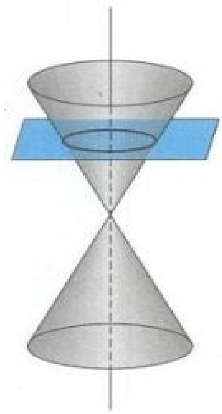
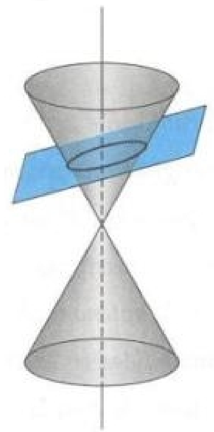
CURVAS CÓNICAS

A superficie cónica de revolución está enxendrada por unha recta que xira arredor de outra á que corta. Esta segunda recta é o eixe da superficie e a recta que xira é a xeratriz. O punto de intersección das dúas é o vértice da superficie.
As curvas cónicas son seccións planas dunha superficie cónica de revolución.

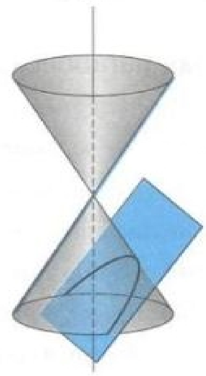


CLASES DE CÓNICAS

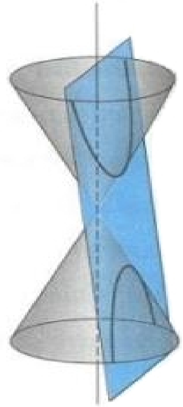
Circunferencia: Se o plano que corta á superficie cónica de revolución é perpendicular o eixe da mesma e non pasa polo vértice, a sección que se obtén é unha circunferencia.



Elipse: Se o plano secante é oblicuo ó eixe da superficie cónica, corta a toda-las xeratrices e non pasa polo vértice, a sección que produce é unha curva pechada que se chama elipse.



Parábola: Se o plano secante é paralelo a unha soa xeratiz da superficie, a curva será aberta cun punto impropio; a sección que se produce é unha parábola.



Hipérbola: Se o plano secante é paralelo ó eixe da superficie cónica e paralelo a dúas xeratrices, a sección é unha curva aberta con dúas ramas que se chama hipérbola.

Cónica dexenerada: Se o plano secante pasa polo vértice da superficie, a sección obtida é unha cónica dexenerada e pode ser un punto, unha recta ou un par de rectas que se cortan segundo que o plano secante teña menor, igual ou maior inclinación cas xeratrices da superficie respecto a un plano perpendicular ó eixe.

ELIPSE

É o lugar xeométrico dos puntos do plano cuxa suma de distancias a dous puntos fixos chamados focos é constante (e igual o eixe maior 2a). Tamén unha elipse se pode considerar proxección paralela dunha circunferencia.

A-B: Eixe maior

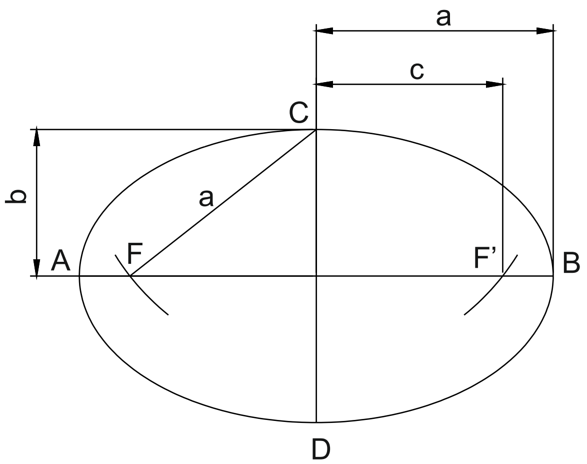
C-D: Eixe menor

2a: Eixe maior

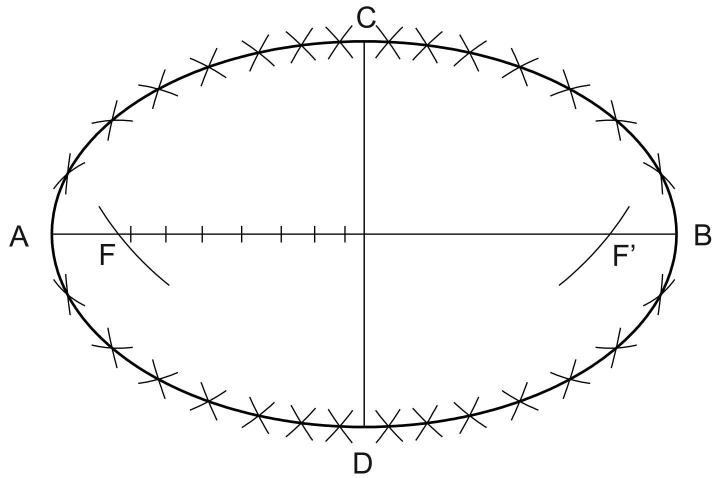
2b: Eixe menor

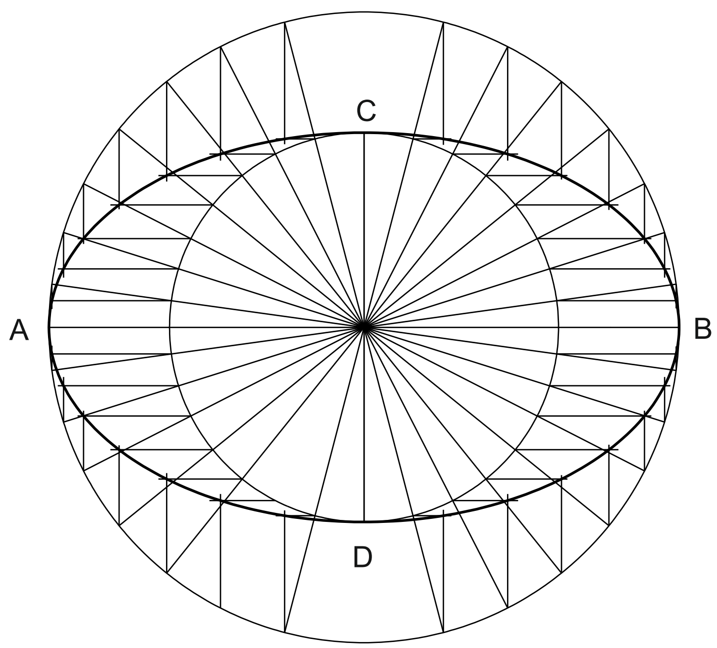
2c: Distancia focal

$a^2 = b^2 + c^2$



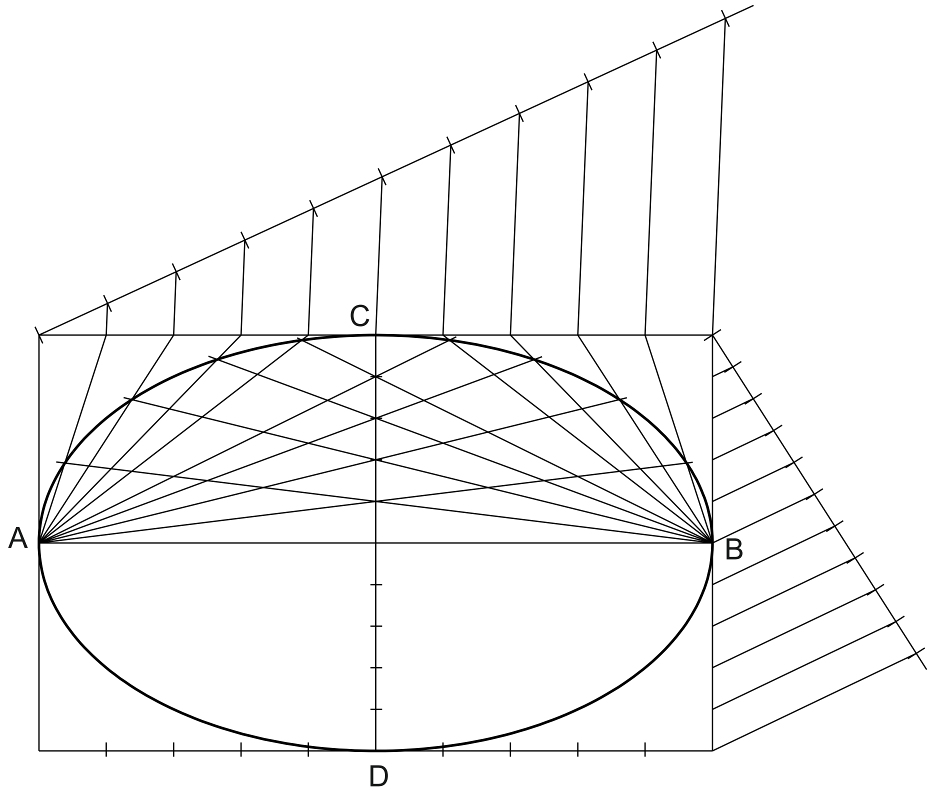
- Construcción da elipse por puntos:



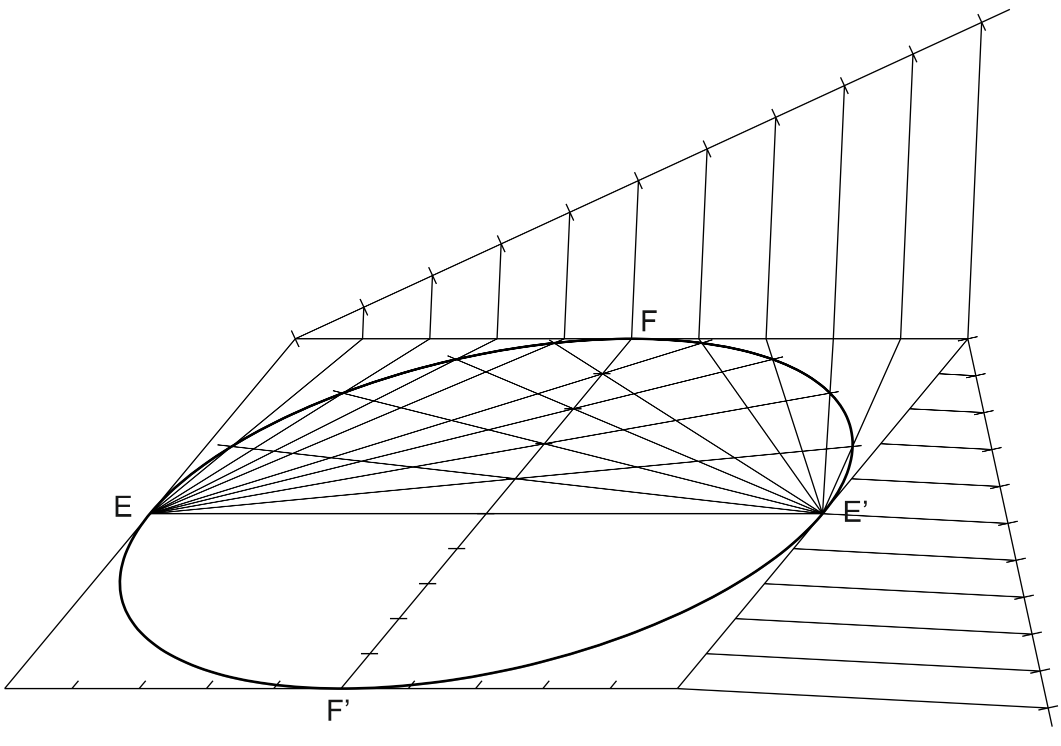


- Construcción da elipse por afinidade:

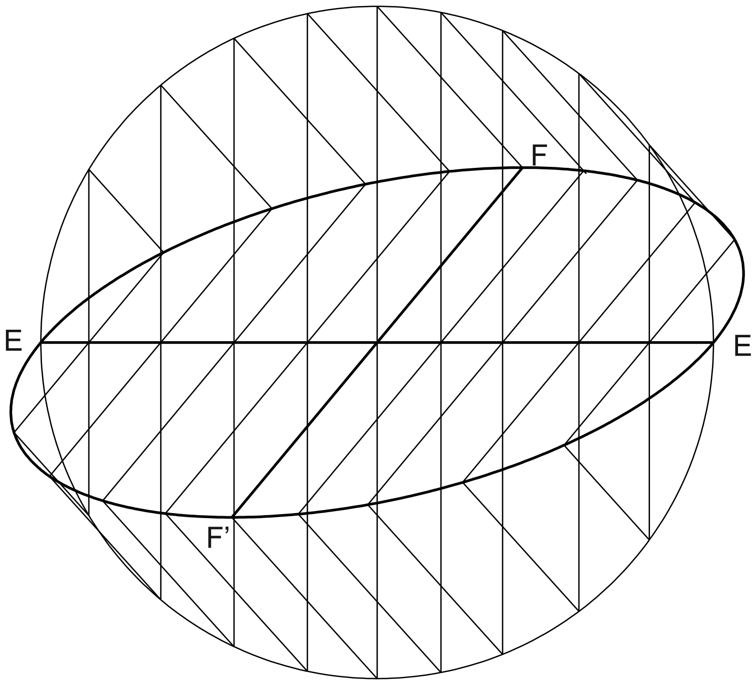
- Construcción da elipse por feixes proxectivos:



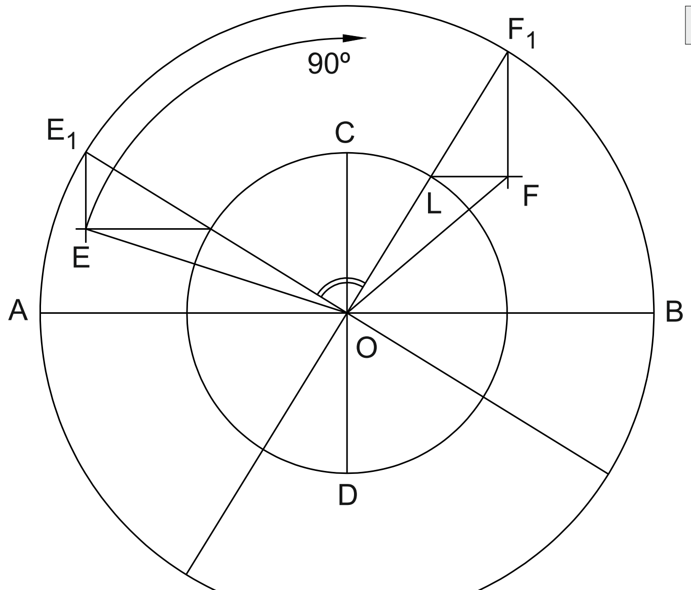
Dada unha parexa de diámetros conxugados: Se consideramos unha elipse como unha figura afín a unha circunferencia, un par de diámetros conxugados desta circunferencia transformaránse en outro par de diámetros conxugados da elipse homóloga. Na circunferencia, un par de diámetros son conxugados se son perpendiculares.

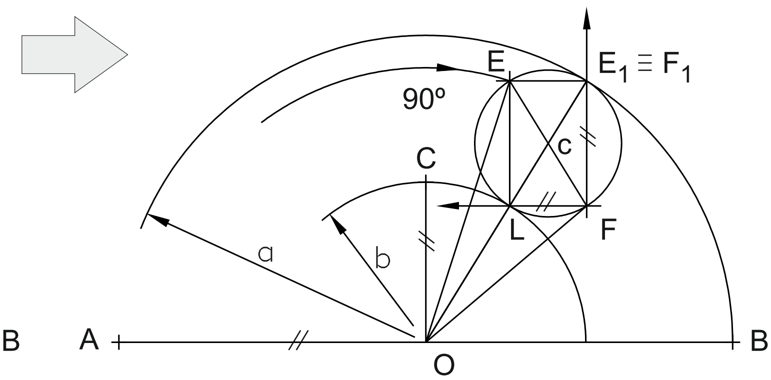


- Construcción da elipse por afinidade, dados dous diámetros conxugados:

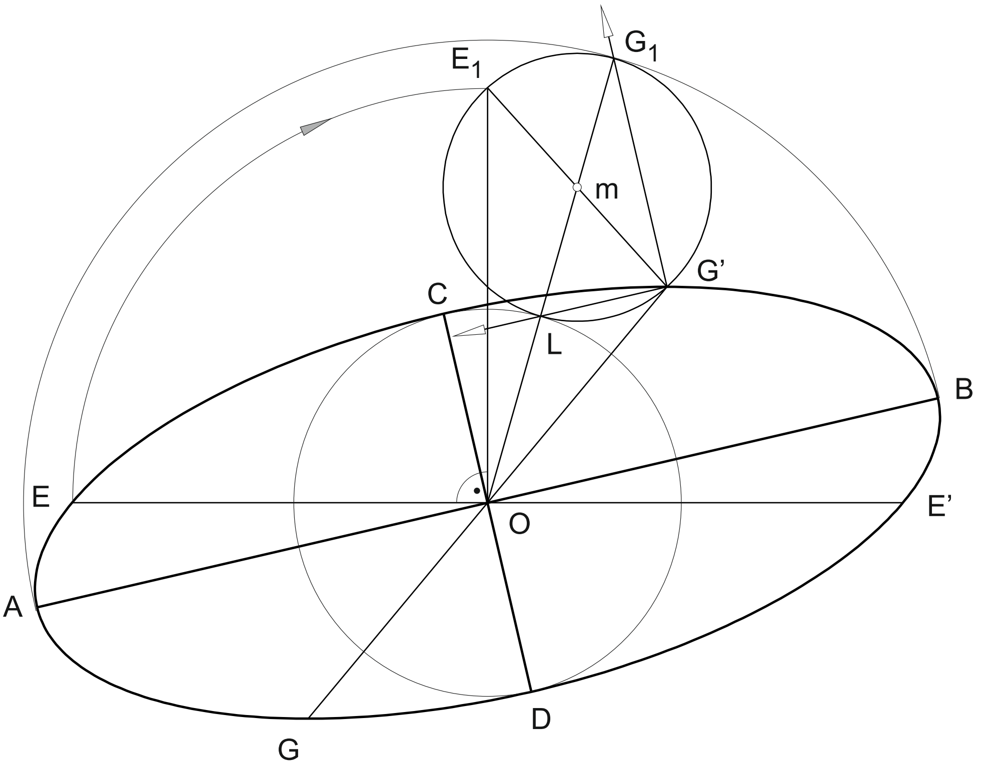


Dados un par de diámetros conxugados, determina-los eixes dunha elipse.
Se coñecemos os eixes dunha elipse podemos, mediante a circunferencia afín e debuxando unha parexa de diámetros conxugados desta circunferencia (diámetros perpendiculares entre sí), determinar por afinidade dous diámetros conxugados da elipse.
Se xiramos 90º os semidiámetros conxugados da circunferencia e da elipse, e o triángulo rectángulo que os relaciona, vemos que o rectángulo que se forma coa unión dos dous triángulos, determina as direccións dos eixes da elipse e as súas lonxitudes.





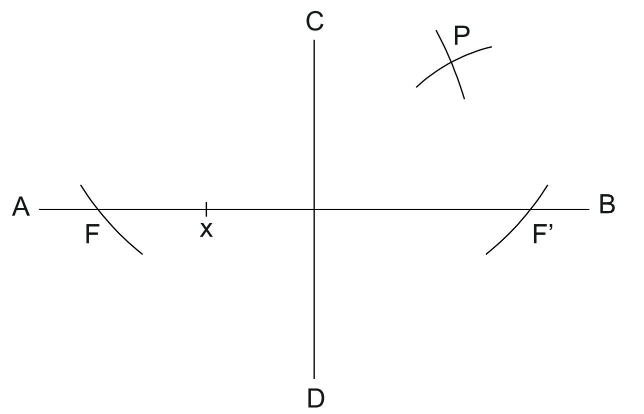
-Dados os diámetros conxugados dunha elipse determina-los seus eixes:

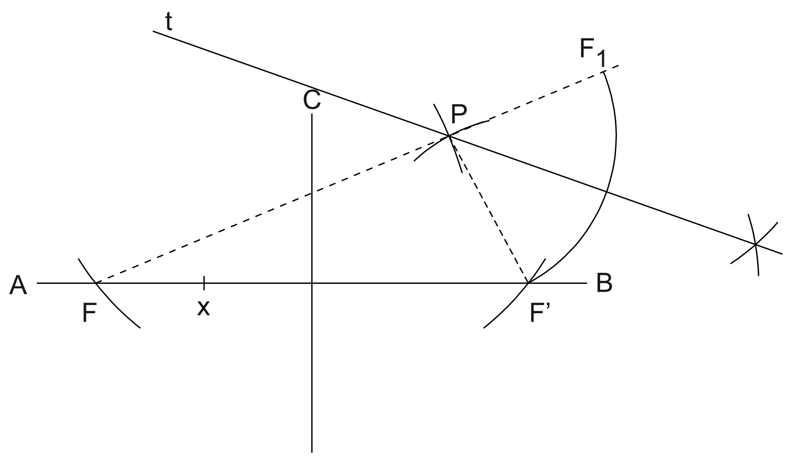


RECTAS TANXENTES Á ELIPSE

Tanxente á elipse nun punto P:

Determinamos un punto P calquera da elipse, facendo unha marca x que divida ó eixe maior en dúas partes, trazando arcos con estas medidas dende cada foco respectivamente.

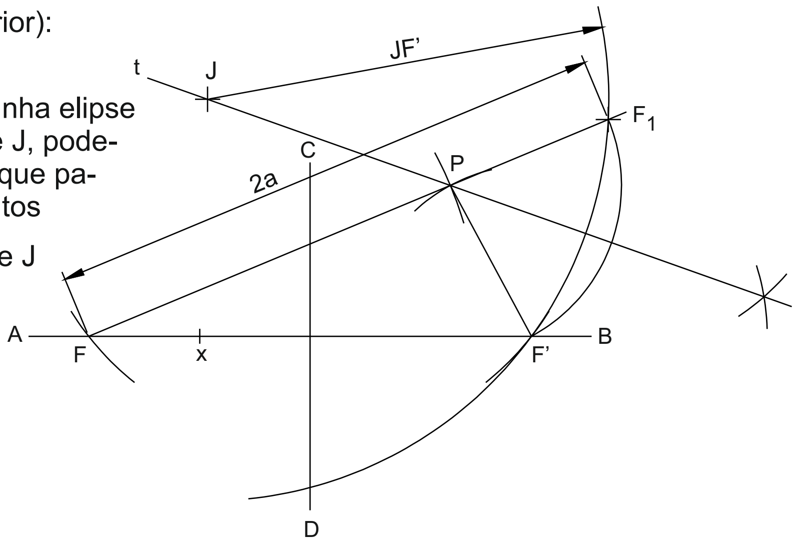


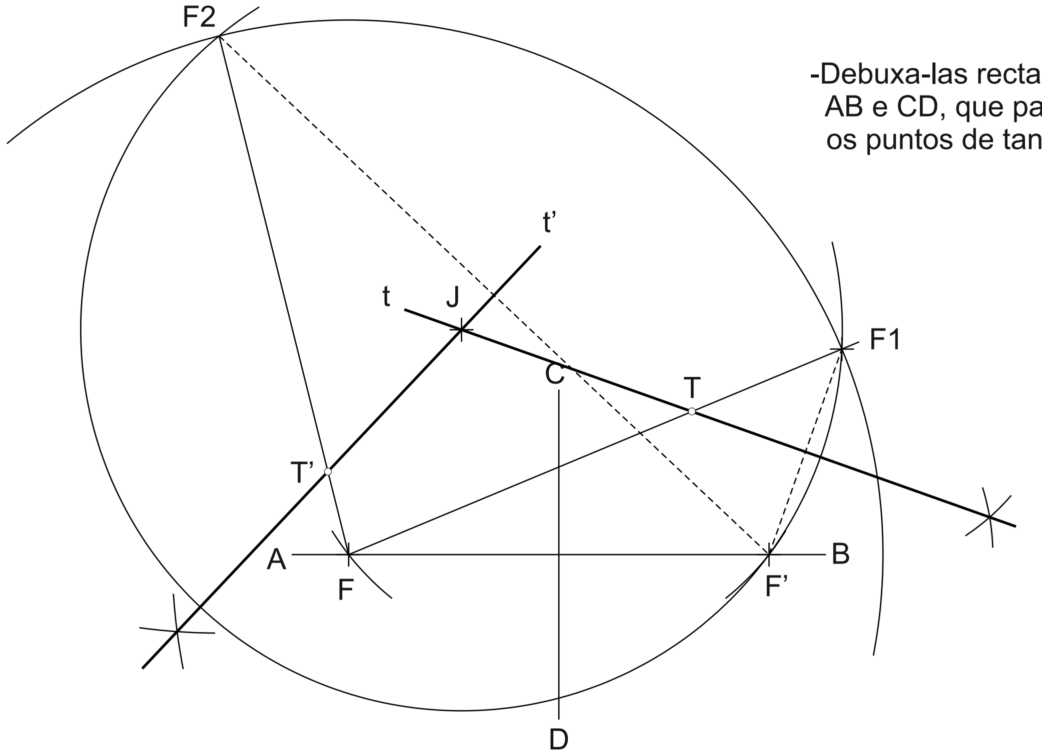


Debuxamos os radios vectores do punto P, unindo éste cos focos.
A tanxente á elipse no punto P é a bisectriz do ángulo exterior formado polos radios vectores. Para traza-la bisectriz prolongamos un dos radios vectores e debuxamos un arco tomando como radio o outro.

Tanxentes á elipse que pasan por un punto J (exterior):

Se sobre a recta t do debuxo anterior (tanxente a unha elipse por un punto P) situamos un punto exterior á elipse J, podemos deducir a construcción: As tanxentes á elipse que pasan por un punto J son as mediatrices dos segmentos F_1-F' e F_2-F'. Para achar F_1 e F_2 debuxamos dende J un arco JF' e dende F un arco 2a (eixe maior), os puntos de intersección son F_1 e F_2.
Os puntos de tanxencia (no debuxo P) das rectas coa elipse determínanse unindo F_1 e F_2 co foco dende o cal trazamos o arco 2a.

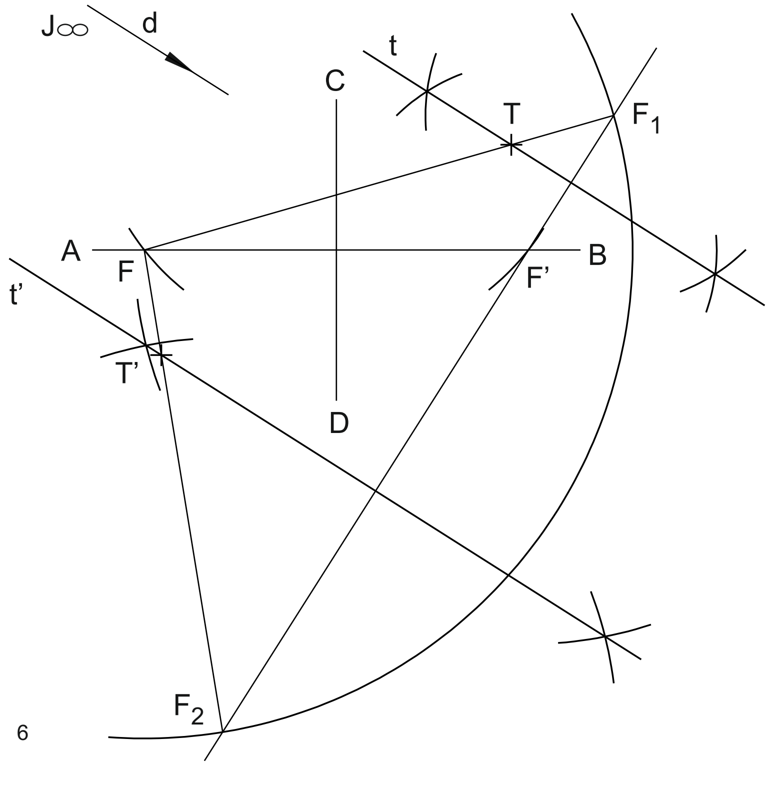




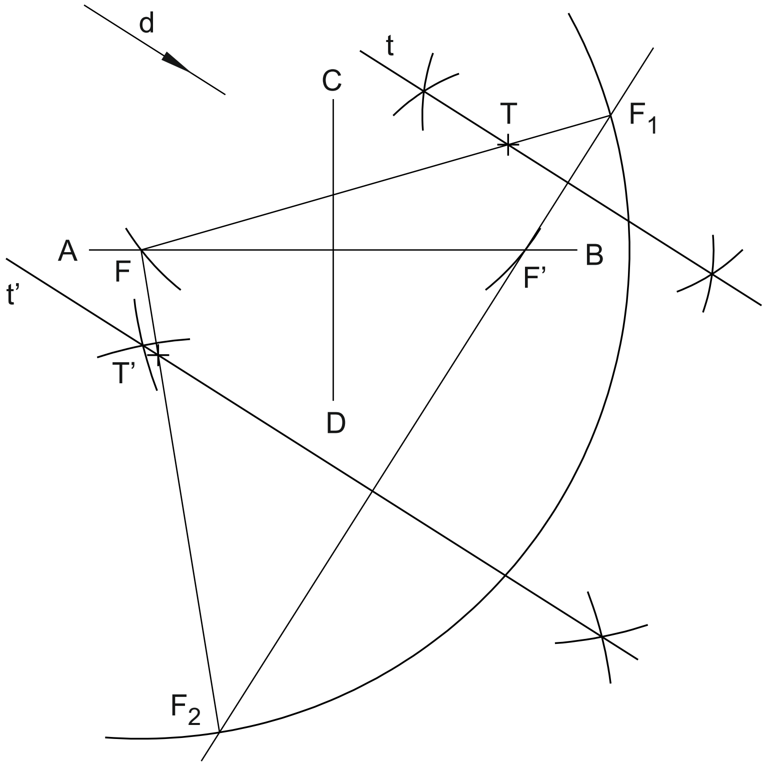
-Debuxa-las rectas tanxentes á elipse de eixes AB e CD, que pasan polo punto "J". Determinar os puntos de tanxencia.

Tanxentes á elipse dende un punto impropio (paralelas a unha dirección dada):

O problema resólvese do mesmo xeito que o caso anterior. O punto J está ahora no infinito polo que as tanxentes serán paralelas á dirección dada, e o arco JF' será unha recta (debido a que o seu radio é infinito) perpendicular á dirección "d" e que pasa por F'.



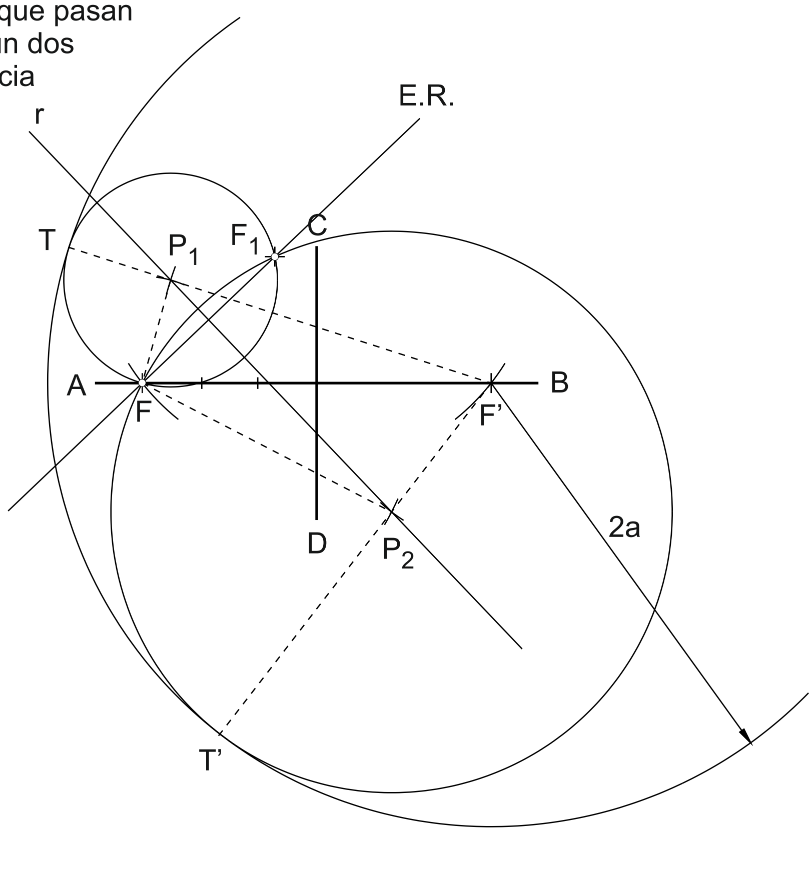
-Debuxa-las rectas tanxentes á elipse de eixes AB e CD, paralelas á dirección “d”. Determina-los puntos de tanxencia.



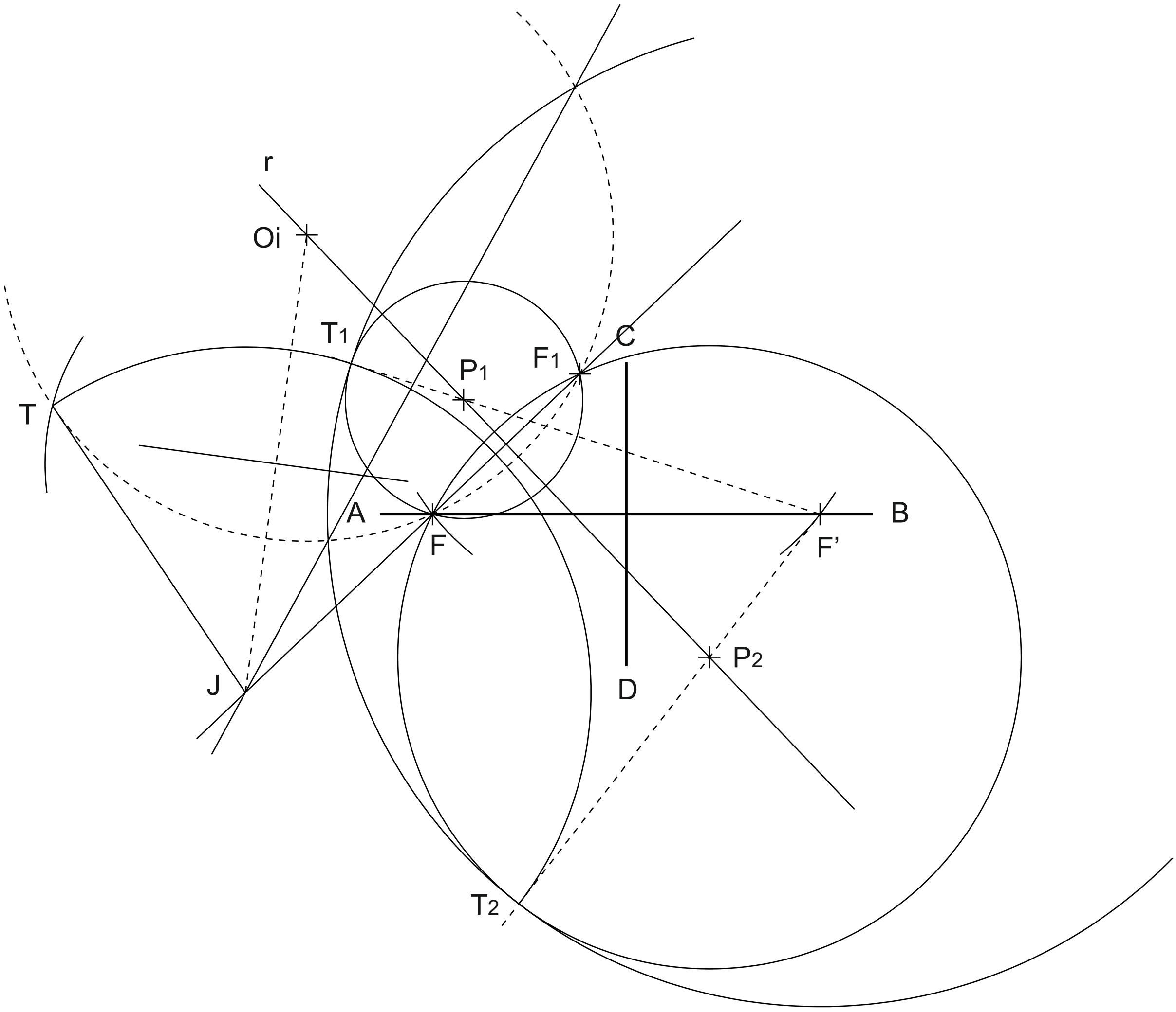
PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE UNHA RECTA E UNHA ELIPSE.

Podemos deducir a construcción se determinamos dous puntos da elipse (P_1 e P_2) e por eles facemos pasar unha recta “r”.
P1 e P2 son centros de dúas circunferencias que pasan por un foco (F), teñen polo tanto como radio un dos radios vectores e son tanxentes á circunferencia de radio 2a (eixe maior ou suma dos radios vectores) trazada dende o outro foco (F').

Se trata dunha aplicación de potencia dun punto respecto dunha circunferencia, concretamente das “*circunferencias tanxentes á de centro un foco (no debuxo F') e radio 2a, e que pasan polo punto F (o outro foco) e F1 (o seu simétrico respecto da recta r)*”.



-Determina-los puntos de intersección da recta “r” coa elipse de eixes AB e CD.



PARÁBOLA

É o lugar xeométrico dos puntos do plano que equidistan dun punto fixo chamado foco e dunha recta chamada directriz.

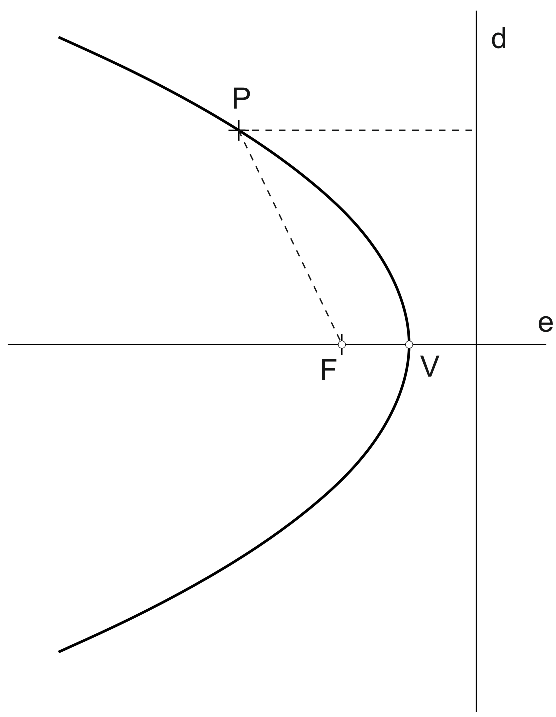
F = foco

V = vértice

e = eixe

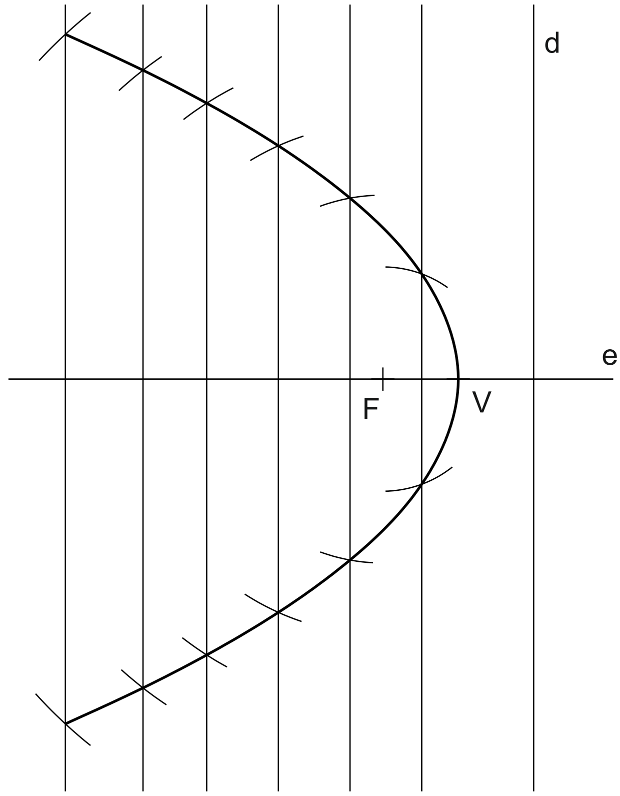
d = directriz

Un punto P da parábola equidista (está á mesma distancia) do foco e da directriz.
O vértice equidista, polo tanto, do foco e da directriz.



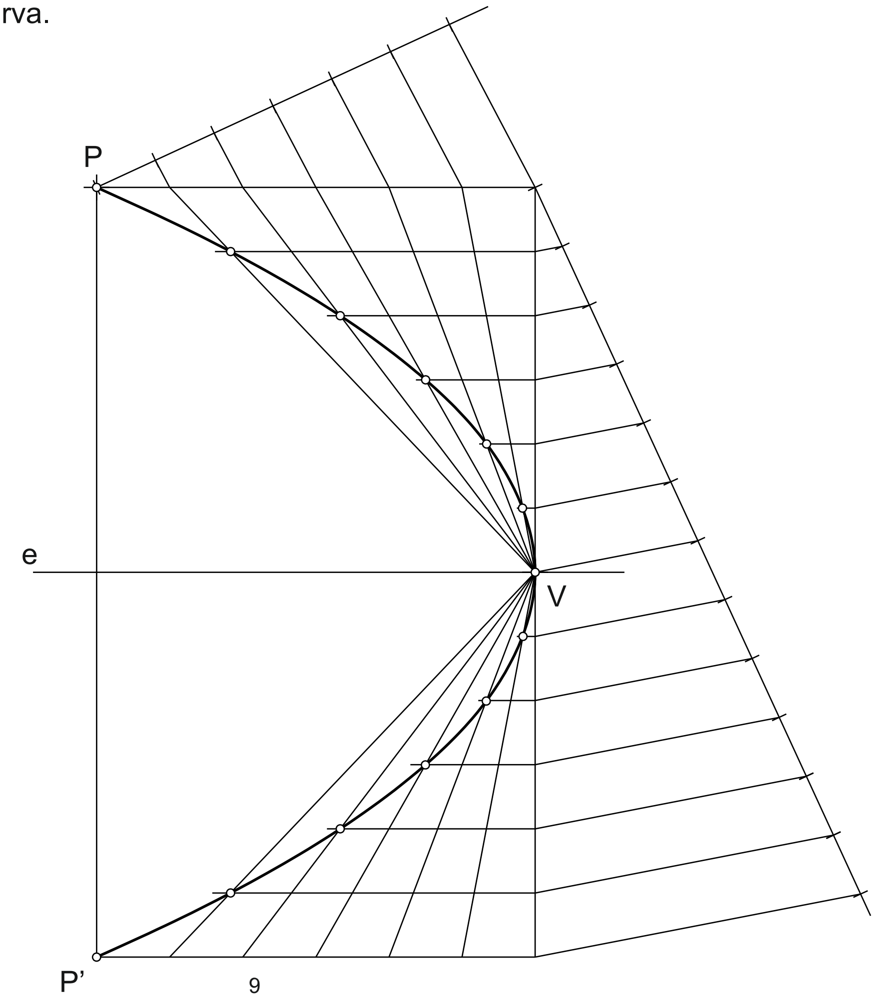
- Construcción da parábola por puntos:

Sabendo que os puntos da parábola equidistan do foco e da directriz, trazamos paralelas á directriz (por detrás do vértice), medimos a distancia destas á directriz e, con centro no foco, cortámolas con arcos de radio a distancia medida. Os puntos de corte estarán a mesma distancia do foco e da directriz, logo serán puntos da parábola.



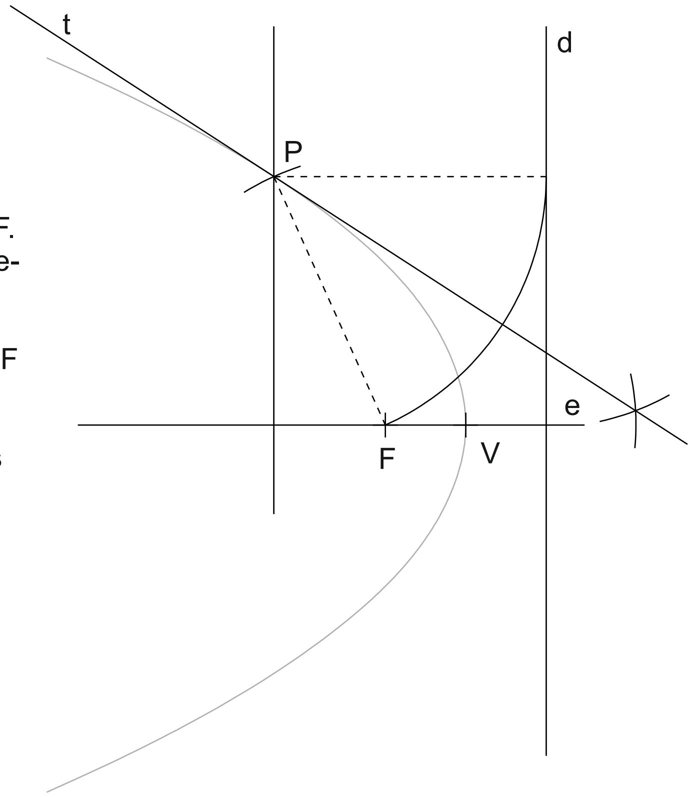
- Construcción da parábola por feixes proxectivos:

Debuxar unha parábola da que coñecemos o seu vértice, o eixe e un punto P da curva.



RECTAS TANXENTES Á PARÁBOLA.

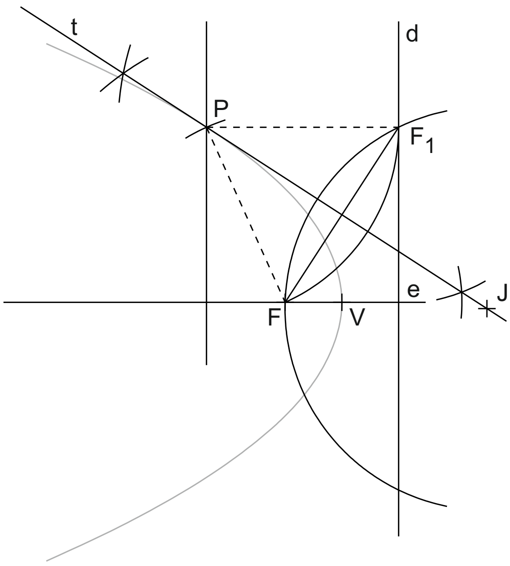
Tanxente á parábola nun punto P:



Sexa unha parábola de eixe e, directriz d, vértice V e foco F. Determinamos un punto P da curva debuxando unha paralela á directriz e cortándoa co arco de radio igual á distancia da paralela á directriz, con centro no foco F.
Debuxamos os radios vectores do punto, unindo P co foco F e trazando dende P unha perpendicular á directriz d.

A bisectriz do ángulo interior formado polos radios vectores é a recta tanxente t á curva no punto P.

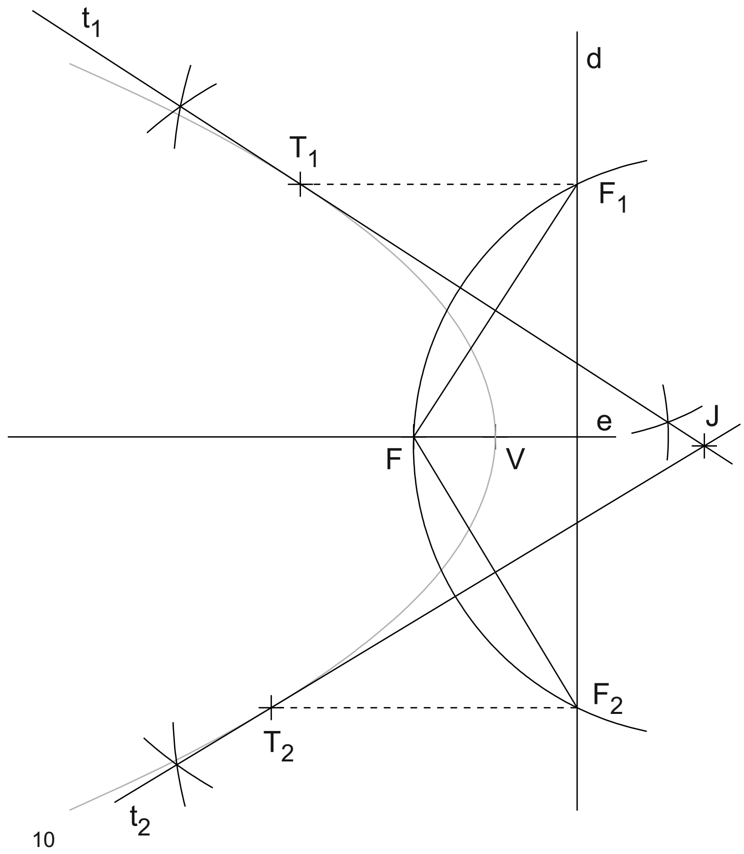
Tanxentes á parábola que pasan por un punto J (exterior):



Se no debuxo anterior, sobre a tanxente "t" situamos un punto J, podemos deducir a construcción. A tanxente t é mediatriz do segmento F-F**1**, e para determinar o punto F**1** trazamo-lo arco JF ata cortar á directriz.
Para acha-lo punto de tanxencia coa curva (no debuxo P) debuxamos dende F**1** unha perpendicular á directriz ata cortar á recta t (é un radio vector do punto de tanxencia).

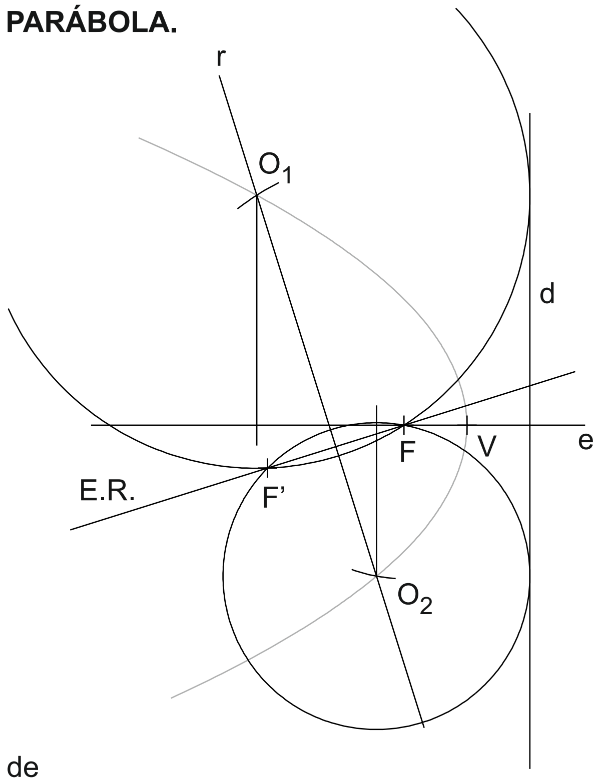
-Debuxa-las rectas tanxentes á parábola de eixe e, directriz d, foco F e vértice V, que pasen polo punto "J".

Hay que ter en conta que dende un punto exterior podemos debuxar dúas rectas tanxentes. O arco JF corta á directriz en dous puntos F**1** e F**2**.

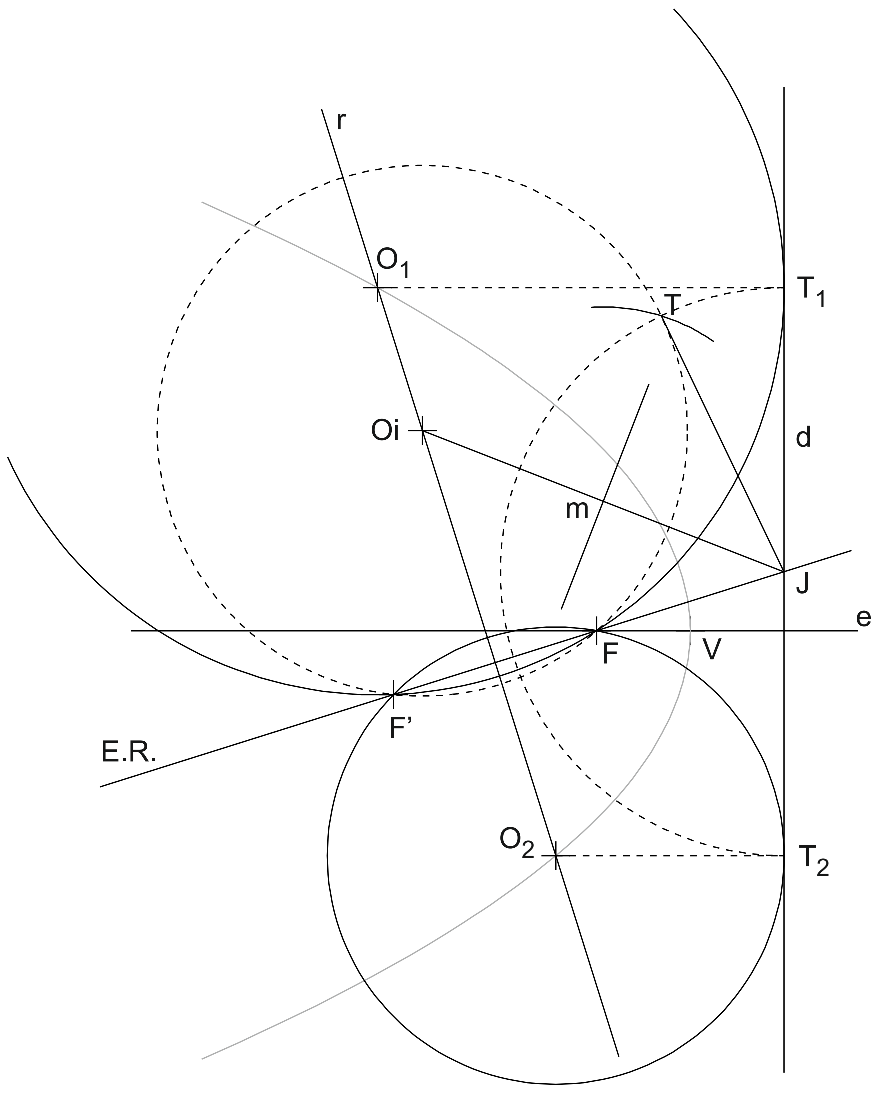


PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE UNHA RECTA E UNHA PARÁBOLA.

Determinamos dous puntos calquera dunha parábola P1 e P2. Por estes puntos facemos pasar unha recta r. Observando a figura podemos deducir que o problema se resolve como o debuxo de dúas circunferencias tanxentes á directriz, que pasan polo foco F e o seu simétrico respecto á recta F'.
Se trata pois dunha aplicación da propiedade xeométrica da potencia dun punto respecto dunha circunferencia, e das propiedades dos feixes de circunferencias coaxiais a que dá lugar.



- Determina-los puntos de intersección da recta "r" coa parábola de eixe e, directriz d, foco F e vértice V:



HIPÉRBOLA

É o lugar xeométrico dos puntos do plano cuxa diferencia de distancias a dous puntos fixos chamados focos é constante (e igual a 2a= distancia entre vértices ou eixe real).
Os vértices, os focos e as ramas da hipérbola son simétricos respecto ó eixe imaxinario, pero entre os vértices e os focos non hai relación.

A-B: Eixe real

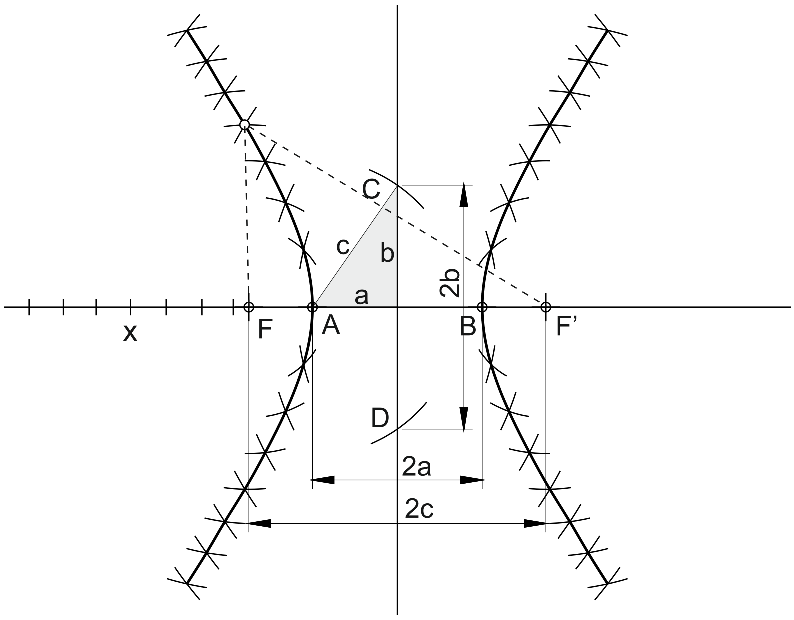
C-D: Eixe imaxinario

2a: Eixe real

2b: Eixe imaxinario

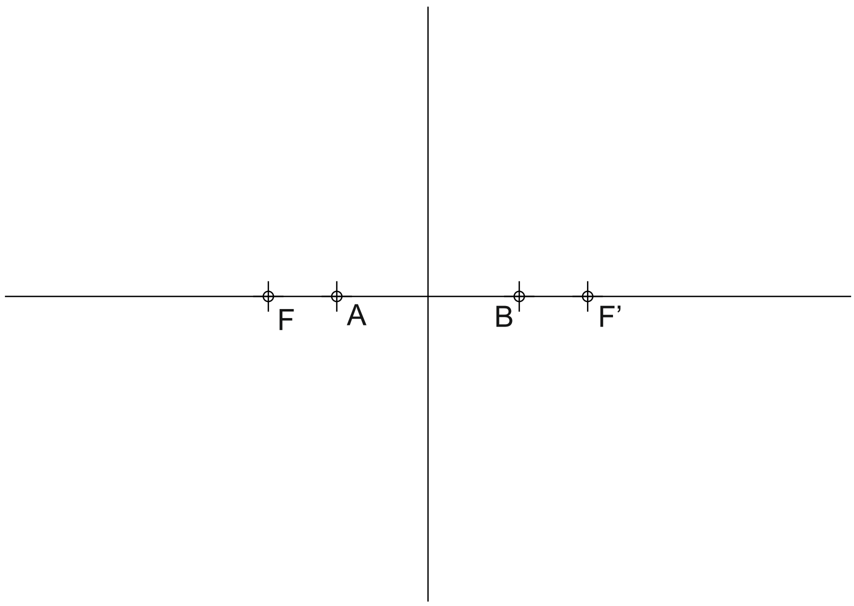
2c: Distancia focal

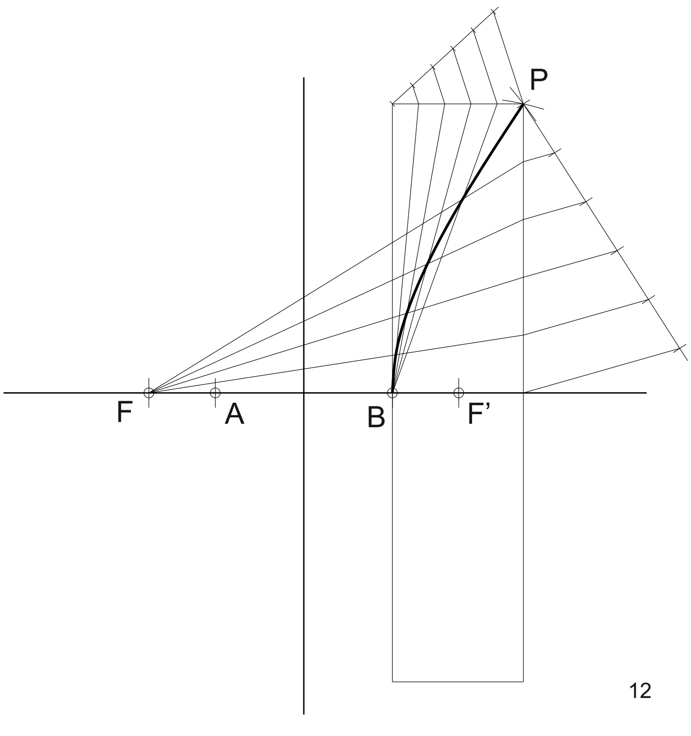
$c^2 = a^2 + b^2$



- Construcción da hipérbola por puntos:
  Facemos marcas no eixe real,detrás do foco (a primeira cerca de F). Medimos a distancia destas marcas ós vértices e, con centros nos focos, trazamos arcos que se cortarán en puntos da hipérbola.
  A diferencia de distancias entre as medidas das marcas ós vértices é igual á distancia entre os vértices, é dicir, 2a.

$\boxed{xB - xA = AB = 2a}$



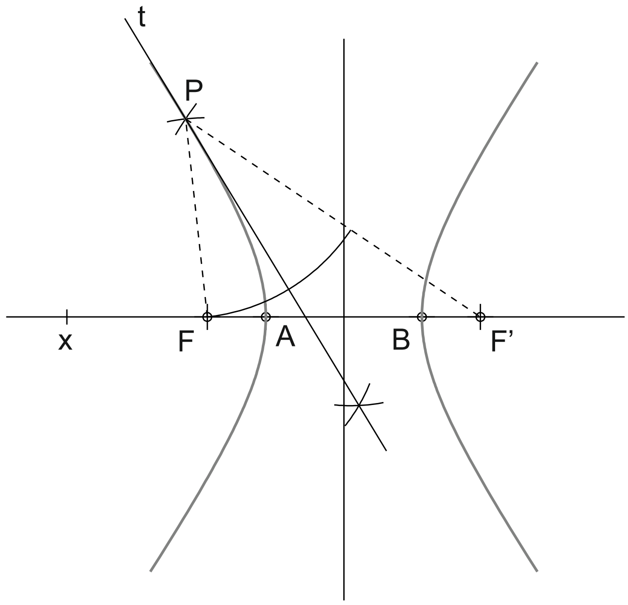


- Construcción da hipérbola por feixes proxectivos:
  Dados os focos, os vértices e un punto P da curva.

RECTAS TANXENTES Á HIPÉRBOLA.

Tanxente á hipérbola nun punto P:

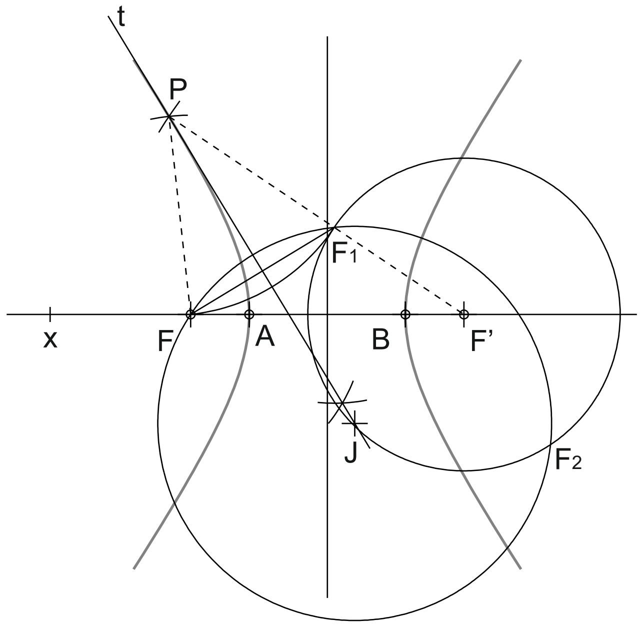
Determinamos un punto P calquera da hipérbola, facendo unha marca x no eixe real, trazando arcos con radio a distancia da marca ós vértices e centro nos focos. O punto de intersección dos arcos pertencera á hipérbola xa que a diferencia entre os radios dos arcos é igual a 2a (distancia entre vértices).

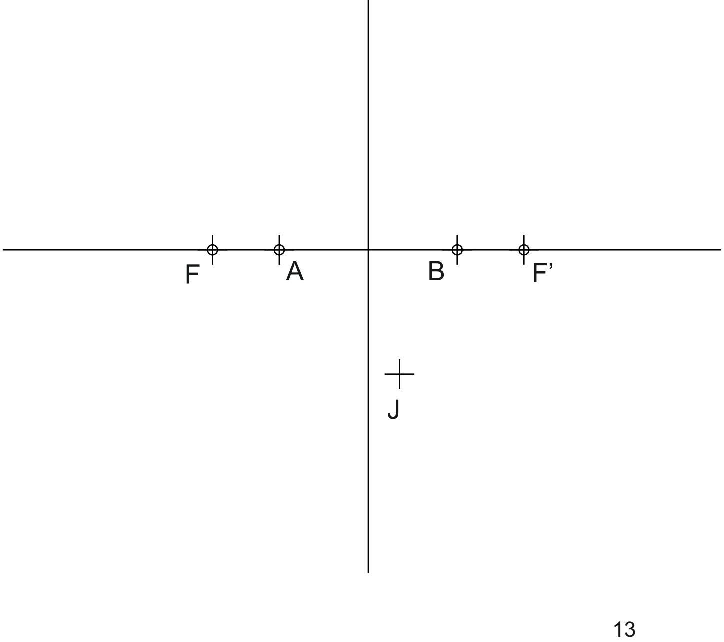


Debuxamos os radios vectores do punto P, unindo éste cos focos.
A tanxente á elipse no punto P é a bisectriz do ángulo interior formado polos radios vectores. Para traza-la bisectriz tomamos como arco PF.

Tanxentes á elipse que pasan por un punto J (exterior):

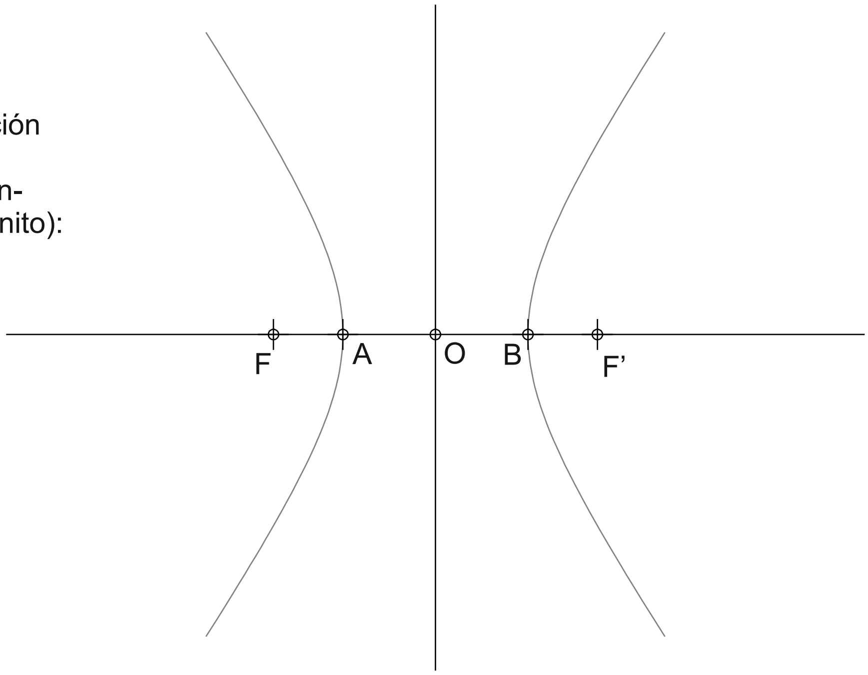
Se sobre a recta t do debuxo anterior situamos un punto exterior á hipérbola J, deducimos a construcción: as tanxentes á hipérbola que pasan por un punto J son as mediatrices dos segmentos F_1-F e F_2-F. Para achar F_1 e F_2 debuxamos dende J un arco JF e dende F' un arco 2a (eixe real), os puntos de intersección son F_1 e F_2.
Os puntos de tanxencia (no debuxo P) das rectas coa elipse determínanse unindo F_1 e F_2 co foco dende o cal trazamos o arco 2a (no debuxo F').





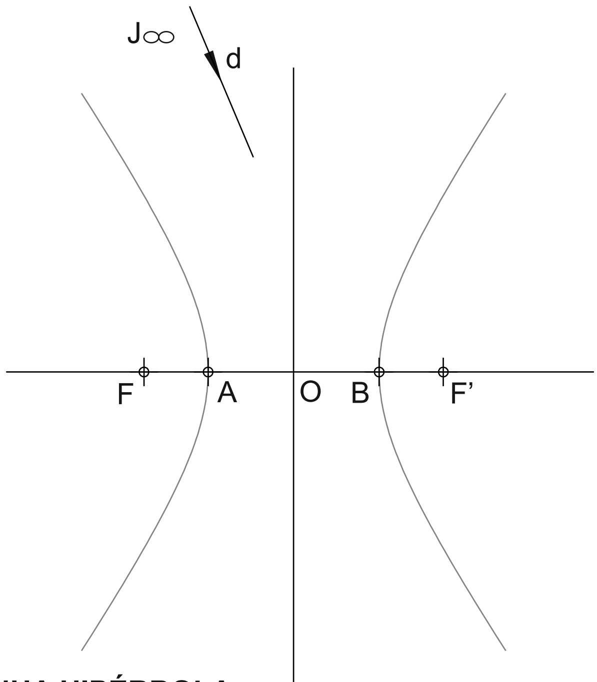
- Debuxa-las rectas tanxentes á hipérbola da figura e que pasan polo punto J. Determina-los puntos de tanxencia:

Tanxentes á hipérbola polo punto de intersección dos eixes (punto O), ASÍNTOTAS.
Lembremos que as asíntotas son as rectas tanxentes á hipérbola nun punto impropio (no infinito):

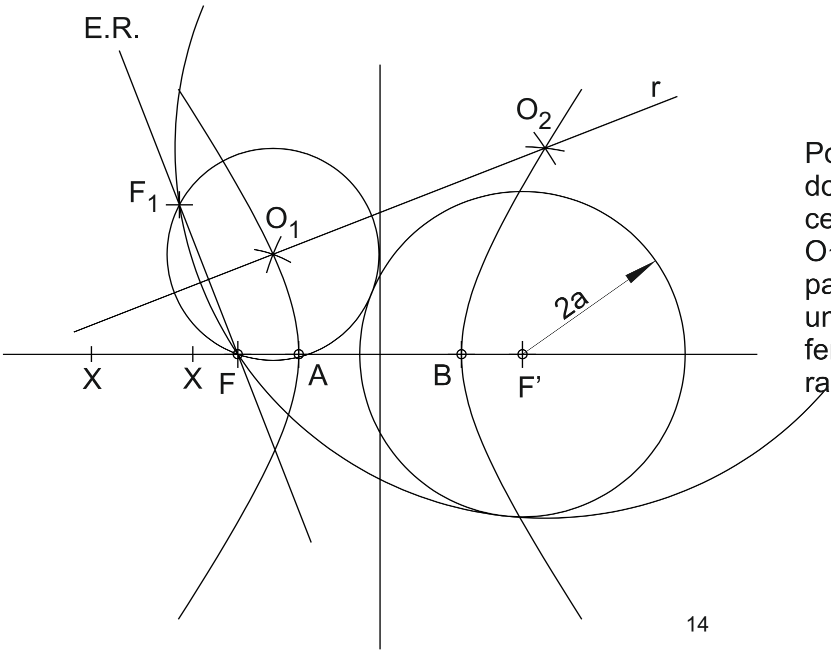


Tanxentes á hipérbola dende un punto impropio (paralelas a unha dirección dada):

A construcción é a mesma que no caso das tanxentes á hipérbola dende un punto exterior J.
A única diferencia, igual que en anteriores casos, está no arco JF que se transforma nunha recta perpendicular á dirección dada.



PUNTOS DE INTERSECCIÓN ENTRE UNHA RECTA E UNHA HIPÉRBOLA.



Podemos deducir a construcción se determinamos dous puntos da hipérbola (O_1 e O_2) e por eles facemos pasar unha recta "r".
O_1 e O_2 son centros de dúas circunferencias que pasan por un foco (F), teñen polo tanto como radio un dos radios vectores e son tanxentes á circunferencia de radio 2a (eixe real ou diferencia dos radios vectores) trazada dende o outro foco (F').

-Determina-los puntos de intersección da recta “r” coa hipérbola de eixes AB e focos FF’.