Differenziali

Funzione continua

Definizione

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice continua in $\underline{p_0}$ se vale una delle seguenti:

- $\underline{p_0}$ è un punto isolato di A
- $\underline{p_0}$ è punto di accumulazione e $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = f(\underline{p_0})$

Si dice continua su A se è continua $\forall \underline{p_0} \in A$

Derivate parziali

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$
In particolare
$(x, y_0) \in A \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(x_0, y) \in A \quad \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$
Si dice che f è derivabile rispetto a x in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)$$

Si dice che f è derivabile rispetto a y in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0)$$

Si chiama il gradiente il vettore $\nabla f(\underline{p_0}) := (D_1 f(\underline{p_0}), D_2 f(\underline{p_0}))$

In n variabili

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{e_i}$ versore di x_i

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{p_0} + h \cdot \hat{e_i}) - f(\underline{p_0})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) = D_i(\underline{p_0})$$

Differenziabilità

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto
Se $\exists a, b \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \implies$$

il piano $\pi : z = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)$ si dice piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ e f si dice differenziabile nel punto (x_0,y_0)

Teorema

Se f è differenziabile in $\underline{p_0} \implies \exists \nabla f(\underline{p_0})$ e $a = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}),\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})$

Dimostrazione

Se $y = y_0 \implies$

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - [a(x-x_0) + f(x_0,y_0)]}{|x-x_0|} \iff \exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) = a$$

Analogamente con $x = x_0$

Differenziale

Definizione

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L(\underline{p_0})(v_1, v_2) := \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0}) \cdot v_2 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si chiama differenziale di f in $\underline{p_0}$ denotato anche come $df(\underline{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})dy$
Se f è differenziabile in $\underline{p_0}$ esiste il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(\underline{p_0}))$
$\pi : z = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (\underline{p} - \underline{p_0}) + f(\underline{p_0})$

In n variabili

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L(\underline{p_0})(\hat{v}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n$

Continuità

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $\underline{p_0} \in A \implies f$ è continua in $\underline{p_0}$

Dimostrazione

$$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p}) - [\nabla f(\underline{p_0})(\underline{p} - \underline{p_0}) + f(\underline{p_0})]}{\mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0})} = 0$$

$$L(\underline{p_0})(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (\hat{v})$$

$$f(\underline{p}) - f(\underline{p_0}) = \frac{f(\underline{p}) - [L(\underline{p_0})(\underline{p} - \underline{p_0}) + f(\underline{p_0})]}{\mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0})} \cdot \mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0}) + L(\underline{p_0})(\underline{p} - \underline{p_0})$$

$$\lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} L(\underline{p_0})(\underline{p} - \underline{p_0}) = 0 \implies \exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) - f(\underline{p_0}) = 0$$

Condizioni sulle derivate parziali che assicurano la differenziabilità

Teorema del differenziale totale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} \in A$
Se:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue in $\underline{p_0}$

$\implies f$ è differenziabile in $\underline{p_0}$

Osservazione

E' sufficiente richiedere le ipotesi su un intorno di $\underline{p_0}$

Definizione

f si dice differenziabile in $\underline{p_0}$ se $\exists L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p}) - f(\underline{p_0}) - L(\underline{p_0})(\underline{p} - \underline{p_0})}{\mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0})} = 0 \implies$$

- $\exists \nabla f(\underline{p_0})$
- $L(\underline{p_0})(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$
- f è continua in $\underline{p_0}$

f si dice differenziabile su A se è differenziabile in ogni punto di A
f si dice di classe $\mathrm{C}^1(A)$ se è continua ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ continue

Osservazione

$f \in \mathrm{C}^1(A) \implies f$ è differenziabile in ogni punto $\underline{p_0} \in A$

Derivate direzionali

Definizione

$\hat{v}$ si dice direzione se $||\hat{v}|| = 1$
f è derivabile rispetto a $\hat{v}$ in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{p_0} + h\hat{v}) - f(\underline{p_0})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0})$$

Osservazione

$F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\underline{p_0} + t\hat{v})$ per $t \in (-\delta, \delta) \implies$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

e $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = F'(0)$

Teorema

f differenziabile in $\underline{p_0} \implies \exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = L(\underline{p_0})(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$

Dimostrazione

Per ipotesi f è differenziabile in $\underline{p_0} \implies$

$$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p}) - f(\underline{p_0}) - \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (\underline{p} - \underline{p_0})}{\mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0})} = 0$$

che è equivalente a $f(\underline{p}) = f(\underline{p_0}) + \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (\underline{p} - \underline{p_0}) + o(\mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0})) \quad \forall \underline{p} \in A$
si ottiene $F(h) := f(\underline{p_0} + h\hat{v}) = f(\underline{p_0}) + \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (h\hat{v}) + o(\mathrm{d}(\underline{p_0} + h\hat{v}, \underline{p_0}))$
$= F(0) + h(\nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}) + o(|h|)$

$$\implies \exists F'(0) := \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v} = L(\underline{p_0})(\hat{v})$$

Teorema del valore intermedio

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$
Se:

- $\exists \underline{p}, \underline{q} \in A : [\underline{p}, \underline{q}] := \{t\underline{q} + (1-t)\underline{p} : t \in [0,1]\} \subset A$
- f è continua su $[\underline{p}, \underline{q}]$ e differenziabile su $(\underline{p}, \underline{q})$

$$\implies \exists \underline{c} \in (\underline{p}, \underline{q}) : f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{q} - \underline{p})$$

Dimostrazione

Supponiamo $\underline{p} \neq \underline{q}$
$\hat{v} = \frac{\underline{q} - \underline{p}}{||\underline{q} - \underline{p}||}$ direzione di $\mathbb{R}^2$
$F(t) := f(\underline{p} + t\hat{v})$, $r \in [0, ||\underline{p} - \underline{q}||]$ è ben definita per la prima ipotesi e $F(||\underline{q} - \underline{p}||) = f(\underline{q})$
Per la seconda ipotesi F è continua e $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p} + t\hat{v}) \quad \forall t \in (0, ||\underline{q} - \underline{p}||)$
Per il teorema in una variabile:
$f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = F(||\underline{q} - \underline{p}||) - F(0) = F'(t)||\underline{q} - \underline{p}|| = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p} + t\hat{v})||\underline{q} - \underline{p}|| =$
$(\nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \cdot \hat{v})||\underline{q} - \underline{p}|| = \left(\nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \frac{\underline{q} - \underline{p}}{||\underline{q} - \underline{p}||}\right)||\underline{q} - \underline{p}||$
Scegliendo $\underline{c} = \underline{p} + t\hat{v}$ otteniamo la tesi

Matrice Jacobiana

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathrm{C}^1(A)$
Si chiama matrice Jacobiana di f in $\underline{p} \in A$ la matrice

$$J_f(\underline{p}) = Df(\underline{p}) := \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{p}) \\ \dots \\ \nabla f_m(\underline{p}) \end{bmatrix}$$

Derivate parziali di una funzione composta

Teorema

$g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$
Se:

- $g(A) \subset B$
- $g = (g_1, \dots, g_m), f = (f_1, \dots, f_k)$
- $g_i : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x_0} \in A \;\; \forall i \in \{1, \dots, m\}$
- $f_j : B \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{y_0} = g(\underline{x_0}) \in B \;\; \forall j \in \{1, \dots, k\}$
- $h := f \circ g$

$$\implies J_h(\underline{x_0}) = J_f(\underline{y_0}) \cdot J_g(\underline{x_0}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{y_0}) \\ \dots \\ \nabla f_k(\underline{y_0}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla g_1(\underline{x_0}) \\ \dots \\ \nabla g_m(\underline{x_0}) \end{bmatrix}$$

Derivate parziali di ordine superiore

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \implies$
Sono dette derivate parziali seconde pure

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e derivate parziali seconde miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Teorema di Schwarz

Se le derivate parziali seconde miste sono continue $\implies$ coincidono

Polinomi di Taylor

Definizione

$m \in \mathbb{N}$, $\underline{p_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
Si chiama polinomio di Taylor di ordine m di $n = 2$ variabili centrato in $\underline{p_0}$ una funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T_m(x, y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,n-i}(x - x_0)^i (y - y_0)^{n-i} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

tale che $f(\underline{p}) = T(\underline{p}) + o(||\underline{p} - \underline{p_0}||^m)$

Matrice Hessiana

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^2(A)$
Si chiama matrice Hessiana di f in $\underline{p} \in A$ la matrice

$$H_f(\underline{p}) = D^2 f(\underline{p}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{p}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{p}) \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{p}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(\underline{p}) \\ \dots \\ \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\underline{p}) \end{bmatrix}$$

Osservazione

$H_f(\underline{p})$ è simmetrica

Teorema

$T_2(\underline{p}) = f(\underline{p_0}) + \langle \nabla f(\underline{p}), (\underline{p} - \underline{p_0}) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\underline{p}) \cdot (\underline{p} - \underline{p_0})^T, (\underline{p} - \underline{p_0}) \rangle$

Dimostrazione

$\underline{p} \in \mathrm{B}(\underline{p_0}, r)$, $\hat{v} := \frac{\underline{p}-\underline{p_0}}{||\underline{p}-\underline{p_0}||} = (v_1, v_2)$, $F(t) := f(\underline{p_0} + t\hat{v})\ \ t \in (-r, r)$

Poiché $g(t) = \underline{p_0} + t\hat{v} \in \mathrm{C}^2((-r, r))$ anche $F(t) = f(g(t)) \in \mathrm{C}^2((-r, r))$

Applicando la formula di Taylor in una variabile per $t = 0$ si ottiene

$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2} F''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$

$F'(t) = \nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \cdot \hat{v}$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{p_0} + t\hat{v}) \cdot v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{p_0} + t\hat{v}) \cdot v_1 \cdot v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{p_0} + t\hat{v}) \cdot v_2^2$$

$F(0) = f(\underline{p_0})$, $F'(0) = \langle \nabla f(\underline{p_0}), \hat{v} \rangle$, $F''(0) = \langle H_f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}^T, \hat{v} \rangle$

$F(t) = f(\underline{p_0}) + \langle \nabla f(\underline{p_0}), \hat{v} \rangle t + \frac{1}{2} \langle H_f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}^T, \hat{v} \rangle t^2 + o(t^2)$

Sostituendo $t = \underline{p} - \underline{p_0}$ e $\hat{v}$ si ottiene la tesi

Massimi e minimi

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\underline{p_0} \in A$ si dice punto di

- massimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(\underline{p}) \le f(\underline{p_0})\ \ \forall \underline{p} \in A \cap B(\underline{p_0}, r_0)$
- massimo assoluto di f in A se $f(\underline{p}) \le f(\underline{p_0})\ \ \forall \underline{p} \in A$
- minimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(\underline{p}) \ge f(\underline{p_0})\ \ \forall \underline{p} \in A \cap B(\underline{p_0}, r_0)$
- minimo assoluto di f in A se $f(\underline{p}) \ge f(\underline{p_0})\ \ \forall \underline{p} \in A$

I punti di massimo e minimo relativi sono detti estremi liberi

Osservazione

Non confondere punto di massimo e massimo di una funzione: $\mathrm{Max}_A f := \mathrm{Max}\{f(\underline{p}) : p \in A\}$ se esiste è unico

Teorema

A aperto, se $\exists \underline{p_0} \in A$ tale che:

- $\exists \nabla f(\underline{p_0})$
- $\underline{p_0}$ è un estremo libero di f in A

$\implies \nabla f(\underline{p_0}) = \underline{0}$

Dimostrazione

$\underline{p_0} = (x_0, y_0)$, A aperto $\implies \exists \delta > 0 : \underline{p_0} + t\underline{i} = (x_0 + t, y_0) \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$
$F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\underline{p_0} + t\underline{i})$
Dalle ipotesi:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) \iff F$ è derivabile in $t = 0$ e $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})$
- $t = 0$ è un estremo libero di F

Per il teorema in una variabile $F'(0) = 0$, analogamente per $\underline{j} \implies \nabla f(\underline{p_0}) = (0, 0) = \underline{0}$

Definizione

Un punto $\underline{p_0} \in A$ si chiama punto stazionario o critico di f se $\exists \nabla f(\underline{p_0}) = \underline{0}$

Matrice positiva

Definizione

$H \in M_n(\mathbb{R})$ si dice:

- positiva se $H\hat{v} \cdot \hat{v} > 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita positiva se $H\hat{v} \cdot \hat{v} \geq 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- negativa se $H\hat{v} \cdot \hat{v} < 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita negativa se $H\hat{v} \cdot \hat{v} \leq 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$H = [h_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$

$$D_i := \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \dots & & \dots \\ h_{i_1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq n$$

H è:

- positiva $\iff D_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- negativa $\iff D_i > 0$ per i pari, $D_i < 0$ per i dispari
- se $\det(H) \neq 0$ e nessuna delle condizioni precedenti $\implies$ non è semi-definita

Osservazione

$H \in M_2(\mathbb{R}) \implies H$ è:

- positiva se $h_{11} > 0 \wedge \det(H) > 0$
- negativa se $h_{11} < 0 \wedge \det(H) > 0$
- se $\det(H) < 0 \implies$ non è semi-definita

Matrice Hessiana ed estremi liberi

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathrm{C}^2(A)$, $\underline{p_0}$ punto stazionario
Se $H_f(\underline{p_0})$ è:

- positiva $\implies \underline{p_0}$ è un punto di minimo relativo
- negativa $\implies \underline{p_0}$ è un punto di massimo relativo
- non semi-definita $\implies \underline{p_0}$ è un punto di sella

Teorema di Weierstrass

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua su A limitato e chiuso
$\implies \exists \mathrm{Max}_A f = f(p_1) \wedge \exists \mathrm{Min}_A f = f(p_2) \;\; \underline{p_i} \in A \;\; i = 1, \dots, n$
si verifica una delle seguenti per ogni punto:

- $\underline{p_i} \in \mathring{A} \wedge \exists \nabla f(\underline{p_i}) = \underline{0}$
- $\underline{p_i} \in \mathring{A} \wedge \nexists \nabla f(\underline{p_i})$
- $\underline{p_i} \in \partial A$

Parametrizzazione

Definizione

Si chiama parametrizzazione della frontiera ∂A una funzione $\gamma : B \subset \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
$\gamma(t_1, \dots, t_n) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n+1}(t))$, con le seguenti proprietà:

- B chiuso e limitato
- $\gamma(B) = \partial A$
- $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1} \in \mathrm{C}^0(B) \cap \mathrm{C}^1(\mathring{B})$

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^1(A)$ da massimizzare/minimizzare sulla frontiera
$F : B \to \mathbb{R}$, $F(t_1, \dots, t_n) := f(\gamma(t_1, \dots, t_n)) \implies$

- $\mathrm{Max}_{\partial A} f = \mathrm{Max}_B F$
- $\mathrm{Min}_{\partial A} f = \mathrm{Min}_B F$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Definizione

Se $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \le 0\} \implies \partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$
Un insieme del piano $V := \partial A$ è detto vincolo ed è una curva

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, V vincolo
Se:

- $\exists \mathrm{Min}_V f = f(\underline{p_0})\ \ \underline{p_0} \in V$ (o Max)
- $\exists \nabla g(\underline{p_0}) \neq (0, 0)$

$\implies \exists \lambda_0$ detto moltiplicatore tale che (x_0, y_0, λ_0) è un punto stazionario di
$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$ detta funzione lagrangiana
Ovvero

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \end{cases}$$

Un punto $\underline{p_0} \in V$ verificante tali condizioni per un opportuno λ_0 si dice punto stazionario di f rispetto a V, pertanto vanno ovviamente studiati anche i punti stazionari di f nella parte interna $\mathring{A}$

Teorema

Se $g(\underline{p_0}) = 0$ e $\exists \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p_0}) \neq 0$ (o analogamente con x) $\implies V$ è localmente grafico di una funzione $y = \varphi(x)$, cioè $\exists \delta > 0$ e $\varphi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$, $\exists r > 0$ tali che

- $V \cap \mathrm{B}(\underline{p_0}, r) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$
- φ è derivabile e

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Se $\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p_0}) \neq 0$ (analogamente con x), $h := f(x, \varphi(x)) \;\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
Essendo $\underline{p_0} \in V$ punto di minimo di f su $V \implies x_0$ è un punto di minimo di h su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $h \in \mathrm{C}^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$
Per quanto visto prima

$$0 = h'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) - \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0}) \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\underline{p_0})}{\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p_0})}$$

$$\iff \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\underline{p_0}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p_0}) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \nabla f(\underline{p_0}) \\ \nabla g(\underline{p_0}) \end{bmatrix} = 0 \iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{p_0}) = -\lambda_0 \cdot \nabla g(\underline{p_0})$$

Teorema

$f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^3)$, $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$
Se:

- $\exists \mathrm{Min}_V f = f(\underline{p_0})$ (o Max)
- $\nabla g(\underline{p_0}) \neq (0, 0, 0)$

$\implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{p_0}) = -\lambda_0 \cdot \nabla g(\underline{p_0})$