Modelli

Variabile aleatoria di Bernoulli

Astrazione del lancio di una moneta
$X \sim \mathrm{B}(p)$ assume valori $\{0,1\}$

$$P_X(x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p=q, & x=0 \end{cases} \quad p \in (0,1)$$

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{t=0}^{1} e^{t \cdot i} \cdot P_X(i) = e^{0t}(1-p) + e^{1t}p = q + e^t p$$

$$\mathbb{E}[X] = \left.\frac{d\Phi_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = e^t p\big|_{t=0} = p$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \left.\frac{d^2\Phi_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = e^t p\big|_{t=0} = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

Variabile aleatoria binomiale

Esperimenti ripetuti e indipendenti con due possibili esiti con probabilità p e $1-p$
Abbinando 1 al successo e 0 all'insuccesso, ripetendo n volte l'esperimento, la variabile che conta il numero di successi è detta binomiale ed è la somma di n variabili aleatorie Bernoulliane stocasticamente indipendenti
$X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{B}(p)$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \;\; x \neq j$
$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$P_Y(y) = \binom{n}{y}(p)^y(1-p)^{n-y} \quad y \in \{0, \dots, n\}$$

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}] = (e^t p + q)^n$$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot p$
$\mathrm{Var}(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$

$Y_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$, $Y_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$, $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$, $Z = Y_1 + Y_2$
$Z \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$
$\Phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{tY_1 + tY_2}] = \mathbb{E}[e^{tY_1} e^{tY_2}] = \mathbb{E}[e^{tY_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tY_2}] = (e^t p + q)^{n_1}(e^t p + q) = (e^t p + q)^{n_1+n_2}$

Variabile aleatoria geometrica

Esperimenti indipendenti ripetuti con probabilità di successo costante

Conta il numero di ripetizioni dell'esperimento fino al primo insuccesso

$X \sim \text{Geo}(p)$

$P_X(x) = p^x \cdot (1-p) \;\; x \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P_X(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p^x \cdot (1-p) = (1-p) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} p^x = 1$$

$$\Phi_X(t) = \frac{1-p}{1-e^t p}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{d\Phi_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{p}{1-p}$$

è il numero medio di successi prima di un insuccesso