

Equazioni differenziali ordinarie

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$$

$$F : A \subset \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } y(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Una funzione $y(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale se è derivabile n volte e tale che $(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) \in A$ e $F(t, y(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

La soluzione generale è l'insieme di tutte le soluzioni

n si definisce ordine dell'equazione differenziale

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Si chiama problema di Cauchy un sistema composto da un'equazione differenziale in forma normale e una condizione iniziale

Esistenza e unicità locale

$$R = [a, b] \times [c, d], (t_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d), f : R \rightarrow \mathbb{R}$$

Se f

- è continua nella variabile t , ovvero $\forall y \in (c, d) \quad t \rightarrow f(t, y)$ è continua
- è lipschitziana nella variabile y uniformemente rispetto a t , ovvero $\exists L \geq 0$ (costante di Lipschitz di f)
: $\forall (t, y_1), (t, y_2) \in R \quad |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

allora esiste un'unica soluzione locale del problema di Cauchy, ovvero esiste un intervallo aperto $I \subset [a, b]$, $t_0 \in I$ ed esiste un'unica funzione $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ che risolve il problema di Cauchy su I

Equazioni a variabili separabili

Sono equazioni della forma $y'(t) = a(t) \cdot b(y(t))$, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue
ovvero la funzione $f(t, y(t))$ è del tipo $f(t, y) = a(t) \cdot b(y)$

$$\exists \bar{y} \in \mathbb{R} : b(\bar{y}) = 0 \implies y(t) = \bar{y} \text{ è soluzione}$$

$$\nexists \bar{y} \in \mathbb{R} : b(\bar{y}) = 0 \implies$$

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t) \implies \int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt \implies z = y(t) \quad dz = y'(t) dt$$

$$\int \frac{dz}{b(z)} = \int a(t) dt \implies B(z) = A(t) + c \implies y(t) = B^{-1}(A(t) + c)$$

Equazioni lineari del primo ordine

Sono equazioni della forma $a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$, $a_1(t), a_0(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Se $a_1(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$$y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_1(t)}y(t) = \frac{g(t)}{a_1(t)} \quad y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$

Se $f(t) = 0$ l'equazione è omogenea, altrimenti è completa

La soluzione generale dell'equazione completa si ottiene sommando la soluzione generale dell'equazione associata ($f = 0$) a una qualunque soluzione dell'equazione completa

Si cerca una soluzione dell'equazione omogenea $y'(t) + a(t)y(t) = 0$

$$e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) = 0 \quad D[e^{A(t)}y(t)] = e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) \implies \\ e^{A(t)}y(t) = c \in \mathbb{R} \quad y(t) = c \cdot e^{-A(t)}$$

Si cerca una soluzione dell'equazione completa $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$

$$D[e^{A(t)}y(t)] = f(t)e^{A(t)} \quad F(t) = \int e^{A(t)}f(t) dt \implies e^{A(t)}y(t) = F(t) + c \\ y(t) = e^{-A(t)}(F(t) + c)$$

Sono dette equazioni lineari perché della forma $L(y(t)) = f(t)$, $L(y(t)) = y'(t) + ay(t)$ e

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g)$$

Equazioni lineari del secondo ordine

Sono equazioni della forma $a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$

Se $g(t) = 0$ l'equazione è omogenea, altrimenti è completa

Se $a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ sono costanti l'equazione si dice a coefficienti costanti

Se $a_2(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$$y''(t) + \frac{a_1(t)}{a_2(t)}y'(t) + \frac{a_0(t)}{a_2(t)}y(t) = \frac{g(t)}{a_2(t)} \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$$

Se $a(t), b(t), f(t)$ sono continue su $I, t_0 \in I$, allora $\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \\ y'(t_0) = y_1 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y(t) \in C^2(I)$

Considerando le equazioni della forma $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ omogenee e a coefficienti costanti

Si cercano soluzioni della forma $y(t) = e^{rt}$

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + cr^{rt} = 0 \quad e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0 \iff ar^2 + br + c = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0$:

r_1, r_2 soluzioni reali distinte

La soluzione generale è $y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- $\Delta < 0$:

$r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ soluzioni complesse coniugate

$$e^{r_1t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))$$

La soluzione generale è $y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- $\Delta = 0$:

$r_1 = r_2 = \gamma$ soluzioni reali coincidenti

La soluzione generale è $y(t) = e^{\gamma t}(c_1 + tc_2) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$