Calcolo combinatorio

Probabilità condizionata

Si definisce probabilità condizionata il nuovo giudizio di probabilità che muta visto l'accadere di un'altro evento
A, B eventi, si indica $\mathbb{P}(B|A)$ oppure $\mathbb{P}_A(B)$ come $\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)$
Se $\mathbb{P}(A) \neq 0 \implies$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Indipendenza stocastica

A, B eventi si dicono stocasticamente indipendenti $A \perp\!\!\!\perp B \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ ovvero $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \wedge \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$

A, B eventi dipendenti
Se $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \implies$ si dicono positivamente correlati
Se $\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \implies$ si dicono negativamente correlati

Probabilità totali condizionate

A, B eventi
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\bar{B}) \cdot \mathbb{P}(A|\bar{B})$

Calcolo combinatorio

S finito
Il calcolo si distingue in tre casi in base a ordine e ripetizioni

Disposizioni

Si dice disposizione di n oggetti di classe $k \leq n$ ogni ordinamento di k oggetti scelti tra n
Senza ripetizioni:

$$\mathrm{D}_{n,k} = \mathrm{D}_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Con ripetizioni:

$$D'_{n,k} = D^r_{n,k} = n^k$$

Permutazioni

Si dice permutazione di n oggetti ogni ordinamento composto da tutti gli n oggetti
Senza ripetizioni:

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{D}_n^n = n!$$

Con ripetizioni:
n oggetti di cui d distinti, $n = k_1 + \ldots + k_d$ dove ogni elemento j è presente k_j volte

$$\mathrm{P}_n^{k_1,\ldots,k_d} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_d!}$$

Combinazioni

Si dice combinazione semplice di n oggetti di classe $k \leq n$ ogni sottoinsieme costituito da k elementi tra gli n
Senza ripetizioni:

$$\mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Con ripetizioni:

$$\mathrm{C}'_{n,k} = \mathrm{C}_{n,k}^r = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$$

Teorema di Bayes

A, C eventi

$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A|C)}{\mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(A|C) + \mathbb{P}(\bar{C}) \cdot \mathbb{P}(A|\bar{C})}$$

$E_1, \ldots, E_n, A$ eventi : $E_i \cap E_j = \emptyset \;\; \forall i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$

$$\mathbb{P}(E_j|A) = \frac{\mathbb{P}(E_j) \cdot \mathbb{P}(A|E_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) \cdot \mathbb{P}(A|E_i)}$$