中 国 科 学 技 术 大 学

2021 - 2022学年第二学期期中考试试卷

装订线　答题时不要超过此线

考试科目：　线性代数（B1）　　得分：________

所在院、系：________　姓名：________　学号：________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

注：题目中的 $\mathbb{F}$ 表示任意数域, $\mathbb{R}$ 表示实数域, V 表示 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间.

一、【每小题5分, 共30分】填空题:

1. 若线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2-5x_3 &= 7 \quad ① \\ 4x_1+2x_2-4x_3 &= 8 \quad ② \\ 2x_1+5x_2-8x_3 &= a \end{cases}$ 有解, 则 $a =$ ____10____.

$-4① + ②$
$= -4x_1 - 10x_2 + 16x_3 = -20$
$\Rightarrow -2a = -20$

2. 若矩阵 A, B 皆为可逆矩阵, 则 $D = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$ 也可逆, 且 $D^{-1} =$ ____$\begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$____.

$\begin{pmatrix} & B^{-1} \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ A^{-1} & \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow BX + CA^{-1} = 0 \Rightarrow X = -B^{-1}CA^{-1}$

3. 已知 V 是 $\mathbb{F}$ 上任一线性空间, $\lambda \in \mathbb{F}$. 若向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 与 $\{\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\lambda\alpha_1\}$ 都是 V 的基, 则 λ 满足条件____$\lambda \neq 1$____.

$\begin{pmatrix} 1 & & & \lambda \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆　$\overset{\det}{=} 1 - \lambda \neq 0$

4. 已知方阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则伴随矩阵 $A^* =$ ____$\frac{1}{3}A^{-1}$____.

$\overset{\det}{=} 8+6+1-4-6-2 = 3$

$AA^* = |A|I \Rightarrow A^* = |A|A^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$　　$3 = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5. 矩阵 $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right)$ 构成线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基.

$(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

这组基到 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的自然基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 的过渡矩阵为____$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$____.

6. 记 $W = \{f(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f(x) \leqslant n, f(2) = 0\}$, 是 $\mathbb{F}[x]$ 的子空间. 则 W 有一组基____$x-2, \cdots (x-2)^n$____.

$\forall f \in W$. $f(x) = (x-2)(a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)$
$= f(x-2+2) = ((x-2)+2-2)(a_{n-1}(x-2)^{n-1} + \cdots + a_0)$
$= a_{n-1}(x-2)^n + \cdots$ ✓

二、【每小题5分（判断正误2分，理由3分），共20分】

判断题：判断下列命题是否正确, 并简要说明理由或举出反例.

1. 域 $\mathbb{F}$ 上所有行列式为 0 的 n 阶方阵构成 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

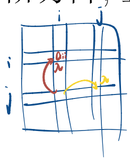
X. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不在该空间.

2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$ 等价, 则 $s = t$.

X　$\alpha_1 = (1)$　$\beta_1 = (1)$, $\beta_2 = (2)$.

3. 设 A 为 n 阶方阵, 且 A 与任意 n 阶可逆矩阵相乘可交换. 则 A 必为数量矩阵.

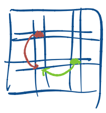
✓ $T_{ij}(\lambda)$



$\Rightarrow a_{ii} + \lambda a_{ji} = a_{ii}$

$\Rightarrow a_{ji} = 0 \quad \forall i \neq j$

S_{ij}



$\Rightarrow a_{ii} = a_{jj}$

4. 设 A, B, C 为 n 阶实方阵. 若 $A^{\mathrm{T}}AB = A^{\mathrm{T}}AC$, 则 $AB = AC$.

✓

$\Rightarrow A^TA(B-C) = 0$

$\Rightarrow (B-C)^TA^TA(B-C) = 0$

$\Rightarrow A(B-C) = 0$

$\Rightarrow AB = AC$

三、【4+6+6=16分】

已知方阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 4 & 14 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & a \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{matrix}$, 方程组 $A\mathbf{x} = 0$ 的解空间 V_A 是 2 维的.

(1) 求 a.

(2) 求 $A\mathbf{x} = 0$ 的一个基础解系.

(3) 求 $A\mathbf{x} = \beta$ 的通解, 其中 $\beta = (0\ 3\ -3\ 6)^{\mathrm{T}}$.

(1) $A \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -8 & 2 & a-3 & 6 \end{array}\right)$　$\dim V_A = 2$

$\Rightarrow a-3=-2 \Rightarrow a=1.$

(2) $x_3 = t_1,\ x_4 = t_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{9}{8}t_1 - \frac{7}{8}t_2 \\ x_2 = \frac{t_1 - t_2}{4} \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2$

$t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$

(3) 特解: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{9}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

四、【8+8=16分】已知两个 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&3&&&\\2&5&3&&\\&2&5&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&&&2&5&3\\&&&&2&5\end{pmatrix}$$

(1)计算矩阵 $A^{-1}B$.

(2)计算行列式 $\det(B)$.

猜 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&&&0\\0&1&-1&&\\\vdots&0&1&\ddots&\\&&&\ddots&-1\\0&&&&1\end{pmatrix}$

CHECK $AA^{-1}=I$

$$\Rightarrow A^{-1}B=\begin{pmatrix}3&-2&-3&\cdots&0\\2&3&-2&-3&\\0&2&3&-2&-3\\&&\ddots&&\ddots\\&&&&-3\\&&2&3&-2\\&&&2&5\end{pmatrix}$$

(2) $\det B = 5B_{n-1} - 2\cdot 3B_{n-2}$

$\Rightarrow B_n - 2B_{n-1} = 3(B_{n-1} - 2B_{n-2})$

对称性 $\Rightarrow \begin{cases}B_n - 2B_{n-1} = 3^n\\ B_n - 3B_{n-1} = 2^n\end{cases} \Rightarrow B_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

五、【6+4=10分】

求向量组 $\alpha_1 = (1,\ -1,\ 2,\ 4)$, $\alpha_2 = (0,\ 3,\ 1,\ 2)$, $\alpha_3 = (2,\ -11,\ 1,\ 2)$, $\alpha_4 = (2,\ 1,\ 5,\ 10)$ 的一个极大线性无关组, 并将它扩充为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -11 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -9 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ 极大无关组 (α_1, α_2)

$(\alpha_1, \alpha_2, e_3, e_4)$ 为 $\mathbb{R}^4$ 一组基.

六、【4+4=8分】设 A 为 $\mathbb{F}$ 上的秩为 $n-1$ 的 n 阶方阵.

(1) 证明 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为1.

(2) 证明存在 $k \in \mathbb{F}$, 使得 $(A^*)^2 = kA^*$.

(1) $\text{rank } A^* + \text{rank } A \leq n \Rightarrow \text{rank } A^* \leq 1$ & A有 $n-1$ 非0子式 $\Rightarrow A^* \neq 0$

$\Rightarrow \text{rank } A^* = 1$

(2) 设 $A^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} (b_1 \cdots b_n) \triangleq \alpha \beta^T$

$\Rightarrow {A^*}^2 = \alpha \underbrace{\beta^T \alpha}_{\text{const}} \beta^T = \underbrace{\beta^T \alpha}_{\triangleq k} \underbrace{\alpha \beta^T}_{= A^*} = kA^*$ #.