

中国科学技术大学数学科学学院
2022~2023 学年第 1 学期期中考试试卷

■ A 卷 □ B 卷

课程名称 数学分析 (B1) 课程编号 MATH1006

考试时间 2022 年 11 月 12 日 考试形式 闭卷

姓 名 学 号 学 院

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、 填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{kx} = \frac{1}{e}$, 则参数 $k = (\quad)$. (1/2)

思路. $\left(\frac{x-2}{x} \right)^{kx} = \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{-2}} \right)^{\frac{x}{-2} \cdot (-2k)}$. □

(2) 设有参数曲线 $\begin{cases} x = t \sin t + \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ 则 $\frac{dy}{dx} = (\quad)$, $\frac{d^2y}{dx^2} = (\quad)$. (1/t; -1/(t^3 cos t))

思路. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{t}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} (1/t)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1/t^2}{t \cot(t)}$. □

(3) $f(x) = \ln(\cos x)$ 的 Maclaurin 多项式 x^4 项的系数是 (\quad) . (-1/12)

思路.

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) &= \ln \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$
□

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + f(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x + f(x)}{x^3} = (\quad)$. (1/2)

思路. 由条件可知 $f(x) = -\sin(x) + o(x^3) = -x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, 故 $\tan(x) + f(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. □

(5) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 附近有反函数, 且二阶可导, 满足当 $x \rightarrow x_0$ 时有 $f(x) = 1 + 2(x - x_0) + 3(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$, 则 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y_0 = f(x_0) = 1$ 处的二阶导数等于 (\quad) . (-3/4)

思路. 由条件可知, 在 $x = x_0$ 处, $y'(x) = 2$, $y''(x) = 6$. 于是

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{dx}{dy} \right) = \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-\frac{y''(x)}{(y'(x))^2}}{y'(x)} = -\frac{y''(x)}{y'(x)^3}.$$

故所求为 $-\frac{6}{2^3} = -\frac{3}{4}$. □

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- (B) (1) 已知函数 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = (\quad)$.
A. $f'(x_0)$ B. $2f'(x_0)$ C. 0 D. $f''(x_0)$

思路. $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x}$. □

- (C) (2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 则其导函数 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处 (\quad).
A. 没有定义 B. 连续但不可导 C. 不连续 D. 连续且可导

思路. 易见当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = 2x \cos(1/x) + \sin(1/x)$, 从而 $x \rightarrow 0$ 时 $f'(x)$ 不收敛. □

- (3) 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数, $F(x) = f(\cos x)$, 则 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值的一个充分条件是 (\quad).
(A) A. $f'(1) < 0$ B. $f'(1) > 0$ C. $f''(1) < 0$ D. $f''(1) > 0$

思路. $F'(x) = f'(\cos(x))(-\sin(x))$, 故 $F'(0) = 0$, $x = 0$ 为 $F(x)$ 的稳定点. $F''(x) = f''(\cos(x)) \sin^2(x) - f'(\cos(x)) \cos(x)$, 故 $F''(0) = -f'(1)$. 若 $f'(1) < 0$, 则 $F''(0) > 0$. 由 f'' 的连续性可知, 这说明在 $x = 0$ 附近 $F''(x) > 0$, 即 $F(x)$ 为凸函数. 这说明 $x = 0$ 为 $F(x)$ 的极小值点. (这一题里其实 f'' 存在导数就可以了, 由 $F''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x}$ 可知, 在 $x < 0$ 时, 局部地有 $F'(x) < 0$, 从而 $F(x)$ 严格单调递减; $x > 0$ 时可类似讨论) □

- (C) (4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} = 1$, 则 (\quad).
A. $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0) = 1$ B. $f(0) = 0$ 且 $f'(0) = 1$
C. $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0) = 1$ D. $f(0) = 1$ 且 $f'(0) = 1$

思路. 若令 $u = x^2$, 若 $x \rightarrow 0$, 则 $u \rightarrow 0^+$. 由 $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$, 可以推出 $f(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u = 0$, 以及 $f'_+(0) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u) - f(0)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u} = 1$. □

- (5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 2022$ 确定, 其中 $f(x)$ 具有二阶导数, $f'(x) \neq 1$, 则 $dy = (\quad)$. (A)
- A. $\frac{dx}{x(1-f'(y))}$ B. $\frac{1}{x(1-f'(y))}$ C. $\frac{dx}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$ D. $\frac{1}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$

思路. 化简方程, 我们有 $x = \ln(2022)e^{y-f(y)}$, 对 x 求导后, 有 $1 = \ln(2022)e^{y-f(y)}(1-f'(y))y'$, 即 $1 = x(1-f'(y))y'$. \square

三、简单计算推理题. (每题 6 分, 共 30 分)

- (1) 用数列极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

证明. 注意到

$$\left| \frac{2^n}{n!} - 0 \right| = \frac{2 \cdot 2 \cdots 2}{1 \cdot 2 \cdots n} < 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n},$$

于是, 对任意的正数 ε , 若取 $N = [\frac{4}{\varepsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时有

$$\left| \frac{2^n}{n!} - 0 \right| = \frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon.$$

由定义, 这说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$. \square

- (2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + b_n) = 7$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 4$. 证明数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限存在, 并求出它们的极限值.

证明. 我们有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} (2(3a_n + b_n) - (a_n + 2b_n)) = \frac{1}{5} (2 \cdot 7 - 4) = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((3a_n + b_n) - 3a_n) = 7 - 3 \cdot 2 = 1.$$

特别地, $\{a_n\}_n$ 与 $\{b_n\}_n$ 有极限. \square

- (3) 求出函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调性和凹凸性区间.

解. 我们有 $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. 故 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 是严格单调递增; $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 是严格单调递减.

同时我们又有 $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. 这说明在 $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ 和 $(1/\sqrt{2}, +\infty)$ 这两个区间上, 皆有 $f''(x) > 0$, 从而 $f(x)$ 都是凸函数; 在区间 $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 上, 有 $f''(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 为凹函数. \square

- (4) 已知数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2}$.

解. 用 ∞ 型 Stolz 定理, 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n) - (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1})}{n^2 - (n-1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

(5) 数列 $\{x_n\}$ 由递推公式定义: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$, 其中 $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$. 试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解. 注意到 $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, 由于 $x_0 = 1$, 用归纳法不难验证, $\{x_n\}_n$ 是一个正数数列. 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 对于递推公式取极限, 可得 $a = 1 + \frac{1}{1+a}$, 又由于 $a > 0$, 这说明极限 $a = \sqrt{2}$. 下面证明 $\{x_n\}_n$ 确实以 $\sqrt{2}$ 为极限, 为此, 注意到

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \left| \left(1 + \frac{1}{1+x_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) \right| = \frac{|x_n - \sqrt{2}|}{(1+\sqrt{2})(1+x_n)} < \frac{|x_n - \sqrt{2}|}{(1+\sqrt{2})}.$$

由此不难推出所证的结果. \square

四、(本题 10 分) 对于函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin(x)}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \cdot \sin(x/4)}, & x > 0, \end{cases}$$

问参数 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续; 参数 a 为何值时, $x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

解. 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3}{x - (x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))} = -6a,$$

另一方面, 我们同时有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \cdot \sin(x/4)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + ax + \frac{(ax)^2}{2} + o(x^2)) + x^2 - ax - 1}{x^2/4} = 2a^2 + 4.$$

令 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 我们有 $-6a = 2a^2 + 4$, 即 $a = -1$ 或 -2 .

(i) 若 $a = -1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(ii) 若 $a = -2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12 \neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有可去间断点. \square

五、(本题 12 分) 求方程 $k \cdot \arctan(x) - x = 0$ 的不同实根的个数, 其中 k 为参数.

解. 令 $f(x) = k \arctan(x) - x$. 为了讨论其零点个数, 由于 f 为奇函数, 我们不妨先考虑 $x \geq 0$ 的情形. 容易看到,

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \text{以及} \quad f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1.$$

(i) 若 $k \leq 1$, 则当 $x > 0$ 时 $\frac{k}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} < 1$, 于是 $f'(x) < 0$, 从而 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递减, 仅有 $x = 0$ 为零点. 这说明 $f(x)$ 在实轴上仅有一个根.

(ii) 若 $k > 1$, 则 $f'(x) = 0$ 在 $x > 0$ 时仅有一个根 $x_0 = \sqrt{k-1}$. 当 $0 < x < x_0$, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 严格单调递增; 当 $x > x_0$, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 严格单调递减. 由于 $f(0) = 0$ 而 $f(+\infty) = -\infty$, 这说明 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时恰有一个实根 x_1 , 并且 $x_1 > x_0$. 综上, 这说明 $f(x)$ 在实轴上恰有三个根: $-x_1, 0, x_1$. \square

六、(本题 12 分) 设 $y = f(x)$ 二阶可导且 $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(u)}{f(x) \sin^2 u},$$

其中 $u = u(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 上点 $P = (x, f(x))$ 处切线在 x 轴上的截距.

解. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x, f(x))$ 处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

若令 $Y = 0$, 则 $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. 这说明截距 $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. 经计算, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}} = - \frac{f'(0)}{f''(0)} = 0.$$

我们没有假设 f'' 连续, 因此上面的计算不能用洛必达法则. 另外, 上面的计算表明, $x \rightarrow 0$ 时 $u(x)$ 是一个无穷小量; 我们必须验证这一点, 下面才可以用 $\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则. 函数 $f(x)$ 有麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)}{x f'(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f''(0)}{2} + o(1)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

这说明 u 是 1 阶无穷小量. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(u)}{f(x) \sin^2 u} \stackrel{\sin(u) \sim u}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(\frac{f''(0)}{2} u^2 + o(u^2) \right)}{u^2 \left(\frac{f''(0)}{2} x^2 + o(x^2) \right)} = 1. \quad \square$$

七、 (本题 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 是有二阶导函数, 且 $f(0) = f'(0)$, $f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

证明. 考虑辅助函数 $F(x) = (f(x) - f'(x))e^x$. 由于 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 满足 $F(0) = F(1)$, 由 Rolle 定理可知, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 满足 $F'(\xi) = 0$, 即 $(f(\xi) - f''(\xi))e^\xi = 0$. 由于 $e^\xi \neq 0$, 这说明 $f(\xi) = f''(\xi)$. \square