Vettori geometrici

Segmento orientato

Dati due punti A, B nello spazio, un segmento orientato è un segmento con estremo iniziale A ed estremo finale B e si indica con $\overrightarrow{AB}$
Due segmenti orientati sono equivalenti se hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e lo stesso verso

Vettore geometrico

Un vettore geometrico è una classe di equivalenza di segmenti orientati

Il vettore nullo $\underline{0}$ è la classe di equivalenza del segmento orientato $\overrightarrow{AA}$, ha modulo nullo, direzione e verso sono indeterminati
V^3 è l'insieme di vettori geometrici nello spazio

Somma

$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1),\ \underline{w} = \overrightarrow{BC} = (x_2, y_2, z_2)$
$\underline{v} + \underline{w} = \overrightarrow{AC} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
Proprietà:

- Commutativa: $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
- Associativa: $\underline{s} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{s} + \underline{v}) + \underline{w}$

Opposto

L'opposto di $\underline{v} \neq \underline{0}$ è $-\underline{v}$, un vettore con lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto
$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$

Prodotto per uno scalare

$\underline{v} \neq \underline{0},\ \lambda \neq 0$
$\lambda\underline{v}$ è un vettore con la stessa direzione, modulo $\lambda \cdot |\underline{v}|$ e verso:

- concorde se $\lambda > 0$
- opposto se $\lambda < 0$
  Se invece $\lambda = 0$ allora $\lambda\underline{v} = \underline{0}$

Versore

Un versore è un vettore geometrico con modulo 1
Se $\underline{v} \neq 0$ la normalizzazione di $\underline{v}$ è definita come

$$\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$$

Prodotto scalare di due vettori geometrici

Il prodotto scalare è lo scalare
$\underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos(\sigma)$
$\underline{v} \cdot \underline{w} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Modulo

$|\underline{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Proiezione

Sia $\underline{e}$ un versore, la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{e}$ è il vettore geometrico $(\underline{v} \cdot \underline{e}) \cdot \underline{e}$
Se $\underline{w}$ è un vettore qualunque, la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{w}$ è la proiezione di $\underline{v}$ sulla normalizzazione di $\underline{w}$, ovvero

$$\left(\underline{v} \cdot \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|}\right) \cdot \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} = \left(\underline{v} \cdot \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|^2}\right)\underline{w}$$

Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale $\underline{v} \times \underline{w}$ è:

- il vettore nullo $\underline{0}$ se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono paralleli o uno o entrambi sono nulli
- $\underline{u} \in V^3$ tale che:
  - modulo: $|\underline{u}| = |\underline{v}||\underline{w}|\cos(\sigma)$
  - direzione: ortogonale a $\underline{v}$ e $\underline{w}$
  - verso: dato dalla "regola della mano destra"
  $\underline{v} \times \underline{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2,\ v_3 w_1 - v_1 w_3,\ v_1 w_2 - v_2 w_1)$

Se $\underline{v}, \underline{w} \neq \underline{0}$ e non paralleli $\implies |\underline{v} \times \underline{w}|$ è l'area del parallelogramma individuato da $\underline{v}$ e $\underline{w}$
Dimostrazione:
$h = |\underline{w}|\sin(\sigma),\ b = |\underline{v}| \implies b \cdot h = |\underline{v}||\underline{w}|\sin(\sigma)$

Proprietà:

- Anticommutativa: $\underline{v} \times \underline{w} = -\underline{w} \times \underline{v}$
- Associativa: $(\lambda \underline{v}) \times \underline{w} = \underline{v} \times (\lambda \underline{w}) = \lambda(\underline{v} \times \underline{w})$
- Distributiva: $(\underline{v} + \underline{w}) \times \underline{u} = \underline{v} \times \underline{u} + \underline{w} \times \underline{u}$
- Distributiva: $\underline{v} \times (\underline{w} + \underline{u}) = \underline{v} \times \underline{w} + \underline{v} \times \underline{w}$

Prodotto misto

Il prodotto misto è lo scalare $\underline{v} \cdot (\underline{w} \times \underline{u})$

Se $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \neq \underline{0}$ e non paralleli $\implies |\underline{v} \cdot (\underline{w} \times \underline{u})|$ è il volume del parallelepipedo individuato da $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{u}$
Dimostrazione:
$S = (\underline{w} \times \underline{u}),\ h = |\underline{v}|\cos(\sigma) \implies S \cdot h = |\underline{w} \times \underline{u}||\underline{v}|\cos(\sigma)$

Punto in coordinate

Ad ogni punto A è definito da una terna di coordinate $A = (x, y, z)$

Vettore geometrico in coordinate

$\underline{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A)$

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono i versori degli assi cartesiani a due a due ortogonali: $\underline{i} \cdot \underline{j} = \underline{i} \cdot \underline{k} = \underline{j} \cdot \underline{k} = 0$
$\underline{v} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{w},\ \underline{j} \times \underline{i} = -\underline{w}$