Equazioni differenziali ordinarie

Equazione differenziale

Definizione

$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)(t)}) = 0$
$F : A \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ con $y(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Una funzione $y(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale se è derivabile n volte e tale che
$(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \in A$ e $F(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \ \ \forall t \in I$
La soluzione generale è l'insieme di tutte le soluzioni
n si definisce ordine dell'equazione differenziale

Problema di Cauchy

Definizione

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si chiama problema di Cauchy un sistema composto da un'equazione differenziale in forma normale e una condizione iniziale

Esistenza e unicità locale

Teorema

$R = [a, b] \times [c, d]$, $(t_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$, $f : R \to \mathbb{R}$
Se f

- è continua nella variabile t, ovvero $\forall y \in (c, d) \ t \to f(t, y)$ è continua
- è lipschitziana nella variabile y uniformemente rispetto a t, ovvero $\exists L \geq 0$ (costante di Lipschitz di f) $: \forall (t, y_1), (t, y_2) \in R \ \ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

allora esiste un'unica soluzione locale del problema di Cauchy, ovvero esiste un intervallo aperto $I \subset [a, b]$, $t_0 \in I$ ed esiste un'unica funzione $y : I \to \mathbb{R}$ che risolve il problema di Cauchy su I

Equazioni a variabili separabili

Formula

Sono equazioni della forma $y'(t) = a(t) \cdot b(y(t))$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ continue
ovvero la funzione $f(t, y(t))$ è del tipo $f(t, y) = a(t) \cdot b(y)$

$\exists \bar{y} \in \mathbb{R} : b(\bar{y}) = 0 \implies y(t) = \bar{y}$ è soluzione
$\nexists \bar{y} \in \mathbb{R} : b(\bar{y}) = 0 \implies$

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t) \implies \int \frac{y'(t)}{b(y(t))}\, dt = \int a(t)\, dt \implies z = y(t) \quad dz = y'(t)dt$$

$$\int \frac{dz}{b(z)} = \int a(t)\, dt \implies B(z) = A(t) + c \implies y(t) = B^{-1}(A(t) + c)$$

Equazioni lineari del primo ordine

Formula

Sono equazioni della forma $a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$, $a_1(t), a_0(t) : I \to \mathbb{R}$ continue
Se $a_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$$y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t) = \frac{g(t)}{a_1(t)} \quad y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Se $f(t) = 0$ l'equazione è omogenea, altrimenti è completa
La soluzione generale dell'equazione completa si ottiene sommando la soluzione generale dell'equazione associata ($f = 0$) a una qualunque soluzione dell'equazione completa
Si cerca una soluzione dell'equazione omogenea $y'(t) + a(t)y(t) = 0$
$e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) = 0 \quad D[e^{A(t)}y(t)] = e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) \implies$
$e^{A(t)}y(t) = c \in \mathbb{R} \quad y(t) = c \cdot e^{-A(t)}$
Si cerca una soluzione dell'equazione completa $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$
$D[e^{A(t)}y(t)] = f(t)e^{A(t)} \quad F(t) = \int e^{A(t)}f(t)\, dt \implies e^{A(t)}y(t) = F(t) + c$
$y(t) = e^{-A(t)}(F(t) + c)$

Sono dette equazioni lineari perché della forma $L(y(t)) = f(t)$, $L(y(t)) = y'(t) + ay(t)$ e
$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g)$

Equazioni lineari del secondo ordine

Formula

Sono equazioni della forma $a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$
Se $g(t) = 0$ l'equazione è omogenea, altrimenti è completa
Se $a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ sono costanti l'equazione si dice a coefficienti costanti
Se $a_2(t) \neq 0 \ \ \forall t \in I$

$$y''(t) + \frac{a_1(t)}{a_2(t)}y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_2(t)}y(t) = \frac{g(t)}{a_2(t)} \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

Se $a(t), b(t), f(t)$ sono continue su I, $t_0 \in I$, allora $\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \\ y'(t_0) = y_1 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y(t) \in C^2(I)$
Considerando le equazioni della forma $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ omogenee e a coefficienti costanti
Si cercano soluzioni della forma $y(t) = e^{rt}$
$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + cr^{rt} = 0 \quad e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \iff ar^2 + br + c = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$

- $\Delta > 0$:
  r_1, r_2 soluzioni reali distinte
  La soluzione generale è $y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $\Delta < 0$:
  $r_1 = \alpha + i\beta, \ r_2 = \alpha - i\beta$ soluzioni complesse coniugate
  $e^{r_1t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$
  La soluzione generale è $y(t) = e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)) \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $\Delta = 0$:
  $r_1 = r_2 = \gamma$ soluzioni reali coincidenti
  La soluzione generale è $y(t) = e^{\gamma t}(c_1 + tc_2) \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$