

# Limiti

$D \subset \mathbb{R}, f: D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$

## Intorno

### Definizione

L'intorno di  $x_0$  di raggio  $r$  è l'intervallo  $(x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

$a \in \mathbb{R}$

L'intorno di  $+\infty$  è l'intervallo  $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

L'intorno di  $-\infty$  è l'intervallo  $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

## Punto di accumulazione

### Definizione

$x_0$  si dice punto di accumulazione per  $D$  se  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \quad \forall \delta > 0$ , equivalentemente

$\exists x \in D \setminus \{x_0\} : 0 < |x - x_0| < \delta \quad \forall \delta > 0$

## Limite finito in un punto

### Definizione

$x_0$  punto di accumulazione per  $D$

$l \in \mathbb{R}$  si dice limite di  $f$  per  $x \rightarrow x_0$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} |f(x) - l| < \epsilon$   
e si indica con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

## Funzione continua

### Definizione

$x_0 \in D$

Una funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

Ovvero  $f$  è continua in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

# Limite destro e sinistro

## Definizione

$x_0$  punto di accumulazione per  $D$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

# Funzione continua da destra o da sinistra

## Definizione

$x_0 \in D$

Una funzione  $f$  è continua da destra in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Una funzione  $f$  è continua da sinistra in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

# Limite infinito in un punto

## Definizione

$x_0$  punto di accumulazione per  $D$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \quad f(x) < -M$$

La retta  $x = x_0$  è un'asintoto verticale per  $f$

# Limite all'infinito

## Definizione

$D$  illimitato superiormente ( $\forall k > 0 \exists x \in D : x > k$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x \in (k, +\infty) \cap D \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in (k, +\infty) \cap D \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in (k, +\infty) \cap D \quad f(x) < -M$$

$D$  illimitato inferiormente ( $\forall k > 0 \exists x \in D : x < -k$ )

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists k > 0 : \forall x \in (-\infty, -k) \cap D \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in (-\infty, -k) \cap D \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0 \exists k > 0 : \forall x \in (-\infty, -k) \cap D \quad f(x) < -M$$

# Cambio di variabili

## Teorema

Se  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ ,  $g$  funzione definita in un intorno di  $y_0$  tale che

- se  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $g$  è continua in  $y_0$
- se  $y_0 = \pm\infty$ ,  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$$

# Continuità

## Definizione

$A \subset D$

$f$  è continua in  $A$  se  $f$  è continua in  $x_0 \quad \forall x_0 \in A$

In questo caso  $f \in C^0(A)$

# Discontinuità

## Definizione

Un punto di discontinuità  $x_0$  si dice

- Eliminabile se esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- A salto se esistono finiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

- Essenziale negli altri casi

# Limiti notevoli

## Formule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$