Vettori aleatori

Variabili aleatorie congiunte

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, X, Y variabili aleatorie
La coppia (X, Y) è detta vettore aleatorio

Funzione di ripartizione congiunta

$F(x, y) = \mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y \leq y))$
Proprietà:

- è continua da destra: $F(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x + \epsilon, y) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x, y + \epsilon)$
- $$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$$
  $$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$$
  $$\lim_{(x,y) \to (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1$$

Inoltre:
$\mathbb{P}((x_1 < X \leq x_2) \wedge (y_1 < Y \leq y_2)) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

Funzioni marginali

Funzioni di ripartizione marginali

$F_X(x) = F(x, +\infty)$
$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

Funzioni di densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

Funzioni di massa marginali

$$P_X(x) = \sum_i P(x, y_i)$$
$$P_Y(y) = \sum_i P(x_i, y)$$

Indipendenza

X, Y variabili aleatorie, D_X, D_Y sottoinsiemi degli insiemi di definizione di $X, Y \implies X \perp\!\!\!\perp Y$ se
$\mathbb{P}((X \in D_X) \cap (Y \in D_Y)) = \mathbb{P}(X \in D_X) \cdot \mathbb{P}(Y \in D_Y) \ \ \forall D_X, D_Y$

In particolare se $D_X = (X \leq x), D_Y = (Y \leq y)$ e F è funzione di ripartizione congiunta $\implies X \perp\!\!\!\perp Y$ se
$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
Analogamente $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ e $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

Media

$$\mathbb{E}[X] := \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \end{cases}$$

se esiste finita è detta speranza matematica o media o valore atteso di X
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] := \begin{cases} \sum_i \varphi(x_i) P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx \end{cases}$$

Si può anche applicare alla potenza di una variabile aleatoria X^n e $\mathbb{E}[X^n]$ è detto momento n-esimo centrato di X

E' lineare: $\mathbb{E}[a + bX] = a + b\mathbb{E}[X] \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

(X, Y) vettore aleatorio

$$\mathbb{E}[(X, Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y)\, dx\, dy \end{cases}$$

se esistono finiti

Casi notevoli

X, Y variabili aleatorie, $Z = X + Y \implies \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
Se $X \perp\!\!\!\perp Y$ continue $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \implies$

$$\mathbb{E}[(X, Y)] = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy \right)$$

Varianza

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] &= \begin{cases} \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\, dx \end{cases} \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1] \cdot \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \end{aligned}$$

Non è lineare e $\mathrm{Var}[a + bX] = b^2 \mathrm{Var}[X]$

$\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] - 2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$ misura la tendenza delle due variabili ad assumere valori maggiori o minori della media "insieme"

Covarianza

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \begin{cases} \sum_i \sum_j (x_i - \mathbb{E}[X])(y_j - \mathbb{E}[Y]) P(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])(y - \mathbb{E}[Y]) \, dx \, dy \end{cases}$$

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \implies \mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$
Dimostrazione (nel caso continuo):

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X]) f_X(x) \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mathbb{E}[Y]) f_Y(y) \, dy \right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) \, dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[X] f_X(x) \, dx = \mathbb{E}[X] - 1\mathbb{E}[X] \cdot 1 = 0$$

Analogamente per y

$$\mathrm{Var}[aX + bY] = a^2 \mathrm{Var}[X] + b^2 \mathrm{Var}[Y] + 2ab\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Correlazione

X, Y variabili aleatorie legate da una relazione lineare $Y = aX + b \;\; a, b \in \mathbb{R}$
$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b \implies Y - \mathbb{E}[Y] = a(X - \mathbb{E}[X])$
$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])a(X - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[a(X - \mathbb{E}[X])^2] = a\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{a}\mathrm{Var}[Y]$
$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 = a\mathrm{Var}[X]\frac{1}{a}\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]$

Coefficiente di correlazione

E' un indice adimensionale che misura la dipendenza lineare tra X e Y

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}}$$

$\implies \rho = \pm 1$ se X e Y sono perfettamente correlate tra di loro
$\rho = 0$ se $X \perp\!\!\!\perp Y$
Vale $-1 \leq \rho \leq 1$:

- $|\rho|$ vicino a 1 indica una buona correlazione
- $|\rho|$ vicino a 0 indica poca correlazione

Normalmente $Y = aX + b + Z$ dove Z rende incerta la relazione tra X e Y
$Z : \mathbb{E}[Z] = 0$ e $\mathrm{Var}[Z]$ è minima
$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b + \mathbb{E}[Z] \implies b = \mathbb{E}[Y] - a\mathbb{E}[X]$
$Z = Y - aX + b \implies \mathrm{Var}[Z] = \mathrm{Var}[Y] + a^2\mathrm{Var}[X] - 2a\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$\frac{d\mathrm{Var}[Z]}{da} = 2a\mathrm{Var}[X] - 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Il minimo corrisponde a $2a\text{Var}[X] - 2a\text{Cov}(X,Y) = 0 \implies$

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}[X]}$$

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{[\text{Var}[X]]^2}\text{Var}[X] - 2\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}[X]}\text{Cov}(X,Y) =$$

$$= \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}\text{Var}[Y] - 2\frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}\text{Var}[Y]$$

$$= \text{Var}[Y](1-\rho^2-2\rho^2) = \text{Var}[Y](1-\rho^2)$$

Se $\rho^2 = 1$ la dipendenza lineare è perfetta

Funzione generatrice di momenti

X variabile aleatoria, $t \in \mathbb{R}$
La speranza matematica $\Phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ è una formula analitica per calcolare i momenti di una variabile aleatoria
Utilizzando lo sviluppo di Taylor
$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[1 + tX + \frac{tX^2}{2!} + \dots\right] = 1 + t\mathbb{E}[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \dots$
Quindi

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{d^n\Phi_X(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \Phi_X^{(n)}(0)$$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i}P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)\,dx \end{cases}$$

Se converge esiste la funzione generatrice dei momenti, questa fissa tutti i momenti di X e la determina univocamente

X_1, X_2 variabili aleatorie, $Y = X_1 + X_2$
$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX_1+tX_2}] = \mathbb{E}[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}]$
Se $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$
$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tX_2}] = \Phi_{X_1}(t) \cdot \Phi_{X_2}(t)$