Proprietà delle funzioni continue

Teorema degli zeri

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$
$f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$

Metodo di bisezione

Formule

1. Calcolo

$$x_m = \frac{b + a}{2}$$

   - Se $f(x_m) = 0$: l'algoritmo si ferma
   - Altrimenti valuto il segno:
     - Se $f(x_m) \cdot f(a) < 0$: f ammette soluzione in (a, x_m)
     - Altrimenti: f ammette soluzione in (x_m, b)
2. Itero il passo 1

Intersezione di funzioni

Teorema

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue
$f(a) > g(a), f(b) < g(b) \implies \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = g(x_0)$
Applicazione del teorema degli zeri alla funzione $f(x) - g(x)$

Teorema dei valori intermedi

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua $\implies$ f assume tutti i valori compresi tra $\inf_{[a,b]} f(x)$ e $\sup_{[a,b]} f(x)$, ovvero

$$\exists x \in [a, b] : f(x) = y \ \ \forall y \in (\inf_{[a,b]} f(x), \sup_{[a,b]} f(x))$$

Massimo e minimo assoluto

Definizione

$f : D \to \mathbb{R}$ continua

- M si dice massimo assoluto di f in D se
  - $\forall x \in D\ f(x) \leq M$
  - $\exists x_0 \in D : f(x_0) = M$ detto punto di massimo
- m si dice minimo assoluto di f in D se
  - $\forall x \in D\ f(x) \geq m$
  - $\exists x_0 \in D : f(x_0) = m$ detto punto di minimo

Teorema di Weierstrass

Teorema

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua $\implies \exists M, m$ massimo e minimo di f in $[a, b]$ e $f([a, b]) = [m, M]$