Notazione

Funzioni di più variabili scalari e vettoriali

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $n \geq 2$ è una funzione di più variabili

- scalare se $k = 1$
- vettoriale se $k \geq 2$

Grafico

$k = 1$
$G_f := \{(\underline{p}, f(\underline{p})) : \underline{p} \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Curve di livello

$n = 2$, $k = 1$, $t \in \mathbb{R}$
$C_t := \{(x, y) \in A : f(x, y) = t\}$

Insiemistica

$A \subset \mathbb{R}^n$

Distanza euclidea

Definizione

$\underline{p_1}, \underline{p_2} \in \mathbb{R}^3$
$\mathrm{d}(\underline{p_1}, \underline{p_2}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
è detta distanza euclidea tra $\underline{p_1}$ e $\underline{p_2}$

Intorno

Definizione

Si chiama intorno sferico di $\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ di raggio $r > 0$ l'insieme $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r) := \{\underline{p} \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0}) < r\}$

Frontiera e parte interna

Definizione

$\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di frontiera di A se $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r) \cap A \neq \emptyset \land \mathrm{B}(\underline{p_0}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \ \ \forall r > 0$
L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A
L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con $\mathring{A} := A \setminus \partial A$

Insieme chiuso e aperto

Definizione

A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A
$\partial A \subset A$
A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera
$A \cap \partial A = \emptyset$

Insieme limitato

Definizione

A è detto limitato se $\exists r > 0 : A \subset \mathrm{B}(\underline{0}, r)$

Punto di accumulazione

Definizione

$\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di accumulazione per A se $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r) \cap (A \setminus \{\underline{p_0}\}) \neq \emptyset \ \ \forall r > 0$

Punto isolato

Definizione

$\underline{p_0} \in A$ si dice punto isolato di A se non è un punto di accumulazione

Limite

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p_0}$ punto di accumulazione di A

$$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = l \in \mathbb{R}$$

se
$\exists \delta > 0 : |f(\underline{p}) - l| < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0, \underline{p} \in \mathrm{B}(\underline{p_0}, \delta) \cap (A \setminus \{\underline{p_0}\})$

Formule

$f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p_0}$ punto di accumulazione di A
$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = l \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} g(\underline{p}) = m \in \mathbb{R}$
Somma
$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} (f(\underline{p}) + g(\underline{p})) = l + m$
Prodotto
$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) \cdot g(\underline{p}) = l \cdot m$
Quoziente, $g(\underline{p}) \neq 0 \;\; \forall \underline{p} \in (A \setminus \{\underline{p_0}\})$ e $m \neq 0$

$$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p})}{g(\underline{p})} = \frac{l}{m}$$

Composizione, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $h(\underline{p}) := F(f(\underline{p}))$
$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} h(\underline{p}) = F(l)$

Teorema del confronto

$f, g, h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se

- $f(\underline{p}) \leq g(\underline{p}) \leq h(\underline{p}) \;\; \forall \underline{p} \in A$
- $\exists \lim\limits_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = \lim\limits_{\underline{p} \to \underline{p_0}} h(\underline{p}) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\implies \exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} g(\underline{p}) = l$$

Dimostrazione >

$\exists \delta_1 > 0 : |f(\underline{p}) - l| < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0, \underline{p} \in \mathrm{B}(\underline{p_0}, \delta_1)$
$\exists \delta_2 > 0 : |h(\underline{p}) - l| < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0, \underline{p} \in \mathrm{B}(\underline{p_0}, \delta_2)$
$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$
$\implies l - \varepsilon < f(\underline{p}) \leq g(\underline{p}) \leq h(\underline{p}) < l + \varepsilon$

Limite lungo direzioni

Definizione

$B \subset A$, $f|_B : B \to \mathbb{R}$, $f|_B(\underline{p}) := f(\underline{p})$ se $\underline{p} \in B$ si dice funzione restrizione su B

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p_0}$ punto di accumulazione di A, sono equivalenti:

- $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = l$
- $\forall B \subset A$ per cui $\underline{p_0}$ è punto di accumulazione di B $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f|_B(\underline{p}) = l$