Derivate

$f : (a, b) \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a, b)$

f è derivabile in x_0 se esiste finito

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Derivata destra:

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivata sinistra:

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f derivabile in $x_0 \implies$ ammette retta tangente con equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Derivabilità implica continuità

f derivabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0

Punti di non derivabilità

f continua in x_0

- Punto angoloso: x_0 è detto punto angoloso se esistono finiti $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$
- Cuspide: x_0 è detto cuspide se $f'(x_0^+) = \pm\infty,\ f'(x_0^-) = \mp\infty$
- Punto a tangente verticale: x_0 è detto punto a tangente verticale se $f'(x_0) = \pm\infty$

Derivate di funzioni elementari

- $\mathrm{D}[x^n] = n \cdot x^{n-1}$
- $\mathrm{D}[e^x] = e^x$
- $\mathrm{D}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$
- $\mathrm{D}[\sin(x)] = \cos(x)$
- $\mathrm{D}[\cos(x)] = -\sin(x)$

Linearità della derivata

$f(x), g(x)$ derivabili in x_0
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare $af(x) + bg(x)$ è derivabile in x_o e $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$

Regola di Leibnitz

$f(x), g(x)$ derivabili in x_0
La funzione prodotto $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0 e $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Regola della catena

$g(x)$ derivabile in x_0, $f(x)$ derivabile in $y_0 = g(x_0)$
La composizione $f \circ g$ è derivabile in x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$

Derivata della funzione inversa

$f(x)$ invertibile su (a, b) e derivabile in $x_0 \in (a, b)$ con $f'(x_0) \neq 0$
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \;\; \forall x \in (a, b)$
$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$

f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivata del quoziente

$f(x), g(x)$ derivabili in x_0 con $g(x_0) \neq 0$
La funzione quoziente $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Derivate notevoli

- $\mathrm{D}[a^x] = a^x \ln(a)$
- $\mathrm{D}[\log_a(x)] = \dfrac{1}{x \ln(a)}$

Massimo e minimo relativo

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
x_0 è un punto di

- minimo relativo per f se $\forall x \in D \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \;\; f(x) \geq f(x_0)$
- massimo relativo per f se $\forall x \in D \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| \leq \delta \;\; f(x) \leq f(x_0)$

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ punto di massimo o minimo relativo per f
f derivabile in $x_0 \implies f'(x_0) = 0$

Punto critico

x_0 è un punto critico per f se $f'(x_0) = 0$

Teorema di Rolle

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b)
$f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$

Teorema di Lagrange

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b)

$$\implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione:

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$g(a) = f(a) - 0 = f(a)$
$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$
Soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle $\implies \exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Funzione monotona

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile

- f è monotona crescente su $(a, b) \iff f'(x) \geq 0$
- f è monotona decrescente su $(a, b) \iff f'(x) \leq 0$
- f è costante su $(a, b) \iff f'(x) = 0$

Teorema di De L'Hospital

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a, b) tali che

- $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$
- $$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0, \pm\infty$$
- $$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\implies \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Derivata seconda e successive

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a, b) \implies f' : (a, b) \to \mathbb{R}$
f' derivabile in $x_0 \implies$

$$f''(x_0) = D^2[f(x_0)] := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Concavità

Insiemi convessi

$E \subset \mathbb{R}^2$ si dice convesso se il segmento che connette $p_1, p_2 \in E$ è tutto contenuto in E

Sopragrafico

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b),\ y \geq f(x)\}$ è detto sopragrafico o epigrafico di f

Funzione convessa

Una funzione il cui sopragrafico è convesso è detta convessa
Una funzione f si dice concava se $-f$ è convessa
f derivabile due volte:

- f è convessa $\iff f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in (a, b)$
- f è concava $\iff f''(x) \leq 0\ \ \forall x \in (a, b)$

Punto di flesso

f derivabile in x_0
x_0 si dice punto di flesso se $\exists \delta > 0$: f è convessa in $(x_0 - \delta, x_0)$ e concava in $(x_0, x_0 + \delta)$ o viceversa

Asintoto

Orizzontale

Se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

allora $y = l$ è un asintoto orizzontale di f

Verticale

Se

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

allora $x = x_0$ è un asintoto verticale di f

Obliquo

Se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,\ \exists m \neq 0, q : \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

allora $y = mx + q$ è un asintoto obliquo di f

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x},\ q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$