Curve

Curva in $\mathbb{R}^n$

Definizione

Si chiama curva una mappa $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ continua, $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $\gamma_i(t) : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, .., n)$
Se $I = [a, b]$, $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si chiamano estremi della curva
L'insieme $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ si chiama sostegno o supporto della curva
$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \gamma(t)$ si chiama equazione parametrica o anche legge oraria della curva

Curva chiusa

Se $I = [a, b]$ e gli estremi coincidono, $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ si dice chiusa

Curva semplice

γ si dice semplice se è iniettiva, oppure se è chiusa e $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva

Curve cartesiane

$f \in \mathrm{C}^0([a, b])$, $\gamma, \gamma^* : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (t, f(t)), \gamma^*(t) = (f(t), t)$ sono dette curve piane cartesiane

Osservazione

Se almeno una componente γ_i p iniettiva $\implies$ γ è iniettiva

Orientazione di una curva semplice

Definizione

Una curva semplice $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ induce un'orientazione, anche detta verso, al suo sostegno
Si dice che $\underline{x_1} = \gamma(t_1)$ precede $\underline{x_2} = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$

Vettore velocità e retta tangente

Definizione

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva, se $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $t_0 \in I$
$\gamma'(t_0) := (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0))$ è detto vettore velocità di γ in t_0
Se $t \to t_0$ $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$

Osservazione

$\gamma'(t_0) = J_\gamma(t_0)^T$

Definizione

Se $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$ si chiama retta tangente a γ in $\underline{x_0} = \gamma(t_0)$ la retta $\underline{x} = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^m se $\gamma_i \in \mathrm{C}^m(I)$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$
γ si dice regolare se $\gamma \in \mathrm{C}^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \underline{0}$ $\forall t \in I$
Si chiama versore o direzione tangente a γ il campo vettore

$$T_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice C^1 a tratti se $\exists\{a = t_0 < \dots < t_k = b\}$ suddivisione di $[a, b]$ tale che
$\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e $\gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$

Cambiamento di parametro

Definizione

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n, \tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dicono equivalenti se $\exists \varphi : \tilde{I} \to I$ biiettiva tale che $\varphi \in \mathrm{C}^1(\tilde{I})$, $\varphi'(\tau) \neq 0$ e $\tilde{\gamma} = \gamma(\varphi(\tau))$ $\forall \tau \in \tilde{I}$
$\tau \in \tilde{I} \to t = \varphi(\tau) \in I$ si dice cambiamento di parametrizzazione

Osservazione

Se $\varphi(\tau) > 0$ $\forall \tau \in \tilde{I}$ allora γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso verso, altrimenti se $\varphi(\tau) < 0$ $\forall \tau \in \tilde{I}$ hanno verso opposto