Vettori aleatori

Variabili aleatorie congiunte

Definizione

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, X, Y variabili aleatorie
La coppia (X, Y) è detta vettore aleatorio

Funzione di ripartizione congiunta

Definizione

$F(x, y) = \mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y \leq y))$
Proprietà:

- è continua da destra: $F(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x + \epsilon, y) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x, y + \epsilon)$
- $$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$$
  $$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$$
  $$\lim_{(x,y) \to (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1$$

Formule

$\mathbb{P}((x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2)) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

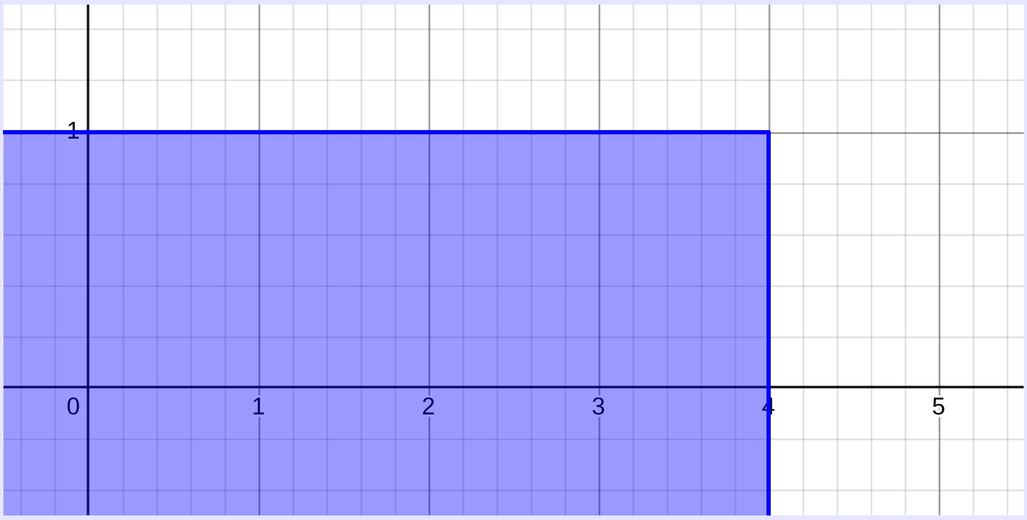
Esempio

Funzione di ripartizione congiunta

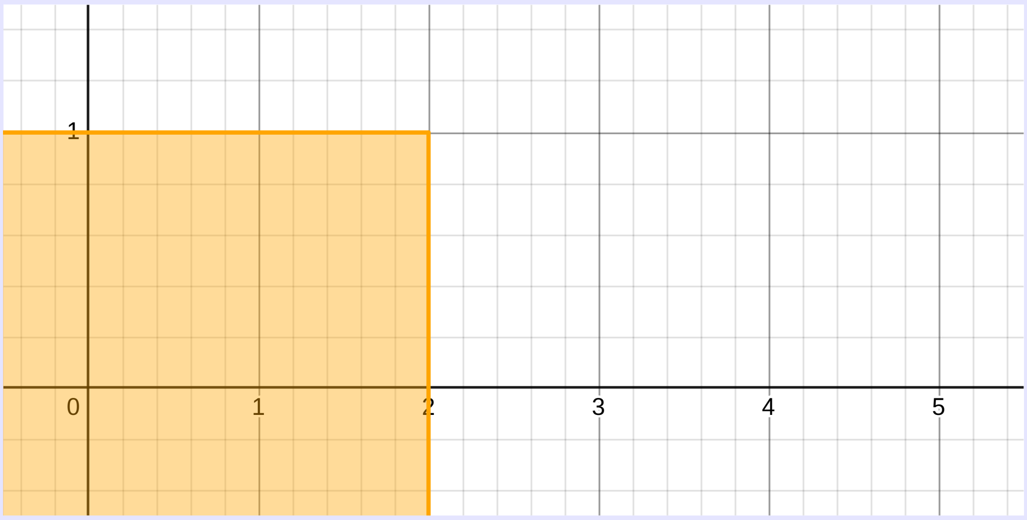
$x_1 = 2, x_2 = 4, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1$

Domini di $P(x, y)$ o $f(x, y)$ sui quali vengono calcolati

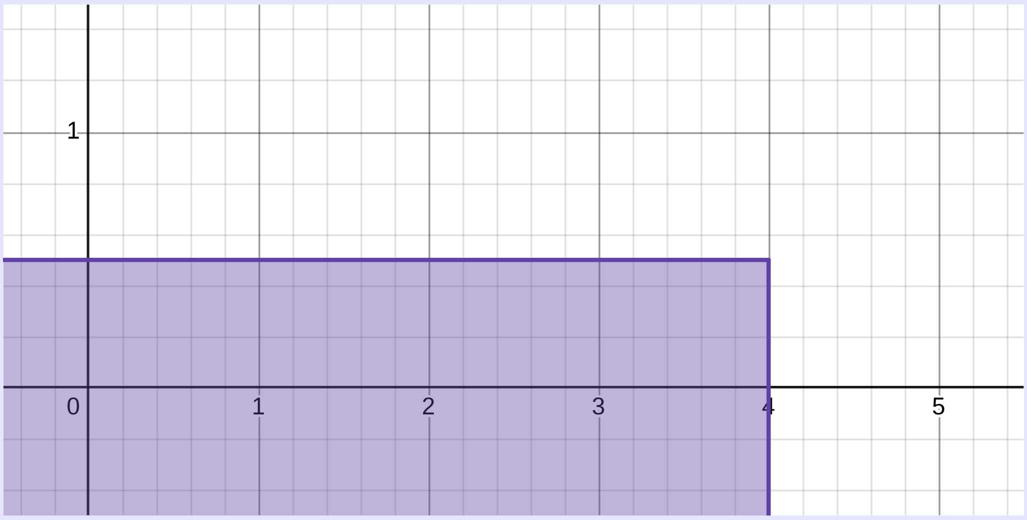
$F(x_2, y_2)$:



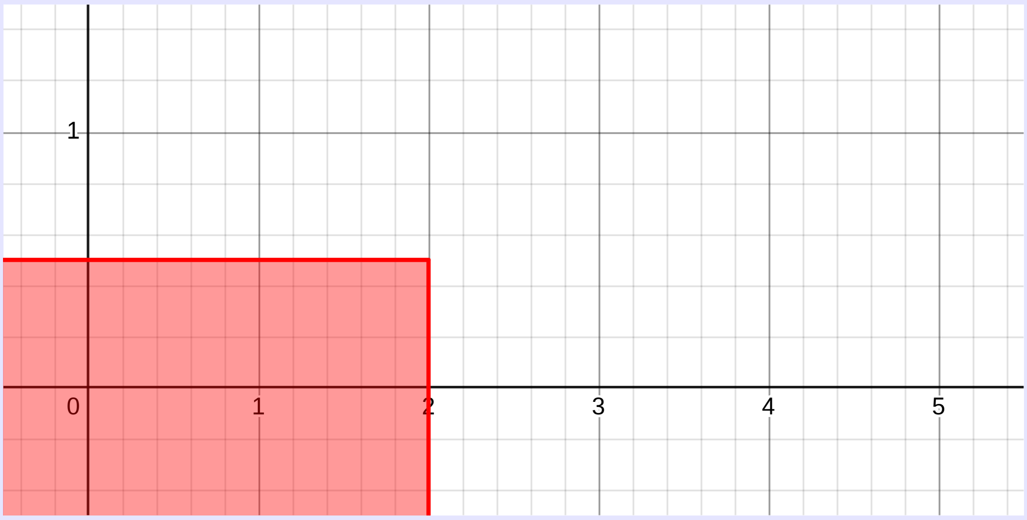
$F(x_1, y_2)$:



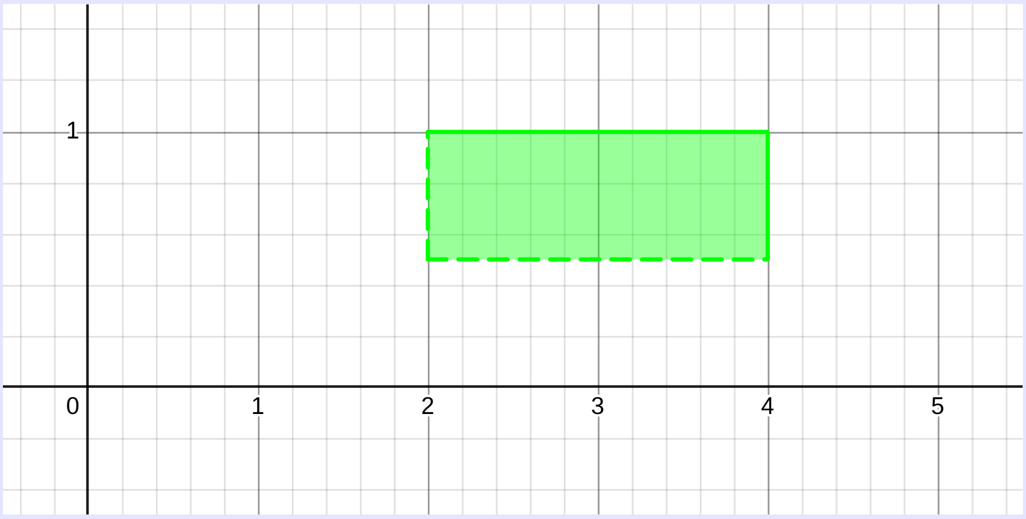
$F(x_2, y_1)$:



$F(x_1, y_1)$:



$\mathbb{P}((x_1 < X \le x_2) \cap (y_1 < Y \le y_2))$:



Funzioni marginali

Formule

Funzioni di ripartizione marginali

$F_X(x) = F(x, +\infty)$
$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

Funzioni di densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

Funzioni di massa marginali

$$P_X(x) = \sum_i P(x, y_i)$$
$$P_Y(y) = \sum_i P(x_i, y)$$

Indipendenza

Definizione

X, Y variabili aleatorie, D_X, D_Y sottoinsiemi degli insiemi di definizione di X, Y
$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{P}((X \in D_X) \cap (Y \in D_Y)) = \mathbb{P}(X \in D_X) \cdot \mathbb{P}(Y \in D_Y) \ \ \forall D_X, D_Y$

In particolare se $D_X = (X \leq x), D_Y = (Y \leq y)$ e F è funzione di ripartizione congiunta
$\implies X \perp\!\!\!\perp Y \iff F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
Analogamente $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ e $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

Media

Definizione

$$\mathbb{E}[X] := \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \, dx \end{cases}$$

se esiste finita è detta **speranza matematica** o media o **valore atteso** di X

Formule

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] := \begin{cases} \sum_i \varphi(x_i) P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) \, dx \end{cases}$$

Definizione

La media si può anche applicare alla potenza di una variabile aleatoria X^n e $\mathbb{E}[X^n]$ è detto momento n-esimo centrato di X

Linearità

$\mathbb{E}[a + bX] = a + b\mathbb{E}[X] \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Definizione

(X,Y) vettore aleatorio

$$\mathbb{E}[(X,Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

se esistono finiti

Formule

$\mathbb{E}[(X,Y)] = \mathbb{E}[X \cdot Y]$

Casi notevoli

Formule

X, Y variabili aleatorie, $Z = X + Y \implies \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathbb{E}[(X,Y)] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Dimostrazione

(Nel caso continuo)
$\ldots \implies f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \implies$

$$\begin{aligned} \ldots &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy\right) = \ldots \end{aligned}$$

Varianza

Definizione

La cui radice è anche chiamata **Standard Deviation**

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

Misura la tendenza di X ad assumere valori maggiori o minori della media, quindi se $\mathrm{Var}[X]$ è vicina a 0 allora $\mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}[X])$ è molto bassa

Formule

$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \ldots &= \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1] \cdot \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \ldots \end{aligned}$$

Non linearità

$\mathrm{Var}[a + bX] = b^2 \mathrm{Var}[X]$

$\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2 \mathrm{Var}[X] + b^2 \mathrm{Var}[Y] + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y)$ misura la tendenza delle due variabili ad assumere valori maggiori o minori della media "insieme"

Esempio

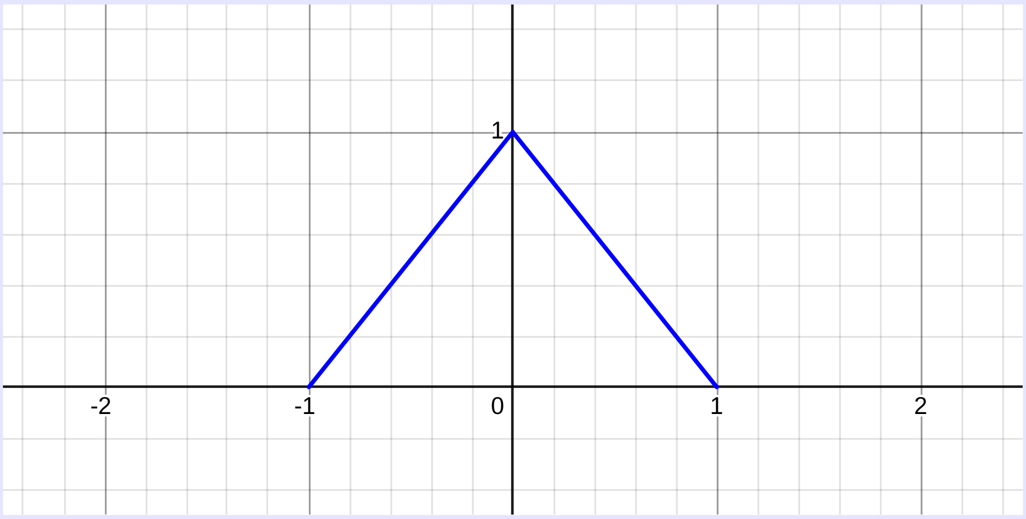
Varianza

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X] = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x^3 + x^2\, dx + \int_{0}^{1} -x^3 + x^2\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{6} = 0.167$

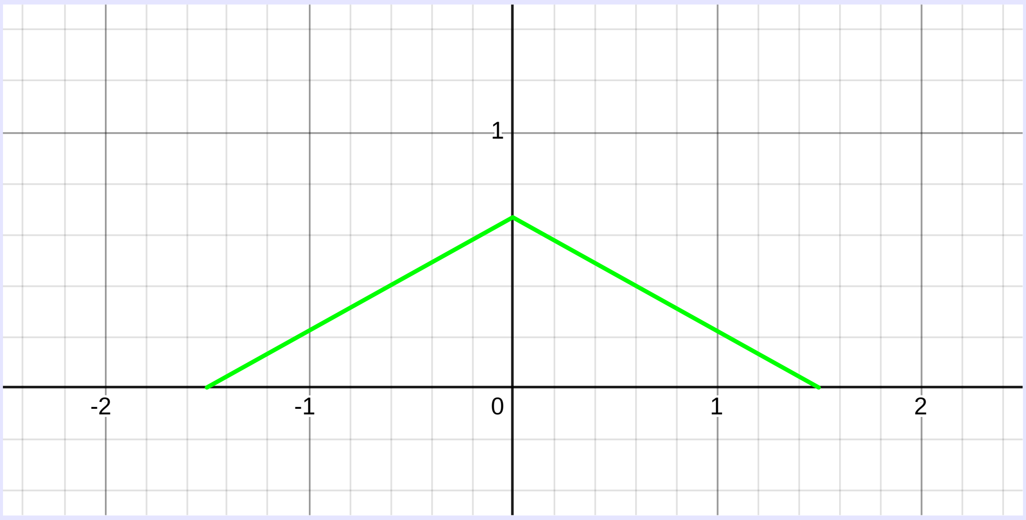


$$f(y) = \begin{cases} -\frac{4}{9}|x| + \frac{2}{3}, & -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{3}y^2\,dy + \int_{0}^{\frac{3}{2}} -\frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{3}y^2\,dy$$
$$= \left[\frac{y^4}{9} + \frac{2}{9}y^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{0} + \left[-\frac{y^4}{9} + \frac{2}{9}y^3\right]_{0}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{3}{8} = 0.375$$



Covarianza

Definizione

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \\
&= \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i-\mathbb{E}[X])(y_j-\mathbb{E}[Y])P(x_i,y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbb{E}[X])(y-\mathbb{E}[Y])f(x,y)\,dx\,dy \end{cases}
\end{aligned}
$$

Formule

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

Dimostrazione

(Nel caso continuo)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbb{E}[X])f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mathbb{E}[Y])f_Y(y)\,dy\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}[X]f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X]\cdot 1 = 0$$

Analogamente per y

$\implies \mathrm{Cov}(X,Y) = 0\cdot 0 \implies \dots$

Correlazione

Formule

X, Y variabili aleatorie legate da una relazione lineare $Y = aX + b \;\; a, b \in \mathbb{R}$

$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 = \mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]$

Dimostrazione

$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b \implies Y - \mathbb{E}[Y] = a(X-\mathbb{E}[X])$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])a(X-\mathbb{E}[X])] \\
&= \mathbb{E}[a(X-\mathbb{E}[X])^2] = a\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{a}\mathrm{Var}[Y]
\end{aligned}
$$

$\implies [\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 = a\mathrm{Var}[X]\frac{1}{a}\mathrm{Var}[Y] = \dots$

Coefficiente di correlazione

Definizione

E' un indice adimensionale che misura la dipendenza lineare tra X e Y

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

$\implies \rho = \pm 1$ se X e Y sono perfettamente correlate tra di loro

$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \rho = 0$

Vale $\rho \in [-1, 1]$:

- $|\rho|$ vicino a 1 indica una buona correlazione
- $|\rho|$ vicino a 0 indica poca correlazione

Approfondimento

Normalmente $Y = aX + b + Z$ dove Z rende incerta la relazione tra X e Y
: $Z : \mathbb{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z]$ è minima
$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b + \mathbb{E}[Z] \implies b = \mathbb{E}[Y] - a\mathbb{E}[X]$
$Z = Y - aX + b \implies \text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + a^2\text{Var}[X] - 2a\text{Cov}(X,Y)$

$$\frac{d\text{Var}[Z]}{da} = 2a\text{Var}[X] - 2\text{Cov}(X,Y)$$

Il minimo corrisponde a $2a\text{Var}[X] - 2a\text{Cov}(X,Y) = 0 \implies$

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}[X]}$$

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{[\text{Var}[X]]^2}\text{Var}[X] - 2\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}[X]}\text{Cov}(X,Y) =$$

$$= \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}\text{Var}[Y] - 2\frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}\text{Var}[Y]$$

$= \text{Var}[Y](1 - \rho^2 - 2\rho^2) = \text{Var}[Y](1 - \rho^2)$
Se $\rho^2 = 1$ la dipendenza lineare è perfetta

Funzione generatrice di momenti

Definizione

X variabile aleatoria, $t \in \mathbb{R}$
La speranza matematica $\Phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ è una formula analitica per calcolare i momenti di una variabile aleatoria

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{d^n \Phi_X(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \Phi_X^{(n)}(0)$$

Dimostrazione

Utilizzando lo sviluppo di Taylor
$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \dots\right] = 1 + t\mathbb{E}[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \dots$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx \end{cases}$$

Se converge esiste la funzione generatrice dei momenti, questa fissa tutti i momenti di X e la determina univocamente

Formule

X_1, X_2 variabili aleatorie, $Y = X_1 + X_2$
$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}]$

Dimostrazione

$\dots = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX_1 + tX_2}] = \dots$

Se $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies$
$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdot \Phi_{X_2}(t)$

Dimostrazione

$\dots = \mathbb{E}[e^{tX_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tX_2}] = \dots$