Integrali

Integrale doppio su un rettangolo

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A = [a,b] \times [c,d]$, f limitata (e non negativa)
Il trapezoide sotteso al grafico di f in A è l'insieme dei punti
$T_f(A) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x,y) \wedge (x,y) \in A\}$

Suddivisione

Definizione

Si chiama suddivisione di $[a,b]$ un insieme finito $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
Si chiama suddivisione di A l'insieme
$\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{x_0, \dots, x_n\} \times \{y_0, \dots, y_m\} = \{(x_i, y_j) : i = 0, \dots, n \wedge j = 0, \dots, m\}$
A resta suddiviso in $n \times m$ rettangoli $A_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ di area
$\text{area}(A_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$

Somma superiore e inferiore

Definizione

$M_{ij} := \sup_{A_{ij}}\{f\}$
$m_{ij} := \inf_A\{f\}$

Si chiamano somma superiore e inferiore

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \cdot area(A_{ij})$$
$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$$

Proprietà:

- Se $f \geq 0$, $M_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$ e $m_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$ rappresentano il volume di un parallelepipedo che approssima il grafico per eccesso e per difetto
- $\text{area}(A_{ij}) \cdot \inf_A\{f\} \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq \text{area}(A_{ij}) \cdot \sup_A\{f\}$
- $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ suddivisioni qualunque, $s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}'')$

Funzione integrabile secondo Riemann

Definizione

Se $\sup\{s(f,\mathcal{D})\} = \inf\{S(f,\mathcal{D})\} = L \in \mathbb{R} \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e si denota

$$L = \iint_A f = \mathrm{vol}(T_f(A))$$

Teoremi

Esistenza dell'integrale

$f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$

Linearità

$\iint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g$

Monotonia

$g \leq f \implies \iint_A g \leq \iint_A f$

Valore assoluto

$| \iint_A f| \leq \iint_A |f|$

Teorema della media integrale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\inf_A\{f\} \leq \frac{1}{\mathrm{area(A)}} \iint_A f = z_0 \leq \sup_A\{f\}$$

Inoltre se $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies \exists \underline{p_0} : f(\underline{p_0}) = z_0$

Formula di riduzione sui rettangoli

Formula

Se $\forall y \in [c,d] \ \ x \in [a,b] \to f(x,y)$ è integrabile $\implies \forall x \in [a,b] \ \ y \in [c,d] \to f(x,y)$ è integrabile e

$$\iint_A f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Viceversa in modo analogo

In particolare se $f \in \mathrm{C}^0(A)$ valgono entrambe e

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Integrale doppio su un insieme generale

Definizione

Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è limitato ma non rettangolare è possibile definire una nuova funzione
$A \subset Q = [a,b] \times [c,d]$, $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Di conseguenza $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$\iint_A f = \iint_Q \tilde{f} = \mathrm{vol}(T_{\tilde{f}}(Q))$$

Osservazione

$\tilde{f}$ non è continua su ∂A
$T_{\tilde{f}}(Q) = P \cup T_f(A)$ dove P è una parte limitata del piano $z = 0$ e $\mathrm{vol(P)} = 0$
Se non fosse definita $\mathtt{area}(A)$ non sarebbe possibile calcolare l'integrale doppio

Insieme misurabile

Definizione

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 1$ se $(x,y) \in A$
A si dice misurabile secondo Peano-Jordan se $f \in \mathcal{R}(A)$ e $\mathtt{area}(A) = |A|_2 = \iint_A f$

Osservazione

$Q = [a,b] \times [c,d]$ è misurabile e $|Q|_2 = (b-a) \cdot (d-c)$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato
A è misurabile $\iff$ ∂A è misurabile e $|\partial A|_2 = 0$

Definizione

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile $\implies$ $G_g := \{(x, g(x)) : x \in [a, b]\}$ è misurabile e $|G_g|_2 = 0$

Osservazione

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ continua (e quindi integrabile) ($i = 1, \dots, k$)
$\partial A = \bigcup_{i=1}^{k} G_{g_i} = G_{g_1} \cup \dots \cup G_{g_k} \implies A$ è misurabile

Integrale doppio su un insieme misurabile

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^0(A)$ limitata, $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile
$\implies f \in \mathcal{R}(A)$

Osservazione

Se A è chiuso e limitato, allora se f è continua è sicuramente anche limitata e quindi $f \in \mathcal{R}(A)$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile, $A = B \cup C$ misurabili, $|C|_2 = 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\implies \iint_A f = \iint_B f$$

Osservazione

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\implies \iint_A f = \iint_{\mathring{A}} f$$

Integrale doppio su un dominio semplice e formula di riduzione

Definizione

$A \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplice o normale rispetto all'asse y se

- $\exists g_1, g_2 \in \mathrm{C}^0([a,b]) : g_1 \leq g_2$ su $[a,b]$
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

Analogamente rispetto all'asse x
Un dominio semplice è limitato e misurabile

Formule

$A \subset \mathbb{R}^2$ semplice rispetto a y, $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\,dx$$

$$\iint_A f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Analogamente per x

Additività dell'integrale doppio

Teorema

$A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^2$ insiemi semplici tali che $A_i \cap A_j \subset \partial A_i \cap \partial A_j \;\; \forall i, j = 1, \ldots, m \wedge i \neq j$,
$B = A_1 \cup \ldots \cup A_m$, $f : B \to \mathbb{R}$ tale che $f \in \mathcal{R}(A_i) \;\; \forall i = 1, \ldots, m$
$\implies f \in \mathcal{R}(B)$ e

$$\iint_B f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{A_i} f$$

Sostituzione di variabili

Definizione

$D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ aperti, limitati e misurabili, $\psi : D^* \to D$, $\psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))$
La mappa ψ si dice cambiamento o sostituzione di variabili se:

- è biiettiva
- $\psi_i \in \mathrm{C}^1(D^*)$ e $\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \psi_i}{\partial v} : D^* \to \mathbb{R}$ sono limitate ($i = 1, 2$)
- $\det(J_\psi(u,v)) \neq 0 \ \ \forall (u,v) \in D^*$

Per definizione $dD^* = du\, dv$, $dD = dx\, dy$ e per la sostituzione $dD = |\det(J_\psi(u,v))| dD^*$

Teorema

$D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ aperti, limitati e misurabili, $\psi : D^* \to D$ cambiamento di variabili

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{D^*} f(\psi(u,v)) \cdot |\det(J_\psi(u,v))|\, du\, dv$$