Energia

Lavoro

Il lavoro è la somma infinitesima delle forze in uno spostamento da $\vec{r_1}$ a $\vec{r_2}$ ovvero

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\,d\vec{r}$$

Per il secondo principio di Newton

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \cdot d\vec{v} \cdot \vec{v}$$

Pertanto

$$W = \int_{v_1}^{v_2} \frac{m \cdot \vec{v} \cdot d(v)}{2} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2}$$

E corrisponde alla differenza delle energie cinetiche e l'opposto della differenza delle energie potenziali nei due punti

Lavoro di una forza costante e forza conservativa

$$W = -(\vec{F} \cdot \vec{r_2} - \vec{F} \cdot \vec{r_1}) = \vec{F}(\vec{r_1} - \vec{r_2})$$

Dove la forza può essere la forza peso, elastica, di attrito, ...
Si può notare che il lavoro non dipende in alcun modo dal percorso, ciò significa che la forza è conservativa
Di conseguenza lungo un percorso chiuso il lavoro è nullo

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$$

Energia cinetica

La differenza di energia cinetica corrisponde al lavoro, per quanto trovato sopra

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Energia potenziale

Sempre per quanto visto sopra $W = -\Delta E_p$
Per una forza costante vale sempre $E_p = \vec{F} \cdot \vec{r}$, come nel caso della forza peso $E_p = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{r}$
Per la forza elastica invece bisogna svolgere l'integrale e $E_p = \frac{k}{2} r^2$

Energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative vale $W = \Delta E_c = -\Delta E_p$ e l'energia meccanica $E_m = E_c + E_p$ di un punto materiale si conserva ed è costante

Quantità di moto

La quantità di moto è definita come il prodotto della velocità per la massa
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Pertanto la forza è la variazione della quantità di moto nel tempo

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

La quantità di moto totale è la somma delle quantità di moto $\sum_i \vec{p_i}$
La somma di tutte le forze è uguale alla somma delle derivate delle quantità di moto

$$\sum_i \vec{F_i} = \sum_i \frac{d\vec{p_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p_i}$$

Impulso

L'impulso cambia la quantità di moto nel tempo

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} m\, d\vec{v} = \vec{p_1} - \vec{p_0}$$

Urti elastici

Nella teoria degli urti la somma delle forze esterne è nulla e quindi irrilevante, inoltre ogni forza interna ha la sua forza di reazione e quindi è nulla

$$\sum_k \vec{F_{ki}} + \sum_j \vec{F_{je}} = 0 + 0 = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p_i} = 0$$

Perciò la derivata della quantità di moto è nulla e la quantità di moto è costante, si preserva nel sistema
Si può costruire un sistema contenente le equazioni della preservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, in una dimensione

$$\begin{cases} p_{0A} + p_{0B} = m_A \cdot v_{0A} + m_B \cdot v_{0A} = m_A \cdot v_{1A} + m_B \cdot v_{1B} = p_{1A} + p_{1B} \\ E_{k0A} + E_{k0B} = \frac{1}{2} m_A v_{0A}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{0B}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{1A}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{1B}^2 = E_{k1A} + E_{k1B} \end{cases}$$

Urti elastici tra oggetti con la stessa massa

Nelle equazioni precedenti si può dividere per la massa in quanto $m_A = m_B$ ottenendo

$$\begin{cases} v_{0A} - v_{1A} = v_{0B} - v_{1B} \\ v_{0A} + v_{1A} = v_{0B} + v_{1B} \end{cases}$$

Quindi $v_{0A} = v_{1B}$ e $v_{1A} = v_{0B}$

Potenza

La potenza è il lavoro sull'unità di tempo ovvero

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Momento meccanico

Il momento meccanico è definito come il prodotto vettoriale tra la forza e la posizione di applicazione
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
In modulo $M = r \cdot F \cdot \sin(\theta)$
Per i corpi in rotazione, con punto di riferimento nel centro di rotazione vale anche
$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$
dove $I = c \cdot m \cdot r^2$ è il momento di inerzia e varia a seconda della forma dell'oggetto:

- per un disco di massa uniforme $c = \frac{1}{2}$
- per un anello di massa concentrata verso l'esterno $c = 1$

Inoltre per il teorema di Huggens-Steiner $I = I_B + d^2 \cdot m$, con I_B momento di inerzia nel baricentro e d la distanza dal baricentro

Momento angolare

Il momento angolare è il prodotto vettoriale la tra quantità di moto e la posizione di applicazione
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
In modo simile al lavoro vale

$$\sum_i \vec{M}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_i$$

Il tempo di svolgimento è infinitesimo, quindi la somma dei momenti meccanici si può approssimare a 0, pertanto la somma dei momenti angolari è costante