Funzioni lineari

V, V' spazi vettoriali reali
Una funzione lineare $f : V \to V'$ è una funzione tale che:

- $f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$
- $f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$
  Alternativamente $f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
  V è detto dominio di f
  V' è detto codominio di f
  Se f è biunivoca è detta isomorfismo di spazi vettoriali
  Se $V = V'$, f è detta endomorfismo

$f(\underline{0}_V) = \underline{0}_{V'}$
Dimostrazione: $f(\underline{v} + (-\underline{v})) = f(\underline{v}) + f(-\underline{v}) = f(\underline{v}) - f(\underline{v})$

Nucleo

$f : V \to V'$ funzione lineare
$\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{0}_{V'}\} \subset V$ è detto nucleo di f

$\mathrm{Ker(f)} \subset V$ è un sottospazio vettoriale
Dimostrazione: $f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) = \lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w}) = \lambda \underline{0}_{V'} + \mu \underline{0}_{V'} = \underline{0}_{V'} \implies \lambda \underline{v} + \mu \underline{w} \in \mathrm{Ker}(f) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $\mathrm{Ker}(f) = \{\underline{0}_V\}$
- f è iniettiva
- Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset V$ è linearmente indipendente $\implies \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_m)\} \subset V'$ è linearmente indipendente

Immagine

$f : V \to V'$ funzione lineare
$\mathrm{Im}(f) = \{\underline{v}' \in V' : \exists \underline{v} \in V : f(\underline{v}) = \underline{v}'\} \subset V'$

$\mathrm{Im}(f) \subset V'$ è un sottospazio vettoriale
Dimostrazione:
$\underline{v}', \underline{w}' \in \mathrm{Im}(f) \implies \exists \underline{v}, \underline{w} \in V : \underline{v}' = f(\underline{v}), \underline{w}' = f(\underline{w})$
$\lambda \underline{v}' + \mu \underline{w}' = \lambda f(\underline{v}) + \mu f(\underline{w}) = f(\lambda \underline{v} + \mu \underline{w}) \implies \lambda \underline{v}' + \mu \underline{w}' \in \mathrm{Im}(f)$

$f : V \to V'$ lineare e suriettiva $\implies V' = \mathrm{Im}(f)$

Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- $\mathrm{Im}(f) = V'$
- f è suriettiva
- Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V e $f : V \to V'$ funzione lineare $\implies \{f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)\}$ è un sistema di generatori di $\mathrm{Im}(f)$

Funzioni lineari definite da matrici

$V = \mathbb{R}^n,\ V' = \mathbb{R}^m,\ A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),\ T_A : V \to V',\ T_A(\underline{x}) = A\underline{x}$
$V'' = \mathbb{R}^p,\ B \in M_{p \times m}(\mathbb{R}),\ T_B : V' \to V'',\ T_B(\underline{y}) = B\underline{y}$
$T_B \circ T_A : V \to V'',\ (T_B \circ T_A)(\underline{x}) = (BA)\underline{x}$ composizione è anch'essa una funzione lineare associata alla matrice $BA \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$
$T_B \circ T_A = T_{BA}$
Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile $\implies T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_{I_n} = Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ Id_{\mathbb{R}^n}(\underline{x}) = \underline{x}$

Teorema nullità più rango

V spazio vettoriale finitamente generato, V' spazio vettoriale, $f : V \to V'$ funzione lineare
$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),\ T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ T_A(\underline{x}) = A\underline{x}$
$\mathrm{Ker}(T_A) = \mathrm{N}(A),\ \mathrm{Im}(T_A) = \mathrm{C}(A)$
Applicando il teorema: $n = \dim(\mathrm{Ker}(T_A)) + \dim(\mathrm{Im}(T_A)) = \mathrm{null}(A) + \mathrm{rg}(A)$

Se $f : V \to V'$ è inoltre un isomorfismo $\implies \dim(V) = \dim(V')$
Dimostrazione: $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 0 + \dim(V')$ (iniettiva + suriettiva)

Matrici rappresentative

V spazio vettoriale reale, $B = \{\underline{b}_1, .., \underline{b}_n\}$ base di V
Per definire una funzione (o mappa o applicazione) lineare $f : V \to V'$ è sufficiente definire le immagini degli elementi della base $f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i \in V'$
$\underline{v} \in V$ è definito come combinazione lineare degli elementi di B

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i,\ v_i \in R \implies f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \underline{b}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(\underline{b}_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{c}_i \in V'$$

V spazio vettoriale, $\dim(V) = n$, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ base di V
$\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n \in V'\ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\ \exists! f : V \to V' : f(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$

Costruzione della matrice rappresentativa

$A = \{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ base di V, $B = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m\}$ base di V', $f : V \to V'$

$$f(\underline{a}_1) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} \underline{b}_i$$

$\ldots$

$$f(\underline{a}_n) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} \underline{b}_i$$

$M_A^B(f) = [\alpha_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è detta matrice rappresentativa di f rispetto alle basi A e B

Coordinate e matrici rappresentative

V, V' spazi vettoriali reali con basi A, B, $f : V \to V'$ funzione lineare, $M = M_A^B(f)$

$\dim(V) = n \;\; T_A : V \to \mathbb{R}^n \;\; T_A(\underline{v}) = (v_1, \dots, v_n) \;\; \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \underline{a}_i$

$\dim(V') = m \;\; T_B : V \to \mathbb{R}^m \;\; T_B(\underline{w}) = (w_1, \dots, w_n) \;\; \underline{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \underline{b}_i$

$T_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;\; T_M(\underline{x}) = M\underline{x}$

Il diagramma è "commutativo", $T_M = T_B \circ f \circ T_A^{-1}$, $f = T_B^{-1} \circ T_M \circ T_A$

$\mathrm{Ker}(T_M) = T_A \mathrm{Ker(f)} \;\; \mathrm{Ker}(f) = T_A^{-1} \mathrm{Ker}(T_M)$
$\mathrm{Im}(T_M) = T_B \mathrm{Im}(f) \;\; \mathrm{Im}(f) = T_B^{-1} \mathrm{Im}(T_M)$

Cambiamento di base

$V = V'$, A, B due basi distinte di V, $f = Id_V : V \to V, \;\; f(\underline{v}) = \underline{v}$
$M_A^B := M_A^B(Id_V)$ è detta matrice di transizione dalla base A alla base B

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \underline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \underline{b}_i \implies M_A^B \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$M_A^B = (M_B^A)^{-1}$