Proposizioni

P	Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Massimo e minimo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- Può non esistere
- Se esiste è unico
- $M \in A$ si dice massimo per A ($M = \max(A)$) se $\forall x \in A\ M \geq x$
- $m \in A$ si dice minimo per A ($m = \min(A)$) se $\forall x \in A\ m \leq x$

Estremo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di A ($\bar{x} = \sup A$) se è il più piccolo dei maggioranti, ovvero

$$\begin{cases} \forall x \in A\ \ x \leq \bar{x} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x - \epsilon < \bar{x} \end{cases}$$

- $\underline{x} \in \mathbb{R}$ si dice estremo inferiore di A ($\underline{x} = \inf A$) se è il più grande dei minoranti, ovvero

$$\begin{cases} \forall x \in A\ \ x \geq \underline{x} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x - \epsilon > \underline{x} \end{cases}$$

Disuguaglianza triangolare

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

Trasformazioni di funzioni

- Riflessione rispetto all'asse delle x: $-f(x)$
- Riflessione rispetto all'asse delle y: $f(-x)$
- Valore assoluto di f: $|f(x)|$
- Parte positiva di f:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

- Parte negativa di f:

$$f_-(x) \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

- Traslazione verticale: $f(x) + a$
- Traslazione orizzontale: $f(x + a)$
- Riscalamento verticale: $k \cdot f(x)$
  - dilatazione se $k > 1$
  - compressione se $0 < k < 1$
- Riscalamento orizzontale: $f(k \cdot x)$
  - dilatazione se $0 < k < 1$
  - compressione se $k > 1$

Numeri complessi

- Forme:
  - Cartesiana: $z = x + yi$
  - Trigonometrica: $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
  - Esponenziale: $z = |z|e^{i\theta}$
- Coniugato: $\bar{z} = x - iy$
- Modulo: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Reciproco: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|}$
- Somma:
  - $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Prodotto:
  - $z \cdot a = ax + iay$
  - $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Quoziente:
  - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$
  - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$
- Elevamento a potenza:
  - $z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \theta) + i\sin(n \cdot \theta))$
  - $z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \theta}$
- Proprietà:
  - $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
  - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
  - $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
  - $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
  - $|z| = 0 \iff z = 0$
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Fattoriale

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Proprietà:

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}$$

Proprietà:

- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Successioni

- Limitatezza delle successioni convergenti: $a_n \to l \implies \forall n \in \mathbb{N}\ \exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M$
- Successione di Nepero:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^\alpha$$

- Permanenza del segno: $x_n \to l > 0 \implies \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ x_n > 0$
- Confronto: $a_n \to a,\ b_n \to b\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$
- Due carabinieri:

$$a_n \to a,\ b_n \to b\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \to l$$

- Criterio del rapporto:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$$

  - $l > 1 \implies a_n \to +\infty$
  - $l < 1 \implies a_n \to 0$
- Gerarchia di infiniti: $\log_a(n);\ n^\alpha;\ a^n;\ n!;\ n^n$

Limiti

$D \subset \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$

- Punto di accumulazione: x_0 si dice punto di accumulazione per D se $\forall \delta > 0 \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, equivalentemente $\forall \delta > 0\ \exists x \in D : 0 < |x - x_o| < \delta$
- Limite finito in un punto: x_o punto di accumulazione per D, $l \in \mathbb{R}$ si dice limite di f per $x \to x_0$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\}$
- Funzione continua: $x_0 \in D$, una funzione f è continua in x_0 se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\}$, ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Limite infinito in un punto: x_0 punto di accumulazione per D,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0$$

- Limite all'infinito: D illimitato superiormente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0\ \exists k > 0 : \forall x \in (k$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\ \exists k > 0 : \forall x \in ($$

- Discontinuità:
  - Eliminabile in x_0 se esiste finito

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- A salto in x_0 se esistono finiti

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- Essenziale negli altri casi

Limiti notevoli

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$
- $$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$
- $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Proprietà delle funzioni continue

- Teorema degli zeri: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0$
- Intersezione di funzioni: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $f(a) > g(a), f(b) < g(b) \implies \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = g(x_0)$
- Teorema dei valori intermedi: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\implies$ f assume tutti i valori compresi tra $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ e $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$, ovvero
- Massimo e minimo assoluto: $f : D \to \mathbb{R}$ continua
  - M si dice massimo assoluto di f in D se
    - $\forall x \in D \ f(x) \leq M$
    - $\exists x_0 \in D : f(x_0) = M$ detto punto di massimo
  - m si dice minimo assoluto di f in D se
    - $\forall x \in D \ f(x) \geq m$
    - $\exists x_0 \in D : f(x_0) = m$ detto punto di minimo
- Teorema di Weierstrass: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\implies \exists M, m$ massimo e minimo di f in $[a,b]$ e $f([a,b]) = [m, M]$

Derivate

$$f : (a,b) \to \mathbb{R}, \ x_0 \in (a,b)$$

- f è derivabile in x_0 se esiste finito

  $$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- f derivabile in $x_0 \implies$ ammette retta tangente con equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- Punto angoloso: x_0 è detto punto angoloso se esistono finiti $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$
- Cuspide: x_0 è detto cuspide se $f'(x_0^+) = \pm\infty, \ f'(x_0^-) = \mp\infty$
- Punto a tangente verticale: x_0 è detto punto a tangente verticale se $f'(x_0) = \pm\infty$

Sin e cos

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\cot(x)$
$\sin(\pi \pm x) = \mp\sin(x)$	$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi \pm x) = \pm\tan(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(x) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\sin^2(x) - 1$