Matrici e sistemi lineari

Spazio delle ennuple

$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$ è lo spazio delle ennuple di numeri reali
Operazioni:

- Somma: $\underline{a} + \underline{b} = (a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$
- Prodotto per uno scalare: $\lambda \cdot \underline{a} = \lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda \cdot a_1, \ldots, \lambda \cdot a_n)$

Sistema lineare

Un sistema di equazioni lineari di m equazioni in n incognite è

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una soluzione del sistema lineare è una ennupla $(t_1, \ldots, t_n)$ soluzione di tutte le equazioni
Se esistono soluzioni il sistema è detto compatibile, altrimenti è detto incompatibile
Se $b_1 = \ldots = b_m = 0$ il sistema è detto omogeneo

Matrice

Una matrice di ordine $m \times n$ a coefficienti reali è una tabella

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \\ a_{m_1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

Se $m = n$ la matrice è quadrata e gli elementi $\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ formano la diagonale principale di A
$A^T = [a_{ji}]$ è detta matrice trasposta di A
$A = A^T \implies A$ è simmetrica
$\underline{0}_{m \times n} = [0]_{ij}$ è detta matrice nulla di ordine $m \times n$
Una matrice di ordine $m \times 1$ è detta matrice colonna o vettore colonna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Una matrice di ordine $1 \times n$ è detta matrice riga o vettore riga

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

La matrice opposta di $A = [a_{ij}]$ è $-A = [-a_{ij}]$

Somma

$A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),\ A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}]$
$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
Proprietà:

- Commutativa: $A + B = B + A$
- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Elemento neutro: $A + \underline{0} = A$
- Elemento opposto: $A + (-A) = \underline{0}$

Prodotto per uno scalare

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}$
$\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]$
Proprietà:

- Associativa: $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$
- Elemento neutro: $1 \cdot A = A$
- Distributiva: $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda A + \mu A$
- Distributiva: $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$

Combinazione lineare

$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\lambda A + \mu B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è detta combinazione lineare di A e B a coefficienti λ e μ

Prodotto di matrici

Una matrice A è detta conformabile a sinistra con $B \iff$
$A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B = [b_{jk}] \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$
e $A \cdot B = C = [c_{ik}] \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ dove

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Identità

$I_m = [\delta_{ij}]$ è la matrice quadrata di ordine $m \times m$ dove

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Matrice associata al sistema lineare

Ad un sistema lineare si possono associare tre matrici:

- Matrice dei coefficienti: $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
- Matrice dei termini noti: $\underline{b} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$
- Matrice completa: $(A|\underline{b}) \in M_{m\times n+1}(\mathbb{R})$

$$(A|\underline{b}) = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{m_1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Operazioni elementari

$\lambda \neq 0,\ \mu \neq 0$

- Scambio di due righe R_i e R_j: S_{ij}
- Prodotto di una riga R_i per uno scalare λ: $D_j(\lambda)$
- Somma di una riga R_i con un'altra R_j moltiplicata per uno scalare μ: $E_{ij}(\mu)$

Matrice a scalini

Una matrice è detta a scalini se $\forall R_i, R_{i+1}$ coppia di righe consecutive si verifica una delle seguenti condizioni:

- R_i e R_{i+1} sono entrambe non nulle e il numero di zeri che precedono il primo numero non nullo di R_i è inferiore rispetto a quello di R_{i+1}
- R_{i+1} è nulla

Algoritmo di Gauss-Jordan

- Si cerca la prima colonna che contiene un numero, il primo dall'alto si chiama p_1
- Si scambiano le righe in modo da portare p_1 sulla prima riga
- Si utilizzano le operazioni elementari del tipo $E_{i_1}(\mu)$ finché tutti i termini sottostanti a p_1 diventano nulli
- Si itera l'algoritmo sulla matrice ottenuta escludendo la prima riga

Rango

Il rango di una matrice A, $\mathrm{rg}(A)$, è il numero di pivot di una sua forma a scalini

Matrice ridotta per righe

Una matrice è ridotta per righe se:

- è a scalini
- e ogni pivot è 1 ed è l'unico elemento non nullo della propria colonna

Riduzione all'indietro

Si parte da una matrice a scalini

- Per ogni pivot p_k si esegue l'operazione $D_k\left(\frac{1}{p_k}\right)$ in modo che p_k diventi 1
- Si riducono a 0 tutti i termini della colonna di p_k tramite operazioni del tipo $E_{ik}(\mu)$

Teorema di Rouchè-Capelli

Dato un sistema lineare in n incognite, tale sistema è compatibile $\iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\underline{b})$
Se tale sistema è compatibile allora:

- $\mathrm{rg}(A) = n \implies$ ha un'unica soluzione
- $\mathrm{rg}(A) < n \implies$ ha infinite soluzioni

Soluzioni di un sistema lineare

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
$A\underline{x} = \underline{0}$ sistema lineare omogeneo, $\underline{v}, \underline{w}$ vettori colonna soluzioni del sistema (ovvero $A\underline{v} = \underline{0},\ \underline{A}w = \underline{0}$), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Anche la combinazione lineare $\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}$ è soluzione del sistema poiché $A(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = \lambda A\underline{v} + \mu A\underline{w} = \lambda\underline{0} + \mu\underline{0} = \underline{0}$

Nucleo

Il nucleo di A, $\mathrm{N}(A)$, è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$

Nullità

La nullità di A, $\mathrm{null}(A)$, è il numero delle colonne di $\mathrm{rref}(A)$ che non contengono pivot, ossia il numero di variabili libere da cui dipendono le soluzioni
$\mathrm{null}(A) + \mathrm{rg}(A) = n$

Insieme delle soluzioni

$A\underline{x} = \underline{b}$ sistema lineare compatibile:

- $\underline{b} = \underline{0} \implies$ l'insieme delle soluzioni è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare
- $\underline{b} \neq \underline{0} \implies$ se $\underline{x}_0$ è una soluzione, allora tutte le soluzioni sono della forma $\underline{x}_0 + \underline{v}$, con $\underline{v}$ soluzione del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$, infatti $A(\underline{x}_0 + \underline{v}) = A\underline{x}_0 + A\underline{v} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$

Matrici delle operazioni elementari

Le operazioni elementari possono essere realizzate tramite la moltiplicazione a sinistra per delle matrici quadrate
$I_m \xrightarrow{S_{ij}} S_{ij}$
$I_m \xrightarrow{D_i(\lambda)} D_i(\lambda)$
$I_m \xrightarrow{E_{ij}(\mu)} E_{ij}(\mu)$
$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rref}(A)$ può essere ottenuta moltiplicando A a sinistra per una opportuna matrice quadrata $P \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ottenuta dal prodotto di matrici di operazioni elementari: $PA = \mathrm{rref}(\mathrm{A})$

Matrice inversa

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists B \in M_n(\mathbb{R}) : AB = BA = I_n \implies A$ è invertibile e B è detta inversa di A e si denota con A^{-1}

Inversa dell'identità

$I_n^{-1} = I_n$

Inverse delle matrici delle operazioni elementari

$S_{ij}^{-1} = S_{ji} = S_{ij}$
$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$
$E_{ij}(\mu)^{-1} = E_{ij}(-\mu)$

Inverso del prodotto

$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
Dimostrazione: $(AB)(AB)^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$

Invertibilità di una matrice

$A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile $\iff \mathrm{rg}(A) = n$
Dimostrazione:
$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathrm{rref}(A))$
$\exists P \in M_n(\mathbb{R}) : \mathrm{rref}(A) = PA$
$A = P^{-1}\mathrm{rref}(A)$, A è invertibile $\implies \mathrm{rref}(A)$ è invertibile e non può avere righe di zeri
$\implies \mathrm{rg}(A) = n \implies \mathrm{rg}(\mathrm{rref}(A)) = n \implies \mathrm{rref}(A) = I_n \implies PA = I_n \implies A = P^{-1}$

Calcolo della matrice inversa

$A \in M_n(\mathbb{R})$

1. $B = (A \mid I_n) \in M_{n \times 2n}(\mathbb{R})$
2. $\mathrm{rref}(B) = (I_n \mid P) = (I_n \mid A^{-1})$
   Dimostrazione:
   $\mathrm{rref}(\mathrm{B}) = PB = (PA \mid PI_n) = (\mathrm{rref}(A) \mid P) = (I_n \mid A^{-1})$

Soluzioni di un sistema lineare tramite matrice inversa

$A \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile, $A\underline{x} = \underline{b}$ sistema lineare
$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$
Dimostrazione:
$A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \iff I_n\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \iff \underline{x} = A^{-1}\underline{b}$