Notazione

Funzioni di più variabili e funzioni vettoriali

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ è una funzione

- di più variabili se $k = 1 \wedge n \geq 2$
- vettoriale di più variabili se $k \geq 2 \wedge n \geq 2$

Insieme

$A \subset \mathbb{R}^n$

Intorno

Si chiama intorno sferico di $\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ di raggio $r > 0$ l'insieme $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r) := \{\underline{p} \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}(\underline{p}, \underline{p_0}) < r\}$

Punto di frontiera

$\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di frontiera di A se $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r) \cap A \neq \emptyset \wedge \mathrm{B}(\underline{p_0}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \;\; \forall r > 0$
L'insieme di tutti i punti di frontiera di A è detto frontiera di A e si denota con ∂A

Insieme chiuso

A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A

Insieme aperto

A è detto aperto se non contiene alcun punto della sua frontiera

Parte interna

L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera si chiama parte interna di A e si denota con $\mathring{A}$

Insieme limitato

A è detto limitato se $\exists r > 0 : A \subset \mathrm{B}(\underline{0}, r)$

Punto di accumulazione

$\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di accumulazione per A se $\mathrm{B}(\underline{p_0}, r) \cap (A \setminus \{\underline{p_0}\}) \neq \emptyset \;\; \forall r > 0$

Punto isolato

$\underline{p_0} \in A$ si dice punto isolato di A se non è un punto di accumulazione

Limite

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p_0}$ punto di accumulazione di A
Il limite

$$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = l \in \mathbb{R}$$

se
$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |f(\underline{p}) - l| < \epsilon \;\; \forall (\underline{p}) \in \mathrm{B}(\underline{p}, \delta) \cap (A \setminus \{\underline{p_0}\})$

$f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p_0}$ punto di accumulazione di A
Se $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = l \in \mathbb{R}$ e $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} g(\underline{p}) = m \in \mathbb{R} \implies$

- $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} (f(\underline{p}) + g(\underline{p})) = l + m$
- $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) \cdot g(\underline{p}) = l \cdot m$
- Se $g(\underline{p}) \neq 0 \;\; \forall \underline{p} \in (A \setminus \{\underline{p_0}\})$ e $m \neq 0 \implies$

  $$\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p})}{g(\underline{p})} = \frac{l}{m}$$

- $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $h(\underline{p}) := F(f(\underline{p})) \implies \exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} h(\underline{p}) = F(l)$
- $h : A \to \mathbb{R}$, $f(\underline{p}) \leq h(p) \leq g(\underline{p}) \;\; \underline{\forall} p \in (A \setminus \{\underline{p_0}\})$ se $l = m \implies \exists \lim_{p \to \underline{p_0}} g(\underline{p}) = l$

Limite lungo direzioni

Funzione restrizione: $B \subset A$, $f|_B : B \to \mathbb{R}$, $f|_B(\underline{p}) := f(\underline{p})$ se $\underline{p} \in B$

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p_0}$ punto di accumulazione di A, sono equivalenti:

- $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f(\underline{p}) = l$
- $\forall B \subset A$ per cui $\underline{p_0}$ è punto di accumulazione di B $\exists \lim_{\underline{p} \to \underline{p_0}} f|_B(\underline{p}) = l$