

Modelli

Variabile aleatoria di Bernoulli

Definizione

Astrazione del lancio di una moneta

$X \sim B(p)$ assume valori $\{0, 1\}$

$$P_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p = q, & x = 0 \end{cases}$$

con $p \in (0, 1)$

Formule

$$\Phi_X(t) = q + e^t p$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{i=0}^1 e^{t \cdot i} \cdot P_X(x_i) = \sum_{i=0}^1 e^{t \cdot i} \cdot P_X(i) = e^{0t}(1-p) + e^{1t}p = \dots$$

$$\mathbb{E}[X] = p$$

Dimostrazione >

$$\dots = \left. \frac{d\Phi_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = e^t p \Big|_{t=0} = \dots$$

oppure

$$\dots = \sum_{i=0}^1 x_i \cdot P_X(x_i) = \sum_{i=0}^1 i \cdot P_X(i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = \dots$$

$$\mathbb{E}[X^2] = p$$

Dimostrazione >

$$\dots = \left. \frac{d^2\Phi_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^t p \Big|_{t=0} = e^t p \Big|_{t=0} = \dots$$

oppure

$$\dots = \sum_{i=0}^1 x_i^2 \cdot P_X(x_i) = \sum_{i=0}^1 i^2 \cdot P_X(i) = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p = \dots$$

$$\text{Var}(X) = p(1-p) = p \cdot q$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = \dots$$

Variabile aleatoria binomiale

Definizione

Esperimenti ripetuti e indipendenti con due possibili esiti con probabilità p e $1 - p$

Abbinando 1 al successo e 0 all'insuccesso, ripetendo n volte l'esperimento, la variabile che conta il numero di successi è detta binomiale ed è la somma di n variabili aleatorie Bernoulliane stocasticamente indipendenti

$$X_1, \dots, X_n \sim B(p), X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad i \neq j$$

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$$

$$P_Y(y) = \binom{n}{y} (p)^y (1-p)^{n-y} \quad y \in \{0, \dots, n\}$$

Formule

$$\Phi_Y(t) = (e^t p + q)^n$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}\left[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \dots$$

$$\mathbb{E}[Y] = n \cdot p$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \dots$$

$$\text{Var}(Y) = n \cdot p \cdot (1 - p) = n \cdot p \cdot q$$

Approfondimento >

$$Y_1 \sim \text{Bin}(n_1, p), Y_2 \sim \text{Bin}(n_2, p), Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2, Z = Y_1 + Y_2$$

$$Z \sim \text{Bin}(n_1 + n_2, p)$$

$$\Phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{tY_1 + tY_2}] = \mathbb{E}[e^{tY_1} e^{tY_2}] = \mathbb{E}[e^{tY_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tY_2}] = (e^t p + q)^{n_1} (e^t p + q)^{n_2} = (e^t p + q)^{n_1 + n_2}$$

Variabile aleatoria geometrica

Definizione

Esperimenti indipendenti ripetuti con probabilità di successo p costante

Conta il numero di ripetizioni dell'esperimento fino al primo insuccesso

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

$$P_X(x) = p^x \cdot (1 - p) \quad x \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P_X(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p^x \cdot (1 - p) = (1 - p) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} p^x = 1$$

Formule

$$\Phi_X(t) = \frac{1 - p}{1 - e^t p}$$

$$\mathbb{E}[X] = \left. \frac{d\Phi_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{p}{1 - p}$$

è il numero medio di successi prima di un insuccesso

Variabile aleatoria di Poisson

Definizione

$$Y \sim \text{Bin}(n, p), (n \rightarrow +\infty, p \rightarrow 0), \frac{y}{n} \rightarrow 0 (y \ll n)$$

$$\text{Poniamo } \mu = n \cdot p$$

$$P_Y(y) \approx \frac{\mu^y}{y!} \cdot e^{-\mu}$$

Dimostrazione >

$$\begin{aligned} \dots &= \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot (1 - p)^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} \cdot p^y \cdot (1 - p)^{n-y} \\ &= \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-y)}{y!} \cdot p^y \cdot (1 - p)^{n-y} \approx \frac{n^y}{y!} \cdot p^y \cdot (1 - p)^{n-y} \\ &\approx \frac{n^y}{y!} \cdot p^y \cdot (1 - p)^n = \frac{(np)^y}{y!} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot (-p)^i \\ &= \frac{(np)^y}{y!} \cdot \left[1 - np + \frac{n(n-1)}{2!} p^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} p^3 + \dots \right] \\ &\approx \frac{(np)^y}{y!} \cdot \left[1 - np + \frac{n^2}{2!} p^2 - \frac{n^3}{3!} p^3 + \dots \right] \\ &= \frac{\mu^y}{y!} \left[1 - \mu + \frac{\mu^2}{2!} - \frac{\mu^3}{3!} + \dots \right] = \dots \end{aligned}$$

$$Z \sim \text{Pois}(\mu), \mu > 0, z \in \mathbb{N}$$

$$P_Z(z) = \frac{\mu^z}{z!} \cdot e^{-\mu}$$

Approssima la probabilità di eventi simili che si possono verificare in un intervallo di tempo/spazio/...

Formule

$$\Phi_Z(t) = e^{\mu \cdot (e^t - 1)}$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \sum_{z=0}^{+\infty} e^{tz} \cdot \frac{\mu^z}{z!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{z=0}^{+\infty} \frac{(e^t \mu)^z}{z!} = e^{-\mu} e^{e^t \mu} = \dots$$

Si può notare che la media è uguale a quella del Bin

$$\mathbb{E}[Z] = \mu = n \cdot p$$

[!dimostrazione]-

$$\dots = \left. \frac{d\Phi_Z(t)}{dt} \right|_{t=0} = e^{\mu \cdot (e^t - 1)} \cdot (\mu e^t) = \dots$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \left. \frac{d^2\Phi_Z(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \mu^2 + \mu$$

$$\text{Var}[Z] = \mu$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \dots$$

Approfondimento >

Inoltre è riproducibile

$$Z_1 \sim \text{Pois}(\mu_1) \perp\!\!\!\perp Z_2 \sim \text{Pois}(\mu_2), Z = Z_1 + Z_2$$

$$\Phi_Z(t) = \Phi_{Z_1}(t) \cdot \Phi_{Z_2}(t) = e^{\mu_1 \cdot (e^t - 1)} \cdot e^{\mu_2 \cdot (e^t - 1)} = e^{(\mu_1 + \mu_2)(e^t - 1)} \implies Z \sim \text{Pois}(\mu_1 + \mu_2)$$

Variabile aleatoria ipergeometrica

Definizione

Estrazione senza reimmissione da un lotto contenente N elementi di cui D difettosi

L'estrazione di un pezzo difettoso vale 1 e di un pezzo non difettoso 0

Indica la probabilità di estrarre $k \leq D$ pezzi difettosi da un campione di $n \leq N$ elementi

$K \sim \text{Iper}(N, n, D)$, $k \in [\max\{0, n - N + D\}, \min\{n, D\}]$

$$P_K(k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Ogni estrazione è una Bernoulliana con $p = \frac{D}{N}$

Approfondimento >

La probabilità di estrarre un pezzo difettoso alla seconda estrazione è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_{II}) &= \mathbb{P}(D_{II}|D_I) \cdot \mathbb{P}(D_I) + \mathbb{P}(D_{II}|\bar{D}_I) \cdot \mathbb{P}(\bar{D}_I) = \frac{D-1}{N-1} \cdot \frac{D}{N} + \frac{D}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{D}{N}\right) \\ &= \frac{D^2 - D + DN - D^2}{(N-1)(N)} = \frac{D(N-1)}{N(N-1)} = \frac{D}{N} \end{aligned}$$

Formule

$$\mathbb{E}[K] = n \cdot \frac{D}{N}$$

Variabile aleatoria di Pascal

Definizione

Anche chiamata negativa binomiale

$Y \sim \text{NegBin}(m, p)$

Conta il numero di insuccessi y prima di m successi, quindi per definizione l'ultimo è un successo

$$P_Y(y) = \binom{y+m-1}{y} \cdot p^m \cdot (1-p)^y$$

Si può anche scrivere come somma di y geometriche indipendenti $X_i \sim \text{Geo}(p)$ con p identica

Formule

$$\Phi_Y(t) = \frac{(1-p)^y}{(1-e^t p)^y}$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^y X_i}\right] = \prod_{i=1}^y \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \dots$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{yp}{1-p}$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^y X_i\right] = \sum_{i=1}^y \mathbb{E}[X_i] = \dots$$

Variabile aleatoria uniforme

Definizione

$$X \sim \text{Unif}(a, b)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Formule

$$\Phi_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{(b-a) \cdot t}$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx = \dots$$

Approfondimento >

Si può definire una trasformazione

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [0, 1], \varphi(y) = \frac{y-a}{b-a}$$

$$\frac{X-a}{b-a} = Y \sim \text{Unif}(0, 1)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0, 1] \\ 0, & y \notin [0, 1] \end{cases}$$

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \left. \frac{d\Phi_Y(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) \right|_{t=0} = \left. \frac{te^t - (e^t - 1)}{t^2} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot e^t}{2t} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{12}$$

Ora si possono riutilizzare i calcoli per $X = Y \cdot (b - a) + a$

Formule

$$\mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2}$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[Y \cdot (b - a) + a] = (b - a) \cdot \mathbb{E}[Y] + a = \frac{b-a}{2} + a = \dots$$

$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Dimostrazione >

$$\dots = \text{Var}[Y \cdot (b - a) + a] = (b - a)^2 \cdot \text{Var}[Y] = \dots$$

Variabile aleatoria esponenziale

Definizione

$$\mu = \lambda x, Y \sim \text{Pois}(\mu)$$

$$P_Y(y) = \frac{(\lambda x)^y}{y!} \cdot e^{-\lambda x}$$

con $y \in \mathbb{N}$

x indica il tempo di funzionamento di un sistema riparabile, Y conta gli eventi guasto

La probabilità di non osservare guasti in $[0, x]$ è $\mathbb{P}(Y = 0) = P_Y(0) = e^{-\lambda x}$, $x, \lambda > 0$

Allo stesso modo non osservare guasti entro un tempo x equivale al corretto funzionamento per tale tempo

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ conta il tempo di funzionamento

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \text{ e } F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x > 0$$

Viene utilizzata per misurare attese, code, decadimenti e rotture improvvise

Formule

$$\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

con $t < \lambda$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t) \cdot x} dx = \dots$$

$$\mathbb{E}[X] = \left. \frac{d\Phi_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Approfondimento >

Vige della proprietà di assenza di memoria, dati $x_2 > x_1$, $x_2 = x_1 + x$ ($x > 0$)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > x_2 | X > x_1) &= \frac{\mathbb{P}((X > x_2) \cap (X > x_1))}{\mathbb{P}(X > x_1)} = \frac{\mathbb{P}(X > x_2)}{\mathbb{P}(X > x_1)} = \frac{1 - F_X(x_2)}{1 - F_X(x_1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x_1+x)}}{e^{-\lambda x_1}} = \frac{e^{-\lambda x_1} \cdot e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x_1}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x) \end{aligned}$$

Variabile aleatoria gamma

Definizione

$$X_i \sim \text{Exp}(\lambda), i = 1, \dots, n$$

$X_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ può essere pensato come periodo complessivo di funzionamento avendo a disposizione n elementi, utilizzati uno dopo l'altro appena si verifica il guasto del precedente

Y conta il numero di elementi rotti (quindi di guasti), la probabilità che il periodo di funzionamento sia $> x$ è

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^y}{y!} e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(Y < n)$$

ovvero la probabilità che si verifichino $n - 1$ guasti

Formule

$$F_{X_n}(x) = \sum_{y=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^y}{y!} \cdot e^{-\lambda x}$$

$$f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Dimostrazione >

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{dF_{X_n}(x)}{dx} = \sum_{y=n}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{y-1}}{(y-1)!} \cdot e^{-\lambda x} - \sum_{y=n}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^y}{(y)!} \cdot e^{-\lambda x} \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \left[\sum_{z=n-1}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^z}{z!} - \sum_{y=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^y}{y!} \right] = \dots \end{aligned}$$

$$\Phi_{X_n}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^n$$

con $t < \lambda$

Definizione

Si definisce una funzione gamma anche per n non interi tale che

$$f_{X_n}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

Se $n \in \mathbb{N}$, da prima, $\Gamma(n) = (n-1)!$

Se invece $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx$$

Esempio >

Alcuni valori noti: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Variabile aleatoria gaussiana

Definizione

Anche chiamata **normale**, modello di interpretazione di errori o scostamenti

Lo scostamento $X - \mu$, con μ valore vero, accompagna le misure sperimentali di un certo valore X effettuate nelle stesse condizioni

$$U = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

sono gli errori di misura come multipli della loro ampiezza tipica, $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}$

$U \sim N(0, 1)$ è variabile normale standard con media 0 e deviazione 1, senza errori sistematici

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

Dimostrazione >

Se le misure non sono affette da errori sistematici:

- $\mathbb{E}[U] = 0$
- $f_U(u) = f_U(-u)$ e $\lim_{u \rightarrow +\infty} f_U(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f_U(u) = 0$
- $f_U(0) > f_U(u) \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ovvero:

$$\frac{df_U(u)}{du} = -f_U(u) \cdot u$$

e $f_U(u) > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$

Una soluzione all'equazione differenziale è $e^{-u^2/2}$

$f_U(u) = k \cdot e^{-u^2/2}$, per essere densità

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot e^{-u^2/2} du = 2k \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du \\ t &= \frac{u^2}{2} \quad u = \sqrt{2t} \quad du = \frac{1}{\sqrt{2}} t^{(1/2)-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} k \int_0^{+\infty} t^{(1/2)-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} k \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} k \implies k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

$X = \mu + \sigma U \sim N(\mu, \sigma^2)$ è variabile aleatoria normale (non standard)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)} \left| \frac{du}{dx} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)((x-\mu)/\sigma)^2}$$

con $\sigma > 0$

Formule

$$\Phi_U(t) = e^{t^2/2}$$

$$\Phi_X(t) = e^{t\mu + t^2\sigma^2/2}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[\mu + \sigma U] = \mu + \sigma \mathbb{E}[U] = \dots$$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2$$

Approfondimento >

$$X_1, X_2 \sim N(0, 1), X_1 \perp\!\!\!\perp X_2, Y = X_1 + X_2$$

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdot \Phi_{X_2}(t) = e^{t^2/2} \cdot e^{t^2/2} = e^{t^2}$$

$$\text{Quindi } Y \sim N(0, 2)$$

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad i \neq j, a_i \in \mathbb{R} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i = \bar{\mu}$$

$$\text{Var}[X] = \sum_{i=1}^n (a_i \sigma_i)^2 = \bar{\sigma}^2$$

$$\Phi_Y(t) = \prod_{i=1}^n \Phi_{X_i}(t) = e^{t\bar{\mu} + t^2\bar{\sigma}^2/2}$$

$$\text{Quindi } Y \sim N(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2)$$

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad i \neq j, a_i, b_i \in \mathbb{R} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i, Z = \sum_{i=1}^n b_i X_i$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])(Z - \mathbb{E}[Z])] = \sum_{i=1}^n a_i b_i \sigma_i^2$$

$$\text{Se } \sigma_i = \sigma \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = 0 \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i = 0, Y \text{ e } Z \text{ sono dette ortogonali}$$

Variabile aleatoria normale bivariata

Definizione

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$, per semplicità $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Allora si può definire

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-(1/2)(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2)}$$

Dimostrazione >

$$\dots = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-(1/2)(x^2/\sigma_1^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-(1/2)(y^2/\sigma_2^2)} = \dots$$

$X_i \sim N(0, 1)$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \quad i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n)$

Allora

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-(1/2)(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$$

Il vettore (X_1, \dots, X_n) si dice gaussiana multivariata standard