Modelli

Variabile aleatoria di Bernoulli

Astrazione del lancio di una moneta
$X \sim \mathrm{B}(p)$ assume valori $\{0,1\}$

$$P_X(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p = q, & x = 0 \end{cases} \quad p \in (0,1)$$

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{t=0}^{1} e^{t\cdot i} \cdot P_X(i) = e^{0t}(1-p) + e^{1t}p = q + e^t p$$

$$\mathbb{E}[X] = \left.\frac{d\Phi_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = e^t p\big|_{t=0} = p$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \left.\frac{d^2\Phi_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = e^t p\big|_{t=0} = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p) = p \cdot q$$

Variabile aleatoria binomiale

Esperimenti ripetuti e indipendenti con due possibili esiti con probabilità p e $1-p$
Abbinando 1 al successo e 0 all'insuccesso, ripetendo n volte l'esperimento, la variabile che conta il numero di successi è detta binomiale ed è la somma di n variabili aleatorie Bernoulliane stocasticamente indipendenti
$X_1, \dots, X_n \sim \mathrm{B}(p)$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \;\; x \neq j$
$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(n,p)$

$$P_Y(y) = \binom{n}{y}(p)^y(1-p)^{n-y} \;\; y \in \{0, \dots, n\}$$

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[e^{tX_i}] = (e^t p + q)^n$$

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = n \cdot p$
$\mathrm{Var}(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$

$Y_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1, p)$, $Y_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2, p)$, $Y_1 \perp\!\!\!\perp Y_2$, $Z = Y_1 + Y_2$
$Z \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$
$\Phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{tY_1 + tY_2}] = \mathbb{E}[e^{tY_1} e^{tY_2}] = \mathbb{E}[e^{tY_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tY_2}] = (e^t p + q)^{n_1}(e^t p + q) = (e^t p + q)^{n_1 + n_2}$

Variabile aleatoria geometrica

Esperimenti indipendenti ripetuti con probabilità di successo costante

Conta il numero di ripetizioni dell'esperimento fino al primo insuccesso

$X \sim \text{Geo}(p)$

$P_X(x) = p^x \cdot (1-p) \;\; x \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} P_X(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p^x \cdot (1-p) = (1-p) \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} p^x = 1$$

$$\Phi_X(t) = \frac{1-p}{1-e^t p}$$

$$\mathbb{E}[X] = \left.\frac{d\Phi_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{p}{1-p}$$

è il numero medio di successi prima di un insuccesso

Variabile aleatoria di Poisson

$Y \sim \text{Bin}(n, p)$, $(n \to +\infty, p \to 0)$, $\frac{y}{n} \to 0$ $(y \ll n)$

Poniamo $\mu = n \cdot p$

$$\begin{aligned}
P_Y(y) &= \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y} = \frac{n!}{y!(n-y)!} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y} \\
&= \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-y)}{y!} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y} \approx \frac{n^y}{y!} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y} \\
&\approx \frac{n^y}{y!} \cdot p^y \cdot (1-p)^n = \frac{(np)^y}{y!} \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot (-p)^i \\
&= \frac{(np)^y}{y!} \cdot \left[1 - np + \frac{n(n-1)}{2!} p^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} p^3 + \ldots\right] \\
&\approx \frac{(np)^y}{y!} \cdot \left[1 - np + \frac{n^2}{2!} p^2 - \frac{n^3}{3!} p^3 + \ldots\right] = \frac{\mu^y}{y!}\left[1 - \mu + \frac{\mu^2}{2!} - \frac{\mu^3}{3!} + \ldots\right] \\
&\approx \frac{\mu^y}{y!} \cdot e^{-\mu}
\end{aligned}$$

$Z \sim \text{Pois}(\mu)$, $\mu > 0$, $z \in \mathbb{N}$

$$P_Z(z) = \frac{\mu^z}{z!} \cdot e^{-\mu}$$

Approssima la probabilità di eventi simili che si possono verificare in un intervallo di tempo/spazio/...

$$\Phi_Z(t) = \mathbb{E}[e^{tZ}] = \sum_{z=0}^{+\infty} e^{tz} \cdot \frac{\mu^z}{z!} \cdot e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{z=0}^{+\infty} \frac{(e^t \mu)^z}{z!} = e^{-\mu} e^{e^t \mu} = e^{\mu \cdot (e^t - 1)}$$

Si può notare che la media è uguale a quella del Bin

$$\mathbb{E}[Z] = \left.\frac{d\Phi_Z(t)}{dt}\right|_{t=0} = e^{\mu \cdot (e^t - 1)} \cdot (\mu e^t) = \mu = n \cdot p$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \left.\frac{d^2\Phi_Z(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \mu^2 + \mu$$

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$$

Inoltre è riproducibile

$Z_1 \sim \text{Pois}(\mu_1) \perp\!\!\!\perp Z_2 \sim \text{Pois}(\mu_2)$, $Z = Z_1 + Z_2$

$\Phi_Z(t) = \Phi_{Z_1}(t) \cdot \Phi_{Z_2}(t) = e^{\mu_1 \cdot (e^t - 1)} \cdot e^{\mu_2 \cdot (e^{t-1})} = e^{(\mu_1 + \mu_2)(e^t - 1)} \implies Z \sim \text{Pois}(\mu_1 + \mu_2)$

Variabile aleatoria ipergeometrica

Estrazione senza reimmissione da un lotto contenente N elementi di cui D difettosi

L'estrazione di un pezzo difettoso vale 1 e di un pezzo non difettoso 0

Indica la probabilità di estrarre $k \leq D$ pezzi difettosi da un campione di $n \leq N$ elementi

$K \sim \text{Iper}(N, n, D)$, $k \in [\max\{0, n - N + D\}, \min\{n, D\}]$

$$P_K(k) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Ogni estrazione è una Bernoulliana con $p = \frac{D}{N}$

La probabilità di estrarre un pezzo difettoso alla seconda estrazione è

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D\text{II}) &= \mathbb{P}(D\text{II}|\text{DI}) \cdot \mathbb{P}(D\text{I}) + \mathbb{P}(D\text{II}|\bar{\text{D}}\text{I}) \cdot \mathbb{P}(\bar{D}\text{I}) = \frac{D-1}{N-1} \cdot \frac{D}{N} + \frac{D}{N-1} \cdot \left(1 - \frac{N}{D}\right) \\ &= \frac{D^2 - D + DN - D^2}{(N-1)(N)} = \frac{D(N-1)}{N(N-1)} = \frac{D}{N} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[K] = n \cdot \frac{D}{N}$$

Variabile aleatoria di Pascal

Anche chiamata negativa binomiale

$Y \sim \text{NegBin}(m, p)$

Conta il numero di insuccessi y prima di m successi, quindi per definizione l'ultimo è un successo

$$P_Y(y) = \binom{y + m - 1}{y} \cdot p^m \cdot (1-p)^y$$

Si può anche scrivere come somma di y geometriche indipendenti $X_i \sim \text{Geo(p)}$ con p identica

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}\left[e^{t\sum_{i=1}^{y} X_i}\right] = \prod_{i=1}^{y} \mathbb{E}[e^{tX_i}] = \frac{(1-p)^y}{(1 - e^t p)^y}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{y} X_i\right] = \sum_{i=1}^{y} \mathbb{E}[X_i] = \frac{yp}{1-p}$$

Variabile aleatoria uniforme

$X \sim \text{Unif}(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{(b-a) \cdot t}$$

Si può definire una trasformazione
$\varphi : [a, b] \to [0, 1]$, $\varphi(y) = \frac{y-a}{b-a}$

$$\frac{X-a}{b-a} = Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases}$$

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{d\Phi_Y(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e^t-1}{t}\right)\bigg|_{t=0} = \frac{te^t - (e^t - 1)}{t^2}\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot e^t}{2t} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{12}$$

Ora si possono riutilizzare i calcoli per $X = Y \cdot (b-a) + a$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y \cdot (b-a) + a] = (b-a) \cdot \mathbb{E}[Y] + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y \cdot (b-a) + a] = (b-a)^2 \cdot \mathrm{Var}[Y] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Variabile aleatoria esponenziale

$\mu = \lambda x$, $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$

$$P_Y(y) = \frac{(\lambda x)^y}{y!} \cdot e^{-\lambda x}$$

con $y \in \mathbb{N}$
x indica il tempo di funzionamento di un sistema riparabile, Y conta gli eventi guasto
La probabilità di non osservare guasti in $[0, x]$ è $\mathbb{P}(Y = 0) = P_Y(0) = e^{-\lambda x}$, $x, \lambda > 0$
Allo stesso modo non osservare guasti entro un tempo x equivale al corretto funzionamento per tale tempo
$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ conta il tempo di funzionamento, $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$ e $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$f_X(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x > 0$
Viene utilizzata per misurare attese, code, decadimenti e rotture improvvise

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - t)\cdot x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

con $t < \lambda$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{d\Phi_X(t)}{dt}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Vige della proprietà di assenza di memoria, dati $x_2 > x_1$, $x_2 = x_1 + x$ ($x > 0$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > x_2 | X > x_1) &= \frac{\mathbb{P}((X > x_2) \cap (X > x_1))}{\mathbb{P}(X > x_1)} = \frac{\mathbb{P}(X > x_2)}{\mathbb{P}(X > x_1)} = \frac{1 - F_X(x_2)}{1 - F_X(x_1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x_1 + x)}}{e^{-\lambda x_1}} = \frac{e^{-\lambda x_1} \cdot e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x_1}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x)\end{aligned}$$