## Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^\alpha$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

## Derivate notevoli

$\mathrm{D}[x^n]=n\cdot x^{n-1}$
$\mathrm{D}[e^x]=e^x$
$\mathrm{D}[\ln(x)]=\frac{1}{x}$
$\mathrm{D}[\sin(x)]=\cos(x)$
$\mathrm{D}[\cos(x)]=-\sin(x)$
$\mathrm{D}[a^x]=a^x\ln(a)$

$$\mathrm{D}[\log_a(x)]=\frac{1}{x\ln(a)}$$

## Numeri complessi

- $z^{-1}=\frac{\bar z}{|z|}$
- $\overline{z+w}=\bar z+\bar w$
- $\overline{z\cdot w}=\bar z\cdot\bar w$
- $z+\bar z=2\mathrm{Re}(z)$
- $z-\bar z=2i\mathrm{Im}(z)$
- $|z|=0 \iff z=0$
- $|z+w|\le|z|+|w|$
- $z\cdot\bar z=|z|^2$
- $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$

## Integrali fondamentali

$$\int \alpha\,dx=\alpha x+c$$

$$\int x^\alpha\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+c$$

$$\int e^x\,dx=e^x+c$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln(a)}+c$$

$$\int \sin(x)\,dx=-\cos(x)+c$$

$$\int \cos(x)\,dx=\sin(x)+c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx=\tan(x)+c$$

$$\int 1+\tan^2(x)\,dx=\tan(x)+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan(x)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin(x)+c$$

## Sostituzioni notevoli

$$t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)\quad \cos(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin(t)=\frac{2}{1+t^2}\quad \arctan(t)=\frac{x}{2}$$

## Sviluppi di MacLaurin

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+o(x^n)$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$$

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n+1})$$

$$\arctan(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^n)$$

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\theta$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\sin(-x)=-\sin(x)$ | $\cos(-x)=\cos(x)$ | $\tan(-x)=-\tan(x)$ |
| $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\cos(x)$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin(x)$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\cot(x)$ |
| $\sin(\pi\pm x)=\mp\sin(x)$ | $\cos(\pi\pm x)=-\cos(x)$ | $\tan(\pi\pm x)=\pm\tan(x)$ |

| |
|---|
| $\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)$ |
| $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ |
| $\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$ |
| $\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\sin^2(x)-1$ |

## Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\begin{cases}+\infty, & 0<\alpha\le 1\\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha>1\end{cases}$$

## Serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=\begin{cases}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q\ne 1\\ n+1, & q=1\end{cases}$$

## Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni della forma $y'(t) = a(t) \cdot b(y(t))$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue ovvero la funzione $f(t, y(t))$ è del tipo $f(t, y) = a(t) \cdot b(y)$

$\exists \bar{y} \in \mathbb{R} : b(\bar{y}) = 0 \implies y(t) = \bar{y}$ è soluzione
$\nexists \bar{y} \in \mathbb{R} : b(\bar{y}) = 0 \implies$

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t) \implies \int \frac{y'(t)}{b(y(t))}\,dt = \int a(t)\,dt \implies z = y(t) \quad dz = y'(t)dt$$

$$\int \frac{dz}{b(z)} = \int a(t)\,dt \implies B(z) = A(t) + c \implies y(t) = B^{-1}(A(t) + c)$$

## Equazioni lineari del primo ordine

$$y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)} y(t) = \frac{g(t)}{a_1(t)} \quad y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Si cerca una soluzione dell'equazione omogenea $y'(t) + a(t)y(t) = 0$
$e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) = 0 \quad D[e^{A(t)}y(t)] = e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) \implies$
$e^{A(t)}y(t) = c \in \mathbb{R} \quad y(t) = c \cdot e^{-A(t)}$
Si cerca una soluzione dell'equazione completa $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$
$D[e^{A(t)}y(t)] = f(t)e^{A(t)} \quad F(t) = \int e^{A(t)} f(t)\,dt \implies e^{A(t)}y(t) = F(t) + c$
$y(t) = e^{-A(t)}(F(t) + c)$

## Equazioni lineari del secondo ordine

Considerando le equazioni della forma $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$
omogenee e a coefficienti costanti
Si cercano soluzioni della forma $y(t) = e^{rt}$
$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + cr^{rt} = 0 \quad e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \iff ar^2 + br + c = 0 \quad \Delta$

- $\Delta > 0$: $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $\Delta < 0$: $y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$: $y(t) = e^{\gamma t}(c_1 + tc_2) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

## Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}$$

Proprietà:

- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

## Criterio del rapporto

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$$

- $l > 1 \implies a_n \to +\infty$
- $l < 1 \implies a_n \to 0$

## Discontinuità

- Eliminabile in $x_0$ se esiste finito
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$
- A salto in $x_0$ se esistono finiti
  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$
- Essenziale negli altri casi

## Asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},\ q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

## Punti di non derivabilità

$f$ continua in $x_0$

- Punto angoloso: esistono finiti
  $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$
- Cuspide:
  $f'(x_0^+) = \pm\infty,\ f'(x_0^-) = \mp\infty$
- Punto a tangente verticale:
  $f'(x_0) = \pm\infty$

## $o(f(x))$

- $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $o(o(x^n)) = o(x^n)$
- $(o(x^\alpha))^\beta = o(x^{\alpha \cdot \beta})$
- $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$