POLITECHNIKA GDAŃSKA

Clique-Width: Harnessing the Power of Atoms

Narzędzie do rozwiązywania wielu problemów jednocześnie?

Paulina Brzęcka

13 października 2024

Motywacje do badań

Wiele trudnych problemów z grafami można rozwiązać, ograniczając dane wejściowe do jakiejś klasy grafów. Dwa główne pytania brzmią:

- Dla jakich klas grafów problem grafowy jest wykonalny?
- Dla jakich klas grafów jest on trudny obliczeniowo?

Idealnie byłoby, gdybyśmy chcieli odpowiedzieć na te pytania w odniesieniu do dużego zestawu problemów jednocześnie, zamiast rozważać poszczególne problemy jeden po drugim.

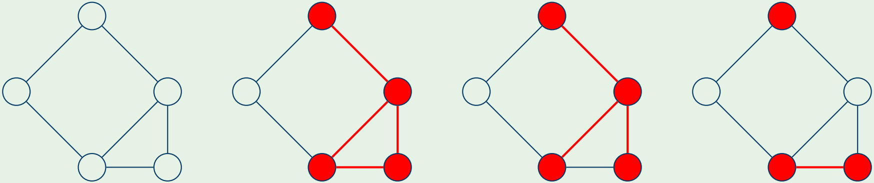
Parametry szerokości grafu pomagają w umożliwieniu takich wyników. Klasa grafów ma ograniczoną szerokość, jeśli istnieje stała c taka, że szerokość wszystkich jej elementów wynosi co najwyżej c.

Definicje

Podgraf indukowany.

Jest to graf, którego zbiór wierzchołków jest zawarty (jest podzbiorem) w zbiorze wierzchołków grafu G, a zbiór krawędzi składa się ze wszystkich krawędzi grafu G, których końce należą do zbioru wierzchołków podgrafu.

Przykłady

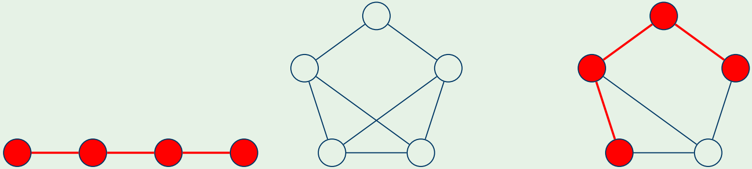


Definicje

Klasa grafów heredytalnych (dziedzicznych).

Klasa jest dziedziczna wtedy i tylko wtedy, gdy moze być scharakteryzowana prze unikalny zbiór H minimalnych, zabronionych podgrafów indukowanych.
Graf G jest H-wolny jeśli G nie ma podgrafu indukowanego, izomorficznego do H.
Graf G jest $(H_1, ..., H_p)$-wolny jeśli G nie ma podgrafów indukowanych, izomorficznych do H_i dla każdego i.

Przykłady



Definicje

Szerokość kliki.

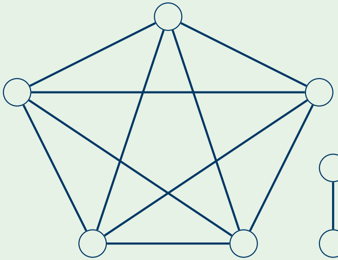
Szerokość kliki grafu G, oznaczona jako cw(G), to minimalna liczba etykiet potrzebnych do skonstruowania G przy użyciu czterech następujących operacji:

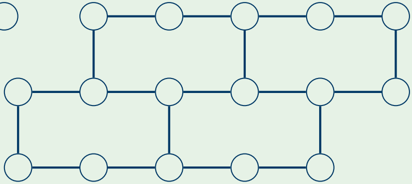
- utworzenie nowego grafu składającego się z pojedynczego wierzchołka v z etykietą i;
- przyjęcie sumy rozłącznej dwóch grafów oznaczonych etykietami G_1 i G_2;
- dodanie krawędzi pomiędzy każdym wierzchołkiem o etykiecie i a każdym wierzchołkiem o etykiecie j $(i \neq j)$;
- oznaczenie każdego wierzchołka etykietą i tak, aby miał etykietę j.

Szerokość kliki

Klasa grafów G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli istnieje stała c taka, że $cw(G) \leqslant c$ dla każdego $G \in G$; w przeciwnym razie szerokość kliki G jest nieograniczona.

Przykłady

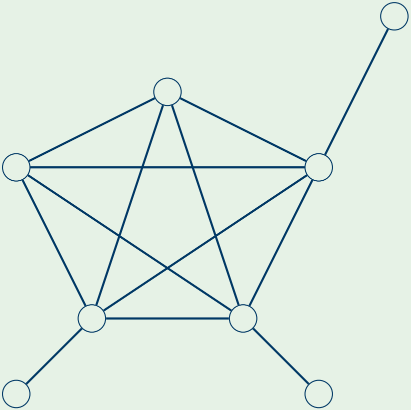


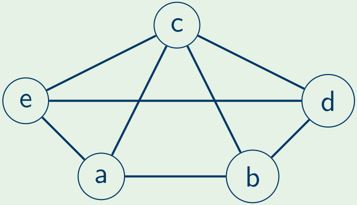


Atom.

Spójny graf, który nie posiada grafu rozpinającego będącego kliką.

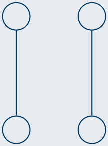
Przykłady



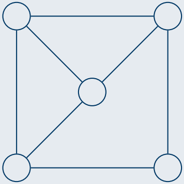


Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze ze klasa grafów* $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki)*



$2P_2$



$\overline{P_2 + P_3}$

Twierdzenie

Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (mając na uwadze ze klasa grafów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki)

Dowód.

Podejście opiera się na trzech następujących twierdzeniach:

- $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_5 ma ograniczoną szerokość kliki.
- $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_4 ma ograniczoną szerokość kliki.
- $(C_4, C_5, 2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów ma ograniczoną szerokość kliki.

Lemat

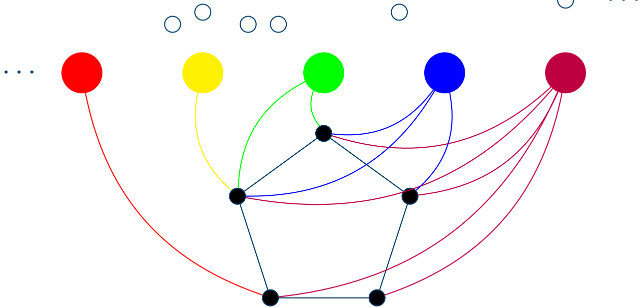
Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$-wolnych atomów z indukowanym C_5 ma ograniczoną szerokość kliki.

Dowód.

Niech G będzie atomem wolnym od $(2P_2, P_2 + P_3)$, który zawiera indukowany cykl $C = v_1, \ldots, v_5$. Wprowadzamy następujące oznaczenia: dla $S \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, niech V_S oznacza zbiór wierzchołków $x \in V(G) \setminus V(C)$, takich że $N(x) \cap V(C) = \{v_i \mid i \in S\}$.
Rozważamy możliwe wartości S. $\square$

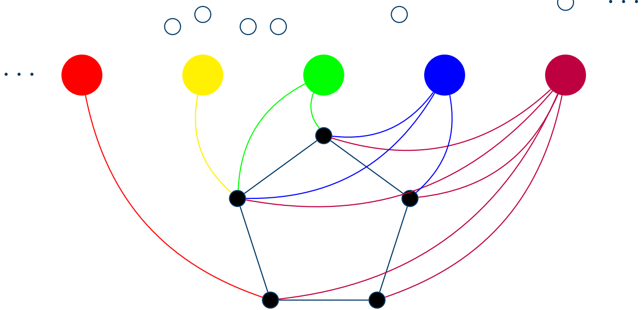
Twierdzenie

Jeżeli $S = \{i, i+1, i+3\}$, to V_S jest puste dla każdego i.



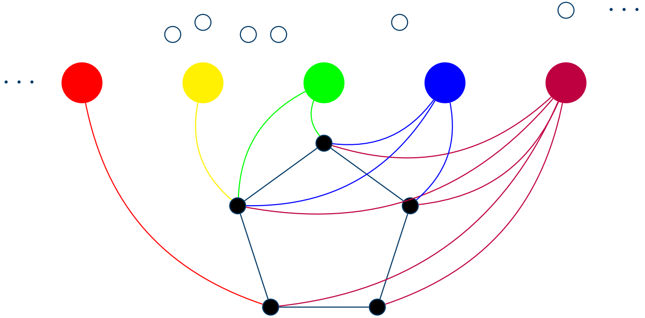
Twierdzenie

Zbiory $V_\emptyset$ i $V_{i,i+2}$ dla każdego i są niezależne.



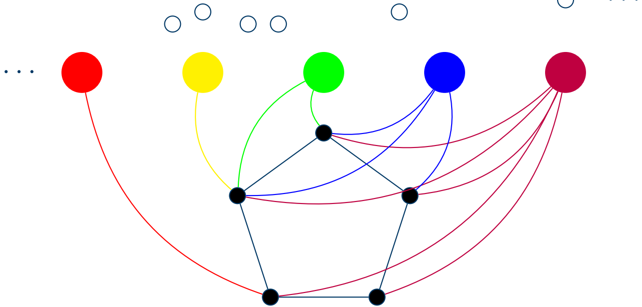
Twierdzenie

Dla każdego i, $|V_{i,i+1,i+3} \cup V_{i,i+1,i+2,i+3}| \leqslant 1$.



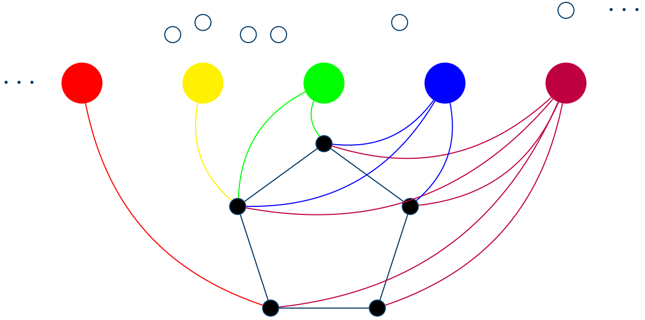
Twierdzenie

Dla każdego i istnieje co najwyżej jedna krawędź między $V_{i,i+2}$ a $V_{i,i-2}$.



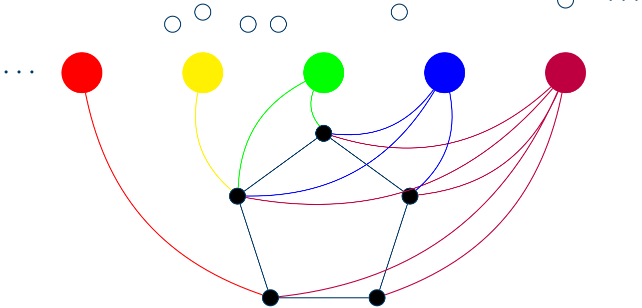
Twierdzenie

Dla każdego i, $V_{i,i+2}$ jest pełne w stosunku do $V_{i-1,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$.



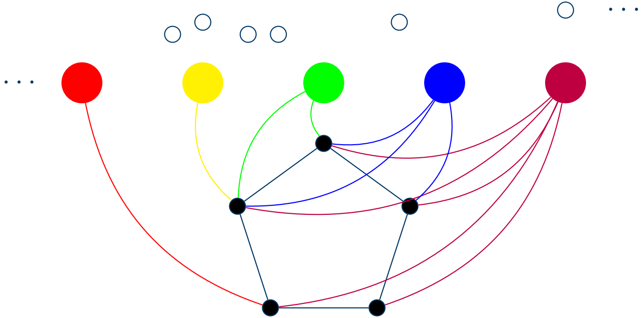
Twierdzenie

Jeżeli $x \in V_{1,2,3,4,5}$, to x jest pełne w stosunku do $V(G) \setminus \{x\}$. W szczególności, $V_{1,2,3,4,5}$ jest kliką.



Twierdzenie

Jeżeli $S = \{i, i+1, i+3\}$*, to* V_S *jest puste dla każdego* i*.*



Dowód.

Z powyższych twierdzeń wynika, że odpowiednia liczba operacji na G (usunięcia wierzchołków, komplementacje podgrafów, komplementacje dwudzielne) prowadzi do grafu, który ma ograniczoną szerokość kliki. $\square$

Lemat

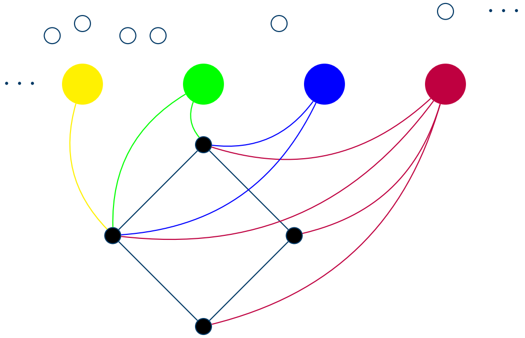
Klasa atomów $(2P_2, \overline{P_2 + P_3})$*-wolnych atomów z indukowanym* C_4 *ma ograniczoną szerokość kliki.*

Dowód.

Załóżmy, że G jest atomem wolnym od $(2P_2, P_2 + P_3)$, który zawiera indukowany cykl $C = v_1, v_2, v_3, v_4$. Na mocy wcześniejszego lematu, możemy założyć, że G jest wolny od C_5. Dla $S \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, niech V_S oznacza zbiór wierzchołków $x \in V(G) \setminus V(C)$, takich że $N(x) \cap V(C) = \{v_i \mid i \in S\}$.

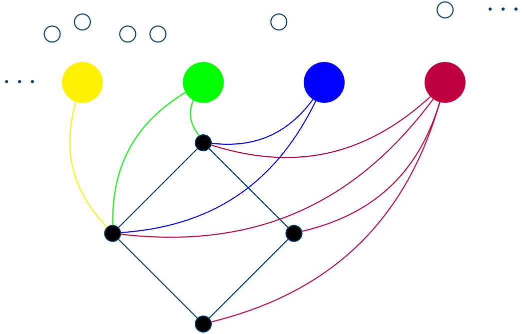
Twierdzenie

Dla każdego i, $V_{i,i+1,i+2}$ jest pusty.



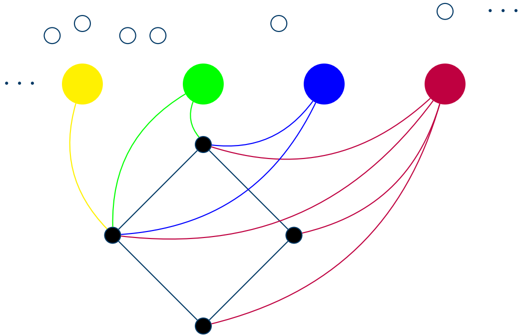
Twierdzenie

Zbiór $V_\emptyset \cup V_i \cup V_{i+1} \cup V_{i,i+1}$ *jest niezależny dla każdego* i.



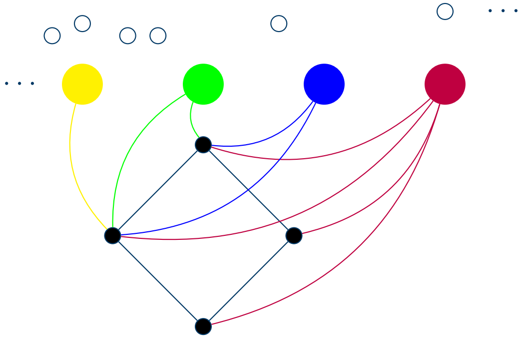
Twierdzenie

Dla każdego i, zbiory $V_{i,i+1} \cup V_{i,i+2}$ i $V_{i,i+1} \cup V_{i+1,i+3}$ są niezależne.



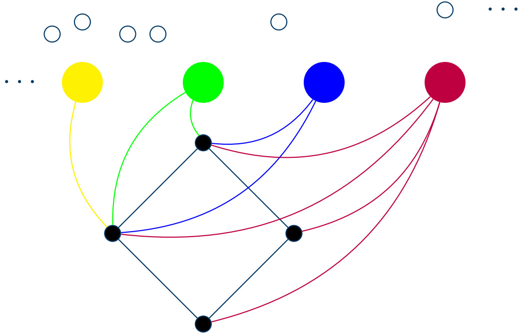
Twierdzenie

Graf $G[V_{1,2,3,4}]$ jest wolny od $P_1 + P_2$, a więc ma ograniczoną szerokość kliki.



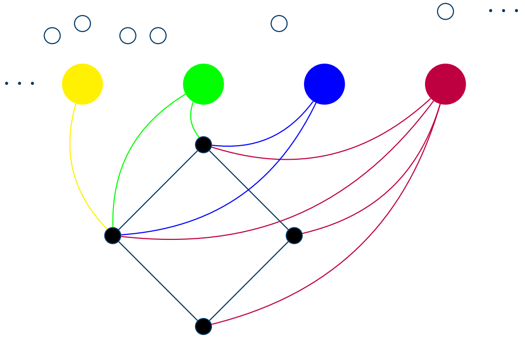
Twierdzenie

Dla każdego i*,* $V_{i,i+2}$ *jest pełne względem* $V_{1,2,3,4}$*.*



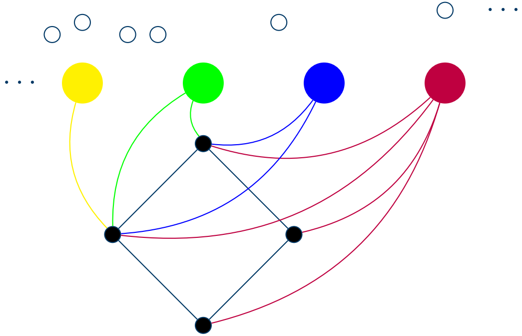
Twierdzenie

Dla każdego i, albo $V_{i-1} \cup V_{i-1,i}$, albo $V_{i,i+1} \cup V_{i+1}$ jest puste.



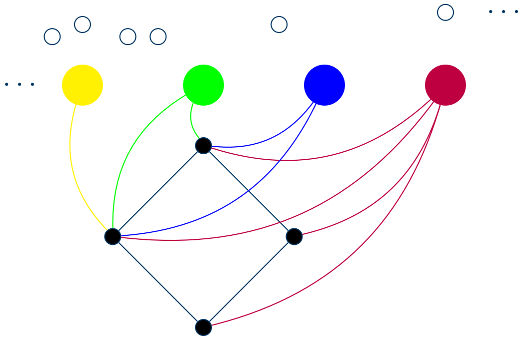
Twierdzenie

Jeżeli $x \in V_\emptyset$, to x ma co najmniej dwóch sąsiadów w jednym z $V_{1,3}$ lub $V_{2,4}$ i jest antykompletny względem drugiego zbioru. Ponadto, x jest pełny względem $V_{1,2,3,4}$.



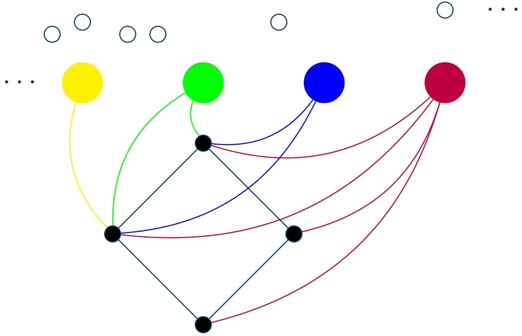
Twierdzenie

Dla każdego $i \in \{1,2\}$, $|V_{i,i+1} \cup V_{i+2,i+3}| \leqslant 2$.



Twierdzenie

Dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, V_i jest pełne względem $V_{1,2,3,4}$, a co najwyżej jeden wierzchołek z $V_{i,i+2}$ ma sąsiadów w V_i.



Dowód.

Na podstawie powyższych twierdzeń, odpowiednia liczba operacji (usunięcia wierzchołków, komplementacje podgrafów i komplementacje dwudzielne) prowadzi do grafu o ograniczonej szerokości kliki. □

Lista problemów otwartych

- item

Bibliografia I

Dan Cocks.
Minimal classes of graphs of unbounded tree-width and clique-width.
Journal of Graph Theory.

Konrad K. Dabrowski, Tomáš Masařík, Jana Novotná, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski.
Clique-width: Harnessing the power of atoms.
arXiv preprint, (arXiv:2006.03578), 2020.

Jana Novotná.
Clique-width of atoms and coloring for hereditary graphs.
https://www.youtube.com/watch?v=iT9uIHE9-vw.

Daniël Paulusma.
Clique-width and graph colouring for hereditary graph classes.
https://www.youtube.com/watch?v=qO-IWNnuFYE.

Dziękuję za uwagę!