Integrali

Integrale doppio su un rettangolo

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A = [a, b] \times [c, d]$, f limitata (e non negativa)
Il trapezoide sotteso al grafico di f in A è l'insieme dei punti
$T_f(A) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y) \land (x, y) \in A\}$

Suddivisione

Definizione

Si chiama suddivisione di $[a, b]$ un insieme finito $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$
Si chiama suddivisione di A l'insieme
$\mathcal{D} := \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 = \{x_0, \ldots, x_m\} \times \{y_0, \ldots, y_n\} = \{(x_i, y_j) : i = 0, \ldots, m \land j = 0, \ldots, n\}$
A resta suddiviso in $n \times m$ rettangoli $A_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ di area
$\text{area}(A_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$

Somma superiore e inferiore

Definizione

$M_{ij} := \sup_{A_{ij}}\{f\}$
$m_{ij} := \inf_{A_{ij}}\{f\}$

Si chiamano somma superiore e inferiore

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$$
$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$$

Proprietà:

- Se $f \geq 0$, $M_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$ e $m_{ij} \cdot \text{area}(A_{ij})$ rappresentano il volume di un parallelepipedo che approssima il grafico per eccesso e per difetto
- $\text{area}(A) \cdot \inf_A\{f\} \leq s(f, \mathcal{D}) \leq S(f, \mathcal{D}) \leq \text{area}(A) \cdot \sup_A\{f\}$
- $\mathcal{D}', \mathcal{D}''$ suddivisioni qualunque, $s(f, \mathcal{D}') \leq S(f, \mathcal{D}'')$

Funzione integrabile secondo Riemann

Definizione

Se $\sup\{s(f,\mathcal{D})\} = \inf\{S(f,\mathcal{D})\} = L \in \mathbb{R} \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e si denota

$$L = \iint_A f = \operatorname{vol}(T_f(A))$$

Teoremi

Esistenza dell'integrale

$f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$

Linearità

$\iint_A(\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g$

Monotonia

$g \leq f \implies \iint_A g \leq \iint_A f$

Valore assoluto

$|\iint_A f| \leq \iint_A |f|$

Teorema della media integrale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\inf_A\{f\} \leq \frac{1}{\operatorname{area}(A)} \iint_A f = z_0 \leq \sup_A\{f\}$$

Inoltre se $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies \exists \underline{p_0} : f(\underline{p_0}) = z_0$

Formula di riduzione sui rettangoli

Formula

Se $\forall y \in [c,d] \ \ x \in [a,b] \to f(x,y)$ è integrabile $\implies y \in [c,d] \to \int_a^b f(x,y)\,dx$ è integrabile e

$$\iint_A f = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

Viceversa in modo analogo

In particolare se $f \in \mathrm{C}^0(A)$ valgono entrambe e

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Integrale doppio su un insieme generale

Definizione

Se $A \subset \mathbb{R}^2$ è limitato ma non rettangolare è possibile definire una nuova funzione
$A \subset Q := [a,b] \times [c,d]$, $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Di conseguenza $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$\iint_A f = \iint_Q \tilde{f} = \mathrm{vol}(T_{\tilde{f}}(Q))$$

Osservazione

$\tilde{f}$ non è continua su ∂A
$T_{\tilde{f}}(Q) = P \cup T_f(A)$ dove P è una parte limitata del piano $z = 0$ e $\mathrm{vol(P)} = 0$
Se non fosse definita $\mathrm{area}(A)$ non sarebbe possibile calcolare l'integrale doppio

Insieme misurabile

Definizione

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := 1$ se $(x,y) \in A$
A si dice misurabile secondo Peano-Jordan se $f \in \mathcal{R}(A)$ e $\mathrm{area}(A) = |A|_2 = \iint_A f$

Osservazione

$Q = [a,b] \times [c,d]$ è misurabile e $|Q|_2 = (b-a) \cdot (d-c)$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato
A è misurabile $\iff$ ∂A è misurabile e $|\partial A|_2 = 0$

Teorema

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile
$\implies$ $G_g := \{(x, g(x)) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$ è misurabile e $|G_g|_2 = 0$

Osservazione

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, $g_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}$ continua (e quindi integrabile) ($i = 1, \dots, k$)
$\partial A = \bigcup_{i=1}^k G_{g_i} = G_{g_1} \cup \ldots \cup G_{g_k}$ $\implies$ A è misurabile

Integrale doppio su un insieme misurabile

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^0(A)$ limitata, $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile
$\implies$ $f \in \mathcal{R}(A)$

Osservazione

Se A è chiuso e limitato, allora se f è continua è sicuramente anche limitata e quindi $f \in \mathcal{R}(A)$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile, $A = B \cup C$ misurabili, $|C|_2 = 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\implies \iint_A f = \iint_B f$$

Osservazione

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\implies \iint_A f = \iint_{\mathring{A}} f$$

Integrale doppio su un dominio semplice e formula di riduzione

Definizione

$A \subset \mathbb{R}^2$ si dice semplice o normale rispetto all'asse y se

- $\exists g_1, g_2 \in \mathrm{C}^0([a,b]) : g_1 \leq g_2$ su $[a,b]$
- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$

Analogamente rispetto all'asse x
Un dominio semplice è limitato e misurabile

Formule

$A \subset \mathbb{R}^2$ semplice rispetto a y, $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$|A|_2 = \iint_A 1 = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\,dx$$

$$\iint_A f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Analogamente per x

Additività dell'integrale doppio

Teorema

$A_1, \ldots, A_m \subset \mathbb{R}^2$ insiemi semplici tali che $A_i \cap A_j \subset \partial A_i \cap \partial A_j \;\; \forall i,j \in \{1,\ldots,m\} \wedge i \neq j$,
$B = A_1 \cup \ldots \cup A_m$, $f : B \to \mathbb{R}$ tale che $f \in \mathcal{R}(A_i) \;\; \forall i \in \{1,\ldots,m\}$
$\implies f \in \mathcal{R}(B)$ e

$$\iint_B f = \sum_{i=1}^{m} \iint_{A_i} f$$

Sostituzione di variabili

Definizione

$D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ aperti, limitati e misurabili, $\psi : D^* \to D$, $\psi(u,v) = (\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))$
La mappa ψ si dice cambiamento o sostituzione di variabili se:

- è biiettiva
- $\psi_i \in \mathrm{C}^1(D^*)$ e $\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \psi_i}{\partial v} : D^* \to \mathbb{R}$ sono limitate ($i = 1, 2$)
- $\det(J_\psi(u,v)) \neq 0 \ \ \forall (u,v) \in D^*$

Per definizione $dD^* = du\,dv$, $dD = dx\,dy$ e per la sostituzione $dD = |\det(J_\psi(u,v))| dD^*$

Teorema

$D, D^* \subset \mathbb{R}^2$ aperti, limitati e misurabili, $\psi : D^* \to D$ cambiamento di variabili

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(\psi(u,v)) \cdot |\det(J_\psi(u,v))|\,du\,dv$$

Rotazione del sistema di riferimento

In alcuni casi potrebbe essere utile ruotare il sistema di riferimento per rendere semplice un dominio, come nel caso di un rettangolo ruotato che andrebbe altrimenti diviso in 3 o in 2 se quadrato
Quindi scegliamo due nuovi assi u e v in modo che
$y = mx + u$ e $y = -\frac{x}{m} + v$
Ovvero $u = y - mx$ e $u = y + \frac{x}{m}$
Con alcuni calcoli si ottiene

$$\psi(u,v) = \left(m\frac{v-u}{1+m^2}, \frac{m^2 v + u}{1+m^2} \right)$$

Il fattore di trasformazione è il valore assoluto del determinante

$$\det(J_\psi(u,v)) = -\frac{m}{1+m^2}$$

Integrale triplo su un parallelepipedo

Suddivisione

Definizione

$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$
$\mathcal{D}_1 := \{a_1 = x_0 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_m = b_1\}$ suddivisione di $[a_1, b_1]$
$\mathcal{D}_2 := \{a_2 = y_0 \leq \ldots \leq y_j \leq \ldots \leq y_n = b_2\}$ suddivisione di $[a_2, b_2]$
$\mathcal{D}_3 := \{a_3 = z_0 \leq \ldots \leq z_k \leq \ldots \leq z_p = b_3\}$ suddivisione di $[a_3, b_3]$
$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2 \times \mathcal{D}_3$ si chiama suddivisione di A
A risulta diviso in $m \times n \times p$ parallelepipedi $A_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$ di volume
$\mathrm{vol}(A_{ijk}) = |A_{ijk}|_3 = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) \cdot (z_k - z_{k-1})$
$(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p)$

Somma superiore e inferiore

Definizione

$M_{ijk} := \sup_{A_{ijk}}\{f\}$
$m_{ijk} := \inf_{A_{ijk}}\{f\}$

Si chiamano somma superiore e inferiore

$$S(f, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} M_{ijk} \cdot \mathrm{vol}(A_{ijk})$$
$$s(f, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} m_{ijk} \cdot \mathrm{vol}(A_{ijk})$$

Funzione integrabile secondo Riemann

Definizione

Se $\sup\{s(f, \mathcal{D})\} = \inf\{S(f, \mathcal{D})\} = L \in \mathbb{R} \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e si denota

$$L = \iiint_A f$$

Teoremi

Esistenza dell'integrale

$f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$

Linearità

$\iiint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iiint_A f + \beta \iiint_A g$

Monotonia

$g \leq f \implies \iiint_A g \leq \iiint_A f$

Valore assoluto

$|\iiint_A f| \leq \iiint_A |f|$

Teorema della media integrale

$f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\inf_A\{f\} \leq \frac{1}{\text{vol}(A)} \iint_A f = w_0 \leq \sup_A\{f\}$$

Inoltre se $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies \exists \underline{p_0} : f(\underline{p_0}) = w_0$

Formule di riduzione sui parallelepipedi

Formule

$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $f \in \mathrm{C}^0(A)$

Note

Cosa sto facendo quando calcolo un integrale triplo?
Riportiamoci in due variabili, l'idea è di calcolare una somma di aree per ottenere un volume
In questo caso io quando calcolo l'integrale sto integrando sempre per fili perché sia se integro per x o per y io sto calcolando nel primo integrale un'area rispetto ad un filo per x o y e poi attraverso il secondo calcolo le aree rispetto ad un filo per l'altra variabile ed in questo modo ottengo il volume sotteso grafico della funzione

In tre variabili invece l'idea è che calcolo una somma di volumi rispetto ad altezze diverse, perciò in questo caso io posso scegliere se integrare prima per il filo e poi per la superficie e viceversa, ovvero integro 3 volte per fili.

Riduzione per fili

$\forall z \in [a_3, b_3] \;\; (x,y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$ è integrabile su $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ e

$$\iiint_A f = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

Analogamente per x e y

Note

Effettuando prima l'integrazione per il filo noi stiamo calcolando un'area rispetto ad un filo di una delle variabili (x, y, z) e poi quest'area la andiamo a calcolare rispetto ad una superficie (le altre 2 variabili rimanenti), ovvero sommiamo l'area per ogni punto della superficie, se pensiamo alla superficie come un'insieme di fili noi stiamo calcolando un numero di volumi pari alla lunghezza del terzo filo
La somma di questi volumi è il risultato dell'integrale

Riduzione per strati

$\forall (x,y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \;\; z \in [a_3, b_3] \to \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z)\,dx\,dz$ è integrabile su $[a_3, b_3]$ e

$$\iiint_A f = \int_{a_3}^{b_3} \left(\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

Analogamente per x e y

Note

Effettuando prima l'integrazione per la superficie noi stiamo calcolando direttamente un volume, ovvero abbiamo calcolato un integrale doppio, un integrale calcolato per fili 2 volte
Poi come ultimo integrale abbiamo un'altra integrazione per fili del volume ottenuto rispetto a 2 variabili ed infine come in precedenza andiamo a sommare il volume per ogni punto del filo ovvero rispetto all'ultima variabile
Come prima il risultato è una somma di volumi per ogni punto del filo che corrisponde al risultato dell'integrale triplo

Integrale triplo su un insieme generale

Definizione

Se $A \subset \mathbb{R}^3$ è limitato ma non parallelepipedo è possibile definire una nuova funzione
$A \subset Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in A \\ 0, & (x, y, z) \in Q \setminus A \end{cases}$$

Di conseguenza $\tilde{f} \in \mathcal{R}(Q) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$\iiint_A f = \iiint_Q \tilde{f}$$

Insieme misurabile

Definizione

$A \subset \mathbb{R}^3$ limitato, $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 1$ se $(x, y, z) \in A$
A si dice misurabile secondo Peano-Jordan se $f \in \mathcal{R}(A)$ e $\mathrm{vol}(A) = |A|_3 = \iiint_A f$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^3$ limitato
A è misurabile $\iff$ ∂A è misurabile e $|\partial A|_3 = 0$

Teorema

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile, $g \in \mathcal{R}(E)$
$\implies G_g := \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in E\} \subset \mathbb{R}^3$ è misurabile e $|G_g|_3 = 0$

Integrale triplo su un insieme misurabile

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^0(A)$ limitata, $A \subset \mathbb{R}^3$ limitato e misurabile
$\implies f \in \mathcal{R}(A)$

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^3$ limitato e misurabile, $A = B \cup C$ misurabili, $|C| = 0$, $f \in \mathcal{R}(A)$

$$\implies \iiint_A f = \iiint_B f$$

Integrale triplo su un dominio semplice e formule di riduzione

Definizione

$A \subset \mathbb{R}^3$ si dice semplice o normale rispetto all'asse z se

- $\exists g_1, g_2 \in \mathrm{C}^0(E) : g_1 \leq g_2$ su $E \in \mathbb{R}^2$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E \wedge g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$

Analogamente rispetto agli assi x e y
Un dominio semplice è limitato e misurabile

Formule

Formula generale di riduzione per fili
$A \subset \mathbb{R}^3$ semplice rispetto a z, $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$\iiint_A f = \iint_E \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy$$

Analogamente per x e y

Formula generale di riduzione per strati
$A \subset \mathbb{R}^3$ limitato e misurabile, $A = A \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [a, b])$
$A_z := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$ misurabile, $f \in \mathrm{C}^0(A) \implies f \in \mathcal{R}(A)$ e

$$\iiint_A f = \int_a^b \left(\iint_{A_z} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz$$

Analogamente per x e y

Applicazione della riduzione per strati al volume di un solido per rotazione >

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b] \wedge x^2 + y^2 \leq g(z)^2\}$, $g \in \mathrm{C}^0([a, b])$, $g(z) \geq 0 \;\; \forall z \in [a, b]$
A può essere visto come la rotazione di $F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b] \wedge 0 \leq y \leq g(z)\}$ (o analogamente per x)
$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq g(z)^2\}$ è uno strato, più nello specifico un cerchio di area $\mathrm{area}(A_z) = |A_z|_2 = \pi \cdot g(z)^2$ e

$$|A|_3 = \iiint_A 1 = \int_a^b \left(\iint_{A_z} 1\, dx\, dy \right) dz = \int_a^b \mathrm{area}(A_z)\, dz = \pi \int_a^b g(z)^2\, dz$$

Sostituzione di variabili

Definizione

$D, D^* \subset \mathbb{R}^3$ aperti, limitati e misurabili, $\psi : D^* \to D$, $\psi(u, v, w) = (\psi_1(u, v, w), \psi_2(u, v, w), \psi_3(u, v, w))$
La mappa ψ si dice cambiamento o sostituzione di variabili se:

- è biiettiva
- $\psi_i \in \mathrm{C}^1(D^*)$ e $\psi_i, \frac{\partial \psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \psi_i}{\partial v}, \frac{\partial \psi_i}{\partial w} : D^* \to \mathbb{R}$ sono limitate $(i = 1, 2, 3)$
- $\det(J_\psi(u, v, w)) \neq 0 \;\; \forall (u, v, w) \in D^*$

Per definizione $dD^* = du\,dv\,dw$, $dD = dx\,dy\,dz$ e per la sostituzione $dD = |\det(J_\psi(u, v, w))| dD^*$

Teorema

$D, D^* \subset \mathbb{R}^3$ aperti, limitati e misurabili, $\psi : D^* \to D$ cambiamento di variabili

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D^*} f(\psi(u, v, w)) \cdot |\det(J_\psi(u, v, w))|\,du\,dv\,dw$$