

Cinematica

Primo principio di Newton

Principio di inerzia: un corpo su cui non è applicata alcuna forza si muove a velocità costante

Secondo principio di Newton

Velocità, spazio, accelerazione

La velocità media si calcola come segue

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mentre la velocità istantanea si calcola con il limite

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Consegue che

$$x = \int v \, dt = \int \frac{dx}{dt} \, dt = \int dx$$

$$v = D[c \cdot t^2] = 2c \cdot t$$

Quindi l'accelerazione è data da

$$a = \frac{dv}{dt} = D[2c \cdot t] = 2c$$

Integrando si ottiene

$$v = at + v_0$$

Integrando ancora

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

Accelerazione in relazione allo spazio

$$a \cdot v \cdot dt = a \cdot dx = v \cdot dv$$

Integrando

$$\int_{x_0}^{x_1} a \, dx = \int_{v_0}^{v_1} v \, dv$$

si ottiene

$$a \cdot (x_1 - x_0) = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2}$$

Forza e massa

La forza applicata è equivalente al prodotto della massa per l'accelerazione

$$F = m \cdot a$$

1 N è la forza necessaria per accelerare 1 kg di 1 m/s²

Terzo principio di Newton

Azione e reazione: ad una forza corrisponde una forza di reazione uguale e contraria applicata ad un altro corpo

Forza di gravità

La forza di gravità è un'attrazione radiale tra due corpi aventi massa

Legge di gravitazione universale:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

m_1, m_2 : masse dei corpi

d : distanza

G : costante di gravitazione universale

Il campo gravitazionale sulla superficie terrestre è $g = G \frac{m_T}{r_T^2} = 9.81 \text{ m/s}^2$

Vettori

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j}$$

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{r}$$

Forza elastica

Le caratteristiche di una molla sono:

- lunghezza caratteristica/a riposo l_c
- costante elastica k

La forza esercitata dalla molla si ottiene con

$$\vec{F}_e = -k \cdot \vec{\Delta x}$$

$$F_e = m \cdot a$$

$$-k \cdot \Delta x = m \cdot a$$

Dove $\Delta x = |l_c - x|$, centrando il sistema in l_c si ottiene $\Delta x = |x|$

Attrito radente

L'attrito è una forza che si oppone al movimento di un oggetto appoggiato su una superficie. Se l'attrito statico è maggiore o uguale alla forza applicata l'oggetto rimane fermo, altrimenti il caso diventa dinamico. Se l'attrito dinamico diventa maggiore della forza applicata l'oggetto si ferma.

L'attrito è direttamente proporzionale alla reazione normale del piano, moltiplicata per un coefficiente. Il coefficiente di attrito statico è sempre maggiore di quello dinamico.

$$\vec{F}_{AS} = \vec{N} \cdot \mu_S$$

$$\vec{F}_{AD} = \vec{N} \cdot \mu_D$$

Moto circolare uniforme

Per semplicità si utilizzano le coordinate polari al posto di quelle cartesiane

Mentre i versori direzionali \vec{i}, \vec{j} degli assi x, y sono fissi, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ cambiano direzione

$$\vec{R} = r\vec{u}_r = r \cos(\theta)\vec{i} + r \sin(\theta)\vec{j}$$

La frequenza f rappresenta il numero di rotazioni nell'unità di tempo, il periodo T rappresenta il tempo impiegato per eseguire una rotazione

$$f = \frac{1}{T}$$

La velocità angolare corrisponde alla variazione dell'angolo nel tempo

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = 2\pi \cdot f$$

La variazione della direzione parallela nel tempo corrisponde alla variazione dell'angolo moltiplicata per la direzione normale

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$$

La velocità tangenziale dipende da quella angolare e dal raggio e corrisponde alla variazione dell'angolo nel tempo

La velocità tangenziale è la variazione della posizione nel tempo

$$\vec{v}_t = \frac{d(r\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \frac{d\vec{u}_r}{dt} r = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r r = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + \omega \cdot r \cdot \vec{u}_r = \omega \cdot r \cdot \vec{u}_r$$

poiché il raggio è costante, in modulo: $v_t = r \cdot \omega$

Derivando si ottiene

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_t}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

I primi tre termini si annullano poiché il raggio è costante, il quarto anche perché l'angolo varia in modo costante, quindi rimane

$$\vec{a}_c = r \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{u}_r = -r \cdot \omega \cdot \vec{u}_r$$

L'accelerazione centripeta in modulo pertanto si calcola come: $a_c = r \cdot \omega^2$

Moto circolare uniformemente accelerato

La velocità angolare ω cambia secondo un'accelerazione α , pertanto c'è un'accelerazione tangenziale a_t costante, mentre quella centripeta a_c varia poiché dipende dalla velocità tangenziale

Il comportamento è analogo a quello del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Come per quello uniforme vale $v_t = r \cdot \omega$

Inoltre $a_t = r \cdot \alpha$

E' importante tenere a mente che periodo e frequenza non sono più costanti, quindi non è possibile utilizzarli per calcolare la velocità angolare