Polinomi di Taylor

Notazione di o

$f : D \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per D o $x_0 = \pm\infty$

$o(1)$

f è infinitesima per $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \implies f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$

Proprietà: per $x \to x_0$

- $o(1) + o(1) = o(1)$
- $a \cdot o(1) = o(1) \ \ \forall a \in \mathbb{R}$
- $o(1) - o(1) = o(1)$
- $o(1) \cdot o(1) = o(1)$

$o(f(x))$

$o(f(x)) = f(x) \cdot o(1)$ per $x \to x_0$

$g(x) : D \to \mathbb{R}$
$g(x) = o(f(x))$ per $x \to x_0 \iff g(x) = f(x) \cdot o(1) \iff \frac{g(x)}{f(x)} = o(1)$

Altre operazioni: per $x \to x_0$

- $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta}) \ \ [x^\alpha \cdot x^\beta \cdot o(1) = o(x^\alpha \cdot x^\beta)]$
- $o(o(x^n)) = o(x^n) \ \ [o(x^n \cdot o(1)) = x^n \cdot o(1) \cdot o(1)]$
- $(o(x^\alpha))^\beta = o(x^{\alpha\cdot\beta}) \ \ [(o(o(1) \cdot x^\alpha))^\beta = o(1) \cdot o(1)^\beta \cdot x^{\alpha\cdot\beta}]$
- $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n) \ \ [o(x^n + o(1) \cdot x^n) = o(1) \cdot x^n \cdot o(1) \cdot o(1) \cdot x^n]$

Retta tangente come migliore approssimante affine

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a, b)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0}$$

Sia $T_1(x) := f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ polinomio di grado al più uno

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0$$

$$\frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = o(1) \quad f(x) - T_1(x) = o(x - x_0) \quad f(x) = T_1 + o(x - x_0)$$

per $x \to x_0$ e

$$\begin{cases} T_1(x_0) = f(x_0) \\ T_1'(x_0) = f'(x_0) \end{cases}$$

Supponendo f derivabile n volte, il polinomio candidato $T_n(x)$ che approssima f intorno a x_0 deve soddisfare

$$\begin{cases} T_n(x_0) = f(x_0) \\ T_n'(x_0) = f'(x_0) \\ \dots \\ T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

Il polinomio di Taylor di f in x_0 di ordine n è definito come

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e per costruzione soddisfa tutte le proprietà del sistema
Osservazione: $T_0(x) = f(x_0)$
Se $x_0 = 0$ il polinomio si dice polinomio di MacLaurin

Formula di Taylor con resto di Peano

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Sviluppi di MacLaurin di alcune funzioni elementari

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

Formula di Taylor con resto di Lagrange

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, f derivabile $n+1$ volte in (a,b)
$\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ $\exists \xi : \xi$ compreso tra x e x_0 e

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad |f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right|$$

$$|f(x) - T_n(x)| \le \sup_{t \in (a,b)} |f^{(n+1)}(t)| \cdot \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$