POLITECHNIKA GDAŃSKA

Clique-Width: Harnessing the Power of Atoms

Narzędzie do rozwiązywania wielu problemów jednocześnie?

Paulina Brzęcka

13 października 2024

Motywacje do badań

Wiele trudnych problemów z grafami można rozwiązać, ograniczając dane wejściowe do jakiejś klasy grafów. Dwa główne pytania brzmią:

- Dla jakich klas grafów problem grafowy jest wykonalny?
- Dla jakich klas grafów jest on trudny obliczeniowo?

Idealnie byłoby, gdybyśmy chcieli odpowiedzieć na te pytania w odniesieniu do dużego zestawu problemów jednocześnie, zamiast rozważać poszczególne problemy jeden po drugim.

Parametry szerokości grafu pomagają w umożliwieniu takich wyników.

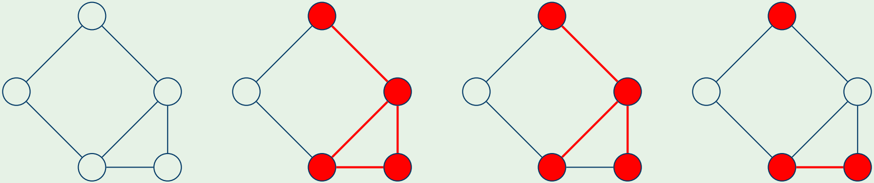
Klasa grafów ma ograniczoną szerokość, jeśli istnieje stała c taka, że szerokość wszystkich jej elementów wynosi co najwyżej c.

Definicje

Podgraf indukowany.

Jest to graf, którego zbiór wierzchołków jest zawarty (jest podzbiorem) w zbiorze wierzchołków grafu G, a zbiór krawędzi składa się ze wszystkich krawędzi grafu G, których końce należą do zbioru wierzchołków podgrafu.

Przykłady

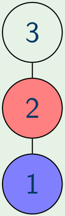


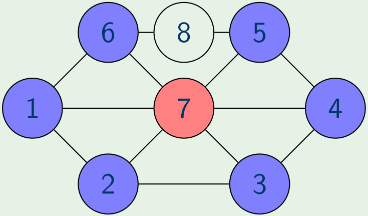
Definicje

Klasa grafów heredytalnych (dziedzicznych).

Klasa grafów (H_1, H_2)-wolnych.

Przykłady

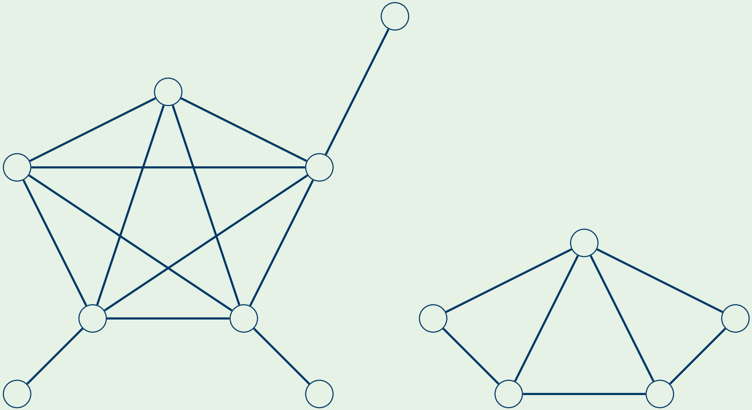




Atom.

Spójny graf, który nie posiada zbioru rozpinającego będącego kliką.

Przykłady



Szerokość kliki.

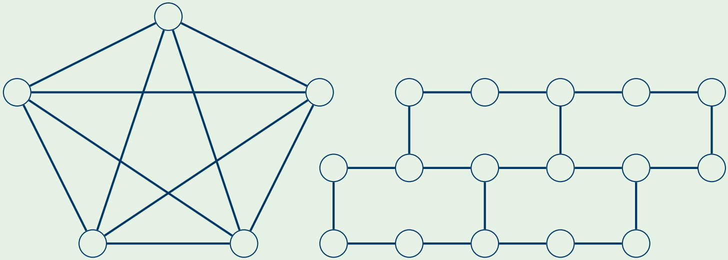
Szerokość kliki grafu G, oznaczona jako cw(G), to minimalna liczba etykiet potrzebnych do skonstruowania G przy użyciu czterech następujących operacji:

- utworzenie nowego grafu składającego się z pojedynczego wierzchołka v z etykietą i;
- przyjęcie sumy rozłącznej dwóch grafów oznaczonych etykietami G_1 i G_2;
- dodanie krawędzi pomiędzy każdym wierzchołkiem o etykiecie i a każdym wierzchołkiem o etykiecie j $(i \neq j)$;
- oznaczenie każdego wierzchołka etykietą i tak, aby miał etykietę j.

Szerokość kliki

Klasa grafów G ma ograniczoną szerokość kliki, jeśli istnieje stała c taka, że $cw(G) \leqslant c$ dla każdego $G \in G$; w przeciwnym razie szerokość kliki G jest nieograniczona.

Przykłady



Po co nam atomy?

Czy istnieją klasy grafów heredytalnych z nieograniczoną szerokością kliki, których atomy mają ograniczoną szerokość kliki?

- split grafy
- H-wolne grafy - nie

Cel

Które (H_1, H_2)-wolne klasy grafów z nieograniczoną szerokością kliki mają taką własność, ze ich atomy mają ograniczona szerokość kliki?

Cel

Które (H_1, H_2)-wolne klasy grafów z nieograniczoną szerokością kliki mają taką własność, ze ich atomy mają ograniczona szerokość kliki?

Klasa atomów (H_1, H_2)-wolnych ma ogranicozną szerkość kliki, jeśli $H_1 \subseteq_i 2P_2$ i $H_2 \subseteq_i \overline{P_2 + P_3}$

Cel

Które (H_1, H_2)-wolne klasy grafów z nieograniczoną szerokością kliki mają taką własność, ze ich atomy mają ograniczona szerokość kliki?

Klasa atomów (H_1, H_2)-wolnych ma ogranicozną szerkość kliki, jeśli $H_1 \subseteq_i 2P_2$ i $H_2 \subseteq_i \overline{P_2 + P_3}$
Klasa atomów (H_1, H_2)-wolnych ma nieograniczoną szerkość kliki, jeśli
TODO: cała lista tych 18 xD

Co utrudnia pracę z atomami?

- usuwanie wierchołków
- operacja dopełnienia

Twierdzenie

Klasa atomów (H_1, H_2)-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki (a klasa grafów (H_1, H_2)-wolnych ma ograniczoną szerokość kliki)

Dowód.

TODO: zrobić ten jebitny dowód xD

Twierdzenie

klasa atomów $2P_2$ i domek ma nieograniczoną szerokość kliki.

Dowód.

TODO: zrobić ten mniej jebitny dowód xD

Lista problemów otwartych

- usuwanie wierchołków
- operacja dopełnienia

Bibliografia I

Anthony Bonato and Richard J. Nowakowski.
The game of cops and robbers on graphs.
2011.

Andrea C. Burgess, Rosalind A. Cameron, Nancy E. Clarke, Peter Danziger, Stephen Finbow, Caleb W. Jones, and David A. Pike.
Cops that surround a robber.
Discrete Applied Mathematics, (285: 552-566), 2020.

Nancy E. Clarke, Danny Dyer, and William Kellough.
Eternally surrounding a robber.
arXiv preprint, (arXiv:2408.10452), 2024.

Dziękuję za uwagę!