Elettrostatica

Forza elettrica

$$\vec{F} = K_e \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{u_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{u_r}$$

Se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno la forza ha segno positivo e i due corpi si respingono, altrimenti si attraggono
$K_e = 9 \cdot 10^9 \, \mathrm{Nm}^2 \,/\, \mathrm{C}^2$
La costante dielettrica $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \, \mathrm{C}^2 \,/\, \mathrm{Nm}^2$ descrive la resistenza del materiale al campo elettrico, in questo caso il vuoto
L'attrazione gravitazionale tra due particelle è insignificante rispetto a quella elettrica, alcuni numeri:
$m_e = 9{,}1093 \cdot 10^{-31} \, \mathrm{Kg}$, $m_p = 1{,}6726 \cdot 10^{-27} \, \mathrm{Kg}$, $q_p = -q_e = 1{,}6022 \, \mathrm{C}$

Campo elettrico

$$\vec{E} = K_e \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{u_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{u_r}$$

Esprime la potenzialità di forza elettrica in un punto, infatti $\vec{E} \cdot q_2 = \vec{F}$

Flusso elettrico

La superficie della sfera equivale a $S = 4\pi r^2$
Il flusso elettrico è dato da

$$\Phi_E = E \cdot S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

E vale su tutte le superfici chiuse indipendentemente dalla posizione della carica

Campo elettrico di un filo carico

Per un filo disposto sull'asse delle y da a a $-a$ di carica Q rispetto ad un punto $P(x_0, 0)$
Il filo ha una densità di carica

$$\lambda = \frac{Q}{2a}$$

per cui $dq = \lambda \cdot dy$
Ogni punto del filo $R(0, y_0)$ crea un campo elettrico $d\vec{E}$ verso P la cui componente verticale è compensata da $R'(0, -y_0)$, quella orizzontale è

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{\left(\sqrt{y^2 + x_0^2}\right)^2} \cdot \cos(\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dy}{y^2 + x_0^2} \cdot \cos(\theta)$$

dove θ è l'angolo formato con l'orizzontale dal segmento $\overrightarrow{RP}$ lungo ρ

$$\frac{x_0}{\rho} = \cos(\theta) \implies \rho = \frac{x_0}{\cos(\theta)} = \sqrt{y^2 + x_0^2}$$

$$y = x_0 \cdot \tan(\theta) \implies \theta = \arctan\left(\frac{y}{x_0}\right)$$

$$dy = \frac{x_0}{\cos^2(\theta)} d\theta$$

Quindi il campo elettrico è l'integrale

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-a}^{a} dE_x = \int_{-a}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dy}{y^2 + x_0^2} \cdot \cos(\theta) \\ &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot x_0}{\cos^2(\theta)} \cdot d\theta \cdot \left(\frac{\cos(\theta)}{x_0}\right)^2 \cdot \cos(\theta) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0} \cdot [\sin(\theta)]_{-\theta_0}^{\theta_0} = E \end{aligned}$$

Per un filo infinito:

$$E_\infty = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_0}$$

Utilizzando il flusso per il campo elettrico di un filo carico infinito:
Prendendo un cilindro di altezza h e raggio x_0, la carica elettrica del filo contenuto è $Q = \lambda \cdot h$
Il flusso si può ricavare sia moltiplicando il campo elettrico per la superficie con cui interagisce in modo ortogonale sia attraverso la definizione

$$\Phi_E = E \cdot 2\pi x_0 h = \frac{\lambda \cdot h}{\varepsilon_0}$$

Quindi

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x_0}$$

Campo elettrico di un disco carico

Si utilizzano le coordinate polari per semplicità
Se il raggio è R la densità di carica è

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

Si divide il disco in superfici infinitesimali di area $dS = dr \cdot r \cdot d\theta$, come se fosse l'area di un rettangolo
Infatti

$$\begin{aligned} S &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr = \int_0^R r \int_0^{2\pi} d\theta \, dr = \int_0^R r \cdot [\theta]_0^{2\pi} \, dr = \int_0^R 2\pi r \, dr \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2 \end{aligned}$$

Centrando il disco nell'origine, sul piano $x = 0$, α è l'angolo formato rispetto all'asse x da segmento che congiunge $R(0, r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ a $P(x_0, 0, 0)$

$$\cos(\alpha) = \frac{x_0}{\sqrt{r^2 + x_0^2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot d\theta \cdot r \cdot dr}{\left(\sqrt{r^2 + x_0^2}\right)^2} \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\sigma \cdot d\theta \cdot r \cdot dr}{(r^2 + x_0^2)^{3/2}} \cdot x_0$$

$$E_x = \int_0^R \int_0^{2\pi} dE_x = \frac{\sigma \cdot x_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(r^2 + x_0^2)^{3/2}}\, dr = \frac{\sigma \cdot x_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \int_0^R \frac{r}{(r^2 + x_0^2)^{3/2}}\, dr$$
$$= \frac{\sigma \cdot x_0}{2\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + x_0^2}} \right]_0^R = \frac{\sigma \cdot x_0}{2\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} \right) = E$$

Per una superficie infinita

$$E_\infty = \frac{\sigma \cdot x_0}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Utilizzando il flusso per il campo elettrico di una superficie infinita:
Prendendo un cilindro di altezza $2h$, che interseca ortogonalmente il piano $x = 0$ ad altezza h, il cui asse passa per $P(x_0, 0, 0)$ e $P'(-x_0, 0, 0)$

$$\Phi_E = E \cdot 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$$

Quindi

$$E = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Campo elettrico di una sfera carica

Per una sfera di raggio R rispetto ad una particella a distanza r dal centro della sfera
Se $r \geq R$

$$\Phi_E = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Altrimenti

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$Q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q \cdot r^3}{R^3}$$

$$E' = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 \cdot R^3}$$