

Funzioni

Funzione

Definizione

$$D \neq \emptyset, C \neq \emptyset$$

Una funzione $f : D \rightarrow C$ è una corrispondenza (sottoinsieme dell'insieme

$D \times C := \{(x, y) : x \in D, y \in C\}$) che associa ad ogni elemento $x \in D$ uno ed un solo elemento $y \in C$ che si indica con $f(x)$ e si dice valore o immagine di f in x

$$\forall x \in D \exists! y \in C : y = f(x)$$

- Dominio: D
- Variabile indipendente: x
- Codominio: C
- Variabile dipendente: $y = f(x)$
- Immagine: $\text{Im}(f) = f(D) = \{f(x) : x \in D\} \subset C$
- Una funzione si dice limitata
 - superiormente se $\forall x \in D \exists M \in \mathbb{R} : M \geq f(x)$
 - inferiormente se $\forall x \in D \exists m \in \mathbb{R} : m \leq f(x)$
 - se è limitata sia superiormente che inferiormente

Iniettiva, suriettiva, biiettiva

Definizione

Una funzione f si dice:

- Iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$, equivalentemente $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- Suriettiva se $\forall y \in C \exists x \in D \mid y = f(x)$, ovvero $\text{Im}(f) = C$
- Biiettiva se $\forall y \in C \exists! x \in D \mid y = f(x)$, ovvero se è sia iniettiva che suriettiva

Composizione di funzioni

Definizione

$$f : D_f \rightarrow C_f, g : D_g \rightarrow C_g$$

Se $C_f \subset D_g$ (quindi $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$) si può definire la composizione

$$g \circ f : D_f \rightarrow C_g, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Funzione inversa

Definizione

Se f è biiettiva si può definire la funzione inversa $f^{-1} : C \rightarrow D, x = f^{-1}(y)$

Grafico

Definizione

$\text{Gr}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D, y = f(x)\}$
 $(x, y) \in \text{Gr}(f) \iff (y, x) \in \text{Gr}(f^{-1})$

Simmetrica

Definizione

Una funzione f è:

- Pari se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$
- Dispari se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$
- Periodica se $\exists t \in \mathbb{R} \mid f(x+t) = f(x) \quad \forall x \in D$

Monotona

Definizione

Una funzione f si dice:

- Crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- Strettamente crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- Decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- Strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

Disuguaglianza triangolare

Formule

La funzione modulo ha la seguente proprietà:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$