

Variabili aleatorie

Variabile aleatoria

Definizione

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità

La funzione $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ è variabile aleatoria $\iff X$ è misurabile in (S, \mathcal{A})

Ovvero $(X \leq x) = \{\omega \in S : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

Gli elementi misurabili di S sono quelli in \mathcal{A}

Funzione di ripartizione

Definizione

Anche chiamata **distribuzione cumulativa** o **Cumulative Distribution Function**, fornisce la probabilità dell'evento $(X \in (-\infty, x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
e si indica con

$$F_X(x) = F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Proprietà:

- è continua a destra: $F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x + \epsilon) = F(x^+)$
- è monotona crescente: se $x_2 > x_1 \implies F(x_2) \geq F(x_1)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \implies F(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

▶ 0:00 / 2:02



Formule

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$$

Dimostrazione >

$$\dots = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = \dots$$

$$\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Dimostrazione >

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\implies \mathbb{P}(X \leq x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2) \implies \\ F(x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) &= F(x_2) \implies \dots \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$$

Dimostrazione >

$$x_1 = x - \varepsilon, x_2 = x \quad \forall \varepsilon > 0 \implies$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(x - \varepsilon < X \leq x) = \mathbb{P}(x^- < X \leq x) = \dots$$

$$F(x|X > x_0) = \frac{F(x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}$$

Dimostrazione >

$(X > x_0)$ evento, $x > x_0$

$$\dots = \mathbb{P}(X \leq x | X > x_0) = \frac{\mathbb{P}((X \leq x) \cap (X > x_0))}{\mathbb{P}(X > x_0)} = \frac{\mathbb{P}(x_0 < X \leq x)}{1 - F(x_0)} = \dots$$

▶ 0:00 / 0:33



Massa di probabilità

X è detta variabile aleatoria discreta se la funzione di ripartizione è a gradini, le discontinuità hanno ampiezza $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$

Definizione

$P(x) = \mathbb{P}(X = x)$ è detta funzione massa di probabilità o anche **Probability Mass Function**
Fornisce la probabilità che la variabile aleatoria assuma un certo valore, pertanto

$$F(x_1) = \sum_{x \leq x_1} P(x)$$

$$\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \sum_{x_1 < x \leq x_2} P(x) \quad x_1 < x_2$$

Soddisfa le seguenti proprietà:

$$\sum_{-\infty < x < +\infty} P(x) = 1 \wedge P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

▶ 0:00 / 1:28



Formule

$$\mathbb{P}(x < X) = F(x) - P(x)$$

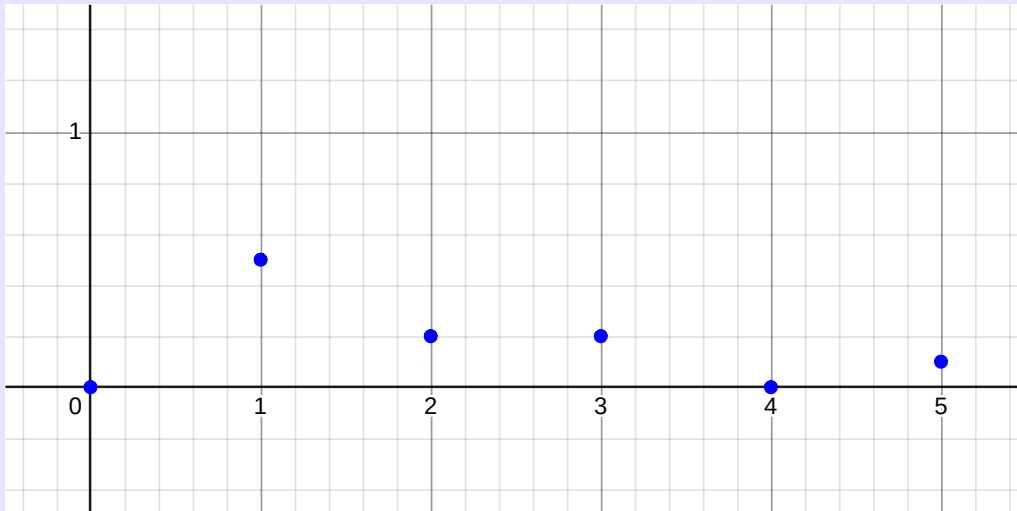
Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{P}(x \leq X) - \mathbb{P}(x = X) = \dots$$

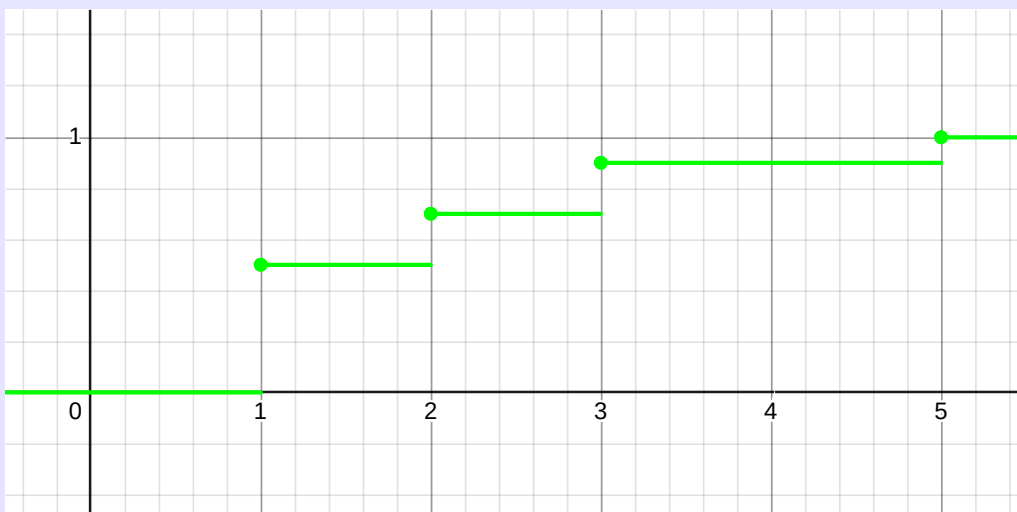
Esempio >

Massa di probabilità

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{5}, & x = 2, 3 \\ \frac{1}{10}, & x = 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{10}, & 2 \leq x < 3 \\ \frac{9}{10}, & 3 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$



Densità di probabilità

X è detta variabile aleatoria continua se la funzione di ripartizione è continua

Definizione

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$$

è detta funzione densità di probabilità o anche **Probability Density Function**

Fornisce la probabilità che la variabile aleatoria assuma uno specifico valore, quindi

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t) dt$$

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \quad x_1 \leq x_2$$

Soddisfa le seguenti proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1 \wedge f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

▶ 0:00 / 2:16   

Formule

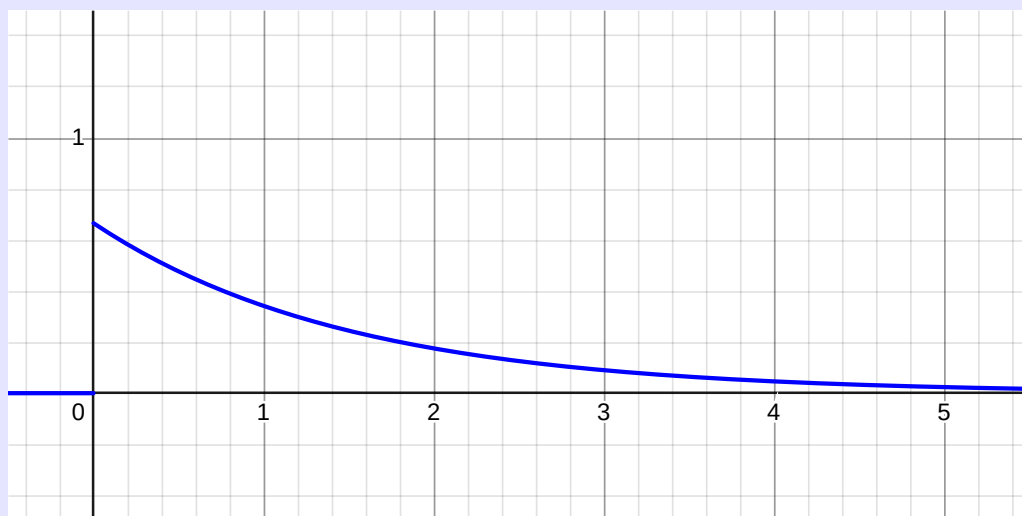
$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X = x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt - \int_x^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \dots$$

Densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-2x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}e^{-2x/3} + \frac{2}{3}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

