Limiti

$D \subset \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$

Intorno

$a \in R$
L'intorno di x_0 di raggio r è l'intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$
L'intorno di $+\infty$ è l'intervallo $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
L'intorno di $-\infty$ è l'intervallo $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Punto di accumulazione

x_0 si dice punto di accumulazione per D se $\forall \delta > 0 \quad (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, equivalentemente $\forall \delta > 0\ \exists x \in D : 0 < |x - x_o| < \delta$

Limite finito in un punto

x_o punto di accumulazione per D
$l \in \mathbb{R}$ si dice limite di f per $x \to x_0$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\}\ |f(x) - l| < \epsilon$
e si indica con

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Funzione continua

$x_0 \in D$
Una funzione f è continua in x_0 se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\}\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
Ovvero f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Limite destro e sinistro

x_0 punto di accumulazione per D

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D\ \ |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D\ \ |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

Funzione continua da destra o da sinistra

$x_0 \in D$
Una funzione f è continua da destra in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
Una funzione f è continua da sinistra in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Limite infinito in un punto

x_0 punto di accumulazione per D

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \;\; f(x) > M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \;\; f(x) < -M$$

La retta $x = x_0$ è un'asintoto verticale per f

Limite all'infinito

D è illimitato:

- superiormente se $\forall k > 0 \, \exists x \in D : x > k$
- inferiormente se $\forall k > 0 \, \exists x \in D : x < -k$
  D illimitato superiormente

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists k > 0 : \forall x \in (k, +\infty) \cap D \;\; |f(x) - l| < \epsilon$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \, \exists k > 0 : \forall x \in (k, +\infty) \cap D \;\; f(x) > M$$

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \, \exists k > 0 : \forall x \in (k, +\infty) \cap D \;\; f(x) < -M$$

  D illimitato inferiormente

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \, \exists k > 0 : \forall x \in (-\infty, k) \cap D \;\; |f(x) - l| < \epsilon$$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \, \exists k > 0 : \forall x \in (-\infty, k) \cap D \;\; f(x) > M$$

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \, \exists k > 0 : \forall x \in (-\infty, k) \cap D \;\; f(x) < -M$$

Cambio di variabili

Se $\exists \lim_{x \to x_0} = y_0, \; g$ funzione definita in un intorno di y_0 tale che

- se $y_0 \in R$, g è continua in y_0
- se $y_0 = \pm\infty$, $\exists \lim_{y \to y_0} g(y)$
  allora

  $$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Continuità

$A \subset D$
f è continua in A se f è continua in $x_0 \;\; \forall x_0 \in A$
In questo caso $f \in C^0(A)$

Discontinuità

- Eliminabile in x_0 se esiste finito

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- A salto in x_0 se esistono finiti

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

- Essenziale negli altri casi

Limiti notevoli

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$