Variabili aleatorie

Variabile aleatoria

 $(S,\mathcal{A},\mathbb{P})$ spazio di probabilità

La funzione $X:S \to \mathbb{R}$ è variabile aleatoria $\iff X$ è misurabile in (S,\mathcal{A})

Gli elementi misurabili di S sono quelli in $\mathcal A$

Funzione di ripartizione

Anche chiamata distribuzione cumulativa, fornisce la probabilità dell'evento $(X \in (-\infty, x)) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ e si indica con

$$F_X(x) = F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$$

Proprietà:

- è continua a destra: $F(x) = \lim_{\epsilon o 0} F(x+\epsilon) = F(x^+)$
- è monotona crescente: se $x_2>x_1 \implies F(x_2)\geq F(x_1)$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) \implies F(x) \in [0,1] \ \ orall x \in \mathbb{R}$

Per definizione $\mathbb{P}(X \leq x) = F(x) \implies \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x)$

$$\mathsf{Se}\; x_2 > x_1 \implies \mathbb{P}(X \leq x_1) + \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2) \implies \mathbb{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Inoltre se $x_1 = x - \epsilon, \ x_2 = x \ \ \forall \epsilon > 0 \implies$

$$\mathbb{P}(X=x) = \lim_{\epsilon o 0} \mathbb{P}(x_1 < X \le x_2) = \lim_{\epsilon o 0} \mathbb{P}(x-\epsilon < X \le x) = F(x) - F(x^-)$$

X variabile aleatoria, $(X>x_0)$ evento, $x>x_0$

$$F(x|X>x_0)=\mathbb{P}(X\leq x|X>x_0)=rac{\mathbb{P}((X\leq x)\cap(X\geq x_0))}{\mathbb{P}(X>x_0)}=$$

$$=rac{\mathbb{P}(x_0 < X \leq x)}{1 - F(x_0)} = rac{F(x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}$$

Variabile aleatoria discreta

X è detta variabile aleatoria discreta se la funzione di ripartizione è a gradini Le discontinuità hanno ampiezza $F(x) - F(x^-) = \mathbb{P}(X = x)$

Massa di probabilità

 $P(x) = \mathbb{P}(X = x)$ è detta funzione massa di probabilità

$$F(x_1) = \sum_{x=x_1} P(x)$$

$$\mathbb{P}(x_i < X \leq x_j) = \sum_{x_i < x \leq x_j} P(x) \;\; x_i < x_j$$

$$\sum_{-\infty < x < +\infty} P(x) = 1 \wedge P(x) \geq 0 \;\; orall x \in \mathbb{R}$$

Variabile aleatoria continua

X è detta variabile aleatoria continua se la funzione di ripartizione è continua

Densità di probabilità

$$f(x) = \lim_{\Delta x o 0} rac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = rac{dF(x)}{dx}$$

Vale

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t) \, dt$$

$$\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t) \, dt \; \; x_1 \leq x_2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, dt = 1 \wedge f(x) \geq 0 \; \; orall x \in \mathbb{R}$$