POLITECHNIKA
GDAŃSKA

Analiza algorytmów dla dominowania rzymskiego słabo spójnego

Analysis of algorithms for weakly connected Roman domination

inż. Paulina Brzęcka

3 lipca 2025

Definicja problemu

Definicja

Funkcję dominującą rzymską słabo spójną (WCRDF) na grafie G definiuje się jako taką funkcję dominującą rzymską $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$, dla której zbiór wierzchołków

$$\{u \in V(G) : f(u) \in \{1,2\}\}$$

stanowi jednocześnie słabo spójny zbiór dominujący.

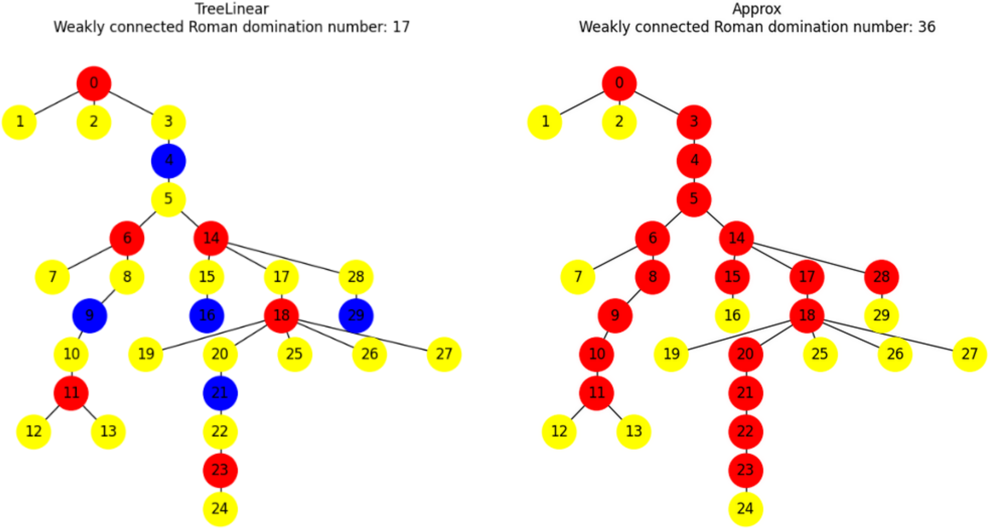
Wagę funkcji f definiuje się jako:

$$f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$$

Liczbą dominowania rzymskiego słabo spójnego grafu G nazywamy najmniejszą możliwą wagę funkcji f spełniającej powyższe warunki i oznaczamy ją symbolem:

$$\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$$

Przykład


TreeLinear
Weakly connected Roman domination number: 17
0
1
2
3
4
5
6
14
7
8
15
17
28
9
16
18
29
10
19
20
25
26
27
11
21
12
13
22
23
24
Approx
Weakly connected Roman domination number: 36
0
1
2
3
4
5
6
14
7
8
15
17
28
9
16
18
29
10
19
20
25
26
27
11
21
12
13
22
23
24

Cel pracy

- analiza algorytmów dla dominowania rzymskiego słabo spójnego,
- opisanie już istniejących rozwiązań i opracowanie własnych,
- analiza i porównanie ich skuteczności,
- znalezienie możliwych praktycznych zastosowań.

Pytania badawcze

- Jakie algorytmy są w stanie znaleźć WCRDF? Które z nich są w stanie znaleźć dodatkowo najmniejszą sumę wag WCRDF?
- Czy czas i jakość działania algorytmów będzie uzależniony od klasy grafów?
- Czy i jakie algorytmy heurystyczne mogą skutecznie przybliżyć wartość liczby dominowania rzymskiego słabo spójnego w czasie krótszym niż dokładne algorytmy?
- Czy hiperparametry algorytmu mrówkowego można dostroić w taki sposób, aby ten algorytm znajdował liczbę dominowania rzymskiego słabo spójnego bliską optymalnej?

Algorytmy

- brute force - Brute Force,
- liniowy dla drzew - TreeLinear,
- programowania liniowego 1 - ILP,
- programowania liniowego 2 - ILP2,
- mrówkowy - AntColony,
- aproksymacyjny - Approx,
- zachłanny - Greedy.

Algorytm brute force

Działanie	Generowanie wszystkich kombinacji przypisań wartości $\{0, 1, 2\}$ i sprawdzanie każdej pod względem spełnialności definicji WCRDF. Wybór kombinacji o najmniejszej sumie wag.
Złożoność czasowa	$O(3^n \cdot n^2)$
Jakość rozwiązania	Znalezienie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$.
Opracowanie	Samodzielne

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Algorytm liniowy dla drzew

Działanie	Rozpatrywanie drzewa od liści do korzenia i nadawanie wierzchołkom wartości poprzez analizę relacji ojciec-syn i wartości zdefiniowanych parametrów.
Złożoność czasowa	$O(n)$
Jakość rozwiązania	Znalezienie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$ dla drzew.
Opracowanie	Wraz z promotorką

Algorytm programowania liniowego 1

Działanie	Model programowania liniowego polegający na definiowaniu podgrafu indukowanego i jego drzewa rozpinającego.
Złożoność czasowa	Wykładnicza
Jakość rozwiązania	Znalezienie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$.
Opracowanie	Na podstawie literatury

Algorytm programowania liniowego 2

Działanie	Model programowania liniowego oparty na przepływach.
Złożoność czasowa	Wykładnicza
Jakość rozwiązania	Znalezienie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$.
Opracowanie	Na podstawie literatury

Algorytm mrówkowy

Działanie	Budowanie rozwiązania poprzez heurystyki i poziom feromonów na wierzchołkach. Następnie sprawdzenie pod względem poprawności WCRDF i wybór najlepszego rozwiązania.
Złożoność czasowa	$O(num\_iterations \cdot num\_ants \cdot n^2)$
Jakość rozwiązania	Znalezienie prawidłowej WCRDF, niekoniecznie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$.
Opracowanie	Samodzielne

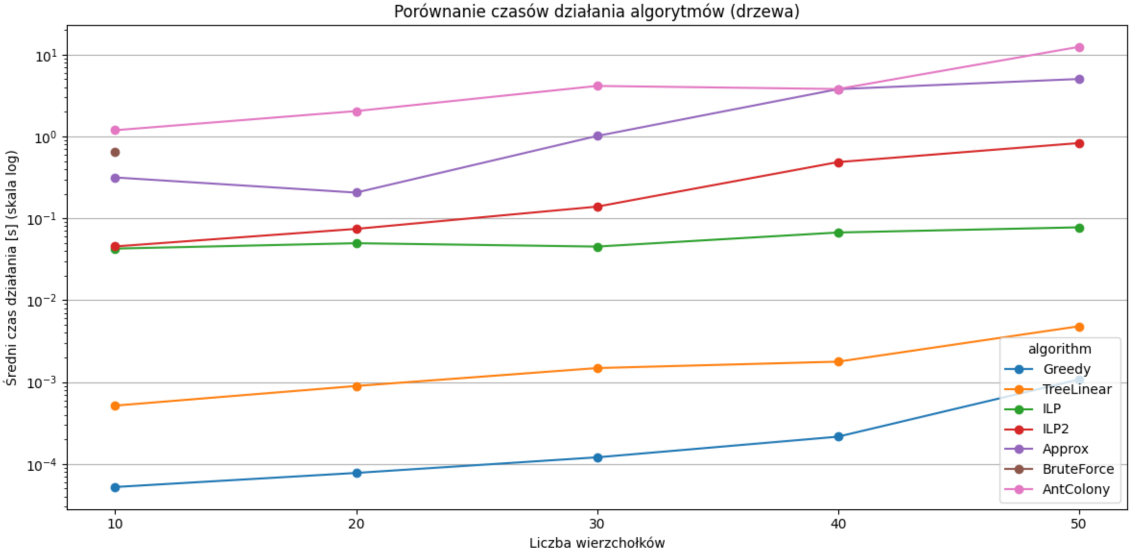
Algorytm aproksymacyjny

Działanie	Znajdowanie zbioru dominującego spójnego w grafie przy użyciu programowania liniowego. Następnie wierzchołkom zbioru dominującego przypisanie wartości 2.
Złożoność czasowa	Wykładnicza
Jakość rozwiązania	Znalezienie prawidłowej WCRDF, niekoniecznie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$. Algorytm $2(1+\varepsilon)(1+\ln(\Delta-1))$-aproksymacyjny.
Opracowanie	Na podstawie literatury

Algorytm zachłanny

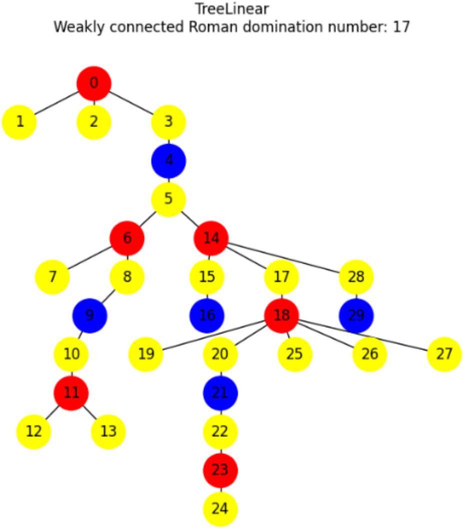
Działanie	Algorytm rozpoczyna od przypisania wartości 2 wierzchołkowi o największym stopniu oraz zabezpieczenia jego sąsiadów. Następnie, dopóki istnieją wierzchołki niechronione (czyli z przypisaną wartością 0), wybierany jest wierzchołek v, który dominuje jak największą liczbę sąsiadów.
Złożoność czasowa	$O(n^2)$ - grafy rzadkie, $O(n^3)$ - grafy gęste
Jakość rozwiązania	Znalezienie prawidłowej WCRDF, niekoniecznie optymalnej $\gamma_R^{\mathrm{wc}}(G)$.
Opracowanie	Samodzielne

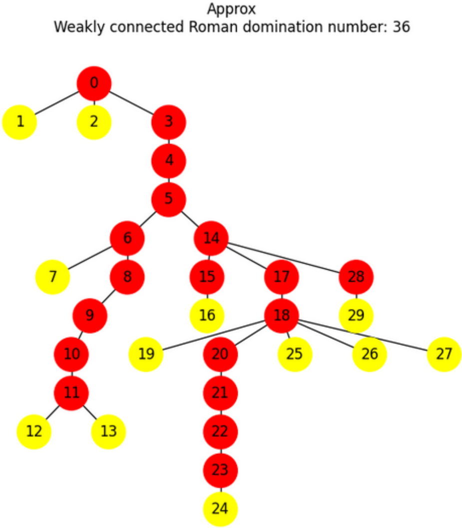
Wyniki



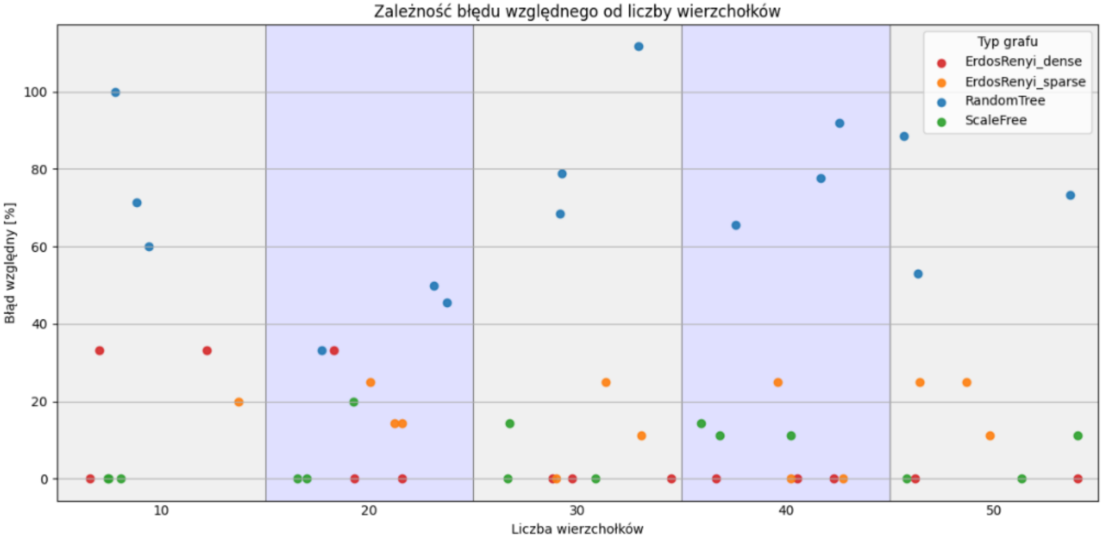
Porównanie czasów działania algorytmów (drzewa)
Średni czas działania [s] (skala log)
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10
20
30
40
50
Liczba wierzchołków
algorithm
Greedy
TreeLinear
ILP
ILP2
Approx
BruteForce
AntColony

Wyniki

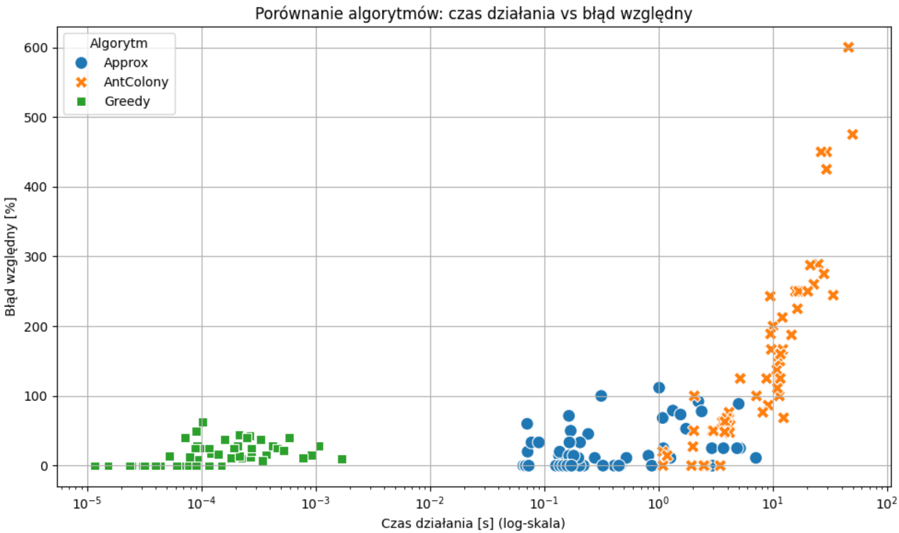

TreeLinear
Weakly connected Roman domination number: 17
0
1
2
3
4
5
6
14
7
8
15
17
28
9
16
18
29
10
19
20
25
26
27
11
21
12
13
22
23
24


Approx
Weakly connected Roman domination number: 36
0
1
2
3
4
5
6
14
7
8
15
17
28
9
16
18
29
10
19
20
25
26
27
11
21
12
13
22
23
24

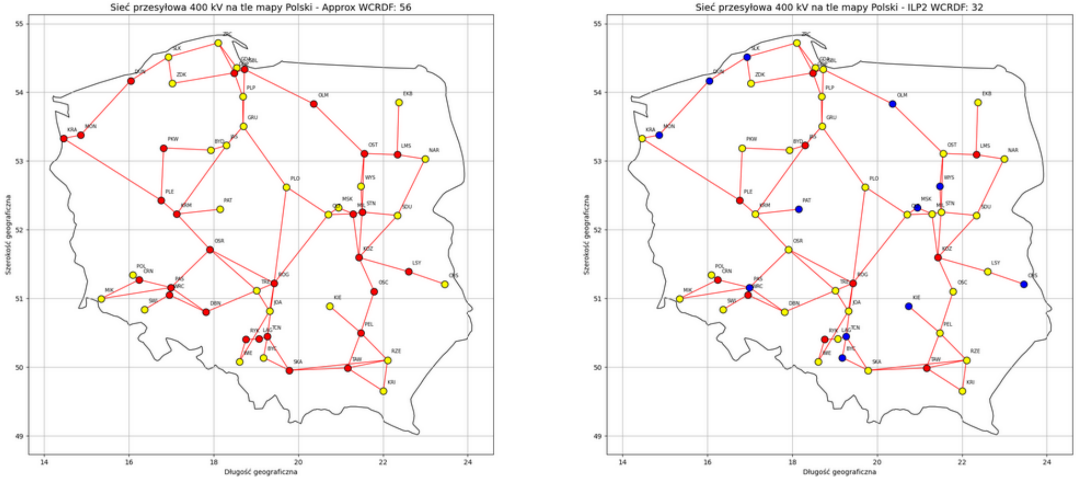
Wyniki algorytmu aproksymacyjnego



Wyniki algorytmów przybliżonych



Zastosowania praktyczne



Rysunek: Rozmieszczenie zabezpieczeń sieci energetycznych.

Wnioski

- udało się odpowiedzieć na wszystkie pytania badawcze,
- konieczność doboru właściwego algorytmu do rodzaju lub klasy grafu:
  - np. TreeLinear dla drzew, ILP2 dla grafów gęstych, Greedy dla dużych instancji.
- algorytmy heurystyczne (Greedy, Approx) zapewniają szybkie i dobre przybliżenia,
- słaba jakość rozwiązań algorytmu mrówkowego - niezalecane w tej implementacji,
- wskazano potencjalne zastosowania praktyczne (np. sieci energetyczne, społeczne) - potwierdzono zasadność modelu WCRDF.

Dalsze kierunki badań

- implementacja i testy potencjalnych ulepszeń dla algorytmu zachłannego,
- rozszerzenie testów na inne klasy, jak i na inne wielkości grafów,
- podniesienie jakości wyników algorytmu mrówkowego, między innymi poprzez inną implementację heurystyki lokalnej oraz strategii feromonowej,
- opracowanie algorytmów dokładnych, rozwiązywalnych w czasie wielomianowym dla innych klas grafów,
- weryfikacja i przełożenie teoretycznych rozważań na temat praktycznych zastosowań tego problemu na praktyczną analizę i realizację.

Dziękuję za uwagę!

POLITECHNIKA
GDAŃSKA