

# Curve

## Curva in $\mathbb{R}^n$

### Definizione

Si chiama curva una mappa  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ ,  $I$  intervallo di  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma_i(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, \dots, n$ )

Se  $I = [a, b]$ ,  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  si chiamano estremi della curva

L'insieme  $\Gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$  si chiama **sostegno** o **supporto** della curva

$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) = \gamma(t)$  si chiama **equazione parametrica** o anche legge oraria della curva

### Curva chiusa

Se  $I = [a, b]$  e gli estremi coincidono,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ,  $\gamma$  si dice chiusa

### Curva semplice

$\gamma$  si dice semplice se è iniettiva, oppure se è chiusa e  $\gamma : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  è iniettiva

### Curve cartesiane

$f \in C^0([a, b])$ ,  $\gamma, \gamma^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = (t, f(t))$ ,  $\gamma^*(t) = (f(t), t)$  sono dette curve piane cartesiane

### Osservazione >

Se almeno una componente  $\gamma_i$  è iniettiva  $\implies \gamma$  è iniettiva

## Orientazione di una curva semplice

### Definizione

Una curva semplice  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  induce un'orientazione, anche detta verso, al suo sostegno

Si dice che  $\underline{x}_1 = \gamma(t_1)$  precede  $\underline{x}_2 = \gamma(t_2)$  se  $t_1 < t_2$

# Vettore velocità e retta tangente

## Definizione

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva, se  $\gamma_i : I \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $t_0 \in I$   
 $\gamma'(t_0) := (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$  è detto vettore velocità di  $\gamma$  in  $t_0$   
Se  $t \rightarrow t_0$   $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$

## Q Osservazione >

$$\gamma'(t_0) = J_\gamma(t_0)^T$$

## Definizione

Se  $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$  si chiama retta tangente a  $\gamma$  in  $\underline{x}_0 = \gamma(t_0)$  la retta  $\underline{x} = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice di classe  $C^m$  se  $\gamma_i \in C^m(I) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\gamma$  si dice **regolare** se  $\gamma \in C^1(I)$  e  $\gamma'(t) \neq \underline{0} \quad \forall t \in I$

Si chiama versore o direzione tangente a  $\gamma$  il campo vettore

$$T_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice  $C^1$  a tratti se  $\exists \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$  suddivisione di  $[a, b]$  tale che

$\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^1$  e  $\gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$

# Cambiamento di parametro

## Definizione

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  si dicono equivalenti se  $\exists \varphi : \tilde{I} \rightarrow I$  biiettiva tale che  $\varphi \in C^1(\tilde{I})$ ,

$\varphi'(\tau) \neq 0$  e  $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \quad \forall \tau \in \tilde{I}$

$\tau \in \tilde{I} \rightarrow t = \varphi(\tau) \in I$  si dice cambiamento di parametrizzazione

Inoltre  $\Gamma = \gamma([a, b]) = \tilde{\gamma}([\alpha, \beta])$

## Q Osservazione >

Se  $\varphi'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in \tilde{I}$  allora  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  hanno lo stesso verso, altrimenti se  $\varphi'(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in \tilde{I}$  hanno verso opposto

# Lunghezza di una curva

## Definizione

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva,  $\mathcal{D} = \{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$  suddivisione di  $[a, b]$  induce una suddivisione del sostegno di  $\gamma$  in  $k + 1$  punti definiti da  $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_k)$  e quindi  $k$  segmenti

$$[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] := \{s \cdot \gamma(t_i) + (1 - s) \cdot \gamma(t_{i-1}) : 0 \leq s \leq 1\}$$

La lunghezza della spezzata definita da  $\bigcup_{i=1}^k [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$  è data da

$$L(\gamma, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \in [0, +\infty)$$

$$L(\gamma) := \sup_{\mathcal{D}} \{L(\gamma, \mathcal{D})\} \in [0, +\infty]$$

Se  $L(\gamma) < +\infty \implies \gamma$  si dice rettificabile e  $L(\gamma)$  è detta lunghezza di  $\gamma$

## Teorema

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva,  $\gamma \in C^1([a, b])$

$\implies \gamma$  è rettificabile e

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \dots + \gamma_n'^2(t)} dt$$

## Osservazione >

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva piana cartesiana,  $\gamma, f \in C^1([a, b])$ ,  $\gamma(t) := (t, f(t))$

$\implies \gamma$  è rettificabile e  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$

# Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione

## Teorema

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curve di classe  $C^1$  equivalenti

$\implies L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$

## Dimostrazione >

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  cambiamento di parametrizzazione,  $\varphi(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(\varphi(\tau))\| \cdot \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \dots \end{aligned}$$

## Q Osservazione >

Una curva  $C^1$  a tratti  $\gamma = \sum_{i=1}^k \gamma_i$ ,  $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è rettificabile e

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'_i(t)\| dt$$

# Integrali curvilinei di prima specie

## Definizione

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curva di classe  $C^1$ ,  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$\int_{\gamma} f ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

si chiama integrale curvilineo di prima specie di  $f$  lungo  $\gamma$

Se  $\gamma$  è chiusa e semplice si indica anche con  $\oint_{\gamma} f ds$

## Teorema

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  curve di classe  $C^1$  equivalenti,  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$$\implies \int_{\tilde{\gamma}} f ds = \int_{\gamma} f ds$$

## Dimostrazione >

$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  cambio di parametrizzazione,  $\varphi(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\gamma}(\tau)) \cdot \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot \|\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot \|\gamma'(\varphi(\tau))\| \cdot |\varphi'(\tau)| d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \dots \end{aligned}$$

# Integrali curvilinei di seconda specie

## Campo vettoriale

### Definizione

Si chiama campo vettoriale su un insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  una mappa  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots, F_n(\underline{x}))$

## Forma differenziale

### Definizione

$F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo vettoriale

Si chiama forma differenziale su  $E$  l'espressione formale

$$\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \langle F, d\underline{x} \rangle$$

Una forma differenziale  $\omega$  su  $E$  si dice di classe  $C^0$  (o  $C^1$ ) se  $F_i \in C^0(E) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$  (o  $F_i \in C^1(E)$ )

### Definizione

$\gamma : [a, b] \rightarrow E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma \in C^1([a, b])$ ,  $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$ ,  $\omega \in C^0(E)$

Si definisce integrale curvilineo di seconda specie di  $\omega$  lungo  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt$$

Se  $\gamma$  è chiusa si indica anche con  $\oint_{\gamma} \omega$