

Vettori aleatori

Variabili aleatorie congiunte

Definizione

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, X, Y variabili aleatorie

La coppia (X, Y) è detta vettore aleatorio

Funzione di ripartizione congiunta

Definizione

$$F(x, y) = \mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y \leq y))$$

Proprietà:

- è continua da destra: $F(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x + \epsilon, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x, y + \epsilon)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$$

- $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1$$

Formule

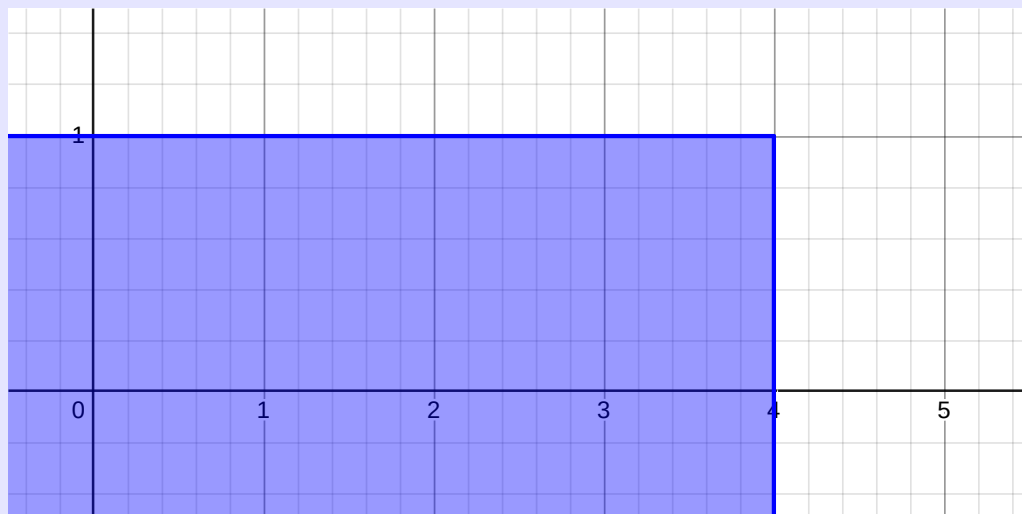
$$\mathbb{P}((x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2)) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

Funzione di ripartizione congiunta

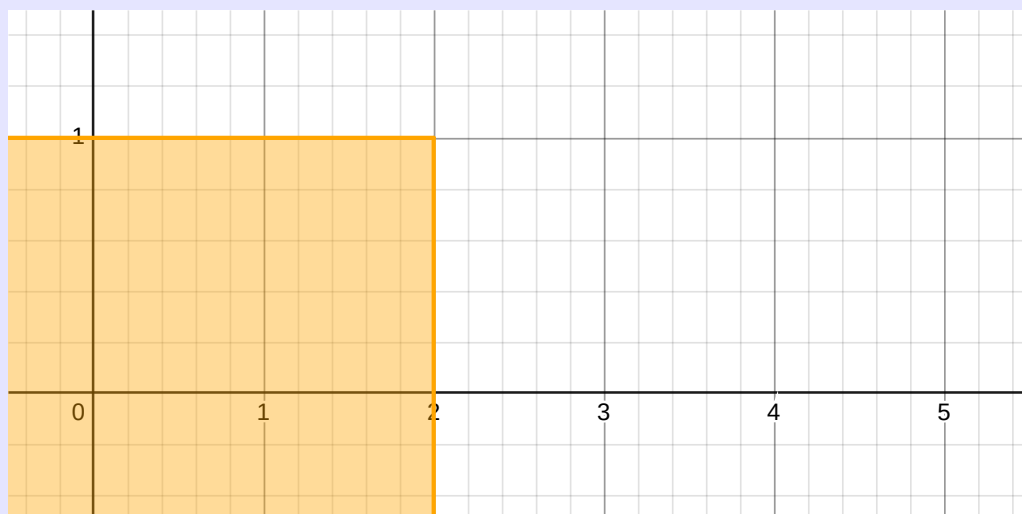
$$x_1 = 2, x_2 = 4, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1$$

Domini di $P(x, y)$ o $f(x, y)$ sui quali vengono calcolati

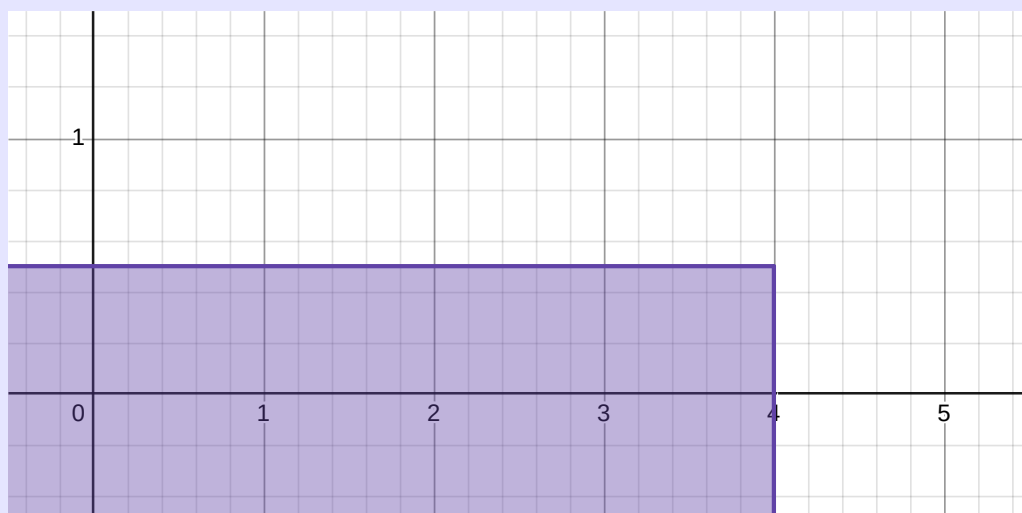
$F(x_2, y_2)$:



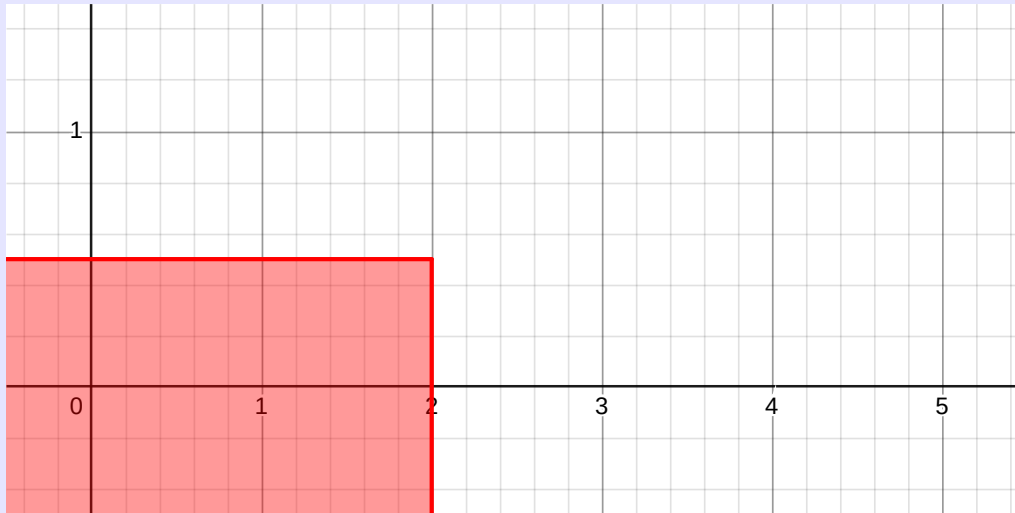
$F(x_1, y_2)$:



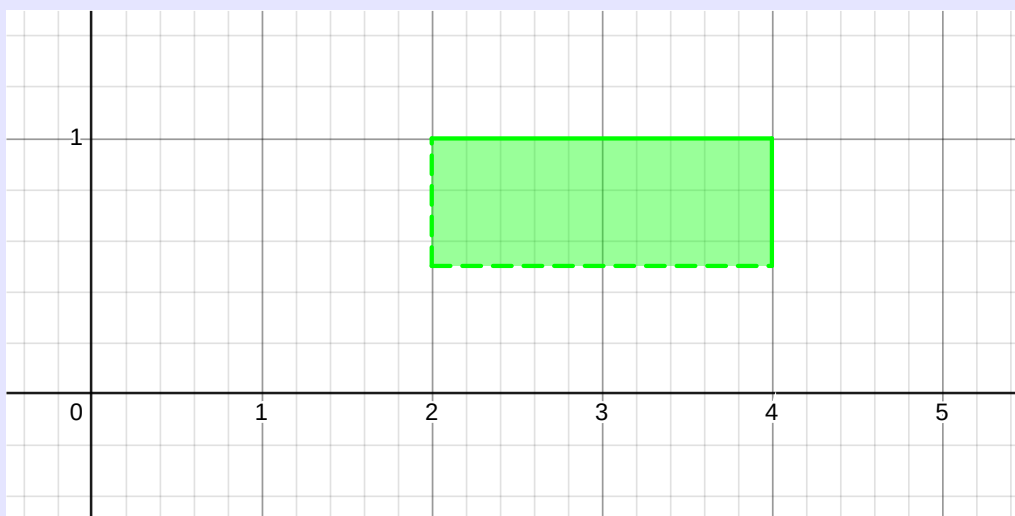
$F(x_2, y_1)$:



$F(x_1, y_1)$:



$\mathbb{P}((x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2))$:



Funzioni marginali

Formule

Funzioni di ripartizione marginali

$$F_X(x) = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y)$$

Funzioni di densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Funzioni di massa marginali

$$P_X(x) = \sum_i P(x, y_i)$$

$$P_Y(y) = \sum_i P(x_i, y)$$

Indipendenza

Definizione

X, Y variabili aleatorie, D_X, D_Y sottoinsiemi degli insiemi di definizione di X, Y

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{P}((X \in D_X) \cap (Y \in D_Y)) = \mathbb{P}(X \in D_X) \cdot \mathbb{P}(Y \in D_Y) \quad \forall D_X, D_Y$$

In particolare se $D_X = (X \leq x), D_Y = (Y \leq y)$ e F è funzione di ripartizione congiunta

$$\implies X \perp\!\!\!\perp Y \iff F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Analogamente $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ e $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

Media

Definizione

$$\mathbb{E}[X] := \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \end{cases}$$

se esiste finita è detta **speranza matematica** o media o **valore atteso** di X

Formule

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \implies$$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] := \begin{cases} \sum_i \varphi(x_i) P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \end{cases}$$

Definizione

La media si può anche applicare alla potenza di una variabile aleatoria X^n e $\mathbb{E}[X^n]$ è detto momento n -esimo centrato di X

Linearità

$$\mathbb{E}[a + bX] = a + b\mathbb{E}[X] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Definizione

(X, Y) vettore aleatorio

$$\mathbb{E}[(X, Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy \end{cases}$$

se esistono finiti

Formule

$$\mathbb{E}[(X, Y)] = \mathbb{E}[X \cdot Y]$$

Casi notevoli

Formule

X, Y variabili aleatorie, $Z = X + Y \implies \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathbb{E}[(X, Y)] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

Dimostrazione >

(Nel caso continuo)

$$\dots \implies f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \implies$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \right) = \dots \end{aligned}$$

Varianza

Definizione

Anche chiamata **Standard Deviation**

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x) dx \end{cases}$$

Misura la tendenza di X ad assumere valori maggiori o minori della media, quindi se $\text{Var}[X]$ è vicina a 0 allora $\mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}[X])$ è molto bassa

Formule

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Dimostrazione >

$$\begin{aligned} \dots &= \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1] \cdot \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \dots \end{aligned}$$

Non linearità

$$\text{Var}[a + bX] = b^2 \text{Var}[X]$$

$\text{Var}[aX + bY] = a^2 \text{Var}[X] + b^2 \text{Var}[Y] + 2ab \text{Cov}(X, Y)$ misura la tendenza delle due variabili ad assumere valori maggiori o minori della media "insieme"

Esempio >

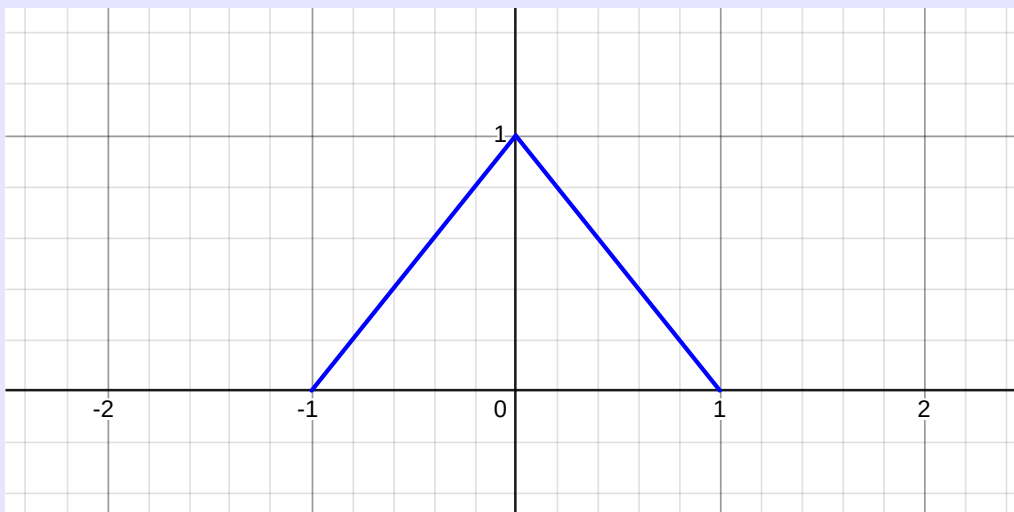
Varianza

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^3 + x^2 dx + \int_0^1 -x^3 + x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{1}{6} = 0.167$$

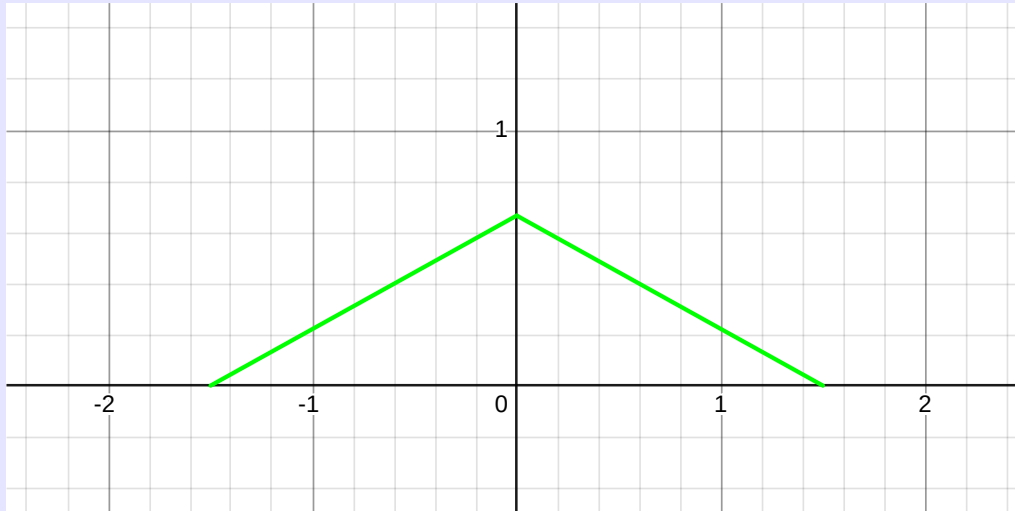


$$f(y) = \begin{cases} -\frac{4}{9}|x| + \frac{2}{3}, & -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y) dy = \int_{-\frac{3}{2}}^0 \frac{4}{9} y^3 + \frac{2}{3} y^2 dy + \int_0^{\frac{3}{2}} -\frac{4}{9} y^3 + \frac{2}{3} y^2 dy \\ &= \left[\frac{y^4}{9} + \frac{2}{9} y^3 \right]_{-\frac{3}{2}}^0 + \left[-\frac{y^4}{9} + \frac{2}{9} y^3 \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Var}[Y] = \frac{3}{8} = 0.375$$



Covarianza

Definizione

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\ &= \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - \mathbb{E}[X])(y_j - \mathbb{E}[Y])P(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y])f(x, y) dx dy \end{cases}\end{aligned}$$

Formule

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \text{Cov}(X, Y) = 0$

Dimostrazione >

(Nel caso continuo)

$$\text{Cov}(X, Y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])f_X(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathbb{E}[Y])f_Y(y) dy \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[X] f_X(x) dx = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X] \cdot 1 = 0$$

Analogamente per y

$$\implies \text{Cov}(X, Y) = 0 \cdot 0 \implies \dots >$$

Correlazione

Formule

X, Y variabili aleatorie legate da una relazione lineare $Y = aX + b$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$[\text{Cov}(X, Y)]^2 = \text{Var}[X]\text{Var}[Y]$$

Dimostrazione >

$$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b \implies Y - \mathbb{E}[Y] = a(X - \mathbb{E}[X])$$

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])a(X - \mathbb{E}[X])] \\ &= \mathbb{E}[a(X - \mathbb{E}[X])^2] = a\text{Var}[X] = \frac{1}{a}\text{Var}[Y]\end{aligned}$$

$$\implies [\text{Cov}(X, Y)]^2 = a\text{Var}[X]\frac{1}{a}\text{Var}[Y] = \dots$$

Coefficiente di correlazione

Definizione

È un indice adimensionale che misura la dipendenza lineare tra X e Y

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

$\implies \rho = \pm 1$ se X e Y sono perfettamente correlate tra di loro

$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \rho = 0$

Vale $\rho \in [-1, 1]$:

- $|\rho|$ vicino a 1 indica una buona correlazione
- $|\rho|$ vicino a 0 indica poca correlazione

Approfondimento >

Normalmente $Y = aX + b + Z$ dove Z rende incerta la relazione tra X e Y

: $Z : \mathbb{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z]$ è minima

$$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b + \mathbb{E}[Z] \implies b = \mathbb{E}[Y] - a\mathbb{E}[X]$$

$$Z = Y - aX + b \implies \text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + a^2\text{Var}[X] - 2a\text{Cov}(X, Y)$$

$$\frac{d\text{Var}[Z]}{da} = 2a\text{Var}[X] - 2\text{Cov}(X, Y)$$

Il minimo corrisponde a $2a\text{Var}[X] - 2\text{Cov}(X, Y) = 0 \implies$

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}[X]}$$

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{[\text{Var}[X]]^2} \text{Var}[X] - 2 \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}[X]} \text{Cov}(X, Y) =$$

$$= \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]} \text{Var}[Y] - 2 \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]} \text{Var}[Y]$$

$$= \text{Var}[Y](1 - \rho^2 - 2\rho^2) = \text{Var}[Y](1 - \rho^2)$$

Se $\rho^2 = 1$ la dipendenza lineare è perfetta

Funzione generatrice di momenti

Definizione

X variabile aleatoria, $t \in \mathbb{R}$

La speranza matematica $\Phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ è una formula analitica per calcolare i momenti di una variabile aleatoria

$$\mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{d^n \Phi_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} = \Phi_X^{(n)}(0)$$

Dimostrazione >

Utilizzando lo sviluppo di Taylor

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E} \left[1 + tX + \frac{t^2 X^2}{2!} + \dots \right] = 1 + t\mathbb{E}[X] + \frac{t^2}{2!} \mathbb{E}[X^2] + \dots$$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx \end{cases}$$

Se converge esiste la funzione generatrice dei momenti, questa fissa tutti i momenti di X e la determina univocamente

Formule

X_1, X_2 variabili aleatorie, $Y = X_1 + X_2$

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}]$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX_1+tX_2}] = \dots$$

Se $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies$

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdot \Phi_{X_2}(t)$$

Dimostrazione >

$$\dots = \mathbb{E}[e^{tX_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tX_2}] = \dots$$