Funzioni

Funzione

$D \neq \emptyset, C \neq \emptyset$
Una funzione $F : D \to C$ è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in D$ uno ed un solo elemento $y \in C$ che si indica con $f(x)$ e si dice valore o immagine di f in x
$\forall x \in D \ \exists! y \in C : y = f(x)$

- Variabile indipendente: x
- Variabile dipendente: $y = f(x)$
- Una funzione si dice limitata
  - superiormente se $\forall x \in D \ \exists M \in \mathbb{R} : M \geq f(x)$
  - inferiormente se $\forall x \in D \ \exists m \in \mathbb{R} : m \leq f(x)$
  - se è limitata sia superiormente che inferiormente

Corrispondenza

Sottoinsieme dell'insieme $D \times C := \{(x, y) : x \in D,\ y \in C\}$

Dominio, codominio, immagine

- Dominio: D
- Codominio: C
- Immagine: $\mathrm{Im}(f) = f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subset C$

Iniettiva, suriettiva, biiettiva

- Iniettiva: $\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, equivalentemente $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- Suriettiva: $\forall y \in C \ \exists x \in D \mid y = f(x)$, ovvero $\mathrm{Im}(f) = C$
- Biiettiva: $\forall y \in C \ \exists! x \in D \mid y = f(x)$, ovvero se è sia iniettiva che suriettiva

Composizione di funzioni

$f : A \to B,\ g : C \to D$
Se $B \subset C$ (quindi $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$) si può definire la composizione
$g \circ f : A \to D,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Funzione inversa

Se f è biiettiva si può definire la funzione inversa $f^{-1} : C \to D \quad x = f^{-1}(y)$

Grafico

$\mathrm{Gr}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D,\ y = f(x)\}$
$(x, y) \in \mathrm{Gr}(f) \iff (y, x) \in \mathrm{Gr}(f^{-1})$

Simmetrica

- Pari $f(-x) = f(x)$
- Dispari $f(-x) = -f(x)$
- Periodica $\exists T \mid f(x+T) = f(x)$

Monotona

- Crescente $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente crescente $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

Disuguaglianza triangolare

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$