Spazi vettoriali

Spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale è un'insieme V (i cui elementi sono vettori) su cui sono definite due operazioni:

- Somma tra elementi
- Prodotto di un elemento per uno scalare
  che soddisfano le seguenti proprietà:
  $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- Commutativa: $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$
- Associativa: $\underline{v} + (\underline{w} + \underline{u}) = (\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u}$
- Elemento neutro: $\exists \underline{0} \in V : \underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$
- Elemento opposto: $\exists - \underline{v} \in V : \underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$
- Associativa: $\lambda(\mu \underline{v}) = (\lambda\mu)\underline{v}$
- Elemento neutro: $1\underline{v} = \underline{v}$
- Distributiva: $(\lambda + \mu)\underline{v} = \lambda\underline{v} + \mu\underline{v}$
- Distributiva: $\lambda(\underline{v} + \underline{w}) = \lambda\underline{v} + \lambda\underline{w}$

Combinazione lineare

Siano:

- V spazio vettoriale
- $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in V$
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

Il vettore

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{v}_i = \lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k \in V$$

è detto combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ con coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$
La combinazione lineare può essere scritta in "forma matriciale":
per ogni ennupla $\underline{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$ si considera il vettore colonna

$$\underline{v}_i = \begin{bmatrix} v_{i1} \\ \ldots \\ v_{in} \end{bmatrix}$$

e si accostano i k vettori a formare una matrice $A = \left[\underline{v}_1 \mid \ldots \mid \underline{v}_k\right]$,considerando il vettore colonna composto dagli scalari

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

si può scrivere

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{v}_i = A\underline{\lambda}$$

Sottospazio vettoriale

V spazio vettoriale reale
Un sottoinsieme non vuoto di V, $U \subset V$, è detto sottospazio vettoriale di V se è chiuso rispetto alle due operazioni di V:

- $\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U \quad \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \in U$
- $\forall \underline{u} \in U, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \underline{u} \in U$
  o equivalentemente $\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in U, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 \in U$
  Inoltre $\underline{0} \in U$, infatti $\forall \underline{u} \in U \ -1 \cdot \underline{u} = -\underline{u} \in U \implies \underline{u} - \underline{u} \in U$
  Se U contiene almeno un vettore non nullo, allora U contiene infiniti elementi

Insieme di generatori

V spazio vettoriale reale
Dati $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \in V$, l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari è detto sottospazio generato da $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$
$\langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k \rangle = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \{\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} \subset V$
$V = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) \implies V$ è finitamente generato e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ è un insieme di generatori di V
$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n \iff \mathrm{rg}([\underline{v}_1 \mid \ldots \mid \underline{v}_k]) = n \implies k \geq n$

Sistemi lineari omogenei e sottospazi

L'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$
Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ può essere realizzato come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo opportuno
$\underline{x} \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) \subset \mathbb{R}^n \iff [\underline{v}_1 \mid \ldots \mid \underline{v}_k]\underline{\lambda} = \underline{x}$ è compatibile

Dipendenza-indipendenza lineare

V spazio vettoriale reale

Insieme di vettori linearmente dipendenti

$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subset V$ è linearmente dipendente se $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$$

Se $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subset V$ è linearmente dipendente e se $k \geq 2 \implies \exists i \in \{1, \ldots, k\} : \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k) = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \ldots, \check{\underline{v}}_i, \ldots, \underline{v}_k)$
Dimostrazione:
per ipotesi $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$,
sia $i \in \{1, \ldots, k\} : \lambda_i \neq 0 \implies \underline{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\underline{v}_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\underline{v}_{i-1} - \ldots - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\underline{v}_{i+1} - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i}\underline{v}_k$

Insieme di vettori linearmente indipendenti

Se invece

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0} \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

allora $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subset V$ è linearmente indipendente