Curve

Curva in $\mathbb{R}^n$

Definizione

Si chiama curva una mappa $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ continua, $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, I intervallo di $\mathbb{R}$, $\gamma_i(t) : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, .., n)$
Se $I = [a, b]$, $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si chiamano estremi della curva
L'insieme $\Gamma = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ si chiama **sostegno** o **supporto** della curva
$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \gamma(t)$ si chiama **equazione parametrica** o anche legge oraria della curva

Curva chiusa

Se $I = [a, b]$ e gli estremi coincidono, $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ si dice chiusa

Curva semplice

γ si dice semplice se è iniettiva, oppure se è chiusa e $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva

Curve cartesiane

$f \in \mathrm{C}^0([a, b])$, $\gamma, \gamma^* : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (t, f(t)), \gamma^*(t) = (f(t), t)$ sono dette curve piane cartesiane

Osservazione >

Se almeno una componente γ_i è iniettiva $\implies$ γ è iniettiva

Orientazione di una curva semplice

Definizione

Una curva semplice $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ induce un'orientazione, anche detta verso, al suo sostegno
Si dice che $\underline{x_1} = \gamma(t_1)$ precede $\underline{x_2} = \gamma(t_2)$ se $t_1 < t_2$

Vettore velocità e retta tangente

Definizione

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva, se $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $t_0 \in I$
$\gamma'(t_0) := (\gamma_1'(t_0), \ldots, \gamma_n'(t_0))$ è detto vettore velocità di γ in t_0
Se $t \to t_0$ $\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$

Osservazione

$\gamma'(t_0) = J_\gamma(t_0)^T$

Definizione

Se $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$ si chiama retta tangente a γ in $\underline{x_0} = \gamma(t_0)$ la retta $\underline{x} = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^m se $\gamma_i \in \mathrm{C}^m(I) \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$
γ si dice **regolare** se $\gamma \in \mathrm{C}^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq \underline{0} \ \ \forall t \in I$
Si chiama versore o direzione tangente a γ il campo vettore

$$T_\gamma(t) := \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$$

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si dice C^1 a tratti se $\exists \{a = t_0 < \ldots < t_k = b\}$ suddivisione di $[a, b]$ tale che
$\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]} : [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e $\gamma = \bigcup_{j=1}^k \gamma_j$

Cambiamento di parametro

Definizione

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n, \tilde{\gamma} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 si dicono equivalenti se $\exists \varphi : \tilde{I} \to I$ biiettiva tale che $\varphi \in \mathrm{C}^1(\tilde{I})$,
$\varphi'(\tau) \neq 0$ e $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \ \ \forall \tau \in \tilde{I}$
$\tau \in \tilde{I} \to t = \varphi(\tau) \in I$ si dice cambiamento di parametrizzazione
Inoltre $\Gamma = \gamma([a, b]) = \tilde{\gamma}([\alpha, \beta])$

Osservazione

Se $\varphi(\tau) > 0 \ \ \forall \tau \in \tilde{I}$ allora γ e $\tilde{\gamma}$ hanno lo stesso verso, altrimenti se $\varphi(\tau) < 0 \ \ \forall \tau \in \tilde{I}$ hanno verso opposto

Lunghezza di una curva

Definizione

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva, $\mathcal{D} = \{a = t_0 < \ldots < t_k = b\}$ suddivisione di $[a, b]$ induce una suddivisione del sostegno di γ in $k+1$ punti definiti da $\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)$ e quindi k segmenti
$[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] := \{s \cdot \gamma(t_i) + (1-s) \cdot \gamma(t_{i-1}) : 0 \leq s \leq 1\}$
La lunghezza della spezzata definita da $\bigcup_{i=1}^k [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ è data da
$L(\gamma, \mathcal{D}) := \sum_{i=1}^k ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| \in [0, +\infty)$
$L(\gamma) := \sup_{\mathcal{D}}\{L(\gamma, \mathcal{D})\} \in [0, +\infty]$
Se $L(\gamma) < +\infty \implies \gamma$ si dice rettificabile e $L(\gamma)$ è detta lunghezza di γ

Teorema

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva, $\gamma \in \mathrm{C}^1([a, b])$
$\implies \gamma$ è rettificabile e

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \ldots + \gamma_n'^2(t)}\, dt$$

Osservazione

$\gamma : [a. b] \to \mathbb{R}^2$ curva piana cartesiana, $\gamma, f \in \mathrm{C}^1([a, b])$, $\gamma(t) := (t, f(t))$
$\implies \gamma$ è rettificabile e $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt$

Indipendenza della lunghezza dalla parametrizzazione

Teorema

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ curve di classe C^1 equivalenti
$\implies L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma)$

Dimostrazione

$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ cambiamento di parametrizzazione, $\varphi(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta]$

$$\ldots = \int_\alpha^\beta ||\tilde{\gamma}'(\tau)||\, d\tau = \int_\alpha^\beta ||\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)||\, d\tau = \int_\alpha^\beta ||\gamma'(\varphi(\tau))|| \cdot \varphi'(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} ||\gamma'(t)||\, dt = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt = \ldots$$

Osservazione

Una curva C^1 a tratti $\gamma = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i$, $\gamma_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}^n$ è rettificabile e

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} ||\gamma_i'(t)||\, dt$$

Integrali curvilinei di prima specie

Definizione

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ curva di classe C^1, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\, dt$$

si chiama integrale curvilineo di prima specie di f lungo γ

Se γ è chiusa e semplice si indica anche con $\oint_\gamma f\, ds$

Teorema

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ curve di classe C^1 equivalenti, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ continua

$$\implies \int_{\tilde{\gamma}} f\, ds = \int_\gamma f\, ds$$

Dimostrazione

$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ cambio di parametrizzazione, $\varphi(\tau) \neq 0 \quad \forall \tau \in [\alpha, \beta]$

$$\begin{aligned} \ldots &= \int_\alpha^\beta f(\tilde{\gamma}(\tau)) \cdot ||\tilde{\gamma}'(\tau)||\, d\tau = \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot ||\tilde{\gamma}'(\tau)||\, d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot ||\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)||\, d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\varphi(\tau))) \cdot ||\gamma'(\varphi(\tau))|| \cdot |\varphi'(\tau)|\, d\tau \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||\, dt = \ldots \end{aligned}$$

Integrali curvilinei di seconda specie

Campo vettoriale

Definizione

Si chiama campo vettoriale su un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ una mappa $F : E \to \mathbb{R}^n$, $F(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots, F_n(\underline{x}))$

Forma differenziale

Definizione

$F : E \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale
Si chiama forma differenziale su E l'espressione formale
$\omega = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n = \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \langle F, d\underline{x} \rangle$
Una forma differenziale ω su E si dice di classe C^0 (o C^1) se $F_i \in \mathrm{C}^0(E) \;\; \forall i \in \{1, \dots, n\}$ (o $F_i \in \mathrm{C}^1(E)$)

Definizione

$\gamma : [a, b] \to E \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathrm{C}^1([a, b])$, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$, $\omega \in \mathrm{C}^0(E)$
Si definisce integrale curvilineo di seconda specie di ω lungo γ

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) \, dt$$

Se γ è chiusa si indica anche con $\oint_\gamma \omega$

Teorema

$E \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to E, \tilde{\gamma} : [\alpha, \beta] \to E$ curve di classe C^1 equivalenti, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$

- $\varphi(\tau) > 0 \;\; \forall \tau \in [\alpha, \beta] \implies \int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$
- $\varphi(\tau) < 0 \;\; \forall \tau \in [\alpha, \beta] \implies \int_\gamma \omega = -\int_{\tilde{\gamma}} \omega$

Dimostrazione >

$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ cambiamento di parametrizzazione, $\tilde{\gamma}' = \gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_\alpha^\beta \langle F(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}'(\tau) \rangle \, d\tau = \int_\alpha^\beta \langle F(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi(\tau) \rangle \, d\tau \\ &= \int_\alpha^\beta \langle F(\gamma(\varphi(\tau))), \gamma'(\varphi(\tau)) \rangle \cdot \varphi'(\tau) \, d\tau = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \dots \end{aligned}$$

Teorema

$\gamma : [a, b] \to E \subset \mathbb{R}^n$ curva regolare, $F : E \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale su E di classe C^0, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$ forma differenziale

$$\implies \int_\gamma \omega = \int \langle F, T \rangle \, ds$$

Dimostrazione

$$\ldots = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), T(t) \rangle \cdot ||\gamma'(t)|| \, dt = \ldots$$

Osservazione

$\gamma : [a, b] \to E \subset \mathbb{R}^n$ regolare e semplice, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$ forma differenziale si classe $\mathrm{C}^0(E)$
$\implies \int_\gamma \omega = \int_\gamma \langle F, T_\gamma \rangle \, ds$

Forme differenziali esatte

Definizione

$E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $U \in \mathrm{C}^1(E)$, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$, $F : E \to \mathbb{R}^n$
$dU = \langle \nabla U, d\underline{x} \rangle = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n$ viene chiamata forma differenziale di U
ω si dice esatta se $\exists U : \nabla U(\underline{x}) = F(\underline{x}) \ \ \forall \underline{x} \in E$, equivalentemente $dU = \omega$ e U è detta **funzione potenziale** di ω (o anche di F) in E

Teorema

$E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ω forma differenziale continua ed esatta su E, $\gamma : [a, b] \to E$ C^1 a tratti, U qualunque potenziale di ω
$\implies \int_\gamma \omega = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$

Dimostrazione

Per ipotesi $\exists U$ potenziale di ω su E tale che $\nabla U(\underline{x}) = F(\underline{x})$
$\frac{d}{dt}(U(\gamma(t))) = \langle \nabla U(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \ \ \forall t \in [a, b]$

$$\ldots = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(\gamma(t))) \, dt = [U(\gamma(t))]_a^b = \ldots$$

Osservazione

γ curva chiusa $\implies \oint_\gamma \omega = 0$

Forme differenziali chiuse

Definizione

$E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$, $F : E \to \mathbb{R}^n$, $F(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots, F_n(\underline{x}))$, $F_i \in \mathrm{C}^1(E)$ $(i = 1, \dots, n)$
ω si dice chiusa in E se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \ \ \forall \underline{x} \in E, \ i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Teorema

$\omega \in \mathrm{C}^1(E)$
ω esatta su $E \implies \omega$ chiusa su E

Dimostrazione

Per ipotesi $\exists U$ potenziale e $\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i(\underline{x})$ $(i = 1, \dots, n)$
Essendo $U \in \mathrm{C}^2(E)$

$$\dots = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j x_i}(\underline{x}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i x_j}(\underline{x}) = \dots$$

Osservazione

ω non chiusa in $E \implies \omega$ non esatta in E

Teorema

$E \subset \mathbb{R}^n$ aperto e convesso, ovvero
$[\underline{p}, \underline{q}] := \{t\underline{p} + (1-t)\underline{q} : 0 \leq t \leq_1\} \subset E \ \ \forall \underline{p}, \underline{q} \in E$
$\omega \in \mathrm{C}^1(E)$
ω esatta in $E \iff \omega$ chiusa in E

Costruzione di un potenziale

Formula

$E \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $F : E \to \mathbb{R}^n$ campo vettoriale, $\omega = \langle F, d\underline{x} \rangle$ forma differenziale chiusa, allora è esatta ed esiste una funzione potenziale $U : E \to \mathbb{R}$ di ω, $U \in \mathrm{C}^2(E) : \nabla U(\underline{x}) = F(\underline{x})$
Procedura, con ordine delle variabili interscambiabile:
$U(\underline{x}) = \int F_1(\underline{x})\, dx_1 = U_1(\underline{x}) + C_1(x_2, \ldots, x_n)$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2}(\underline{x}) = \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(\underline{x}) + \frac{\partial C_1}{\partial x_2}(x_2, \ldots, x_n) = F_2(\underline{x})$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_2}(x_2, \ldots, x_n) = F_2(\underline{x}) - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}(\underline{x})$$

che è costante rispetto ad x_1

Dimostrazione

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\underline{x}) - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2}(\underline{x}) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\underline{x}) - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2 \partial x_1}(\underline{x}) = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\underline{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\underline{x}) = 0$$

$$C_1(x_2, \ldots, x_n) = \int \frac{\partial C_1}{\partial x_2}(x_2, \ldots x_n)\, dx_2 = U_2(x_2, \ldots, x_n) + C_2(x_3, \ldots, x_n)$$

Iterando: $U(\underline{x}) = U_1(\underline{x}) + U_2(x_2, \ldots, x_n) + \ldots + U_n(x_n) + c$