Differenziali

Funzione continua

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice continua in $\underline{p_0}$ se vale una delle seguenti:

- $\underline{p_0}$ è un punto isolato di A
- $\underline{p_0}$ è punto di accumulazione e $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = f(\underline{p_0})$

Si dice continua su A se è continua $\forall \underline{p_0} \in A$

Derivate parziali

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$
In particolare
$(x, y_0) \in A \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(x_0, y) \in A \ \ \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$
Si dice che f è derivabile rispetto a x in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)$$

Si dice che f è derivabile rispetto a y in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0)$$

Si chiama il gradiente il vettore $\nabla f(\underline{p_0}) := (D_1 f(\underline{p_0}), D_2 f(\underline{p_0}))$

In n variabili

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{e_i}$ versore di x_i

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{p_0} + h \cdot \hat{e_i}) - f(\underline{p_0})}{h} := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) = \mathrm{D}_i(\underline{p_0})$$

Differenziabilità

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto
Se $\exists a, b \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \implies$$

il piano $\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ si dice piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e f si dice differenziabile nel punto (x_0, y_0)

Se f è differenziabile in $\underline{p_0} \implies \exists \nabla f(\underline{p_0})$ e $a = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}),\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})$

Dimostrazione:
Se $y = y_0 \implies$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - [a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = a \iff \exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) = a$$

Analogamente con $x = x_0$

Differenziale

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(v_1, v_2) := \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0}) \cdot v_2 \ \ \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si chiama differenziale di f in $\underline{p_0}$ denotato anche come $df(\underline{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})dy$
Se f è differenziabile in $\underline{p_0}$ esiste il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(\underline{p_0}))$
$\pi : z = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y_0)$

In n variabili

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(\hat{v}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) \ \ \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n$

Continuità

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $\underline{p_0} \in A \implies f$ è continua in $\underline{p_0}$
Dimostrazione:

$$\exists \lim_{p \to \underline{p_0}} \frac{f(p) - [df(\underline{p_0})(p - \underline{p_0}) + f(\underline{p_0})]}{\mathrm{d}(p, \underline{p_0})} = 0$$

$L(v_1, v_2) = df(\underline{p_0})(v_1, v_2)$

$$f(p) - f(\underline{p_0}) = \frac{f(p) - [L(p - \underline{p_0}) + f(\underline{p_0})]}{\mathrm{d}(p, \underline{p_0})} \cdot \mathrm{d}(\mathrm{p}, \underline{\mathrm{p}_0}) + L(p - \underline{p_0})$$

$\lim_{p \to \underline{p_0}} L(p - \underline{p_0}) \implies \exists \lim_{p \to \underline{p_0}} f(p) - f(\underline{p_0}) = 0$

Condizioni sulle derivate parziali che assicurano la differenziabilità

Teorema del differenziale totale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} \in A$
Se:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue in $\underline{p_0}$

$\implies f$ è differenziabile in $\underline{p_0}$

Osservazione: è sufficiente richiedere le ipotesi su un intorno di $\underline{p_0}$

f si dice differenziabile in $\underline{p_0}$ se $\exists L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\exists \lim_{p \to \underline{p_0}} \frac{f(p) - f(\underline{p_0}) - L(p - \underline{p_0})}{\mathrm{d}(p, \underline{p_0})} = 0 \implies$$

- $\exists \nabla f(\underline{p_0})$
- $L(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$
- f è continua in $\underline{p_0}$

f si dice differenziabile su A se è differenziabile in ogni punto di A
f si dice di classe $\mathrm{C}^1(A)$ se è continua ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ continue

Corollario: $f \in \mathrm{C}^1(A) \implies f$ è differenziabile in ogni punto $\underline{p_0} \in A$

Derivate direzionali

$\hat{v}$ si dice direzione se $||\hat{v}|| = 1$
f è derivabile rispetto a $\hat{v}$ in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{p_0} + h\hat{v}) - f(\underline{p_0})}{h}$$

Osservazione: $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\underline{p_0} + t\hat{v})$ per $t \in (-\delta, \delta) \implies$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

e $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = F'(0)$

f differenziabile in $\underline{p_0} \implies \exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = df(\underline{p_0})(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$
Dimostrazione: per ipotesi f è differenziabile in $\underline{p_0} \implies$

$$\exists \lim_{p \to \underline{p_0}} \frac{f(p) - f(\underline{p_0}) - \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (p - \underline{p_0})}{\mathrm{d}(p, \underline{p_0})} = 0$$

che è equivalente a $f(p) = f(\underline{p_0}) + \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (p - \underline{p_0}) + o(\mathrm{d}(p, \underline{p_0}))\ \ \forall p \in A$
si ottiene $F(h) := f(\underline{p_0} + h\hat{v}) = f(\underline{p_0}) + \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (h\hat{v}) + o(\mathrm{d}(\underline{p_0} + h\hat{v}, \underline{p_0})) = F(0) + h(\nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}) + o(|h|)$
Segue che $\exists F'(0) := \lim_{h \to 0} F(h) - F(0) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v} = df(\underline{p_0})(\hat{v})$

Teorema del valore intermedio

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$
Se:

- $\exists \underline{p}, \underline{q} \in A : [\underline{p}, \underline{q}] := \{t\underline{q} + (1 - t)\underline{p} : t \in [0, 1]\} \subset A$
- f è continua su $[\underline{p}, \underline{q}]$ e differenziabile su $(\underline{p}, \underline{q})$

$$\implies \exists \bar{c} \in (\underline{p}, \underline{q}) : f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \nabla f(\bar{c})(\underline{q} - \underline{p})$$

Dimostrazione: supponiamo $\underline{p} \neq \underline{q}$
$\hat{v} = \frac{\underline{q}-\underline{p}}{||\underline{q}-\underline{p}||}$ direzione di $\mathbb{R}^2$
$F(t) := f(\underline{p} + t\hat{v})$, $r \in [0, ||\underline{p} - \underline{q}||]$ è ben definita per la prima ipotesi e $F(||\underline{q} - \underline{p}||) = f(\underline{q})$
Per la seconda ipotesi F è continua e $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p} + t\hat{v}) \ \ \forall t \in (0, ||\underline{q} - \underline{p}||)$
Per il teorema in una variabile: $f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = F(||\underline{q} - \underline{p}||) - F(0) = F'(t)||\underline{q} - \underline{p}|| = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p} + t\hat{v})||\underline{q} - \underline{p}|| = (\nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \cdot \hat{v})||\underline{q} - \underline{p}|| = \left(\nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \frac{\underline{q}-\underline{p}}{||\underline{q}-\underline{p}||}\right)||\underline{q} - \underline{p}||$
Scegliendo $\bar{c} = \underline{p} + t\hat{v}$ otteniamo la tesi

Derivate parziali di una funzione composta

$g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$
Se:

- $g(A) \subset B$
- $g = (g_1, \dots, g_m), f = (f_1, \dots, f_k)$
- $g_i : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in A$
- $f_i : B \to \mathbb{R}$ differenziabile in $y_0 = g(x_0) \in B$
- $h := f \circ g$

$$\implies Dh(x_0) = Df(y_0) \cdot Dg(x_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(y_0) \\ \dots \\ \nabla f_k(y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla g_1(x_0) \\ \dots \\ \nabla g_m(x_0) \end{bmatrix}$$

Derivate parziali di ordine superiore

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \implies$
Sono dette derivate parziali seconde pure

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e derivate parziali seconde miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \ \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Se le derivate parziali seconde miste sono continue $\implies$ coincidono

Polinomi di Taylor

$m \in \mathbb{N}$, $\underline{p_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
Si chiama polinomio di Taylor di ordine m di $n = 2$ variabili centrato in $\underline{p_0}$ una funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,n-i}(x - x_0)^i (y - y_0)^{n-i} \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

tale che $f(p) = T(p) + o(||p - \underline{p_0}||^2)$

Matrice Hessiana

$f \in \mathrm{C}^2(A)$
Si chiama matrice Hessiana di f in $p \in A$ la matrice

$$D^2 f(p) = H_f(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{bmatrix}$$

Osservazione: $H_f(p)$ è simmetrica

$T_2(p) = f(\underline{p_0}) + \nabla f(p)(p - \underline{p_0}) + \frac{1}{2} H_f(p)(p - \underline{p_0}) \cdot (p - \underline{p_0})$
Dimostrazione:
$p \in \mathrm{B}(po, r)$, $\hat{v} := \frac{p - p_0}{||p - \underline{p_0}||} = (v_1, v_2)$, $F(t) := f(\underline{p_0} + t\hat{v})\ \ t \in (-r, r)$
Poiché $g(t) = \underline{p_0} + t\hat{v} \in \mathrm{C}^2((-r, r))$ anche $F(t) = f(g(t)) \in \mathrm{C}^2((-r, r))$
Applicando la formula di Taylor in una variabile per $t = 0$ si ottiene
$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2} F''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$
$F'(t) = \nabla f(p + t\hat{v}) \cdot \hat{v}$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{p_0} + t\hat{v}) \cdot v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{p_0} + t\hat{v}) \cdot v_1 \cdot v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{p_0} + t\hat{v}) \cdot v_2^2$$

$F(0) = f(\underline{p_0})$, $F'(0) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$, $F''(0) = H_f(\underline{p_0})\hat{v} \cdot \hat{v}$
$F(t) = f(\underline{p_0}) + (\nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v})t + \frac{1}{2}(H_f(\underline{p_0})\hat{v} \cdot \hat{v})t^2 + o(t^2)$
Sostituendo $t = p - \underline{p_0}$ e $\hat{v}$ si ottiene la tesi

Massimi e minimi

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\underline{p_0} \in A$ si dice punto di

- massimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(p) \leq f(\underline{p_0})\ \ \forall p \in A \cap B(\underline{p_0}, r_0)$
- massimo assoluto di f in A se $f(p) \leq f(\underline{p_0})\ \ \forall p \in A$
- minimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(p) \geq f(\underline{p_0})\ \ \forall p \in A \cap B(\underline{p_0}, r_0)$
- minimo assoluto di f in A se $f(p) \geq f(\underline{p_0})\ \ \forall p \in A$

Osservazione: non confondere punto di massimo e massimo di una funzione: $\mathrm{Max}_A f := \mathrm{Max}\{f(p) : p \in A\}$ se esiste è unico

I punti di massimo e minimo relativi sono detti estremi liberi

A aperto, se $\exists \underline{p_0} \in A$ tale che:

- $\exists \nabla f(\underline{p_0})$
- $\underline{p_0}$ è un estremo libero di f in A

$\implies \nabla f(\underline{p_0}) = \underline{0}$

Dimostrazione: $\underline{p_0} = (x_0, y_0)$, A aperto $\implies \exists \delta > 0 : \underline{p_0} + t\underline{i} = (x_0 + t, y_0) \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$
$F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\underline{p_0} + t\underline{i})$
Dalle ipotesi:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) \iff F$ è derivabile in $t = 0$ e $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})$
- $t = 0$ è un estremo libero di F

Per il teorema in una variabile $F'(0) = 0$, analogamente per $\underline{j} \implies \nabla f(\underline{p_0}) = (0, 0) = \underline{0}$

Un punto $\underline{p_0} \in A$ si chiama punto stazionario o critico di f se $\exists \nabla f(\underline{p_0}) = \underline{0}$

Matrice positiva

$H \in M_n(\mathbb{R})$ si dice:

- positiva se $H\hat{v} \cdot \hat{v} > 0 \ \ \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita positiva se $H\hat{v} \cdot \hat{v} \geq 0 \ \ \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- negativa se $H\hat{v} \cdot \hat{v} < 0 \ \ \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita negativa se $H\hat{v} \cdot \hat{v} \leq 0 \ \ \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$H = [h_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$

$$D_i := \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \dots & & \dots \\ & & \\ h_{i_1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \ \ 1 \leq i \leq n$$

H è:

- positiva $\iff D_i > 0 \ \ \forall i = 1, \dots, n$
- negativa $\iff D_i > 0$ per i pari, $D_i < 0$ per i dispari
- se $\det(H) \neq 0$ e nessuna delle condizioni precedenti $\implies$ non è semi-definita

Corollario: $H \in M_2(\mathbb{R}) \implies H$ è:

- positiva se $h_{11} > 0 \wedge \det(H) > 0$
- negativa se $h_{11} < 0 \wedge \det(H) > 0$
- se $\det(H) < 0 \implies$ non è semi-definita

Matrice Hessiana ed estremi liberi

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathrm{C}^2(A)$, $\underline{p_0}$ punto stazionario
Se $H_f(\underline{p_0})$ è:

- positiva $\implies \underline{p_0}$ è un punto di minimo relativo
- negativa $\implies \underline{p_0}$ è un punto di massimo relativo
- non semi-definita $\implies \underline{p_0}$ è un punto di sella

Teorema di Weierstrass

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua su A limitato e chiuso
$\implies \exists \mathrm{Max}_A f = f(p_1) \wedge \exists \mathrm{Min}_A f = f(p_2) \;\; \underline{p_i} \in A \;\; i = 1, \ldots, n$
si verifica una delle seguenti per ogni punto:

- $\underline{p_i} \in \mathring{A} \wedge \exists \nabla f(\underline{p_i}) = \underline{0}$
- $\underline{p_i} \in \mathring{A} \wedge \nexists \nabla f(\underline{p_i})$
- $\underline{p_i} \in \partial A$

Parametrizzazione

Si chiama parametrizzazione della frontiera ∂A una funzione $\gamma : B \subset \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma(t_1, \ldots, t_n) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{n+1}(t))$, con le seguenti proprietà:

- B chiuso e limitato
- $\gamma(B) = \partial A$
- $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \in \mathrm{C}^0(B) \cap \mathrm{C}^1(\mathring{B})$

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^1(A)$ da massimizzare/minimizzare sulla frontiera
$F : B \to \mathbb{R}$, $F(t_1, \ldots, t_n) := f(\gamma(t_1, \ldots, t_n)) \implies$

- $\mathrm{Max}_{\partial A} f = \mathrm{Max}_B F$
- $\mathrm{Min}_{\partial A} f = \mathrm{Min}_B F$