往年期末题简析

王向阳

2023 年秋季

目录

第一章　大题难点分析

1.1　Gram 矩阵

n 维欧式空间中任意 k 个向量之间两两的内积所组成的矩阵, 称为这 k 个向量的 Gram 矩阵, 根据内积的对称性, 这是一个对称矩阵. V 中的标准正交基的度量矩阵即 Gram 矩阵为单位矩阵.

设 k 个列向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$, 令 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k)$, 则这 k 个向量的 Gram 矩阵为 $G = A^T A$. 由于 $r(A^T A) = r(A)$, 可以知道 Gram 矩阵的秩等于这 k 个向量的秩.

对于任意的 $\boldsymbol{x}$, 有 $\boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^T A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) \geq 0$. 于是 G 是半正定矩阵, 其是正定矩阵当且仅当 A 列满秩, 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

同时, 可以用标准的向量组的线性相关性来说明:

设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

分别用 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与其做内积得到

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \ldots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \ldots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_2) & \ldots & (\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

其有唯一零解当且仅当系数矩阵行列式不为 0, 即是正定的. 根据内积的线性性质, 可以知道 (1.1) 式成立当且仅当 (1.2) 成立 (试着把系数放进去, 再做线性组合). 因而又当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$ 的解空间维数为 $n - r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 想想为什么?

所以有:

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是欧氏空间 V 中的向量. $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是矩阵

$$\begin{pmatrix} (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) & \ldots & (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) & \ldots & (\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_2) & \ldots & (\boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\alpha}_m) \end{pmatrix}$$

为正定矩阵, 其中 $(\cdot, \cdot)$ 是 V 的内积.

2. 设 V 为 n 维欧式空间, $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s \in V$, 对于 s 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times s}$, 其中 $a_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j)$, 则矩阵 A 的秩等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩.

1.2 镜面反射变换

设 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 n 维欧氏空间 V 中的单位向量, 定义 V 上的线性变换 (若没有提到应验证其是线性变换) $\mathscr{A}:\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}$(不是单位向量, 可以表示为 $\mathscr{A}:\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma}$).

(1) 关于变换 $\mathscr{A}$:

对称变换 对于任意的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u}-2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma})$$
$$(\boldsymbol{u},\mathscr{A}(\boldsymbol{v}))=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-2(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})-2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma})$$

于是 $\mathscr{A}$ 是 V 中的一个对称变换;

正交变换 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=(\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

于是 $\mathscr{A}$ 是 V 中的一个正交变换;

(2) 关于基:

扩充 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以将 $\boldsymbol{\gamma}$ 扩充成 V 中的一个标准正交基 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}_2,\dots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 根据 $\mathscr{A}$ 的定义, 可以得到

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma}_1)=-\boldsymbol{\gamma},\mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma}_i)=\boldsymbol{\gamma}_i(i=2,\dots,n).$$

因此 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$. 因此, 其特征值为 -1 和 $1((n-1)$ 重), 对应特征向量为 $c\boldsymbol{\gamma}(c\neq 0)$, 以及与其垂直的非零向量.

正交相似与基下的矩阵 对于任意一个单位列向量 $\boldsymbol{\beta}$. 因为 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$ 是一个秩为 1 的实对称矩阵, 且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)=1$, 所以其特征值为 $1,0(n-1)$ 重, 因此其正交相似于 $\mathrm{diag}(1,0,\dots,0)$. 即存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^TT=\mathrm{diag}(1,0,\dots,0)$. 因此

$$T^{-1}(I-2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T)T=\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1).$$

所以 $\mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$ 相似于 $I-2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$. 因此存在另外一组基, 使得 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 $I-2\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$.

第二类正交变换 根据上面的结论可以知道, 其行列式为 -1, 因此是第二类正交变换.

而对于三维空间里的第一类正交变换, 复特征根共轭出现, 要在一组基下的矩阵的行列式为 1, 则一定存在一个特征值为 1, 对应的特征向量在线性变换中始终不变. 因此是以这个特征向量所在直线为轴的旋转变换.

迁移性 对欧氏空间 V 中任意的两个不同的单位向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$. 存在一个镜面反射, 使 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$. 令

$$\mathscr{A}:\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}-2(\boldsymbol{\eta},\frac{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}|})\frac{\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}|}$$

即可.

复合成正交变换 欧氏空间上的任一正交变换都可以表示成镜面反射的复合. 若正交变换将标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 映射到标准正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 可以从前往后将每一个向量依次镜面反射到新的向量(试试验证一下).

1.3 内积与 Schmidt 正交化

要根据内积的定义来进行 Schmidt 正交化. 而验证内积需要验证 (1) 对称性;(2) 线性性; (3) 正定性. 而进行 Schmidt 正交化的时候严格按照公式来算.

在 $\mathbb{R}^2$ 上定义内积如下:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T, \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$.

自然基的度量矩阵为 $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. 其是正定矩阵, $\boldsymbol{x}^T G \boldsymbol{x} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ 是正定二次型.

在这个特殊的内积下, 用 Schmidt 正交化方法从基 $\{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ 构造一组标准正交基:

单位化 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0)^T$ 得

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{(1,0)G(1,0)^T}}(1,0)^T = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0)^T.$$

正交化

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)^T - (0,1)G\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0)^T\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0)^T = (-\frac{1}{2}, 1)^T.$$

单位化 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 得到

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{(-\frac{1}{2}, 1)^T}{\sqrt{(-\frac{1}{2}, 1)G(-\frac{1}{2}, 1)^T}} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1, 2)^T.$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维欧式空间 V 的一个基, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的度量矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 令 W 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ 张成的子空间 $W = L(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3)$. 则可以用 Schmidt 正交化方法得到 W 的一组标准正交基:

因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = 2 + 3 - 4 = 1$, 所以 $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$ 是单位向量. 令

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 - (\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3.$$

而 $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 2$. 所以令 $\boldsymbol{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3)$. 则 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是 W 的一个标准正交基.

在二阶实方阵构成的线性空间 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 中定义:

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B),\ \forall A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

可以验证其是一个内积. 设 $W = L(A_1, A_2)$, 其中 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 求 W 的一个标准正交基:

$$Z_1 = \frac{A_1}{|A_1|} = \frac{A_1}{\sqrt{(A_1, A_1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}A_1, Y_2 = A_2 - (A_2, Z_1)Z_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

单位化 Y_2 得到 $Z_2 = \frac{\sqrt{10}}{5}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 则 Z_1, Z_2 是 W 的一个标准正交基.

1.4 基的度量矩阵与线性变换

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的线性变换, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 是 V 的一组基, 其度量矩阵为 G. $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为 A. 则

$\mathscr{A}$ 为对称变换当且仅当 $A^TG=GA$:

对任意的 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 设其在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 由

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})=(A\boldsymbol{x})^TG\boldsymbol{y},$$
$$(\boldsymbol{u},\mathscr{A}(\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{x}^TGA\boldsymbol{y}.$$

得其恒相等当且仅当 $A^TG=GA$.

$\mathscr{A}$ 为正交变换当且仅当 $A^TGA=G$:

对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, 设其在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $\boldsymbol{z}$, 则

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=(A\boldsymbol{z})^TGA\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{z}^TG\boldsymbol{z}.$$

恒成立当且仅当 $A^TGA=G$.

1.5　正交与正交补的直和性

如果子空间 $V_1,V_2,\dots,V_r$ 两两相互正交, 则 $V_i\cap(V_1+V_2+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_r)=\{\boldsymbol{0}\}$, 即 $V_1+V_2+\cdots+V_r$ 是直和.

3. 设 A 为 n 阶正定矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个非零列向量, 且满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^TA\boldsymbol{\alpha}_j=0,1\le i<j\le s$(是一种内积). 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明. 设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}.$$

两边同时左乘 $\boldsymbol{\alpha}_t^TA$ 得到 $k_t\boldsymbol{\alpha}_t^TA\boldsymbol{\alpha}_t=0$. 因为 A 正定, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_t^TA\boldsymbol{\alpha}_t>0$, 因此 $k_t=0(t=1,2,\dots,s)$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

4. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性无关组, $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 都与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交. 证明:

(1) $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(2) 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 非零, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

解. (1) 由于 $\dim\mathbb{R}^n=n$, 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关. 所以存在不全为零的实数 $k_1,k_2,\dots,k_{n-1},l_1,l_2$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关, 所以 l_1,l_2 不全为零. 两边分别同 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 做内积得到

$$l_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)+l_2(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=0,l_1(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)+l_2(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=0.$$

所以

$$(l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2,l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2)=0.$$

所以 $l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2=0$, 即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(2) 设有实数 $k_1,k_2,\dots,k_{n-1},k_n$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+k_n\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0}.$$

用 $\boldsymbol{\beta}_1$ 对上式两边作内积得到

$$k_n(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)=0.$$

由于 $\boldsymbol{\beta}_1\neq\mathbf{0}$, 所以 $k_n=0$. 于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 线性无关, 所以 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-1}=0$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_1$ 线性无关.

□

5. 设 V 是欧式空间, $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 是 V 中一组两两正交的非零向量, $\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{k=1}^n a_{ki}$ $\boldsymbol{b}_k(i=1,2,\ldots,m), A=(a_{ij})_{n\times m}$. 证明:

(1) $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 线性无关; (2) $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)=\operatorname{rank}(A)$.

证明. (1) 设 $k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{b}_n=\mathbf{0}$. 两边分别用 $\boldsymbol{b}_i$ 作内积得到 $k_i(\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_i)=0$, 因此 $k_i=0$. 因此 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$, 即 $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 线性无关;

(2) 根据题意可以知道

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n)A.$$

取 A 中 r 个列向量构成 A_1. 设 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}$, 对于

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n)A_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ 线性无关. 所以 $A_1\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 当且仅当 $r(A_1)=r$ 时其只有唯一零解. $r(A_1)=r$ 当且仅当对应的列向量线性无关. 因此

$$(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n)A_1$$

对应的 $\boldsymbol{\beta}_i(i=k_1,k_2,\ldots,k_r)$ 与 A_1 的列向量的线性相关性一致. 所以 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)=\operatorname{rank}(A)$. □

1.6　秩为 1 的矩阵之间的相似

对于一般的情况, 在第四次习题课中讲过. 这里举一个例题大致说一下:

6. 证明: n 阶全 1 矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\ldots&1\\1&1&\ldots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\ldots&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}n&0&\ldots&0\\n-1&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\2&0&\ldots&0\\1&0&\ldots&0\end{pmatrix}$.

计算特征值与相应的代数重数和几何重数即可, 当两者相等时可以知道其<u>可以对角化</u>, 特征值为 n 和 $0((n-1)$ 重), 所以<u>均相似于以特征值为对角元素的对角矩阵.</u>

1.7 根均为一重的零化多项式导出可对角化

7. 设 $f(x)$ 是关于 x 的 k 次多项式. 若 A 是 n 阶矩阵, 且 $f(A)=O$, 则 A 的特征值只能为 $f(x)$ 的根. 若 $f(x)$ 的根互不相同, 则 A 可以对角化.

证明. 设 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0})$. 则 $f(A)\boldsymbol{x}=f(\lambda)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 所以 $f(\lambda)=0$, 因此 λ 只能是 $f(x)$ 的根.

不妨设 $f(x)$ 是首 1 多项式, 令 $f(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k)$. 所以

$$f(A)=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_k I)=O.$$

根据矩阵秩专题例 13 可以得到

$$\sum_{i=1}^{k} r(A-\lambda_i I)\leq n(k-1).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{k}(n-r(\lambda_i I-A))\geq n.$$

即 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 的几何重数之和大于等于 n, 所以只能等于 n. 所以可以找到 n 个线性无关的特征向量, 以这 n 个特征向量为列向量的矩阵 P, $AP=P\Lambda$, 即 $P^{-1}AP=\Lambda$, 其中 Λ 为对角矩阵, 对角元素 $\in\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k\}$. □

$k=2$ 也就是常见的情况.

能不能对角化主要看是否由有特征向量构成的一组基 (线性无关).

8. 设 $V=\{X\in\mathbb{R}^{2\times 2}|\mathrm{tr}X=0\}$. 设线性变换 $\mathscr{A}:V\to V,\mathscr{A}(X)=2X+X^T$. 求 V 的一组基使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为对角阵.

解. 若 $\mathscr{A}(X)=2X+X^T=\lambda X$. 即

$$(\lambda-2)X=X^T,$$

得到 $(\lambda-2)x_{ij}=x_{ji}$. 因此 $(\lambda-2)^2x_{ji}=(\lambda-2)x_{ij}=x_{ji}$. 因为 $X\neq O$, 得到 $\lambda=1,3$.

若 $\lambda=3$, 则对应的特征向量对角元素和为 0 的对称矩阵. 有线性无关的特征向量

$$E_{ij}+E_{ji}(i<j),E_{11}-E_{ii}(i=2,3,\ldots,n).$$

若 $\lambda=1$, 则其为反对称矩阵. 有线性无关的特征向量

$$E_{ij}-E_{ji}(i<j).$$

于是 $\mathscr{A}$ 在这 n^2-1 个特征向量构成的一组基下的矩阵为对角矩阵. □

1.8 交换的正定矩阵乘积是正定矩阵

9. 若 A,B 均是正定矩阵, 且有 $\underline{AB=BA}$, 则 AB 也是正定矩阵.

根据第四次习题课的内容可以知道其可以同时对角化. 这里证明其特征值只能大于 0.

证明. 特征值方法:

根据 $AB = BA$ 可以知道 AB 是实对称矩阵.

设 $AB\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$. 则有 $\boldsymbol{x}^T B^T AB\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^T B^T\boldsymbol{x}$, 由于 $B^T AB$ 和 $B^T = B$ 均正定. 所以 $\boldsymbol{x}^T B^T AB\boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{x}^T B^T\boldsymbol{x} > 0$. 因此 $\lambda > 0$, 所以 AB 的特征值均大于 0. 又 AB 是实对称矩阵, 所以 AB 是正定矩阵.

法 2: 因为 A 正定, 所以存在实可逆矩阵 P, 使得 $A = P^T P$. 因此

$$AB = P^T PB = P^T PBP^T (P^T)^{-1}.$$

所以 AB 与 PBP^T 由相同的特征值, 因为 B 正定, 所以 PBP^T 也正定, 特征值全都大于 0. 所以 AB 的特征值也都大于 0. 由 $AB = BA$, 可以知道 AB 也是实对称矩阵, 因此是正定矩阵. □

1.9 反对称矩阵

欧氏空间 V 的反对称变换定义为满足 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}) = -(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})), \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V$ 的线性变换. 线性变换 $\mathscr{A}$ 为反对称变换, 当且仅当 $\mathscr{A}$ 在 V 的标准正交基下的矩阵为反对称矩阵, 即 $A^T = -A$.

实反对称矩阵的特征值为零或纯虚数 (作业题). 奇数阶反对称矩阵的行列式为零 (作业题).

([这个不重要] 任一反对称矩阵的秩必为偶数 (复根共轭出现). 可逆反对称的矩阵的逆仍是反对称矩阵.)

([这个也不重要] 设 A, B 均是 n 阶反对称矩阵, 则 A 与 B 合同当且仅当 $r(A) = r(B)$. 设 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 则均合同于 $\begin{pmatrix} M & & & \\ & \ddots & & \\ & & M & \\ & & & O \end{pmatrix}$ (对阶数做归纳).)

10. n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 都有 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$.

证明. (必要性) 当 $A^T = -A$ 时, 因为 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x})^T = -\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$, 所以 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$.

(充分性) 设 $A = (a_{ij})$, 取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$ 得到 $a_{ii} = 0$. 再取 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j (i \neq j)$, 得 $a_{ii} + a_{jj} + a_{ij} + a_{ji} = 0$. 于是 $a_{ij} = -a_{ji}$, 即 $A^T = -A$. □

11. 设 A 为实反对称矩阵, B 为正定矩阵, 则 AB 的特征值为 0 或纯虚数.

证明. 因为 B 正定, 所以存在实可逆矩阵 P, 使得 $B = P^T P$. 所以

$$AB = AP^T P = P^{-1}(PAP^T)P.$$

因为 PAP^T 也是实反对称矩阵, 所以特征值为零或纯虚数. 而 AB 与其相似, 因此特征值对应为零或纯虚数. □

12. 设 A 为实反对称矩阵, B 为正定矩阵, 则 $\det(A + B) > 0$.

证明. 因为 B 是正定矩阵, 其相合于单位矩阵. 即存在实可逆矩阵 P, 使得 $P^T BP = I$. 所以

$$P^T (A + B)P = P^T AP + I.$$

而 P^TAP 仍为实反对称矩阵, 特征值为零和共轭的纯虚数对, 设为 $\pm \mathrm{i}a_k, a_k > 0, k = 1, 2, \ldots, r$. 因此

$$\det(I + P^TAP) = \prod_{k=1}^{r}(1 + a_k^2) > 0.$$

因此 $\det(A + B) > 0$. $\square$

第二章　填空题

(0809–一)

(1) $(-3)^{n-1}, -\frac{1}{2}$　(2) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&-2&2\\4&-4&4\\6&-6&6\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}1&&\\&\frac{1}{2}&\\&&\frac{1}{7}\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}1&-a&ab-c\\0&1&-b\\0&0&1\end{pmatrix}$　(5) 2　(6) $\begin{pmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}+198a_{13}&a_{32}+198a_{12}&a_{31}+198a_{11}\end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&2\end{pmatrix}$　(8) 正交　(9) ±1　(10) $-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, -\frac{9}{5}$　(11) $\lambda > -1$, 且 $\lambda \neq 0$

(0910–一)

(1) $\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$　(2) 2　(3) $\frac{1}{2}(A-I)$　(4) $5^{2010}, 1$(2009 重)　(5) $(-\frac{1}{2}, 1)$

(6) 8　(7) $0, 0$　(8) $\begin{pmatrix}1-a^2&-ab&-ac\\-ba&1-b^2&-bc\\-ca&-cb&1-c^2\end{pmatrix}$

(1011-二)

(1) $-2x+z=1, \frac{1}{3}$　(2) 48　(3) $\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$　(4) 1 或 $(-1)^{n-1}$

(5) $-1, 4$　(6) $0<t<2$　(7) 1　(8) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&2&3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$　(9) $\frac{n^2+n}{2}, \frac{n^2-n}{2}$

(1213-一)

(1) $\begin{cases}a=2\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\neq2\\b\neq\frac{4}{3}\end{cases}$, $\begin{cases}a=3\\b=\frac{2}{3}\end{cases}$, $\begin{cases}a<2\\b=3\end{cases}$, $\begin{cases}a\neq2\\b=\frac{4}{3}\end{cases}$

(2) $-1, A^T$($A^* = -A^T$. 可以证明: A 是正交方阵当且仅当 $|A|=1$ 且 $a_{ij}=A_{ij}$ 或 $|A|=-1$ 且 $a_{ij}=-A_{ij}$)

(3) $\begin{pmatrix}4&9&-5\\-10&-23&15\\-7&-16&13\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3&-20&11\\0&-16&10\\5&-15&7\end{pmatrix}$

(4) $4n^2$　　(5) $\begin{pmatrix} -I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, 其中 r 为 A 的秩

(1213-二, 1)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\lambda^2 + \frac{3}{\lambda} + 2$　　(3) $0, -\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{9}y_1^2 - 9y_2^2 + y_3^2$(配方法)　　(5) 1 (4 重)　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(1213-二, 2)

(1) 3　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(3) $(\lambda_1+2)(\lambda_2+2)\cdots(\lambda_n+2)$

(4) $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$　　(5) $t \neq -\frac{1}{2}$

(1314-一)

(1) $0, -\frac{1}{3}$　　(2) $1, 4$　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $(-2, 2)$(成对的初等行列变换)　　(5) A^T

(1314-二)

(1) 2　　(2) 0　　(3) $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_2 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 2$

(4) 双叶双曲面　　(5) $-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$

(1516-二)

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\frac{\pi}{3}$　　(3) 1

(4) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$　　(5) $a > 5$

(1617-一)

(1) 5　　(2) 4　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

(4) 双叶双曲面　　(5) $-1 < t < 1$

(1718-一)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2018a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) 11　　(3) $(3, -3, 1)$

(4) -2　　(5) 单叶双曲面　　(6) $t \neq -2, 0$

(1718-二)

(1) 1　　(2) 4　　(3) 12

(4) $(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$　(5) -18　(6) $(1,+\infty)$

(1819-一)

(1) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$　(2) 3　(3) 1

(4) n　(5) 1　(6) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

(1819-二)

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $0,3$

(4) $4n^2$　(5) $1<t<3$

(1920-二)

(1) $a \neq -\frac{9}{11}$　(2) $196\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$　(3) 2

(4) $0,1$　(5) $\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$　(6) $1-\sqrt{5}<t<1+\sqrt{5}$

第三章 判断题

(1213-一)

(1) 错误. 比如

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 正确. 课后作业题的证明.

(3) 正确. 通过相合规范型来证.

(4) 错误. 需要 $AB = BA$.

(5) 正确. 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 的正交补维数为 1.

(1213-二,1)

(1) 错误. 见第四次习题课讲义.

(2) 正确. 作业题.

(3) 正确. 两个特征值 $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 所以特征值相异 (复根会共轭出现).

(4) 正确. 根据同构性很容易验证成立.

(5) 正确. 设 $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{x}^T(A+B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x} > 0$.

(6) 错误. 其不包含 0.

(7) 正确. 应当注意到条件: 对于任意的 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta} \in V$ 都有 $\mathscr{I}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathscr{I}(\boldsymbol{\beta})$ 等价于条件: $\mathscr{I}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$(为什么?). 剩余的见第四次习题课讲义例 1 的证明.

(1213-二,2)

(1) 错误. $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 可能线性相关, 添加向量仍线性相关.

(2) 错误. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. 容易知道行列式为零的矩阵对加法不封闭.

(3) 正确. 容易验证, 常见的例子.

(4) 正确. 定义.

(5) 正确. 主子式均大于 0.

(1314-一)

(1) 错误. 其不包含 $\mathbf{0}$.

(2) 正确. 主子式均大于 0.

(3) 错误. 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可能为 0, 此时若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(4) 正确. 容易验证.

(1314-二)

(1) 正确. $r(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) \leq r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) < 3$.

(2) 错误. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. 容易知道行列式为零的矩阵对加法不封闭.

(3) 错误. 特征值为对角元素, 互不相等, 可对角化, 相似于 A.

(4) 正确. A 是列满秩矩阵, 取个最大阶非零子式即可得到 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

(4) 正确. A^TA 对称, 且有 $r(A^TA)=r(A)=n$.

(1516-二)

(1) 正确.

(2) 正确.

对于 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, 两边分别与 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 做内积得到 $k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=0$, 因为 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$, 所以 $k_i=0$.

(3) 错误. 需要 $t+\lambda_{min}>0$, 其中 λ_{min} 为最小的特征值.

(4) 正确.

$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Rightarrow A^TA\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 即前者的解空间包含于后者的解空间. 又 $r(A)=r(A^TA)$, 可以得到两个解空间的维数相等, 因此两者的解空间相同, 同解.

(1617-一)

(1) 错误. $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^2=O$.

(2) 正确. $\det(A)$ 是 A 的所有特征值之积, 因此 $\det(A)=0$, A 奇异.

(3) 正确. A 是反对称矩阵 $\Leftrightarrow a_{ij}+a_{ji}=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}=0$.

(4) 错误. 需要 $AB=BA$.

(5) 正确. 定义.

(1718-一)

(1) 错误. 特征值均不同, 均相似于对角矩阵，因此相似.

(2) 正确. $\det(A)$ 是 A 的所有特征值之积, 因此 $\det(A)=0$, A 不可逆.

(3) 错误. 需要 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$ 正交. 反例: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\gamma}=(1,1),\boldsymbol{\beta}=(0,1)$.

(4) 正确. A 正定当且仅当主子式均大于 0.

(1718-二)

(1) 错误. 前者特征值 1 的几何重数为 1, 后者为 2.

(2) 正确.

正定性: $(f(x),f(x))\geq 0$, 等号成立当且仅当 $f(x)\equiv 0$. 对称性和线性性质显然.

(3) 错误. 需要 $\boldsymbol{\alpha}_n$ 与前 $n-1$ 个向量正交. 反例: $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1),\boldsymbol{\beta}=(0,1)$.

(4) 正确. 主子式均大于 0.

(1819-一)

(1) 正确. $\det(A)$ 是 A 的所有特征值之积, 因此 $\det(A)=0$, A 不可逆.

(2) 错误. 特征值 2 的代数重数 2 不等于几何重数 1 , 不可对角化.

(3) 错误. 不满足正定性: 设 $f(x)=x+x^2$, 则 $(f(x),f(x))=(f(0),f(0))=0$, 而 $f(x)\neq 0$.

(4) 正确. 对于任意的 $\boldsymbol{x}\neq 0$, 因为 A 正定, 所以主子式 A_1,A_2 也正定, 因此 $\boldsymbol{x}^TA_1\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}^TA_2\boldsymbol{x}>0$, 所以 $\boldsymbol{x}^T(A_1+A_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^TA_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^TA_2\boldsymbol{x}>0$, 因此 A_1+A_2 也正定.

(1819-二)

(1) 错误. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. 而 $\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\nsim\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=I$.

乘积也不一定.

(2) 正确. 均相似于以特征多项式的根为对角元素的对角矩阵.

(3) 正确. 因为 $\mathrm{tr}(A^TA)=0 \Rightarrow A=O$, 而且 $\mathrm{tr}(A^TB)=\mathrm{tr}(B^TA)$. 线性性质显然.

(4) 错误. 作业中, 提到过, 其特征值为 1(2 重), -1(2 重).

(1920-二)

(1) 正确. $r=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r)\le r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_r)\le r$. 所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\dots,\boldsymbol{\beta}_r)=r$, 因此线性无关.

(2) 错误. 只有 $a=0$ 才相似, 否则特征值 1 的几何重数不一致.

(3) 正确. 定义.

(4) 正确. 容易验证, 其对加法和数乘封闭. 可以找到一组基 $E_{ij}+E_{ji}, 1\le i\le j\le 3$.