Basi

V spazio vettoriale finitamente generato
Un insieme di vettori $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\} \subset V$ è una base di V se è un insieme di generatori di V linearmente indipendenti

$\forall \underline{v} \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di B
Dimostrazione:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underline{v}_i \implies \underline{0} = \underline{v} - \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) \underline{v}_i \implies \lambda_i = \mu_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

perché B è linearmente indipendente

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n \iff k = n$ e $\mathrm{rg}([\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_k]) = n$

Estrazione di una base da un sistema di generatori

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ sistema di generatori ($m \geq n$)

1. $A = [\underline{v}_1 \mid \dots | \underline{v}_m]$
2. Si riduce A in forma a scalini: i vettori corrispondenti alle colonne contenenti pivot formano una base

Completamento di un sistema linearmente indipendente ad una base

$B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ base di V, $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ sistema linearmente indipendente ($m < n$)
$\implies \exists$ una base di V formata da $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ e altri $n - m$ elementi di B

1. $[A|B] = [\underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_m \mid \underline{b}_1 \mid \dots \mid \underline{b}_n]$
2. Si riduce $[A|B]$ a scalini, si ottiene
   - m pivot sulle prime m colonne
   - la posizione dei rimanenti $n - m$ pivot individua gli $n - m$ elementi di B da aggiungere a $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ per ottenere una base di $\mathbb{R}^n$

Spazio delle righe e delle colonne

$$A = [\underline{c}_1 \mid \dots \mid \underline{c}_n] = \begin{bmatrix} \underline{r}_1 \\ \hline \dots \\ \hline \underline{r}_m \end{bmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),\ \underline{c}_i \in \mathbb{R}^m,\ \underline{r}_j \in \mathbb{R}^n$$

$\mathrm{C}(A) = \mathrm{Span}(\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n) \subset \mathbb{R}^m$ è lo spazio delle colonne di A
$\mathrm{R}(A) = \mathrm{Span}(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_m) \subset \mathbb{R}^n$ è lo spazio delle righe di A
$\dim(\mathrm{C}(A)) = \dim(\mathrm{R}(A)) = \mathrm{rg}(A)$
Dimostrazione:

- A a scalini: $\mathrm{rg}(A) = d$, $\{\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_d\}$ è un insieme di generatori di $\mathrm{R}(A)$, inoltre sono linearmente indipendenti
- Se A non è a scalini, sia A' una sua forma a scalini $\implies \mathrm{R}(A) = \mathrm{R}(A')$:
  - Le righe di A' sono combinazioni lineari delle righe di A, quindi $\mathrm{R}(A') \subset \mathrm{R}(A)$
  - Le righe di A sono combinazioni lineari delle righe di A' poiché le operazioni elementari sono tutte reversibili, quindi $\mathrm{R}(A) \subset \mathrm{R}(A')$

Coordinate

$V \neq \{\underline{0}\}$ spazio vettoriale finitamente generato, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ base di V

$$\underline{v} \in V \implies \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i$$

Gli scalari $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ sono detti coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base B
$T_B : V \to \mathbb{R}^n,\ T_B(\underline{v}) = (v_1, \ldots, v_n)$ è una funzione che associa ad ogni $\underline{v} \in V$ una ennupla, ossi ail vettore delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto a B

T_B è biunivoca e lineare

$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m\} \subset V$ è linearmente indipendente/sistema di generatori/base $\iff$ $\{T_B(\underline{v}_1), \ldots, T_B(\underline{v}_m)\} \subset \mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente/sistema di generatori/base