Determinante

$A \in M_n(\mathbb{R}),\ i, j \in \{1, \dots, n\}$
$A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ è la matrice ottenuta da A rimuovendo la i-esima riga e la j-esima colonna

Il determinante è una funzione $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita come:

- Se $n = 1,\ A = [a_{11}]$, $\det(A) = a_{11}$
- Se $n \geq 2$,

  $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det(A_{i1})$$

  Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è triangolare superiore, ovvero

  $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  $\implies \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
  Quindi $\det(I_n) = 1$

Teorema di Laplace

$A \in M_n(\mathbb{R}),\ i, j \in \{0, \dots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Se A ha una riga o una colonna nulla $\implies \det(A) = 0$

$A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}),\ A^T = [a_{ji}] \in M_n(\mathbb{R}) \implies \det(A) = \det(A^T)$

Teorema di Binet

$A, B \in M_n(\mathbb{R}) \implies \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Inoltre se A è invertibile $\implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Determinante delle matrici delle operazioni elementari

$A, S_{ij}, D_i(\lambda), E_{ij}(\mu) \in M_n(\mathbb{R})$

- $\det(S_{ij}) = -1 \implies \det(S_{ij} \cdot A) = -\det(A)$
- $\det(D_i(\lambda)) = \lambda \implies \det(D_i(\lambda) \cdot A) = \lambda \cdot \det(A)$
- $\det(E_{ij}(\mu)) = 1 \implies \det(E_{ij}(\mu) \cdot A) = \det(A)$
  Si può quindi semplificare il calcolo del determinante riducendo a scalini una matrice e moltiplicando il suo determinante per il prodotto dei determinanti delle operazioni elementari utilizzate

Determinante, rango e identità

$A \in M_n(\mathbb{R})$
Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $\det(A) \neq 0$
- $rg(A) = n$
- A è invertibile

Determinante e matrice inversa

$A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$
Il cofattore dell'elemento a_{ij} è lo scalare $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$ e la matrice dei cofattori di A è $A' = [a'_{ij}]$

Se A è invertibile $\implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A')^T$

Determinante e vettori geometrici

Prodotto vettoriale

$\underline{v} = v_1\underline{i} + v_2\underline{j} + v_3\underline{k},\ \underline{w} = w_1\underline{i} + w_2\underline{j} + w_3\underline{k}$
$\underline{v} \times \underline{w} =$"$\det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$"

Prodotto misto

$\underline{v} \cdot (\underline{w} \times \underline{u}) = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$

Determinante e geometria nello spazio

Complanarità di due rette

r e s sono complanari $\iff \{\underline{v}, \underline{w}, \overrightarrow{PQ}\}$ sono linearmente dipendenti $\iff \det \left[\underline{v} \,\middle|\, \underline{w} \,\middle|\, \overrightarrow{PQ} \right] = 0$

Equazione cartesiana di un piano

A, B, C punti non allineati
π è luogo dei punti Q tali che $\overrightarrow{AQ}$ è combinazione lineare di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$
$Q = (x, y, z) \in \pi \iff \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ}\}$ sono linearmente dipendenti $\iff \det \left[\overrightarrow{AB} \,\middle|\, \overrightarrow{AQ} \,\middle|\, \overrightarrow{AQ} \right] = 0$