Linguaggio matematico

Insiemi

- Definizione: $A := \{1, 2, 3, 4\}$
- Appartiene: $2 \in A$
- Non appartiene: $7 \notin A$
- Unione: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- Intersezione: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- Differenza: $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- Insieme vuoto: $V := \emptyset$
- Contenuto: $A \subset B \iff \forall x \in A\ x \in B$
- Contenuto strettamente: $A \subsetneq B \iff A \subset B \wedge \exists x \in B : x \notin A$
- Uguaglianza: $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

Proposizioni

- Proposizione: $P = \text{"3 è un numero pari"}$ è falsa
- Predicato: $P(x) = \text{"}x\text{ è un numero pari"}$
- Implicazione: $P \implies Q$
  - Ipotesi: P
  - Tesi: Q
  - se P allora Q
  - Q solo se P
- Doppi implicazione: $P \iff Q$
  - P equivale a Q
- Leggi di De Morgan:
  - $\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$
  - $\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$
- Quantificatore esistenziale: $\exists$
- Quantificatore universale: $\forall$
- Negazione di una proposizione contente quantificatori:
  - $\neg(\forall x \in A, P(x)) \iff \exists x \in A : \neg P(x)$
  - $\neg(\exists x \in A : P(x)) \iff \forall x \in A, \neg P(x)$

Maggiorante e minorante

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- $M \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante per A se $\forall x \in A\ M \geq x$
- $m \in \mathbb{R}$ si dice minorante per A se $\forall x \in A\ m \leq x$
- A si dice limitato:
  - superiormente se ammette almeno un maggiorante
  - inferiormente se ammette almeno un minorante
  - se è limitato sia superiormente che inferiormente

Massimo e minimo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- Può non esistere
- Se esiste è unico
- $M \in A$ si dice massimo per A ($M = \max(A)$) se $\forall x \in A\ M \geq x$
- $m \in A$ si dice minimo per A ($m = \min(A)$) se $\forall x \in A\ m \leq x$

Estremo

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

- $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice estremo superiore di A ($\bar{x} = \sup A$) se è il più piccolo dei maggioranti, ovvero

  $$\begin{cases} \forall x \in A \ \ x \leq \bar{x} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x - \epsilon < \bar{x} \end{cases}$$

- $\underline{x} \in \mathbb{R}$ si dice estremo inferiore di A ($\underline{x} = \inf A$) se è il più grande dei minoranti, ovvero

  $$\begin{cases} \forall x \in A \ \ x \geq \underline{x} \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x \in A : x - \epsilon > \underline{x} \end{cases}$$

Assioma di completezza di $\mathbb{R}$

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
se A è limitato superiormente, allora $\exists \sup A \in \mathbb{R}$

Proprietà di Archimede

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$, ovvero $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$a, b \in \mathbb{R},\ a < b\ \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$