Notazione

Funzioni di più variabili e funzioni vettoriali

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è una funzione

- di più variabili se $k = 1 \land n \geq 2$
- vettoriale di più variabili se $k \geq 2 \land n \geq 2$

Insieme

$A \subset \mathbb{R}^n$

Intorno

Si chiama intorno sferico di $p_0 \in \mathbb{R}^n$ di raggio $r > 0$ l'insieme $\mathrm{B}(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(p, p_0) < r\}$

Punto di frontiera

$p_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di frontiera di A se $\mathrm{B}(p_0, r) \cap A \neq \emptyset \land \mathrm{B}(p_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \ \ \forall r > 0$
L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A

Insieme chiuso

A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A

Insieme aperto

A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera

Parte interna

L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con $\mathring{A}$

Insieme limitato

A è detto limitato se $\exists r > 0 : A \subset \mathrm{B}(\underline{0}, r)$

Punto di accumulazione

$p_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di accumulazione per A se $\mathrm{B}(p_0, r) \cap (A \setminus \{p_0\}) \neq \emptyset \ \ \forall r > 0$

Punto isolato

$p_0 \in A$ si dice punto isolato di A se non è un punto di accumulazione

Limite

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, p_0 punto di accumulazione di A
Il limite

$$\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = l \in \mathbb{R}$$

se
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |f(p) - l| < \epsilon \;\; \forall (p) \in \mathrm{B}(p, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$

$f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, p_0 punto di accumulazione di A
Se $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = l \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{p \to p_0} g(p) = m \in \mathbb{R} \implies$

- $\exists \lim_{p \to p_0} (f(p) + g(p)) = l + m$
- $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) \cdot g(p) = l \cdot m$
- Se $g(p) \neq 0 \;\; \forall p \in (A \setminus \{p_0\})$ e $m \neq 0 \implies$

  $$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{l}{m}$$

- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $h(p) := F(f(p)) \implies \exists \lim_{p \to p_0} h(p) = F(l)$
- $h : A \to \mathbb{R}$, $f(p) \leq h(p) \leq g(p) \;\; \forall p \in (A \setminus \{p_0\})$ se $l = m \implies \exists \lim_{p \to p_0} g(p) = l$

Limite lungo direzioni

Funzione restrizione: $B \subset A$, $f|_B : B \to \mathbb{R}$, $f|_B(p) := f(p)$ se $p \in B$

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, p_0 punto di accumulazione di A, sono equivalenti:

- $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = l$
- $\forall B \subset A$ per cui p_0 è punto di accumulazione di B $\exists \lim_{p \to p_0} f|_B(p) = l$