Divergenza e rotori

Divergenza

Definizione

$F : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale, $F \in \mathrm{C}^1(E)$

$$\operatorname{div}(F)(\underline{x}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\underline{x})$$

si dice divergenza di F

Rotore

Definizione

$E \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $F : E \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale, $F \in \mathrm{C}^1(E)$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(F)(x,y,z) &= \det \begin{bmatrix} \hat{e_1} & \hat{e_2} & \hat{e_3} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)(x,y,z)\end{aligned}$$

si dice rotore di F

Teorema

$E \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $F : E \to \mathbb{R}^3$ campo vettoriale, $F \in \mathrm{C}^1(E)$, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$
F è chiusa su $E \iff \operatorname{rot}(F)(x,y,z) = \underline{0} \ \ \forall (x,y,z) \in E$

Dimostrazione

Segue direttamente dalla definizione di forma differenziale chiusa e di rotore