

Superfici

Curva di Jordan

Definizione

Una curva di Jordan è una curva piana semplice e chiusa

Teorema

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva di Jordan \implies

- $\Gamma = \gamma([a, b])$ divide il piano in due insiemi aperti di cui uno è limitato D_{int} chiamato interno e uno illimitato D_{ext} chiamato esterno, entrambi aperti
- $\partial D_{\text{int}} = \partial D_{\text{ext}} = \Gamma$

Definizione

Si chiama chiusura di D l'insieme $\bar{D} = D \cup \partial D$

Superficie

Definizione

Un sottoinsieme $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice superficie se $\exists \sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mappa detta parametrizzazione di S , $\sigma(u, v) = (\sigma_1(u, v), \sigma_2(u, v), \sigma_3(u, v)) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ verificante:

- D è un aperto di \mathbb{R}^2 , interno di una curva di Jordan
- σ è continua e iniettiva
- $\sigma(\bar{D}) = S$

S si dice superficie cartesiana se $\exists \sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di uno dei seguenti tipi, con $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\bar{D})$:

- $\sigma(u, v) = (u, v, f(u, v))$
- $\sigma(u, v) = (u, f(u, v), v)$
- $\sigma(u, v) = (f(u, v), u, v)$

Punti interni e bordo intrinseci

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie elementare: $\partial S = S$ e $\overset{\circ}{S} = \emptyset$

Un punto $\underline{p_0} \in S$ si dice interno a S se esistono $B(\underline{p_0}, r_0)$ e $\sigma_* : \bar{D}_* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di $\overline{B(\underline{p_0}, r_0)} \cap S$ tale che $\underline{p_0} \in \sigma_*(D_*)$

L'insieme dei punti interni di S si denota con S'

Si chiama bordo di S l'insieme dei punti che non sono interni $\text{bor}(S) = S \setminus S'$

Regolarità della parametrizzazione e piano tangente

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie parametrizzata da $\sigma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , $\underline{p_0} = \sigma(u_0, v_0)$ ($u_0, v_0 \in D$)

Se $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ di classe C^1 , $\gamma'(t_0) \neq \underline{0}$, $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ è la corrispondente curva sulla superficie ed è di classe C^1

Se $\tilde{\gamma}'(t_0) \neq \underline{0}$ e la retta tangente a $\tilde{\gamma}$ passante per $\tilde{\gamma}(t_0)$ appartiene a π allora $\exists \pi$ piano tangente a S in $\underline{p_0}$

Si vuole imporre $\tilde{\gamma}'(t_0) = u'(t_0) \cdot \sigma_u(u_0, v_0) + v'(t_0) \cdot \sigma_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$

$\pi : \{\underline{p_0} + \lambda \sigma_u(u_0, v_0) + \mu \sigma_v(u_0, v_0) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ è il piano di equazione cartesiana

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ con $(a, b, c) := \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$ e $\underline{p_0} = (x_0, y_0, z_0)$

$\underline{p_0} \in S'$ si dice regolare se esistono $B(\underline{p_0}, r_0)$ e $\sigma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzazione di $\overline{B(\underline{p_0}, r_0)} \cap S$ tale che

- σ è di classe C^1
- $\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0) \neq \underline{0}$

π si chiama piano tangente a S in $\underline{p_0}$

I due versori normali a π sono

$$\pm \frac{\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)}{\|\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)\|}$$

S si dice regolare se tutti i punti interni sono regolari

Area di una superficie

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare, $\sigma : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sua parametrizzazione di classe C^1

$Q = [u_0, u_0 + du] \times [v_0, v_0 + dv]$ è l'elemento infinitesimo di area

Se $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$, $\sigma(u, v) = \sigma(u_0, v_0) + J_\sigma(u_0, v_0) \cdot (u - u_0, v - v_0)^T + o(||(u - u_0, v - v_0)||)$

$\tilde{Q} := \{\sigma(u_0, v_0) + \lambda \sigma_u(u_0, v_0) + \mu \sigma_v(u_0, v_0) : 0 \leq \lambda \leq du \wedge 0 \leq \mu \leq dv\} = \sigma(Q)$

$\text{area}(\tilde{Q}) = ||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)|| du dv = dS$

Si chiama area di S se $||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)||$ è limitata $\forall (u, v) \in D$ e quindi è ben definita

$$\text{area}(S) := \iint_S dS = \iint_D ||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)|| du dv$$

Osservazione >

$D \subset \mathbb{R}^2$ interno di una curva di Jordan, $f \in C^0(\bar{D})$, $f \in C^1(D)$, $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie cartesiana parametrizzazione di $S \subset \mathbb{R}^3$

$$\text{area}(S) = \iint_D \sqrt{1 + ||\nabla f(u, v)||^2} du dv$$

Integrale di superficie

Definizione

$S \subset \mathbb{R}^3$ superficie regolare parametrizzata da $\sigma : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che D è misurabile e

$||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)||$ è limitata, $f : S' \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata

$$\iint_S f dS = \iint_D f \cdot ||\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)|| du dv$$

si chiama integrale di superficie di f su S