Cinematica

Primo principio di Newton

Principio di inerzia: un corpo su cui non è applicata alcuna forza si muove a velocità costante

Secondo principio di Newton

Velocità, spazio, accelerazione

La velocità media si calcola come segue

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mentre la velocità istantanea si calcola con il limite

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Consegue che

$$x = \int v\,dt = \int \frac{dx}{dt}\,dt = \int dx$$

$$v = \mathrm{D}[c \cdot t^2] = 2c \cdot t$$

Quindi l'accelerazione è data da

$$a = \frac{dv}{dt} = \mathrm{D}[2c \cdot t] = 2c$$

Integrando si ottiene

$$v = at + v_0$$

Integrando ancora

$$x = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

Accelerazione in relazione allo spazio

$a \cdot v \cdot dt = a \cdot dx = v \cdot dv$
Integrando

$$\int_{x_0}^{x_1} a\,dx = \int_{v_0}^{v_1} v\,dv$$

si ottiene

$$a \cdot (x_1 - x_0) = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2}$$

Velocità in relazione allo spazio

Dall'equazione precedente

$v_1^2 - v_2^2 = 2 \cdot a \cdot (x_1 - x_2)$

$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2 \cdot a \cdot (x_1 - x_2)}$

Forza e massa

La forza applicata è equivalente al prodotto della massa per l'accelerazione

$F = m \cdot a$

$1\ \mathrm{N}$ è la forza necessaria per accelerare $1\ \mathrm{kg}$ di $1\ \mathrm{m/s^2}$

Terzo principio di Newton

Azione e reazione: ad una forza corrisponde una forza di reazione uguale e contraria applicata ad un altro corpo

Forza di gravità

La forza di gravità è un'attrazione radiale tra due corpi aventi massa

Legge di gravitazione universale:

$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$

m_1, m_2: masse dei corpi
d: distanza
G: costante di gravitazione universale

Il campo gravitazionale sulla superficie terrestre è $g = G \frac{m_T}{r_T^2} = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

Vettori

$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$

$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$

$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j}$

$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{r}$

Forza elastica

Le caratteristiche di una molla sono:

- lunghezza caratteristica/a riposo l_c
- costante elastica k

La forza esercitata dalla molla si ottiene con
$\vec{F_e} = -k \cdot \vec{\Delta x}$
$F_e = m \cdot a$
$-k \cdot \Delta x = m \cdot a$
Dove $\Delta x = |l_c - x|$, centrando il sistema in l_c si ottiene $\Delta x = |x|$

Attrito radente

L'attrito è una forza che si oppone al movimento di un oggetto appoggiato su una superficie. Se l'attrito statico è maggiore o uguale alla forza applicata l'oggetto rimane fermo, altrimenti il caso diventa dinamico. Se l'attrito dinamico diventa maggiore della forza applicata l'oggetto si ferma.
L'attrito è direttamente proporzionale alla reazione normale del piano, moltiplicata per un coefficiente. Il coefficiente di attrito statico è sempre maggiore di quello dinamico.
$\vec{F_{AS}} = \vec{N} \cdot \mu_S$
$\vec{F_{AD}} = \vec{N} \cdot \mu_D$

Moto circolare uniforme

Per semplicità si utilizzano le coordinate polari al posto di quelle cartesiane
Mentre i versori direzionali $\vec{i}, \vec{j}$ degli assi x, y sono fissi, $\vec{u_r}, \vec{u_\theta}$ cambiano direzione
$\vec{R} = r\vec{u_r} = r\cos(\theta)\vec{i} + r\sin(\theta)\vec{j}$
La frequenza f rappresenta il numero di rotazioni nell'unità di tempo, il periodo T rappresenta il tempo impiegato per eseguire una rotazione
$f = \frac{1}{T}$
La velocità angolare corrisponde alla variazione dell'angolo nel tempo

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = 2\pi \cdot f$$

La variazione della direzione parallela nel tempo corrisponde alla variazione dell'angolo moltiplicata per la direzione normale

$$\frac{d\vec{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta}$$

La velocità tangenziale dipende da quella angolare e dal raggio e corrisponde alla variazione dell'angolo nel tempo
La velocità tangenziale è la variazione della posizione nel tempo

$$\vec{v_t} = \frac{d(r\vec{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + \frac{d\vec{u_r}}{dt}r = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + \frac{d\theta}{dt}\vec{u_r}r = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + \omega \cdot r \cdot \vec{u_r} = \omega \cdot r \cdot \vec{u_r}$$

poiché il raggio è costante, in modulo: $v_t = r \cdot \omega$

Derivando si ottiene

$$\vec{a_c} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{u_r} + \frac{dr}{dt}\vec{u_\theta} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt}\vec{u_\theta} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u_\theta} + r\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u_\theta}}{dt}$$

I primi tre termini si annullano poiché il raggio è costante, il quarto anche perché l'angolo varia in modo costante, quindi rimane

$$\vec{a_c} = r\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\vec{u_\theta}}{dt} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u_r} = -r \cdot \omega \cdot \vec{u_r}$$

L'accelerazione centripeta in modulo pertanto si calcola come: $a_c = r \cdot \omega^2$

Moto circolare uniformemente accelerato

La velocità angolare ω cambia secondo un'accelerazione α, pertanto c'è un'accelerazione tangenziale a_t costante, mentre quella centripeta a_c varia poiché dipende dalla velocità tangenziale
Il comportamento è analogo a quello del moto rettilineo uniformemente accelerato:
$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
Come per quello uniforme vale $v_t = r \cdot \omega$
Inoltre $a_t = r \cdot \alpha$
E' importante tenere a mente che periodo e frequenza non sono più costanti, quindi non è possibile utilizzarli per calcolare la velocità angolare