Integrali

Somma superiore e inferiore

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} = b$
$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ qualunque partizione di $[a, b]$

$$m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Le somme superiore e inferiore

$$S^-(D, f) := \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \quad S^+(D, f) := \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

sono approssimazioni dell'area sottesa al grafico per difetto e per eccesso
Pertanto

$$(b-a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq S^-(D, f) \leq S^+(D, f) \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Le approssimazioni migliori sono la più grande per difetto e la più piccola per eccesso

$$\sup_D S^-(D, f) := \sup\{S^-(D, f) : D \text{ partizione di } [a, b]\}$$

$$\inf_D S^+(D, f) := \inf\{S^+(D, f) : D \text{ partizione di } [a, b]\}$$

Funzione integrabile

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata

$$\sup_D S^-(D, f) = \inf_D S^+(D, f) \implies$$

f è integrabile secondo Riemann
Il valore comune è detto integrale di Riemann di f in $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Criteri di integrabilità

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua $\implies$ f è integrabile
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona $\implies$ f è integrabile
- $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ sono integrabili $\implies$

  $$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ x \in [a, b] \\ f_2(x), \ x \in (b, c] \end{cases}$$

  è integrabile

Proprietà dell'integrale

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili in $[a,b]$

- linearità: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \alpha f + \beta g$ è integrabile e

  $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- addittività rispetto al dominio di integrazione: $r \in (a,b)$

  $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^r f(x)\, dx + \int_r^b f(x)\, dx$$

- positività: se $f \geq_0$ in $[a,b] \implies \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$
- monotonia: se $f \geq g$ in $[a,b] \implies \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$
- $$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$
- $$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \implies \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

Teorema della media

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata
$m := \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$
$m(b-a) \leq S^-(D,f) \leq S^+(D,f) \leq M(b-a)$
Se f è integrabile in $[a,b] \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$
Se f è continua in $[a,b] \implies \exists x_0 \in [a,b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = f(x_0)$

Funzione integrale

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $x_0 \in [a,b]$
La funzione integrale di f con punto base x_0 è $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt \;\; \forall x \in [a,b]$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $x_0 \in [a,b]$
$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ funzione integrale di $f \implies$

- F è continua in $[a,b]$
- se f è continua in $\bar{x} \in (a,b)$ allora F è derivabile in $\bar{x}$ e $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$

Dimostrazione:

- F è continua in $[a,b]$

  $$F(x) - F(\bar{x}) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\bar{x}} f(t)\,dt = \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt$$

  $$0 \le |F(x) - F(\bar{x})| = \left|\int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt\right| \le \int_{\bar{x}}^{x} |f(t)|\,dt \ \ *$$

  siccome f è limitata, allora $\forall t \in [a,b] \ \ \exists M : |f(t)| \le M$

  $$* \le \int_{\bar{x}}^{x} M\,dt = M(x - \bar{x})$$

  per il teorema dei due carabinieri $\lim_{x \to \bar{x}} F(x) - F(\bar{x}) = 0$
- se f è continua in $\bar{x} \in (a,b)$ allora F è derivabile in $\bar{x}$ e $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$
  supponendo f continua in $[a,b]$

  $$\lim_{h \to 0} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x}) \quad \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = \frac{\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt}{h}$$

  $$\frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - f(\bar{x}) = \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(\bar{x})\,dt = \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t) - f(\bar{x})\,dt$$

  f è continua in $\bar{x}$
  $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : 0 < |t - \bar{x}| < \delta \ \ |f(t) - f(\bar{x})| < \epsilon$
  supponendo $h < \delta$
  $|f(t) - f(\bar{x})| < \epsilon \ \ \forall t \in [\bar{x}, \bar{x}+h]$, quindi

  $$\frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f(t) - f(\bar{x})\,dt \le \frac{1}{h}\int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} |f(t) - f(\bar{x})|\,dt \le \epsilon$$

$f \in \mathrm{C}^k([a,b]) \implies F \in \mathrm{C}^{k+1}([a,b])$

Primitiva

$I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$
Si dice primitiva di f in I una qualunque funzione $G : I \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $G'(x) = f(x) \ \ \forall x \in I$

Ogni funzione continua ammette una primitiva e

- Se G è una primitiva di $f \implies G + c$ è una primitiva di $f \ \ \forall c \in \mathbb{R}$
- Se G_1 e G_2 sono primitive di $f \implies G_1 - G_2 = c \in \mathbb{R}$

Integrale indefinito

L'integrale indefinito di f è l'insieme di tutte le primitive di f
$\int f(x)\,dx := \{G : G'(x) = f(x)\}$

Formula fondamentale del calcolo integrale

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, G primitiva di $f \implies$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G]_a^b = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione:
per il teorema fondamentale del calcolo integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f, anche G è una primitiva di f
$\exists c \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + c$
$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Primitive fondamentali

$$\int \alpha\,dx = \alpha x + c$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + c$$

$$\int 1 + \tan^2(x)\,dx = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

Formula di integrazione per sostituzione

$f : I \to \mathbb{R}$, F primitiva di f in I
$\varphi : [a, b] \to I$, $\varphi \in \mathrm{C}^1([a, b])$
$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$
$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = F(\varphi(x)) + c = \int f(t)\, dt$ con $\varphi(x) = t$, $\varphi'(x)\, dx = dt$

Simmetrie negli integrali

$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$

- Se f è pari, cioè $f(-x) = f(x) \;\; \forall x \in [-a, a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{-a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx =$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$

- Se f è dispari, cioè $f(-x) = -f(x) \;\; \forall x \in [-a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = -\int_{0}^{-a} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx =$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Integrazione per parti

$\int f'(x)g(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$

$$\int_{a}^{b} f'(x)g(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_{a}^{b} f(x)g'(x)\, dx$$

Integrazione di funzioni razionali

$n \geq 0$, $m \geq 1$
Se $n \geq m$:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int S_{n-m}(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

Se $n < m$:

- $n = 0$, $m = 1$:

  $$\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\int \frac{a}{ax+b} = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + c$$

- $n \in \{0,1\}$, $m = 2$:

  $$\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

  - $\Delta > 0$:

    $$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

  - $\Delta = 0$:
    $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2 \quad t = x - x_0 \quad dt = dx$
  - $\Delta < 0$: portare alla forma dell'$\arctan$

Integrale generalizzato in un intervallo limitato

$f : (a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a+\epsilon, b]\ \ \forall \epsilon > 0$
L'integrale improprio o generalizzato di f in (a,b) è

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito f è integrabile in senso generalizzato in (a,b) e l'integrale improprio è convergente, se il limite vale $\pm\infty$ l'integrale improprio è divergente

Integrale generalizzato in un intervallo illimitato

$f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a, M]\ \ \forall M > a$
L'integrale improprio o generalizzato di f in $(a, +\infty)$ è

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$

Se il limite esiste finito f è integrabile in senso generalizzato in $(a, +\infty)$ e l'integrale improprio è convergente, se il limite vale $\pm\infty$ l'integrale improprio è divergente

Criterio del confronto

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$, f, g integrabili in $[a,c]\ \ \forall c \in (a,b)$
Se $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in [a,b)$ si ha che:

- $\int_a^b g(x)\, dx < +\infty \implies \int_a^b f(x)\, dx < +\infty$
- $\int_a^b f(x)\, dx = +\infty \implies \int_a^b g(x)\, dx = +\infty$

Criterio del confronto asintotico

$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty]$, f, g integrabili in $[a,c]\ \ \forall c \in (a,b)$
Se $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $f(x) \sim g(x)$ per $x \to b^- \implies$
$\int_a^b f(x)\, dx$ converge $\iff \int_a^b g(x)\, dx$ converge

Criterio di convergenza assoluta

$\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge $\implies \int_a^b f(x)\, dx$ converge
Inoltre $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$