Integrali

Somma superiore e inferiore

Definizione

$\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} = b\}$ qualunque partizione di $[a, b]$

$m_i := \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad M_i := \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$

Le somme superiore e inferiore

$$s(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad S(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

sono approssimazioni dell'area sottesa al grafico per difetto e per eccesso
Pertanto

$$(b - a) \inf_{[a,b]} f(x) \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq (b - a) \sup_{[a,b]} f(x)$$

Le approssimazioni migliori sono la più grande per difetto e la più piccola per eccesso

$$\sup_{\mathcal{D}} s(D, f) := \sup\{s(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \text{ partizione di } [a, b]\}$$

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) := \inf\{S(\mathcal{D}, f) : \mathcal{D} \text{ partizione di } [a, b]\}$$

Funzione integrabile

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = L \in \mathbb{R} \implies$$

f è integrabile secondo Riemann
Il valore comune è detto integrale di Riemann di f in $[a, b]$ e si indica con

$$L = \int_a^b f(x)\, dx$$

Criteri di integrabilità

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua $\implies$ f è integrabile
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona $\implies$ f è integrabile
$f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ sono integrabili $\implies$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ x \in [a, b] \\ f_2(x), \ x \in (b, c] \end{cases}$$

è integrabile

Proprietà dell'integrale

Formule

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b]$
linearità: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \ \alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

addittività rispetto al dominio di integrazione: $r \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^r f(x) \, dx + \int_r^b f(x) \, dx$$

positività: se $f \geq_0$ in $[a, b]$ $\implies$ $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$
monotonia: se $f \geq g$ in $[a, b]$ $\implies$ $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

$$\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx \implies \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

Teorema della media

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata
$m := \inf_{[a,b]} f(x) \quad M := \sup_{[a,b]} f(x)$
$m(b - a) \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq M(b - a)$
Se f è integrabile in $[a, b]$ $\implies$ $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$
Se f è continua in $[a, b]$ $\implies$ $\exists x_0 \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = f(x_0)$

Funzione integrale

Definizione

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $x_0 \in [a, b]$
La funzione integrale di f con punto base x_0 è $F : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \ \ \forall x \in [a, b]$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $x_0 \in [a, b]$
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ funzione integrale di $f \implies$

- F è continua in $[a, b]$
- se f è continua in $\bar{x} \in (a, b)$ allora F è derivabile in $\bar{x}$ e $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$

Dimostrazione

- F è continua in $[a, b]$

$$F(x) - F(\bar{x}) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\, dt = \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\, dt$$

$$0 \le |F(x) - F(\bar{x})| = \left| \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\, dt \right| \le \int_{\bar{x}}^{x} |f(t)|\, dt \ \ *$$

siccome f è limitata, allora $\forall t \in [a, b] \ \ \exists M : |f(t)| \le M$

$$* \le \int_{\bar{x}}^{x} M\, dt = M(x - \bar{x})$$

per il teorema dei due carabinieri $\lim_{x \to \bar{x}} F(x) - F(\bar{x}) = 0$

- se f è continua in $\bar{x} \in (a, b)$ allora F è derivabile in $\bar{x}$ e $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$
supponendo f continua in $[a, b]$

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x}) \implies \frac{F(\bar{x} + h) - F(\bar{x})}{h} = \frac{\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\, dt}{h}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\, dt - f(\bar{x}) &= \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\, dt - \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(\bar{x})\, dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t) - f(\bar{x})\, dt \end{aligned}$$

f è continua in $\bar{x}$
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : 0 < |t - \bar{x}| < \delta \;\; |f(t) - f(\bar{x})| < \epsilon$
supponendo $h < \delta$
$|f(t) - f(\bar{x})| < \epsilon \;\; \forall t \in [\bar{x}, \bar{x} + h]$, quindi

$$\frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t) - f(\bar{x}) \, dt \leq \frac{1}{h} \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |f(t) - f(\bar{x})| \, dt \leq \epsilon$$

$f \in \mathrm{C}^k([a, b]) \implies F \in \mathrm{C}^{k+1}([a, b])$

Primitiva

Definizione

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$
Si dice primitiva di f in I una qualunque funzione $G : I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $G'(x) = f(x) \;\; \forall x \in I$

Ogni funzione continua ammette una primitiva e

- Se G è una primitiva di $f \implies G + c$ è una primitiva di $f \;\; \forall c \in \mathbb{R}$
- Se G_1 e G_2 sono primitive di $f \implies G_1 - G_2 = c \in \mathbb{R}$

Integrale indefinito

Definizione

L'integrale indefinito di f è l'insieme di tutte le primitive di f
$\int f(x) \, dx := \{G : G'(x) = f(x)\}$

Formula fondamentale del calcolo integrale

Formula

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, G primitiva di $f \implies$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G]_a^b = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f, anche G è una primitiva di f

$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c$

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Primitive fondamentali

Formule

$$\int \alpha\,dx = \alpha x + c$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + c$$

$$\int 1 + \tan^2(x)\,dx = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

Formula di integrazione per sostituzione

Formula

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, F primitiva di f in I
$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$, $\varphi \in \mathrm{C}^1([\alpha, \beta])$
$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(\varphi(t)) + c = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

se $\varphi(\alpha) = a \land \varphi(\beta) = b$, con $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)\,dt = dx$

Simmetrie negli integrali

Formule

$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$
Se f è pari, cioè $f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in [-a, a]$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,dx &= \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\end{aligned}$$

Se f è dispari, cioè $f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in [-a]$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)\,dx &= \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\ &= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0\end{aligned}$$

Integrazione per parti

Formula

$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Integrazione di funzioni razionali

Formule

$n \geq 0$, $m \geq 1$
Se $n \geq m$:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int S_{n-m}(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

Se $n < m$:

- $n = 0$, $m = 1$:

  $$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{a}{ax+b} = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + c$$

- $n \in \{0,1\}$, $m = 2$:

  $$\int \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \Delta = b^2-4ac$$

  - $\Delta > 0$:

    $$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

  - $\Delta = 0$:
    $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2 \quad t = x-x_0 \quad dt = dx$
  - $\Delta < 0$: portare alla forma dell'$\arctan$

Integrale generalizzato in un intervallo limitato

Definizione

$f : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a+\epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$
L'integrale improprio o generalizzato di f in (a,b) è

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito f è integrabile in senso generalizzato in (a,b) e l'integrale improprio è convergente, se il limite vale $\pm\infty$ l'integrale improprio è divergente

Integrale generalizzato in un intervallo illimitato

Definizione

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, M] \ \ \forall M > a$
L'integrale improprio o generalizzato di f in $(a, +\infty)$ è

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito f è integrabile in senso generalizzato in $(a, +\infty)$ e l'integrale improprio è convergente, se il limite vale $\pm\infty$ l'integrale improprio è divergente

Criterio del confronto

Teorema

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$, f, g integrabili in $[a, c] \ \ \forall c \in (a, b)$
Se $0 \le f(x) \le g(x) \ \ \forall x \in [a, b)$ si ha che:

- $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty \implies \int_a^b f(x)\,dx < +\infty$
- $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \implies \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

Teorema

$f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, f, g integrabili in $[a, c] \ \ \forall c \in (a, b)$
Se $f(x) > 0,\ g(x) > 0,\ f(x) \sim g(x)$ per $x \to b^- \implies$
$\int_a^b f(x)\,dx$ converge $\iff \int_a^b g(x)\,dx$ converge

Criterio di convergenza assoluta

Teorema

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge $\implies \int_a^b f(x)\,dx$ converge
Inoltre $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$