Differenziali

Funzione continua

Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice continua in p_0 se vale una delle seguenti:

- p_0 è un punto isolato di A
- p_0 è punto di accumulazione e $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$
  Si dice continua su A se è continua $\forall p_0 \in A$

Derivate parziali

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto
$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$
In particolare
$(x, y_0) \in A \ \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(x_0, y) \in A \ \ \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$
Si dice che f è derivabile rispetto a x in p_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathrm{D}_1 f(x_0, y_0)$$

Si dice che f è derivabile rispetto a y in p_0 se

$$\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathrm{D}_2 f(x_0, y_0)$$

Si chiama il gradiente il vettore $\nabla f(p_0) := (\mathrm{D}_1 f(p_0), \mathrm{D}_2 f(p_0))$

Differenziabilità

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto
Se $\exists a, b \in \mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - [a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)]}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \implies$$

il piano $\pi : a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$ si dice piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e f si dice differenziabile nel punto (x_0, y_0)

Se f è differenziabile in $p_0 \implies \exists \nabla f(p_0)$ e $a = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0),\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)$
Dimostrazione:
Se $y = y_0 \implies$

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - [a(x - x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x - x_0|} \iff \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = a \iff \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = a$$

Analogamente con $x = x_0$

Differenziale

L'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad L(v_1, v_2) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) \cdot v_2 \;\; \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ si chiama differenziale di f in p_0 denotato anche come $df(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)dy$
Se f è differenziabile in p_0 esiste il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(p_0))$
$\pi : z = \nabla f(p_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y_0)$

Continuità

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in $p_0 \in A \implies f$ è continua in p_0
Dimostrazione:

$$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - [df(p_0)(p - p_0) + f(p_0)]}{\mathrm{d}(p, p_0)} = 0$$

$L(v_1, v_2) = df(p_0)(v_1, v_2)$

$$f(p) - f(p_0) = \frac{f(p) - [L(p - p_0) + f(p_0)]}{\mathrm{d}(p, p_0)} \cdot \mathrm{d}(\mathrm{p}, \mathrm{p}_0) + L(p - p_0)$$

$\lim_{p \to p_0} L(p - p_0) \implies \exists \lim_{p \to p_0} f(p) - f(p_0) = 0$

Condizioni sulle derivate parziali che assicurano la differenziabilità

Teorema del differenziale totale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $p_0 \in A$
Se:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue in p_0
  $\implies f$ è differenziabile in p_0

Osservazione: è sufficiente richiedere le ipotesi su un intorno di p_0

f si dice differenziabile in p_0 se $\exists L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineare tale che

$$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{\mathrm{d}(p, p_0)} = 0 \implies$$

- $\exists \nabla f(p_0)$
- $L(\underline{v}) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{v}$
- f è continua in p_0

f si dice differenziabile su A se è differenziabile in ogni punto di A
f si dice di classe $\mathrm{C}^1(A)$ se è continua ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ continue

Corollario: $f \in \mathrm{C}^1 \implies f$ è differenziabile in ogni punto $p_0 \in A$

Derivate direzionali

$\underline{v}$ si dice direzione se $||\underline{v}|| = 1$
f è derivabile rispetto a $\underline{v}$ in p_0 se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(p_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + h\underline{v}) - f(p_0)}{h}$$

Osservazione: $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(p_0 + t\underline{v})$ per $t \in (-\delta, \delta) \implies$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(p_0) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

e $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(p_0) = F'(0)$

f differenziabile in $p_0 \implies \exists \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(p_0) = df(p_0)(\underline{v}) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{v}$
Dimostrazione: per ipotesi f è differenziabile in $p_0 \implies$

$$\exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0)}{\mathrm{d}(p, p_0)} = 0$$

che è equivalente a $f(p) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (p - p_0) + o(\mathrm{d}(p, p_0)) \;\; \forall p \in A$
si ottiene $F(h) := f(p_0 + h\underline{v}) = f(p_0) + \nabla f(p_0) \cdot (h\underline{v}) + o(\mathrm{d}(p_0 + h\underline{v}, p_0)) = F(0) + h(\nabla f(p_0) \cdot \underline{v}) + o(|h|)$
Segue che $\exists F'(0) := \lim_{h \to 0} F(h) - F(0) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{v} = df(p_0)(\underline{v})$

Teorema del valore intermedio

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$
Se:

- $\exists p, q \in A : [p, q] := \{tq + (1 - t)p : t \in [0, 1]\} \subset A$
- f è continua su $[p, q]$ e differenziabile su (p, q)

$\implies \exists \bar{c} \in (p, q) : f(q) - f(p) = \nabla f(\bar{c})(q - p)$
Dimostrazione: supponiamo $p \neq q$
$\underline{v} = \frac{q - p}{||q - p||}$ direzione di $\mathbb{R}^2$
$F(t) := f(p + t\underline{v})$, $r \in [0, ||p - q||]$ è ben definita per la prima ipotesi e $F(||q - p||) = f(q)$
Per la seconda ipotesi F è continua e $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(p + t\underline{v}) \;\; \forall t \in (0, ||q - p||)$
Per il teorema in una variabile: $f(q) - f(p) = F(||q - p||) - F(0) = F'(t)||q - p|| = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(p + t\underline{v})||q - p|| =$
$(\nabla f(p + t\underline{v}) \cdot \underline{v})||q - p|| = \left(\nabla f(p + t\underline{v}) \frac{q - p}{||q - p||}\right)||q - p||$
Scegliendo $\bar{c} = p + t\underline{v}$ otteniamo la tesi

Derivate parziali di una funzione composta

$g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$
Se:

- $g(A) \subset B$
- $g = (g_1, \ldots, g_m), f = (f_1, \ldots, f_k)$
- $g_i : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in A$
- $f_i : B \to \mathbb{R}$ differenziabile in $y_0 = g(x_0) \in B$
- $h := f \circ g$

$$\implies Dh(x_0) = Df(y_0) \cdot Dg(x_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(y_0) \\ \ldots \\ \nabla f_k(y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla g_1(x_0) \\ \ldots \\ \nabla g_m(x_0) \end{bmatrix}$$

Derivate parziali di ordine superiore

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aperto, se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \implies$
Sono dette derivate parziali seconde pure

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e derivate parziali seconde miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Se le derivate parziali seconde miste sono continue $\implies$ coincidono

Polinomi di Taylor

$m \in \mathbb{N}, p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
Si chiama polinomio di Taylor di ordine m di $n = 2$ variabili centrato in p_0 una funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} c_{i,n-i}(x - x_0)^i (y - y_0)^{n-i} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

tale che $f(p) = T(p) + o(||p - p_0||^2)$

Matrice Hessiana

$f \in \mathrm{C}^2(A)$
Si chiama matrice Hessiana di f in $p \in A$ la matrice

$$D^2 f(p) = H_f(p) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{bmatrix}$$

Osservazione: $H_f(p)$ è simmetrica

$$T_2(p) = f(p_0) + \nabla f(p)(p - p_0) + \frac{1}{2} H_f(p)(p - p_0) \cdot (p - p_0)$$

Dimostrazione:
$p \in \mathrm{B}(po, r)$, $\underline{v} := \frac{p-p_0}{||p-p_0||} = (v_1, v_2)$, $F(t) := f(p_0 + t\underline{v}) \ \ t \in (-r, r)$
Poiché $g(t) = p_0 + t\underline{v} \in \mathrm{C}^2((-r, r))$ anche $F(t) = f(g(t)) \in \mathrm{C}^2((-r, r))$
Applicando la formula di Taylor in una variabile per $t = 0$ si ottiene
$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2}F''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$
$F'(t) = \nabla f(p + t\underline{v}) \cdot \underline{v}$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0 + t\underline{v}) \cdot v_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0 + t\underline{v}) \cdot v_1 \cdot v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0 + t\underline{v}) \cdot v_2^2$$

$F(0) = f(p_0)$, $F'(0) = \nabla f(p_0) \cdot \underline{v}$, $F''(0) = H_f(p_0)\underline{v} \cdot \underline{v}$
$F(t) = f(p_0) + (\nabla f(p_0) \cdot \underline{v})t + \frac{1}{2}(H_f(p_0)\underline{v} \cdot \underline{v})t^2 + o(t^2)$
Sostituendo $t = p - p_0$ e $\underline{v}$ si ottiene la tesi

Massimi e minimi

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$p_0 \in A$ si dice punto di

- massimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(p) \leq f(p_0) \ \ \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
- massimo assoluto di f in A se $f(p) \leq f(p_0) \ \ \forall p \in A$
- minimo relativo di f in A se $\exists r_0 > 0 : f(p) \geq f(p_0) \ \ \forall p \in A \cap B(p_0, r_0)$
- minimo assoluto di f in A se $f(p) \geq f(p_0) \ \ \forall p \in A$

Osservazione: non confondere punto di massimo e massimo di una funzione: $\mathrm{Max}_A f := \mathrm{Max}\{f(p) : p \in A\}$ se esiste è unico

I punti di massimo e minimo relativi sono detti estremi liberi

A aperto, se $\exists p_0 \in A$ tale che:

- $\exists \nabla f(p_0)$
- p_0 è un estremo libero di f in A
  $\implies \nabla f(p_0) = \underline{0}$
  Dimostrazione: $p_0 = (x_0, y_0)$, A aperto $\implies \exists \delta > 0 : p_0 + t\underline{i} = (x_0 + t, y_0) \in A$ se $t \in (-\delta, \delta)$
  $F : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(p_0 + t\underline{i})$
  Dalle ipotesi:
- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) \iff F$ è derivabile in $t = 0$ e $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)$
- $t = 0$ è un estremo libero di F
  Per il teorema in una variabile $F'(0) = 0$, analogamente per $\underline{j} \implies \nabla f(p_0) = (0, 0) = \underline{0}$

Un punto $p_0 \in A$ si chiama punto stazionario o critico di f se $\exists \nabla f(p_0) = \underline{0}$

Matrice positiva

$H \in M_n(\mathbb{R})$ si dice:

- positiva se $H\underline{v} \cdot \underline{v} > 0 \ \ \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita positiva se $H\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \ \ \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- negativa se $H\underline{v} \cdot \underline{v} < 0 \ \ \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita negativa se $H\underline{v} \cdot \underline{v} \leq 0 \ \ \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$H = [h_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$

$$D_i := \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \dots & & \dots \\ \\ h_{i_1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \ \ 1 \leq i \leq n$$

H è:

- positiva $\iff D_i > 0 \ \ \forall i = 1, \dots, n$
- negativa $\iff D_i > 0$ per i pari, $D_i < 0$ per i dispari
- se $\det(H) \neq 0$ e nessuna delle condizioni precedenti $\implies$ non è semi-definita

Corollario: $H \in M_2(\mathbb{R}) \implies H$ è:

- positiva se $h_{11} > 0 \land \det(H) > 0$
- negativa se $h_{11} < 0 \land \det(H) > 0$
- se $\det(H) < 0 \implies$ non è semi-definita

Matrice Hessiana ed estremi liberi

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathrm{C}^2(A)$, p_0 punto stazionario
Se $H_f(p_0)$ è:

- positiva $\implies p_0$ è un punto di minimo relativo
- negativa $\implies p_0$ è un punto di massimo relativo
- non semi-definita $\implies p_0$ è un punto di sella

Teorema di Weierstrass

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua su A limitato e chiuso
$\implies \exists \mathrm{Max}_A f = f(p_1) \land \exists \mathrm{Min}_A f = f(p_2) \ \ p_i \in A \ \ i = 1, \dots, n$
si verifica una delle seguenti per ogni punto:

- $p_i \in \mathring{A} \land \exists \nabla f(p_i) = \underline{0}$
- $p_i \in \mathring{A} \land \nexists \nabla f(p_i)$
- $p_i \in \partial A$

Parametrizzazione

Si chiama parametrizzazione della frontiera ∂A una funzione $\gamma : B \subset \mathbb{R}^n \to A \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma(t_1, \dots, t_n) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n+1}(t))$, con le seguenti proprietà:

- B chiuso e limitato
- $\gamma(B) = \partial A$
- $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1} \in \mathrm{C}^0(B) \cap \mathrm{C}^1(\mathring{B})$

$f : A \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{C}^1(A)$ da massimizzare/minimizzare sulla frontiera
$F : B \to \mathbb{R}$, $F(t_1, \dots, t_n) := f(\gamma(t_1, \dots, t_n)) \implies$

- $\mathrm{Max}_{\partial A} f = \mathrm{Max}_B F$
- $\mathrm{Min}_{\partial A} f = \mathrm{Min}_B F$