Variabili aleatorie

Variabile aleatoria

Definizione

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità
La funzione $X : S \to \mathbb{R}$ è variabile aleatoria $\iff$ X è misurabile in $(S, \mathcal{A})$

Gli elementi misurabili di S sono quelli in $\mathcal{A}$

Funzione di ripartizione

Definizione

Anche chiamata **distribuzione cumulativa** o **Cumulative Distribution Function**, fornisce la probabilità dell'evento $(X \in (-\infty, x)) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$
e si indica con

$F_X(x) = F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

Proprietà:

- è continua a destra: $F(x) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x + \epsilon) = F(x^+)$
- è monotona crescente: se $x_2 > x_1 \implies F(x_2) \geq F(x_1)$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) \implies F(x) \in [0, 1] \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Formule

$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$

Dimostrazione

$\ldots = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = \ldots$

$\mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Dimostrazione

$x_2 > x_1 \implies \mathbb{P}(X \leq x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2)$

$\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x^-)$

Dimostrazione

$$x_1 = x - \epsilon,\ x_2 = x\ \ \forall\epsilon > 0 \implies \lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(x_1 < X \le x_2) = \lim_{\epsilon\to 0}\mathbb{P}(x - \epsilon < X \le x)$$

$$F(x|X > x_0) = \frac{F(x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}$$

Dimostrazione

$(X > x_0)$ evento, $x > x_0$

$$\ldots = \mathbb{P}(X \le x|X > x_0) = \frac{\mathbb{P}((X \le x) \cap (X > x_0))}{\mathbb{P}(X > x_0)} = \frac{\mathbb{P}(x_0 < X \le x)}{1 - F(x_0)} = \ldots$$

Massa di probabilità

X è detta variabile aleatoria discreta se la funzione di ripartizione è a gradini, le discontinuità hanno ampiezza $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$

Definizione

$P(x) = \mathbb{P}(X = x)$ è detta funzione massa di probabilità o anche **Probability Mass Function**
Fornisce la probabilità che la variabile aleatoria assuma un certo valore, pertanto

$$F(x_1) = \sum_{x=x_1} P(x)$$

$$\mathbb{P}(x_i < X \le x_j) = \sum_{x_i < x \le x_j} P(x)\ \ x_i < x_j$$

Soddisfa le seguenti proprietà:

$$\sum_{-\infty < x < +\infty} P(x) = 1 \land P(x) \ge 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Formule

$$\mathbb{P}(x < X) = F(x) - P(x)$$

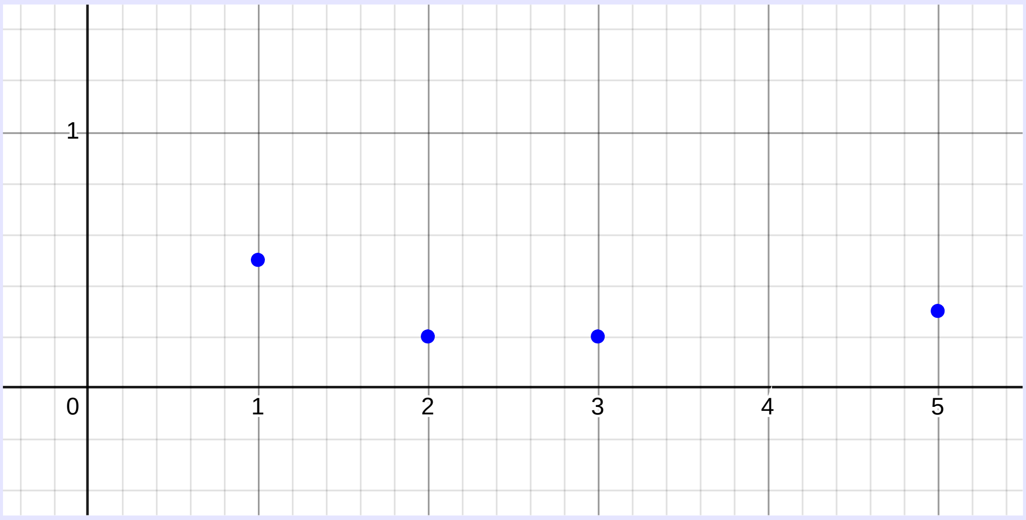
Dimostrazione

$$\ldots = \mathbb{P}(x \le X) - \mathbb{P}(x = X) = \ldots$$

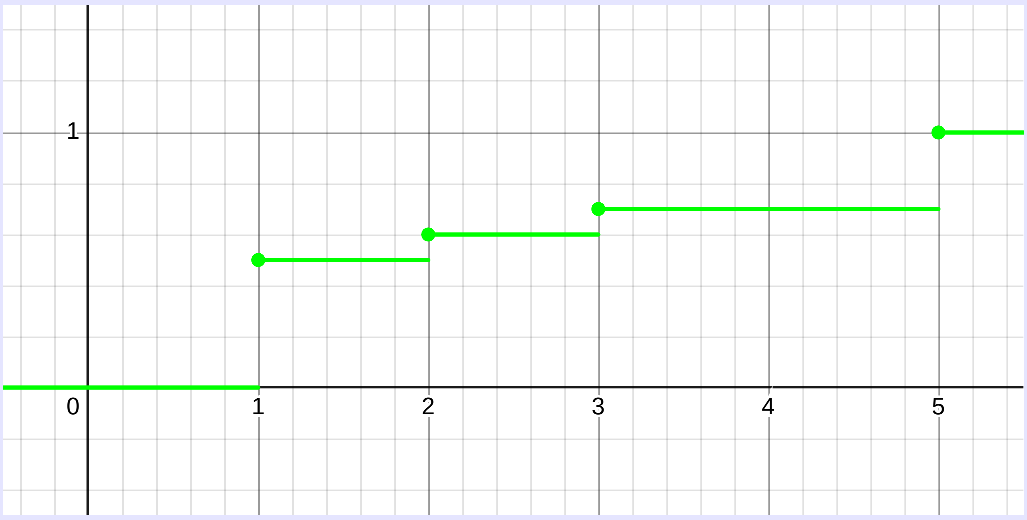
Esempio

> ## Massa di probabilità

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{5}, & x = 2,3 \\ \frac{3}{10}, & x = 5 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{6}{10}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{7}{10}, & 3 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$



Densità di probabilità

X è detta variabile aleatoria continua se la funzione di ripartizione è continua

Definizione

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$$

è detta funzione densità di probabilità
Fornisce la probabilità che la variabile aleatoria assuma uno specifico valore, quindi

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t)\, dt$$

$$\mathbb{P}(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \quad x_1 \le x_2$$

Soddisfa le seguenti proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \land f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Formule

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

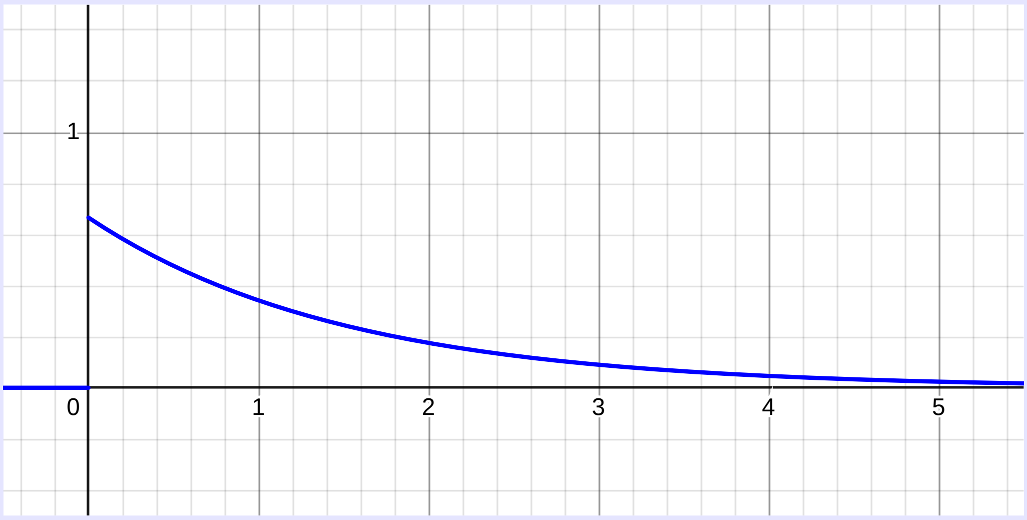
Dimostrazione

$$\ldots = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X = x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt - \int_{x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \ldots$$

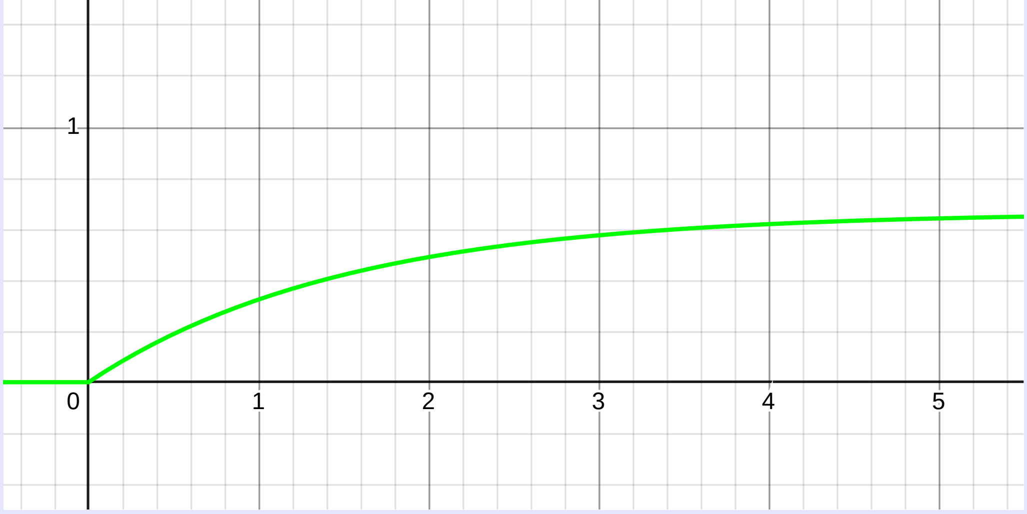
Esempio

Densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-2x/3}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}e^{-2x/3} + \frac{2}{3}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$


1
0
1
2
3
4
5