一、1. $\alpha^T\beta = 2 \Rightarrow tr(\beta\alpha^T) = 2$

又 $r(\beta\alpha^T) = 1$,

∴ 有 $\lambda = 0$. 又 $r(0I - A) = r(A) = 1$

∴ $\lambda_1 = 0$ 重数为2

∴ $\lambda_2 = 2$ 重数为1 $(tr = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$

2. 特征值为相似不变量

∴ $|B^{-1} - I| = |B|^{-4}\,|I - B| = 0$ $(|1\cdot I - B| = 0)$

3. $\begin{cases} a-1 = b+1 & \text{(trace 相同)} \\ \cancel{-2(a-2) = -2b} & \text{(行列式相同)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}$ ∴ $a+b = -2$

代入 $\lambda = 2$, $\begin{vmatrix} 4 & & \\ & 2-a & -2 \\ & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4a = 0$

4. ? $\begin{pmatrix} 1 & & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

5. ? 6

6. ? $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, 0

期中之前的内容

二、1. 不相似. $\lambda = 3, 0$.

相合. $Q = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$, $s = 0$, $r = r(A) = 2$

2. 期中前 ✓ $m \leq r(A), r(B) \leq m$

3. ① $f \geq 0$, $s = 0$. 验证 $r = n$ 即可

$b_{ii} = \frac{1^2 + \cdots + n^2}{i^2}$ $b_{ij} = \frac{2(1^2 + \cdots + n^2)}{ij}$ $(i \neq j)$

$r(B) = n$. ✓

4. ✓ 令 $\vec{x} = (1, \cdots, 1)^T$ $A\vec{x} = \vec{x}$ $\Rightarrow A^5\vec{x} = \vec{x}$ $\Rightarrow A^5$ 每行和为1

三、1. ∵ A 非负定

由特征向量的正交性 $\Rightarrow \vec{x_2} = (1, 0, -1)^T$ $\vec{x_3} = (1, -1, 0)^T$

∴ $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

∴ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \cancel{0} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $A = P\,diag\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$

2. $|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 & \Rightarrow \vec{x_1} = (1, 0, 1)^T \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} & \Rightarrow \vec{x_2} = (1, -1, 0)^T \end{cases}$ ∴ $\vec{\alpha} = (2\vec{x_1} + \vec{x_2})$

∴ $A^n\vec{\alpha} = 2\lambda_1^n\vec{x_1} + \lambda_2^n\vec{x_2} = 2\vec{x_1} + \frac{1}{2^n}\vec{x_2}$

∴ $\lim_{n\to\infty} |A^n\vec{\alpha}| = 2\sqrt{2}$

3、作业题

(1). 设 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{\alpha}_n=\vec{0}$

其中 $k_i\in F$，$\vec{\alpha}_i=T^{n-i}\vec{\alpha}$

对两边同时作用 T (n-1) 次，有 $k_n\vec{\alpha}_1=\vec{0}$

$\because \vec{\alpha}_1\neq\vec{0}$ $\therefore k_n=\vec{0}$，依次类推

$k_1=k_2\cdots=k_n=0$

$\therefore \vec{\alpha}_1,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 线性无关

(2). 证明：

T 在该组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}=A$

$\therefore |\lambda I-A|=\lambda^n=0\Rightarrow\lambda=0$

但 $\operatorname{rank}(0\cdot I-A)=n-1$

$\dim V=1\neq n$

$\therefore$ 代数重数 $\neq$ 几何重数

不可对角化

4. $\vec{\alpha}_1=1$

$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1)=\int_{-\pi}^{\pi}1dx=2\pi$

$\therefore \vec{e}_1=\frac{\vec{\alpha}_1}{|\vec{\alpha}_1|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-(\vec{\alpha}_2,\vec{e}_1)\vec{e}_1$

$(\vec{\alpha}_2,\vec{e}_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=0$

$\therefore \vec{\beta}_2=x$

$|\vec{\beta}_2|^2=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^3}{3}$

$\therefore \vec{e}_2=\frac{\sqrt{3}\,x}{\pi\sqrt{2\pi}}$

$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-(\vec{\alpha}_3,\vec{e}_2)\vec{e}_2-(\vec{\alpha}_3,\vec{e}_1)\vec{e}_1$

$=\cos x-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$

$=\cos x$

$(\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_3)=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2x\,dx$

$=\pi$

$\therefore \vec{e}_3=\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$

$\therefore$ K的一组标准正交基为 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\sqrt{\frac{3}{2\pi^3}}\cdot x,\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\right\}$

5. 证明：易知，前4阶顺序主子式 >0

当 $|x|<3$ 时

①若 $|A|\leq 0$，则 $|A|<10^5$ 显然.

②若 $|A|>0$，则 $|A|$ 正定，

有 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_5=50$ 且 $\lambda_i>0$

由基本不等式 $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_5\leq\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_5}{5}\right)^5=10^5$

当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_5=10$ 时，等号成立

假设 $\lambda_1=\lambda_2\cdots=\lambda_5=10$

有 $r(10I-A)\neq 0$

即 $\dim V\neq 5$ 代数重数 $\neq$ 几何重数

A不可对角化，矛盾

$\therefore$ 5个特征值不可能同时为10.

$\therefore |A|<10^5$ 得证

6. $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&\\1&&t\end{pmatrix}$

$\therefore$ ~~$|\lambda I-A|=$~~ $\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-1\\-2&\lambda-1&\\-1&&\lambda-t\end{vmatrix}$

初等变换法：

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&\\1&&t\\1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_1\to r_3]{-c_1\to c_3}\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&-2\\0&-2&t-1\\1&&-1\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-2r_1\to r_2]{-2c_1\to c_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&\\0&-3&-2\\&-2&t-1\\1&-2&-1\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{2}{3}r_2\to r_3]{-\frac{2}{3}c_2\to c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&t+\frac{1}{3}\\1&-2&\frac{1}{3}\\&1&-\frac{2}{3}\\&&1\end{pmatrix}$$

$\therefore P=\begin{pmatrix}1&-2&\frac{1}{3}\\&1&-\frac{2}{3}\\&&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}$

变换后，方程为：$x_1'^2-3x_2'^2+(t+\frac{1}{3})x_3'^2+x_3'-10=0$

$\therefore t=-\frac{1}{3}$ 时，为双曲抛物面.（抛物型）

$t\neq-\frac{1}{3}$ 时 令 $\tilde{x}_3=x_3'+\frac{1}{2(t+\frac{1}{3})}$

有 $x_1'^2-3x_2'^2+(t+\frac{1}{3})\tilde{x}_3^2=10+\frac{1}{4(t+\frac{1}{3})}$

当 $10+\frac{1}{4(t+\frac{1}{3})}=0$ 即 $t=-\frac{43}{120}$ 时，为二次锥面

其它情况为双曲面型.

7、(1). $f(x)=k_1(x^2+x+3)+k_2(x+2)+k_3$

~~假设线性相关,~~ 令 $f(x)\equiv 0$

有 $f''(x)\equiv 0=2k_1$

$f'(x)\equiv 0=k_2$

$f(x)\equiv 0=k_3$

$\therefore k_1=k_2=k_3=0$

$\therefore$ $1, x+2, x^2+x+3$ 线性无关,是K的一个基

(2). $\vec{e_1}=1,\quad \vec{e_2}=x+2,\quad \vec{e_3}=x^2+x+3$

$T(\vec{e_1})=-1=-\vec{e_1}$

$T(\vec{e_2})=-x-2=-\vec{e_2}$

$T(\vec{e_3})=2-\vec{e_3}=2\vec{e_1}-\vec{e_3}$

$\therefore$ T在这个基下的矩阵为: $\begin{pmatrix}-1 & & 2\\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix}=A$

(3). $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & & -2\\ & \lambda+1 & \\ & & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0$

$\therefore$ $\lambda=-1$, (重数为3).

$$\begin{pmatrix}0 & & -2\\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=t_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\quad t_1,t_2\in F$$

$=t_1+t_2(x+2)$. (t_1,t_2不同时为0)

5. 一、

1、$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & & -1 \\ & \lambda-2 & \\ -3 & & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-2) - 3(\lambda-2) = (\lambda^2-3)(\lambda-2)$

$\therefore \lambda_1 = -\sqrt{3} \quad \lambda_2 = \sqrt{3} \quad \lambda_3 = 2$

2、相当于在问3阶实对称矩阵对应的二次型有多少种规范形.

r, s（正、负惯性指数）有多种组合，有 $r+s \le 3$.

① $r+s=3$. $(1,2)$. $(2,1)$ $(0,3)$ $(3,0)$

② $r+s=2$. $(1,1)$ $(2,0)$ $(0,2)$

③ $r+s=1$ $(1,0)$ $(0,1)$

④ $r+s=0$ $(0,0)$

共10种.

3. 首先 $Q \ge 0$. 为半正定二次型. $\therefore s=0$. $r = \mathrm{rank}(A) = 3$

4. 设 $\mathscr{A}(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) A$

则 $\gamma = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

5. 设V上包含 γ 的一组标准正交基为 $\{\vec{e_1}, \cdots, \vec{\gamma}, \cdots, \vec{e_n}\}$

那么有 $\mathscr{A}(\vec{e_i}) = \vec{e_i} - 2(\vec{e_i}, \vec{\gamma})\vec{\gamma}$

$= \vec{e_i}$ （正交）

$\mathscr{A}(\vec{\gamma}) = \vec{\gamma} - 2\underbrace{(\vec{\gamma}, \vec{\gamma})}_{\text{(单位向量)}}\vec{\gamma}$

$= -\vec{\gamma}$

$\therefore \mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ n个特征值为 -1 和 $n-1$ 个1.

二、

1、X，课本定理6.2.2 说明它们彼此相似，但不一定相合.（相合一定对称，但相似不保持对称）

2、X，实方阵的特征值可以有复数 如：$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lambda^2+1=0$. $\lambda = \pm i$，

又上三角矩阵的对角元素一定是特征值.

$\therefore$ 当特征值有复数时，实方阵不可能实相似于上三角矩阵.（实数的 $+ - \times \div$ 是封闭的）.

3. X 可正交对角化一定是对称阵，而 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 是正交阵但不对称

4. √，A可逆，取 $T = A$，有 $T^{-1}ABT = A^{-1}ABA = BA$ 相似.

5. X. $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ 满足条件. 取 $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 1$. $Q(x_1, x_2, x_3) = -1 < 0$ 不成立.

3、(1). $(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)A$

$\therefore A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)^{-1}(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & & \\ 3 & 1 & 0 & & 1 & \\ 5 & 2 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{5}{2}r_1\to r_3]{-\frac{3}{2}r_1\to r_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-2r_2\to r_3]{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[2r_3]{\substack{-r_3\to r_1 \\ 3r_3\to r_2}} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 & 2 & -1 \\ & 1 & & 0 & -5 & 3 \\ & & 1 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore (\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 9 & -5 \\ -10 & -23 & 15 \\ -7 & -16 & 13 \end{pmatrix}$

(2). 显然 $\vec{\alpha}_2$ 在 自然基下的坐标就是本身

$\therefore \vec{\beta}_2 = B\vec{\alpha}_2$

$\therefore B=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3)(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)^{-1}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 3 & -20 & 11 \\ 0 & -16 & 10 \\ 5 & -15 & 7 \end{pmatrix}$

4. 首先明确度量矩阵 G: $g_{ij}=(\vec{\alpha}_i,\vec{\alpha}_j)$

$\therefore |\vec{\alpha}_1|=1 \quad |\vec{\alpha}_2|=\sqrt{10} \quad |\vec{\alpha}_3|=\sqrt{2}$ 之后 Schmidt 正交化

$\vec{e}_1=\frac{\vec{\alpha}_1}{|\vec{\alpha}_1|}=\vec{\alpha}_1$

$\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_2-(\vec{\alpha}_2,\vec{e}_1)\vec{e}_1=\vec{\alpha}_2$

$\therefore \vec{e}_2=\frac{\vec{\beta}_2}{|\vec{\beta}_2|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{\alpha}_2$

$\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_3-(\vec{\alpha}_3,\vec{e}_2)\vec{e}_2-(\vec{\alpha}_3,\vec{e}_1)\vec{e}_1$

$=\vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1$

$|\vec{\beta}_3|^2=(\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_3)=(\vec{\beta}_3,\vec{\alpha}_3)+\frac{1}{5}(\vec{\beta}_3,\vec{\alpha}_2)-(\vec{\beta}_3,\vec{\alpha}_1)$

$=\frac{13}{5}$

$\therefore \vec{e}_3=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\cdot(\vec{\alpha}_3+\frac{1}{5}\vec{\alpha}_2-\vec{\alpha}_1)$

5. 方程为非标准形式，根据各项系数写出相应的实对称阵：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & & 4 \\ & 6 & \\ 4 & & 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore |\lambda I-A| = (\lambda-2)^2(\lambda-6) - 4(\lambda-6)4$

$= (\lambda-6)(\lambda^2-4\lambda-12)$

$= (\lambda-6)^2(\lambda+2)$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=6 \quad \lambda_3=-2.$

① $\lambda=6$，$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 解得两个无关的特征向量：$\vec{x}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$ （记得标准化）

$\vec{x}_2=(0,1,0)^T$

② $\lambda=-2$，$\begin{pmatrix} -4 & & -4 \\ & -8 & \\ -4 & & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T$

$\therefore$ 变换矩阵为 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

标准方程为：$6x'^2+6y'^2-2z'^2-1=0$

6. 证明：

$\because$ A为实对阵，

$\therefore \exists$ 正交阵 P_0，使 $P_0^TAP_0=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & & & \\ & \lambda_2 I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_s \end{pmatrix}=D$ 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为A的s个互异的特征值，I_i 的阶数就是 λ_i 的重数。

令 $B'=P_0^TAP_0$ 为对称阵.

$\because AB=BA$

$\therefore P_0^TAPP^TBP_0 = DB'$

$\quad\quad \parallel \quad\quad\quad \parallel$

$P_0^TBPP^TAP_0 = B'D$

$\therefore B'=\begin{pmatrix} B_{11} & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$ （其中 B_i 都是实对称阵）

$\therefore$ 对 B_i，$\exists$ 正交阵 P_i 使 $P_i^TB_iP_i=\mathrm{diag}(\mu_{i1},\cdots,\mu_{ir})$

$\therefore \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix}^T P_0^TBP_0 \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix}$ 为对角阵.

$\begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix}^T P_0^TAP_0 \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_s \end{pmatrix} = D$ 也为对角阵.

$\therefore \exists$ n阶正交阵 $P=\begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_s \end{pmatrix}P_0$ 使 P^TAP 与 P^TBP 都为对角阵.