Variabili aleatorie

Variabile aleatoria

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità
La funzione $X : S \to \mathbb{R}$ è variabile aleatoria $\iff X$ è misurabile in $(S, \mathcal{A})$
Gli elementi misurabili di S sono quelli in $\mathcal{A}$

Funzione di ripartizione

Anche chiamata distribuzione cumulativa, fornisce la probabilità dell'evento $(X \in (-\infty, x)) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ e si indica con

$F_X(x) = F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Proprietà:

- è continua a destra: $F(x) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x + \epsilon) = F(x^+)$
- è monotona crescente: se $x_2 > x_1 \implies F(x_2) \geq F(x_1)$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) \implies F(x) \in [0, 1] \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

Per definizione $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x) \implies \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$

Se $x_2 > x_1 \implies \mathbb{P}(X \leq x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2) \implies \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Inoltre se $x_1 = x - \epsilon, \; x_2 = x \;\; \forall \epsilon > 0 \implies$
$\mathbb{P}(X = x) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}(x - \epsilon < X \leq x) = F(x) - F(x^-)$

X variabile aleatoria, $(X > x_0)$ evento, $x > x_0$

$$F(x|X > x_0) = \mathbb{P}(X \leq x|X > x_0) = \frac{\mathbb{P}((X \leq x) \cap (X > x_0))}{\mathbb{P}(X > x_0)} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}(x_0 < X \leq x)}{1 - F(x_0)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}$$

Massa di probabilità

X è detta variabile aleatoria discreta se la funzione di ripartizione è a gradini, le discontinuità hanno ampiezza $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$

$P(x) = \mathbb{P}(X = x)$ è detta funzione massa di probabilità
Fornisce la probabilità che la variabile aleatoria assuma un certo valore, pertanto

$$F(x_1) = \sum_{x=x_1} P(x)$$

$$\mathbb{P}(x_i < X \leq x_j) = \sum_{x_i < x \leq x_j} P(x) \;\; x_i < x_j$$

Soddisfa le seguenti proprietà:

$$\sum_{-\infty < x < +\infty} P(x) = 1 \land P(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Densità di probabilità

X è detta variabile aleatoria continua se la funzione di ripartizione è continua

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$$

è detta funzione densità di probabilità
Fornisce la probabilità che la variabile aleatoria assuma uno specifico valore, quindi

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\, dt$$

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \;\; x_1 \leq x_2$$

Soddisfa le seguenti proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1 \land f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$