13. 若级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 条件收敛，证明：$\frac{S_n^+}{S_n^-}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1. \qquad \left(S_n^+=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^+,\quad S_n^-=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-\right)$$

解：$\left|\frac{S_n^+}{S_n^-}-1\right|=\frac{S_n^+-S_n^-}{S_n^-}=\frac{\sum_{n=1}^{+\infty}a_n}{S_n^-}$

由于 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 条件收敛

所以 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n<+\infty \quad \sum_{n=1}^{+\infty}a_n^-=+\infty$

从而有 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{S_n^+}{S_n^-}-1\right|=0.$

i.e. $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1.$

□

15. 研究下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$

解：~~当 $nx=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ 时, i.e. $x=\frac{2k\pi\pm\frac{\pi}{2}}{n}$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty}$~~

当 $x=k\pi$ 时，$\sin nx=0$. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=0$ 收敛

当 $x\neq k\pi$ 时，$\sum_{l=1}^{n}\sin lx=\sum_{l=1}^{n}\frac{-\cos(l+\frac{1}{2})x+\cos(l-\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$

$$=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos(\frac{1}{2}+n)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|\le\frac{2}{\sin\frac{1}{2}x}$$

有 $\sum_{n=1}^{+\infty}\sin nx$ 部分和有界，且 $\frac{1}{n}$ 单调~~收~~减趋于0.

由 Dirichlet 判别法，级数收敛.

(2) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$

解：

$\sum_{n=2}^{N}\cos\frac{n\pi}{4}=$ ~~$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\sqrt{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0~~ $0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-1,\ -\sqrt{2}-1.$ 有

$\left|\sum_{n=2}^{N}\cos\frac{n\pi}{4}\right|<\sqrt{2}+1$，部分和有界

$\frac{1}{\ln n}$ 关于 n 单调减趋于0

$\xrightarrow{\text{Dirichlet判别}}$ 级数收敛.

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

解：$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n \le M$. 部分和一致有界 (见(2))

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 关于n 单减趋于0.

$\overset{\text{Dirichlet}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

已知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 关于n 单增 趋于 e.

由 Abel 判别知，级数收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

解：由 $\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ 单减趋于0

知 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ 收敛.

而 $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \le 1$ 关于n 单增有界

由 Abel 判别 知. 级数收敛.

习题 7.2

2. 确定下列函数级数的收敛域

(2) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$ ，记 $a_n=\frac{x^{n^2}}{n}$

解：当 $|x|>1$ ~~$|x|>1$~~ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n^2}}{n}\right| = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x^{t^2}}{t} \overset{洛必达}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \cancel{2tx^{t^2}}$ $x^{t^2}\ln x$

$t\in\mathbb{R}$ $\quad = +\infty$

$\Rightarrow$ 当 $|x|>1$ 时 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$ 发散.

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n^2}}{n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n^2}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{n}$

由于 n 为偶 $\Leftrightarrow$ n^2 为偶，n 为奇 $\Leftrightarrow$ n^2 为奇.

于是 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}}{n}$ 收敛.

当 $|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x^n|}{\sqrt[n]{n}} = 0 < 1$

有 $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{n^2}}{n}$ 绝对收敛

综上，函数项级数的收敛域为 $[-1,1)$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$

解：（分析 n 大时，$\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{(2x)^n}$ ）

当 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-\frac{1}{2}$ 时，$\exists N>0$, s.t. 当 $n>N$ 时，$\frac{1}{2}\frac{\pi}{(2x)^n} < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{3}{2}\frac{\pi}{(2x)^n}$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}\right| \le \frac{3}{2}\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\pi}{(2|x|)^n} \overset{|x|>\frac{1}{2}}{<} +\infty$$

此时，级数收敛.

当 $|x|\le\frac{1}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{(2x)^n} = 1$ 或 $\pm\infty$ 都不为0，

此时，级数发散.

综上，函数项级数收敛域为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$

解：$a_n = n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\,x}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n (n+1)} = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{e}$$

当 $|x|<e$ 时，$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n!\frac{|x|^n}{n^n} < +\infty$

级数收敛

当 $|x|>e$ 时，$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$，级数发散

$|x|=e$ 时，$\lim_{n\to+\infty} \left|n!\left(\frac{x}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to+\infty} n!\left(\frac{e}{n}\right)^n$

x=0处Taylor展开

$e^n = 1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}+\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right)}{n^n}$$

$$> n!\,\frac{1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}}{n^n}$$

$$> \frac{n!\,\frac{n^n}{n!}}{n^n} = 1$$

从而，$|x|=e$ 时，级数发散

综上，级数收敛域 $(-e,e)$.

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$

解：$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n - 1} = \begin{cases} 0 & |x|<1 \\ \pm\infty & |x|=1 \\ -1 & |x|>1 \end{cases}$

所以，当 $x\geq 1$ 或 $x\leq -1$ 时，级数发散

当 $|x|<1$ 时，$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x^n}{1-x^n}}{x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1$，而 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n < +\infty$

从而级数收敛. i.e. 级数收敛区域为 $(-1,1)$.

3. 在区间 $[0,1]$ 上，定义

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n}\\ 0, & x\neq\frac{1}{n}\end{cases}$$

证明：级数 ~~[0,1]上~~ $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，

但它没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

Pf: ① $\cancel{\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_n(x)\right|}$

对 $\forall\, 0<\varepsilon<1$，$\exists\, m>0$. s.t. $\frac{1}{m+1}<\varepsilon<\frac{1}{m}$，

则，对于 $\forall x\in[0,1]$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_n(x)\right|=\begin{cases}\frac{1}{N} & \exists N.\ \text{s.t.}\ x=\frac{1}{N}\\ 0 & \text{上述}N\text{不存在}\end{cases}$$

$\Rightarrow n>m+1$ 时，$\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_n(x)\right|\leqslant\frac{1}{m+1}<\varepsilon$.

其中 m 只与 ε 有关.

于是 $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

② 由于 $\sup\limits_{x\in[0,1]}|u_n(x)|=\frac{1}{n}$，而 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$

从而 级数 没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

4. 研究级数在给定区间上的一致收敛性.

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n[1+(nx)^2]}$，$-\infty<x<+\infty$.

解：由于 对于 $-\infty<x<+\infty$，$\frac{1}{2^n[1+(nx)^2]}\leqslant\frac{1}{2^n}$

且 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}<+\infty$

因此，级数在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \le x < +\infty$

解: $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$

$f_n'(x) = x(\frac{2}{x} - n)e^{-nx}$

$\Rightarrow$ $f_n(x)$ 在 $x = \frac{2}{n}$ 处取最大值, ~~$f_n(x) \le (\frac{n}{2})^2 e^{-\frac{n^2}{2}}$~~

$f_n(x) \le (\frac{2}{n})^2 e^{-2}$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

所以级数在 $0 \le x < +\infty$ 一致收敛

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, $1 < x < +\infty$

解: 取 $p = n$

$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x} + \dots + \frac{1}{(2n)^x}$

$> \frac{n}{(2n)^x}$

取 $1 < x < \frac{\log 4n}{\log 2n}$, 则有 $\frac{n}{(2n)^x} > \frac{1}{4}$.

从而级数在 $1 < x < +\infty$ 上不一致收敛.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x}$, $0 \le x < +\infty$

解: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^x} \cdot \frac{x}{e^{nx}} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{e^{-nx}} \overset{(4)}{\le} ~~+\infty~~ (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}) \cdot \frac{4}{e^2} < +\infty$

$\Rightarrow$ 级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛

6. 证明：函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续，

且有连续的各阶导数.

解 ① 由于对 $\forall\ [a,b]\subset(1,+\infty)$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 上一致~~连续~~收敛，且 $\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

因此 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

② $\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内有连续导数. $\left(\frac{1}{n^x}\right)'=\frac{1}{n^x}\frac{1}{\ln n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上收敛

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)'$ 在 $\forall[a,b]\subset(1,+\infty)$ 上一致收敛. 同理, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(m)}$ 在 $\forall\ [a,b]\subset(1,+\infty)$ 上一致收敛

$\Rightarrow$ $\zeta(x)$ 有连续的各阶导数.

7. 证明：$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$，当 $|x|<+\infty$ 时，具有连续的2阶微商.

Pf: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 收敛 for $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$

$$\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)'=\frac{n\cos nx}{n^4}=\frac{\cos nx}{n^3}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，且 $\frac{\cos nx}{n^3}$ 连续 in $(-\infty,+\infty)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 具有连续的1阶微商~~且~~

$$\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\frac{-\sin nx}{n^2}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，且 $\frac{-\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续

$\Rightarrow$ $f(x)$ 具有连续的2阶微商.

8. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$

解: $$\left|\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}\right|\le\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n=\left(\frac{1}{\frac{1}{x}+2}\right)^n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}<+\infty$$

$\Rightarrow$ 级数在 $\mathbb{R}$上一致收敛

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^n\cos\frac{n\pi}{x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos n\pi$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{4}$$

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，求 $\int_{\ln2}^{\ln3}f(x)\,dx$

解: $[\ln2,\ln3]\subset[\frac{1}{2},2]$

当 $x\in[\frac{1}{2},2]$时 $$ne^{-nx}\le ne^{-\frac{n}{2}}<\frac{1}{1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n)^2}<\frac{8}{n^2}$$
$$=\frac{n}{e^{\frac{n}{2}}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8}{n^2}<+\infty$$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\frac{1}{2},2]$上一致收敛

$$\Rightarrow\int_{\ln2}^{\ln3}f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\ln2}^{\ln3}ne^{-nx}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(2^{-n}-3^{-n})=\frac{1}{2}.$$

第7章综合习题

4. 设$\alpha>0$，$\{a_n\}$是正的递增数列，求证：级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$收敛.

解：$\alpha>0$时．$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}$$

讨论：$$\cancel{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n^{\alpha}a_{n+1}}}\ \cancel{=}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}$$

$\boxed{a_{n+1}>\ \text{由于}\ a_{n+1}-a_n>0}$

$$<\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)$$

$$<\frac{1}{a_1^{\alpha}}$$

而$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha+1}}dx<\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx$$

$$=\int_{a_1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx<+\infty$$

$(\alpha>0)$

从而有级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$收敛，当$\alpha>0$时.

与第4题类似的习题.

· 设$\{a_n\}$ ~~是~~ 是大于1的递增数列.

求证：级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛的充要条件是$\{a_n\}$有界.

证明：① 设 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}$ 收敛.

$(a_{n+1}>a_n)$

由于 $\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)=\ln\left(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right)<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$

所以 $\frac{\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)}{\ln(a_{n+1})}<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln(a_{n+1})}$

令 $b_n=\ln a_n\geq b_{n-1}$

有 $\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}}<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln(a_{n+1})}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{n+1}}$ 收敛.

$\Rightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in N_+$. s.t. 对 $\forall p\in N_+$，有

$$\varepsilon>\sum_{n=m}^{m+p}\frac{b_{n+1}-b_n}{b_n}\geq\sum_{n=m}^{m+p}\frac{b_{n+1}-b_n}{b_{m+p+1}}=\frac{b_{m+p+1}-b_m}{b_{m+p+1}}=1-\frac{b_m}{b_{m+p+1}}$$

$\Rightarrow$ $\{b_n\}$有界.

$\Rightarrow$ $\{a_n\}=\{e^{b_n}\}$ 有界

② 若a_n有界.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n\ln a_{n+1}}dx$$ 不好放缩

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\ln a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}\ln a_{n+1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{a_{n+1}-a_n}{\ln a_{n+1}}$$

$=① + ②$

$\{a_n\}$有界 $\leq M$

$$①=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_{n+1}\ln a_{n+1}}dx\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x\ln x}dx\leq\int_{a_1}^{M}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_{a_1}^{M}<+\infty$$

$M\geq a_n>a_1>1$，$\ln(a_n)\geq\ln a_1$

$$②\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\frac{M-1}{\ln a_1}\leq\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{M}\right)\frac{M-1}{\ln a_1}<+\infty,$$ 从而级数收敛.

5. 设$\Phi(x)$是$(0,+\infty)$上正的严格增函数，

$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$是三个非负数列，满足

$$a_{n+1} \le a_n - b_n\Phi(a_n) + c_n a_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty$$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解：由于 $b_n\Phi(a_n) \ge 0$，$a_{n+1} \le a_n - b_n\Phi(a_n) + c_n a_n$，可知

$$a_{n+1} \le a_n + c_n a_n = (1+c_n)a_n \le \cdots \le a_1(1+c_n)(1+c_{n-1})\cdots(1+c_1)$$

由于 $\prod_{i=1}^{n}(1+c_i) \le e^{\sum_{i=1}^{n} c_i}$ $\quad$ ($\ln(1+x) \le x$ for $x > 0$)

于是有 $a_n \le a_1 e^{\sum_{n=1}^{+\infty} c_n} = M$ (已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty$)，$a_n$有界

因为 $a_{n+1} \le a_n + c_n a_n$

$$d_{n+1} := a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \le a_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k a_k = d_n$$

$$d_n = a_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k a_k \ge 0 - M\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$

$\Rightarrow \{d_n\}$单减有下界，$\lim\limits_{n\to\infty} d_n$存在.

而 $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k$ 为正项级数，且 $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k \le M\sum_{k=1}^{+\infty} c_k < +\infty$

于是 $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k a_k$ 为收敛级数.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在. 不妨设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \ge 0$

若 $A > 0$. 则 $\exists N \in N_+$，当 $n > N$时.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &\le -b_n\Phi(a_n) + c_n a_n \\ &\le -b_n\Phi\left(\tfrac{A}{2}\right) + c_n a_n \\ &\le -b_n\Phi\left(\tfrac{A}{2}\right) + Mc_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \le \sum_{k=1}^{n}\left[-b_k\Phi\left(\tfrac{A}{2}\right) + Mc_k\right] + a_1$$

两边取 $n\to+\infty$，得：$A \le -\infty + M\sum_{k=1}^{+\infty} c_k + a_1 = -\infty$. 与 A 不为0矛盾

从而必有 $A = 0$.

综上 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ $\quad\square$