Numeri complessi

Coppie ordinate di numeri reali

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è definito come l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali:
$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$
L'insieme dei numeri complessi contiene l'insieme dei numeri reali ($\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$)

Casi particolari

Convenzionalmente si identificano le coppie $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ con x
Convenzionalmente si chiamano le coppie $(0, y) \in \mathbb{R}^2$ numeri immaginari puri
In particolare il numero complesso $(0, 1)$ è detto unità immaginaria e lo si denota con i

Parte reale e parte immaginaria

Se $z = (x, y)$ si indicano con

- $x = \mathrm{Re}(z)$ la parte reale di z
- $y = \mathrm{Im}(z)$ la parte immaginaria di z
  Somma: $z_1 + z_2 = (x_1, y_2) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$
  Prodotto per $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot z = a \cdot (x, y) = (ax, ay)$

Forma cartesiana

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + iy$

Operazioni

- Somma: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Prodotto per $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot z = ax + iay$
- Prodotto di due numeri complessi: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

Coniugato

$\bar{z} = x - iy$

Modulo

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Proprietà

- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z+w| \leq |z| + |w|$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Reciproco

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Forma trigonometrica

Un punto si può individuare anche indicando la sua distanza dall'origine $\rho \geq 0$ e l'angolo formato con l'asse delle x $\theta \in [0, 2\pi)$
La coppia (ρ, θ) sono le coordinate polari associate al punto

$$\begin{cases} y = \rho \sin(\theta) \\ x = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \\ \theta = \mathrm{Arg}(z) \end{cases}$$

Operazioni

- Prodotto: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
- Quoziente:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

- Elevamento a potenza: $z^n = |z|^n(\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta))$

Forma esponenziale

Esponenziale complesso: $e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$
Osservazione: $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$

Operazioni

- Prodotto: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$
- Quoziente:

  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

- Elevamento a potenza: $z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \theta}$

Risoluzione di equazioni

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Radici di numeri complessi

Sia $n \in N, n > 2$, dato $w \in \mathbb{C}, w \neq 0, w = |w|e^{i\theta}$, un numero complesso $z \in \mathbb{C}, z = |z|e^{i\alpha}$ è una radice n-esima di w se $z^n = w$
$z^n = |z|^n e^{i \cdot n \cdot \alpha}$

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \\ n \cdot \alpha = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} = |w|^{1/n} \\ \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione di grado $n \geq 1$ in $\mathbb{C}$
$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_k \in C, \ a_n \neq 0$
ha esattamente n soluzioni