Diagonalizzabilità

V spazio vettoriale, $f : V \to V$ endomorfismo

Endomorfismo diagonalizzabile

$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono dette simili $\iff \exists C \in M_n(\mathbb{R}) : A = C^{-1}BC$
f è detto diagonalizzabile $\iff \exists B$ base di $V : M_B^B(f)$ è diagonale

$f : V \to V$ diagonalizzabile, $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ base di $V : M_B^B(f)$ è diagonale

$$M_B^B(f) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \implies f(\underline{b}_i) = \lambda_i \underline{b}_i$$

Autovalori e autovettori

$\underline{v} \in V, \underline{v} \neq \underline{0}$ è detto autovettore se $\exists \lambda \in \mathbb{R} : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
$\lambda \in \mathbb{R}$ è detto autovalore se $\exists \underline{v} \in V, \underline{v} \neq \underline{0} : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$
Lo spettro di f è l'insieme degli autovalori di f
$\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore, l'autospazio relativo a λ è $E(\lambda) := \{\underline{v} \in V, \underline{v} \neq \underline{0} : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}\}$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ autovalori distinti di f
$\underline{v}_1, \dots \underline{v}_k \in V : f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \implies \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è linearmente indipendente
Dimostrazione:

- Caso base: $k = 1$, $\{\underline{v}_1\}$ è linearmente indipendente
- Caso induttivo:
  $\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_k \underline{v}_k = \underline{0}$, $f(\underline{0}) = \underline{0}$
  $f(\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_k \underline{v}_k) = \underline{0}$
  $\mu_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_k \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$
  Inoltre $\lambda_k(\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_k \underline{v}_k) = \lambda_k \underline{0} = \underline{0}$
  $\implies \mu_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_k \lambda_k \underline{v}_k - \lambda_k(\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_k \underline{v}_k) =$
  $= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_k)\underline{v}_1 + \dots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\underline{v}_{k-1} + \mu_k(\lambda_k - \lambda_k)\underline{v}_k = \underline{0}$
  Supponendo $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k-1}\}$ linearmente indipendente

  $$\begin{cases} \mu_1(\lambda_1 - \lambda_k) = 0 \\ \dots \\ \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_1 = 0 \\ \dots \\ \mu_{k-1} = 0 \end{cases}$$

  $\implies \mu_k \underline{v}_k = \underline{0}$ e per definizione $\underline{v}_k \neq \underline{0} \implies \mu_k = 0$

Come trovare gli autovalori

B base di V, $A = M_B^B(f)$
λ è un autovalore di $f \iff \exists \underline{x} \in V : f(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \iff A\underline{x} = \lambda \underline{x} = \lambda I \underline{x}$
$\iff (A - \lambda I)\underline{x} = \underline{0} \iff$ il sistema lineare omogeneo ammette soluzioni non banali $\det(A - \lambda I) = 0$

Polinomio caratteristico

Il polinomio caratteristico di f è il polinomio nella variabile λ
$\chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
Il polinomio caratteristico non dipende dalla scelta della base

f è diagonalizzabile $\iff$ $\exists$ una base di V formata da autovettori di f
Dimostrazione: f è diagonalizzabile $\iff$ $\exists B$ base di V : $M_B^B(f)$ è diagonale, in particolare, se $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ e $n = \dim(V)$, si ha $f(\underline{b}_i) = \lambda_i \underline{b}_i$
$\iff \chi_f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - \lambda)$
Le soluzioni del polinomio caratteristico sono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ossia gli autovalori
Siccome $f(\underline{b}_i) = \lambda \underline{b}_i \implies \underline{b}_i$ sono gli autovettori

Come determinare gli autovettori

λ_i autovalore di f, $\mathrm{E}(\lambda_i) = \{\underline{x} \in V : f(\underline{x}) = \lambda_i \underline{x}\}$
$f(\underline{x}) = \lambda_i \underline{x} \iff f(\underline{x}) - \lambda_i Id(\underline{x}) = \underline{0} \iff (f - \lambda_i Id)(\underline{x}) = \underline{0} \iff (A - \lambda_i I)\underline{x} = \underline{0}$
$\mathrm{E}(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id) = \{\underline{x} : (A - \lambda_i I)\underline{x} = \underline{0}\}$

Molteplicità algebrica e geometrica

$\lambda_0 \in \mathbb{R}$ autovalore di f
La molteplicità algebrica di λ_0, $\mathrm{a}(\lambda_0)$, è la molteplicità di λ_0 come radice di $\chi_f(\lambda)$
La molteplicità geometrica di λ_0, $\mathrm{g}(\lambda_0)$, è la dimensione dell'autospazio $\mathrm{E}(\lambda_0)$
$1 \leq \mathrm{g}(\lambda_0) \leq \mathrm{a}(\lambda_0)$

Criterio di diagonalizzabilità

f è diagonalizzabile $\iff$ $\chi_f(\lambda)$ è totalmente riducibile e $\mathrm{a}(\lambda_i) = \mathrm{g}(\lambda_i) \ \ \forall \lambda_i$
Dimostrazione: " $\impliedby$ "

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{g}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{a}(\lambda_i) = \dim(V)$$

$g_i = \mathrm{g}(\lambda_i)$
$A_i = \{\underline{a}_{i1}, \ldots, \underline{a}_{ig_i}\}$ base di $\mathrm{E}(\lambda_i)$
$(\mu_{11}\underline{a}_{11} + \ldots + \mu_{1g_1}\underline{a}_{1g_1}) + \ldots + (\mu_{r1}\underline{a}_{r1} + \ldots + \mu_{rg_r}\underline{a}_{rg_r}) = \underline{w}_1 + \ldots + \underline{w}_r = 0$ e $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_r\}$ è linearmente indipendente
$\implies \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_r = 0 \implies \mu_{i1}, \ldots, \mu_{ig_i} = 0 \ \ \forall i \in \{0, \ldots, r\}$

f endomorfismo, $\dim(V) = n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ autovalori di f ($k \leq n$)
f è diagonalizzabile $\iff$

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{g}(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{a}(\lambda_i) = \dim(V)$$

f endomorfismo tale che $\chi_f(\lambda)$ è totalmente riducibile e $\mathrm{a}(\lambda_i) = 1 \implies f$ è diagonalizzabile

f endomorfismo diagonalizzabile, $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice rappresentativa $\implies$

$$\det(A) = \prod_{i=0}^{n} \lambda_i$$

Matrici diagonalizzanti e cambiamenti di base

f diagonalizzabile, A base di V, $M = M_A^A(f)$, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ autovettori
$B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V
$M_B^A = [\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n]$

$$M_B^B(f) = M_A^B M_A^A(f) M_B^A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Endomorfismi simmetrici

V spazio vettoriale euclideo, f endomorfismo è simmetrico se $f(\underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot f(\underline{w}) \;\; \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

f endomorfismo simmetrico, λ_1, λ_2 autovalori distinti
$\underline{v}_1 \in \mathrm{E}(\lambda_1), \underline{v}_2 \in \mathrm{E}(\lambda_2) \implies \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \underline{0}$
Dimostrazione: $f(\underline{v}_1) \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \cdot f(\underline{v}_2) \iff \lambda_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \cdot \lambda_2 \underline{v}_2 \iff (\lambda_1 - \lambda_2)(\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2) = 0 \implies \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0$

Teorema spettrale

V spazio vettoriale euclideo, f endomorfismo simmetrico $\implies \exists$ una base di V fatta di autovalori di f e f è diagonalizzabile

f è simmetrico $\iff M_B^B(f)$ è simmetrica, B base ortonormale di V