Superfici

Curva di Jordan

Definizione

Una curva di Jordan è una curva piana semplice e chiusa

Teorema

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva di Jordan $\implies$

- $\Gamma = \gamma([a,b])$ divide il piano in due insiemi aperti di cui uno è limitato D_{int} chiamato interno e uno illimitato D_{ext} chiamato esterno, entrambi aperti
- $\partial D_{\text{int}} = \partial D_{\text{ext}} = \Gamma$

Definizione

Si chiama chiusura di D l'insieme $\bar{D} = D \cup \partial D$

Superficie

Definizione

Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice superficie se $\exists \sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mappa detta parametrizzazione di S, $\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ verificante:

- D è un aperto di $\mathbb{R}^2$, interno di una curva di Jordan
- σ è continua e iniettiva
- $\sigma(\bar{D}) = S$

S si dice superficie cartesiana se $\exists \sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di uno dei seguenti tipi, con $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^1(\bar{D})$:

- $\sigma(u,v) = (u, v, f(u,v))$
- $\sigma(u,v) = (u, f(u,v), v)$
- $\sigma(u,v) = (f(u,v), u, v)$

Punti interni e bordo intrinseci

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie elementare: $\partial S = S$ e $\mathring{S} = \emptyset$
Un punto $\underline{p_0} \in S$ si dice interno a S se esistono $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r_0)$ e $\sigma_* : \bar{D}_* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di $\overline{\mathrm{B}(\underline{p_0}, r_0) \cap S}$ tale che $\underline{p_0} \in \sigma_*(D_*)$
L'insieme dei punti interni di S si denota con S'
Si chiama bordo di S l'insieme dei punti che non sono interni $\mathrm{bor(S)} = S \setminus S'$

Regolarità della parametrizzazione e piano tangente

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata da $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1, $\underline{p_0} = \sigma(u_0, v_0) \;\; (u_0, v_0) \in D$
Se $\gamma : [a, b] \to D$ di classe C^1, $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$, $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ è la corrispondente curva sulla superficie ed è di classe C^1
Se $\tilde{\gamma}'(t_0) \neq \underline{0}$ e la retta tangente a $\tilde{\gamma}$ passante per $\tilde{\gamma}(t_0)$ appartiene a π allora $\exists \pi$ piano tangente a S in $\underline{p_0}$
Si vuole imporre $\tilde{\gamma}'(t_0) = u'(t_0) \cdot \sigma_u(u_0, v_0) + v'(t_0) \cdot \sigma_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$
$\pi : \{\underline{p_0} + \lambda \sigma_u(u_0, v_0) + \mu \sigma_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ è il piano di equazione cartesiana
$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ con $(a, b, c) := \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$ e $\underline{p_0} = (x_0, y_0, z_0)$

$\underline{p_0} \in S'$ si dice regolare se esistono $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r_0)$ e $\sigma : \bar{D} \to \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di $\overline{\mathrm{B}(\underline{p_0}, r_0) \cap S}$ tale che

- σ è di classe C^1
- $\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$

π si chiama piano tangente a S in $\underline{p_0}$
I due versori normali a π sono

$$\pm \frac{\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)}{||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)||}$$

S si dice regolare se tutti i punti interni sono regolari

Area di una superficie

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, $\sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sua parametrizzazione di classe C^1
$Q = [u_0, u_0 + du] \times [vo, v_0 + dv]$ è l'elemento infinitesimo di area
Se $(u, v) \to (u_0, v_0)$, $\sigma(u, v) = \sigma(u_0, v_0) + \langle J_\sigma(u_0, v_0), (u - u_0, v - v_0)^T \rangle + o(||(u - u_0, v - v_0)||)$
$\tilde{Q} := \{\sigma(u_0, v_0) + \lambda\sigma_u(u_0, v_0) + \mu\sigma_v(u_0, v_0) : 0 \leq \lambda \leq du \wedge 0 \leq \mu \leq dv\} = \sigma(Q)$
$\mathrm{area}(\tilde{Q}) = ||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)||\, du\, dv = dS$
Si chiama area di S se $||\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(, v)||$ è limitata $\forall(u, v) \in D$ e quindi è ben definita

$$\mathrm{area}(S) := \iint_S dS = \iint_D ||\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)||\, du\, dv$$

Osservazione

$D \subset \mathbb{R}^2$ interno di una curva di Jordan, $f \in \mathrm{C}^0(\bar{D}) \cap \mathrm{C}^1(D)$, $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ superficie cartesiana parametrizzazione di $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathrm{area}(S) = \iint_D \sqrt{1 + ||\nabla f(u, v)||^2}\, du\, dv$$

Integrale di superficie

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare parametrizzata da $\sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che D è misurabile e $||\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)||$ è limitata $\forall(u, v) \in D$, $f : S' \to \mathbb{R}$ continua e limitata

$$\iint_S f\, dS := \iint_D f \cdot ||\sigma_u(u, v) \times \sigma_v(u, v)||\, du\, dv$$

si chiama integrale di superficie di f su S