

Successioni

Successione

Definizione

Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ denotata con $a_n = f(n)$, la sua immagine si indica con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Grafico

$$\text{Gr}(f) = G_f := \{(n, f(n)), n \in \mathbb{N}\}$$

Fattoriale

Definizione

$a_n = n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ si chiama successione fattoriale ed è strettamente crescente, infatti:

$$a_n < a_{n+1} \implies n! < (n+1)! \implies n! < (n+1) \cdot (n+1-1)! \implies n! < (n+1) \cdot n! \implies 1 < n+1$$

Per definizione $0! = 1$

Formule

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Coefficiente binomiale

Definizione

$$n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Formule

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Binomio di Newton

Definizione

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Successione geometrica

Definizione

Dato $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ la successione geometrica di ragione q è definita come la successione $a_n = q^n$

Il rapporto tra un termine della successione e il precedente è costante $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

La somma dei primi $n+1$ termini della successione geometrica con $q \neq 0$ si calcola con:

$$S_n := \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, & q \neq 1 \\ n+1, & q = 1 \end{cases}$$

Limite di una successione

Definizione

$$(n \rightarrow +\infty)$$

$$a_n \rightarrow 0 \iff \forall \epsilon > 0 \exists v_\epsilon \in \mathbb{R} : \forall n > v_\epsilon \quad -\epsilon < a_n < \epsilon$$

$$a_n \rightarrow +\infty \iff \forall \epsilon > 0 \exists v_\epsilon \in \mathbb{R} : \forall n > v_\epsilon \quad a_n > \epsilon$$

$$a_n \rightarrow -\infty \iff \forall \epsilon > 0 \exists v_\epsilon \in \mathbb{R} : \forall n > v_\epsilon \quad a_n < -\epsilon$$

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \iff a_n - l \rightarrow 0$$

Unicità del limite

$$a_n \rightarrow x, a_n \rightarrow y \iff x = y$$

Limitatezza delle successioni convergenti

$$a_n \rightarrow l \iff \forall n \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{R} : |a_n| \leq M$$

Sottosuccessioni

Definizione

Una successione $(n_n)_n$ è detta sottosuccessione di $(a_n)_n$ e si ha $\forall n \in \mathbb{N} \ b_n = a_{\Phi(n)}$, dove $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione strettamente crescente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l$$

Non esistenza del limite

Se una successione a_n ammette due sottosuccessioni distinte le quali hanno due limiti distinti, allora a_n non ha limite

Monotonia

Definizione

Una successione a_n si dice

- Crescente se $a_n \leq a_{n+1}$
- Strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$
- Decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$
- Strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$

Sia a_n crescente, allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Analogamente, sia a_n decrescente, allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$$

Successione di Nepero

Definizione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

La successione di Nepero è strettamente crescente e limitata

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{a_n}\right)^{a_n} = e^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Permanenza del segno

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} > 0 \implies \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Confronto

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \implies a \leq b$$

Due carabinieri

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \implies c_n \rightarrow l$$

Algebra dei limiti finiti

Formule

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$$

Somma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$$

Prodotto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

Quoziente ($b \neq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Potenza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

Criterio del rapporto:

Teorema

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$$

- $l > 1 \implies a_n \rightarrow +\infty$
- $l < 1 \implies a_n \rightarrow 0$
- $l = 0$ non si può concludere nulla

Gerarchia di infiniti

Teorema

$$\alpha > 0, a > 0$$

Le successioni

$$\log_a(n); n^\alpha; a^n; n!; n^n$$

sono in ordine crescente di infinito, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(n)}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$