Serie numeriche

$(a_n)_n$ successione di numeri reali con $n \in \mathbb{N}$
$(S_k)_k$ è la successione delle somme parziali con $k \in \mathbb{N}$

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = a_0 + \ldots + a_k$$

Una serie numerica è il limite delle somme parziali

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} a_n$$

La serie è detta

- convergente se il limite di S_k esiste finito
- divergente se il limite di S_k esiste e vale $\pm\infty$
- indeterminata se il limite di S_k non esiste

Serie telescopiche

$(a_n)_n, (b_n)_n$ successioni tali che $a_n = b_{n+1} - b_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_{k+1} - b_k) = b_{k+1} - b_0$$

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} (b_{k+1} - b_0)$$

Se $\exists \lim_{k \to +\infty} b_k \implies \exists \lim_{k \to +\infty} S_k$ e la serie è convergente

Serie di Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è telescopica

$$\frac{1}{n(n+1)} = -\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = b_{n+1} - b_n$$

$$\lim_{k \to +\infty} b_{k+1} = \lim_{k \to +\infty} -\frac{1}{k+1} = 0 \implies$$

converge e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \to +\infty} (b_{k+1} - b_1) = 0 - (-1) = 1$$

Serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

è telescopica

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = b_{n+1} - b_n$$

$$\lim_{k\to+\infty} b_{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \ln(k+1) = +\infty \implies$$

diverge e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

Condizione necessaria

Se $\sum_{n=o}^{+\infty} a_n$ converge $\implies a_n$ è infinitesima, ovvero
se a_n non è infinitesima $\implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converge
Dimostrazione:
$(a_n)_n$ successione, S_k serie associata
poiché per ipotesi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge si ha che $\lim_{k\to+\infty} S_k$ esiste finito
dunque $S_k - S_{k-1} = a_k$ e $\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty}(S_k - S_{k-1}) = 0$

Carattere di una serie

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, ma valore diverso

Serie a termini positivi

$(a_n)_n$ successione a termini positivi ($a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$)
S_k è monotona crescente, infatti $S_{k+1} = \sum_{n=0}^{k+1} a_n = \sum_{n=0}^{k} a_n + a_{k+1} \geq S_k$ e quindi ammette limite (finito o infinito), perciò la serie associata converge oppure diverge

Criterio del confronto

$(a_n)_n, (b_n)_n$ successioni a termini positivi, se $\exists n_0$: $a_n \leq b_n \ \ \forall n \geq n_0$ si ha che:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

$(a_n)_n, (b_n)_n$ successioni a termini positivi, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \implies$ sono asintotiche $a_n \sim b_n$ ovvero $a_n = b_n + o(b_n)$ per $n \to +\infty$
Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \implies$

- $l = 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$
- $l = +\infty$: $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$
- $0 < l < +\infty$: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}$ hanno lo stesso carattere

Serie armonica generalizzata

Funzione Zeta di Riemann: $\alpha > 0$

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

è convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $\alpha \leq 1$

Criterio del rapporto e della radice n-esima

$(a_n)_n$ a termini positivi
Se

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

oppure

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

- se $l > 1$ la serie associata diverge
- se $l < 1$ la seria associata converge

Criterio di convergenza assoluta

$(a_n)_n$ successione generica
Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge $\implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge
La serie associata converge assolutamente se la serie associata al valore assoluto converge semplicemente

Serie a segni alterni

Serie di Leibnitz:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge semplicemente ma non assolutamente

Criterio di Leibnitz

$(a_n)_n$ monotona decrescente e infinitesima $\implies \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$ è convergente
Dimostrazione:

$$S_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \cdot a_n \quad S_{k+2} = S_k + (-1)^{k+1} \cdot a_{k+1} + (-1)^{k+2} \cdot a_{k+2}$$

- k pari: $S_{k+2} = S_k - a_{k+1} + a_{k+2} \implies S_{k+2} \leq S_k$
- k dispari: $S_{k+2} = S_k + a_{k+1} - a_{k+2} \implies S_{k+2} \geq S_k$
  Inoltre $\lim_{k\to+\infty} S_{k+1} - S_k = 0$ quindi $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot a_n$ converge

Serie e integrali generalizzati

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, definita $f(x) = a_k \ \ \forall x \in [k, k+1) \implies$

$$\int_0^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k = S_n$$

Se l'integrale è convergente allora la serie è convergente e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ e viceversa

Criterio integrale

$n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione tale che $f \geq 0$ decrescente in $[n_0, +\infty)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Se $a_n = f(n) \implies$

- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < +\infty \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$
- $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = +\infty \iff \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty, & 0 < \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$$