Spazi vettoriali euclidei

Prodotto scalare

V spazio vettoriale reale
Un prodotto scalare su V è una funzione lineare che $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ associa $\underline{v} \cdot \underline{w}$ tale che:

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v} \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
- $(\lambda \underline{v}) \cdot \underline{w} = \lambda(\underline{v} \cdot \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $\underline{v} \cdot (\underline{w} + \underline{u}) = \underline{v} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{u} \quad \forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$
- $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in V$ e $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$
  Uno spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare è detto spazio vettoriale euclideo

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

V spazio vettoriale euclideo
$\underline{v}, \underline{w} \in V \implies (\underline{v} \cdot \underline{w})^2 \leq (\underline{v} \cdot \underline{v})(\underline{w} \cdot \underline{w})$

Norma

V spazio vettoriale euclideo
La norma di un vettore è $||\underline{v}|| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
Proprietà:

- $||\underline{v}|| \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in V$ e $||\underline{v}|| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$
- $||\lambda \underline{v}|| = |\lambda| ||\underline{v}|| \quad \forall \underline{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$
- $||\underline{v} + \underline{w}|| \leq ||\underline{v}|| + ||\underline{w}|| \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

Distanza

La distanza tra due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ è $\mathrm{d}(\underline{v}, \underline{w}) = ||\underline{v} - \underline{w}||$
Proprietà:

- $\mathrm{d}(\underline{v}, \underline{w}) \geq 0$ e $\mathrm{d}(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \underline{v} = \underline{w} \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
- $\mathrm{d}(\underline{v}, \underline{w}) = \mathrm{d}(\underline{w}, \underline{v}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
- $\mathrm{d}(\underline{v}, \underline{w}) \leq \mathrm{d}(\underline{v}, \underline{u}) + \mathrm{d}(\underline{u}, \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$

Ortogonalità

V spazio vettoriale euclideo, $\underline{v}, \underline{w} \in V$ sono detti ortogonali se $\underline{v} \cdot \underline{w} = 0$

Se $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \neq 0$ sono ortogonali a coppie, ovvero $\forall i \neq j \in \{1, \ldots, m\}\ \ \underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = 0 \implies \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\}$ è linearmente indipendente
Dimostrazione:
$\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{v}_m = \underline{0}\ \underline{v}_i \cdot (\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_m \underline{v}_m) = \lambda_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_i + \ldots + \lambda_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i + \ldots + \lambda_m \underline{v}_m \cdot \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i = 0 \implies \lambda_i = 0$

Se $\dim(V) = n$ e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono ortogonali a coppie $\implies \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ è una base

Proiezioni ortogonali

$\underline{u} \neq \underline{0} \in V$
La proiezione ortogonale lungo $\underline{u}$ è la funzione

$$\mathrm{pr}_{\underline{u}}(\underline{v}) = \left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{||\underline{u}||^2}\right)\underline{u}$$

Base ortonormale

V spazio vettoriale euclideo
Delta di Kronecker:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq k \end{cases}$$

- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset V$ è ortonormale se $\underline{v}_i \cdot \underline{v}_j = \delta_{ij}$
- Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ è una base allora è detta base ortonormale

Metodo di Gram-Schmidt

Input: $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ insieme di vettori linearmente indipendenti
Output: $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ insieme ortonormale tale che $\langle \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m \rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \rangle$
Procedimento:

1. $\underline{a}'_1 = \underline{v}_1$

   $$\underline{a}'_i = \underline{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{pr}_{\underline{a}'_j}(\underline{v}_i)$$

2. $\{\underline{a}'_1, \dots, \underline{a}'_m\}$ è ortogonale per costruzione
3. $$\underline{a}_i = \frac{\underline{a}'_i}{||\underline{a}'_i||}$$
4. $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ è un insieme ortonormale

Complemento ortogonale

V spazio vettoriale euclideo, $S \subset V$ sottoinsieme
$S^\perp = \{\underline{v} \in V : \forall \underline{s} \in S \ \ \underline{v} \cdot \underline{s} = 0\}$ è il complemento ortogonale di S
$S^\perp \subset V$ è un sottospazio
Dimostrazione: $(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) \cdot \underline{s} = \lambda \underline{v} \cdot \underline{s} + \mu \underline{w} \cdot \underline{s} = 0 \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in S^\perp, \ \underline{s} \in S, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$S^\perp = \langle S \rangle^\perp$$

$$S \subset V \implies \dim(\langle S \rangle) + \dim(\langle S \rangle^\perp) = \dim(V)$$

Dimostrazione:
$\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p\}$ base ortonormale di $\langle S \rangle$, $f : V \to \mathbb{R}^p, \ f(\underline{v}) = (\underline{v} \cdot \underline{u}_1, \dots, \underline{v} \cdot \underline{u}_p)$

- f è lineare: segue dalle proprietà del prodotto scalare
- f è suriettiva:
  $f(\underline{u}_1) = (\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_1 \cdot \underline{u}_p) = (1, \dots, 0)$
  $\dots$
  $f(\underline{u}_p) = (\underline{u}_p \cdot \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_p \cdot \underline{u}_p) = (0, \dots, 1)$
  $\{f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_p)\} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_p\} \implies \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$ e $\dim(\mathrm{Im}(f)) = p = \dim(\langle S \rangle)$
- $\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0}\} = \{\underline{v} \in V : \forall i \in \{1, \dots, p\} \ \ \underline{v} \cdot \underline{u}_i = 0\} = \langle S \rangle^\perp \implies \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\langle S \rangle^\perp)$

Matrici ortogonali

$A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se

- è invertibile
- $A^{-1} = A^T$
  $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = A^TA = I_n\}$

Se $A \in O_n(\mathbb{R}) \implies \det(A) = \pm 1$
Dimostrazione: $\det(AA^T) = \det(I_n) \implies \det(A)\det(A^T) = 1 \implies \det(A)^2 = 1 \implies \det(A) = \pm 1$

$A \in O_n(\mathbb{R}) \iff$ le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare canonico
Dimostrazione:

$$A = [\underline{a}_1 \mid \dots \mid \underline{a}_n],\ A^T = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \hline \dots \\ \hline \underline{a}_n \end{bmatrix}$$

$A^TA = I_n = [\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j] = \delta_{ij}$

Isometrie

V spazio vettoriale euclideo, $f : V \to V$ funzione lineare biunivoca
f è detta isometria se $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V \;\; \underline{v} \cdot \underline{w} = f(\underline{v}) \cdot f(\underline{w})$

Se f è un'isometria $\implies$

- $||\underline{v}|| = ||f(\underline{v})|| \quad \forall \underline{v} \in V$
- $\mathrm{d}(\underline{v}, \underline{w}) = \mathrm{d}(f(\underline{v}), f(\underline{w})) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$

V spazio vettoriale euclideo, $f : V \to V$ funzione lineare, B base ortonormale di V
f è un'isometria $\iff M_B^B(f)$ è ortogonale