Proposizioni

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Massimo e minimo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- Può non esistere
- Se esiste è unico
- $M \in A$ si dice massimo per A ($M = \max(A)$) se $\forall x \in A\ M \geq x$
- $m \in A$ si dice minimo per A ($m = \min(A)$) se $\forall x \in A\ m \leq x$

Estremo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di A ($\bar{x} = \sup A$) se è il più piccolo dei maggioranti, ovvero

$$\begin{cases} \forall x \in A \ \ x \leq \bar{x} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x - \epsilon < \bar{x} \end{cases}$$

- $\underline{x} \in \mathbb{R}$ si dice estremo inferiore di A ($\underline{x} = \inf A$) se è il più grande dei minoranti, ovvero

$$\begin{cases} \forall x \in A \ \ x \geq \underline{x} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x - \epsilon > \underline{x} \end{cases}$$

Disuguaglianza triangolare

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

Trasformazioni di funzioni

- Riflessione rispetto all'asse delle x: $-f(x)$
- Riflessione rispetto all'asse delle y: $f(-x)$
- Valore assoluto di f: $|f(x)|$
- Parte positiva di f:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

- Parte negativa di f:

$$f_-(x) \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

- Traslazione verticale: $f(x) + a$
- Traslazione orizzontale: $f(x + a)$
- Riscalamento verticale: $k \cdot f(x)$
  - dilatazione se $k > 1$
  - compressione se $0 < k < 1$
- Riscalamento orizzontale: $f(k \cdot x)$
  - dilatazione se $0 < k < 1$
  - compressione se $k > 1$

Numeri complessi

- Forme:
  - Cartesiana: $z = x + yi$
  - Trigonometrica: $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$
  - Esponenziale: $z = |z|e^{i\theta}$
- Coniugato: $\bar{z} = x - iy$
- Modulo: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Reciproco: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|}$
- Somma:
  - $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Prodotto:
  - $z \cdot a = ax + iay$
  - $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Quoziente:
  - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$
  - $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$
- Elevamento a potenza:
  - $z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \theta) + i\sin(n \cdot \theta))$
  - $z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \theta}$
- Proprietà:
  - $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
  - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
  - $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
  - $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
  - $|z| = 0 \iff z = 0$
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Fattoriale

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Proprietà:

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- $$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}$$

Proprietà:

- $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
- Binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Successioni

- Limitatezza delle successioni convergenti: $a_n \to l \implies \forall n \in \mathbb{N}\ \exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M$
- Successione di Nepero:

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^{\alpha}$$

- Permanenza del segno: $x_n \to l > 0 \implies \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ x_n > 0$
- Confronto: $a_n \to a,\ b_n \to b\ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$
- Due carabinieri: $a_n \to a,\ b_n \to b\ \exists \bar{n} : a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \to l$
- Criterio del rapporto:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l$$

  - $l > 1 \implies a_n \to +\infty$
  - $l < 1 \implies a_n \to 0$
- Gerarchia di infiniti: $\log_a(n);\ n^\alpha;\ a^n;\ n!;\ n^n$

Limiti notevoli

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$
- $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$$
- $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Sin e cos

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

$\sin(-x)=-\sin(x)$	$\cos(-x)=\cos(x)$	$\tan(-x)=-\tan(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\sin(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}\pm x\right)=\mp\cot(x)$
$\sin(\pi\pm x)=\mp\sin(x)$	$\cos(\pi\pm x)=-\cos(x)$	$\tan(\pi\pm x)=\pm\tan(x)$

$\sin(x\pm y)=\sin(x)\cos(x)\pm\cos(x)\sin(y)$
$\cos(x\pm y)=\cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y)$
$\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\sin^2(x)-1$