

# Differenziali

## Funzione continua

### Definizione

Una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice continua in  $\underline{p_0}$  se vale una delle seguenti:

- $\underline{p_0}$  è un punto isolato di  $A$
- $\underline{p_0}$  è punto di accumulazione e  $\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p_0}} f(\underline{p}) = f(\underline{p_0})$

Si dice continua su  $A$  se è continua  $\forall \underline{p_0} \in A$

## Derivate parziali

### Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $\underline{p_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\exists \delta > 0 : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subset A$

In particolare

$(x, y_0) \in A \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  e  $(x_0, y) \in A \quad \forall y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$

Si dice che  $f$  è derivabile rispetto a  $x$  in  $\underline{p_0}$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)$$

Si dice che  $f$  è derivabile rispetto a  $y$  in  $\underline{p_0}$  se

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_2 f(x_0, y_0)$$

Si chiama il gradiente il vettore  $\nabla f(\underline{p_0}) := (D_1 f(\underline{p_0}), D_2 f(\underline{p_0}))$

### In $n$ variabili

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $\underline{p_0} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\hat{e}_i$  versore di  $x_i$

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{p_0} + h \cdot \hat{e}_i) - f(\underline{p_0})}{h} := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) = D_i(\underline{p_0})$$

# Differenziabilità

## Definizione

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto

Se  $\exists a, b \in \mathbb{R}$  :

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \implies$$

il piano  $\pi : a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)$  si dice piano tangente al grafico in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  e  $f$  si dice differenziabile nel punto  $(x_0, y_0)$

## Teorema

Se  $f$  è differenziabile in  $\underline{p_0} \implies \exists \nabla f(\underline{p_0})$  e  $a = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})$ ,  $b = \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})$

### Dimostrazione >

Se  $y = y_0 \implies$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - [a(x-x_0) + f(x_0, y_0)]}{|x-x_0|} \iff \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x-x_0} = a \iff \exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) = a$$

Analogamente con  $x = x_0$

# Differenziale

## Definizione

L'applicazione lineare  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $L(v_1, v_2) := \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0}) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0}) \cdot v_2 \quad \forall (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  si chiama differenziale di  $f$  in  $\underline{p_0}$  denotato anche come  $df(\underline{p_0}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p_0})dx + \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p_0})dy$

Se  $f$  è differenziabile in  $\underline{p_0}$  esiste il piano tangente al grafico in  $(x_0, y_0, f(\underline{p_0}))$

$$\pi : z = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot (x-x_0, y-y_0) + f(x_0, y_0)$$

## In $n$ variabili

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, L(\hat{v}) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{p_0}) \hat{v}_i \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n$$

# Continuità

## Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f$  differenziabile in  $\underline{p}_0 \in A \implies f$  è continua in  $\underline{p}_0$

### Dimostrazione

$$\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{f(\underline{p}) - [df(\underline{p}_0)(\underline{p} - \underline{p}_0) + f(\underline{p}_0)]}{d(\underline{p}, \underline{p}_0)} = 0$$

$$L(\hat{v}) = df(\underline{p}_0)(\hat{v})$$

$$f(\underline{p}) - f(\underline{p}_0) = \frac{f(\underline{p}) - [L(\underline{p} - \underline{p}_0) + f(\underline{p}_0)]}{d(\underline{p}, \underline{p}_0)} \cdot d(\underline{p}, \underline{p}_0) + L(\underline{p} - \underline{p}_0)$$

$$\lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} L(\underline{p} - \underline{p}_0) \implies \exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} f(\underline{p}) - f(\underline{p}_0) = 0$$

## Condizioni sulle derivate parziali che assicurano la differenziabilità

### Teorema del differenziale totale

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $\underline{p}_0 \in A$

Se:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  continue in  $\underline{p}_0$

$\implies f$  è differenziabile in  $\underline{p}_0$

### Osservazione >

E' sufficiente richiedere le ipotesi su un intorno di  $\underline{p}_0$

### Definizione

$f$  si dice differenziabile in  $\underline{p_0}$  se  $\exists L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineare tale che

$$\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p_0}} \frac{f(\underline{p}) - f(\underline{p_0}) - L(\underline{p} - \underline{p_0})}{d(\underline{p}, \underline{p_0})} = 0 \implies$$

- $\exists \nabla f(\underline{p_0})$
- $L(\hat{v}) = \nabla f(\underline{p_0}) \cdot \hat{v}$
- $f$  è continua in  $\underline{p_0}$

$f$  si dice differenziabile su  $A$  se è differenziabile in ogni punto di  $A$

$f$  si dice di classe  $C^1(A)$  se è continua ed  $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow \mathbb{R}$  continue

### Osservazione >

$f \in C^1(A) \implies f$  è differenziabile in ogni punto  $\underline{p_0} \in A$

## Derivate direzionali

### Definizione

$\hat{v}$  si dice direzione se  $\|\hat{v}\| = 1$

$f$  è derivabile rispetto a  $\hat{v}$  in  $\underline{p_0}$  se

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{p_0} + h\hat{v}) - f(\underline{p_0})}{h}$$

### Osservazione >

$F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = f(\underline{p_0} + t\hat{v})$  per  $t \in (-\delta, \delta) \implies$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) \iff \exists F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h}$$

$$\text{e } \frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(\underline{p_0}) = F'(0)$$

### Teorema

$f$  differenziabile in  $\underline{p}_0 \implies \exists \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{p}_0) = df(\underline{p}_0)(\underline{v}) = \nabla f(\underline{p}_0) \cdot \underline{v}$

#### Dimostrazione >

Per ipotesi  $f$  è differenziabile in  $\underline{p}_0 \implies$

$$\exists \lim_{\underline{p} \rightarrow \underline{p}_0} \frac{f(\underline{p}) - f(\underline{p}_0) - \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_0)}{d(\underline{p}, \underline{p}_0)} = 0$$

che è equivalente a  $f(\underline{p}) = f(\underline{p}_0) + \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_0) + o(d(\underline{p}, \underline{p}_0)) \quad \forall \underline{p} \in A$

si ottiene

$$F(h) := f(\underline{p}_0 + h\underline{v}) = f(\underline{p}_0) + \nabla f(\underline{p}_0) \cdot (h\underline{v}) + o(d(\underline{p}_0 + h\underline{v}, \underline{p}_0)) = F(0) + h(\nabla f(\underline{p}_0) \cdot \underline{v}) + o(|h|)$$

Segue che  $\exists F'(0) := \lim_{h \rightarrow 0} F(h) - F(0) = \nabla f(\underline{p}_0) \cdot \underline{v} = df(\underline{p}_0)(\underline{v})$

## Teorema del valore intermedio

### Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A$  aperto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Se:

- $\exists \underline{p}, \underline{q} \in A : [\underline{p}, \underline{q}] := \{t\underline{q} + (1-t)\underline{p} : t \in [0, 1]\} \subset A$
- $f$  è continua su  $[\underline{p}, \underline{q}]$  e differenziabile su  $(\underline{p}, \underline{q})$

$$\implies \exists \bar{c} \in (\underline{p}, \underline{q}) : f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \nabla f(\bar{c})(\underline{q} - \underline{p})$$

#### Dimostrazione >

Supponiamo  $\underline{p} \neq \underline{q}$

$\underline{v} = \frac{\underline{q} - \underline{p}}{\|\underline{q} - \underline{p}\|}$  direzione di  $\mathbb{R}^2$

$F(t) := f(\underline{p} + t\underline{v})$ ,  $t \in [0, \|\underline{q} - \underline{p}\|]$  è ben definita per la prima ipotesi e  $F(\|\underline{q} - \underline{p}\|) = f(\underline{q})$

Per la seconda ipotesi  $F$  è continua e  $\exists F'(t) = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{p} + t\underline{v}) \quad \forall t \in (0, \|\underline{q} - \underline{p}\|)$

Per il teorema in una variabile:

$$\begin{aligned} f(\underline{q}) - f(\underline{p}) &= F(\|\underline{q} - \underline{p}\|) - F(0) = F'(t)\|\underline{q} - \underline{p}\| = \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{p} + t\underline{v})\|\underline{q} - \underline{p}\| = \\ &= (\nabla f(\underline{p} + t\underline{v}) \cdot \underline{v})\|\underline{q} - \underline{p}\| = \left( \nabla f(\underline{p} + t\underline{v}) \frac{\underline{q} - \underline{p}}{\|\underline{q} - \underline{p}\|} \right) \|\underline{q} - \underline{p}\| \end{aligned}$$

Scegliendo  $\bar{c} = \underline{p} + t\underline{v}$  otteniamo la tesi

# Derivate parziali di una funzione composta

## Teorema

$$g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, f : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

Se:

- $g(A) \subset B$
- $g = (g_1, \dots, g_m), f = (f_1, \dots, f_k)$
- $g_i : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\underline{x}_0 \in A \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$
- $f_j : B \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\underline{y}_0 = g(\underline{x}_0) \in B \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$
- $h := f \circ g$

$$\implies Dh(\underline{x}_0) = Df(\underline{y}_0) \cdot Dg(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{y}_0) \\ \dots \\ \nabla f_k(\underline{y}_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nabla g_1(\underline{x}_0) \\ \dots \\ \nabla g_m(\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

# Derivate parziali di ordine superiore

## Definizione

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, A \text{ aperto, se } \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \implies$$

Sono dette derivate parziali seconde pure

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

e derivate parziali seconde miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

## Teorema

Se le derivate parziali seconde miste sono continue  $\implies$  coincidono

# Polinomi di Taylor

## Definizione

$$m \in \mathbb{N}, \underline{p}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

Si chiama polinomio di Taylor di ordine  $m$  di  $n = 2$  variabili centrato in  $\underline{p}_0$  una funzione  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(x, y) = \sum_{h=0}^m \sum_{i=0}^n c_{i, n-i} (x - x_0)^i (y - y_0)^{n-i} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{tale che } f(\underline{p}) = T(\underline{p}) + o(\|\underline{p} - \underline{p}_0\|^m)$$

# Matrice Hessiana

## Definizione

$$f \in C^2(A)$$

Si chiama matrice Hessiana di  $f$  in  $p \in A$  la matrice

$$D^2 f(\underline{p}) = H_f(\underline{p}) := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{p}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underline{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(\underline{p}) \\ \nabla \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(\underline{p}) \end{bmatrix}$$

## Osservazione >

$H_f(\underline{p})$  è simmetrica

## Teorema

$$T_2(\underline{p}) = f(\underline{p}_0) + \nabla f(\underline{p})(\underline{p} - \underline{p}_0) + \frac{1}{2} H_f(\underline{p})(\underline{p} - \underline{p}_0) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_0)$$

## Dimostrazione >

$$\underline{p} \in B(\underline{p}_0, r), \hat{v} := \frac{\underline{p} - \underline{p}_0}{\|\underline{p} - \underline{p}_0\|} = (v_1, v_2), F(t) := f(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \quad t \in (-r, r)$$

Poiché  $g(t) = \underline{p}_0 + t\hat{v} \in C^2((-r, r))$  anche  $F(t) = f(g(t)) \in C^2((-r, r))$

Applicando la formula di Taylor in una variabile per  $t = 0$  si ottiene

$$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2} F''(0) \cdot t^2 + o(t^2)$$

$$F'(t) = \nabla f(\underline{p} + t\hat{v}) \cdot \hat{v}$$

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \cdot v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \cdot v_1 \cdot v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\underline{p}_0 + t\hat{v}) \cdot v_2^2$$

$$F(0) = f(\underline{p}_0), F'(0) = \nabla f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v}, F''(0) = H_f(\underline{p}_0) \hat{v} \cdot \hat{v}$$

$$F(t) = f(\underline{p}_0) + (\nabla f(\underline{p}_0) \cdot \hat{v})t + \frac{1}{2} (H_f(\underline{p}_0) \hat{v} \cdot \hat{v})t^2 + o(t^2)$$

Sostituendo  $t = \underline{p} - \underline{p}_0$  e  $\hat{v}$  si ottiene la tesi

# Massimi e minimi

## Definizione

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$\underline{p}_0 \in A$  si dice punto di

- massimo relativo di  $f$  in  $A$  se  $\exists r_0 > 0 : f(\underline{p}) \leq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A \cap B(\underline{p}_0, r_0)$
- massimo assoluto di  $f$  in  $A$  se  $f(\underline{p}) \leq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A$
- minimo relativo di  $f$  in  $A$  se  $\exists r_0 > 0 : f(\underline{p}) \geq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A \cap B(\underline{p}_0, r_0)$
- minimo assoluto di  $f$  in  $A$  se  $f(\underline{p}) \geq f(\underline{p}_0) \quad \forall \underline{p} \in A$

I punti di massimo e minimo relativi sono detti estremi liberi

## Osservazione >

Non confondere punto di massimo e massimo di una funzione:  $\text{Max}_A f := \text{Max}\{f(\underline{p}) : \underline{p} \in A\}$  se esiste è unico

## Teorema

$A$  aperto, se  $\exists \underline{p}_0 \in A$  tale che:

- $\exists \nabla f(\underline{p}_0)$
- $\underline{p}_0$  è un estremo libero di  $f$  in  $A$

$$\implies \nabla f(\underline{p}_0) = \underline{0}$$

## Dimostrazione >

$$\underline{p}_0 = (x_0, y_0), A \text{ aperto} \implies \exists \delta > 0 : \underline{p}_0 + t\underline{i} = (x_0 + t, y_0) \in A \text{ se } t \in (-\delta, \delta)$$

$$F : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, F(t) = f(\underline{p}_0 + t\underline{i})$$

Dalle ipotesi:

- $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p}_0) \iff F \text{ è derivabile in } t = 0 \text{ e } F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p}_0)$
- $t = 0$  è un estremo libero di  $F$

$$\text{Per il teorema in una variabile } F'(0) = 0, \text{ analogamente per } \underline{j} \implies \nabla f(\underline{p}_0) = (0, 0) = \underline{0}$$

## Definizione

Un punto  $\underline{p}_0 \in A$  si chiama punto stazionario o critico di  $f$  se  $\exists \nabla f(\underline{p}_0) = \underline{0}$



# Matrice positiva

## Definizione

$H \in M_n(\mathbb{R})$  si dice:

- positiva se  $H\hat{v} \cdot \hat{v} > 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita positiva se  $H\hat{v} \cdot \hat{v} \geq 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- negativa se  $H\hat{v} \cdot \hat{v} < 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semi-definita negativa se  $H\hat{v} \cdot \hat{v} \leq 0 \quad \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$

$$H = [h_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$$

$$D_i := \det \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1i} \\ \dots & & \dots \\ h_{i1} & \dots & h_{ii} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq n$$

$H$  è:

- positiva  $\iff D_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$
- negativa  $\iff D_i > 0$  per  $i$  pari,  $D_i < 0$  per  $i$  dispari
- se  $\det(H) \neq 0$  e nessuna delle condizioni precedenti  $\implies$  non è semi-definita

## Osservazione >

$H \in M_2(\mathbb{R}) \implies H$  è:

- positiva se  $h_{11} > 0 \wedge \det(H) > 0$
- negativa se  $h_{11} < 0 \wedge \det(H) > 0$
- se  $\det(H) < 0 \implies$  non è semi-definita

# Matrice Hessiana ed estremi liberi

## Teorema

$A \subset \mathbb{R}^n$  aperto,  $f \in C^2(A)$ ,  $\underline{p}_0$  punto stazionario

Se  $H_f(\underline{p}_0)$  è:

- positiva  $\implies \underline{p}_0$  è un punto di minimo relativo
- negativa  $\implies \underline{p}_0$  è un punto di massimo relativo
- non semi-definita  $\implies \underline{p}_0$  è un punto di sella

# Teorema di Weierstrass

## Teorema

$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $A$  limitato e chiuso

$\implies \exists \text{Max}_A f = f(p_1) \wedge \exists \text{Min}_A f = f(p_2) \quad \underline{p_i} \in A \quad i = 1, \dots, n$

si verifica una delle seguenti per ogni punto:

- $\underline{p_i} \in \overset{\circ}{A} \wedge \exists \nabla f(\underline{p_i}) = \underline{0}$
- $\underline{p_i} \in \overset{\circ}{A} \wedge \nexists \nabla f(\underline{p_i})$
- $\underline{p_i} \in \partial A$

# Parametrizzazione

## Definizione

Si chiama parametrizzazione della frontiera  $\partial A$  una funzione  $\gamma : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,

$\gamma(t_1, \dots, t_n) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_{n+1}(t))$ , con le seguenti proprietà:

- $B$  chiuso e limitato
- $\gamma(B) = \partial A$
- $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1} \in C^0(B) \cap C^1(\overset{\circ}{B})$

## Teorema

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^1(A)$  da massimizzare/minimizzare sulla frontiera

$F : B \rightarrow \mathbb{R}, F(t_1, \dots, t_n) := f(\gamma(t_1, \dots, t_n)) \implies$

- $\text{Max}_{\partial A} f = \text{Max}_B F$
- $\text{Min}_{\partial A} f = \text{Min}_B F$

# Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

## Definizione

Se  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\} \implies \partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$

Un insieme del piano  $V := \partial A$  è detto vincolo ed è una curva

## 📌 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $V$  vincolo

Se:

- $\exists \text{Min}_V f = f(\underline{p}_0) \quad \underline{p}_0 \in V$  (o Max)
- $\exists \nabla g(\underline{p}_0) \neq (0, 0)$

$\implies \exists \lambda_0$  detto moltiplicatore tale che  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  è un punto stazionario di

$L(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$  detta funzione lagrangiana

Ovvero

$$\nabla L(x, y, \lambda) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} g(x, y) = 0 \\ \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \end{cases}$$

Un punto  $\underline{p}_0 \in V$  verificante tali condizioni per un opportuno  $\lambda_0$  si dice punto stazionario di  $f$  rispetto a  $V$ , pertanto vanno ovviamente studiati anche i punti stazionari di  $f$  nella parte interna  $\mathring{A}$

## 📌 Teorema

Se  $g(\underline{p}_0) = 0$  e  $\exists \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0) \neq 0$  (o analogamente con  $x$ )  $\implies V$  è localmente grafico di una funzione  $y = \varphi(x)$ , cioè  $\exists \delta > 0$  e  $\varphi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists r > 0$  tali che

- $V \cap B(\underline{p}_0, r) = \{(x, \varphi(x)) : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$
- $\varphi$  è derivabile e

$$\varphi'(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

## 📌 Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange >

Se  $\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0) \neq 0$  (analogamente con  $x$ ),  $h := f(x, \varphi(x)) \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Essendo  $\underline{p}_0 \in V$  punto di minimo di  $f$  su  $V \implies x_0$  è un punto di minimo di  $h$  su  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  e

$h \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$

Per quanto visto prima

$$0 = h'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))\varphi'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p}_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p}_0) \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\underline{p}_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0)}$$

$$\iff \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{p}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{p}_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\underline{p}_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(\underline{p}_0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \nabla f(\underline{p}_0) \\ \nabla g(\underline{p}_0) \end{bmatrix} = 0 \iff \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{p}_0) = -\lambda_0 \cdot \nabla g(\underline{p}_0)$$

### Teorema

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$

Se:

- $\exists \text{Min}_V f = f(\underline{p_0})$  (o  $\text{Max}$ )
- $\nabla g(\underline{p_0}) \neq (0, 0, 0)$

$$\implies \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{p_0}) = -\lambda_0 \cdot \nabla g(\underline{p_0})$$