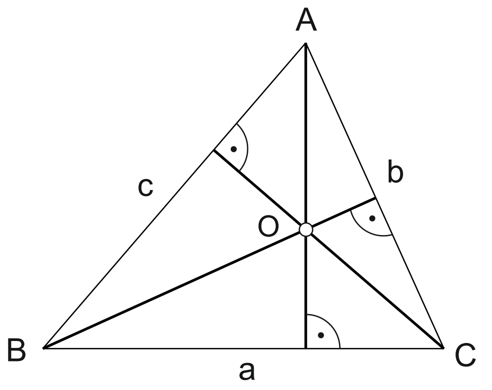
Podemos clasifica-los triángulos atendendo ós seus ángulos ou ós seus lados:

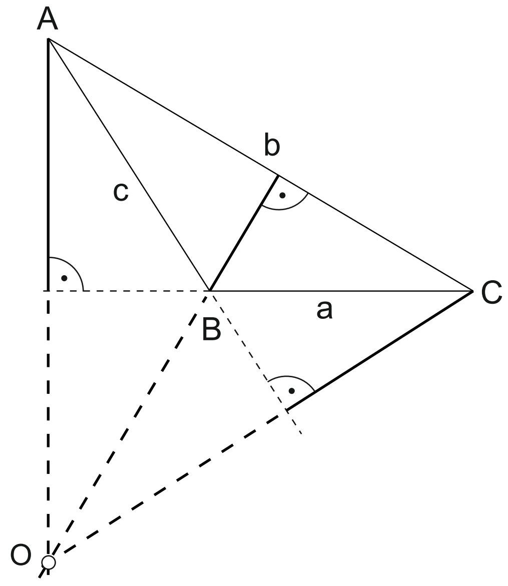
Triángulos segundo os seus

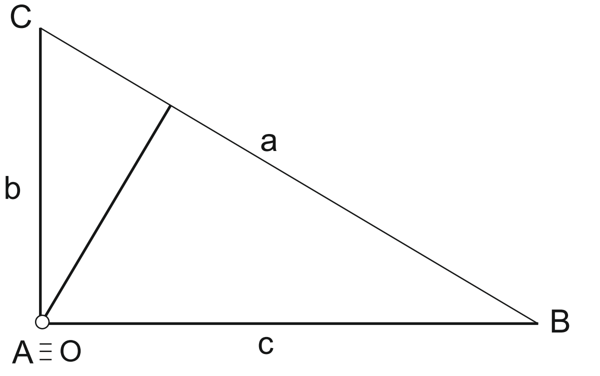
- ángulos
  - acutángulo: tres ángulos agudos
  - rectángulo: un ángulo recto
  - obtusángulo: un ángulo obtuso
- lados
  - equilátero: tres lados iguales
  - isósceles: 2 lados iguales
  - escaleno: ningún lado igual

PUNTOS E RECTAS NOTABLES DOS TRIÁNGULOS

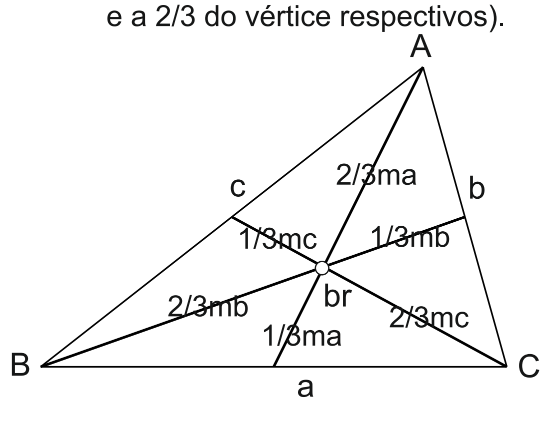
ALTURA: perpendicular a un lado trazada dende o vértice oposto.
ORTOCENTRO: punto de intersección das alturas dun triángulo (ou da súa prolongación).

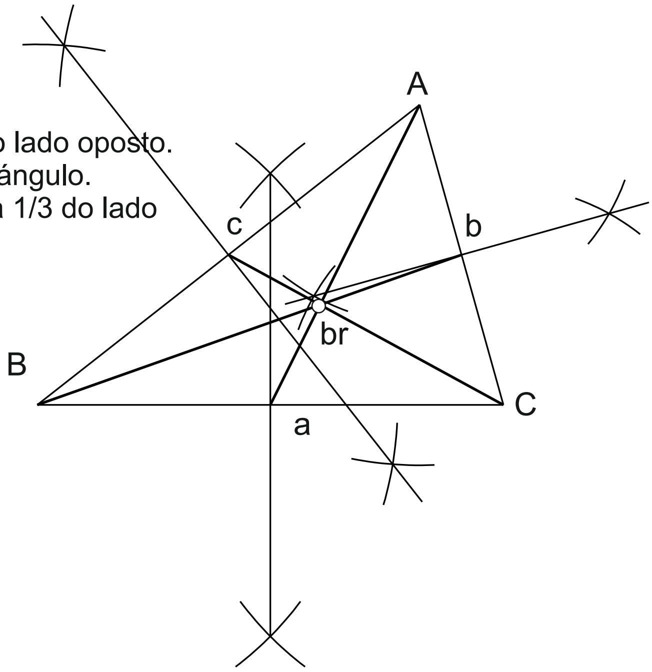




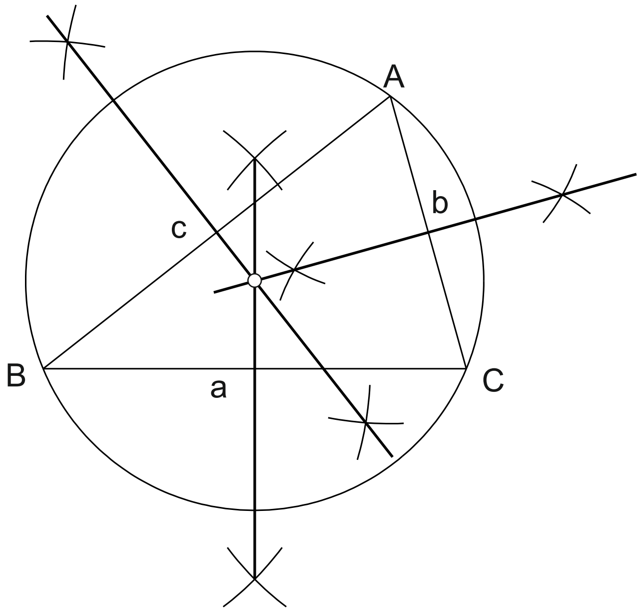


MEDIANA: segmento que une un vértice co punto medio do lado oposto.
BARICENTRO: punto de intersección das medianas dun triángulo.
(o baricentro sitúase sobre cada mediana a 1/3 do lado e a 2/3 do vértice respectivos).

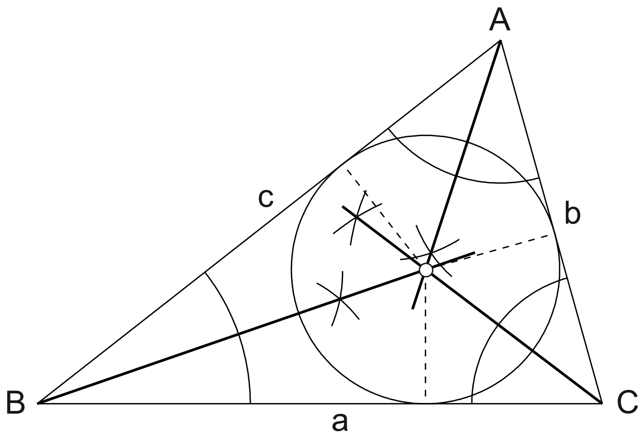




CIRCUNCENTRO: punto de intersección das mediatrices dos lados dun triángulo. É o centro dunha circunferencia que circunscribe o triángulo.



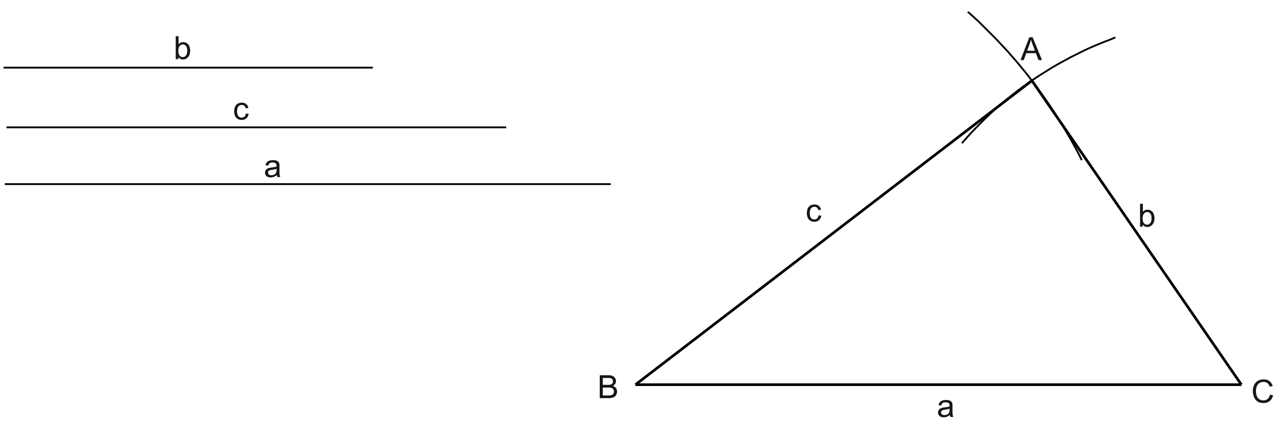
INCENTRO: punto de intersección das bisectrices dos ángulos dun triángulo. É o centro dunha circunferencia inscrita no triángulo, tanxente ós lados.



CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para construír un triángulo debemos coñecer polo menos tres datos, explicitos ou implicitos (triángulo rectángulo implica un ángulo recto, equilátero que se coñecemos un lado coñecemos os tres).

Exercicio: Construír un triángulo do que coñecemos os tres lados “a”, “b” e “c”.

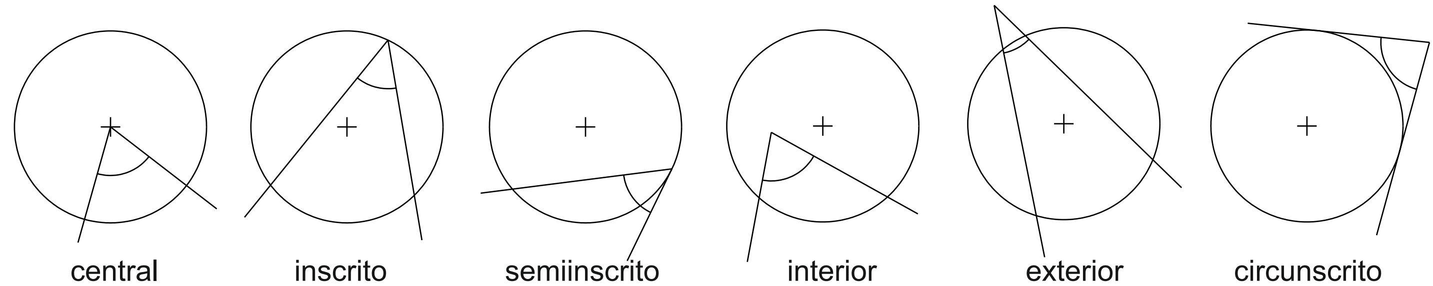


ARCO CAPAZ

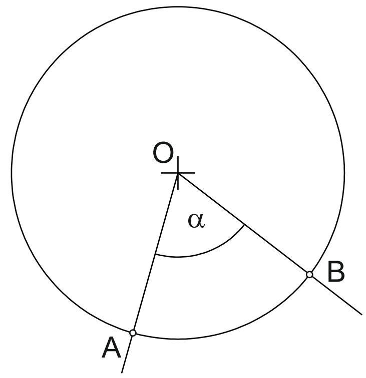
Ángulos respecto dunha circunferencia:

Dados un ángulo e unha circunferencia situados no plano pode existir entre eles relación ou ser alleos. Para que exista relación entre ángulo e circunferencia os lados do ángulo (ou a súa prolongación) deben ser tanxentes ou cortar a circunferencia. Cando un ángulo está relacionado cunha circunferencia a súa medida está en función do arco de circunferencia abarcado polos lados do ángulo.

Posicións dun ángulo respecto dunha circunferencia:

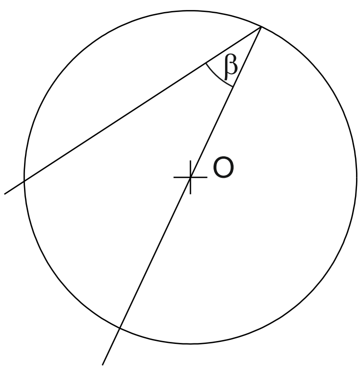


central | inscrito | semiinscrito | interior | exterior | circunscrito

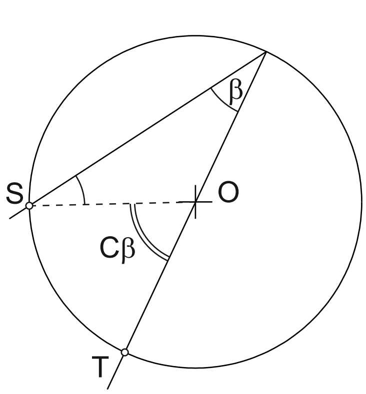


CENTRAL: A medida do ángulo central é proporcional ó arco abarcado polos lados do ángulo. O ángulo α medirá unha fracción de 360º tal como o arco AB respecto da lonxitude total da circunferencia.

$$\frac{\alpha}{AB} = \frac{360º}{2\pi r} \qquad \alpha = \frac{AB}{2\pi r} \cdot 360º$$

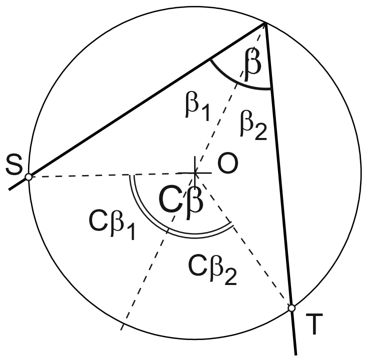


INSCRITO: Debuxemos un ángulo inscrito cun lado que pasa polo centro da circunferencia.



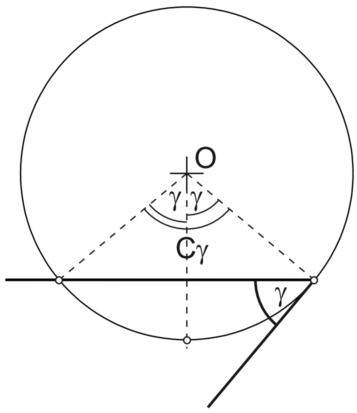
Se unimos o punto S co centro O da circunferencia fórmase un triángulo isósceles tal que o ángulo en S será igual que o ángulo β.
Chamamos “central sub-beta” $C\beta$ ó ángulo central cuxos lados abarcan o mesmo arco que β, é decir, ST.
Como $C\beta$ é suplementario do ángulo do triángulo en O o seu valor ten que ser o doble de β.

$$C\beta = S + \beta = 2\beta \qquad \beta = \frac{1}{2} C\beta$$



Podemos comprobar que calquer ángulo inscrito mide a metade do seu central correspondente se pensamos que éste é divisible en dous ángulos inscritos cun lado pasando polo centro da circunferencia. Cada un deles, como vimos anteriormente, mide a metade do seu central e polo tanto o total medirá igualmente a metade do seu.

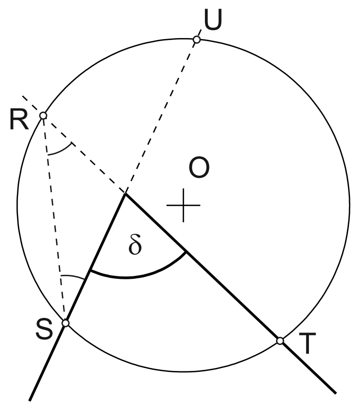
$$\beta_1 = \frac{1}{2} C\beta_1 \qquad \beta_2 = \frac{1}{2} C\beta_2 \qquad \boxed{\beta = \frac{1}{2} C\beta}$$



SEMIINSCRITO: Debuxemos un ángulo semiinscrito (un lado tanxente á circunferencia e o outro secante). Se trazamos perpendiculares polo centro O aos lados de γ, temos un central de valor γ. Duplicamos o central γ e obtemos un central $C\gamma$ que abarca o mesmo arco que o semiinscrito γ e mide 2γ, logo:

T*odo ángulo semiinscrito mide a metade do seu central correspondente.*

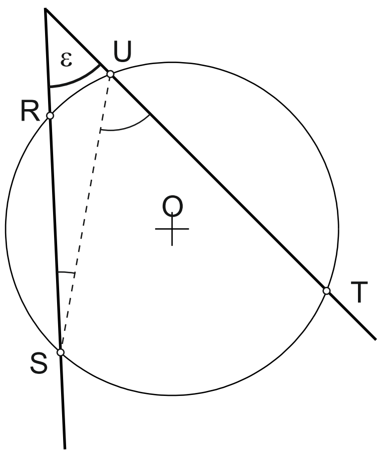
$$\boxed{\gamma = \frac{1}{2} C\gamma}$$



INTERIOR: Debuxemos un ángulo δ interior á circunferencia e prolonguemos os seus lados. Se unimos os puntos R e S, fórmase un triángulo tal que a suma dos ángulos en R e S será igual o ángulo δ (R+S+d=180º). Como R e S son ángulos inscritos, o seu valor será a metade dos centrais correspondentes, logo:

U*n ángulo interior mide a metade da suma dos centrais correspondentes ós arcos abarcados polo ángulo e o seu oposto polo vértice.*

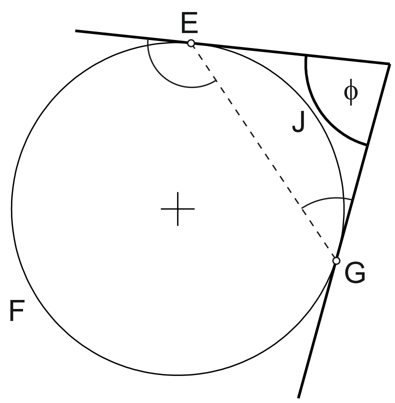
$$\delta = S + R = \frac{1}{2} C_S + \frac{1}{2} C_R \qquad \boxed{\delta = \frac{C_S + C_R}{2}}$$



EXTERIOR: No ángulo exterior ε debuxamos o triángulo formado por ε , S e o suplementario de U. A suma destos tres ángulos é 180º (a suma de U co seu suplementario tamén é 180º) logo: ε + S = U, de donde: ε = U - S. O ángulo U é inscrito e abarca ó arco ST. O ángulo S é inscrito e abarca ó arco RU. Logo:

Un ángulo exterior mide a metade da diferencia dos centrais correspondentes ós arcos abarcados.

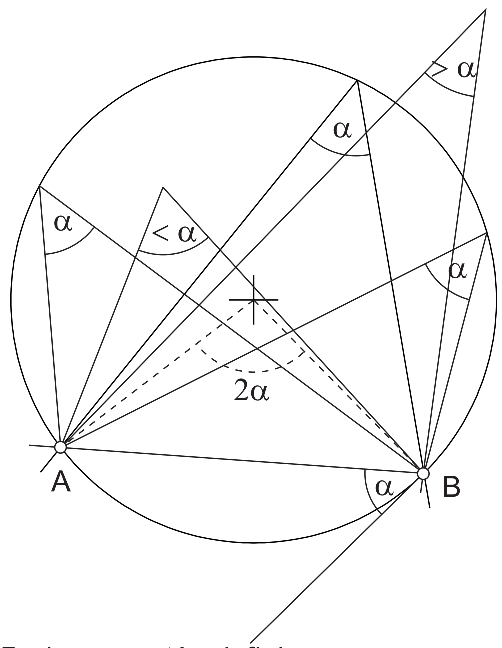
$$\boxed{\varepsilon = \frac{C_U - C_S}{2}}$$



CIRCUNSCRITO: No ángulo ϕ debuxamos un triángulo ao unir os puntos de tanxencia E e G. Coma en casos anteriores podemos deducir que E = ϕ + G, logo ϕ = E - G. Pero o ángulo E é semiinscrito cuxos lados abarcan o arco EFG e o ángulo G é semiinscrito, abarcando os seus lados o arco GJE. Logo:

Un ángulo circunscrito mide a metade da diferencia entre os centrais correspondentes ós arcos maior e menor da circunferencia respectiva.

$$\boxed{\phi = \frac{C_E - C_G}{2}}$$



ARCO CAPAZ: Segundo o que acabamos de ver, se nunha circunferencia trazamos ángulos que pasen por dous puntoa A e B, teremos os seguintes casos:

- ángulos co seu vértice na circunferencia, inscritos e semiinscritos que terán un valor constante α.

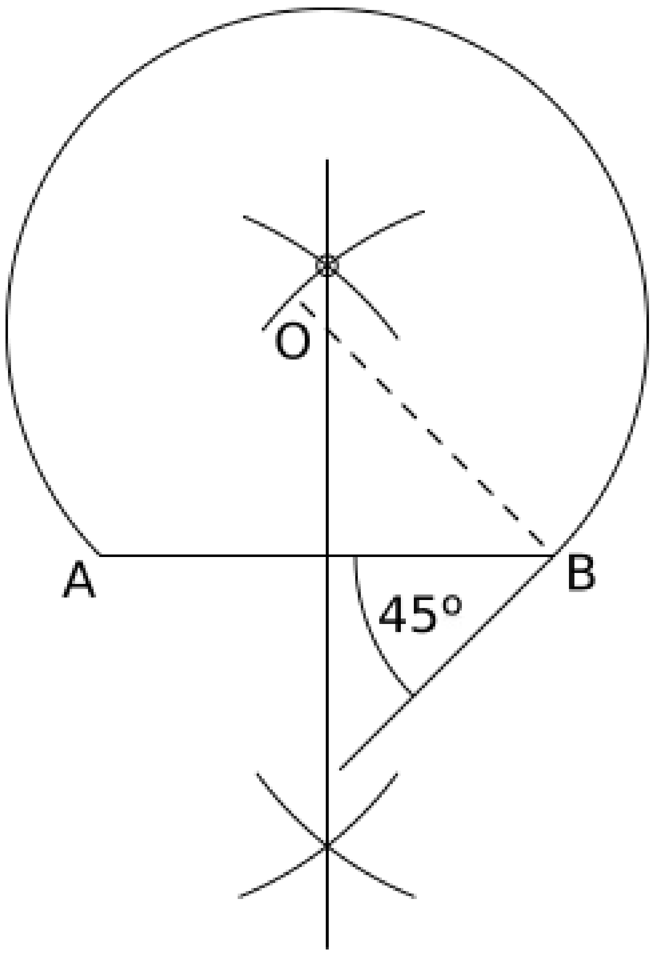
- ángulo co seu vértice no centro da circunferencia, central, que terá un valor 2α.

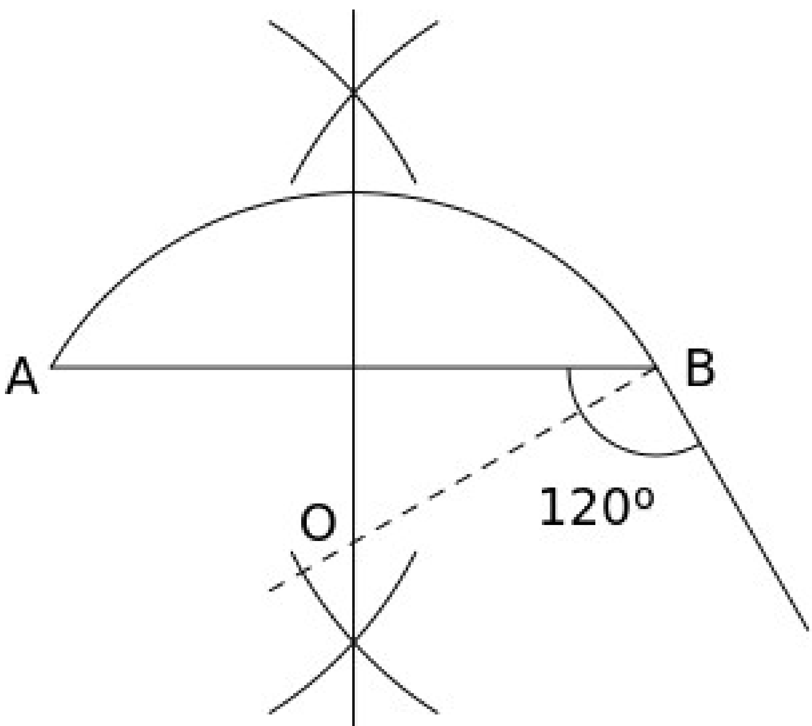
- ángulos co seu vértice interior á circunferencia de valor maior que α.

- ángulos co seu vértice exterior á circunferencia que terán un valor menor que α.

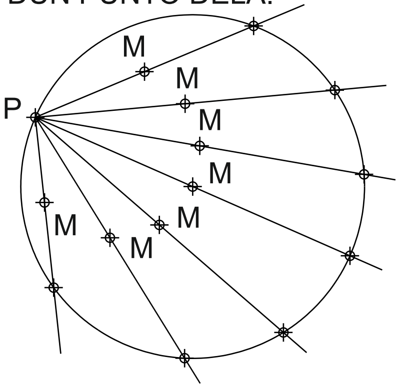
Podemos entón definir o ***arco capaz*** *como o lugar xeométrico dos vértices dun ángulo constante cuxos lados pasan por dous puntos fixos. Este lugar xeométrico será un arco de circunferencia.*

CONSTRUCCIÓN DO ARCO CAPAZ
Vamos a debuxar o arco capaz dun ángulo de 45º cuxos lados pasan polos extremos dun segmento de 45mm.
EXERCICIO:
Debuxar o arco capaz dun ángulo de 120º cuxos lados pasan polos extremos dun segmento de 60mm.

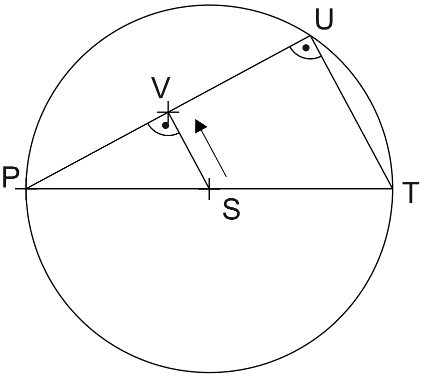




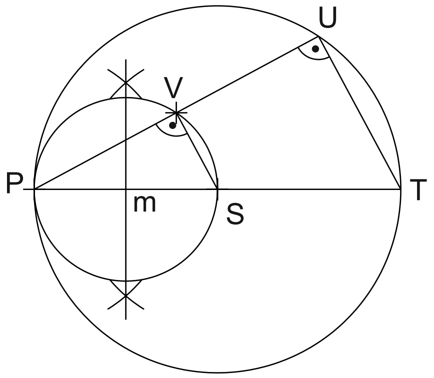
LUGAR XEOMÉTRICO DOS PUNTOS MEDIOS DAS CORDAS DUNHA CIRCUNFERENCIA QUE PARTEN DUN PUNTO DELA.



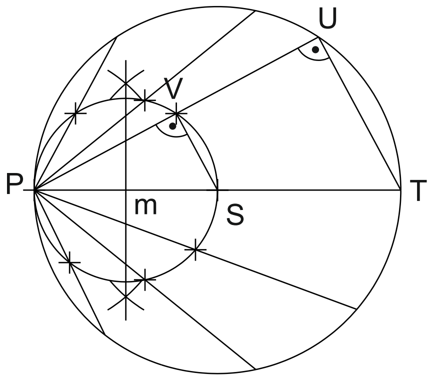
Por un punto P dunha circunferencia podemos trazar infinitas cordas. Os puntos medios destas cordas describirán un *lugar xeométrico*.



Por un punto P dunha circunferencia debuxamos dúas cordas, sendo unha delas diametral (pasa polo centro da circunferencia). Se unimos os extremos destas cordas U e T fórmase un triángulo rectángulo PTU, por inscrito nunha semicircunferencia.
Se por S (punto medio da corda PT) trazamos unha paralela ó segmento TU, determinaremos V, punto medio da corda PU (teorema de Thales), e obteremos outro triángulo rectángulo PSV.



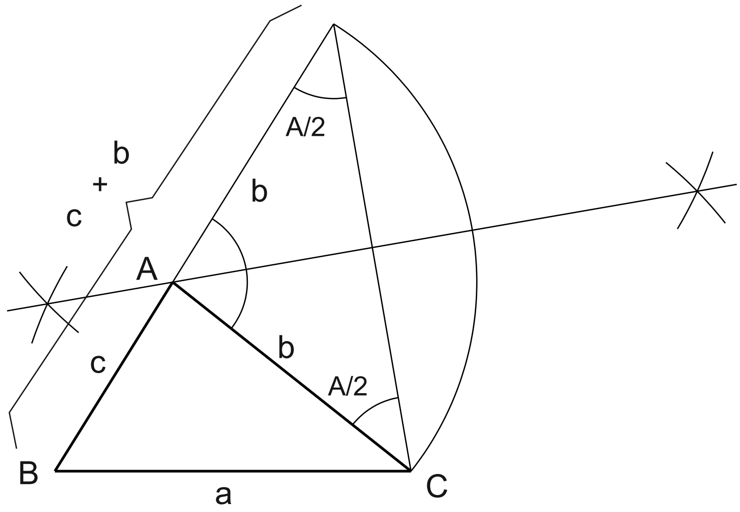
Se determinamos o punto medio m do segmento PS (hipotenusa do triángulo PSV) podemos debuxa-la circunferencia que cirscunscribe ó triángulo PSV (arco capaz do ángulo V de 90º).



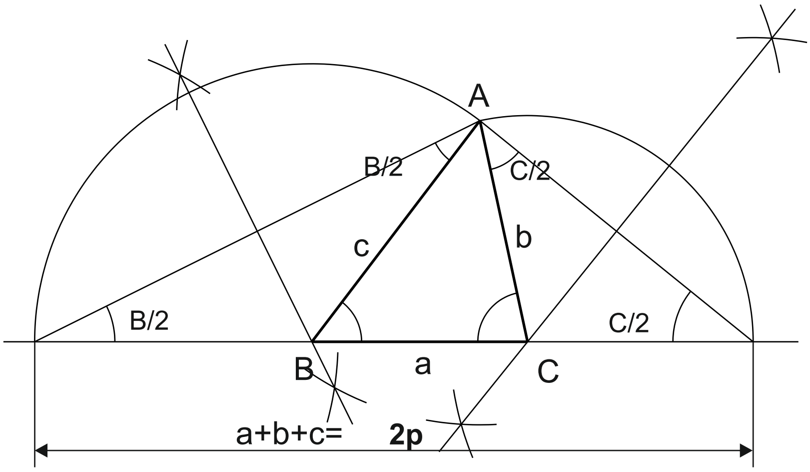
Toda-las cordas trazadas dende o punto P teñen o seu punto medio na circunferencia de centro m. *Esta circunferencia é o lugar xeométrico dos puntos medios das cordas da circunferencia que parten do punto P.*

SUMA DE DOUS LADOS DUN TRIÁNGULO

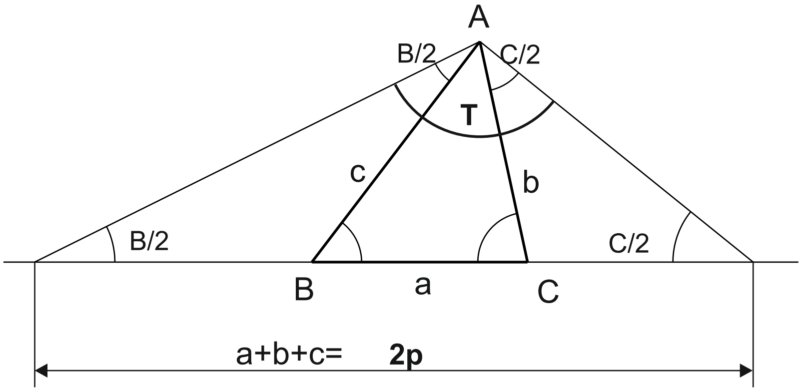
Se nun triángulo alineamos dous lados (c+b) fórmase outro triángulo (en trazo fino) isósceles de ángulo desigual suplementario de A, e polo tanto ángulos iguais A/2 (dado que os tres ángulos suman 180º). A mediatriz do lado desigual dun triángulo isósceles pasa polo vértice do ángulo oposto, e dicir, por A e divide á suma dos lados c+b.



SUMA DOS TRES LADOS DUN TRIÁNGULO. PERÍMETRO.



Se nun triángulo prolongamos un lado a e sumámoslle os outros dous lados b e c, podemos debuxar dous triángulos isósceles de ángulos iguais B/2 e C/2 respectivamente, por ser os ángulos desiguais destes triángulos suplementarios de B e C. As mediatrices dos lados desiguais pasan polos vértices B e C.



No triángulo total podemos deducir o valor do ángulo T en función do ángulo A:

$$T = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} + A$$

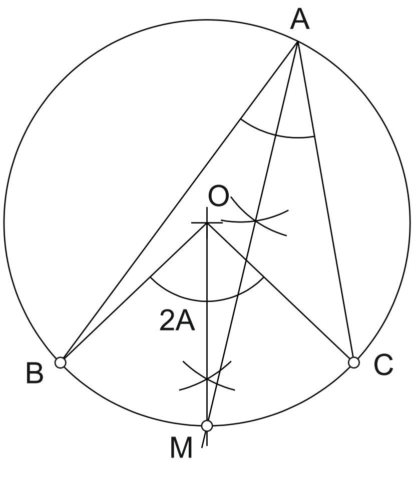
$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90º$$

$$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90º - \frac{A}{2}$$

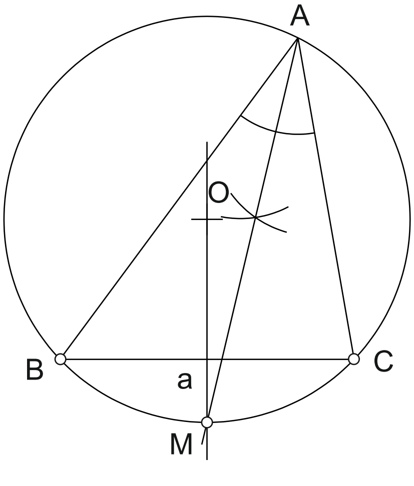
$$T = 90º - \frac{A}{2} + A$$

$$\boxed{T = 90º + \frac{A}{2}}$$

SOBRE AS RECTAS NOTABLES BISECTRIZ E MEDIATRIZ.

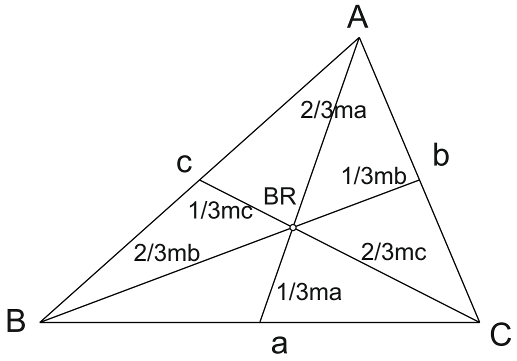


Nunha circunferencia debuxamos un ángulo inscrito A e o seu central correspondente 2A. Como vimos anteriormente o valor destes ángulos está en función do arco BC abarcado, e polo tanto a súas respectivas bisectrices dividirán este arco pola metade cortándose no punto M.

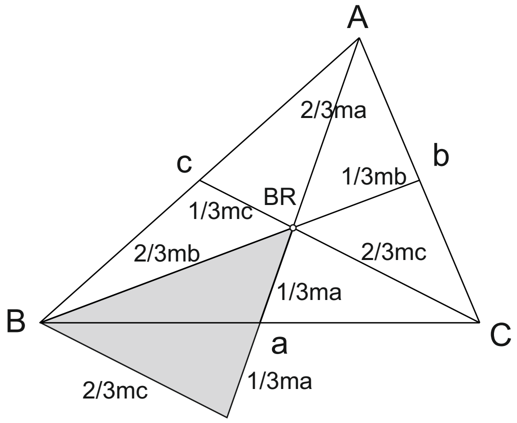


Do mesmo xeito a bisectriz do ángulo A e a mediatriz do segmento a dividirán ó arco BC pola metade e cortaranse nun punto M da circunferencia do arco capaz do ángulo A cuxos lados pasan polos puntos B e C.

SOBRE AS MEDIANAS.

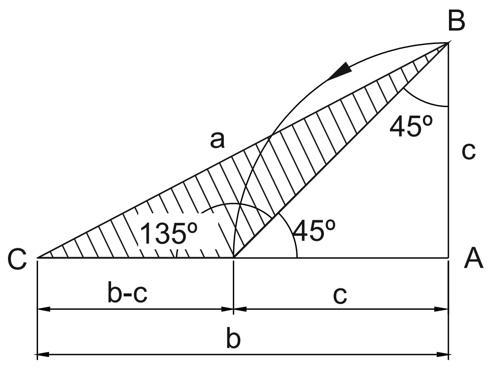


As tres medianas relativas ós lados dun triángulo córtanse nun punto que chamamos baricentro. Éste sitúase sobre cada mediana a 1/3 do lado e a 2/3 do vértice.

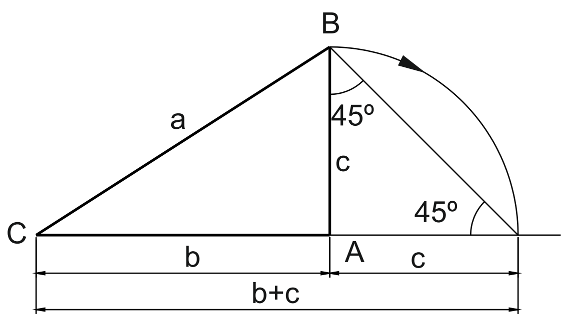


Se por un vértice do triángulo trazamos paralelas (ou coincidentes) ás medianas, podemos construír un triángulo (gris) que ten por lados 2/3 de cada unha delas.
Coñecendo pois, as tres medianas dun triángulo debuxaríamos o formado polos 2/3 de cada unha (gris). Partindo déste triángulo é sinxelo debuxar o que determinan estas tres medianas.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.



Debuxar un triángulo rectángulo coñecendo a hipotenusa e a diferencia entre os catetos:
Se nun triángulo rectángulo restamos o cateto menor ó maior, formase un triángulo (raiado) obtusángulo cun ángulo de 135º e de lados hipotenusa a e diferencia entre os catetos b-c. Debuxamos este triángulo e facilmente completamos o triángulo rectángulo.



Debuxar un triángulo rectángulo coñecendo a hipotenusa e suma dos catetos:
Se nun triángulo rectángulo sumamos os catetos, formase un triángulo rectángulo e isósceles (dous ángulos de 45º) adxacente a éste. Podemos pois construír facilmente o triángulo de lados b+c e a e de ángulo 45º, a partir do cal se debuxa o triángulo rectángulo dos datos.

DEBUXA-LOS TRIÁNGULOS DOS QUE COÑECEMOS OS SEGUINTES DATOS:

1- A= 60º, a= 50mm e ha= 35mm.

2- A= 45º, a= 50mm e c= 30mm.

3- a= 45mm, ha= 40mm e b= 43mm.

4- a= 36mm, A= 30º e B= 45º.

5- A= 45º, a= 50mm e mb= 54mm.

6- A= 60º, a= 48mm e b+c= 92mm.

7- B= 45º, C= 60º e 2p= 120mm.

8- A= 45º, C= 60º e 2p= 100mm.

9- ha= 40mm, va= 43mm e ma= 47mm.

10- ma= 36mm, mb= 48mm e mc= 60mm.

11- Triángulo rectángulo. Diferencia entre catetos b-c= 30mm, hipotenusa a=80mm.