



WYDZIAŁ ELEKTRONIKI,  
TELEKOMUNIKACJI  
I INFORMATYKI

Imię i nazwisko studenta: Paulina Brzecka  
Nr albumu: 184701  
Poziom kształcenia: studia drugiego stopnia  
Forma studiów: stacjonarne  
Kierunek studiów: Informatyka  
Specjalność: Algorytmy i technologie internetowe

## PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

Tytuł pracy w języku polskim: Analiza algorytmów dla dominowania rzymskiego słabo spójnego

Tytuł pracy w języku angielskim: Analysis of algorithms for weakly connected Roman domination

Opiekun pracy: dr inż. Joanna Raczek

## STRESZCZENIE

Praca opisuje problem dominowania rzymskiego słabo spójnego. Przedstawia definicję problemu, jego genezę historyczną oraz złożoność obliczeniową. Celem pracy jest analiza istniejących i autorskich algorytmów znajdujących funkcje dominujące rzymskie słabo spójne, ich analiza oraz porównanie w kontekście możliwego praktycznego zastosowania.

Zakres pracy obejmuje systematyczny przegląd literatury, analizę istniejących algorytmów, implementację autorskich rozwiązań oraz ocenę ich skuteczności na wybranych przypadkach testowych. Badane algorytmy wyznaczają zarówno najmniejszą wartość funkcji dominowania rzymskiego słabo spójnego, jak i też funkcje dominujące rzymskie słabo spójne, niekoniecznie najmniejsze. Wszystkie jednak wyznaczają prawidłowe, względem definicji funkcje dominujące rzymskie słabo spójne.

Zastosowane metody badawcze obejmowały programowanie liniowe, algorytmy zachłanne, liniowe, aproksymacyjne, mrówkowe, pomiary czasów oraz wizualizację wyników.

Wyniki wskazują na to, że w zależności od charakterystyki i cech grafu istnieje możliwość dobrania odpowiedniego algorytmu rozwiązującego problem w rozsądny czasie i o dobrej jakości rozwiązania.

Ważnym wnioskiem jest przedstawienie teoretycznego potencjału praktycznego zastosowania algorytmów znajdujących funkcje dominujące rzymskie słabo spójne.

**Słowa kluczowe:** algorytmy, optymalizacja, funkcja dominowania rzymskiego słabo spójnego, liczba dominowania rzymskiego słabo spójnego.

## ABSTRACT

The paper describes the problem of weakly connected Roman domination. It presents the definition of the problem, its historical genesis and computational complexity. The aim of the paper is to analyze existing and original algorithms for finding weakly connected Roman domination functions, their analysis and comparison in the context of possible practical application.

The scope of the paper includes a systematic review of the literature, analysis of existing algorithms, implementation of original solutions and evaluation of their effectiveness on selected test cases. The tested algorithms determine both the minimum value of the weakly connected Roman domination function and the weakly connected Roman domination functions, not necessarily minimum. However, all of them determine the correct, in terms of the definition, weakly connected Roman domination function.

The research methods used include linear programming, greedy, linear, approximation, and ant colony algorithms, time measurements, and the result visualization.

The results indicate that depending on the characterization and features of the graph, it is possible to select an appropriate algorithm that solves the problem in a reasonable time and with good quality solutions.

An important conclusion is the presentation of the theoretical potential of practical application of algorithms for finding weakly connected Roman domination functions.

**Keywords:** algorithms, optimization, weakly connected Roman domination function, weakly connected Roman domination number.

# **SPIS TREŚCI**

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Wykaz ważniejszych oznaczeń i skrótów</b>      | <b>7</b>  |
| <b>1 Wstęp i cel pracy</b>                        | <b>8</b>  |
| 1.1 Cel pracy . . . . .                           | 8         |
| 1.2 Zakres pracy . . . . .                        | 8         |
| <b>2 Wprowadzenie teoretyczne</b>                 | <b>9</b>  |
| 2.1 Geneza historyczna . . . . .                  | 9         |
| 2.2 Definicja problemu . . . . .                  | 9         |
| 2.3 Złożoność obliczeniowa . . . . .              | 10        |
| 2.4 Problemy i hipotezy badawcze . . . . .        | 12        |
| 2.5 Przegląd literatury . . . . .                 | 13        |
| 2.6 Metody badań . . . . .                        | 14        |
| <b>3 Badane algorytmy</b>                         | <b>16</b> |
| 3.1 Wprowadzenie . . . . .                        | 16        |
| 3.2 Algorytm Brute Force . . . . .                | 16        |
| 3.2.1 Działanie . . . . .                         | 16        |
| 3.2.2 Poprawność . . . . .                        | 16        |
| 3.2.3 Złożoność i wydajność . . . . .             | 17        |
| 3.2.4 Pseudokod . . . . .                         | 18        |
| 3.3 Algorytm liniowy dla drzew . . . . .          | 19        |
| 3.3.1 Działanie . . . . .                         | 19        |
| 3.3.2 Poprawność . . . . .                        | 22        |
| 3.3.3 Złożoność i wydajność . . . . .             | 23        |
| 3.3.4 Pseudokod . . . . .                         | 23        |
| 3.4 Algorytm programowania liniowego I . . . . .  | 25        |
| 3.4.1 Działanie . . . . .                         | 25        |
| 3.4.2 Poprawność . . . . .                        | 26        |
| 3.4.3 Złożoność i wydajność . . . . .             | 27        |
| 3.4.4 Pseudokod . . . . .                         | 27        |
| 3.5 Algorytm programowania liniowego II . . . . . | 29        |
| 3.5.1 Działanie . . . . .                         | 29        |
| 3.5.2 Poprawność . . . . .                        | 30        |
| 3.5.3 Złożoność i wydajność . . . . .             | 31        |
| 3.5.4 Pseudokod . . . . .                         | 32        |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.6 Algorytm mrówkowy . . . . .  | 34        |
| 3.6.1 Działanie . . . . .  | 34        |
| 3.6.2 Poprawność . . . . .   | 35        |
| 3.6.3 Złożoność i wydajność . . . . .  | 35        |
| 3.6.4 Pseudokod . . . . .  | 35        |
| 3.7 Algorytm aproksymacyjny . . . . .  | 38        |
| 3.7.1 Działanie . . . . .  | 38        |
| 3.7.2 Poprawność . . . . .   | 39        |
| 3.7.3 Złożoność i wydajność . . . . .  | 39        |
| 3.7.4 Pseudokod . . . . .  | 40        |
| 3.8 Algorytm zachłanny . . . . .   | 41        |
| 3.8.1 Działanie . . . . .  | 41        |
| 3.8.2 Poprawność . . . . .   | 41        |
| 3.8.3 Złożoność i wydajność . . . . .  | 42        |
| 3.8.4 Pseudokod . . . . .  | 42        |
| <b>4 Wyniki</b>  | <b>44</b> |
| 4.1 Wprowadzenie . . . . .   | 44        |
| 4.2 Hiperparametry algorytmu mrówkowego . . . . .  | 44        |
| 4.3 Wyniki działania algorytmów . . . . .  | 46        |
| 4.3.1 Grafy rzadkie . . . . .  | 47        |
| 4.3.2 Grafy gęste . . . . .  | 50        |
| 4.3.3 Drzewa . . . . .   | 53        |
| 4.3.4 Grafy bezskalowe . . . . .   | 56        |
| 4.4 Wyniki algorytmów heurystycznych . . . . .   | 59        |
| 4.4.1 Algorytm mrówkowy . . . . .  | 60        |
| 4.4.2 Algorytm zachłanny . . . . .   | 61        |
| 4.4.3 Algorytm aproksymacyjny . . . . .  | 62        |
| 4.4.4 Porównanie algorytmów heurystycznych . . . . .   | 64        |
| <b>5 Zastosowania praktyczne</b>   | <b>65</b> |
| 5.1 Wprowadzenie . . . . .   | 65        |
| 5.2 Rozmieszczenie zabezpieczeń sieci energetycznych . . . . .                                     | 65        |
| 5.3 Rozmieszczenie agentów monitorujących oszustwa w internetowej sieci społecznościowej . . . . . | 68        |
| <b>6 Podsumowanie i wnioski</b>  | <b>72</b> |
| 6.1 Podsumowanie wyników . . . . .   | 72        |
| 6.2 Wnioski i dalsze kierunki badań . . . . .  | 73        |
| <b>Spis rysunków</b>   | <b>78</b> |



## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

- $WCRDP$  – Weakly Connected Roman Domination Problem - problem dominowania rzymskiego słabo spójnego.
- $WCRDF$  – Weakly Connected Roman Domination Function - funkcja dominowania rzymskiego słabo spójnego.
- $\gamma_R^{wc}(G)$  – Weakly Connected Roman Domination Number - liczba dominowania rzymskiego słabo spójnego.
- $n = |V|$  – liczba wierzchołków pewnego grafu  $G$ .
- $m = |E|$  – liczba wierzchołków pewnego grafu  $G$ .
- $CDS$  – Connected Dominating Set - zbiór dominujący spójny.

# **ROZDZIAŁ 1. WSTĘP I CEL PRACY**

Tematem pracy jest analiza algorytmów znajdujących funkcje dominujące rzymskie słabo spójne w grafach. Problem znajdowania liczby dominowania rzymskiego słabo spójnego jest problemem NP-trudnym. Nie są znane zatem dokładne algorytmy rozwiązuające i weryfikujące problem w czasie wielomianowym. Wersja decyzyjna tego problemu, czyli znalezienie funkcji dominowania rzymskiego słabo spójnego, jest NP-zupełna. Dodatkową motywacją jest widoczny potencjał zastosowania tego dominowania w rozwiązywaniu praktycznych problemów. Dlatego niniejsza praca dokonuje analizy istniejących w literaturze i proponowanych algorytmów znajdowania liczby dominowania rzymskiego słabo spójnego, jak i funkcji dominowania rzymskiego słabo spójnego, w celu znalezienia możliwie skutecznych rozwiązań oraz zastosowań. Całe rozważania dotyczą grafów spójnych.

## **1.1 Cel pracy**

Celem badawczym pracy jest opisanie istniejących i opracowanie własnych algorytmów znajdujących funkcje dominujące rzymskie słabo spójne, ich analiza oraz porównanie skuteczności i wyciągnięcie wniosków na temat możliwości ich praktycznego zastosowania.

## **1.2 Zakres pracy**

W ramach pracy dokonano systematycznego przeglądu literatury. W literaturze szczegółowo zdefiniowano ten problem oraz zbadano jego złożoność obliczeniową. Zaproponowano również kilka algorytmów rozwiązuujących ten problem - znajdujących liczbę dominowania rzymskiego słabo spójnego - wykorzystujących m.in. programowanie liniowe - jak i znajdujących funkcję dominowania rzymskiego słabo spójnego (niekoniecznie najmniejszą liczbę dominowania rzymskiego słabo spójnego). Na podstawie znalezionej literatury zaimplementowane zostały dwa algorytmy programowania liniowego oraz algorytm  $2(1 + \epsilon)(1 + \ln(\Delta - 1))$ -aproksymacyjny. W ramach własnej pracy, zaimplementowano algorytm brute force, zachłanny oraz mrówkowy. Wraz z promotorką udało się opracować i zaimplementować dodatkowo algorytm liniowy dla drzew. Niniejsza praca przedstawia problem dominowania rzymskiego słabo spójnego oraz jego złożoność obliczeniową. Opisuje wymienione algorytmy, porównuje je pod kątem wydajności, poprawności oraz czasu działania. Testy przeprowadzono na różnych klasach grafów: gęstych, rzadkich, drzewach oraz bezskalowych. Następnie dokonano analizy potencjalnych praktycznych zastosowań, w których algorytmiczne rozwiązanie tego problemu byłoby przydatne. Na koniec dokonano podsumowania wszystkich wyników dotyczących przeprowadzonych rozważań.

## ROZDZIAŁ 2. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

### 2.1 Geneza historyczna

Problem swoją nazwę zawdzięcza imperium rzymskiemu. Po raz pierwszy został opisany w artykule „Defend Roman Empire!” [14]. Obrazuje on problem następująco: Każdy wierzchołek grafu reprezentuje pewną lokalizację (miasto, wzgórze) w Imperium Rzymskim. Lokalizacja (wierzchołek  $v$ ) jest niechroniona, jeśli nie stacjonują w niej żadne legiony wojska ( $f(v) = 0$ ) oraz chroniona jeśli ( $f(v) \in \{1, 2\}$ ). Wartości te oznaczają liczbę legionów stacjonujących w danej lokalizacji. Niechroniona lokalizacja może być ochroniona poprzez wysłanie legionu stacjonującego w lokalizacji sąsiadującej. W czwartym wieku cesarz Konstantyn Wielki wydał dekret zakazujący przemieszczenia się legionu do lokalizacji sąsiadującej, jeśli sprawi to, że aktualna lokalizacja pozostanie niechroniona. Dlatego, żeby móc wysłać legion do sąsiedniej lokacji, w aktualnej muszą stacjonować dwa legiony. Oczywiście, cesarzowi zależało na jak najmniejszych kosztach utrzymywania legionów, a zatem, żeby było ich jak najmniej [7]. Problem można zatem zinterpretować grafowo, gdzie lokalizacje to wierzchołki grafu, krawędzie to drogi pomiędzy nimi, a liczba legionów to wartości na wierzchołkach. W celu zachowania ciągłości efektywnej komunikacji między legionami wymagana jest słaba spójność zbioru dominującego.

### 2.2 Definicja problemu

Jako, że problem nie jest powszechnie znany, należy go zdefiniować, wprowadzając następujące pojęcia [7]:

**Definicja 1** Funkcję dominującą rzymską w grafie  $G = (V, E)$ , definiuje się jako funkcję  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , która spełnia warunek, że każdy wierzchołek  $u$ , dla którego  $f(u) = 0$ , ma wśród swoich sąsiadów co najmniej jeden wierzchołek  $v$  taki, że  $f(v) = 2$ .

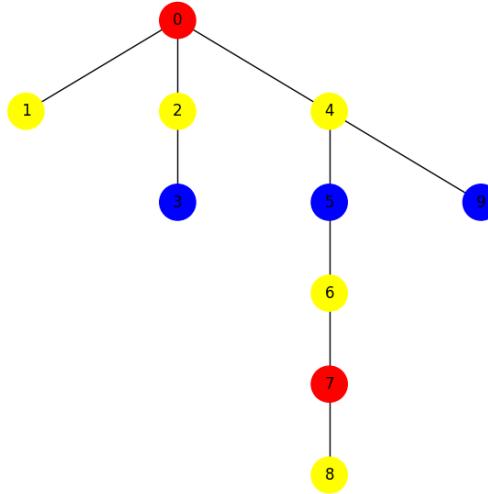
**Definicja 2** Dominujący zbiór  $D \subseteq V$  jest zbiorem dominującym słabo spójnym grafu  $G$  jeśli graf  $(V, E \cap (D \times V))$  jest spójny.

**Definicja 3** Funkcję dominującą rzymską słabo spójną na grafie  $G$  definiuje się jako taką funkcję dominującą rzymską, dla której zbiór wierzchołków  $\{u \in V : f(u) \in \{1, 2\}\}$  stanowi jednocześnie słabo spójny zbiór dominujący.

**Definicja 4** Wagę funkcji dominującej rzymskiej słabo spójnej definiujemy jako  $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$ . Najmniejszą wartość tej funkcji nazywamy liczbą dominowania rzymskiego słabo spójnego -  $\gamma_R^{wc}(G)$ .

**Definicja 5** Jeśli graf  $G$  ma następującą własność:  $\gamma_R^{wc}(G) = 2\gamma_{wc}(G)$ , to nazywa się go grafem rzymskim słabo spójnym.

TreeLinear  
Weakly connected Roman domination number: 7



Rysunek 2.1: Przykład grafu rzymskiego słabo spójnego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

Od tego momentu funkcja dominowania rzymskiego słabo spójnego będzie definiowana jako  $WCRDF$ . Problem dominowania rzymskiego słabo spójnego będzie oznaczany jako  $WCRDP$ .

### 2.3 Złożoność obliczeniowa

Poniższy szkic dowodu, wskazujący na NP-zupełność problemu znajdowania  $WCRDF$ , został przedstawiony w artykule: „Weakly connected Roman domination in graphs” [7]. Za pomocą redukcji alfa NP-zupełny problem dokładnego pokrycia 3 zbiorami (Exact Cover by 3-Sets, X3C) [4] zostanie sprowadzony do problemu  $WCRDF$ , czym zostanie udowodniona NP-zupełność znajdowania  $WCRDF$  w wersji decyzyjnej. Naturalnie, wersja minimalizacyjna - poszukiwanie  $\gamma_R^w(G)$  jest wtedy NP-trudne.

**Dane:** Spójny graf  $G$  oraz dodatnia liczba całkowita  $k$ .

**Pytanie:** Czy istnieje słabo spójna funkcja dominująca rzymska w grafie  $G$  o wagie co najwyżej  $k$ ?

**Problem  $WCRDF$  jest NP-zupełny, nawet dla grafów podziału (graf, w którym można wydzielić klikę oraz zbiór niezależny) oraz grafów dwudzielnych.**

Szkic dowodu:

Problem  $WCRDF$  należy do klasy NP, ponieważ dla danego przyporządkowania  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$  można w czasie wielomianowym sprawdzić, czy  $f$  ma wagę co najwyżej  $k$  oraz czy spełnia warunki  $WCRDF$ .

Redukcja jest przeprowadzana z problemu dokładnego pokrycia 3-zbiorami (Exact Cover by 3-Sets, X3C). Dla danej instancji  $X = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  i rodziny zbiorów  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ , gdzie każdy  $C_j \subseteq X$  oraz  $|C_j| = 3$ , konstruowany jest graf podziału  $G$ .

Dla każdego elementu  $x_i \in X$  oraz zbioru  $C_j \in \mathcal{C}$  tworzone są wierzchołki. Dodaje się krawędź między  $x_i$  a  $C_j$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x_i \in C_j$ . Dodatkowo wierzchołki odpowiadające zbiorom  $C_j$  tworzą klikę  $K_m$  (poprzez połączenie tych wierzchołków krawędziami). Przyjęto:  $k = 2q$ .

Można wykazać, że  $\mathcal{C}$  zawiera dokładne pokrycie zbioru  $X$  wtedy i tylko wtedy, gdy graf  $G$  posiada słabo spójną funkcję dominującą rzymską o wadze co najwyżej  $k$ .

Przykładową konstrukcję można zdefiniować następująco:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, \\ C_2 = \{x_2, x_4, x_5\}, \\ C_3 = \{x_4, x_5, x_6\} \end{array} \right\}$$

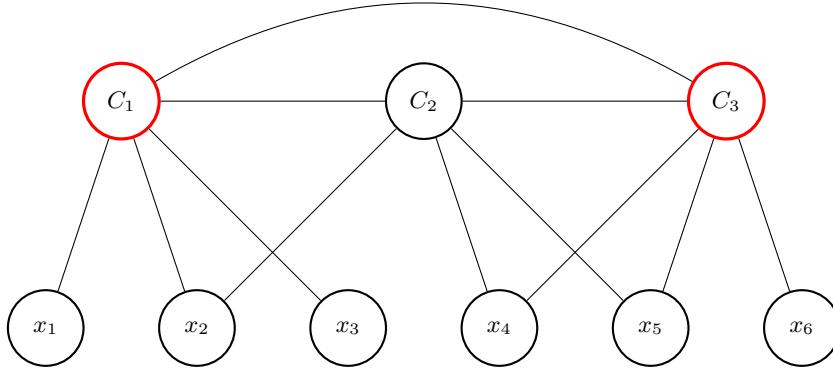
$$C_1 \cup C_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} = X$$

$$q = 2$$

$$k = 2q = 4$$

Zgodnie z konstrukcją, wierzchołki  $x$  zostaną połączone z wierzchołkami  $C$ , zgodnie z  $x_i \in C_j$ . W tym przypadku liczba zbiorów dokładnego pokrycia 3-zbiorami wynosi 2 i są to zbiory  $C_1$  oraz  $C_3$ . Je również należy połączyć krawędzią. Wierzchołki należące do zbioru dominującego to  $C_1$  oraz  $C_3$ . Skonstruowany graf  $G$  składa się z wierzchołków zbioru  $X$  i  $C_1$  oraz  $C_3$ . Zgodnie z WCRDF, nadanie wierzchołkom  $C_1$  oraz  $C_3$  wartości 2 spełnia jego definicję.

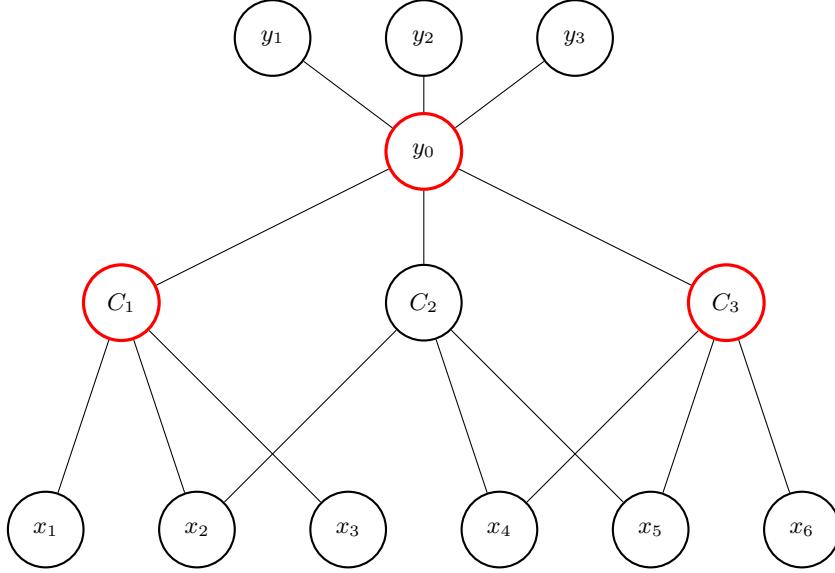
Poniżej umieszczono rysunek poglądowy (na czerwono wierzchołki należące do zbioru dominującego):



Aby uzyskać wynik również dla grafów dwudzielnych, należy zmodyfikować konstrukcję: zamiast dodawać krawędzie między wierzchołkami  $C_j$ , dodane zostaną cztery nowe wierzchołki  $y_0, y_1, y_2, y_3$  oraz krawędzie  $y_0y_1, y_0y_2, y_0y_3$  i  $y_0C_j$  dla każdego  $j$ . Wtedy  $k = 2q + 2$ .

Konstrukcję dla przykładowego grafu dwudzielnego przedstawia poniższy rysunek.  $k$  bę-

dzie wynosiło 6.



## 2.4 Problemy i hipotezy badawcze

Z racji tego, że znajdowanie WCRDF jest problemem NP-zupełnym, w wersja minima-lizacyjna tego problemu, czyli znalezienie  $\gamma_R^{wc}(G)$  jest NP-trudne, nie są znane zatem dokładne algorytmy rozwiązuające i weryfikujące problem w czasie wielomianowym. W związku z tym na-suwa się pierwsze pytanie badawcze:

**Jakie algorytmy są w stanie znaleźć WCRDF? Które z nich są w stanie znaleźć do-datkowo  $\gamma_R^{wc}(G)$ ?**

Już podczas dowodu złożoności tego problemu należało rozpatrzyć przypadki dla różnych klas grafów. Stąd kolejne pytania:

**Czy czas i jakość działania algorytmów będzie uzależniona od klasy grafów? Czy warto tworzyć algorytmy dla konkretnych klas grafów?**

Bardzo ważne dla problemu tej klasy mogą być algorytmy heurystyczne, czyli w tym kon-tekście wyznaczające WCRDF zgodnie z definicją, lecz niekoniecznie wyznaczające optymalne  $\gamma_R^{wc}(G)$ . Niniejsza praca powinna zweryfikować następujący problem badawczy:

**Czy i jakie algorytmy heurystyczne mogą skutecznie przybliżyć wartość  $\gamma_R^{wc}(G)$  w czasie krótszym niż dokładne algorytmy?**

Wśród algorytmów heurystycznych analizowany będzie algorytm mrówkowy, wybrany ze względu na to, że potrafi dawać zadowalające wyniki w wielu problemach optymalizacyjnych, przy-kładowo dla problemu komiwojażera [11]. Z racji dużej parametryzacji tego algorytmu należy zwe-ryfikować następujące pytanie:

**Czy hiperparametry algorytmu mrówkowego można dostroić w taki sposób, aby ten algorytm znajdował  $\gamma_R^{wc}(G)$  bliską optymalnej?**

Dodatkowo będzie weryfikowana hipoteza, czy heurystyka lokalna w postaci liczby sąsiadów wierz-chołka, będzie dawać  $\gamma_R^{wc}(G)$  bliską optymalnej.

## 2.5 Przegląd literatury

W 2004 roku zdefiniowano formalnie funkcję dominowania rzymskiego (RDF) [3] i od tego czasu w wielu publikacjach analizowano właściwości tego parametru oraz inne wersje dominowania rzymskiego, m.in. silne, mieszane, totalne dominowanie rzymskie.

W artykule z 2019 roku [7] wprowadzono pojęcie słabo spójnego dominowania rzymskiego. Zdefiniowano WCRDF oraz  $\gamma_R^{wc}(G)$  oraz zbadano następujące właściwości:

- Dla każdego spójnego grafu  $G$  zachodzi:

$$\gamma_{wc}(G) \leq \gamma_R^{wc}(G) \leq 2\gamma_{wc}(G)$$

co oznacza, że liczba słabo spójnego dominowania rzymskiego jest ograniczona od dołu przez klasyczną liczbę słabo spójnego dominowania oraz od góry przez jej podwojenie.

- Dla spójnego grafu  $G$ ,  $\gamma_{wc}(G) = \gamma_R^{wc}(G)$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $G = K_1$ .
- Dla dowolnego spójnego grafu  $G$  o  $n$  wierzchołkach:

$$\gamma_R^{wc}(G) \leq n$$

z równością wtedy i tylko wtedy, gdy  $G \in \{K_1, K_2\}$ .

- Jeżeli  $\gamma_R^{wc}(G) < n$  oraz  $f = (V_0, V_1, V_2)$  jest funkcją WCRDF, to zachodzi:

$$|V_0| > 0 \quad \text{oraz} \quad |V_2| > 0,$$

czyli co najmniej jeden wierzchołek musi mieć wartość 0, a co najmniej jeden wartość 2.

Dodatkowo pokazano, że problem ten jest NP-zupełny, nawet dla grafów dwudzielnych.

W 2021 rozszerzono wiedzę z poprzedniej publikacji o charakterystykę słabo spójnych drzew rzymskich oraz pokazano, że sprawdzenie, czy graf dwudzielnny jest rzymski słabo spójny jest co-NP-trudne [12].

W 2021 roku Chakradhar i współautorzy zaproponowali dwa nowe modele programowania liniowego całkowitoliczbowego oraz algorytm  $2(1+\epsilon)(1+\ln(\Delta-1))$ -aproksymacyjny. W ramach niniejszej pracy, analizowane będą te dwa modele programowania liniowego oraz algorytm aproksymacyjny [2]. Dodatkowo analizowane będą propozycje własne rozwiązania tego problemu.

W 2023 roku ukazał się artykuł proponujący GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) - zachłanna losowa procedura adaptacyjnego przeszukiwania dla problemu znajdowania  $\gamma_R^{wc}(G)$ , poprzez zdefiniowanie funkcji zachłannych: Dscore (dominowanie) i Nscore (sąsiedztwo), strategie tabu w celu uniknięcia zapętlenia oraz lokalnych przeszukiwań w celu optymalizacji rozwiązania. Jednakże, autorzy artykułu źle zrozumieli definicję WCRDP, dlatego jego wyniki nie zostały dalej analizowane [9].

Literatura proponuje również praktyczne zastosowanie rozwiązania tego problemu w obecnych czasach. Mianowicie, kosztowne pojazdy służeb ratunkowych powinny być rozmieszczane

tak, aby były w stanie udzielić pomocy potrzebującym, przy możliwie dużej redukcji kosztów utrzymania takiego pojazdu. Dlatego, na wzór legionów rzymskich, w budynkach służb ratunkowych powinien znajdować się pojazd, bądź być możliwość wypożyczenia go z sąsiedniej (najbliższej) lokalizacji służb ratunkowych [6].

Na podstawie przeglądu literatury można zauważyć, że WCRDP nie jest powszechnie znany i poza prezentowanymi powyżej publikacjami nie znaleziono zbyt dużo więcej godnych uwagi pozycji dotyczących konkretnie tej wersji problemu.

## 2.6 Metody badań

W celu implementacji i testowania wydajności oraz poprawności algorytmów, stworzono program w języku Python, ze wsparciem następujących bibliotek:

- networkx - pakiet dostarczający funkcje umożliwiające operacje na grafach, wykresach i sieciach
- matplotlib - do wyświetlania wyników działania algorytmów w postaci wykresów grafów
- time - wykorzystywane do pomiarów czasu pracy algorytmów
- pulp - do programowania liniowego
- pandas - do analizy danych z csv
- geopandas - do analizy współrzędnych geograficznych
- itertools - do zagadnień kombinatorycznych

Program umożliwia wprowadzenie dowolnego grafu w postaci listy wierzchołków oraz krawędzi, jak i wygenerowanie losowego grafu. Następnie wybrane algorytmy analizują dany graf poprzez przypisywanie odpowiednich wartości wierzchołkom oraz wyliczania liczby dominowania rzymskiego słabo spójnego. Dla każdego z algorytmów wyznaczany i zapisywany jest ich czas działania. Na końcu program wyświetla rysunek grafu z nadanymi wartościami na wierzchołkach, odpowiadającym WCRDF.

W celu przeprowadzenia testów wygenerowano oraz zapisano w plikach grafy następujących klas:

- gęste - `nx.erdos_renyi_graph( $p=0.7$ )` - z racji wielu krawędzi, co może znacznie wpływać na wyniki osiągane przez algorytmy, gdzie  $p$  to prawdopodobieństwo wystąpienia krawędzi,
- rzadkie - `nx.erdos_renyi_graph( $p=0.3$ )` - z racji mniejszej liczby krawędzi, w celu zweryfikowania hipotezy, że dla tych grafów algorytmy będą działały szybciej,
- drzewa - `nx.random_unlabeled_rooted_tree( $n$ )` - z racji implementacji specjalnego liniowego algorytmu dla drzew, który znajduje  $\gamma_R^{wc}(G)$  oraz specyficznych własności drzew,
- bezskalowe - `nx.barabasi_albert_graph()` - grafy nieregularne, z powodu hipotetycznych zastosowań praktycznych, dobrze odzwierciedlają naturalnie powstające na świecie grafy np. sieci społecznościowych, komputerowych, energetycznych.

Grafy te wygenerowano kilka razy dla konkretnej liczby wierzchołków. Liczby wierzchołków, dla których przeprowadzano analizę to [10, 20, 30, 40, 50]. Wszystkie algorytmy zostały użyte

dla tego samego zestawu grafów, w celu zachowania miarodajności przy analizie porównawczej. Wszystkie wyniki działania algorytmów na wszystkich wygenerowanych przykładowych grafach zostały zapisane w pliku csv. Zapisano tam również pomiary czasu, WCRDF oraz wyznaczoną  $\gamma_R^{wc}(G)$ . Dodatkowo zapisano też rysunki grafów wraz z przypisanymi wartościami WCRDF.

Czas mierzono za pomocą funkcji `time.perf_counter_ns()`, dając wyniki w nanosekundach o dokładności pomiaru 100 [ns]. Wyniki pomiaru czasu działania są uśrednione, wykonywane pięciokrotnie, aby uniknąć niespodziewanych odchyleń.

Przeprowadzono również dostosowywanie parametrów dla algorytmu mrówkowego na wcześniej wygenerowanych grafach, w celu znalezienia jak najlepszych parametrów dla tego konkretnego problemu. Następnie, na podstawie wielkości błędu dokonano wyboru najlepszego zestawu parametrów, których używano później w docelowej analizie porównawczej.

Algorytmy wyznaczające poprawnie WCRDF, jednakże nie zawsze wyznaczające  $\gamma_R^{wc}(G)$ , poddano dodatkowej analizie w celu określenia rozbieżności od optymalnego wyniku.

Następnie algorytmy zostały poddane analizie na grafach naturalnie powstały. Dzięki bibliotece geopandas utworzono mapę Polski, a następnie naniesiono na niej punkty odpowiadające węzłom przesyłowym sieci najwyższych napięć w Polsce, na podstawie istniejącego planu. Na grafie starano się odwzorować najważniejsze punkty i krawędzie tej sieci przesyłowej. Z tych danych powstał graf, który następnie zbadano przy użyciu zaimplementowanych algorytmów. Rozmieszczenie wartości WCRDF ma odpowiadać lokalizacjom mechanizmów zabezpieczających sieć przesyłową w razie awarii jednej ze stacji [10].

Następnie analizowano naturalne grafy odzwierciedlające sieci społecznościowe. Są to: mały graf sieci klubu karate Zacharego z 34 wierzchołkami i 78 krawędziami [8], oraz graf dużej sieci społecznościowej znajomych z Facebook'a (4039 wierzchołki i 80234 krawędzi) [13]. W przypadku sieci społecznościowych WCRDF może mieć zastosowanie w optymalnym rozmieszczeniu agentów wykrywających oszustwa w internetowej sieci społecznościowej.

Dla grafów naturalnie powstały również mierzono czas działania, jak i jakość prezentowanych przez algorytmy wyników.

## **ROZDZIAŁ 3. BADANE ALGORYTMY**

### **3.1 Wprowadzenie**

Niniejszy rozdział opisuje algorytmy znajdujące funkcje dominujące rzymskie słabo spójne. Zostaną one przedstawione pod względem schematu działania, złożoności i wydajności, poprawności oraz podany ich pseudokod w języku angielskim, w celu zachowania czytelności. Lista analizowanych algorytmów jest następująca:

- algorytm brute force - Brute Force,
- algorytm liniowy dla drzew - TreeLinear,
- algorytm programowania liniowego I - ILP,
- algorytm programowania liniowego II - ILP2,
- algorytm mrówkowy - AntColony,
- algorytm aproksymacyjny - Approx,
- algorytm zachłanny - Greedy.

### **3.2 Algorytm Brute Force**

Poprawny algorytm Brute Force dla tego problemu nie został znaleziony wśród istniejących rozwiązań, dlatego został on zaprojektowany i zaimplementowany w ramach tej pracy.

#### *3.2.1 Działanie*

Jest to w zasadzie trywialna implementacja dokładnego algorytmu wyznaczającego WCRDF poprzez sprawdzenie każdej kombinacji wartości  $\{0, 1, 2\}$  na wierzchołkach grafu wejściowego. Każda kombinacja sprawdzana jest pod względem poprawności według definicji słabo spójności w następujący sposób:

- wyznaczany jest zbiór indukowany, który składa się ze zbioru dominującego (wierzchołki z wartościami  $\{1, 2\}$ ) oraz sąsiadów wierzchołków zbioru dominującego,
- sprawdzenie, czy wszystkie wierzchołki z wartością 0 mają sąsiada z wartością 2,
- dla każdego wierzchołka ze zbioru indukowanego dodawane są krawędzie, ale tylko te wychodzące z wierzchołków zbioru dominującego
- następnie sprawdzenie, czy powstały graf jest spójny. Jeśli jest, to zbiór spełnia założenia definicji,
- ze wszystkich prawidłowych kombinacji wybierana jest ta o najmniejszej sumie WCRDF.

#### *3.2.2 Poprawność*

Poniżej przedstawiona zostanie analiza poprawności algorytmu BruteForce. Algorytm sprawdza wszystkie możliwe kombinacje funkcji, gwarantując kompletność przeszukania oraz poprawność weryfikacji kombinacji względem definicji WCRDF.

### **Kompletność przeszukania**

Algorytm generuje wszystkie możliwe przypisania wartości  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ , co daje  $3^n$  kombinacji, więc żadne potencjalne rozwiązanie nie będzie pominięte.

### **Poprawność weryfikacji**

Dla każdej funkcji  $f$ , algorytm sprawdza:

- warunek dominowania rzymskiego - sprawdzenie, czy wszystkie wierzchołki z wartością 0 mają sąsiada z wartością 2.
- warunek słabej spójności - wyznaczany jest podgraf indukowany, który składa się ze zbioru dominującego (wierzchołki z wartościami 1, 2) oraz sąsiadów wierzchołków zbioru dominującego. Dla każdego wierzchołka ze zbioru indukowanego dodawane są krawędzie, ale tylko te wychodzące z wierzchołków zbioru dominującego. Sprawdzenie spójności tego podgrafa.

### **Minimalność**

Spośród poprawnych kombinacji wartości WCRDF wybierana jest funkcja o najmniejszej sumie wag przypisanych do wierzchołków.

Zatem algorytm poprawnie wyznacza WCRDF oraz wartość  $\gamma_R^{\text{WC}}(G)$ .

#### 3.2.3 Złożoność i wydajność

Algorytm ma złożoność wykładniczą, zatem nie będzie wykonywalny w rozsądny czasie dla większych grafów, z uwagi na:

- generowanie wszystkich kombinacji możliwych przypisań:  $3^n$ ,
- sprawdzanie własności zbioru słabo spójnego dla każdego przypisania:  $n^2$

Zatem złożoność czasowa algorytmu wynosi  $O(3^n \cdot n^2)$

Złożoność pamięciowa ogranicza się do przechowywania grafu w pamięci i wynosi  $O(n + m)$ .

### 3.2.4 Pseudokod

---

#### Algorytm Brute Force

---

```

1: function FINDROMANDOMINATINGSET(graph)
2:   Initialize min_roman_number  $\leftarrow \infty$ 
3:   Initialize best_node_values  $\leftarrow \text{None}$ 
4:   nodes  $\leftarrow$  list of nodes in graph
5:   for each assignment of values 0, 1, 2 to all nodes do
6:     node_values  $\leftarrow$  mapping of nodes to values
7:     for each node in graph do                                 $\triangleright$  Sprawdzanie warunku dominowania
8:       if node_values[node] = 0 then
9:         if not any neighbor of node has value 2 then
10:          Continue to next assignment
11:        end if
12:      end if
13:    end for
14:    induced_set  $\leftarrow$  nodes with values {1, 2}
15:    for each node in induced_set do
16:      Add all its neighbors to induced_set
17:    end for
18:    Create empty induced_graph
19:    for each node in induced_set do
20:      if node_values[node] is 1 or 2 then
21:        for each neighbor in graph do
22:          if neighbor in induced_set then
23:            Add edge to induced_graph
24:          end if
25:        end for
26:      end if
27:    end for
28:    if induced_graph is connected then
29:      Compute roman_number  $\leftarrow$  sum of node_values
30:      if roman_number < min_roman_number then
31:        Update min_roman_number and best_node_values
32:      end if
33:    end if
34:  end for
35:  return (min_roman_number, best_node_values)
36: end function

```

---

### 3.3 Algorytm liniowy dla drzew

Algorytm ten został zaprojektowany i zaimplementowany we współpracy z promotorką.

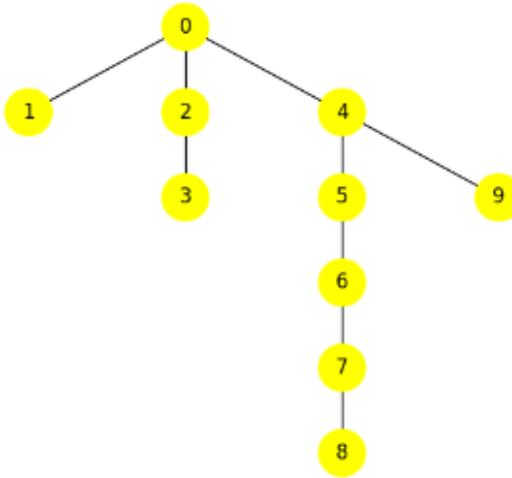
#### 3.3.1 Działanie

Dla każdego wierzchołka definiujemy następujące parametry:

- $v[R']$  - wartość funkcji dominowania rzymskiego słabo spójnego w wierzchołku  $v$ , z założeniem, że  $v[R'] \in \{0, 1, 2\}$
- $v[n00']$  - oznacza liczbę dzieci z  $R = 0$  oraz bez sąsiada z  $R = 2$  (dziecko niezdominowane)
- $v[n01']$  - oznacza liczbę dzieci z  $R = 0$  i z sąsiadem z  $R = 2$  (dziecko zdominowane)
- $v[n1']$  - oznacza liczbę dzieci wierzchołka  $v$  z  $R = 1$
- $v[n2']$  - oznacza liczbę dzieci wierzchołka  $v$  z  $R = 2$
- $v[sw']$  - oznacza liczbę dzieci wierzchołka  $v$  z  $n00 = 1$  i  $n01 = 0$ . (wierzchołek wspierający, czyli taki, którego dziecko jest liściem)
- $v[ch'] = 1$  jeśli  $v[sw'] > 1$  lub jeśli  $v[sw'] = 1$  i mający przynajmniej jedno dziecko z  $R = 0$ ; w przeciwnym razie  $v[ch'] = 0$ . Jeśli  $v[ch'] = 1$ , to  $v[R'] = 2$  i w fazie 2 każde dziecko  $v$  z  $n00 = 1$  i z  $n01 = 0$  dostaje  $R = 0$  i jego jedyne dziecko z  $R = 0$  zmienia wartość na  $R = 1$ .
- $v[child']$  - jeśli  $v$  jest wierzchołkiem wspierającym, wtedy wartość ta jest numerem liścia sąsiadującego z  $v$ .

Algorytm ma 2 fazy. W obu fazach rozpatrywane są wszystkie wierzchołki drzewa według odwrotnego porządku drzewa, czyli od ostatniego wierzchołka do korzenia (reverse tree-order). Wszystkie początkowo zdefiniowane wartości wynoszą 0. W bardzo ogólnym rozumieniu, rozpatrywany jest każdy wierzchołek na podstawie sąsiedztwa, relacji ojciec-dziecko oraz wartości zdefiniowanych parametrów i aktualizację ich w obu fazach. Wartości  $R$  przy każdym wierzchołku, to wartości funkcji dominowania rzymskiego słabo spójnego.

Z racji sporego stopnia skomplikowania algorytmu, jego działanie zostanie przedstawione na przykładzie. Dany jest graf  $G$  będący drzewem ukorzenionym o 10 wierzchołkach, ponumerowanych wartościami od 0 do 9. Zakładamy, że wyznaczenie ojca każdego z wierzchołków jest trywialne, dlatego podczas rozważań wyznaczanie ojca wierzchołka będzie pomijane.



Rysunek 3.1: Graf  $G$  - przykładowe drzewo.

- Jeśli wierzchołek jest liściem i nie jest korzeniem to następuje zwiększenie wartości 'n00' ojca o 1.

Zatem dla liści 1,3,8,9, wartości ich ojców wyglądają następująco:

$$T[7]['n00'] = 1$$

$$T[7]['child'] = 8 \text{ (od wierzchołka 8)}$$

$$T[4]['n00'] = 1$$

$$T[4]['child'] = 9 \text{ (od wierzchołka 9)}$$

$$T[2]['n00'] = 1$$

$$T[2]['child'] = 3 \text{ (od wierzchołka 3)}$$

$$T[0]['n00'] = 1$$

$$T[0]['child'] = 1 \text{ (od wierzchołka 1)}$$

- Jeśli wierzchołek nie jest liściem:

- Sprawdzenie czy wierzchołek posiada tylko jedno niezdominowane dziecko i posiada ojca. W tym przypadku ojciec będzie wierzchołkiem wspierającym.

$$T[6]['sw'] = 1 \text{ (od wierzchołka 7)}$$

$$T[0]['sw'] = 2 \text{ (od wierzchołka 4 i 2)}$$

- Sprawdzenie sumy wartości dzieci zdominowanych, niezdominowanych oraz liczby dzieci dla których wierzchołek jest wspierający. Jeśli ta suma jest większa od 1, to wartość tego wierzchołka ustawiamy na 2, a parametr 'ch' na 1.

$$T[0]['R'] = 2 \text{ (od wierzchołka 0)}$$

$$T[0]['ch'] = 1 \text{ (od wierzchołka 0)}$$

- Jeśli wierzchołek ma ojca to parametr 'n2' ojca zostaje zwiększony o 1, a jeśli wierzchołek posiada tylko jedno niezdominowane dziecko, to zostaje zmniejszony parametr wspierający 'sw' u ojca.

- Jeśli wierzchołek nie jest wspierający:

- Jeśli wierzchołek posiada niezdominowane dzieci lub jedno dziecko i żadnych dzieci

z wartością 2 lub dzieci zdominowane, to wtedy wierzchołek będzie miał wartość

2. Dla istniejącego ojca wierzchołka zostaje zwiększone 'n2'.

$$T[7][R'] = 2 \text{ (od wierzchołka 7)}$$

$$T[6][n2'] = 1 \text{ (od wierzchołka 7)}$$

$$T[4][R'] = 2 \text{ (od wierzchołka 4)}$$

$$T[0][n2'] = 2 \text{ (od wierzchołka 4 i 2)}$$

$$T[2][R'] = 2 \text{ (od wierzchołka 2)}$$

ii. Jeśli wierzchołek posiada niezdominowane dziecko, to danemu wierzchołkowi przypisywana jest wartość 0, a temu dziecku wartość 1, a dla ojca zostaje zmniejszona wartość wspierania.

iii. Jeśli wierzchołek posiada tylko dzieci zdominowane, to danemu wierzchołkowi przypisywana jest wartość 1, a ojcu zostaje zwiększena wartość 'n1'.

$$T[5][R'] = 1 \text{ (od wierzchołka 5)}$$

$$T[4][n1'] = 1 \text{ (od wierzchołka 5)}$$

(d) Jeśli wartość wierzchołka wynosi 0, posiada on dzieci z wartością 2 oraz ojca, to zostaje zwiększena wartość ojca 'n01' o 1,

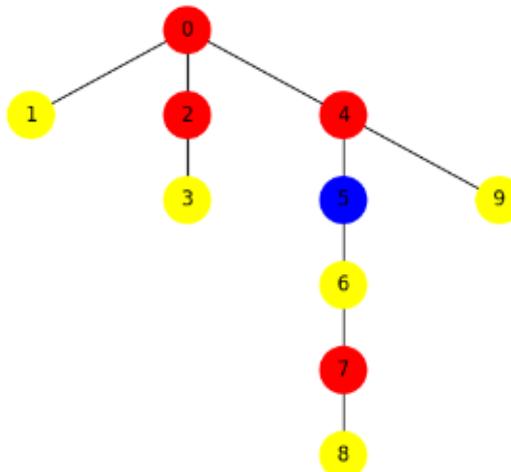
$$T[5][n01'] = 1 \text{ (od wierzchołka 6)}$$

(e) Jeśli wartość wierzchołka wynosi 0, nie posiada on dzieci z wartością 2 oraz ojca, to zostaje zwiększena wartość ojca 'n00' o 1,

3. Korzeń należy rozpatrzyć dodatkowo. Jeśli nie posiada on dzieci z wartościami 2 i sam ma wartość 0, to przypisujemy mu  $R = 2$ ,

4. Jeśli liczba dzieci korzenia z  $R = 1$  jest równa liczbie dzieci pomniejszonej o 1, to korzeń również ma wartość 1.

Zdjęcie przedstawia zachowanie algorytmu po fazie 1. Widać, że przypisanie nie jest jeszcze optymalne.



Rysunek 3.2: Graf  $G$  - po fazie 1. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

W fazie 2, dla każdego wierzchołka posiadającego ojca, tylko jedno dziecko niezdominowane i parametr ojca 'ch' wynoszący 1, wtedy należy „zmienić” układ, poprzez ustawienie 0 na obecnym wierzchołku, ustawienie dziecka na 1 oraz zwiększenie liczby dzieci niedominowanych ojca wierzchołka. Ten warunek spełniony jest dla wierzchołków 4 i 2. Zatem:

$$T[4]['R'] = 0 \text{ (od wierzchołka 4)}$$

$$T[9]['R'] = 1 \text{ (dziecko wierzchołka 4)}$$

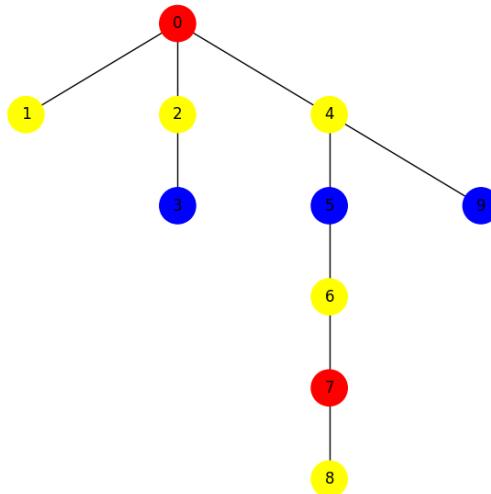
$$T[2]['R'] = 0 \text{ (od wierzchołka 2)}$$

$$T[3]['R'] = 1 \text{ (dziecko wierzchołka 2)}$$

$$T[0]['n00'] = 3 \text{ (ojciec wierzchołków 4 i 2)}$$

Poniższy rysunek przedstawia prawidłowe, optymalne przypisanie wartości  $R$  po fazie 2.

TreeLinear  
Weakly connected Roman domination number: 7



Rysunek 3.3: Graf  $G$  - po fazie 2 - finalna wersja. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

### 3.3.2 Poprawność

Poprawność algorytmu dla drzew zostanie wyznaczona poprzez szkic dowodu indukcyjnego. Dla każdego drzewa  $T = (V, E)$  zakłada się, że algorytm liniowy poprawnie wyznacza funkcję  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  będącą WCRDF o najmniejszej wadze  $\gamma_R^{\text{wc}}(T)$ .

#### Krok początkowy:

- Dla  $|V| = 1$ ,  $f(v) = 1$ , dominuje sam siebie. Algorytm wykrywa brak dzieci i przypisuje  $R = 1$  zgodnie z warunkiem korzenia bez  $n1$ .
- Dla  $|V| = 2$ : liść otrzymuje  $R = 0$ , a korzeń  $R = 2$ , ponieważ nie ma innych dzieci dominujących. Sytuacja zostaje poprawnie wykryta na podstawie  $n00 = 1$ ,  $n01 = 0$ , co daje przypisanie  $R = 2$  ojcu.

#### Krok indukcyjny:

Załóżmy, że algorytm wyznacza poprawnie  $\gamma_R^{\text{wc}}(T)$  dla wszystkich drzew o liczbie wierzchołków

$< n$ . Wykażemy, że działa również dla dowolnego drzewa  $T$  o  $|V| = n$ .

Niech  $r$  będzie korzeniem drzewa  $T$ , a  $T_1, \dots, T_k$  jego poddrzewami o korzeniach  $v_1, \dots, v_k$ . Z założenia indukcyjnego dla każdego  $T_i$  funkcja  $f_i$  wyznaczona przez algorytm spełnia warunki WCRDF i jest najmniejsza na  $T_i$ .

### Spójność i dominowanie:

Podczas przetwarzania  $r$ , algorytm zbiera informacje o:

- liczbie dzieci z  $f = 0$  i bez dominowania ( $n00$ ),
- liczbie dzieci wspierających ( $sw$ ),
- liczbie dzieci z  $f = 1$  i  $f = 2$ .

W zależności od tych wartości:

- jeśli  $n00 > 1$  lub jeśli posiada tylko jedno dziecko niezdominowane, a pozostałe dzieci mają  $f = 0$  -  $r$  przyjmuje  $f(r) = 2$ ,
- jeśli  $n00 = 1$  i wspierające dziecko posiada jedno dziecko z  $f = 0$ , to jego dziecko dostaje  $f = 1$  w Fazie 2,
- jeśli wszystkie dzieci są już zdominowane,  $r$  może przyjąć  $f = 1$ ,
- jeśli  $r$  jest zdominowany przez któreś dziecko z  $f = 2$  i jego dołączenie do zbioru nie jest konieczne do zapewnienia spójności,  $r$  może przyjąć  $f(r) = 0$ .

W każdej z tych sytuacji:

- każde  $v$  z  $f(v) = 0$  ma sąsiada z  $f = 2$ ,
- zbiór  $D = \{v : f(v) \in \{1, 2\}\}$  jest słabo spójny, ponieważ każde  $D_i$  jest spójne, a  $r$  łączy je jako nadzędny węzeł.

### Optymalność:

Decyzje w algorytmie są podejmowane lokalnie optymalnie:

- przypisanie  $f = 2$  tylko wtedy, gdy inne opcje (np.  $f = 1$  lub propagacja przez dzieci) nie wystarczają,
- preferowanie struktury  $[1, 1]$  nad  $[2, 0]$  tam, gdzie jest to możliwe,
- przypisania są zgodne z lokalną strukturą drzewa.

W związku z tym suma wag WCRDF jest najmniejsza możliwa przy spełnieniu warunków definicji, to kończy szkic dowodu.

#### 3.3.3 Złożoność i wydajność

Algorytm ma złożoność liniową  $O(n)$ . W obu fazach rozpatrywane są wszystkie wierzchołki, od liści do korzenia. Uprzednio wyznaczana zostaje mapa ojcostwa, również liniowo. Algorytm zatem jest skalowalny i szybki dla większych grafów, natomiast ograniczony do jednej ich klasy - drzew.

Złożoność pamięciowa jest liniowa względem liczby wierzchołków, ze względu na przechowywanie drzewa w pamięci.

#### 3.3.4 Pseudokod

---

### Algorytm liniowy dla drzew - Faza 1

---

```
1: function PHASE1(T, root)
2:   father_map  $\leftarrow$  Compute parent-child relationships using BFS
3:   nodes_ids  $\leftarrow$  List of all nodes in T
4:   for each node  $v$  in reversed(nodes_ids) do
5:     father  $\leftarrow$  father_map[ $v$ ]
6:     if  $v$  is a leaf and  $v \neq root$  then
7:       Increase  $T[father]['n00']$ 
8:       Set  $T[father]['child'] \leftarrow v$ 
9:     else
10:      if  $T[v]['n00'] == 1$  and  $T[v]['n01'] == 0$  and father exists then
11:        Increase  $T[father]['sw']$ 
12:      end if
13:      if  $T[v]['sw'] + T[v]['n00'] + T[v]['n01'] > 1$  then
14:        Set  $T[v]['R'] = 2$ 
15:        if father exists then
16:          Increase  $T[father]['n2']$ 
17:          if  $T[v]['n00'] == 1$  and  $T[v]['n01'] == 0$  then
18:            Decrease  $T[father]['sw']$ 
19:          end if
20:        end if
21:         $T[v]['ch'] = 1$ 
22:      end if
23:      if  $T[v]['sw'] == 0$  then
24:        if  $T[v]['n00'] > 1$  or ( $T[v]['n00'] == 1$  and ( $T[v]['n2'] == 0$  or  $T[v]['n01'] > 0$ ))
25:          then
26:            Set  $T[v]['R'] = 2$ 
27:            if father exists then
28:              Increase  $T[father]['n2']$ 
29:            end if
30:            else if  $T[v]['n00'] == 1$  then
31:              Set  $T[v]['R'] = 0$ 
32:              Set  $T[T[v]['child']]['R'] = 1$ 
33:              if father exists then
34:                Decrease  $T[father]['sw']$ 
35:              end if
36:            end if
37:            if  $T[v]['n00'] == 0$  and  $T[v]['n01'] > 0$  then
38:              Set  $T[v]['R'] = 1$ 
39:              if father exists then
40:                Increase  $T[father]['n1']$ 
41:              end if
42:            end if
43:            if  $T[v]['R'] = 0$  and  $T[v]['n2'] > 0$  and father exists then
44:               $T[father]['n01'] \leftarrow T[father]['n01'] + 1$ 
45:            end if
46:            if  $T[v]['R'] = 0$  and  $T[v]['n2'] = 0$  and father exists then
47:               $T[father]['n00'] \leftarrow T[father]['n00'] + 1$ 
48:            end if
49:          end if
50:        end for
51:        if  $T[root]['n2'] == 0$  and  $T[root]['R'] == 0$  then
52:          Set  $T[root]['R'] = 2$ 
53:        end if
54:        if  $T[root]['n1'] == (\text{number of root's neighbors})$  then
55:          Set  $T[root]['R'] = 1$ 
56:        end if
57:      return T
58:    end function
```

---

---

### Algorytm liniowy dla drzew - Faza 2

---

```

1: function PHASE2( $T$ , root)
2:   for each node  $v$  in reversed( $nodes\_ids$ ) do
3:      $father \leftarrow father\_map[v]$ 
4:     if  $father$  exists then
5:       if  $T[v]['n00'] == 1$  and  $T[father]['ch'] == 1$  and  $T[v]['n01'] == 0$  then
6:         Set  $T[v]['R'] = 0$ 
7:         Set  $T[T[v]['child']]['R'] = 1$ 
8:         Increase  $T[father]['n00']$ 
9:       end if
10:      end if
11:    end for
12:    return  $T$ 
13: end function

```

---

### 3.4 Algorytm programowania liniowego I

Jest to algorytm programowania liniowego zaimplementowany na podstawie artykułu „Algorithmic complexity of weakly connected Roman domination in graphs” [2].

#### 3.4.1 Działanie

Dany jest graf  $G$  o zbiorze wierzchołków  $V$  i zbiorze krawędzi  $E$ .  $G'$  to podgraf indukowany powstały z wierzchołków zbioru dominującego. Ten model programowania liniowego wymaga zdefiniowania następujących zmiennych:

$$x_e = \begin{cases} 1, & e \in E' \\ 0, & e \notin E' \end{cases} \quad y_e = \begin{cases} 1, & e \in T' \\ 0, & e \notin T' \end{cases}$$

$$a_v = \begin{cases} 1, & v \in V_1 \cup V_2 \\ 0, & v \in V_0 \end{cases} \quad b_v = \begin{cases} 1, & v \in V_2 \\ 0, & v \in V_0 \cup V_1 \end{cases}$$

gdzie  $v \in V$ ,  $e \in E$  i  $T'$  to drzewo rozpinające podgrafa  $G'$ .

Definiujemy funkcję celu, czyli minimalizację wagi zbioru dominującego rzymskiego słabo spójnego:

$$Z: \min \left( \sum_{v \in V} a_v + \sum_{v \in V} b_v \right)$$

oraz ograniczenia:

Wierzchołek o wartości 0, bedzie miał co najmniej jednego sąsiada z wartością 2:

$$a_v + \sum_{k \in N_G(v)} b_k \geq 1, \quad v \in V, \tag{1}$$

Krawędź istnieje w drzewie rozpinającym  $T'$ , jeśli ta krawędź należy do  $G'$ . Ograniczenie to zapewnia spójność w  $G'$ :

$$y_e \leq x_e, \quad e \in E, \tag{2}$$

Wybór krawędzi, które mają wartość należącą do zbioru dominującego na przynajmniej jednym swoim końcu:

$$x_e \leq a_{i_e} + a_{j_e}, \quad e \in E_{G'}, \quad (3)$$

Drzewo rozpinające  $T'$  ma liczbę krawędzi równą liczbie wierzchołków grafu pomniejszoną o 1:

$$\sum_{e \in E} y_e = n - 1, \quad (4)$$

Drzewo rozpinające  $T'$  nie posiada cykli:

$$\sum_{i_e, j_e \in S} y_e \leq |S| - 1, \quad S \subseteq V, \quad |S| \geq 3, \quad (5)$$

Podzbiór wierzchołków z  $b_v = 1$ , czyli  $(V_2)$ , jest podzbiorem wierzchołków z  $a_v = 1$ , czyli  $(V_1 \cup V_2)$

$$b_v \leq a_v, \quad v \in V. \quad (6)$$

Warunki 1, 2, 5 gwarantują, że  $T'$  jest drzewem rozpinającym grafu  $G'$ .

### 3.4.2 Poprawność

Poniżej przedstawiona zostaje analiza, dlaczego model programowania liniowego i opisany powyżej poprawnie odwzorowuje problem wyznaczania WCRDF, a jego rozwiązanie minimalizuje wartość  $\gamma_R^{wc}(G)$ .

**Każde dopuszczone rozwiązanie modelu ILP jest poprawną funkcją WCRDF.**

Rozważane jest dowolne przypisanie zmiennych  $a_v, b_v, x_e, y_e$  spełniające ograniczenia (1)-(6).

- Ograniczenie (1): dla każdego  $v$  z  $a_v = 0$  (czyli  $f(v) = 0$ ), istnieje co najmniej jeden sąsiad  $k$  z  $b_k = 1$  (czyli  $f(k) = 2$ ). To spełnia warunek dominowania rzymskiego.
- Ograniczenia (2)-(5): definiują graf  $G'$  (na podstawie  $x_e$ ), oraz jego drzewo rozpinające  $T'$  (na podstawie  $y_e$ ). W szczególności:
  - (2):  $T'$  zawiera się w  $G'$ ,
  - (3): każda krawędź  $x_e$  łączy dwa wierzchołki z przynajmniej jednym  $a = 1$ ,
  - (4)-(5):  $T'$  ma  $n - 1$  krawędzi i nie zawiera cykli, czyli jest drzewem,
- Zatem  $T'$  rozciąga się na zbiorze  $D = \{v : a_v = 1\}$  i łączy go w sposób spójny - spełnia to warunek słabej spójności.
- Ograniczenie (6): każdy wierzchołek z  $b_v = 1$  (czyli  $f(v) = 2$ ) musi mieć również  $a_v = 1$  - co odwzorowuje relację  $V_2 \subseteq V_1 \cup V_2$ .

**Każda poprawna funkcja WCRDF może być zakodowana jako przypisanie zmiennych.**

Dla dowolnej funkcji  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  spełniającej definicję WCRDF, możemy przypisać:

$$a_v = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } f(v) > 0 \\ 0 & \text{jeśli } f(v) = 0 \end{cases} \quad b_v = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } f(v) = 2 \\ 0 & \text{jeśli } f(v) \neq 2 \end{cases}$$

Podgraf  $G'$  indukowany przez wierzchołki z  $a_v = 1$  jest spójny (bo  $f$  spełnia definicję WCRDF), więc istnieje drzewo rozpinające  $T'$  - można przypisać  $x_e$  i  $y_e$  tak, by spełnić wszystkie ograniczenia (2)-(5).

#### Funkcja celu odwzorowuje wagę funkcji $f$

Wartość funkcji celu to:

$$\sum_{v \in V} a_v + \sum_{v \in V} b_v = |\{v : f(v) \in \{1, 2\}\}| + |\{v : f(v) = 2\}| = \sum_v f(v)$$

Zatem minimalizacja funkcji celu odpowiada minimalizacji wagi funkcji WCRDF.

#### 3.4.3 Złożoność i wydajność

Liczba zmiennych dla grafu o  $n$  wierzchołkach i  $m$  krawędziach wynosi  $O(n + m)$ .

1. Dominowanie rzymskie: jedno na każdy wierzchołek, zatem  $n$  ograniczeń.
2. Zależność między  $y_e$  a  $x_e$ : jedno na każdą krawędź, zatem  $m$  ograniczeń.
3. Ograniczenie dostępu tylko wśród chronionych wierzchołków: jedno na każdą krawędź, zatem  $m$  ograniczeń.
4. Liczba krawędzi w drzewie rozpinającym: jedno globalne ograniczenie.
5. Brak cykli (ograniczenia cykliczne): jedno dla każdego podzbioru  $S \subseteq V$ , gdzie  $|S| \geq 3$ . W najgorszym przypadku liczba tych podzbiorów rośnie wykładniczo:  $O(2^n)$ .
6. Relacja  $b_v \leq a_v$ : jedno na każdy wierzchołek, zatem  $n$  ograniczeń.

Zatem w najgorszym przypadku liczba ograniczeń wynosi  $O(n + m + 2^n)$ . Złożoność obliczeniowa wynosi  $O(2^n)$ . Ze względu na ograniczenia cykliczne trudność rozwiązywania jest不稳定na.

Złożoność pamięciowa wynosi  $O(n + m + 2^n)$  ze względu na przechowywanie zmiennych i ograniczeń.

#### 3.4.4 Pseudokod

---

## Algorytm programowania liniowego I

---

```
1: function ILP(graph)
2:    $V \leftarrow$  list of nodes in graph
3:    $E \leftarrow$  list of edges in graph
4:   Initialize ILP model model
5:   Set objective: Minimize  $\sum(a[i] + b[i])$  for all nodes  $i \in V$ 
6:   Define binary variables:
7:      $x[i, j]$  for  $(i, j) \in E$                                  $\triangleright$  1 jeśli krawędź jest w  $G'$ 
8:      $y[i, j]$  for  $(i, j) \in E$                                  $\triangleright$  1 jeśli krawędź jest w drzewie rozpinającym  $T'$ 
9:      $a[i]$  for  $i \in V$                                      $\triangleright$  1 jeśli wierzchołek należy do  $V_1 \cup V_2$ 
10:     $b[i]$  for  $i \in V$                                      $\triangleright$  1 jeśli wierzchołek należy do  $V_2$ 
11:   Constraints:
12:     for each node  $i$  in  $V$  do                       $\triangleright$  Każdy wierzchołek musi być chroniony
13:       Add constraint:  $a[i] + \sum b[k] \geq 1$ , where  $k$  are neighbors of  $i$ 
14:     end for
15:     for each edge  $(i, j)$  in  $E$  do
16:       Add constraint:  $y[i, j] \leq x[i, j]$                  $\triangleright$  Krawędź drzewa musi istnieć w  $G'$ 
17:       Add constraint:  $x[i, j] \leq a[i] + a[j]$            $\triangleright$  Krawędzie drzewa muszą łączyć chronione
           wierzchołki
18:     end for
19:     Add constraint:  $\sum y[i, j] = |V| - 1$              $\triangleright$  Drzewo musi mieć  $|V| - 1$  krawędzi
20:     Find cliques of size  $\geq 3$  in graph and store as subsets
21:     for each subset  $S$  in subsets do               $\triangleright$  Eliminacja cykli
22:       Add constraint:  $\sum y[i, j] \leq |S| - 1$  for edges  $(i, j) \in S$ 
23:     end for
24:     for each node  $i$  in  $V$  do                   $\triangleright$  Wierzchołki z  $V_2$  muszą należeć do  $V_1 \cup V_2$ 
25:       Add constraint:  $b[i] \leq a[i]$ 
26:     end for
27:     Solve ILP model
28:     Extract solution:
29:     for each node  $i$  in  $V$  do
30:        $solution[i] \leftarrow round(a[i].X) + 2 * round(b[i].X)$ 
31:     end for
32:     return (model.objVal, solution)
33: end function
```

---

### 3.5 Algorytm programowania liniowego II

Jest to algorytm programowania liniowego zaimplementowany na podstawie artykułu „Algorithmic complexity of weakly connected Roman domination in graphs” [2], podobnie jak poprzedni.

#### 3.5.1 Działanie

Model ten opiera się na przepływach. W tym modelu rozpatrywany jest graf jako wierzchołek, który zużywa jednostkę przepływu, przepływając przez krawędzie grafu. Na wejściu definiowany jest zewnętrzny przepływ, którego liczba jednostek jest równa liczbie wierzchołków grafu. Zachowana jest zasada przepływu sieci, dlatego trzeba wprowadzić przepływ zewnętrzny w jak największej ilości przez pojedynczy wierzchołek.

Należy zdefiniować następujące zmienne:

$$x_i = \begin{cases} 1, & i \in V_1 \cup V_2 \\ 0, & i \in V_0 \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & i \in V_2 \\ 0, & i \in V_0 \cup V_1 \end{cases}$$

$$a_e = \begin{cases} 1, & e \in E' \\ 0, & e \notin E' \end{cases} \quad t_i = \begin{cases} 1, & \text{wierzchołek korzenia} = i \\ 0, & \text{pozostałe wierzchołki} \end{cases}$$

$$u_i \in N \cup \{0\}, \quad v_e \in [-n, n].$$

gdzie:

$t_i$  zdefiniowany dla każdego wierzchołka grafu. Identyfikuje, gdzie zewnętrzny wierzchołek jest traktowany jako wejście.

$u_i$  reprezentuje liczbę jednostek przepływu zewnętrznego dla danego wierzchołka grafu.

$v_e$  oznacza jednostki przepływające przez dane krawędzie.

$a_e$  oznacza przynależność krawędzi do podgrafa indukowanego.

$x_i, y_i$  oznaczają przynależność do zbioru dominującego rzymskiego słabo spójnego.

Minimalizującą liczbę dominowania rzymskiego słabo spójnego jako funkcję celu należy zdefiniować następująco:

$$Z: \min \left( \sum_{i \in V} x_i + \sum_{i \in V} y_i \right)$$

mając dane ograniczenia:

Wierzchołek z wartością 0 sąsiaduje z przynajmniej jednym wierzchołkiem z wartością 2:

$$x_i + \sum_{j \in N_G(i)} y_j \geq 1, \quad i \in V \tag{1}$$

Ograniczenie zmiennych  $x$  i  $y$ , aby były zgodne ze zdefiniowaną przynależnością:

$$y_i \leq x_i, \quad i \in V \quad (2)$$

Krawędź  $e \in E'$  ma przynajmniej jeden koniec z wierzchołkiem o wartości przynajmniej 1 (należącym do zbioru dominującego):

$$a_e \leq x_{i_e} + x_{j_e}, \quad e \in E \quad (3)$$

Jest tylko jeden wierzchołek w grafie  $G'$ , gdzie jest dostarczony przepływ zewnętrzny:

$$\sum_{i \in V} t_i = 1 \quad (4)$$

Wielkość przepływu co najwyżej  $n$ :

$$u_i \leq n \cdot t_i, \quad i \in V \quad (5)$$

Przepływ ma miejsce tylko w krawędziach należących do  $E'$ :

$$v_e \leq n \cdot a_e, \quad e \in E \quad (6)$$

$$v_e \geq -n \cdot a_e, \quad e \in E \quad (7)$$

Reprezentacja zasady zachowania sieci:

$$u_i + \sum_{e:j_e=i} v_e - \sum_{e:i_e=i} v_e = 1, \quad i \in V \quad (8)$$

Każdy wierzchołek  $v \in V$  musi mieć przynajmniej jeden ustalony wierzchołek w  $E'$

$$a_e \geq 1, \quad e \in E \quad (9)$$

### 3.5.2 Poprawność

Poniżej przedstawiona zostaje analiza, dlaczego model programowania liniowego II opisany powyżej poprawnie odwzorowuje problem wyznaczania WCRDF, a jego rozwiązanie minimalizuje wartość  $\gamma_R^{wc}(G)$ .

#### **Poprawność odwzorowania funkcji WCRDF.**

Zmiennym w modelu odpowiadają następujące interpretacje:

- $x_i = 1 \iff f(i) \in \{1, 2\}$ ,
- $y_i = 1 \iff f(i) = 2$ ,
- $a_e = 1 \iff$  krawędź  $e$  należy do grafu  $G'$  indukowanego przez zbiór dominujący,

- $t_i = 1 \iff$  wierzchołek  $i$  to „źródło” przepływu,
- $u_i$  - liczba jednostek przepływu wchodząca do wierzchołka  $i$ ,
- $v_e$  - przepływ przez krawędź  $e$ .

Warunek dominowania rzymskiego zapewnia ograniczenie (1), bo jeżeli  $x_i = 0$  ( $f(i) = 0$ ), to musi istnieć sąsiad  $j$  z  $y_j = 1$ , czyli  $f(j) = 2$ :

$$x_i + \sum_{j \in N(i)} y_j \geq 1$$

Warunek  $y_i \leq x_i$  (ograniczenie (2)) zapewnia, że zgodnie z definicją, że wierzchołek z  $f(i) = 2$  należy także do zbioru z  $f(i) \geq 1$ .

Warunek łączności: zbiór  $D = \{i : x_i = 1\}$  musi tworzyć spójny podgraf  $G'$ , którego spójność jest zapewniona przez:

- ograniczenia (3), (6), (7): krawędzie przepływu są ograniczone do tych z końcami w  $D$ ,
- ograniczenia (4), (5), (8): modeluje się jednostkowy przepływ z jednego wierzchołka źródłowego ( $t_i = 1$ ) przez cały zbiór  $D$ ,
- ograniczenie (8): zasada zachowania przepływu - każdy wierzchołek „zużywa” jedną jednostkę, więc przepływ musi dotrzeć do każdego z nich,
- ograniczenie (9): każdy wierzchołek musi być incydentny z co najmniej jedną krawędzią  $a_e$ , czyli nie być odizolowany.

Zatem cała struktura odpowiada spójnemu podgrafowi  $G'$ .

### Odwzorowanie każdej funkcji WCRDF.

Dla każdej poprawnej funkcji WCRDF  $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$  można ustawić zmienne:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } f(i) > 0 \\ 0, & \text{jeśli } f(i) \leq 0 \end{cases} \quad y_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } f(i) = 2 \\ 0, & \text{jeśli } f(i) \neq 2 \end{cases}$$

Zbiór  $D = \{i : x_i = 1\}$  indukuje spójny graf  $G'$ , więc można wybrać  $a_e$  dla jego krawędzi i zdefiniować przepływ  $v_e$ ,  $u_i$  zgodnie ze standardową metodą budowania drzew przepływu. Wybierając dowolny wierzchołek z  $f = 2$  jako korzeń ( $t_i = 1$ ), spełnimy wszystkie ograniczenia.

### Minimalizacja funkcji celu.

Funkcja celu:

$$\min \left( \sum x_i + \sum y_i \right) = \sum_{i: f(i)=1} 1 + \sum_{i: f(i)=2} 2 = \sum f(i)$$

odpowiada dokładnie wadze funkcji  $f$ . Minimalizacja celu odpowiada wyznaczeniu  $\gamma_R^{\text{wc}}(G)$ .

#### 3.5.3 Złożoność i wydajność

Suma zmiennych w sformułowanym modelu wynosi  $3n+m$ , będących wartościami logicznymi,  $n$  całkowitych i  $m$  ciągłych.

- Pokrycie i relacje  $x, y$  - ograniczenia zapewniające, że każdy wierzchołek jest zdominowany

oraz że jeśli  $y_i = 1$ , to  $x_i = 1$ . Dają łącznie  $n + n = 2n$  ograniczeń.

- Krawędziowe ograniczenia - dotyczące relacji między zmiennymi  $a_e$  i  $x_i$ , oraz ograniczające wartości przepływu  $v_e$  przez krawędzie. Są to ograniczenia (3), (6) i (7), po jednym na każdą krawędź, co daje łącznie  $3m$  ograniczeń.
- Struktura drzewa przepływu obejmuje:
  - jedno ograniczenie wymuszające dokładnie jeden korzeń przepływu (warunek  $\sum t_i = 1$ ),
  - $n$  ograniczeń ograniczających wartość  $u_i$  (jednostki przepływu) do  $n \cdot t_i$ ,
  - $n$  równań przepływu dla każdego wierzchołka (bilans: wejście + wyjście = 1),co łącznie daje  $2n + 1$  ograniczeń.
- Wymuszenie incydencji - ograniczenie (9) wymusza, by każdy wierzchołek miał co najmniej jedną krawędź w  $E'$  (grafie dominującym). Daje to dodatkowe  $n$  ograniczeń.

Liczba ograniczeń wynosi  $7n + 3m + 2$ . Wynika to z tego, że nie wszystkie ograniczenia to są nierówności. Złożoność pamięciowa wynosi  $O(n + m)$ .

W najgorszym przypadku złożoność czasowa będzie wykładnicza w  $n$ . Trudność rozwiązywania jest złożona przez przepływy, ale bardziej stabilna, niż w algorytmie ILP, który ze względu na dużą liczbę cykli może znacznie wydłużyć swój czas działania.

#### 3.5.4 Pseudokod

---

## Algorytm programowania liniowego II

---

```
1: function ILP_II(graph)
2:   Initialize ILP model model with minimization objective
3:    $V \leftarrow$  list of nodes in graph
4:    $E \leftarrow$  list of edges in graph
5:    $n \leftarrow |V|$                                       $\triangleright$  Liczba wierzchołków
6:   Define binary variables:
7:    $x[i]$  for  $i \in V$                           $\triangleright$  1 jeśli wierzchołek i należy do zbioru X
8:    $y[i]$  for  $i \in V$                           $\triangleright$  1 jeśli wierzchołek i należy do zbioru Y
9:    $a[e]$  for  $e \in E$                           $\triangleright$  1 jeśli krawędź e należy do drzewa rozpinającego
10:   $t[i]$  for  $i \in V$                             $\triangleright$  1 jeśli wierzchołek i jest korzeniem
11: Define integer and continuous variables:
12:   $u[i]$  for  $i \in V$                           $\triangleright$  Zmienna całkowita do struktury drzewa
13:   $v[e]$  for  $e \in E$                           $\triangleright$  Zmienna przepływu z ograniczeniami  $[-n, n]$ 
14: Objective:
15: Minimize  $\sum(x[i] + y[i])$  for all  $i \in V$ 
16: Constraints:
17: for each node i in V do            $\triangleright$  Zapewnij pokrycie wszystkich wierzchołków
18:   Add constraint:  $x[i] + \sum y[j] \geq 1$ , where  $(i, j) \in E$ 
19:   Add constraint:  $y[i] \leq x[i]$ 
20:   Add constraint:  $\sum a[e] \geq 1$ , where e contains i
21: end for
22: for each edge  $e = (i_e, j_e)$  in E do
23:   Add constraint:  $a[e] \leq x[i_e] + x[j_e]$ 
24:   Add constraint:  $v[e] \leq n \cdot a[e]$ 
25:   Add constraint:  $v[e] \geq -n \cdot a[e]$ 
26: end for
27: Add constraint:  $\sum t[i] = 1$                    $\triangleright$  Tylko jeden korzeń istnieje
28: for each node i in V do            $\triangleright$  Ograniczenia struktury drzewa
29:   Add constraint:  $u[i] \leq n \cdot t[i]$ 
30:   Add constraint:  $u[i] + \sum v[e] - \sum v[e] = 1$ , for edges e entering/exiting i
31: end for
32: Solve ILP model
33: Extract solution:
34: for each node i in V do
35:    $solution[i] \leftarrow round(x[i].varValue) + 2 \times round(y[i].varValue)$ 
36: end for
37: return (model.objVal, solution)
38: end function
```

---

### 3.6 Algorytm mrówkowy

Algorytm ten został zaimplementowany w ramach tej pracy, w oparciu o znaną powszechnie konstrukcję algorytmu mrówkowego.

#### 3.6.1 Działanie

Należy zdefiniować następujące zmienne i heurystyki:

- num\_ants - liczba mrówek w każdej iteracji.
- num\_iterations - liczba iteracji algorytmu.
- $\rho$  - współczynnik parowania feromonów, określający, jak szybko feromony zanikają.
- $\tau_{init}$  - początkowa wartość feromonów na wszystkich krawędziach.
- $\alpha$  - wpływ poziomu feromonów na decyzję wyboru ścieżki.
- $\beta$  - wpływ heurystyki lokalnej (tutaj liczba sąsiadów wierzchołka) na decyzję wyboru ścieżki.

Na początku należy zainicjować feromony na każdej krawędzi wejściowego grafu.

Dla zdefiniowanej liczby iteracji algorytmu, a następnie dla każdej mrówki:

1. na podstawie heurystyk, parametrów, sąsiadów wierzchołków i feromonów budowane jest rozwiązańe dla pojedynczej mrówki w postaci prawdopodobieństw wartości na wierzchołkach grafu.

Każdy wierzchołek  $i$  przyjmuje wartość  $v \in \{0, 1, 2\}$  z prawdopodobieństwem:

$$P_i(v) = \frac{\left( \sum_{j \in N(i)} \tau_{ij} \right)^\alpha \cdot (\eta_i)^\beta}{\sum_{v' \in \{0, 1, 2\}} \left( \sum_{j \in N(i)} \tau_{ij} \right)^\alpha \cdot (\eta_i)^\beta}$$

gdzie:

- $\tau_{ij}$  to poziom feromonów na krawędzi  $(i, j)$ ,
- $\eta_i = |N(i)|$  to liczba sąsiadów wierzchołka  $i$  będąca heurystyką

2. rozwiązanie sprawdzane jest pod katem poprawności względem definicji. Sprawdzane jest, czy wierzchołki z wartościami 0 posiadają sąsiada z wartościami 2 oraz warunek słabo spójności. Jeśli warunek nie jest spełniony, rozwiązanie otrzymuje nieskończoną wartość wagi, co sprawia, że nie jest brane pod uwagę w rozwiązaniu. W przeciwnym razie wartości na wierzchołkach grafu są sumowane.

Po przejściu wszystkich mrówek, uaktualniane są wartości feromonów na grafie, zmniejszając ich wartość o współczynnik ewaporacji oraz aktualizację wartości feromonów na podstawie najlepszego dotychczasowego rozwiązania.

$$\tau_{ij} = (1 - \rho) \cdot \tau_{ij} + \Delta \tau_{ij}$$

gdzie:

- $\rho$  to współczynnik parowania feromonów,
- $\Delta \tau_{ij}$  to ilość feromonów dodana w oparciu o najlepsze rozwiązanie:

$$\Delta\tau_{ij} = \frac{1}{f(best\_solution^*)}$$

gdzie  $best\_solution^*$  to najlepsze znalezione rozwiązanie, a  $f(best\_solution^*)$  to suma wartości wierzchołków grafu najlepszego rozwiązania.

### 3.6.2 Poprawność

Algorytm mrówkowy, choć dąży do najmniejszej wartości sumy wag WCRDF, to nie zakłada, że znalezione zostanie  $\gamma_R^{wc}(G)$ , dlatego sprawdzana jest wyłącznie poprawność słabo spójności. Dzieje się to w sposób analogiczny jak w algorytmie Brute Force, co zostało pokazane w punkcie 3.2.2.

### 3.6.3 Złożoność i wydajność

Algorytm działa przez  $num\_iterations$  iteracji i dla każdej mrówki  $num\_ants$ . Budowanie rozwiązania wykonuje się w czasie  $O(n)$ , sprawdzenie rozwiązania w czasie  $O(n^2)$ . Zatem złożoność wynosi  $O(num\_iterations \cdot num\_ants \cdot n^2)$ , co sprawia, że algorytm dla większych grafów może być kosztowny obliczeniowo.

W pamięci przechowywane są feromony  $O(m)$  oraz rozwiązania  $O(num\_ants \cdot n)$ , więc złożoność pamięciowa wynosi  $O(m + num\_ants \cdot n)$ .

### 3.6.4 Pseudokod

---

### Algorytm mrówkowy -inicjalizacja

---

```
1: function INITIALIZEPHEROMONES(graph)
2:   pheromones  $\leftarrow$  Assign initial pheromone value to all edges
3:   return pheromones
4: end function
5: function CHOOSENODEVALUE(node, pheromones, neighbors)
6:   values  $\leftarrow \{0, 1, 2\}$ 
7:   Initialize probabilities as empty list
8:   for each value in  $\{0, 1, 2\}$  do
9:     Compute pheromone_level as sum of pheromones of neighboring edges
10:    Compute probability as  $(\text{pheromone\_level}^\alpha) \times (\text{heuristic}^\beta)$ 
11:    Append probability to probabilities
12:   end for
13:   Normalize probabilities
14:   return Random weighted choice from  $\{0, 1, 2\}$ 
15: end function
16: function BUILDSOLUTION(graph, pheromones)
17:   Initialize node_values as empty dictionary
18:   for each node in graph do
19:     neighbors  $\leftarrow$  list of node's neighbors
20:     Assign node_values[node]  $\leftarrow$  CHOOSENODEVALUE(node, pheromones, neighbors)
21:   end for
22:   return node_values
23: end function
24: function ISVALIDROMANDOMINATINGSET(graph, node_values)
25:   for each node in graph do
26:     if node_values[node] = 0 and no neighbor has value 2 then
27:       return False
28:     end if
29:   end for
30:   induced_set  $\leftarrow$  nodes with values  $\{1, 2\}$ 
31:   for each node in induced_set do
32:     Add all neighbors to induced_set
33:   end for
34:   Create empty graph induced_graph
35:   for each node in induced_set do
36:     if node_values[node]  $\in \{1, 2\}$  then
37:       for each neighbor in graph do
38:         if neighbor in induced_set then
39:           Add edge between node and neighbor in induced_graph
40:         end if
41:       end for
42:     end if
43:   end for
44:   if induced_graph is not connected then
45:     return False
46:   end if
47:   return True
48: end function
```

---

---

### Algorytm mrówkowy - główna pętla

---

```
1: function UPDATEPHEROMONES(graph, pheromones, solutions)
2:   for each edge in pheromones do
3:     Reduce pheromone level using evaporation rate
4:   end for
5:   best_solution ← Solution with minimum Roman number
6:   for each node in best_solution do
7:     for each neighbor of node do
8:       Increase pheromone level on edge (node, neighbor)
9:     end for
10:   end for
11: end function
12: function EXECUTE(graph)
13:   pheromones ← INITIALIZEPHEROMONES(graph)
14:   best_solution ← None
15:   best_roman_number ← ∞
16:   for each iteration in num_iterations do
17:     Initialize solutions as empty list
18:     for each ant in num_ants do
19:       solution ← BUILDSOLUTION(graph, pheromones)
20:       roman_number ← EVALUATESOLUTION(graph, solution)
21:       Append (solution, roman_number) to solutions
22:       if roman_number < best_roman_number then
23:         Update best_roman_number and best_solution
24:       end if
25:     end for
26:     UPDATEPHEROMONES(graph, pheromones, solutions)
27:   end for
28:   return (best_roman_number, best_solution)
29: end function
```

---

### 3.7 Algorytm aproksymacyjny

Algorytm ten został zaimplementowany na podstawie artykułu [2].

#### 3.7.1 Działanie

W artykule zdefiniowano następujące kroki algorytmu:

1. Wyznaczenie zbioru dominującego spełniającego warunki zbioru dominującego spójnego CDS.
2. Dla wierzchołków ze zbioru dominującego przypisywana jest wartość 2, dla pozostałych wierzchołków przypisywana jest wartość 0.

Udowodniono, że takie rozwiązań jest aproksymacyjne, o współczynniku aproksymacji równym  $2(1 + \epsilon)(1 + \ln(\Delta - 1))$ . Aby móc przetestować w pełni działanie algorytmu, zaimplementowano w całości, na podstawie sugestii obecnych w artykule:

1. Wyznaczenie zbioru dominującego spójnego. Problem ten również jest NP-trudny, dlatego zbiór ten wyznaczono przy użyciu programowania liniowego, w celu zachowania poprawności rozwiązania oraz - dla wielu przypadków - w rozsądny czasie. Ten fragment algorytmu zaimplementowano również na podstawie literatury [5].

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem nieskierowanym, gdzie:

- $V$  - zbiór wierzchołków,
- $E \subseteq V \times V$  - zbiór krawędzi.

Należy zdefiniować funkcję celu jako minimalizację liczby wierzchołków w zbiorze dominującym:

$$Z : \min \sum_{v \in V} x_v$$

Należy zdefiniować następujące zmienne decyzyjne:

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } v \in \text{CDS} \\ 0, & \text{jeśli } v \notin \text{CDS} \end{cases}$$

oraz  $f_{uv} \in Z_{\geq 0}$  - ilość jednostek przepływu z  $u$  do  $v$ , dla każdej krawędzi  $(u, v) \in E$

Ograniczenia:

Dominowanie - każdy wierzchołek musi być zdominowany przez samego siebie lub przez sąsiada:

$$\forall v \in V : x_v + \sum_{u \in N(v)} x_u \geq 1, \quad (1)$$

Bilans przepływu dla każdego wierzchołka  $v \neq r$ :

$$\forall v \in V \setminus \{r\} : \sum_{u \in N(v)} f_{uv} - \sum_{u \in N(v)} f_{vu} = x_v, \quad (2)$$

Źródło przepływu - wysyła dokładnie  $\sum x_v - 1$  jednostek przepływu:

$$\sum_{u \in N(r)} f_{ru} = \sum_{v \in V} x_v - 1, \quad (3)$$

Ograniczenie przepływu - przepływ możliwy tylko między wierzchołkami należącymi do CDS:

$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \leq (|V| - 1) \cdot x_u \quad \text{oraz} \quad f_{uv} \leq (|V| - 1) \cdot x_v, \quad (4)$$

2. Dla wierzchołków CDS przypisywana jest wartość 2, dla pozostałych wierzchołków przypisywana jest wartość 0.

### 3.7.2 Poprawność

Poniżej przedstawiona zostanie analiza poprawności algorytmu Approx. Algorytm opiera się na wyznaczeniu CDS przy pomocy programowania liniowego, a następnie przypisaniu wszystkim wierzchołkom należącym do tego zbioru wartości  $f(v) = 2$ , a pozostałym  $f(v) = 0$ . Wystarczy zatem wykazać, że model wyznacza spójny zbiór dominujący, a takie przypisanie będzie spełniało definicję WCRDF, ale niekoniecznie optymalnie.

#### Poprawność modelu ILP wyznaczającego CDS

Model zawiera zmienne binarne  $x_v$  określające, czy wierzchołek  $v \in V$  należy do zbioru dominującego. Warunki modelu:

- Dominowanie: dla każdego wierzchołka  $v \in V$ , zachodzi:

$$x_v + \sum_{u \in N(v)} x_u \geq 1$$

co gwarantuje, że każdy wierzchołek jest albo w CDS, albo sąsiaduje z wierzchołkiem z CDS.

- Spójność: warunki przepływu zapewniają, że zbiór  $\{v : x_v = 1\}$  tworzy spójny podgraf:
  - Jedno źródło  $r$  wysyła  $\sum x_v - 1$  jednostek przepływu.
  - Każdy inny wierzchołek w CDS musi otrzymać dokładnie jedną jednostkę.
  - Przepływ  $f_{uv}$  jest dozwolony tylko wtedy, gdy  $x_u = 1$  i  $x_v = 1$ .

Taka konstrukcja odpowiada przesyłaniu przepływu po drzewie rozpinającym na CDS, co zapewnia jego spójność.

### 3.7.3 Złożoność i wydajność

W pesymistycznym przypadku rozwiązanie modelu programowania liniowego wynosi  $O(2^n)$ , aby przeszukać całą przestrzeń binarną. Model zawiera  $n$  zmiennych  $x_v$  oraz  $2m$  zmiennych przepływu  $f_{uv}$ . Dodatkowo zawiera  $n + 2m$  ograniczeń. Zatem liczba zmiennych oraz ograniczeń wynosi  $O(n + m)$ .

### 3.7.4 Pseudokod

---

#### Algorytm aproksymacyjny

---

```

1: function COMPUTEDOMINATINGSET( $G$ )
2:    $N \leftarrow$  list of nodes in  $G$ 
3:    $E \leftarrow$  list of edges in  $G$ 
4:    $x_v \in \{0, 1\}$  for all  $v \in N$ 
5:   Choose arbitrary root  $r \in N$ 
6:    $f_{uv} \in Z_{\geq 0}$  for all  $(u, v) \in E$  and reversed
7:   Minimize  $\sum_{v \in N} x_v$ 
8:   for all  $v \in N$  do
9:     Ensure:  $x_v + \sum_{u \in \text{Neighbors}(v)} x_u \geq 1$                                  $\triangleright$  Dominowanie
10:    end for
11:    for all  $v \in N, v \neq r$  do
12:      Inflow  $\leftarrow \sum_{u \in \text{Neighbors}(v)} f_{uv}$ 
13:      Outflow  $\leftarrow \sum_{u \in \text{Neighbors}(v)} f_{vu}$ 
14:      Ensure: Inflow – Outflow =  $x_v$                                                $\triangleright$  Bilans przepływu
15:    end for
16:    Ensure:  $\sum_{u \in \text{Neighbors}(r)} f_{ru} = \sum_{v \in N} x_v - 1$                    $\triangleright$  Źródło przepływu
17:    for all  $(u, v) \in E$  and  $(v, u)$  do
18:      Ensure:  $f_{uv} \leq (|N| - 1) \cdot x_u$ 
19:      Ensure:  $f_{uv} \leq (|N| - 1) \cdot x_v$                                           $\triangleright$  Warunki spójności
20:    end for
21:    Solve
22:    return  $\{v \in N : x_v = 1\}$ 
23: end function
24: function EXECUTE( $G$ )
25:    $N \leftarrow$  list of nodes in  $G$ 
26:    $D \leftarrow$  COMPUTEDOMINATINGSET( $G$ )
27:   for all  $v \in N$  do
28:     if  $v \in D$  then
29:        $value[v] \leftarrow 2$ 
30:     else
31:        $value[v] \leftarrow 0$ 
32:     end if
33:   end for
34:    $R \leftarrow \sum_{v \in N} value[v]$ 
35:   return  $(R, value)$ 
36: end function

```

---

### 3.8 Algorytm zachłanny

Poprawny algorytm zachłanny dla tego problemu nie został znaleziony wśród istniejących rozwiązań, dlatego został on opracowany i zaimplementowany w ramach tej pracy.

#### 3.8.1 Działanie

1. Początkowo należy zdefiniować zbiory wierzchołków chronionych (początkowo pusty) i niechronionych (początkowo wszystkie wierzchołki grafu). Wierzchołki chronione to takie, które dominują same siebie, bądź takie, których sąsiad jest dominujący, niechronione to te takie, które nie należą do zbioru dominującego, ich sąsiedzi również.
2. Wybierany jest wierzchołek o największym stopniu, jako wierzchołek startowy. Przypisywana mu jest wartość 2, a następnie jest on dodawany do zbioru wierzchołków chronionych, usuwając go z niechronionych. Analogiczne postępowanie jest z sąsiadami tego wierzchołka, tj. usunięcie ich ze zbioru wierzchołków niechronionych, dodając do chronionych.
3. Następnie, dopóki istnieją wierzchołki w zbiorze wierzchołków niechronionych:
  - Iteracja po zbiorze wierzchołków chronionych, wyznaczając ich sąsiadów. Jeśli znajdzie się wierzchołek niechroniony, jest on dodawany do zbioru wierzchołków „kandydujących”.
  - Jeśli zbiór „kandydatów” jest pusty, pętla jest przerywana,
  - W przypadku znalezienia „kandydatów”, wybierany jest wierzchołek, który zabezpieczy jak najwięcej wierzchołków jeszcze niechronionych.
  - Następnie wykonywane jest sprawdzenie, czy będą istnieć nowo-ochronieni sąsiedzi. Jeśli nie, to nie ma potrzeby ustawiać temu wierzchołkowi wartości 2, przypisywana jest mu wartość 1. Jeśli istnieją tacy sąsiedzi, to przypisywana jest temu wierzchołkowi wartość 2.

#### 3.8.2 Poprawność

Algorytm działa dla grafów spójnych i nie gwarantuje rozwiązań optymalnego, natomiast zapewnia, że zwarcane jest WCRDF zgodne z definicją. Analiza poprawności opiera się na dwóch kluczowych własnościach.

#### Warunek dominowania rzymskiego

Algorytm rozpoczyna od przypisania wartości 2 wierzchołkowi o największym stopniu oraz zabezpieczenia jego sąsiadów. Następnie, dopóki istnieją wierzchołki niechronione (czyli z przypisaną wartością 0), wybierany jest wierzchołek  $v$ , który dominuje jak największą liczbę sąsiadów.

W każdej iteracji:

- Jeśli  $v$  zabezpiecza nowych sąsiadów, otrzymuje wartość  $f(v) = 2$ ,
- Jeśli nie zabezpiecza nowych wierzchołków, ale należy do zbioru dominującego, otrzymuje  $f(v) = 1$ ,
- Po każdej takiej decyzji zabezpieczani są również jego sąsiedzi.

W ten sposób każdy wierzchołek z wartością  $f(v) = 0$  musi być sąsiadem jakiegoś wierz-

chołka z  $f = 2$ , ponieważ algorytm nie zatrzymuje się, dopóki zbiór niechronionych wierzchołków nie jest pusty.

### Warunek słabej spójności

Zbiór  $D = \{v \in V : f(v) \in \{1, 2\}\}$  jest budowany iteracyjnie. W każdej iteracji dodawany jest do niego wierzchołek  $v$ , który jest sąsiadem jakiegoś wcześniej dodanego wierzchołka, wybranego ze zbioru „kandydatów”. Zatem:

- pierwszy wierzchołek startowy tworzy początek spójnego zbioru  $D$ ,
- każdy kolejny dodany wierzchołek jest połączony z wcześniejszym,
- czyli zbiór  $D$  rozszerza się w sposób, który zapewnia spójność grafu słabo indukowanego przez  $D$ .

Zatem algorytm zapewnia, że zwracane jest WCRDF zgodne z definicją.

#### 3.8.3 Złożoność i wydajność

Inicjacja wszystkich zmiennych wykonuje się w czasie liniowym. Iteracyjna ochrona wszystkich wierzchołków w najgorszym przypadku może wynieść  $O(n)$ , bo każda iteracja zabezpiecza przynajmniej jeden wierzchołek. Dodatkowo iterujemy przez niezabezpieczone jeszcze wierzchołki w maksymalnie  $O(n)$  oraz ich sąsiadów, czyli w najgorszym wypadku po wszystkich krawędziach grafu -  $O(m)$ . Dodatkowe aktualizacje w głównej pętli wykonują się w czasie maksymalnie liniowym. Dlatego ostatecznie złożoność obliczeniowa wynosi  $O(n(m + n))$ . Zakładając, że dla grafów rzadkich  $m = O(n)$ , a dla grafów gęstych  $m = O(n^2)$ , to złożoność czasowa wynosi odpowiednio  $O(n^2)$  oraz  $O(n^3)$ .

Złożoność pamięciowa obejmuje struktury danych przechowujące graf wejściowy, dlatego wynosi ona  $O(n + m)$ .

Algorytm nie jest dokładny, natomiast w stosunku do innych proponowanych algorytmów, charakteryzuje się wielomianową złożonością obliczeniową.

#### 3.8.4 Pseudokod

---

### Algorytm zachłanny

---

```
1: function EXECUTE( $G$ )
2:    $f[v] \leftarrow 0$  for all  $v \in \text{nodes of } G$ 
3:    $\text{secured\_nodes} \leftarrow \emptyset$ 
4:    $\text{uncovered\_nodes} \leftarrow \text{set of all nodes in } G$ 
5:    $\text{start\_node} \leftarrow \text{node with maximum degree}$ 
6:    $f[\text{start\_node}] \leftarrow 2$ 
7:   Add  $\text{start\_node}$  to  $\text{secured\_nodes}$ 
8:   Remove  $\text{start\_node}$  from  $\text{uncovered\_nodes}$ 
9:   for all neighbors  $\text{neighbor}$  of  $\text{start\_node}$  do
10:    Add  $\text{neighbor}$  to  $\text{secured\_nodes}$ 
11:    Remove  $\text{neighbor}$  from  $\text{uncovered\_nodes}$ 
12:   end for
13:   while  $\text{uncovered\_nodes}$  is not empty do
14:      $\text{candidate\_nodes} \leftarrow \emptyset$ 
15:     for all  $v \in \text{secured\_nodes}$  do
16:       for all neighbors  $\text{neighbor}$  of  $v$  do
17:         if  $\text{neighbor} \in \text{uncovered\_nodes}$  then
18:           Add  $\text{neighbor}$  to  $\text{candidate\_nodes}$ 
19:         end if
20:       end for
21:     end for
22:     if  $\text{candidate\_nodes}$  is empty then
23:       break
24:     end if
25:      $\text{node} \leftarrow \text{node in } \text{candidate\_nodes} \text{ covering the most uncovered neighbors}$ 
26:      $\text{new\_covered\_neighbors} \leftarrow \text{number of uncovered neighbors of } \text{node}$ 
27:     if  $\text{new\_covered\_neighbors} > 0$  then
28:        $f[\text{node}] \leftarrow 2$ 
29:     else
30:        $f[\text{node}] \leftarrow 1$ 
31:     end if
32:     Add  $\text{node}$  to  $\text{secured\_nodes}$ 
33:     Remove  $\text{node}$  from  $\text{uncovered\_nodes}$ 
34:     for all neighbors  $\text{neighbor}$  of  $\text{node}$  do
35:       Add  $\text{neighbor}$  to  $\text{secured\_nodes}$ 
36:       Remove  $\text{neighbor}$  from  $\text{uncovered\_nodes}$ 
37:     end for
38:   end while
39:    $\text{min\_roman\_domiantion\_number} \leftarrow \sum_v f[v]$ 
40:   return ( $\text{min\_roman\_domiantion\_number}, f$ )
41: end function
```

---

## ROZDZIAŁ 4. WYNIKI

### 4.1 Wprowadzenie

Dla wszystkich zaimplementowanych w poprzednim rozdziale algorytmów przeprowadzono testy pokazujące skuteczność ich działania na wybranych klasach grafów. Na początku przeprowadzono testy dla różnych kombinacji hiperparametrów algorytmu mrówkowego, w celu uzyskania najlepszego zestawu parametrów dla tego problemu, który będzie następnie wykorzystywany w dalszych rozważaniach. Następnie przedstawiono wyniki dla wybranych klas grafów:

- grafy rzadkie
- grafy gęste
- drzewa
- grafy bezskalowe,

Grafy każdej klasy wygenerowano z następującą liczbą wierzchołków: 10, 20, 30, 40, 50, dla każdej liczby wierzchołków po 3 razy. Dla spójności, wszystkie algorytmy, tam gdzie to ma sens, testowano na tych samych wygenerowanych grafach. Dalej w tabelach zostaną przedstawione wyniki poglądowe jednego z trzech takich zestawów. Wszystkie średnie pomiary czasów w tabelach przedstawiono w sekundach. Pomiary dla każdego przypadku wykonywano pięciokrotnie w celu otrzymania wiarygodnego wyniku. Pomiary mierzone w nanosekundach z niepewnością pomiaru wynoszącą 100 nanosekund, wykorzystując funkcję `time.perf_counter_ns()`. Dodatkowo dla każdej klasy przedstawiono rysunki grafów z WCRDF po użyciu algorytmów oraz wykres porównujący czas działania każdego z algorytmów w zależności od liczby wierzchołków, w skali logarytmicznej.

W późniejszej części rozdziału rozważano również skuteczność algorytmów wyznaczających prawidłowe WCRDF, ale niekoniecznie optymalne  $\gamma_R^{wc}(G)$ .

Na podstawie wyników zostaną przedstawione obserwacje oraz wnioski dla każdej z klas grafów oraz dla algorytmów niedokładnie wyznaczających  $\gamma_R^{wc}(G)$ .

### 4.2 Hiperparametry algorytmu mrówkowego

W algorytmie mrówkowym zostały zdefiniowane następujące parametry:

- $\alpha$  - wpływ poziomu feromonów na decyzję wyboru ścieżki. Przyjęte do testów wartości  $\alpha = [3, 1]$
- $\beta$  - wpływ heurystyki lokalnej (liczby sąsiadów) na decyzję wyboru ścieżki. Przyjęte do testów wartości  $\beta = [5, 20]$
- $\rho$  - współczynnik parowania feromonów, określający, jak szybko feromony zanikają. Przyjęte do testów wartości  $\rho = [0.5, 0.7]$
- liczba mrówek w każdej iteracji. Przyjęte do testów wartości [100, 150]

W poniższej tabeli zostały przedstawione wybrane zestawy tych hiperparametrów osiągające najmniejszy średni błąd. Dla każdej kombinacji parametrów przeprowadzono testy na wygenerowanym zestawie grafów. Błąd był wyznaczany jako różnica wyniku oraz wartości osiąganych przez algorytmy dokładnie wyznaczające  $\gamma_R^{wc}(G)$  dla danego grafu przykładowego. Następnie różnice te zsumowano i podzielono przez liczbę testowanych grafów.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\rho$ | liczba mrówek | średni błąd |
|----------|---------|--------|---------------|-------------|
| 3        | 20      | 0.5    | 150           | 7.933333    |
| 3        | 20      | 0.7    | 150           | 8.000000    |
| 1        | 5       | 0.7    | 150           | 8.000000    |
| 1        | 20      | 0.7    | 150           | 8.066667    |
| 1        | 20      | 0.5    | 100           | 8.066667    |

Tabela 4.1: Wpływ kombinacji hiperparametrów na błąd rozwiązania

Średni błąd wygląda na znaczny, ale można zauważyc, że ogólnie algorytm jest stabilny oraz kombinacja hiperparametrów nieznacznie wpływa na jakość osiąganych wyników.

Dominacja wartości  $\beta = 20$  wskazuje na, to że algorytm bardziej polega na heurystyce lokalnej, którą jest liczba sąsiadów wierzchołka, w kontekście rozwiązania tego problemu, co jest spodziewanym wynikiem.

Dodatkowo, wolniejsze parowanie feromonów ( $\rho$ ) zdaje się sprzyjać lepszym wynikom. Oznacza to, że dłuższe zapamiętywanie informacji o dobrych rozwiązaniach wpływa korzystnie na wynik.

Kolejna tabela przedstawia zestaw parametrów z najmniejszym średnim błędem dla danej klasy grafu.

| Klasa grafów      | $\alpha$ | $\beta$ | $\rho$ | liczba mrówek | średni błąd |
|-------------------|----------|---------|--------|---------------|-------------|
| ErdosRenyi_dense  | 1        | 20      | 0.5    | 100           | 6.5         |
| ErdosRenyi_sparse | 3        | 20      | 0.5    | 150           | 8.666667    |
| RandomTree        | 1        | 5       | 0.7    | 150           | 7.5         |
| ScaleFree         | 3        | 20      | 0.7    | 150           | 7.25        |

Tabela 4.2: Wpływ kombinacji hiperparametrów na błąd rozwiązania na konkretnych klasach grafów

Dla grafów gęstych udało się dobrać korzystny zestaw hiperparametrów, dający stosunkowo niski średni błąd. W tym przypadku algorytm woli bardziej się skupić na heurystyce lokalnej niż na wpływie feromonów, co jest spodziewanym zachowaniem ze względu na to, że w grafach gęstych bardzo często dla WCRDF to wierzchołki o największym stopniu są najbardziej promowane.

Dla grafów rzadkich widoczny jest dodatkowo większy wpływ feromonów. Ze względu

na rzadszą strukturę grafu, korzystnym zachowaniem jest zapamiętanie dobrego rozwiązania, a następnie eksploatawanie go. Podobnie dla grafów bezskalowych, jednakże kładziony jest tutaj nacisk na większą eksplorację, ze względu na to, że struktura grafu jest podobna do grafów rzadkich.

Drzewa w stosunku do pozostałych klas grafu mają najbardziej specyficzną strukturę i w tych wynikach się to również odzwierciedla. W tym przypadku nie jest kładziony nacisk na heurystykę lokalną, ponieważ w drzewach bardzo często wierzchołki o wysokich stopniach niekiedy należą do zbioru dominującego. Algorytm w tym przypadku jest bardziej nastawiony na eksplorację, bo można zaobserwować zrównoważony wpływ heurystyki lokalnej i feromonu, przy dużym współczynnikiu parowania.

Na podstawie powyższych parametrów można stwierdzić, że są one adekwatne do właściwości konkretnej struktury klasy grafu. Mimo to, średni błąd we wszystkich przypadkach jest znaczny, ale dosyć stabilny, nie ma wielkich różnic między klasami grafów.

Po tej analizie dokonano wyboru hiperparametrów, które będą użyte w dalszych rozważaniach. Został wybrany jeden zestaw ze względu na stabilność wartości średniego błędu między różnymi zestawami hiperparametrów, jak i między klasami grafów. Hiperparametry te zostały przedstawione w poniższej tabeli.

| $\alpha$ | $\beta$ | $\rho$ | liczba mrówek |
|----------|---------|--------|---------------|
| 3        | 20      | 0.5    | 150           |

Tabela 4.3: Wybrany zestaw parametrów

Wybór ten oznacza, że heurystyka lokalna w postaci stopnia wierzchołka grafu oraz feromony będą miały istotny wpływ na wyniki algorytmu. Algorytm będzie zapamiętywał dobre wyniki i je eksploatował.

### 4.3 Wyniki działania algorytmów

Wybrane wyniki działania algorytmów zostały przedstawione w tabelach. Wyniki podzielono na sekcje względem liczby wierzchołków oraz posortowano według rosnącego czasu działania w obrębie każdej z sekcji. Algorytmy ILP, ILP2, Brute Force oraz TreeLinear dla drzew są w tych przypadkach algorytmami optymalnie wyznaczającymi wartość  $\gamma_R^{wc}(G)$  i to one stanowią wartość odniesienia dla dokładności pozostałych algorytmów.

Dla algorytmu mrówkowego należy podkreślić, że dla danego przypadku testowego może on dawać różne wyniki, wynikające z obecnej w algorytmie losowości. W związku z tym, dla każdego przypadku testowego wybrano najlepszy wynik, czyli taki, gdzie  $\gamma_R^{wc}(G)$  było najmniejsze spośród wszystkich otrzymanych pięciu pomiarów.

Dodatkowo zostaną zaprezentowane wykresy przedstawiające średni czas działania każdego z algorytmów w stosunku do liczby wierzchołków w skali logarymicznej. Wyniki zostały po-

łączone liniami w celu lepszej wizualizacji i odzwierciedlenia tendencji wzrostu.

Następnie przedstawiono grafiki ukazujące WCRDF znalezione przez algorytmy dla przykładowego, 20-wierzchołkowego grafu analizowanej klasy oraz 30-wierzchołkowego drzewa.

#### 4.3.1 *Grafy rzadkie*

Grafy rzadkie charakteryzują się znacznie mniejszą liczbą krawędzi niż maksymalna możliwa, czyli  $|E| \ll \frac{n(n-1)}{2}$  oraz posiadają przede wszystkim wierzchołki o niskim stopniu. Z racji mniejszej liczby krawędzi algorytmy programowania liniowego mogą sobie dobrze radzić, ze względu na mniejszą liczbę ograniczeń i zmiennych. Ze względu na nieregularną strukturę i komponenty o różnym stopniu połączenia, algorytmy heurystyczne mogą znacząco odbiegać od optymalnego wyniku.

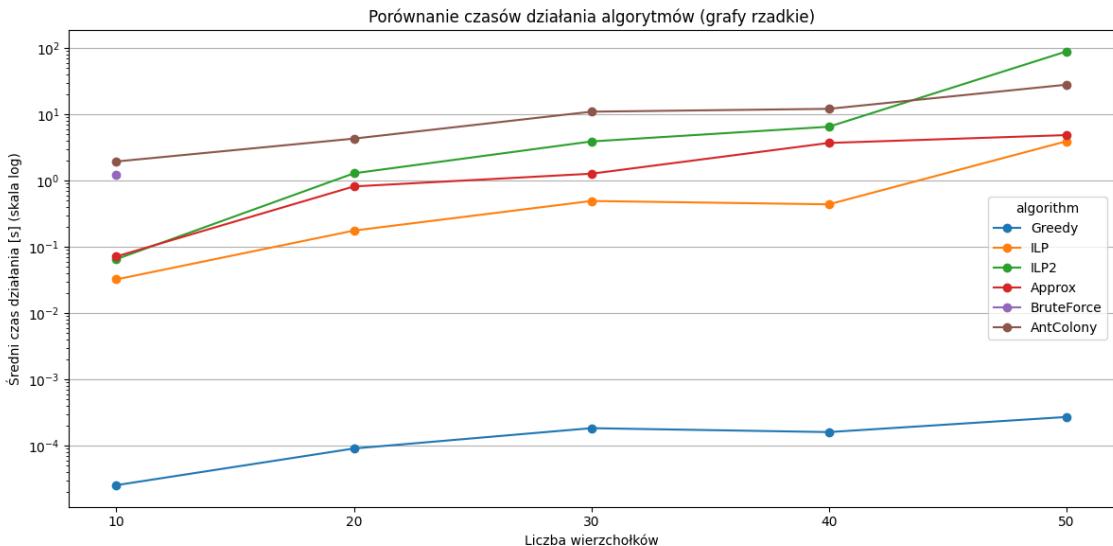
| Algorytm    | Liczba wierzchołków | Liczba krawędzi | $\gamma_R^{wc}(G)$ | Średni czas (s) |
|-------------|---------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Greedy      | 10                  | 15              | 5                  | 0,0000253       |
| ILP         | 10                  | 15              | 5                  | 0,03225824      |
| ILP2        | 10                  | 15              | 5                  | 0,06530336      |
| Approx      | 10                  | 15              | 6                  | 0,0716367       |
| Brute Force | 10                  | 15              | 5                  | 1,22720146      |
| AntColony   | 10                  | 15              | 5                  | 1,9432132       |
| Greedy      | 20                  | 61              | 7                  | 0,00009044      |
| ILP         | 20                  | 61              | 7                  | 0,17597988      |
| Approx      | 20                  | 61              | 8                  | 0,81655686      |
| ILP2        | 20                  | 61              | 7                  | 1,28852564      |
| AntColony   | 20                  | 61              | 11                 | 4,302339        |
| Greedy      | 30                  | 122             | 10                 | 0,00018332      |
| ILP         | 30                  | 122             | 9                  | 0,4925489       |
| Approx      | 30                  | 122             | 10                 | 1,27100858      |
| ILP2        | 30                  | 122             | 9                  | 3,89847968      |
| AntColony   | 30                  | 122             | 19                 | 10,9692404      |
| Greedy      | 40                  | 215             | 11                 | 0,00015998      |
| ILP         | 40                  | 215             | 8                  | 0,4383133       |
| Approx      | 40                  | 215             | 10                 | 3,70053236      |
| ILP2        | 40                  | 215             | 8                  | 6,50026534      |
| AntColony   | 40                  | 215             | 25                 | 12,11287052     |
| Greedy      | 50                  | 353             | 10                 | 0,00027048      |
| ILP         | 50                  | 353             | 8                  | 3,9218204       |
| Approx      | 50                  | 353             | 10                 | 4,86207684      |
| AntColony   | 50                  | 353             | 30                 | 28,00923878     |
| ILP2        | 50                  | 353             | 8                  | 88,8271173      |

Tabela 4.4: Wyniki dla grafów rzadkich

Analizując powyższe wyniki można zauważyc, że algorytm zachłanny Greedy charakteryzuje się bardzo szybkim czasem działania, a jakość rozwiązania jest bliska optymalnej.

Algorytm mrówkowy wraz ze wzrostem liczby wierzchołków zaczyna dawać coraz gorsze wyniki, mimo wyboru dobrego dla tej klasy zestawu parametrów. Warto zaznaczyć również, że jest jednym z wolniej działających algorytmów.

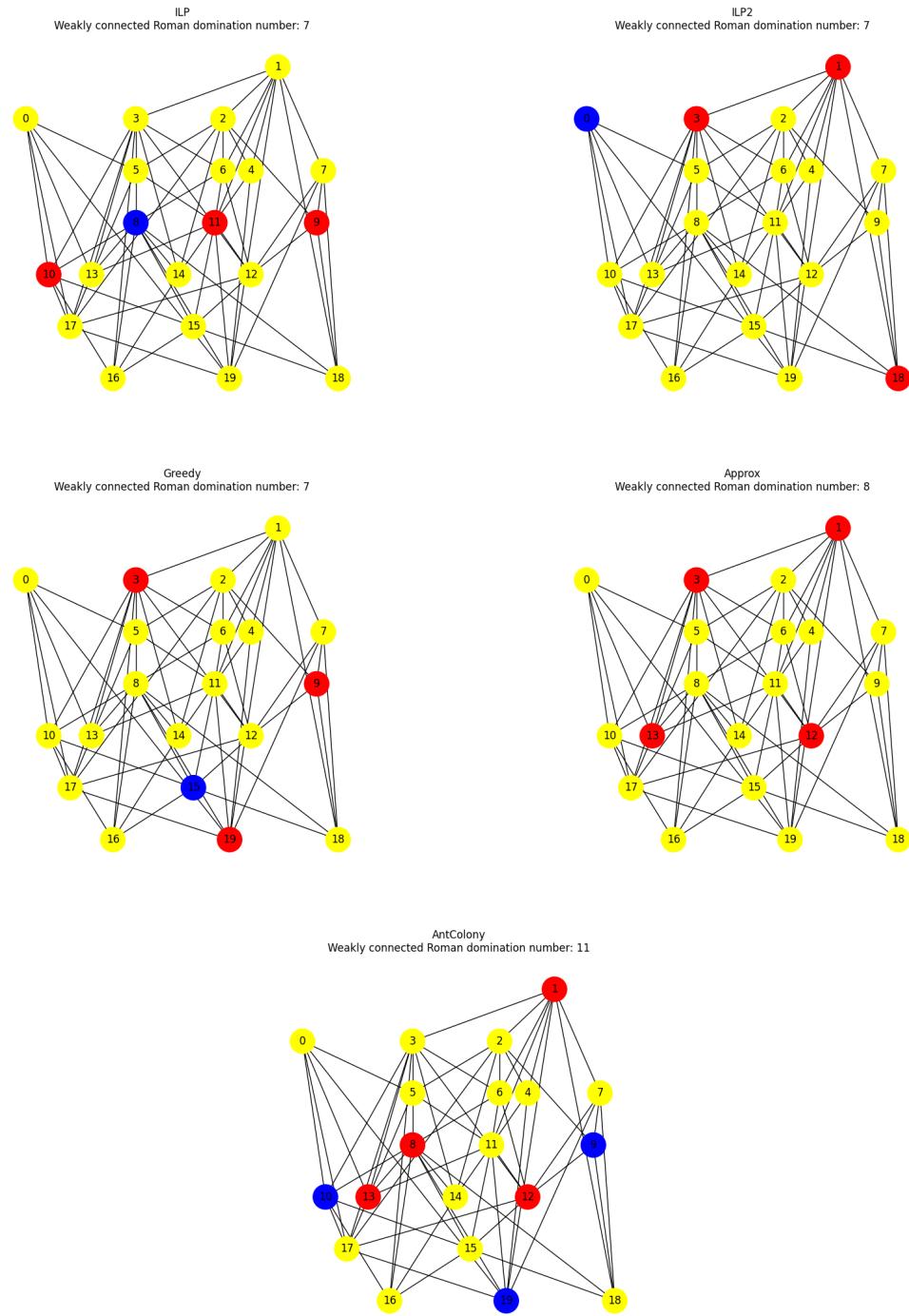
Wynik dla algorytmu Brute Force można zaobserwować wyłącznie dla 10 wierzchołków. Dzieje się tak, ponieważ zgodnie z pierwotnymi założeniami, już dla kilkunastu wierzchołków w dowolnym grafie, algorytm ten przestał zwracać wyniki w rozsądny czasie.



Rysunek 4.1: Porównanie średniego czasu działania algorytmów na grafach rzadkich w stosunku do liczby wierzchołków w grafie.

W tym przypadku znacznie wyróżnia się algorytm Greedy, który działa ponad 1000 razy szybciej niż pozostałe algorytmy, przy czym nie osiąga wyników znacznie odbiegających od optymalnego. Algorytmy ILP i ILP2 dają optymalny wynik, w rozsądny czasie działania, przy czym ILP jest szybszy.

Naturalnie, wraz ze wzrostem liczby wierzchołków, a co za tym idzie i krawędzi, czas pracy wszystkich algorytmów wydłuża się. Dla algorytmu zachłannego są to jednak na tyle krótkie czasy, że można stwierdzić, że algorytm będzie skalowalny i również wykonywalny w rozsądny czasie dla większych grafów. Pozostałe algorytmy notują znaczny skok w czasie działania, zwłaszcza dla większej liczby wierzchołków.



Rysunek 4.2: Wyniki dla przykładowego grafu rzadkiego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

#### 4.3.2 Grafy gęste

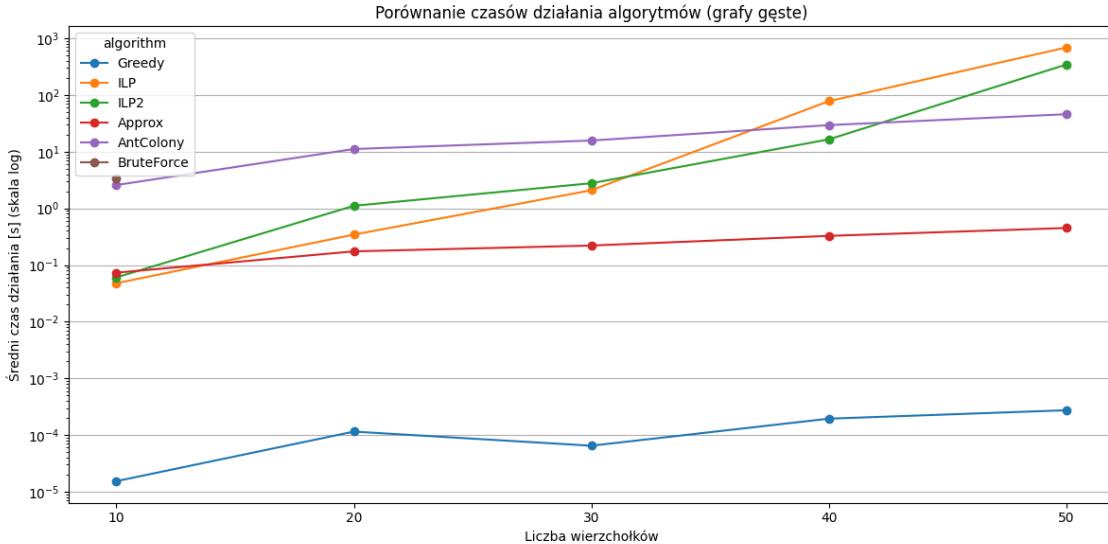
Grafy gęste charakteryzują się dużą liczbą krawędzi, bliską  $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ . Wierzchołki mają duże stopnie i dominowanie jednego wierzchołka pokrywa znaczną część grafu. Dlatego algorytmy heurystyczne powinny łatwo i szybko znajdować dobre rozwiązania. Z racji dużej liczby zmiennych i ograniczeń algorytmy ILP/ILP2 powinny charakteryzować się dłuższym czasem dzia-

łania.

| Algorytm    | Liczba wierzchołków | Liczba krawędzi | $\gamma_R^{wc}(G)$ | Średni czas (s) |
|-------------|---------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Greedy      | 10                  | 31              | 2                  | 0,00001534      |
| ILP         | 10                  | 31              | 2                  | 0,04773922      |
| ILP2        | 10                  | 31              | 2                  | 0,06054642      |
| Approx      | 10                  | 31              | 2                  | 0,07325536      |
| AntColony   | 10                  | 31              | 2                  | 2,58175592      |
| Brute Force | 10                  | 31              | 2                  | 3,39913678      |
| Greedy      | 20                  | 132             | 4                  | 0,00011488      |
| Approx      | 20                  | 132             | 4                  | 0,17418222      |
| ILP         | 20                  | 132             | 4                  | 0,34445046      |
| ILP2        | 20                  | 132             | 4                  | 1,10987306      |
| AntColony   | 20                  | 132             | 9                  | 11,15454742     |
| Greedy      | 30                  | 288             | 4                  | 0,00006476      |
| Approx      | 30                  | 288             | 4                  | 0,22087496      |
| ILP         | 30                  | 288             | 4                  | 2,09136932      |
| ILP2        | 30                  | 288             | 4                  | 2,7780365       |
| AntColony   | 30                  | 288             | 14                 | 15,7567997      |
| Greedy      | 40                  | 522             | 5                  | 0,0001943       |
| Approx      | 40                  | 522             | 4                  | 0,32690006      |
| ILP2        | 40                  | 522             | 4                  | 16,49655814     |
| AntColony   | 40                  | 522             | 21                 | 29,47564454     |
| ILP         | 40                  | 522             | 4                  | 77,93719362     |
| Greedy      | 50                  | 839             | 5                  | 0,00027366      |
| Approx      | 50                  | 839             | 4                  | 0,45039484      |
| AntColony   | 50                  | 839             | 28                 | 45,90004724     |
| ILP2        | 50                  | 839             | 4                  | 345,33312052    |
| ILP         | 50                  | 839             | 4                  | 690,41462788    |

Tabela 4.5: Wyniki dla grafów gęstych

Algorytmy Brute Force, ILP, ILP2, Approx oraz Greedy wyznaczają optymalne, bądź bliższe optimum wartości  $\gamma_R^{wc}(G)$ . Algorytm mrówkowy wraz ze wzrostem liczby wierzchołków w grafie, jakość rozwiązania wypada coraz gorzej. Dla 50 wierzchołków jest to nawet 7-krotnie gorszy wynik od optymalnego. Algorytm Approx w większości przypadków wyznaczał dla grafów gęstych optymalne wyniki. Może mieć to związek z korzystną dla tego algorytmu strukturą grafu, gdzie wierzchołki zbioru dominującego są zwykle swoimi sąsiadami, a wybór jednego wierzchołka daje korzystną ochronę wielu sąsiadów.



Rysunek 4.3: Porównanie średniego czasu działania algorytmów na grafach gęstych w stosunku do liczby wierzchołków w grafie.

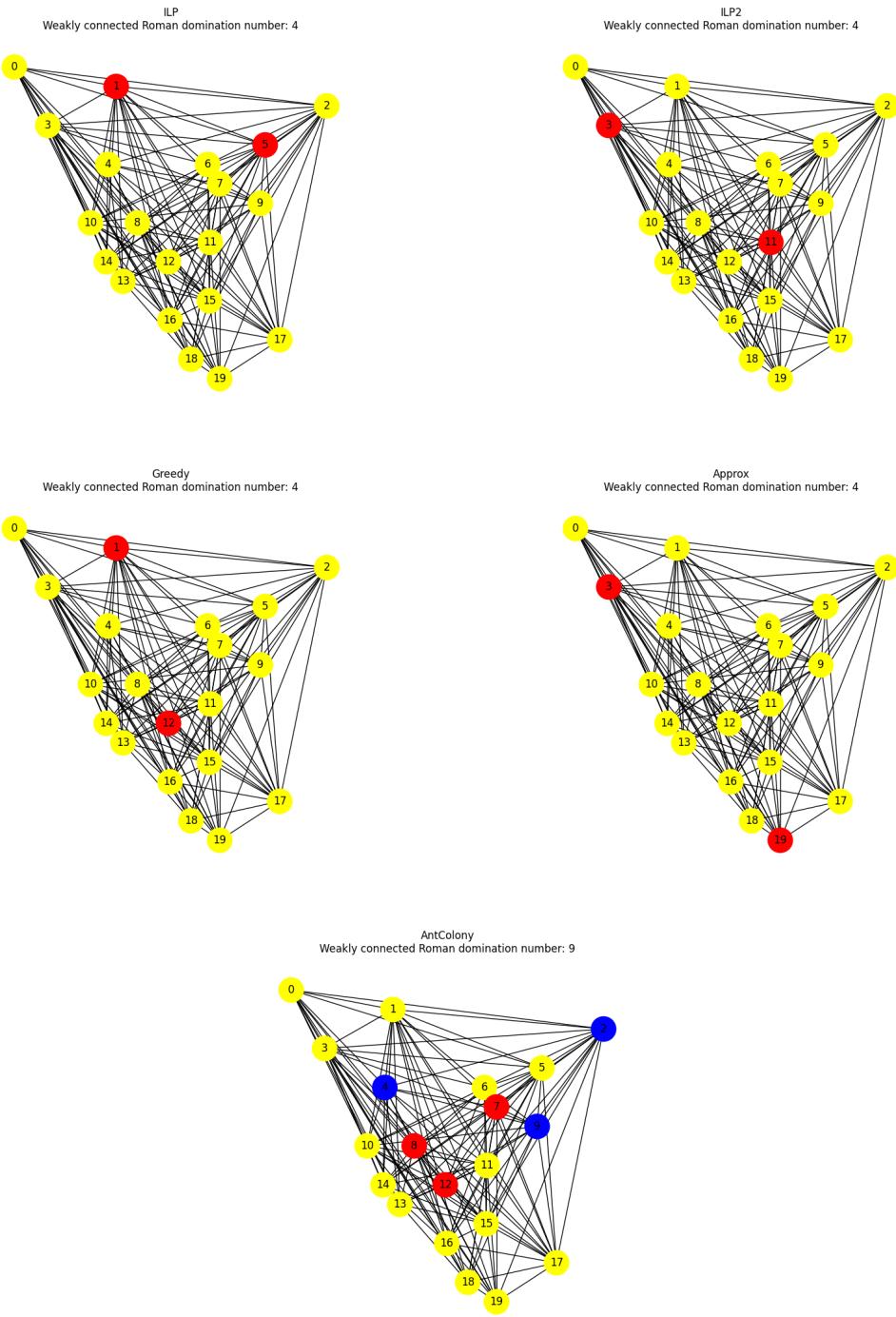
W tym przypadku znacznie wyróżnia się algorytm Greedy, który działa ponad 1000 razy szybciej niż pozostałe algorytmy, przy czym nie osiąga wyników znacznie odbiegających od optymalnego. Algorytm Approx jest również efektywny czasowo, mimo, że do jego konstrukcji użyto programowania liniowego. Najprawdopodobniej powodem takiego wyniku jest korzystna struktura grafu dla tego algorytmu.

Naturalnie, wraz ze wzrostem liczby wierzchołków, a co za tym idzie i krawędzi, czas pracy wszystkich algorytmów wydłuża się. Dla algorytmu zachłannego są to jednak na tyle krótkie czasy, że można stwierdzić, że algorytm będzie skalowalny i również wykonywalny w rozsądnym czasie dla większych grafów.

Algorytmy ILP i ILP2 notują mocny skok czasowy dla  $n \geq 40$ . Jest on wyraźniejszy i większy niż dla grafów rzadkich, co jest spodziewanym zachowaniem, z racji większej liczby krawędzi do przeanalizowania. W tym przypadku udało się potwierdzić hipotezę, że algorytm ILP2 będzie szybszy od ILP, co ma miejsce dla większej liczby wierzchołków. Wynika to z dużej liczby cykli grafu gęstego do przeanalizowania przez algorytm ILP. ILP2, oparty na przepływach, działa znacznie szybciej.

Algorytm mrówkowy w stosunku do pozostałych jest dosyć stabilny czasowo, jednakże jego jakość jest mierna.

Gęste grafy posiadają dużo krawędzi, więc posiadają one wiele zbiorów dominujących. Algorytmy Approx i Greedy wykorzystują ochronę wielu wierzchołków z jednego wybranego, dlatego w tym przypadku wypadają one bardzo korzystnie czasowo i jakościowo. Ze względu na wzrost liczby krawędzi, cierpią na tym algorytmy dokładne, ILP i ILP2. Heurystyka algorytmu mrówkowego jest nieefektywna dla tej klasy grafu.



Rysunek 4.4: Wyniki dla przykładowego grafu gęstego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

#### 4.3.3 Drzewa

Drzewa to grafy acykliczne, posiadające  $n - 1$  krawędzi dla  $n$  wierzchołków. Są to grafy bardzo rzadkie, przez co ich zbiór dominujący jest bardzo często liczniejszy w stosunku do innych klas grafów o podobnym rozmiarze. Dlatego algorytmy deterministyczne i heurystyczne, które nie są specjalnie dostosowane pod drzewa, mogą osiągać niezadowalające wyniki. Dla takiej upo-

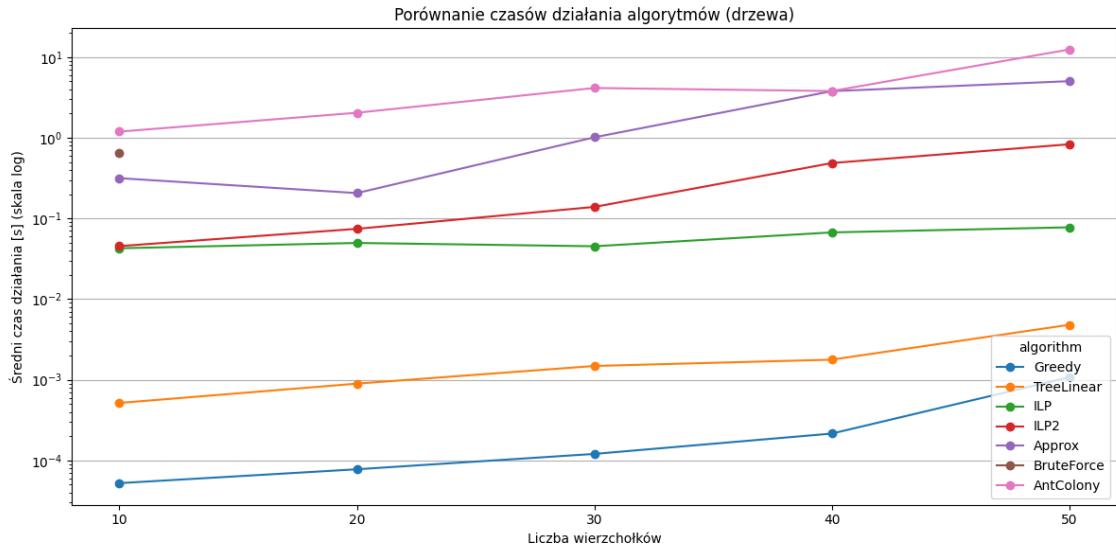
rządkowej struktury za to można znaleźć efektywny algorytm specjalny tylko dla tej klasy grafu.

| Algorytm    | Liczba wierzchołków | Liczba krawędzi | $\gamma_R^{wc}(G)$ | Średni czas (s) |
|-------------|---------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Greedy      | 10                  | 9               | 8                  | 0,00005232      |
| TreeLinear  | 10                  | 9               | 7                  | 0,00051616      |
| ILP         | 10                  | 9               | 7                  | 0,04267752      |
| ILP2        | 10                  | 9               | 7                  | 0,04535534      |
| Approx      | 10                  | 9               | 14                 | 0,3153601       |
| Brute Force | 10                  | 9               | 7                  | 0,65010432      |
| AntColony   | 10                  | 9               | 8                  | 1,19096304      |
| Greedy      | 20                  | 19              | 12                 | 0,00007772      |
| TreeLinear  | 20                  | 19              | 12                 | 0,00089554      |
| ILP         | 20                  | 19              | 12                 | 0,04966132      |
| ILP2        | 20                  | 19              | 12                 | 0,07429058      |
| Approx      | 20                  | 19              | 16                 | 0,20606074      |
| AntColony   | 20                  | 19              | 18                 | 2,04032124      |
| Greedy      | 30                  | 29              | 20                 | 0,0001205       |
| TreeLinear  | 30                  | 29              | 17                 | 0,00148292      |
| ILP         | 30                  | 29              | 17                 | 0,04517938      |
| ILP2        | 30                  | 29              | 17                 | 0,13887008      |
| Approx      | 30                  | 29              | 36                 | 1,0127093       |
| AntColony   | 30                  | 29              | 30                 | 4,13727904      |
| Greedy      | 40                  | 39              | 33                 | 0,00021536      |
| TreeLinear  | 40                  | 39              | 29                 | 0,0017755       |
| ILP         | 40                  | 39              | 29                 | 0,06708872      |
| ILP2        | 40                  | 39              | 29                 | 0,48569172      |
| Approx      | 40                  | 39              | 48                 | 3,7790714       |
| AntColony   | 40                  | 39              | 43                 | 3,79114808      |
| Greedy      | 50                  | 49              | 45                 | 0,00107456      |
| TreeLinear  | 50                  | 49              | 35                 | 0,00480282      |
| ILP         | 50                  | 49              | 35                 | 0,07759686      |
| ILP2        | 50                  | 49              | 35                 | 0,82981668      |
| Approx      | 50                  | 49              | 66                 | 5,0276923       |
| AntColony   | 50                  | 49              | 59                 | 12,4118761      |

Tabela 4.6: Wyniki dla drzew

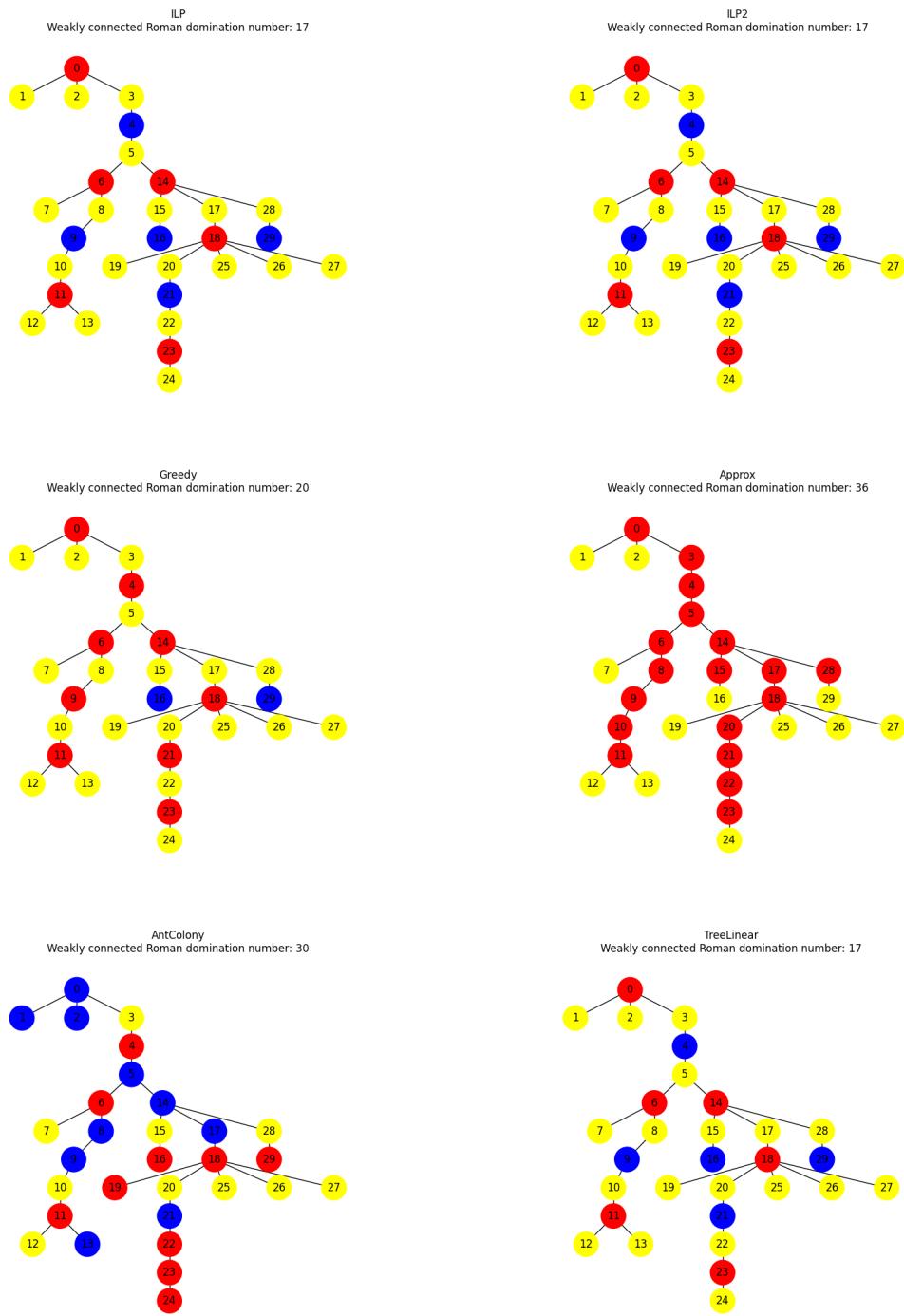
W tym przypadku algorytmy dokładnie wyznaczające  $\gamma_R^{wc}(G)$  poradziły sobie również w rozsądny czasie. Wynika to z bardzo rzadkiej struktury grafu i braku cykli, na czym zyskuje czasowo algorytm ILP. W pozostałych przypadkach, wraz ze wzrostem liczby wierzchołków wyniki

osiągane przez algorytmy heurystyczne były coraz gorsze jakościowo, co wynika ze specyficznej struktury grafu, gdzie wybór wierzchołków zbioru dominującego słabo spójnego jest nietypowy w stosunku do innych klas grafów. Godny odnotowania jest tutaj fakt, że akurat w tym przypadku algorytm mrówkowy poradził sobie lepiej niż Approx, ze względu na to, że Approx tworzy zbiór dominujący spójny z samymi wartościami 2, co dla drzew będzie wysoce nieoptymalne.



Rysunek 4.5: Porównanie średniego czasu działania algorytmów na drzewach w stosunku do liczby wierzchołków w grafie.

Algorytm liniowy dla drzew daje w tym zestawieniu najlepszy stosunek czasu działania do jakości. Nie dość, że daje optymalny wynik, to dodatkowo w szybkim czasie. Algorytm jest skalowalny. Algorytmy ILP/ILP2 z powodu rzadkiej struktury grafu również wykonują się w rozsądny czasie. ILP2 działa wolniej w tym przypadku od ILP. Zachłanny wykonuje się bardzo szybko, ale daje niekorzystne wyniki. TreeLinear jest tylko trochę wolniejszy, ale za to daje optymalny wynik. Algorytmy Approx oraz AntColony działają na tyle wolno i nieoptymalnie, że można stwierdzić, że nie nadają się dla drzew. Najlepszym wyborem dla tej klasy grafów jest algorytm liniowy dla drzew.



Rysunek 4.6: Wyniki dla przykładowego drzewa. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

#### 4.3.4 Grafy bezskalowe

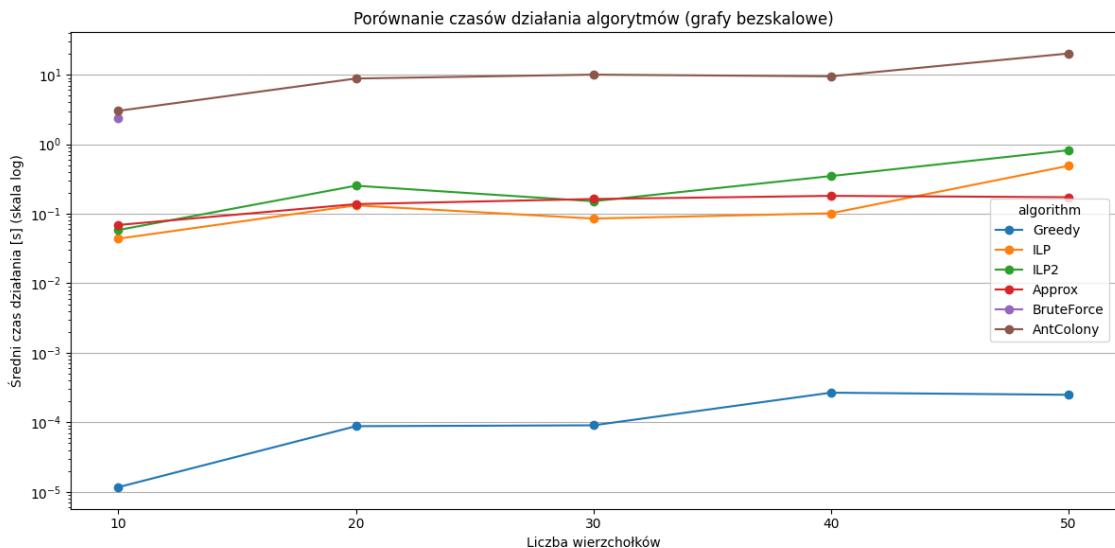
Grafy bezskalowe to grafy naturalnie występujące w rzeczywistości, na przykład w biologii, sieciach WWW i społecznościowych, i są analizowane ze względu na potencjalne zastosowania praktyczne problemu WRCDF. Grafy te charakteryzują się wieloma wierzchołkami o małym stopniu i kilkoma wierzchołkami o dużym stopniu. Są to huby. Rozkład stopni wierzchołków w grafach tego

typu jest potęgowy. Graf ten nie jest typowo gęsty, bo przeważają wierzchołki o niskim stopniu. Dlatego korzystne wyniki powinny osiągać algorytmy oparte na programowaniu liniowym.

| Algorytm    | Liczba wierzchołków | Liczba krawędzi | $\gamma_R^{wc}(G)$ | Średni czas (s) |
|-------------|---------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Greedy      | 10                  | 25              | 2                  | 0,00001166      |
| ILP         | 10                  | 25              | 2                  | 0,04384846      |
| ILP2        | 10                  | 25              | 2                  | 0,05840188      |
| Approx      | 10                  | 25              | 2                  | 0,06902438      |
| Brute Force | 10                  | 25              | 2                  | 2,3746041       |
| AntColony   | 10                  | 25              | 3                  | 3,02645522      |
| Greedy      | 20                  | 75              | 5                  | 0,00008788      |
| ILP         | 20                  | 75              | 4                  | 0,1319412       |
| Approx      | 20                  | 75              | 4                  | 0,13767914      |
| ILP2        | 20                  | 75              | 4                  | 0,25321824      |
| AntColony   | 20                  | 75              | 9                  | 8,82321618      |
| Greedy      | 30                  | 125             | 9                  | 0,00009044      |
| ILP         | 30                  | 125             | 6                  | 0,08527778      |
| ILP2        | 30                  | 125             | 6                  | 0,15141182      |
| Approx      | 30                  | 125             | 6                  | 0,16305526      |
| AntColony   | 30                  | 125             | 18                 | 10,0423744      |
| Greedy      | 40                  | 175             | 10                 | 0,00026662      |
| ILP         | 40                  | 175             | 7                  | 0,1015079       |
| Approx      | 40                  | 175             | 8                  | 0,18101464      |
| ILP2        | 40                  | 175             | 7                  | 0,3487031       |
| AntColony   | 40                  | 175             | 24                 | 9,48435894      |
| Greedy      | 50                  | 225             | 14                 | 0,00024856      |
| Approx      | 50                  | 225             | 10                 | 0,17308662      |
| ILP         | 50                  | 225             | 10                 | 0,48920074      |
| ILP2        | 50                  | 225             | 10                 | 0,82045656      |
| AntColony   | 50                  | 225             | 35                 | 20,21980648     |

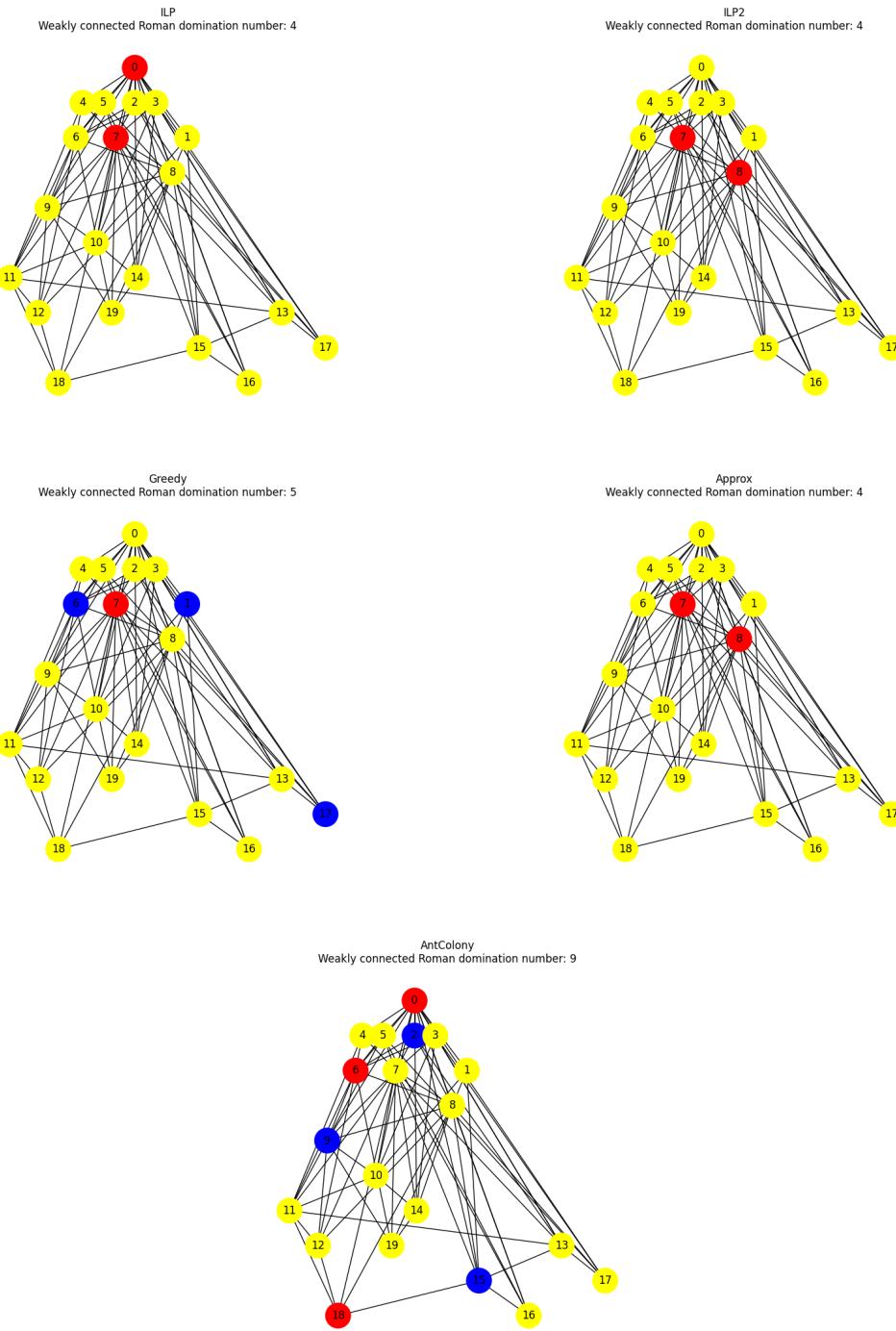
Tabela 4.7: Wyniki dla grafów bezskalowych

Algorytmy ILP/ILP2/Approx zadowalająco pokrywają huby i w rozsądny czasie, co w strukturze tego grafu jest bardzo ważne. Algorytm zachłanny jest niedokładny, ale wielkość błędu nie rośnie znacznie wraz ze wzrostem liczby wierzchołków. Algorytm mrówkowy nie dość, że za każdym razem działa naj wolniej ze wszystkich propozycji, to daje wraz ze wzrostem liczby wierzchołków coraz gorsze wyniki. Po raz kolejny wskazuje to na brak doboru odpowiedniej heurystyki do tego problemu. Oczywiście algorytm Brute Force daje poprawny wynik, aczkolwiek jest on zupełnie nieskalowalny na większą liczbę wierzchołków niż kilkanaście.



Rysunek 4.7: Porównanie średniego czasu działania algorytmów na grafach bezskalowych w stosunku do liczby wierzchołków w grafie.

Algorytmy Approx i Greedy działają czasowo efektywnie. Należy pamiętać, że Approx został zaimplementowany na podstawie programowania liniowego, więc wraz ze wzrostem liczby wierzchołków może zacząć działać bardzo długo. Algorytmy dokładne ILP/ILP2 działają w podobnym czasie co Approx. Algorytm mrówkowy jest przynajmniej 10 razy wolniejszy od innych algorytmów, co czyni go bardzo nieefektywnym.



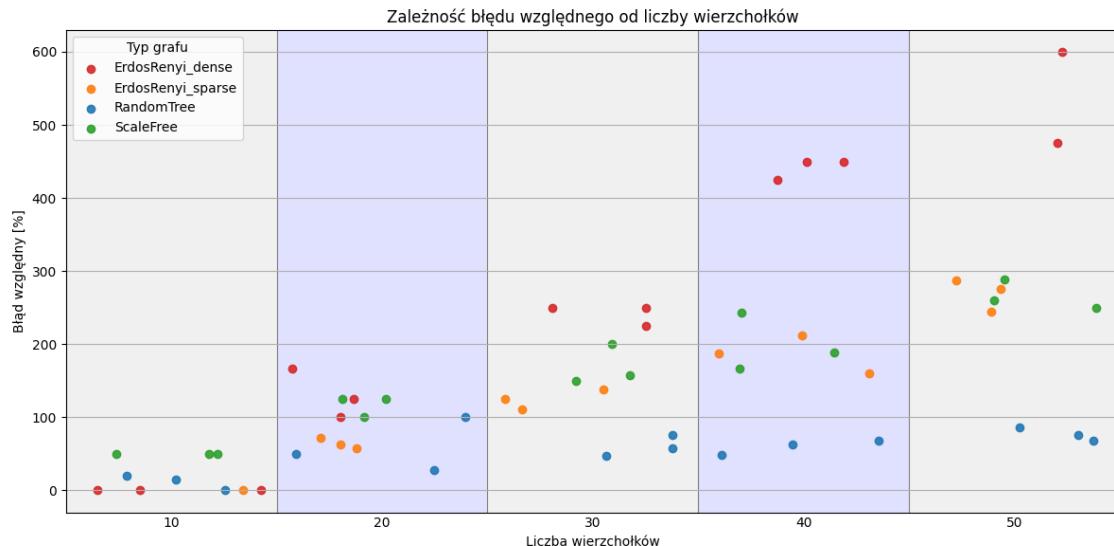
Rysunek 4.8: Wyniki dla przykładowego grafu bezskalowego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone.

#### 4.4 Wyniki algorytmów heurystycznych

W poniższej sekcji zostaną przedstawione wyniki osiągnięte przez algorytmy heurystyczne. Zostaną również przedstawione wykresy zależności błędu względnego algorytmów od liczby wierzchołków. W celu lepszej wizualizacji, wykresy podzielono na obszary odpowiadające konkretnej liczbie wierzchołków testowanych grafów, a wyniki w postaci punktów rozproszonego na wykresie,

żeby się nie pokrywały.

#### 4.4.1 Algorytm mrówkowy



Rysunek 4.9: Zależność błędu względnego algorytmu mrówkowego od liczby wierzchołków.

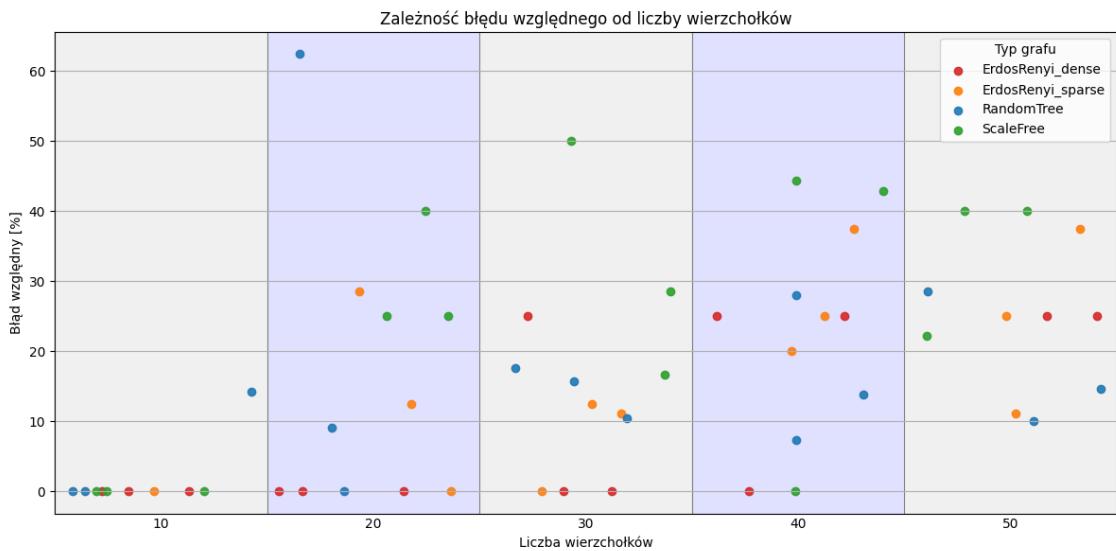
Wraz ze wzrostem liczby wierzchołków można zaobserwować coraz większą rozbieżność od optymalnej  $\gamma_R^{wc}(G)$ .

Największą rozbieżność można zaobserwować dla grafów gęstych, gdzie błąd względny osiąga nawet 600%. Wynika to z tego, że w grafach gęstych jest dużo wierzchołków o wysokich stopniach, więc heurystyka oparta na stopniach wierzchołków nie jest w stanie wyróżnić wierzchołków najbardziej nadających się do zbioru dominującego.

W odróżnieniu do grafów gęstych, algorytm osiągał zadowalające wyniki dla drzew. Wykazuje to z tego, że drzewa są grafami rzadkimi i nie ma tam wielu połączeń wierzchołkowych do analizy. W odróżnieniu do innych klas grafów, struktura drzew sprzyja lokalnym decyzjom dotyczącym dominowania, dlatego też algorytm mrówkowy radzi sobie nienajgorzej, chociaż mocno odbiega od optymalnego wyniku.

Pośrednie wyniki osiągają grafy rzadkie i bezskalowe.

#### 4.4.2 Algorytm zachłanny



Rysunek 4.10: Zależność błędu względnego algorytmu zachłanego od liczby wierzchołków.

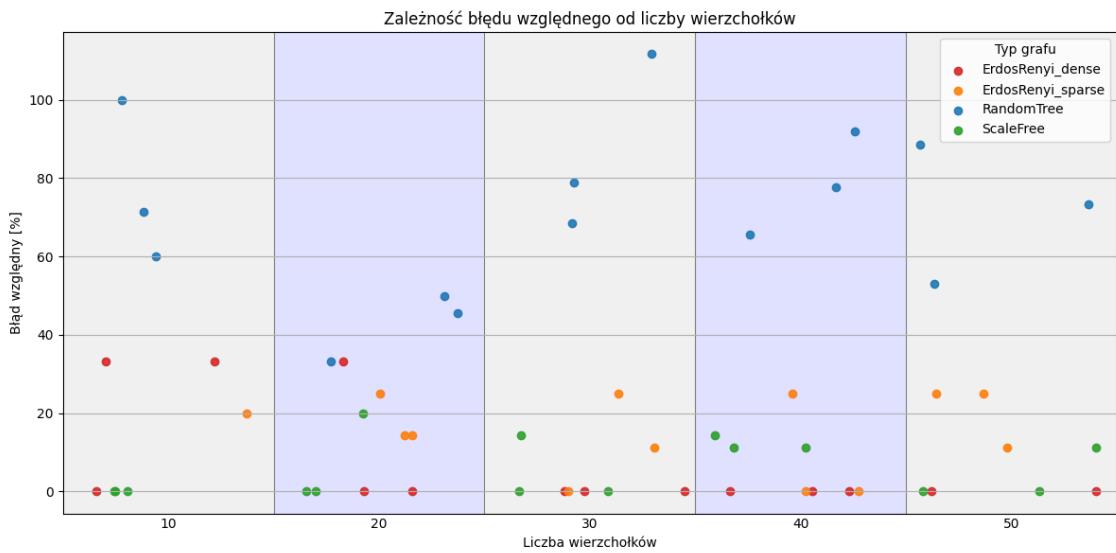
Algorytm zachłanny charakteryzuje się ogólnie niskim błędem względnym na tle innych prezentowanych algorytmów. Godny odnotowania jest fakt, że wraz ze wzrostem liczby wierzchołków w grafach, algorytm nie traci znacznie na jakości, dlatego na podstawie tych przykładów można wysnuć hipotezę, że algorytm może być jakościowo skalowalny.

Największy średni błąd względny algorytm osiąga dla grafów rzadkich i bezskalowych. Prawdopodobnym powodem tego są nieregularne struktury tych grafów i konieczność nieoczywistych decyzji odnośnie wyboru wierzchołka należącego do zbioru dominującego słabo spójnego.

Algorytm zachłanny wyjątkowo dobrze radzi sobie z grafami gęstymi. Wynika to z tego, że promowane są wierzchołki, które pokrywają jak najwięcej sąsiadów. Dla grafów gęstych strategia ta jest bardzo korzystna i sprawia, że algorytm jest w stanie osiągnąć wynik optymalny, bądź bardzo bliski optymalnemu.

Z racji tego, że algorytm zachłanny tworzy dominowanie od wierzchołka o największym stopniu, to w zależności od konkretnego przypadku testowego drzewa, wyniki mogą być bardzo dobre, bądź wysoce nieoptimalne. Na prezentowanym wykresie przypadek, największego błędu względnego: ponad 60%, zaobserwowano właśnie dla drzewa.

#### 4.4.3 Algorytm aproksymacyjny



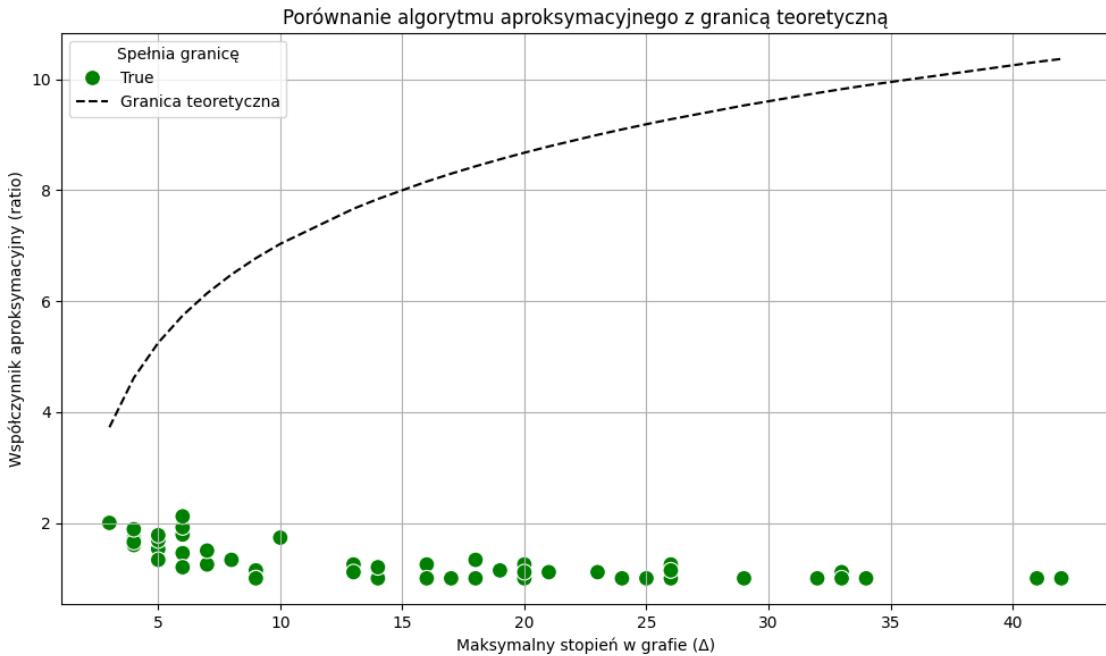
Rysunek 4.11: Zależność błędu względnego algorytmu aproksymacyjnego od liczby wierzchołków.

Dla grafów gęstych algorytm Approx osiąga bardzo dobre wyniki, w wielu przypadkach optymalne, ze względu na dużą liczbę małych zbiorów dominujących.

Z kolei dla drzew jest to bardzo zła strategia. Algorytm przez to, że wyznacza CDS i przypisuje wszystkim wierzchołkom CDS wartości 2, sprawia, że istnieje bardzo dużo nadmiernych przypisań, przez co dla drzew algorytm potrafi osiągnąć nawet ponad 100% błędu względnego.

Algorytm aproksymacyjny radzi sobie dobrze z grafami rzadkimi i bezskalowymi, z błędem względnym na poziomie 20-40%. Wyznacza on prawidłowo CDS i dla tych klas grafów najwyraźniej wystarcza to dla osiągnięcia niskiego poziomu błędu względnego.

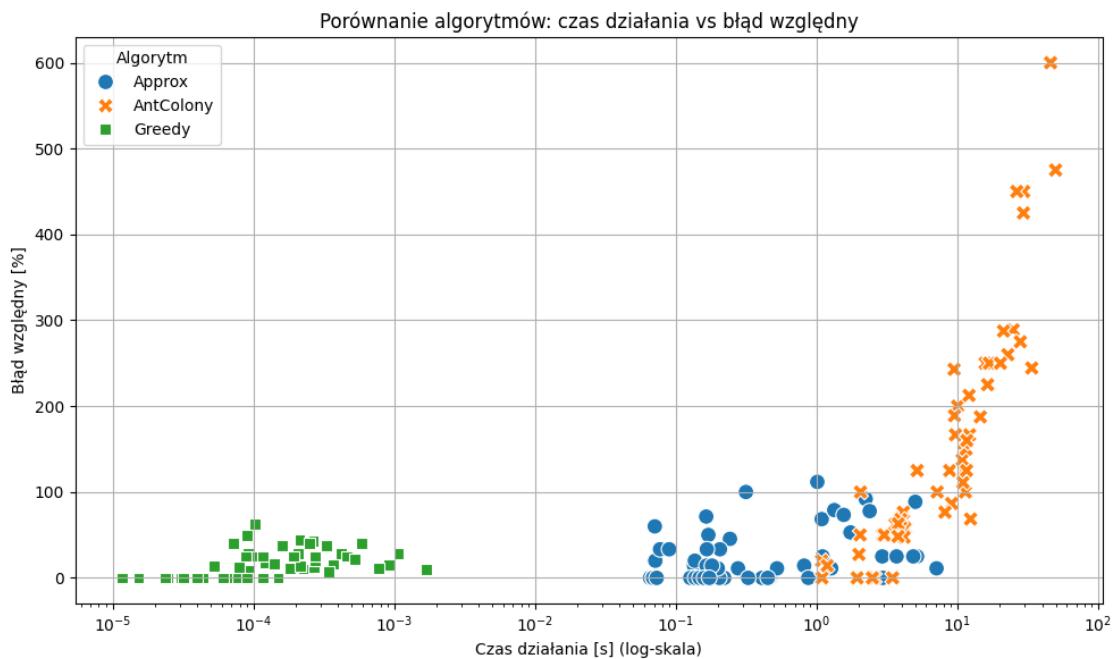
Wykres przedstawia porównanie rzeczywistego współczynnika aproksymacji algorytmu Approx z jego teoretyczną granicą ustaloną w artykule [2] wynoszącą  $2(1 + \epsilon)(1 + \ln(\Delta - 1))$  w zależności od maksymalnego stopnia wierzchołka w grafie.



Rysunek 4.12: Porównanie algorytmu aproksymacyjnego z granicą teoretyczną  $2(1+\epsilon)(1+\ln(\Delta-1))$ .

Można zauważyc, że wszystkie wygenerowane przypadki testowe mieszczą się w granicy teoretycznej błędu. Granica teoretyczna znajduje się daleko od wygenerowanych przykładowych grafów. Zatem w praktyce algorytm radzi sobie znacznie lepiej niż granica teoretyczna zakłada. Prawdopodobnie istnieją przypadki znajdujące się blisko tej granicy, ale taki przypadek nie został odnaleziony w procesie testowania. Dlatego można potwierdzić fakt, że algorytm jest zgodny z współczynnikiem aproksymacji i nie przekracza przewidzianego maksimum, a przynajmniej nie znaleziono przypadku, żeby tak nie było. Można też zauważyc, że wraz ze wzrostem maksymalnego stopnia wierzchołka w testowym grafie, współczynnik aproksymacyjny algorytmu jest coraz niższy. Można z tego wywnioskować fakt, że algorytm jest w stanie dobrze wykorzystać obecność wierzchołków o wysokim stopniu, gdyż bardzo często są one częścią zbioru dominującego.

#### 4.4.4 Porównanie algorytmów heurystycznych



Rysunek 4.13: Algorytmy heurystyczne: czas działania w stosunku do błędu względnego.

W ujęciu porównawczym wszystkich algorytmów wyznaczających  $\gamma_R^{wc}(G)$  w sposób przybliżony, algorytm zachłanny prezentuje najlepszy stosunek czasu działania do jakości rozwiązania. Jego rozwiązanie, dla wygenerowanych przepadków testowych można otrzymać w przedziale  $10^{-5}$  do  $10^{-3}$  sekund, a błąd względny utrzymuje się na poziomie 0%-60%.

Algorytm Approx prezentuje czas działania w przedziale kilku sekund, potrafi znaleźć więcej lepszych rozwiązań niż Greedy, o czym świadczy więcej rozwiązań na poziomie „0” niż w przypadku Greedy. Jednak czasem, zwłaszcza dla drzew, algorytm ten daje nieoptymalne wyniki.

Algorytm mrówkowy, w porównaniu z resztą, radzi sobie najgorzej. Czas działania jest najdłuższy, bo rzędu od kilku do kilkudziesięciu sekund, dając przy tym znacznie gorsze wyniki, z największymi błędami względnymi. Świadczy to o tym, że w obecnej konfiguracji i dobranej heurystyce, algorytm mrówkowy nie radzi sobie z tym problemem.

## **ROZDZIAŁ 5. ZASTOSOWANIA PRAKTYCZNE**

### **5.1 Wprowadzenie**

Rozdział ten skupia się na potencjalnych zastosowaniach praktycznych dla problemu WCRDF oraz poszukiwania  $\gamma_R^{wc}(G)$ . Patrząc na genezę historyczną problemu, warto poszukać zastosowań w życiu codziennym, w celu maksymalizacji ochrony przy niskim jej koszcie [7].

Literatura proponuje kilka zastosowań. Jednym z nich jest próba optymalnego rozmieszczenia pojazdów służb ratunkowych. Utrzymanie i kupno takiego pojazdu jest kosztowne, ale jednocześnie cała sieć budynków służb ratunkowych powinna mieć szybki dostęp do takiego pojazdu, aby móc dotrzeć do potrzebujących. Pojazdy można rozmieścić na wzór legionów rzymskich, w budynkach służb ratunkowych powinien znajdować się pojazd, bądź być możliwość wypożyczenia go z sąsiedniej (najbliższej) lokalizacji służb ratunkowych [6].

W rozdziale przeprowadzono analizę potencjalnych zastosowań:

- rozmieszczenie zabezpieczeń sieci energetycznych,
- rozmieszczenie agentów wykrywających oszustwa w internetowej sieci społecznościowej.

Warto zaznaczyć, że oba zastosowania są potencjalne i teoretyczne, nie została przeprowadzona analiza dotycząca faktycznego działania wykorzystywanych systemów.

Do analizy zostały wykorzystane prawdziwe lub uproszczone grafy występujące w rzeczywistości. Następnie grafy te poddano działaniom wybranych algorytmów, tam gdzie było to możliwe. Dodatkowo dokonano analizy jakościowej i czasowej tych algorytmów, w kontekście prezentowanego zastosowania.

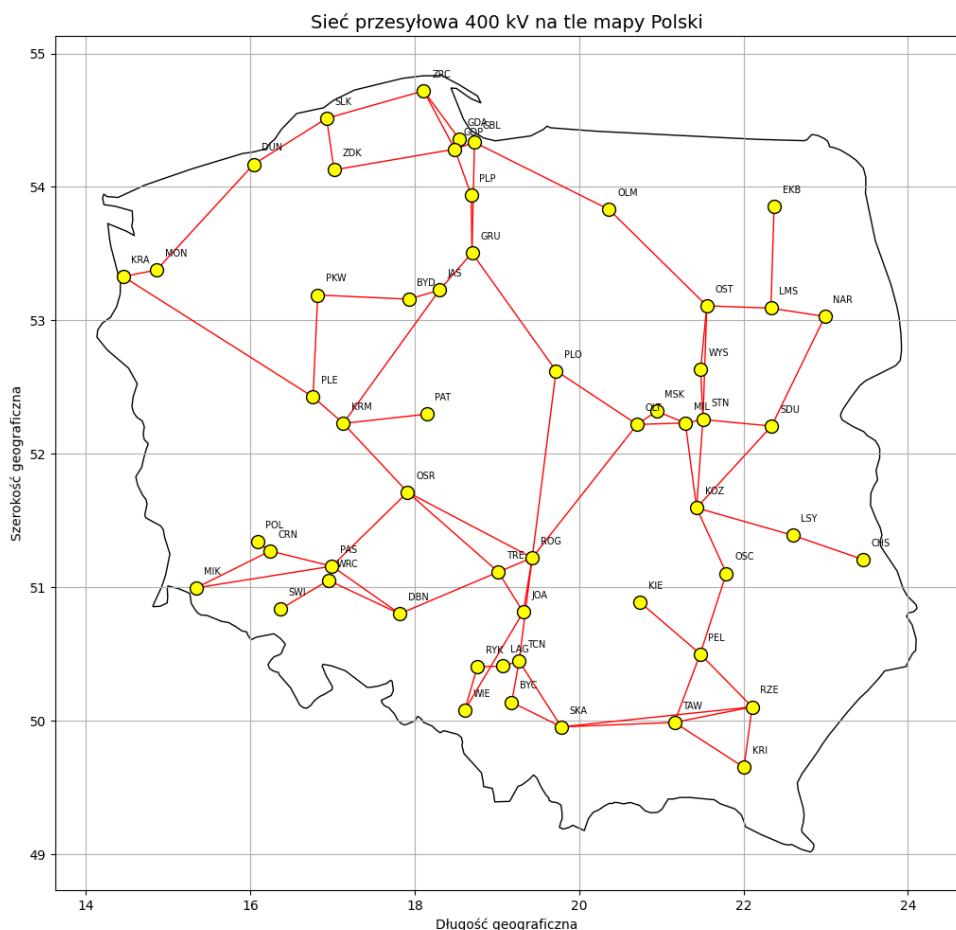
### **5.2 Rozmieszczenie zabezpieczeń sieci energetycznych**

Inspiracją tego zastosowania był blackout na półwyspie Iberyjskim pod koniec kwietnia 2025 roku [1], w którym w wyniku awarii początkowo jednej podstacji, doszło do wyłączenia prądu z tego powodu w kilku krajach.

Dlatego propozycją zapobiegania takim problemom może być próba rozmieszczenia systemów alternatywnych lub zabezpieczających takich, które mogą ochronić albo przejąć obciążenie wadliwej stacji energetycznej, aby zapobiec większej awarii. Dominowanie rzymskie słabo spójne będzie miało tutaj zastosowanie ze względu na chęć utrzymania komunikacji między stacjami energetycznymi oraz braku chęci pozostawienia stacji bez działającej alternatywy. Naturalnie, takie systemy wiążą się z niemałymi kosztami, a więc warto, aby było ich jak najmniej. Zatem zastosowanie algorytmów rozwiązujących problem najmniejszej  $\gamma_R^{wc}(G)$  i znajdowania WCRDF wydaje się odpowiednie, przynajmniej w ujęciu teoretycznym.

W tym przypadku jako graf można przyjąć stacje energetyczne i transformatory, natomiast jako krawędzie można przyjąć sieci energetyczne, czyli połączenia między stacjami i transformatorami.

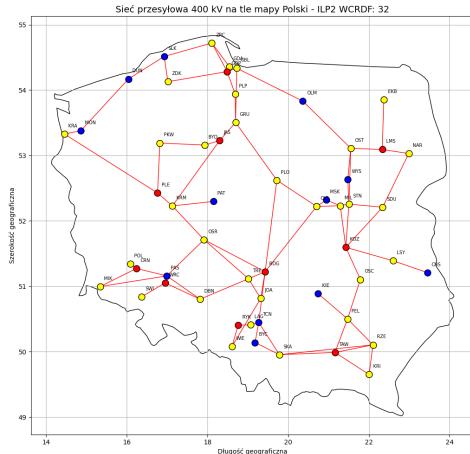
W celu próby realizacji tego pomysłu odtworzono graf połączeń sieci i stacji energetycznych najwyższych napięć w Polsce, na podstawie istniejącego już schematu [10]. W praktyce sieć jest bardziej rozbudowana, jednakże tutaj skupiono się na najwyższym napięciu 400kV. Jej graf przedstawiono na tle mapy Polski. Z powierzchownej analizy tego grafu można zauważyć, że jest to graf bardzo rzadki, posiada wiele wierzchołków o niskim stopniu. Cechuje się brakiem hubów, nie ma wierzchołków o dużym stopniu. Posiada on 55 wierzchołków i 77 krawędzi. Graf ten jest przedstawiony na rysunku poniżej.



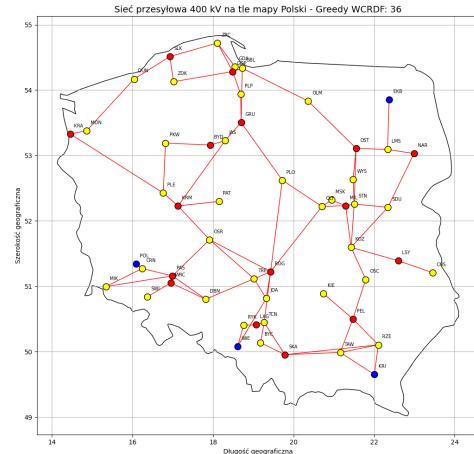
Rysunek 5.1: Sieć przesyłowa największych napięć na tle mapy Polski

Na podstawie analizy z poprzedniego rozdziału można wysnuć hipotezę, że algorytmy programowania liniowego z racji niewielkiej liczby krawędzi będą dawały optymalne wyniki w rozsądny czasie dla tej skali problemu. Algorytm zachłanny powinien prezentować dobry stosunek jakości do czasu działania. Jeśli chodzi o algorytm Approx, z racji rzadkiego grafu, może prezentować gorszą jakość rozwiązania.

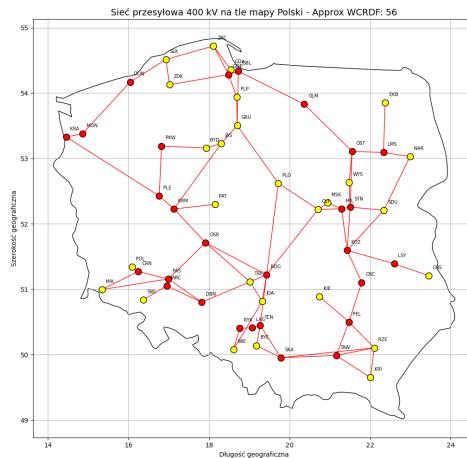
Poniższe grafiki przedstawiają wyniki działania algorytmów ILP2, Greedy oraz Approx.



(a) ILP2



(b) Greedy



(c) Approx

Rysunek 5.2: Efekt działania algorytmów ILP, Greedy i Approx dla problemu rozmieszczenia za-abezpieczeń sieci energetycznych. Żółte wierzchołki to 0, niebieskie to 1, a czerwone to 2.

| Algorytm | $\gamma_R^{wc}(G)$ | Czas działania [s] |
|----------|--------------------|--------------------|
| ILP2     | 32                 | 2,7014378          |
| Greedy   | 36                 | 0,0003222          |
| Approx   | 56                 | 647,6564676        |

Tabela 5.1: Wynik działania wybranych algorytmów dla problemu rozmieszczenia zabezpieczeń sieci energetycznych.

Algorytmowi ILP2 udało odnaleźć optymalne rozwiązanie w ciągu dwóch sekund, co jest bardzo dobrym wynikiem. Nieznacznie gorszy wynik prezentuje algorytm zachłanny. Natomiast zgodnie z przewidywaniami, algorytm Approx osiągnął znacznie gorszy wynik od pozostałych, ze względu na to, że szuka on zbioru dominującego spójnego, co w przypadku grafu bardzo rzadkiego mocno zawyża wyniki. Charakteryzuje się też znacznie dłuższym czasem działania od pozostałych.

To rozważanie pokazuje, że nawet dla nieco większych grafów rzadkich, obserwowanych w rzeczywistym życiu, można dokładnie rozwiązać problem  $\gamma_R^{wc}(G)$  dzięki algorytmom programowania liniowego i nie ma konieczności stosowania algorytmów heurystycznych. Jednakże, warto podkreślić tutaj potencjał algorytmu zachłannego, który osiągnął nieznacznie gorszy wynik, a jest bez wątpienia najbardziej skalowalnym algorytmem ze wszystkich prezentowanych.

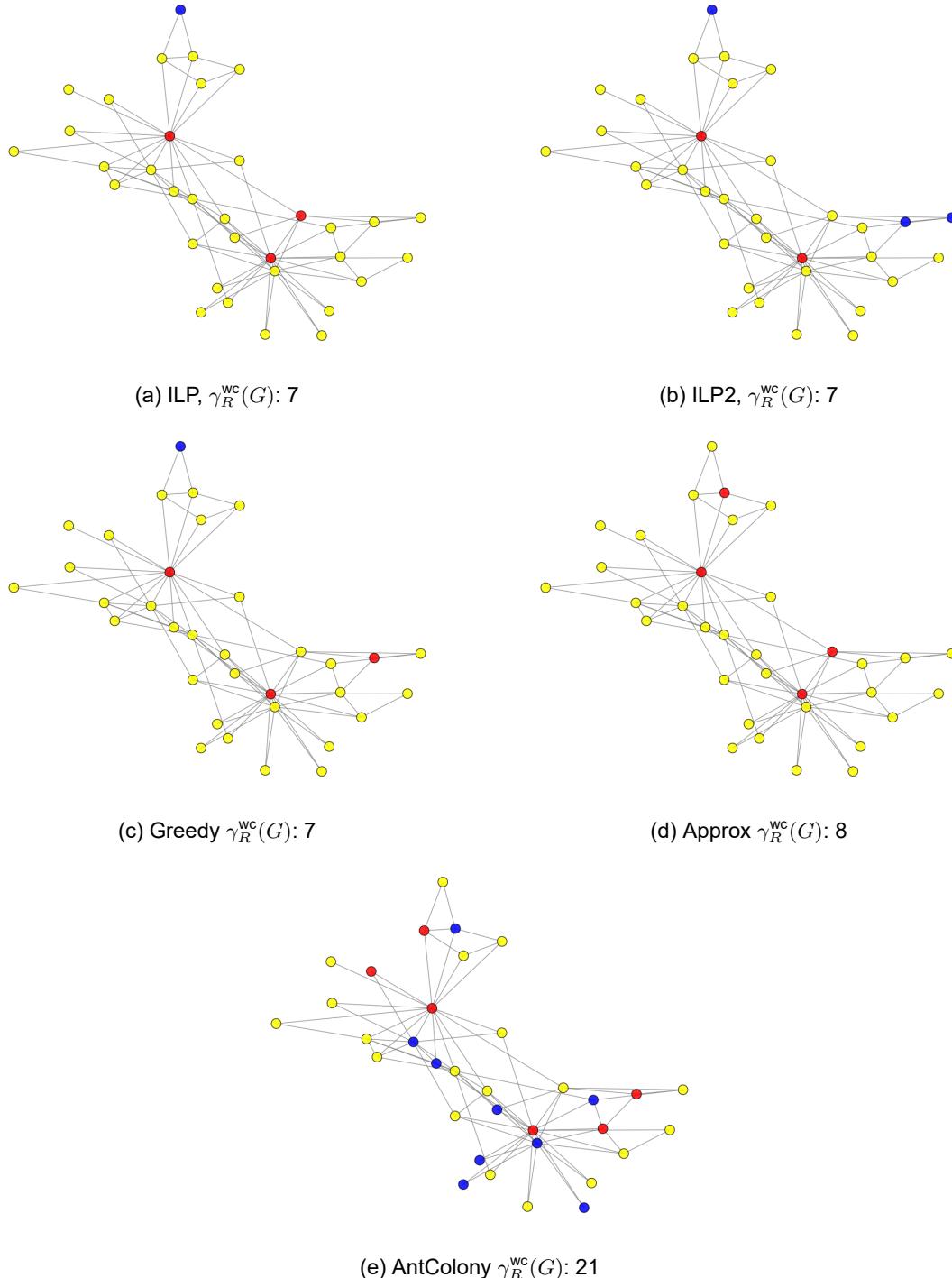
### 5.3 Rozmieszczenie agentów monitorujących oszustwa w internetowej sieci społecznościowej

Kolejnym z potencjalnych zastosowań może być próba optymalnego rozmieszczenia agentów monitorujących oszustwa w internetowej sieci społecznościowej. Grafem wejściowym będzie w tym przypadku sieć znajomych w wybranej sieci społecznościowej, gdzie wierzchołki to użytkownicy, a krawędzie to interakcje lub znajomości między nimi. W dobie wielu oszustw internetowych, wyłudzeń, kradzieży kont, dobrym pomysłem może być rozmieszczenie agentów monitorujących oraz reagujących na zajście jakiegoś przestępstwa internetowego. Wierzchołki z 2 mogą w tym przypadku monitorować siebie oraz sąsiadów, a wierzchołki z 1 wyłącznie siebie. Zachowanie komunikacji i reagowanie między sąsiadami jest tutaj bardzo ważne, aby ofiar oszustwa nie było więcej, dlatego widać tutaj zastosowanie słabej spójności. Dodatkowo, w razie „wypożyczenia” agenta do innego wierzchołka, wierzchołek „wypożyczający” wciąż pozostaje chroniony, a ochrona sąsiadów jest w tym przypadku kluczowa, bo znajomi znajdują się w obszarze podwyższonego ryzyka do szerszego oszustwa. Naturalnie, przechowywanie i zarządzanie jak najmniejszą liczbą instancji agentów jest w tym przypadku pożądane. Dlatego też sensownym wydaje się zastosowanie w przypadku takich sieci algorytmów znajdujących  $\gamma_R^{wc}(G)$ . Poniższe rozważania analizują dwa przypadki rzeczywistych sieci społecznościowych.

Pierwszą z nich jest popularny w literaturze do analizy sieci społecznościowych graf klubu karate Zacharego [8]. Graf ten jest odzwierciedleniem interakcji społecznych członków pewnego klubu karate, badanego przez Wayne W. Zachary’ego [15]. Posiada on 34 wierzchołki i 78 kra-

wędzi. Z racji swojego rozmiaru, algorytmy dla tego grafu wykonały się w rozsądny czasie. Graf ma cechy bezskalowego, gdyż posiada kilka wierzchołków o wyższym stopniu niż pozostałe oraz wiele o niewielkim. Dlatego wyniki powinny być analogiczne, jak prezentowane wcześniej dla grafów bezskalowych, a algorytmy programowania liniowego powinny prezentować dobry stosunek czasu działania do jakości rozwiązania, algorytm mrówkowy niekoniecznie.

Poniższe wizualizacje przedstawiają efekty:



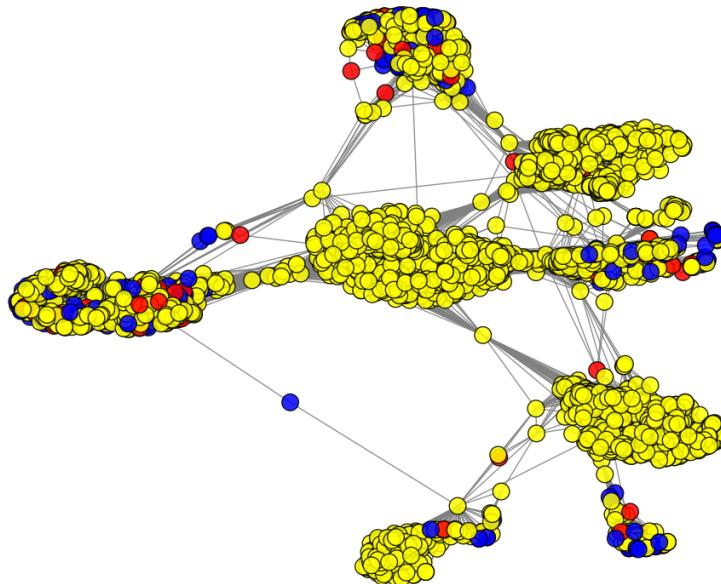
Rysunek 5.3: Efekt działania algorytmów dla problemu rozmieszczenia agentów w małej, rzeczywistej sieci społecznościowej.

| Algorytm  | $\gamma_R^{wc}(G)$ | Czas działania [s] |
|-----------|--------------------|--------------------|
| ILP2      | 7                  | 0,0865662          |
| ILP       | 7                  | 0,0624058          |
| Greedy    | 7                  | 0,0001245          |
| Approx    | 8                  | 0,1533187          |
| AntColony | 21                 | 5,1319121          |

Tabela 5.2: Wynik działania wybranych algorytmów dla problemu rozmieszczenia agentów w małej sieci społecznościowej.

Zgodnie z przewidywaniami, algorytmy programowania liniowego prezentują zadowalające wyniki. Warto zwrócić uwagę, że algorytm zachłanny wyznaczył optymalną wartość liczby dominowania rzymskiego słabo spójnego. Należy jednak pamiętać, że dla grafów bezskalowych wyniki działania tego algorytmu w zależności od grafu mogą się różnić dokładnością. Algorytm mrówkowy po raz kolejny prezentuje niezadowalające wyniki jakościowe i czasowe.

Kolejną analizowaną siecią społecznościową jest sieć znajomych z serwisu Facebook [13]:



Rysunek 5.4: Efekt działania algorytmu zachłanego dla problemu rozmieszczenia agentów w dużej, rzeczywistej sieci społecznościowej.  $\gamma_R^{wc}(G)$ : 411, czas działania 2,9348995 s.

Składa się on z 4039 wierzchołków i 80234 krawędzi. Charakterystyka i wizualizacja grafu wskazuje na to, że można go przypisać do klasy grafów bezskalowych. Z racji wielkości grafu udało się na nim tylko wykonać algorytm zachłanny, pozostałe algorytmy nie wykonały się w rozsądny czasie. Algorytm wyznaczył  $\gamma_R^{wc}(G)$  jako 411 w czasie 2,9348995 s, co jest stosunkowo krótkim

czasem wykonania jak na wielkość grafu. Po raz kolejny wyróżnia to skalowalność algorytmu zuchłanego. Nie ma niestety możliwości weryfikacji czy jest to wynik optymalny, ale patrząc na wcześniejsze rozważania, nie powinien być to wynik drastycznie daleki od optymalnego. Pokazuje to, że nawet dla bardzo dużych danych wejściowych, algorytm zachłanny potrafi dać wynik praktycznie w czasie rzeczywistym, w odróżnieniu do innych, prezentowanych algorytmów.

## **ROZDZIAŁ 6. PODSUMOWANIE I WNIOSKI**

### **6.1 Podsumowanie wyników**

Celem badawczym pracy było opisanie istniejących i opracowanie własnych algorytmów znajdujących funkcje dominujące rzymskie słabo spójne, ich analiza oraz porównanie skuteczności i wyciągnięcie wniosków na temat możliwości ich praktycznego zastosowania.

Udało się zrealizować cel pracy oraz wszystkie postawione zadania, mianowicie:

- przedstawienie problemu WCRDF oraz jego złożoności obliczeniowej,
- zdefiniować i zweryfikować problemy oraz hipotezy badawcze,
- przedstawienie algorytmów znajdujących WCRDF oraz algorytmy znajdujące dokładną  $\gamma_R^{wc}(G)$  oraz przybliżoną, korzystając z różnych technik programowania,
- zaimplementowanie i przetestowanie wybranych algorytmów,
- wyciągnięcie wniosków na podstawie wyników testów,
- dokonanie analizy pod kątem praktycznego zastosowania rozwiązania tego problemu.

W pracy przedstawiono i przetestowano siedem algorytmów:

- algorytmy optymalnie wyznaczające wartość  $\gamma_R^{wc}(G)$ : Brute Force, ILP i ILP2 oraz TreeLinear - liniowy dla drzew, z czego ILP i ILP2 zostały zaproponowane przez istniejącą literaturę, a Brute Force i TreeLinear to nowe propozycje rozwiązań,
- algorytmy heurystyczne wyznaczające WCRDF: zachłanny - Greedy, aproksymacyjny - Approx i mrówkowy - AntColony, gdzie Approx to rozwiązanie z literatury, a mrówkowy i zachłanny to propozycje własne algorytmów.

Eksperymenty przeprowadzono na grafach gęstych, rzadkich, drzewach oraz bezskalowych. Dodatkowo sprawdzono działanie niektórych algorytmów na grafach rzeczywistych.

Wyniki wskazują, że:

- algorytm BruteForce, chociaż prezentuje dokładne, minimalne rozwiązanie problemu, jest najgorzej skalowalny, przez co niepraktyczny. Już dla kilkunastu wierzchołków grafu, czas działania robi się nierozsądnie długi.
- algorytmy ILP i ILP2 zapewniają najlepsze jakościowo rozwiązania, lecz ich czas działania rośnie znacząco wraz z rozmiarem badanego grafu, co wynika ze złożoności obliczeniowej. Dla grafów gęstych, o dużej liczbie cykli, algorytm ILP2 oparty na przepływach faktycznie zaczyna działać szybciej niż ILP, opartym na ograniczeniach cyklicznych.
- algorytm liniowy dla drzew znajduje optymalne rozwiązanie w szybkim czasie i jest skalowalny dla większych instancji drzew. Niestety jego prawidłowe działanie ograniczone jest do jednej klasy grafów.
- algorytm Greedy wyróżnia się ekstremalnie niskim czasem działania oraz zaskakującą dobrą jakością rozwiązań w wielu klasach grafów. Jako jedyny spośród prezentowanych algorytmów

mów jest skalowalny do większych grafów.

- Approx zapewnia stabilne i poprawne rozwiązania, z niskim błędem względnym, jednak znaczco pogarsza się dla drzew i struktur bardzo rzadkich. Ponadto, dla testowanych przykładów grafów udało się pokazać, że wyniki są zgodne z prezentowanym w literaturze wspólnikiem aproksymacji.
- AntColony prezentuje najgorszy spośród wszystkich algorytmów czas działania oraz jakość rozwiązania. Źle dobrana heurystyka sprawia, że algorytm staje się niepraktyczny i nieskuteczny na tle pozostałych analizowanych algorytmów.

Wyniki algorytmów różnią się w zależności od klasy grafu, co sugeruje konieczność doboru algorytmu w zależności od specyfiki problemu i charakterystyki grafu.

- grafy rzadkie - algorytm Greedy prezentuje bardzo dobrą jakość rozwiązania w stosunku do czasu działania dla tej klasy. Podobnie ILP, który mimo, że jest oparty na programowaniu liniowym, wyznacza dokładnie  $\gamma_R^{wc}(G)$  w stosunkowo krótkim czasie działania. Algorytmy Approx i AntColony prezentują słabą jakość i czas rozwiązania dla grafów rzadkich. ILP2 znajduje dokładne rozwiązanie w czasie dłuższym niż ILP. Wynika to z stosunkowo niewielkiej liczby cykli grafów rzadkich, na czym zyskuje ILP, którego czas działania wzrasta wraz z liczbą cykli w grafie do przeanalizowania,
- grafy gęste - bardzo dobrze w tej klasie grafów wypadają algorytmy heurystyczne, dając niemalże optymalne wyniki w krótkim czasie. ILP tym razem z powodu dużej liczby cykli w grafie znacznie spowalnia i można odnotować, że ILP2 oparty na przepływach daje wynik w krótszym czasie dla większej liczby wierzchołków,
- drzewa - godny odnotowania jest fakt, że udało się skonstruować algorytm specjalny dla tej klasy grafów, działający w czasie liniowym. Ten dedykowany algorytm prezentuje optymalne wyniki w bardzo krótkim czasie działania. ILP działa najkrócej dla wszystkich przypadków testowych z prezentowanych algorytmów opartych na programowaniu liniowym. Drzewa to grafy acykliczne, więc brak cykli znacznie skraca czas działania tego algorytmu. Algorytm Approx dla tej klasy daje wysoce nieoptymalne wyniki, ze względu na wiele nadmiernych przypisań. Approx wyznacza CDS, więc dla struktur takich jak drzewa, zwykła spójność, zamiast słabej spójności jest nadmierna dla tego problemu,
- grafy bezskalowe - dla tej klasy grafów dobre wyniki dają algorytmy oparte na programowaniu liniowym, zarówno dokładne jak i heurystyczny. Greedy prezentuje nieco gorszą jakość rozwiązania.

Dla grafów gęstych algorytmy charakteryzują się najdłuższym czasem działania spośród wszystkich testowanych klas grafów dla danej liczby wierzchołków grafu. Algorytmy pozostałych klas wykonują się szybciej niż dla grafów gęstych, z powodu mniejszej liczby krawędzi.

## 6.2 Wnioski i dalsze kierunki badań

Na podstawie przeprowadzonych badań i analiz sformułowano wnioski. Praca pozwala również uzyskać odpowiedzi na wszystkie postawione pytania badawcze. Odpowiedzi te podsu-

mowano poniżej.

Udało znaleźć istniejące w publikacjach rozwiązania oraz zaprojektować nowe, a także we współpracy z promotorką, algorytmy dokładne oraz heurystyczne. Algorytmy wyznaczające optymalnie  $\gamma_R^{wc}(G)$  to ILP, ILP2, BruteForce oraz TreeLinear, a heurystyczne to Greedy, Approx i AntColony.

Na podstawie analizy można wywnioskować, że jakość i czas działania algorytmów jest uzależniony od klasy i własności testowanych grafów. Konieczny zatem jest dobór właściwego algorytmu do grafu.

- jeśli ważne jest otrzymanie wyniku w czasie niemal rzeczywistym, bądź dla bardzo dużych grafów warto skorzystać z algorytmu Greedy,
- jeśli czas nie jest istotny, a dokładność wyniku, to warto skorzystać z algorytmów programowania liniowego, po wcześniejszej analizie struktury grafu. Dla grafów gęstych dobrym wyborem będzie ILP2, w pozostałych przypadkach ILP,
- dla drzew bez wątpienia najlepszym wyborem będzie dedykowany algorytm liniowy TreeLinear. Przykład ten pokazuje, że warto tworzyć algorytmy dla konkretnych klas grafów.

Warto zwrócić uwagę również na algorytmy heurystyczne, głównie Greedy i Approx. Są one w stanie dość dobrze przybliżyć wartość  $\gamma_R^{wc}(G)$  w czasie krótszym niż algorytmy dokładne, zwłaszcza algorytm zachłanny.

Kolejnym wnioskiem jest słaba jakość rozwiązań algorytmu mrówkowego. Mimo przeprowadzenia testów pozwalających wybrać najlepszy zestaw parametrów, jego wyniki są bardzo niezadowalające czasowo i jakościowo. W tej implementacji nie ma potrzeby wykorzystywać algorytmu do rozwiązywania tego problemu, gdyż pokazano, że istnieją lepsze alternatywy. Użyta heurystyka lokalna w postaci liczby sąsiadów wierzchołka była złym, bądź niekoniecznie dobrze rozwinietym wyborem implementacyjnym.

Zastosowanie WCRDF do problemów praktycznych, czyli np. rozmieszczenia zabezpieczeń w sieci energetycznej czy agentów wykrywających oszustwa w sieci społecznościowej zostało uzasadnione i warte dalszych badań. Może stanowić potencjalnie użyteczny model do minimalizacyjnego rozmieszczenia zabezpieczeń w naturalnie utworzonych grafach.

Dalsze kierunki badań mogą obejmować:

- implementację i testy potencjalnych ulepszeń dla algorytmu Greedy. Z racji szybkiego czasu działania, algorytm można wykonywać kilka razy i wybierać najlepsze rozwiązanie. Wymagałyby to wprowadzenia losowości do implementacji.
- rozszerzenie testów na inne klasy, jak i na inne wielkości grafów.
- podniesienie jakości wyników algorytmu mrówkowego, między innymi poprzez inną implementację heurystyki lokalnej oraz strategii feromonowej oraz badania w celu znalezienia jak najlepszej heurystyki.
- próbę opracowania algorytmów dokładnych, rozwiązywalnych w czasie wielomianowym dla innych klas grafów.
- weryfikację i przełożenie teoretycznych rozważań na temat praktycznych zastosowań tego

problemu na praktyczną analizę i realizację.

## WYKAZ LITERATURY

- [1] *Awaria zasilania na Półwyspie Iberyjskim*. Dostęp: 21.05.2025. URL: [https://pl.wikipedia.org/wiki/Awaria\\_zasilania\\_na\\_P%C3%B3%C5%82wyspie\\_Iberyjskim](https://pl.wikipedia.org/wiki/Awaria_zasilania_na_P%C3%B3%C5%82wyspie_Iberyjskim).
- [2] P. Chakradhar, P. Reddy i K. Himanshu. "Algorithmic complexity of weakly connected Roman domination in graphs". W: (2021). Dostęp: 15.03.2025. URL: <https://www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S1793830921501251>.
- [3] E. J. Cockayne i in. "Roman domination in graphs". W: (2004). Dostęp: 11.05.2025. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X03004473>.
- [4] *Exact cover by 3-sets*. Dostęp: 11.05.2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Exact\\_cover](https://en.wikipedia.org/wiki/Exact_cover).
- [5] N. Fan i J. Watson. "Solving the Connected Dominating Set Problem and Power Dominating Set Problem by Integer Programming". W: (2012). Dostęp: 22.05.2025. URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-31770-5\\_33](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-31770-5_33).
- [6] M. Ivanović. "Improved integer linear programming formulation for weak Roman domination problem". W: (2017). Dostęp: 15.03.2025. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00500-017-2706-4>.
- [7] J. Raczek i J. Cyman. "Weakly connected Roman domination in graphs". W: (2019). Dostęp: 03.03.2025. URL: <https://mostwiedzy.pl/en/publication/weakly-connected-roman-domination-in-graphs,150016-1>.
- [8] *Karate club graph*. Dostęp: 11.05.2025. URL: [https://networkx.org/documentation/stable/reference/generated/networkx.generators.social.karate\\_club\\_graph.html](https://networkx.org/documentation/stable/reference/generated/networkx.generators.social.karate_club_graph.html).
- [9] D. Niu i in. "A greedy randomized adaptive search procedure (GRASP) for minimum weakly connected dominating set problem". W: (2023). Dostęp: 11.05.2025. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0957417422023569>.
- [10] *Plan istniejącej sieci przesyłowej najwyższych napięć*. Dostęp: 11.05.2025. URL: <https://www.pse.pl/obszary-dzialalnosci/krajowy-system-elektryczny/plan-sieci-elektrycznej-najwyzszych-napiec/istniejaca>.
- [11] *Problem komiwojażera*. Dostęp: 01.06.2025. URL: [https://pl.wikipedia.org/wiki/Problem\\_komiwoja%C5%BCera](https://pl.wikipedia.org/wiki/Problem_komiwoja%C5%BCera).
- [12] J. Raczek i R. Zuazua. "Progress on Roman and Weakly Connected Roman Graphs". W: (2021). Dostęp: 11.05.2025. URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/9/16/1846>.
- [13] *Social circles: Facebook*. Dostęp: 11.05.2025. URL: <https://snap.stanford.edu/data/ego-Facebook.html>.
- [14] I. Stewart. *Defend the Roman Empire!* Dostęp: 03.03.2025. USA: Scientific, 1999, s. 136–139.
- [15] *Zachary's karate club*. Dostęp: 22.05.2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s\\_karate\\_club](https://en.wikipedia.org/wiki/Zachary%27s_karate_club).

## SPIS RYSUNKÓW

|  |    |
|--|----|
| 2.1 Przykład grafu rzymskiego słabo spójnego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .  | 10 |
| 3.1 Graf $G$ - przykładowe drzewo. . . . .   | 20 |
| 3.2 Graf $G$ - po fazie 1. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .   | 21 |
| 3.3 Graf $G$ - po fazie 2 - finalna wersja. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .  | 22 |
| 4.1 Porównanie średniego czasu działania algorytmów na grafach rzadkich w stosunku do liczby wierzchołków w grafie. . . . .  | 49 |
| 4.2 Wyniki dla przykładowego grafu rzadkiego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .  | 50 |
| 4.3 Porównanie średniego czasu działania algorytmów na grafach gęstych w stosunku do liczby wierzchołków w grafie. . . . .   | 52 |
| 4.4 Wyniki dla przykładowego grafu gęsteego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .   | 53 |
| 4.5 Porównanie średniego czasu działania algorytmów na drzewach w stosunku do liczby wierzchołków w grafie. . . . .  | 55 |
| 4.6 Wyniki dla przykładowego drzewa. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .   | 56 |
| 4.7 Porównanie średniego czasu działania algorytmów na grafach bezskalowych w stosunku do liczby wierzchołków w grafie. . . . .  | 58 |
| 4.8 Wyniki dla przykładowego grafu bezskalowego. Wartości 0 to żółte wierzchołki, 1 - niebieskie, a 2 to czerwone. . . . .   | 59 |
| 4.9 Zależność błędu względnego algorytmu mrówkowego od liczby wierzchołków. . . .  | 60 |
| 4.10 Zależność błędu względnego algorytmu zachłannego od liczby wierzchołków. . . .  | 61 |
| 4.11 Zależność błędu względnego algorytmu aproksymacyjnego od liczby wierzchołków. . . .   | 62 |
| 4.12 Porównanie algorytmu aproksymacyjnego z granicą teoretyczną $2(1+\epsilon)(1+\ln(\Delta-1))$ . . . .  | 63 |
| 4.13 Algorytmy heurystyczne: czas działania w stosunku do błędu względnego. . . . .  | 64 |
| 5.1 Sieć przesyłowa największych napięć na tle mapy Polski . . . . .   | 66 |
| 5.2 Efekt działania algorytmów ILP, Greedy i Approx dla problemu rozmieszczenia zabezpieczeń sieci energetycznych. Żółte wierzchołki to 0, niebieskie to 1, a czerwone to 2. . . . . | 67 |
| 5.3 Efekt działania algorytmów dla problemu rozmieszczenia agentów w małej, rzeczywistej sieci społecznościowej. . . . .   | 69 |

5.4 Efekt działania algorytmu zachłannego dla problemu rozmieszczenia agentów w dużej, rzeczywistej sieci społecznościowej.  $\gamma_R^{\text{wc}}(G)$ : 411, czas działania 2,9348995 s. 70

## **SPIS TABEL**

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 4.1 | Wpływ kombinacji hiperparametrów na błąd rozwiązania . . . . .   | 45 |
| 4.2 | Wpływ kombinacji hiperparametrów na błąd rozwiązania na konkretnych klasach grafów . . . . .                     | 45 |
| 4.3 | Wybrany zestaw parametrów . . . . .  | 46 |
| 4.4 | Wyniki dla grafów rzadkich . . . . .   | 48 |
| 4.5 | Wyniki dla grafów gęstych . . . . .  | 51 |
| 4.6 | Wyniki dla drzew . . . . .   | 54 |
| 4.7 | Wyniki dla grafów bezskalowych . . . . .   | 57 |
| 5.1 | Wynik działania wybranych algorytmów dla problemu rozmieszczenia zabezpieczeń sieci energetycznych. . . . .      | 68 |
| 5.2 | Wynik działania wybranych algorytmów dla problemu rozmieszczenia agentów w małej sieci społecznościowej. . . . . | 70 |