P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disuguaglianza triangolare

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;\; | \; x_1 + x_2 \; | \quad \leq \quad | \; x_1 \; | + | \; x_2 \; |$

Trasformazioni di funzioni

- Riflessione rispetto all'asse delle x: $-f(x)$
- Riflessione rispetto all'asse delle y: $f(-x)$
- Valore assoluto di f: $|f(x)|$
- Parte positiva di f:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

- Parte negativa di f:

$$f_-(x) \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

- Traslazione verticale: $f(x) + a$
- Traslazione orizzontale: $f(x+a)$
- Riscalamento verticale: $k \cdot f(x)$
  - dilatazione se $k > 1$
  - compressione se $0 < k < 1$
- Riscalamento orizzontale: $f(k \cdot x)$
  - dilatazione se $0 < k < 1$
  - compressione se $k > 1$

Fattoriale

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Proprietà:

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Numeri complessi

- Forme:
  - Cartesiana: $z = x + yi$
  - Trigonometrica: $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$
  - Esponenziale: $z = |z|e^{i\theta}$
- Coniugato: $\bar{z} = x - iy$
- Modulo: $| \; z \; | = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Reciproco: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|}$
- Somma:
  - $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Prodotto:
  - $z \cdot a = ax + iay$
  - $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Quoziente:
  - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$
  - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$
- Elevamento a potenza:
  - $z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta))$
  - $z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \theta}$
- Proprietà:
  - $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
  - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
  - $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
  - $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
  - $|z| = 0 \iff z = 0$
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}$$

Proprietà:

- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
- Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Successioni

- Limitatezza delle successioni convergenti:
  $a_n \to l \implies \forall n \in \mathbb{N} \; \exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M$
- Successione di Nepero:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^n = e$$

- Permanenza del segno:
  $x_n \to l > 0 \implies \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \; x_n > 0$
- Confronto:
  $a_n \to a, \; b_n \to b, \; \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}, \; a_n \leq b_n \implies a \leq l$
- Due carabinieri:
  $a_n \to a, \; b_n \to b, \; \exists \bar{n} : a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \to l$
- Criterio del rapporto:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n > 0$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$$

  - $l > 1 \implies a_n \to +\infty$
  - $l < 1 \implies a_n \to 0$
- Gerarchia di infiniti: $\log_a(n); \; n^\alpha; \; a^n; \; n!; \; n^n$

Limiti notevoli

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$
- $$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$