POLITECHNIKA
GDAŃSKA

Clique-Width: Harnessing the Power of Atoms

Narzędzie do rozwiązywania wielu problemów jednocześnie?

Paulina Brzęcka

14 października 2024

Motywacje do badań

Wiele trudnych problemów z grafami można rozwiązać, ograniczając dane wejściowe do jakiejś klasy grafów. Dwa główne pytania brzmią:

- Dla jakich klas grafów problem grafowy jest wykonalny?
- Dla jakich klas grafów jest on trudny obliczeniowo?

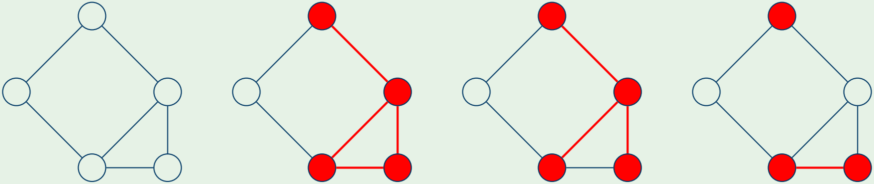
Idealnie byłoby, gdybyśmy chcieli odpowiedzieć na te pytania w odniesieniu do dużego zestawu problemów jednocześnie, zamiast rozważać poszczególne problemy jeden po drugim.
Parametry szerokości grafu pomagają w umożliwieniu takich wyników.
Klasa grafów ma ograniczoną szerokość, jeśli istnieje stała c taka, że szerokość wszystkich jej elementów wynosi co najwyżej c.

Definicje

Podgraf indukowany.

Jest to graf, którego zbiór wierzchołków jest zawarty (jest podzbiorem) w zbiorze wierzchołków grafu G, a zbiór krawędzi składa się ze wszystkich krawędzi grafu G, których końce należą do zbioru wierzchołków podgrafu.

Przykłady

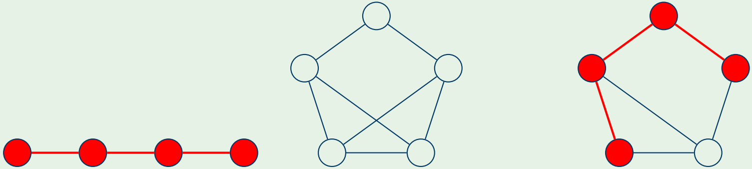


Definicje

Klasa grafów heredytalnych (dziedzicznych).

Klasa jest dziedziczna wtedy i tylko wtedy, gdy moze być scharakteryzowana prze unikalny zbiór H minimalnych, zabronionych podgrafów indukowanych.
Graf G jest H-wolny jeśli G nie ma podgrafu indukowanego, izomorficznego do H.
Graf G jest $(H_1, ..., H_p)$-wolny jeśli G nie ma podgrafów indukowanych, izomorficznych do H_i dla każdego i.

Przykłady



Definicje

Szerokość kliki.

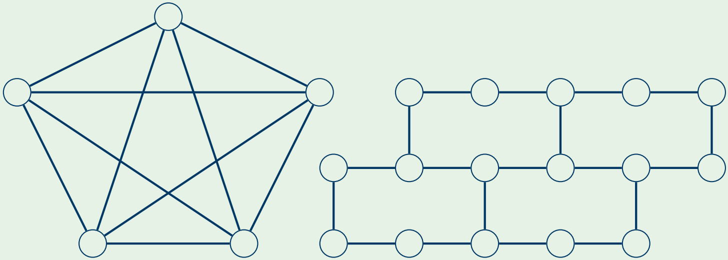
Szerokość kliki grafu G, oznaczona jako cw(G), to minimalna liczba etykiet potrzebnych do skonstruowania G przy użyciu czterech następujących operacji:

- utworzenie nowego grafu składającego się z pojedynczego wierzchołka v z etykietą i;
- przyjęcie sumy rozłącznej dwóch grafów oznaczonych etykietami G_1 i G_2;
- dodanie krawędzi pomiędzy każdym wierzchołkiem o etykiecie i a każdym wierzchołkiem o etykiecie j $(i \neq j)$;
- oznaczenie każdego wierzchołka etykietą i tak, aby miał etykietę j.

Szerokość kliki

Klasa grafów G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli istnieje stała c taka, że $cw(G) \leqslant c$ dla każdego $G \in G$; w przeciwnym razie szerokość kliki G jest nieograniczona.

Przykłady

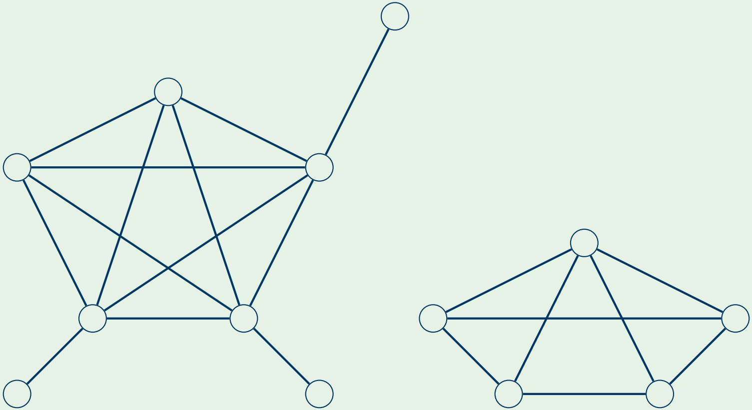


Definicje

Atom.

Spójny graf, który nie posiada grafu rozpinającego będącego kliką.

Przykłady



Dlaczego atomy?

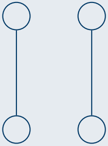
Wiele NP-zupełnych problemów grafowych można rozwiązać w czasie wielomianowym na klasach grafów o ograniczonej szerokości kliki. Część z nich, między innymi:

- Kolorowanie
- Minimalne dopełnienie
- Maksymalna klika
- Maksymalny ważony zbiór niezależny
- Maksymalne indukowane dopasowanie

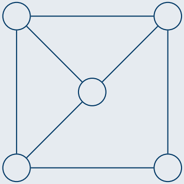
są rozwiązywalne w czasie wielomianowym na grafie dziedzicznym klasy G wtedy i tylko wtedy, gdy ma to miejsce w przypadku atomów G.

Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze ze klasa grafów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych ma nieograniczoną szerokość kliki)



$2P_2$



$\overline{P_2 + P_3}$

Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze ze klasa grafów* $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma nieograniczoną szerokość kliki)*

Dowód.

Podejście opiera się na trzech następujących twierdzeniach:

- $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_5 ma ograniczoną szerokość kliki.
- $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_4 ma ograniczoną szerokość kliki.
- $(C_4, C_5, 2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów ma ograniczoną szerokość kliki.

Lemat

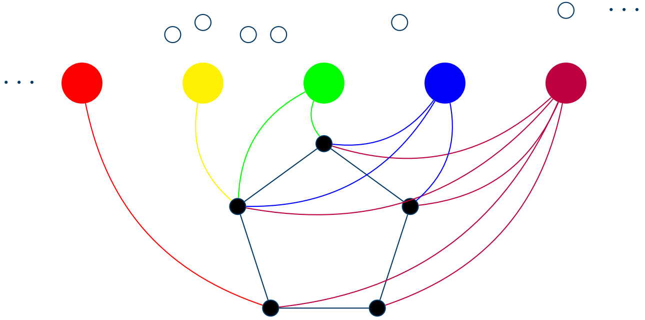
Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_5 ma ograniczoną szerokość kliki.

Dowód.

Niech G będzie atomem wolnym od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$, który zawiera indukowany cykl $C = v_1, \ldots, v_5$. Wprowadzamy następujące oznaczenia: dla $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, niech V_S oznacza zbiór wierzchołków $x \in V(G) \setminus V(C)$, takich że $N(x) \cap V(C) = \{v_i \mid i \in S\}$.
Rozważamy możliwe wartości S.

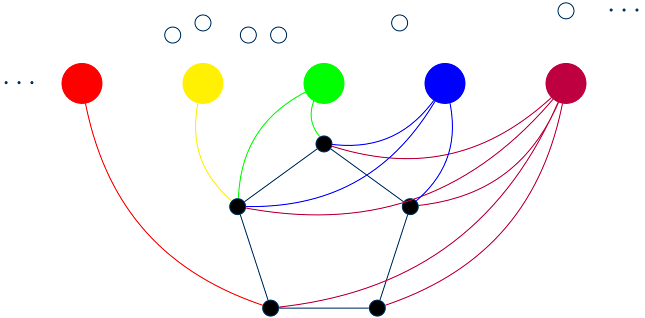
Twierdzenie

$V_i \cup V_{i,i+1} \cup V_{i-1,i,i+1}$ *jest puste dla każdego* i.



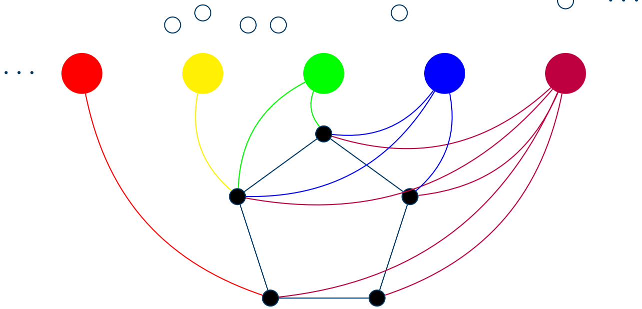
Twierdzenie

Zbiory $V_\emptyset \cup V_{i,i+2}$ dla każdego i są niezależne.



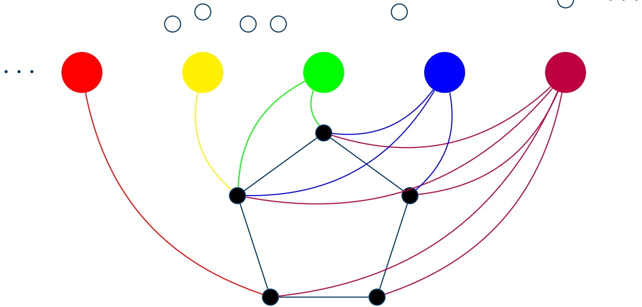
Twierdzenie

Dla każdego i, $|V_{i,i+1,i+3} \cup V_{i,i+1,i+2,i+3}| \leqslant 1$.



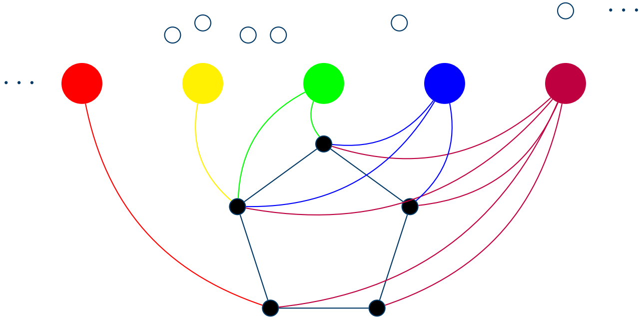
Twierdzenie

Dla każdego i istnieje co najwyżej jedna krawędź między $V_{i,i+2}$ a $V_{i,i-2}$.



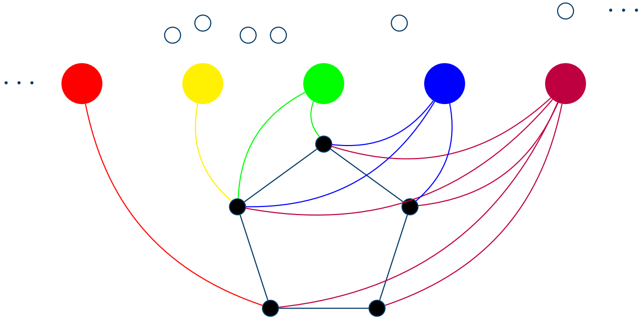
Twierdzenie

Dla każdego i, $V_{i,i+2}$ jest pełne w stosunku do $V_{i-1,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$.



Twierdzenie

Jeżeli $x \in V_{1,2,3,4,5}$, to x jest pełne w stosunku do $V(G) \setminus \{x\}$. W szczególności, $V_{1,2,3,4,5}$ jest kliką.



Dowód.

Z powyższych twierdzeń wynika, że odpowiednia liczba operacji na G (usunięcia wierzchołków, komplementacje podgrafów, komplementacje dwudzielne) prowadzi do grafu, który ma ograniczoną szerokość kliki. $\square$

Lemat

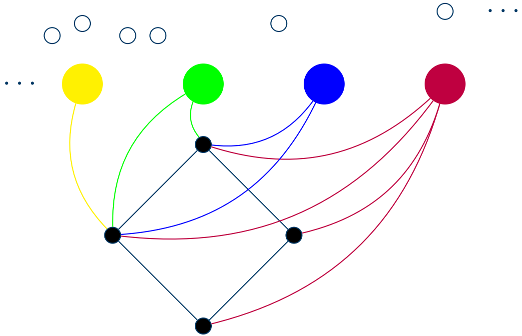
Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_4 ma ograniczoną szerokość kliki.

Dowód.

Załóżmy, że G jest atomem wolnym od $(2P_2, P_2 + P_3)$, który zawiera indukowany cykl $C = v_1, v_2, v_3, v_4$. Na mocy wcześniejszego lematu, możemy założyć, że G jest wolny od C_5. Dla $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, niech V_S oznacza zbiór wierzchołków $x \in V(G) \setminus V(C)$, takich że $N(x) \cap V(C) = \{v_i \mid i \in S\}$.

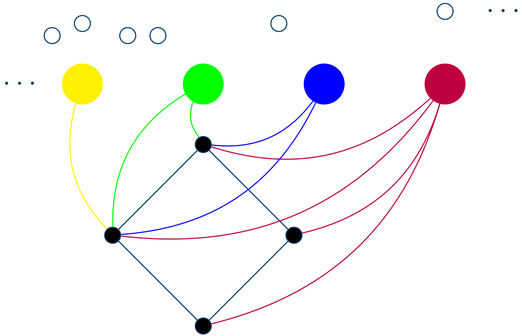
Twierdzenie

Dla każdego i, $V_{i,i+1,i+2}$ jest pusty.



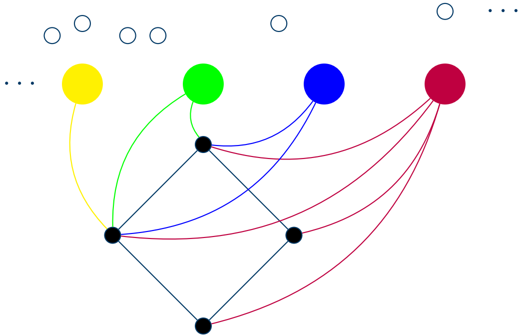
Twierdzenie

Zbiór $V_\emptyset \cup V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i,i+1}$ *jest niezależny dla każdego* i.



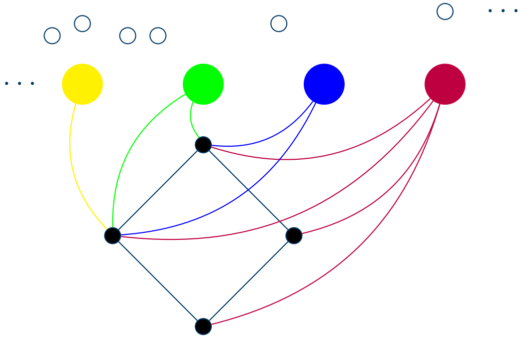
Twierdzenie

Dla każdego i, zbiory $V_{i,i+1} \cup V_{i,i+2}$ i $V_{i,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$ są niezależne.



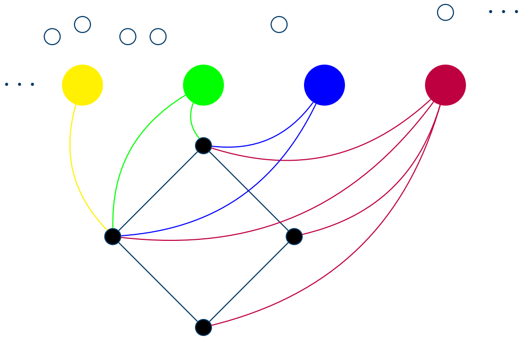
Twierdzenie

Graf $G[V_{1,2,3,4}]$ jest wolny od $P_1 + P_2$, a więc ma ograniczoną szerokość kliki.



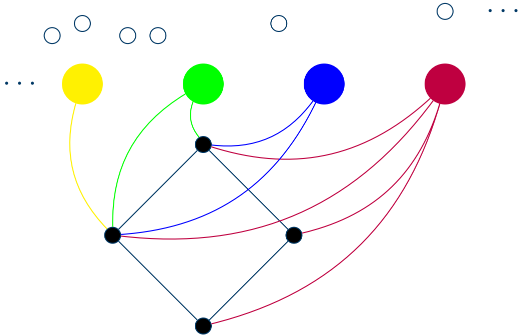
Twierdzenie

Dla $i \in \{1,2\}$, $V_{i,i+2}$ jest pełne względem $V_{1,2,3,4}$.



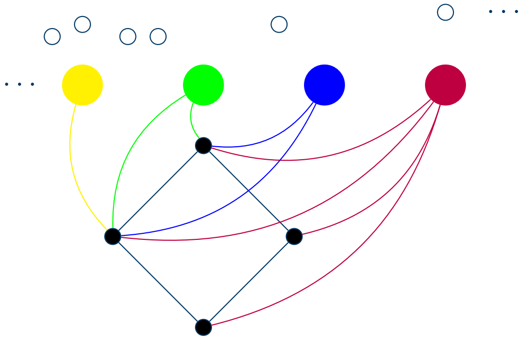
Twierdzenie

Dla każdego i, albo $V_{i-1} \cup V_{i-1,i}$, albo $V_{i,i+1} \cup V_{i+1}$ jest puste.



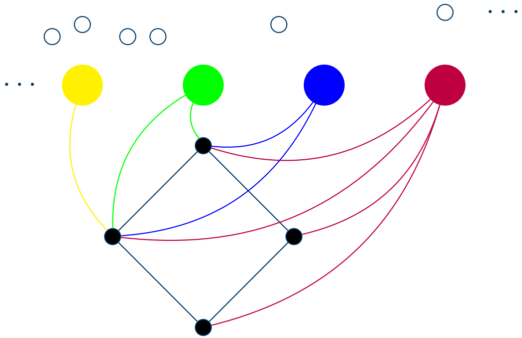
Twierdzenie

Jeżeli $x \in V_\emptyset$, to x ma co najmniej dwóch sąsiadów w jednym z $V_{1,3}$ lub $V_{2,4}$ i jest antykompletny względem drugiego zbioru. Ponadto, x jest pełny względem $V_{1,2,3,4}$.



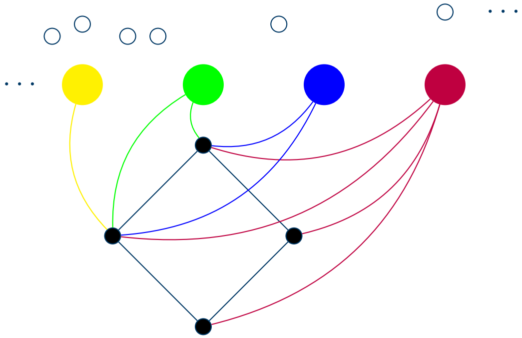
Twierdzenie

Dla każdego $i \in \{1, 2\}$, $|V_{i,i+1} \cup V_{i+2,i+3}| \leqslant 2$.



Twierdzenie

Dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, V_i jest pełne względem $V_{1,2,3,4}$, a co najwyżej jeden wierzchołek z $V_{i,i+2}$ ma sąsiadów w V_i.



Dowód.

Na podstawie powyższych twierdzeń, odpowiednia liczba operacji (usunięcia wierzchołków, komplementacje podgrafów i komplementacje dwudzielne) prowadzi do grafu o ograniczonej szerokości kliki. □

Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze ze klasa grafów* $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma nieograniczoną szerokość kliki)*

Dowód.

Klasa grafów podzielnych to klasa grafów wolnych od $(C_4, C_5, 2P_2)$. Ponieważ grafy podzielne tworzą podklasę klasy grafów wolnych od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$, a grafy podzielne mają nieograniczoną szerokość kliki, wynika z tego, że grafy wolne od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$ również mają nieograniczoną szerokość kliki. Przypomnijmy, że atomy podzielne są grafami pełnymi, a zatem ich szerokość kliki wynosi co najwyżej 2. Atomy wolne od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$, które nie są podzielne, muszą zatem zawierać indukowany C_4 lub C_5. □

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Pozostałe wyniki

1. Klasa atomów w G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli jest równoważna klasie grafów wolnych od (H_1, H_2), gdzie spełniony jest jeden z następujących warunków:
   (i) H_1 lub $H_2 \subseteq_i P_4$
   (ii) $H_1 = K_s$ i $H_2 = tP_1$ dla pewnych $s, t \geqslant 1$
   (iii) $H_1 \subseteq_i$ paw i $H_2 \subseteq_i$ $K_{1,3}+3P_1, K_{1,3}+P_2, P_1+P_2+P_3, P_1+P_5, P_1+S_{1,1,2}, P_2+P_4, P_6, S_{1,1,3}$ lub $S_{1,2,2}$
   (iv) $H_1 \subseteq_i$ diamond i $H_2 \subseteq_i P_1 + 2P_2, 3P_1 + P_2$ lub $P_2 + P_3$
   (v) $H_1 \subseteq_i$ gem i $H_2 \subseteq_i P_1 + P_4$ lub P_5
   (vi) $H_1 \subseteq_i \overline{K_3 + P_1}$ i $H_2 \subseteq_i K_{1,3}$
   (vii) $H_1 \subseteq_i \overline{2P_1 + P_3}$ i $H_2 \subseteq_i 2P_1 + P_3$
2. Klasa atomów w G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli G jest podklasą klasy:
   (i) grafów wolnych od $(P_6, \overline{2P_2})$
   (ii) grafów wolnych od $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Pozostałe wyniki

1. Klasa atomów w G ma nieograniczoną szerokość kliki, jeśli jest równoważna klasie grafów wolnych od (H_1, H_2), gdzie spełniony jest jeden z następujących warunków:
   - (i) $H_1 \notin S$ i $H_2 \notin S$
   - (ii) $H_1 \notin S$ i $H_2 \notin \overline{S}$
   - (iii) $H_1 \supseteq_i K_3 + P_1$ i $H_2 \supseteq_i 4P_1$ lub $2P_2$
   - (iv) $H_1 \supseteq_i$ diamond i $H_2 \supseteq_i K_{1,3}, 5P_1$ lub $P_2 + P_4$
   - (v) $H_1 \supseteq_i K_3$ i $H_2 \supseteq_i 2P_1 + 2P_2, 2P_1 + P_4, 4P_1 + P_2, 3P_2$ lub $2P_3$
   - (vi) $H_1 \supseteq_i K_4$ i $H_2 \supseteq_i P_1 + P_4, 3P_1 + P_2$ lub $2P_2$
   - (vii) $H_1 \supseteq_i$ gem i $H_2 \supseteq_i P_1 + 2P_2$
2. Klasa atomów w G ma nieograniczoną szerokość kliki, jeśli zawiera klasę grafów wolnych od (H_1, H_2), gdzie spełniony jest jeden z następujących warunków:
   - (i) $H_1 \supseteq_i$ diamond i $H_2 \supseteq_i P_1 + P_6$
   - (ii) $H_1 \supseteq_i 2P_1 + P_2$ i $H_2 \supseteq_i P_6$
   - (iii) $H_1 \supseteq_i$ gem i $H_2 \supseteq_i P_6$
   - (iv) $H_1 \supseteq_i P_1 + 2P_2$ lub P_6 i $H_2 \supseteq_i \overline{P_1 + 2P_2}$ lub $\overline{P_2 + P_3}$
   - (v) $H_1 \supseteq_i 2P_2$ i $H_2 \supseteq_i \overline{P_2 + P_4}, \overline{3P_2}$ lub $\overline{P_5}$

Problemy otwarte

Czy klasa atomów wolnych od (H_1, H_2) ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli:

(i) $H_1 =$ diamond i $H_2 = P_6$

(ii) $H_1 = C_4$ i $H_2 \in \{P_1 + 2P_2, P_2 + P_4, 3P_2\}$

(iii) $H_1 = \overline{P_1 + 2P_2}$ i $H_2 \in \{2P_2, P_2 + P_3, P_5\}$

(iv) $H_1 = \overline{P_2 + P_3}$ i $H_2 \in \{P_2 + P_3, P_5\}$

(v) $H_1 = K_3$ i $H_2 \in \{P_1 + S_{1,1,3}, S_{1,2,3}\}^*$

(vi) $H_1 = 3P_1$ i $H_2 = \overline{P_1 + S_{1,1,3}}^*$

(vii) $H_1 =$ diamond i $H_2 \in \{P_1 + P_2 + P_3, P_1 + P_5\}^*$

(viii) $H_1 = 2P_1 + P_2$ i $H_2 \in \{\overline{P_1 + P_2 + P_3}, \overline{P_1 + P_5}\}^*$

(ix) $H_1 =$ gem i $H_2 = P_2 + P_3^*$

(x) $H_1 = P_1 + P_4$ i $H_2 = \overline{P_2 + P_3}^*$

Przypadki oznaczone gwiazdką (*) oznaczają, że nie jest znana ograniczoność szerokości kliki dla całej klasy grafów wolnych od (H_1, H_2)

Bibliografia I

Dan Cocks.
Minimal classes of graphs of unbounded tree-width and clique-width.
Journal of Graph Theory.

Konrad K. Dabrowski, Tomáš Masařík, Jana Novotná, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski.
Clique-width: Harnessing the power of atoms.
arXiv preprint, (arXiv:2006.03578), 2020.

Jana Novotná.
Clique-width of atoms and coloring for hereditary graphs.
https://www.youtube.com/watch?v=iT9uIHE9-vw.

Daniël Paulusma.
Clique-width and graph colouring for hereditary graph classes.
https://www.youtube.com/watch?v=qO-IWNnuFYE.

Dziękuję za uwagę!