

Differenziali

Funzione continua

Definizione

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $\underline{p_0}$ se vale una delle seguenti:

- $\underline{p_0}$ è un punto isolato di A
- $\underline{p_0}$ è punto di accumulazione e $\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p_0}} f(\underline{p}) = f(\underline{p_0})$

Si dice continua su A se è continua $\forall \underline{p_0} \in A$

Derivate parziali

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$

In particolare

$(x, y_0) \in A \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(x_0, y) \in A \quad \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$

Si dice che f è derivabile rispetto a x in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)$$

Si dice che f è derivabile rispetto a y in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} =: \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0)$$

Si chiama il gradiente il vettore $\nabla f(\underline{p_0}) := (D_1 f(\underline{p_0}), D_2 f(\underline{p_0}))$

In n variabili

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$, \hat{e}_i versore di x_i

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{p_0} + h \cdot \hat{e}_i) - f(\underline{p_0})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) = D_i(\underline{p_0})$$

Differenziabilità

Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto

Se $\exists a, b \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \implies$$

il piano $\pi : z = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)$ si dice piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e f si dice differenziabile nel punto (x_0, y_0)

Teorema

Se f è differenziabile in $\underline{p_0} \implies \exists \nabla f(\underline{p_0})$ e $a = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})$

Dimostrazione >

Se $y = y_0 \implies$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - [a(x-x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x-x_0|} \iff \exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) = a$$

Analogamente con $x = x_0$

Differenziale

Definizione

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(\underline{p_0})(v_1, v_2) := \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0}) \cdot v_2 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si chiama differenziale di f in $\underline{p_0}$ denotato anche come $df(\underline{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})dy$

Se f è differenziabile in $\underline{p_0}$ esiste il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(\underline{p_0}))$

$$\pi : z = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (\underline{p} - \underline{p_0}) + f(\underline{p_0})$$

In n variabili

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, L(\underline{p_0})(\hat{v}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) \hat{v}_i \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n$$

Continuità

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $\underline{p}_0 \in A \implies f$ è continua in \underline{p}_0

Dimostrazione >

$$\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{f(\underline{p}) - [\nabla f(\underline{p}_0)(\underline{p} - \underline{p}_0) + f(\underline{p}_0)]}{d(\underline{p}, \underline{p}_0)} = 0$$

$$L(\underline{p}_0)(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (\hat{v})$$

$$f(\underline{p}) - f(\underline{p}_0) = \frac{f(\underline{p}) - [L(\underline{p}_0)(\underline{p} - \underline{p}_0) + f(\underline{p}_0)]}{d(\underline{p}, \underline{p}_0)} \cdot d(\underline{p}, \underline{p}_0) + L(\underline{p}_0)(\underline{p} - \underline{p}_0)$$

$$\lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} L(\underline{p}_0)(\underline{p} - \underline{p}_0) = 0 \implies \exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} f(\underline{p}) - f(\underline{p}_0) = 0$$

Condizioni sulle derivate parziali che assicurano la differenziabilità

Teorema del differenziale totale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{p}_0 \in A$

Se:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue in \underline{p}_0

$\implies f$ è differenziabile in \underline{p}_0

Osservazione >

E' sufficiente richiedere le ipotesi su un intorno di \underline{p}_0

Definizione

f si dice differenziabile in $\underline{p_0}$ se $\exists L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p}) - f(\underline{p_0}) - L(\underline{p_0})(\underline{p} - \underline{p_0})}{d(\underline{p}, \underline{p_0})} = 0 \implies$$

- $\exists \nabla f(\underline{p_0})$
- $L(\underline{p_0})(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$
- f è continua in $\underline{p_0}$

f si dice differenziabile su A se è differenziabile in ogni punto di A

f si dice di classe $C^1(A)$ se è continua ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Osservazione >

$f \in C^1(A) \implies f$ è differenziabile in ogni punto $\underline{p_0} \in A$

Derivate direzionali

Definizione

\hat{v} si dice direzione se $\|\hat{v}\| = 1$

f è derivabile rispetto a \hat{v} in $\underline{p_0}$ se

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{p_0} + h\hat{v}) - f(\underline{p_0})}{h} =: \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0})$$

Osservazione >

$F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = f(\underline{p_0} + t\hat{v})$ per $t \in (-\delta, \delta) \implies$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = F'(0)$$

Teorema

f differenziabile in $\underline{p}_0 \implies \exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p}_0) = L(\underline{p}_0)(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v}$

Dimostrazione >

Per ipotesi f è differenziabile in $\underline{p}_0 \implies$

$$\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{f(\underline{p}) - f(\underline{p}_0) - \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_0)}{d(\underline{p}, \underline{p}_0)} = 0$$

che è equivalente a $f(\underline{p}) = f(\underline{p}_0) + \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_0) + o(d(\underline{p}, \underline{p}_0)) \quad \forall \underline{p} \in A$

si ottiene $F(h) := f(\underline{p}_0 + h\hat{v}) = f(\underline{p}_0) + \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (h\hat{v}) + o(d(\underline{p}_0 + h\hat{v}, \underline{p}_0))$

$$= F(0) + h(\nabla f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v}) + o(|h|)$$

$$\implies \exists F'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \nabla f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v} = L(\underline{p}_0)(\hat{v})$$

Teorema del valore intermedio

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Se:

- $\exists \underline{p}, \underline{q} \in A : [\underline{p}, \underline{q}] := \{t\underline{q} + (1-t)\underline{p} : t \in [0, 1]\} \subset A$
- f è continua su $[\underline{p}, \underline{q}]$ e differenziabile su $(\underline{p}, \underline{q})$

$$\implies \exists \underline{c} \in (\underline{p}, \underline{q}) : f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{q} - \underline{p})$$

Dimostrazione >

Supponiamo $\underline{p} \neq \underline{q}$

$\hat{v} = \frac{\underline{q} - \underline{p}}{\|\underline{q} - \underline{p}\|}$ direzione di \mathbb{R}^2

$F(t) := f(\underline{p} + t\hat{v})$, $t \in [0, \|\underline{q} - \underline{p}\|]$ è ben definita per la prima ipotesi e $F(\|\underline{q} - \underline{p}\|) = f(\underline{q})$

Per la seconda ipotesi F è continua e $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p} + t\hat{v}) \quad \forall t \in (0, \|\underline{q} - \underline{p}\|)$

Per il teorema in una variabile:

$$\begin{aligned} f(\underline{q}) - f(\underline{p}) &= F(\|\underline{q} - \underline{p}\|) - F(0) = F'(t)\|\underline{q} - \underline{p}\| = \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p} + t\hat{v})\|\underline{q} - \underline{p}\| = \\ &= (\nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \cdot \hat{v})\|\underline{q} - \underline{p}\| = \left(\nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \frac{\underline{q} - \underline{p}}{\|\underline{q} - \underline{p}\|} \right) \|\underline{q} - \underline{p}\| \end{aligned}$$

Scegliendo $\underline{c} = \underline{p} + t\hat{v}$ otteniamo la tesi

Matrice Jacobiana

Definizione

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f \in C^1(A)$$

Si chiama matrice Jacobiana di f in $\underline{p} \in A$ la matrice

$$J_f(\underline{p}) = Df(\underline{p}) := \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{p}) \\ \dots \\ \nabla f_m(\underline{p}) \end{bmatrix}$$

Derivate parziali di una funzione composta

Teorema

$$g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Se:

- $g(A) \subset B$
- $g = (g_1, \dots, g_m), f = (f_1, \dots, f_k)$
- $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$
- $f_j : B \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{y}_0 = g(\underline{x}_0) \in B \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$
- $h := f \circ g$

$$\implies J_h(\underline{x}_0) = J_f(\underline{y}_0) \cdot J_g(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{y}_0) \\ \dots \\ \nabla f_k(\underline{y}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla g_1(\underline{x}_0) \\ \dots \\ \nabla g_m(\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

Derivate parziali di ordine superiore

Definizione

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, A \text{ aperto, se } \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \implies$$

Sono dette derivate parziali seconde pure

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

e derivate parziali seconde miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Teorema di Schwarz

Se le derivate parziali seconde miste sono continue \implies coincidono

Polinomi di Taylor

Definizione

$$m \in \mathbb{N}, \underline{p}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Si chiama polinomio di Taylor di ordine m di $n = 2$ variabili centrato in \underline{p}_0 una funzione $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$T_m(x, y) = \sum_{h=0}^m \sum_{i=0}^n c_{i,n-i} (x - x_0)^i (y - y_0)^{n-i} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

tale che $f(\underline{p}) = T(\underline{p}) + o(\|\underline{p} - \underline{p}_0\|^m)$

Matrice Hessiana

Definizione

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^2(A)$$

Si chiama matrice Hessiana di f in $\underline{p} \in A$ la matrice

$$H_f(\underline{p}) = D^2 f(\underline{p}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{p}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)(\underline{p}) \\ \vdots \\ \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\underline{p}) \end{bmatrix}$$

Q Osservazione >

$H_f(\underline{p})$ è simmetrica

Teorema

$$T_2(\underline{p}) = f(\underline{p}_0) + \langle \nabla f(\underline{p}), (\underline{p} - \underline{p}_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\underline{p}) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_0)^T, (\underline{p} - \underline{p}_0) \rangle$$

Dimostrazione >

$$\underline{p} \in B(\underline{p}_0, r), \hat{v} := \frac{\underline{p} - \underline{p}_0}{\|\underline{p} - \underline{p}_0\|} = (v_1, v_2), F(t) := f(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \quad t \in (-r, r)$$

Poiché $g(t) = \underline{p}_0 + t\hat{v} \in C^2((-r, r))$ anche $F(t) = f(g(t)) \in C^2((-r, r))$

Applicando la formula di Taylor in una variabile per $t = 0$ si ottiene

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2} F''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$$

$$F'(t) = \nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \cdot \hat{v}$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \cdot v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \cdot v_1 \cdot v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \cdot v_2^2$$

$$F(0) = f(\underline{p}_0), F'(0) = \langle \nabla f(\underline{p}_0), \hat{v} \rangle, F''(0) = \langle H_f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v}^T, \hat{v} \rangle$$

$$F(t) = f(\underline{p}_0) + \langle \nabla f(\underline{p}_0), \hat{v} \rangle t + \frac{1}{2} \langle H_f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v}^T, \hat{v} \rangle t^2 + o(t^2)$$

Sostituendo $t = \underline{p} - \underline{p}_0$ e \hat{v} si ottiene la tesi

Massimi e minimi

Definizione

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\underline{p}_0 \in A$ si dice punto di

- massimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(\underline{p}) \leq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A \cap B(\underline{p}_0, r_0)$
- massimo assoluto di f in A se $f(\underline{p}) \leq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A$
- minimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(\underline{p}) \geq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A \cap B(\underline{p}_0, r_0)$
- minimo assoluto di f in A se $f(\underline{p}) \geq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A$

I punti di massimo e minimo relativi sono detti estremi liberi

Osservazione >

Non confondere punto di massimo e massimo di una funzione: $\text{Max}_A f := \text{Max}\{f(\underline{p}) : \underline{p} \in A\}$ se esiste è unico

Teorema di Fermat

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, se $\exists \underline{p}_0 \in A$ tale che:

- $\exists \nabla f(\underline{p}_0)$
- \underline{p}_0 è un estremo libero di f in A

$$\implies \nabla f(\underline{p}_0) = \underline{0}$$

Dimostrazione >

A aperto $\implies \exists \delta > 0 : \underline{p}_0 + t\hat{e}_i \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$

$$F_i : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, F_i(t) = f(\underline{p}_0 + t\hat{e}_i)$$

Dalle ipotesi, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p}_0) \iff F$ è derivabile in $t = 0$ e $F'_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p}_0)$
- $t = 0$ è un estremo libero di F_i

Per il teorema in una variabile $F'_i(0) = 0 \implies \nabla f(\underline{p}_0) = (0, \dots, 0) = \underline{0}$

Definizione

Un punto $\underline{p}_0 \in A$ si chiama punto stazionario o critico di f se $\exists \nabla f(\underline{p}_0) = \underline{0}$

Matrice positiva

Definizione

$H = [h_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ si dice:

- positiva se $\langle H \cdot \hat{v}, \hat{v} \rangle > 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- semi-definita positiva se $\langle H \cdot \hat{v}, \hat{v} \rangle \geq 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativa se $\langle H \cdot \hat{v}, \hat{v} \rangle < 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- semi-definita negativa se $\langle H \cdot \hat{v}, \hat{v} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$D_i := \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \dots & & \dots \\ h_{i1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq n$$

H è:

- positiva $\iff D_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
- negativa $\iff D_i > 0$ per i pari, $D_i < 0$ per i dispari
- se $\det(H) \neq 0$ e nessuna delle condizioni precedenti \implies non è semi-definita

Q Osservazione >

$H \in M_2(\mathbb{R}) \implies H$ è:

- positiva se $h_{11} > 0 \wedge \det(H) > 0$
- negativa se $h_{11} < 0 \wedge \det(H) > 0$
- se $\det(H) < 0 \implies$ non è semi-definita

Matrice Hessiana ed estremi liberi

Teorema

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C^2(A)$, \underline{p}_0 punto stazionario

Se $H_f(\underline{p}_0)$ è:

- positiva $\implies \underline{p}_0$ è un punto di minimo relativo
- negativa $\implies \underline{p}_0$ è un punto di massimo relativo
- non semi-definita $\implies \underline{p}_0$ è un punto di sella

Teorema di Weierstrass

Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua su A limitato e chiuso

$$\implies \exists \text{Max}_A f = f(\underline{p}_1) \wedge \exists \text{Min}_A f = f(\underline{p}_2)$$

Per $\underline{p}_i \in A$ $i = 1, 2$ si verifica una delle seguenti:

- $\underline{p}_i \in \overset{\circ}{A} \wedge \exists \nabla f(\underline{p}_i) = \underline{0}$
- $\underline{p}_i \in \overset{\circ}{A} \wedge \nexists \nabla f(\underline{p}_i)$
- $\underline{p}_i \in \partial A$

Parametrizzazione

Definizione

Si chiama parametrizzazione della frontiera ∂A una funzione $\gamma : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma(t_1, \dots, t_n) = (\gamma_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \gamma_{n+1}(t_1, \dots, t_n))$, con le seguenti proprietà:

- B chiuso e limitato
- $\gamma(B) = \partial A$
- $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1} \in C^0(B) \cap C^1(\overset{\circ}{B})$

Teorema

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1(A)$ da massimizzare/minimizzare sulla frontiera

$F : B \rightarrow \mathbb{R}, F(t_1, \dots, t_n) := f(\gamma(t_1, \dots, t_n)) \implies$

- $\text{Max}_{\partial A} f = \text{Max}_B F$
- $\text{Min}_{\partial A} f = \text{Min}_B F$

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Definizione

Se $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\} \implies \partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$

Un insieme del piano $V := \partial A$ è detto vincolo ed è una curva

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2), V$ vincolo

Se:

- $\exists \text{Min}_V f = f(\underline{p_0}) \quad \underline{p_0} \in V$ (o Max)
- $\exists \nabla g(\underline{p_0}) \neq (0, 0)$

$\implies \exists \lambda_0$ detto moltiplicatore tale che (x_0, y_0, λ_0) è un punto stazionario di

$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$ detta funzione lagrangiana

Ovvero

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \end{cases}$$

Un punto $\underline{p_0} \in V$ verificante tali condizioni per un opportuno λ_0 si dice punto stazionario di f rispetto a V , pertanto vanno ovviamente studiati anche i punti stazionari di f nella parte interna $\overset{\circ}{A}$

Teorema

Se $g(\underline{p}_0) = 0$ e $\exists \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0) \neq 0$ (o analogamente con x) $\implies V$ è localmente grafico di una funzione $y = \varphi(x)$, cioè $\exists \delta > 0$ e $\varphi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists r_0 > 0$ tali che

- $V \cap B(\underline{p}_0, r_0) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$
- φ è derivabile e

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange >

Se $\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0) \neq 0$ (analogamente con x), $h := f(x, \varphi(x)) \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Essendo $\underline{p}_0 \in V$ punto di minimo di f su $V \implies x_0$ è un punto di minimo di h su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e

$h \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$

Per quanto visto prima

$$0 = h'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p}_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p}_0) \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\underline{p}_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0)}$$

$$\iff \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p}_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\underline{p}_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \nabla f(\underline{p}_0) \\ \nabla g(\underline{p}_0) \end{bmatrix} = 0$$

$$\iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{p}_0) = -\lambda_0 \cdot \nabla g(\underline{p}_0)$$

Teorema

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$

Se:

- $\exists \text{Min}_V f = f(\underline{p}_0)$ (o Max)
- $\nabla g(\underline{p}_0) \neq (0, 0, 0)$

$$\implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{p}_0) = -\lambda_0 \cdot \nabla g(\underline{p}_0)$$