjmujemy V_3 i V_4 za puste.



5. Dzięki twierdzeniom:

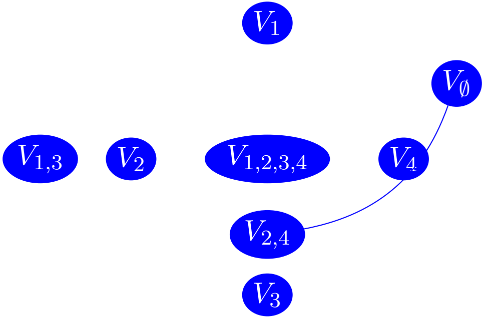
- Dla $i \in \{1, 2\}$, $V_{i,i+2}$ jest pełne względem $V_{1,2,3,4}$.
- Jeżeli $x \in V_\emptyset$, to x ma co najmniej dwóch sąsiadów w jednym z $V_{1,3}$ lub $V_{2,4}$ i jest antykompletny względem drugiego zbioru. Ponadto, x jest pełny względem $V_{1,2,3,4}$.
- Dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, V_i jest pełne względem $V_{1,2,3,4}$, a co najwyżej jeden wierzchołek z $V_{i,i+2}$ ma sąsiadów w V_i.

$V_{1,2,3,4}$ jest pełny względem $V_\emptyset \cup V_1 \cup V_2 \cup V_{1,3} \cup V_{2,4}$ - wykorzystujemy dopełnienie dwudzielne.



- Graf $G[V_{1,2,3,4}]$ jest wolny od $P_1 + P_2$, a więc ma ograniczoną szerokość kliki.
- Jeżeli $x \in V_\emptyset$, to x ma co najmniej dwóch sąsiadów w jednym z $V_{1,3}$ lub $V_{2,4}$ i jest antykompletny względem drugiego zbioru. Ponadto, x jest pełny względem $V_{1,2,3,4}$.

Zatem $V_\emptyset \cup V_{2,4}$ jest łańcuchem dwudzielnym, który ma ograniczoną szerokość kliki.



Dowód.

Na podstawie powyższych twierdzeń, odpowiednia liczba operacji (usunięcia wierzchołków, komplementacje podgrafów i komplementacje dwudzielne) prowadzi do grafu o ograniczonej szerokości kliki. □

Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze ze klasa grafów* $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma nieograniczoną szerokość kliki)*

Dowód.

Klasa grafów podzielnych to klasa grafów wolnych od $(C_4, C_5, 2P_2)$. Ponieważ grafy podzielne tworzą podklasę klasy grafów wolnych od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$, a grafy podzielne mają nieograniczoną szerokość kliki, wynika z tego, że grafy wolne od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$ również mają nieograniczoną szerokość kliki. Przypomnijmy, że atomy podzielne są grafami pełnymi, a zatem ich szerokość kliki wynosi co najwyżej 2. Atomy wolne od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$, które nie są podzielne, muszą zatem zawierać indukowany C_4 lub C_5. $\square$

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Pozostałe wyniki

1. Klasa atomów w G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli jest równoważna klasie grafów wolnych od (H_1, H_2), gdzie spełniony jest jeden z następujących warunków:
   (i) H_1 lub $H_2 \subseteq_i P_4$
   (ii) $H_1 = K_s$ i $H_2 = tP_1$ dla pewnych $s, t \geqslant 1$
   (iii) $H_1 \subseteq_i$ paw i $H_2 \subseteq_i$ $K_{1,3}+3P_1, K_{1,3}+P_2, P_1+P_2+P_3, P_1+P_5, P_1+S_{1,1,2}, P_2+P_4, P_6, S_{1,1,3}$ lub $S_{1,2,2}$
   (iv) $H_1 \subseteq_i$ diamond i $H_2 \subseteq_i P_1 + 2P_2, 3P_1 + P_2$ lub $P_2 + P_3$
   (v) $H_1 \subseteq_i$ gem i $H_2 \subseteq_i P_1 + P_4$ lub P_5
   (vi) $H_1 \subseteq_i \overline{K_3 + P_1}$ i $H_2 \subseteq_i K_{1,3}$
   (vii) $H_1 \subseteq_i \overline{2P_1 + P_3}$ i $H_2 \subseteq_i 2P_1 + P_3$
2. Klasa atomów w G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli G jest podklasą klasy:
   (i) grafów wolnych od $(P_6, \overline{2P_2})$
   (ii) grafów wolnych od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Pozostałe wyniki

1. Klasa atomów w G ma nieograniczoną szerokość kliki, jeśli jest równoważna klasie grafów wolnych od (H_1, H_2), gdzie spełniony jest jeden z następujących warunków:
   (i) $H_1 \notin S$ i $H_2 \notin S$
   (ii) $H_1 \notin S$ i $H_2 \notin \overline{S}$
   (iii) $H_1 \supseteq_i K_3 + P_1$ i $H_2 \supseteq_i 4P_1$ lub $2P_2$
   (iv) $H_1 \supseteq_i$ diamond i $H_2 \supseteq_i K_{1,3}, 5P_1$ lub $P_2 + P_4$
   (v) $H_1 \supseteq_i K_3$ i $H_2 \supseteq_i 2P_1 + 2P_2, 2P_1 + P_4, 4P_1 + P_2, 3P_2$ lub $2P_3$
   (vi) $H_1 \supseteq_i K_4$ i $H_2 \supseteq_i P_1 + P_4, 3P_1 + P_2$ lub $2P_2$
   (vii) $H_1 \supseteq_i$ gem i $H_2 \supseteq_i P_1 + 2P_2$
2. Klasa atomów w G ma nieograniczoną szerokość kliki, jeśli zawiera klasę grafów wolnych od (H_1, H_2), gdzie spełniony jest jeden z następujących warunków:
   (i) $H_1 \supseteq_i$ diamond i $H_2 \supseteq_i P_1 + P_6$
   (ii) $H_1 \supseteq_i 2P_1 + P_2$ i $H_2 \supseteq_i P_6$
   (iii) $H_1 \supseteq_i$ gem i $H_2 \supseteq_i P_6$
   (iv) $H_1 \supseteq_i P_1 + 2P_2$ lub P_6 i $H_2 \supseteq_i \overline{P_1 + 2P_2}$ lub $\overline{P_2 + P_3}$
   (v) $H_1 \supseteq_i 2P_2$ i $H_2 \supseteq_i \overline{P_2 + P_4}, \overline{3P_2}$ lub $\overline{P_5}$

Problemy otwarte

Czy klasa atomów wolnych od (H_1, H_2) ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli:

(i) $H_1 =$ diamond i $H_2 = P_6$

(ii) $H_1 = C_4$ i $H_2 \in \{P_1 + 2P_2, P_2 + P_4, 3P_2\}$

(iii) $H_1 = \overline{P_1 + 2P_2}$ i $H_2 \in \{2P_2, P_2 + P_3, P_5\}$

(iv) $H_1 = \overline{P_2 + P_3}$ i $H_2 \in \{P_2 + P_3, P_5\}$

(v) $H_1 = K_3$ i $H_2 \in \{P_1 + S_{1,1,3}, S_{1,2,3}\}^*$

(vi) $H_1 = 3P_1$ i $H_2 = \overline{P_1 + S_{1,1,3}}^*$

(vii) $H_1 =$ diamond i $H_2 \in \{P_1 + P_2 + P_3, P_1 + P_5\}^*$

(viii) $H_1 = 2P_1 + P_2$ i $H_2 \in \{\overline{P_1 + P_2 + P_3}, \overline{P_1 + P_5}\}^*$

(ix) $H_1 =$ gem i $H_2 = P_2 + P_3^*$

(x) $H_1 = P_1 + P_4$ i $H_2 = \overline{P_2 + P_3}^*$

Przypadki oznaczone gwiazdką (*) oznaczają, że nie jest znana ograniczoność szerokości kliki dla całej klasy grafów wolnych od (H_1, H_2)

Bibliografia I

Dan Cocks.
Minimal classes of graphs of unbounded tree-width and clique-width.
Journal of Graph Theory.

Konrad K. Dabrowski, Tomáš Masařík, Jana Novotná, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski.
Clique-width: Harnessing the power of atoms.
arXiv preprint, (arXiv:2006.03578), 2020.

Jana Novotná.
Clique-width of atoms and coloring for hereditary graphs.
https://www.youtube.com/watch?v=iT9uIHE9-vw.

Daniël Paulusma.
Clique-width and graph colouring for hereditary graph classes.
https://www.youtube.com/watch?v=qO-IWNnuFYE.

Dziękuję za uwagę!