第十一次习题课

2023 年 12 月 10 日

1 作业解答

P210 3. 计算下列旋转体的体积：

(1).$y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$ 与 x 轴围成的图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周.

证明. 绕 x 轴旋转：

$$V_x=\pi\int_0^\pi \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$$

绕 y 轴旋转：

$$V_y=2\pi\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2$$

□

(3) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周.

证明. $\mathrm{d}x=(1-\cos t)\mathrm{d}t$，故

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\cdot(1-\cos t)\mathrm{d}t=5\pi^2$$

□

P210 5. 求下列曲线旋转一周后所得立体的侧面积.

(2)$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴，这里 $a>b>0$.

证明. 令 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant\pi$，那么

$$S=2\pi\int_0^\pi a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

记 $c=\sqrt{a^2-b^2}, u=\sin t$，那么

$$S=4\pi a\int_0^1\sqrt{c^2u^2+b^2}\mathrm{d}u=4\pi ac\int_0^1\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}\mathrm{d}u$$

令 $I=\int_0^1\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}\mathrm{d}u$, 则

$$I=u\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}}\mathrm{d}u=\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}}-I+\frac{b^2}{c^2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}}\mathrm{d}u$$

而

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}}\mathrm{d}u = \ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{c+a}{b}$$

所以

$$I = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{c^2}}+\frac{b^2}{c^2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+\frac{b^2}{c^2}}}\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b^2}{c^2}\ln\frac{c+a}{b}\right)$$

从而

$$S = 4\pi acI = 2\pi a^2 + \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}$$

□

(4)$r = a(1+\cos\theta)$ 绕极轴,$a>0$.

证明.

$$S = 2\pi\int_0^\pi a(1-\cos\theta)\sin\theta\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta} = \frac{32}{5}\pi a^2$$

□

P217

1. 判断下列反常积分是否收敛，并求出收敛的反常积分的值.

(1)$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x$

证明.

$$\int_0^A xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^A = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-A^2} \xrightarrow{A\to+\infty} \frac{1}{2}$$

故该反常积分收敛，值为 $\frac{1}{2}$. □

(3)$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

证明.

$$\int_2^A \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_2^A = \frac{1}{2}((\ln A)^2-(\ln 2)^2) \xrightarrow{A\to+\infty} +\infty$$

故该反常积分发散.

□

(5)$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$

证明.

$$\int_0^A e^{-x}\sin x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^A = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-A}(\sin A+\cos A) \xrightarrow{A\to+\infty} \frac{1}{2}$$

故该反常积分收敛，值为 $\frac{1}{2}$. □

(7)$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$

证明.

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\mathrm{d}x = (x\ln x - x)\big|_\varepsilon^1 = -1-\varepsilon\ln\varepsilon+\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} -1$$

故该反常积分收敛，值为 1. □

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$

证明.

$$\int_\eta^\varepsilon \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \left.\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|_\eta^\varepsilon$$

而

$$\lim_{\eta\to 0}\left(\frac{\ln\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + \ln\frac{1+\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\right) = \lim_{\eta\to 0}\left(\ln\eta + \ln\frac{1+\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\right) = \ln 2$$

$$\lim_{\varepsilon\to 1}\left(\frac{\ln\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \ln\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 1}\frac{\ln\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \overset{L'Hospital}{=\!=\!=\!=} \lim_{\varepsilon\to 1}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{-\varepsilon^2} = 0$$

故该反常积分收敛，且值为 $-\ln 2$. □

(11) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$

证明. 记 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$

$$\int_0^A x^n e^{-x}\mathrm{d}x = -x^n e^{-x}\big|_0^A + n\int_0^A x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x = -A^n e^{-A} + n\int_0^A x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

令 $A\to+\infty$ 可得 $I_n = nI_{n-1}$. 由于

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

故该反常积分收敛，值为 $n!$. □

P218 3. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，并且以 a 为瑕点，则反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

这是本节讲的两类反常积分的组合，其中 $b>a$ 是任一实数，当上面两个反常积分都收敛时，我们称 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称其发散.

(1) 证明 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ 收敛，并求其值.

(2) 证明：对任意实数 α, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

证明. (1)

$$\int_\varepsilon^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = 2\arctan\sqrt{x-1}\big|_\varepsilon^2 = 2(\arctan 1 - \arctan\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 2\arctan 1$$

$$\int_2^A \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x 2\arctan\sqrt{x-1}\big|_2^A = 2(\arctan\sqrt{A-1} - \arctan 1) \xrightarrow{A\to+\infty} = \pi - 2\arctan 1$$

两部分都收敛，故原反常积分收敛，值为 π.

(2)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 时，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散;

当 $\alpha < 1$ 时，$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

故对任意实数 α，反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散. $\square$

P217 4. 设 $a < c < b$，点 c 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内的唯一瑕点，则瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为两个瑕积分 $\displaystyle\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 的和，求:

(1)$\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$;

(2)$\displaystyle\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$.

证明. (1) 瑕点为 1，

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x\right)$$

该瑕积分发散。故原瑕积分发散.

(2) 瑕点为 0.

$$\int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^0 = -\frac{3}{2}$$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

故改瑕积分收敛，值为 0 $\square$

P234 1. 求解下列可分离变量的方程.

(2)$y' = e^{x-y}$

证明.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x}{e^y} \quad\Longrightarrow\quad e^y\mathrm{d}t = e^x\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad e^y = e^x + C$$

$\square$

(4)$yy' = \dfrac{1-2x}{y}$

证明.

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-2x}{y} \quad\Longrightarrow\quad y^2\mathrm{d}y = (1-2x)\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{3}y^3 = x - x^2 + C$$

$\square$

P234 2. 求解下列微分方程. (2)$y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$

证明. 令 $u=\dfrac{y}{x}$，那么 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$，从而方程化为

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=u+\frac{1}{u}\quad\Longrightarrow\quad u\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$$

故通解为 $y^2=2x^2\ln|x|+C$. □

(4)$(x^2+3y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0$

证明. 当 $x\neq 0,y\neq 0$ 时，令 $u=\dfrac{y}{x}$, 那么 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$, 从而方程化为

$$\frac{2u\mathrm{d}u}{u^2+1}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad\Longrightarrow\quad \ln(u^2+1)=\ln|x|+C\quad\Longrightarrow\quad y^2+x^2=e^C|x|x^2$$

还要补上特解 $x=0$. □

P234 3. 解方程：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x+4y+3}{x+2y+1}$

证明. 令 $u=x+2y$, 那么 $2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$，方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{dx}-1=\frac{4u+6}{u+1}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{5u+7}{u+1}$$

当 $5u+7\neq 0$ 时

$$\frac{u+1}{5u+7}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}\ln|5u+7|=C$$

从而通解为 $5x+10y-\ln|5x+10y+7|=C$. 补上特解 $5x+10y+7=0$. □

2 补充内容

2.1 定积分相关内容

课本第五章综合习题：

16. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(x)\geqslant 0$, 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M$$

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上由连续的导数，证明：对任意 $a\in[0,1]$，有

$$|f(a)|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x$$

21. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微，且 $|f'(x)|\leqslant M$，证明，对任意正整数 n，

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})\right|\leqslant\frac{M}{2n}$$

22. 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个可微函数，且对任意实数 x,y 满足

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|$$

求证：对任意实数 x，有

$$(f'(x))^2 < 2f(x).$$

其他内容

命题 2.1 (积分求导)**.**

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt = f(x,v(x))v'(x) - f(x,u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{d}{dx}f(x,t)dt$$

问题 1. $f(x)$ 是定义在 $[A,B]$ 上的一个可积函数，$a,b \in [A,B]$ 是 $f(x)$ 的两个连续点，证明

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = f(b)-f(a)$$

问题 2. 证明：

$$\lim_{n\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$$

2.2 方程相关补充

有时间的话。