

Proposizioni

<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>P</i> $\implies$ <i>Q</i>
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>P</i> $\iff$ <i>Q</i>
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Massimo e minimo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- Può non esistere
- Se esiste è unico
- $M \in A$  si dice massimo per  $A$  ( $M = \max(A)$ ) se  $\forall x \in A \ M \geq x$
- $m \in A$  si dice minimo per  $A$  ( $m = \min(A)$ ) se  $\forall x \in A \ m \leq x$

Estremo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- $\bar{x} \in \mathbb{R}$  si dice estremo superiore di  $A$  ( $\bar{x} = \sup A$ ) se è il più piccolo dei maggioranti, ovvero
$$\begin{cases} \forall x \in A \ x \leq \bar{x} \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in A : x - \epsilon < \bar{x} \end{cases}$$
- $\underline{x} \in \mathbb{R}$  si dice estremo inferiore di  $A$  ( $\underline{x} = \inf A$ ) se è il più grande dei minoranti, ovvero
$$\begin{cases} \forall x \in A \ x \geq \underline{x} \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in A : x - \epsilon > \underline{x} \end{cases}$$

Disuguaglianza triangolare

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

Trasformazioni di funzioni

- Riflessione rispetto all'asse delle x:  $-f(x)$
- Riflessione rispetto all'asse delle y:  $f(-x)$
- Valore assoluto di f:  $|f(x)|$
- Parte positiva di f:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

- Parte negativa di f:

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & f(x) \leq 0 \\ 0 & f(x) > 0 \end{cases}$$

- Traslazione verticale:  $f(x) + a$
- Traslazione orizzontale:  $f(x + a)$
- Riscaldamento verticale:  $k \cdot f(x)$ 
  - dilatazione se  $k > 1$
  - compressione se  $0 < k < 1$
- Riscaldamento orizzontale:  $f(k \cdot x)$ 
  - dilatazione se  $0 < k < 1$
  - compressione se  $k > 1$

Numeri complessi

- Forme:
  - Cartesiana:  $z = x + yi$
  - Trigonometrica:  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$
  - Esponenziale:  $z = |z|e^{i\theta}$
- Coniugato:  $\bar{z} = x - iy$
- Modulo:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Reciproco:  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|}$
- Somma:
  - $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Prodotto:
  - $z \cdot a = ax + iay$
  - $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Quoziente:
  - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
  - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
- Elevamento a potenza:
  - $z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta))$
  - $z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \theta}$
- Proprietà:
  - $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
  - $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
  - $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
  - $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$
  - $|z| = 0 \iff z = 0$
  - $|z + w| \leq |z| + |w|$
  - $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
  - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Fattoriale

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Proprietà:

- $n! = n \cdot (n - 1)!$
- $\frac{n!}{(n - k)!} = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$

Coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - 1)!} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k - 1)}{k!}$$

Proprietà:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n - 1}{k - 1} + \binom{n - 1}{k}$
- Binomio di Newton

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Successioni

- Limitatezza delle successioni convergenti:
$$a_n \rightarrow l \implies \forall n \in \mathbb{N} \ \exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M$$
- Successione di Nepero:

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^\alpha$$

- Permanenza del segno:
$$x_n \rightarrow l > 0 \implies \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ x_n > 0$$
- Confronto:
$$a_n \rightarrow a, \ b_n \rightarrow b \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ a_n \leq b_n \implies a \leq b$$
- Due carabinieri:

$$a_n \rightarrow a, \ b_n \rightarrow b \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \ a_n \leq c_n \leq b_n \implies c_n \rightarrow l$$

- Criterio del rapporto:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n > 0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$$

- $l > 1 \implies a_n \rightarrow +\infty$
- $l < 1 \implies a_n \rightarrow 0$
- Gerarchia di infiniti:  $\log_a(n)$ ;  $n^\alpha$ ;  $a^n$ ;  $n!$ ;  $n^n$

Limiti notevoli

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Sin e cos

$\theta$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \cot(x)$
$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin(x)$	$\cos(\pi \pm x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi \pm x) = \pm \tan(x)$

$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \sin^2(x) - 1$