Successioni

Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ denotata con $a_n = f(n)$, la sua immagine si indica con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Grafico

$\mathrm{Gr}(f) = \{(n, f(n)),\ n \in \mathbb{N}\}$

Fattoriale

$a_n = n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ si chiama successione fattoriale ed è strettamente crescente, infatti:
$a_n < a_{n+1} \implies n! < (n+1)! \implies n! < (n+1)\cdot(n+1-1)! \implies n! < (n+1)\cdot n! \implies 1 < n+1$
Per definizione $0! = 1$
Proprietà:

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $\dfrac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Coefficiente binomiale

$n, k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}$$

Proprietà:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Successione geometrica

Dato $q \in R,\ q \neq 0$ la successione geometrica di ragione q è definita come la successione $a_n = q^n$
Il rapporto tra un termine della successione e il precedente è costante $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
La somma dei primi $n+1$ termini della successione geometrica con $q \neq 0$ si calcola con:

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \ldots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ q \neq 1 \\ n+1,\ q = 1 \end{cases}$$

Limite di una successione

$a_n \to 0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \upsilon_\epsilon \in \mathbb{R} : \forall n > \upsilon_\epsilon\ \ -\epsilon < a_n < \epsilon$
$a_n \to +\infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \upsilon_\epsilon \in \mathbb{R} : \forall n > \upsilon_\epsilon\ a_n > \epsilon$
$a_n \to -\infty \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \upsilon_\epsilon \in \mathbb{R} : \forall n > \upsilon_\epsilon\ a_n < -\epsilon$
$a_n \to l \in \mathbb{R} \iff a_n - l \to 0$

Unicità del limite

$a_n \to x,\ a_n \to y \iff x = y$

Limitatezza delle successioni convergenti

$a_n \to l \iff \forall n \in N\ \exists M \in R : |a_n| \leq M$

Sottosuccessioni

Una successione $(n_n)_n$ è detta sottosuccessione di $(a_n)_n$ e si ha $\forall n \in N\ \ b_n = a_{\Phi(n)}$, dove $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è una funzione strettamente crescente

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \implies \lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = l$

Non esistenza del limite

Se una successione a_n ammette due sottosuccessioni distinte le quali hanno due limiti distinti, allora a_n non ha limite

Monotona

- Crescente se $a_n \leq a_{n+1}$
- Strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$
- Decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$
- Strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$

Sia a_n crescente, allora

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_i : i \in \mathbb{N},\ i \geq 0\}$

Analogamente, sia a_n decrescente, allora

$\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_i : i \in \mathbb{N},\ i \geq 0\}$

Successione di Nepero

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
La successione di Nepero è strettamente crescente e limitata

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^\alpha$$

Permanenza del segno:

$$x_n \to l > 0 \implies \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \; x_n > 0$$

Confronto:

$$a_n \to a, \; b_n \to b \; \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \; a_n \leq b_n \implies a \leq b$$

Due carabinieri:

$$a_n \to a, \; b_n \to b \; \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \; a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \to l$$

Algebra dei limiti finiti

$$a_n \to a \in \mathbb{R}, \; b_n \to b \in \mathbb{R}$$

- Somma: $\lim_{n \to +\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
- Prodotto: $\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
- Quoziente ($b \neq 0$): $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
- Potenza: $\lim_{n \to +\infty} a_n^{b_n} = a^b$

Criterio del rapporto:

$\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n > 0$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$$

- $l > 1 \implies a_n \to +\infty$
- $l < 1 \implies a_n \to 0$
- $l = 0$ non si può concludere nulla

Gerarchia di infiniti

$\alpha > 0,\ a > 0$

Le successioni

$\log_a(n);\ n^\alpha;\ a^n;\ n!;\ n^n$

sono in ordine crescente di infinito, ovvero

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a(n)}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$