# Vettori aleatori

# Variabili aleatorie congiunte

**Definizione**

$(S, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, $X, Y$ variabili aleatorie
La coppia $(X, Y)$ è detta vettore aleatorio

# Funzione di ripartizione congiunta

**Definizione**

$F(x, y) = \mathbb{P}((X \leq x) \cap (Y \leq y))$
Proprietà:

- è continua da destra: $F(x, y) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x + \epsilon, y) = \lim_{\epsilon \to 0} F(x, y + \epsilon)$
- $$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0$$
  $$\lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0$$
  $$\lim_{(x,y) \to (+\infty, +\infty)} F(x, y) = 1$$

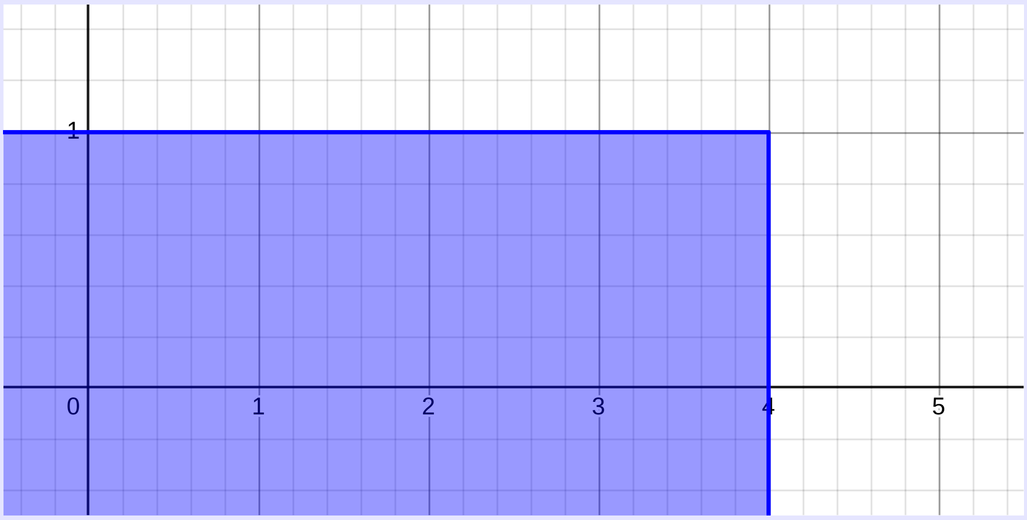
**Formule**

$\mathbb{P}((x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2)) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

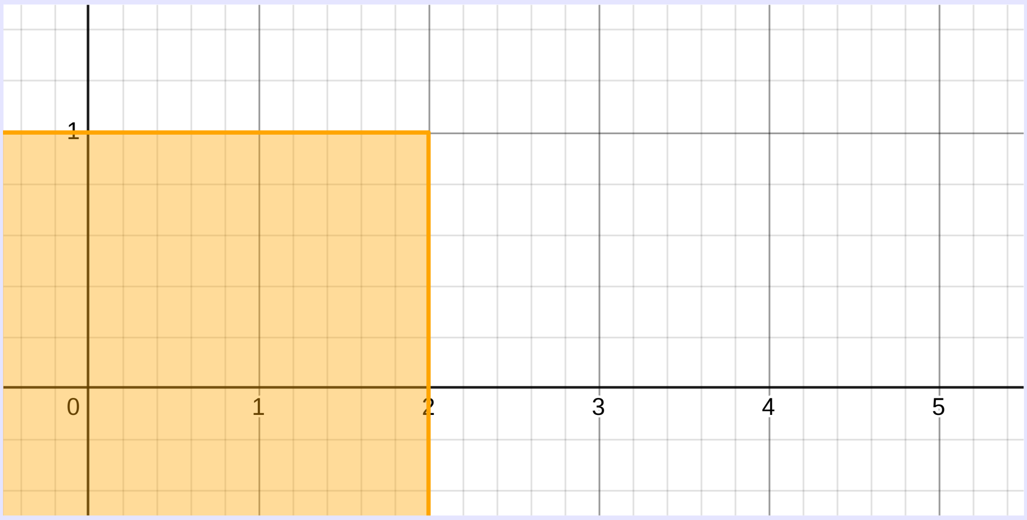
Esempio

# Funzione di ripartizione congiunta

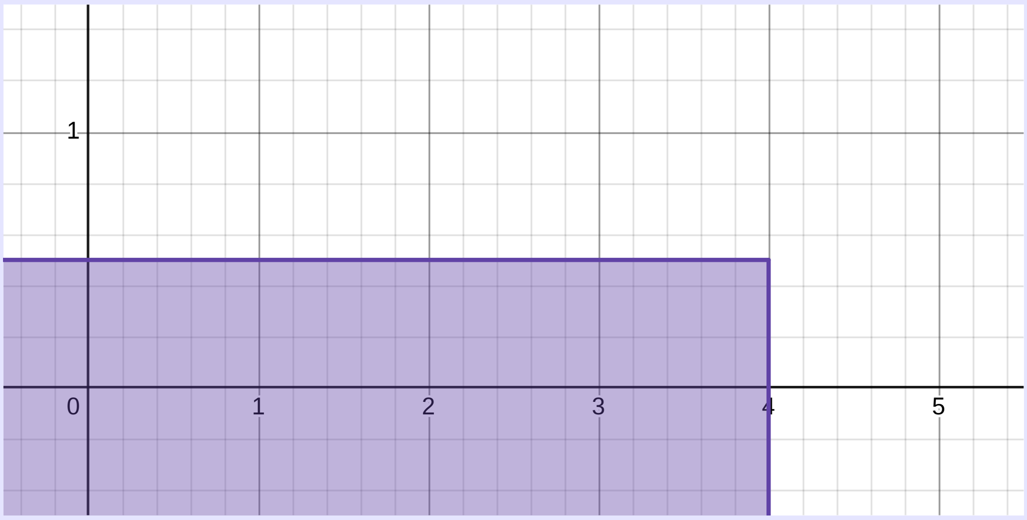
$x_1 = 2, x_2 = 4, y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = 1$
Domini di $P(x, y)$ o $f(x, y)$ sui quali vengono calcolati
$F(x_2, y_2)$:



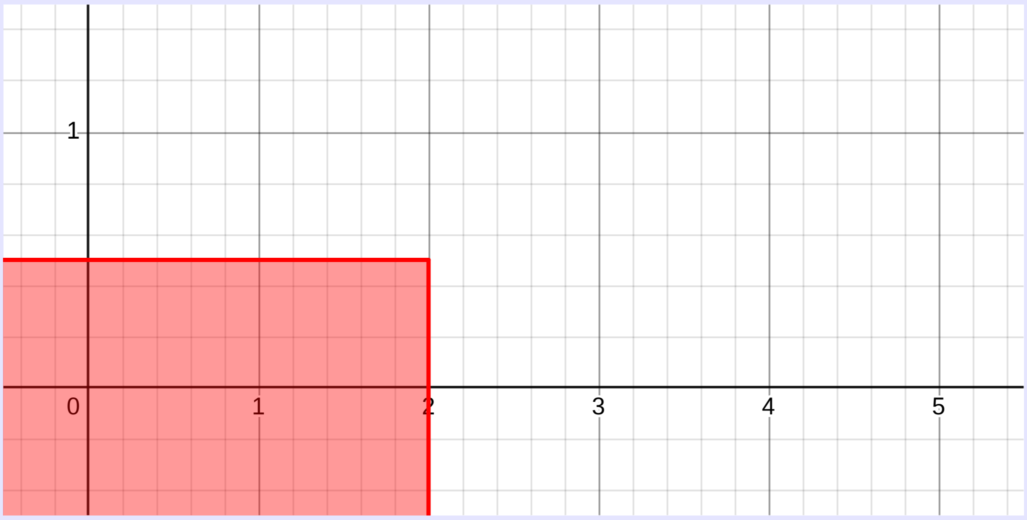

$F(x_1, y_2)$:



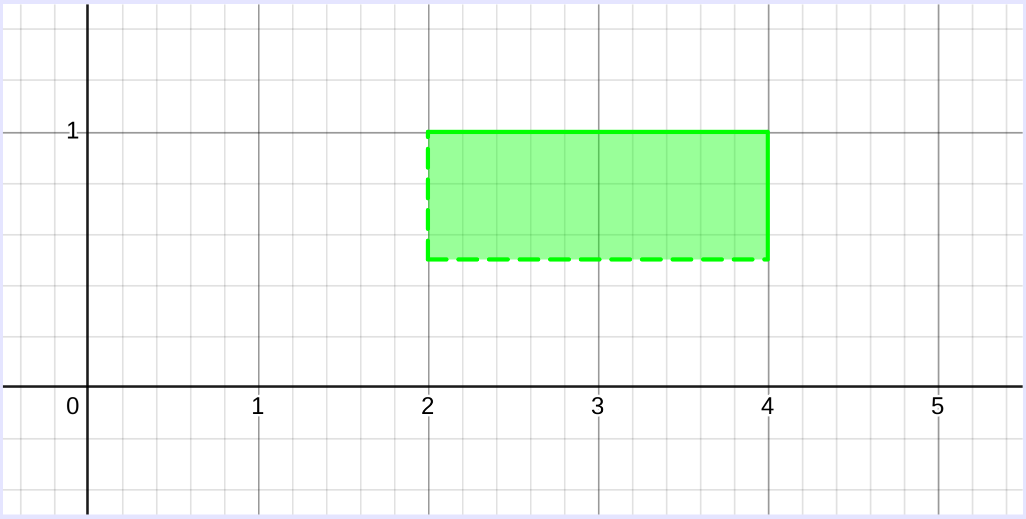

$F(x_2, y_1)$:



$F(x_1, y_1)$:




$\mathbb{P}((x_1 < X \leq x_2) \cap (y_1 < Y \leq y_2))$:




# Funzioni marginali

Formule

## Funzioni di ripartizione marginali

$F_X(x) = F(x, +\infty)$
$F_Y(y) = F(+\infty, y)$

## Funzioni di densità marginali

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

## Funzioni di massa marginali

$$P_X(x) = \sum_i P(x, y_i)$$
$$P_Y(y) = \sum_i P(x_i, y)$$

# Indipendenza

### Definizione

$X, Y$ variabili aleatorie, $D_X, D_Y$ sottoinsiemi degli insiemi di definizione di $X, Y$
$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{P}((X \in D_X) \cap (Y \in D_Y)) = \mathbb{P}(X \in D_X) \cdot \mathbb{P}(Y \in D_Y) \;\; \forall D_X, D_Y$

In particolare se $D_X = (X \leq x), D_Y = (Y \leq y)$ e $F$ è funzione di ripartizione congiunta
$\implies X \perp\!\!\!\perp Y \iff F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
Analogamente $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ e $P(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$

# Media

### Definizione

$$\mathbb{E}[X] := \begin{cases} \sum_i x_i P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \end{cases}$$

se esiste finita è detta **speranza matematica** o media o **valore atteso** di $X$

### Formule

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \implies$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] := \begin{cases} \sum_i \varphi(x_i) P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx \end{cases}$$

### Definizione

La media si può anche applicare alla potenza di una variabile aleatoria $X^n$ e $\mathbb{E}[X^n]$ è detto momento $n$-esimo centrato di $X$

### Linearità

$\mathbb{E}[a + bX] = a + b\mathbb{E}[X] \;\; \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Definizione**

$(X, Y)$ vettore aleatorio

$$\mathbb{E}[(X,Y)] = \begin{cases} \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy \end{cases}$$

se esistono finiti

**Formule**

$$\mathbb{E}[(X,Y)] = \mathbb{E}[X \cdot Y]$$

## Casi notevoli

**Formule**

$X, Y$ variabili aleatorie, $Z = X + Y \implies \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathbb{E}[(X,Y)] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

**Dimostrazione** >

(Nel caso continuo)

$$\ldots \implies f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \implies$$

$$\begin{aligned} \ldots &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)f_Y(y)\,dx\,dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)\,dy\right) = \ldots \end{aligned}$$

# Varianza

**Definizione**

La cui radice è anche chiamata **Standard Deviation**

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \begin{cases} \sum_i (x_i - \mathbb{E}[X])^2 P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx \end{cases}$$

Misura la tendenza di $X$ ad assumere valori maggiori o minori della media, quindi se $\mathrm{Var}[X]$ è vicina a 0 allora $\mathbb{P}(X \neq \mathbb{E}[X])$ è molto bassa

### Formule

$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

#### Dimostrazione

$$\begin{aligned}\dots &= \mathbb{E}[X^2 - 2 \cdot X \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[1] \cdot \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 = \dots\end{aligned}$$

### Non linearità

$\text{Var}[a + bX] = b^2\text{Var}[X]$

$\text{Var}[aX + bY] = a^2\text{Var}[X] + b^2\text{Var}[Y] + 2ab\text{Cov}(X, Y)$ misura la tendenza delle due variabili ad assumere valori maggiori o minori della media "insieme"

### Esempio

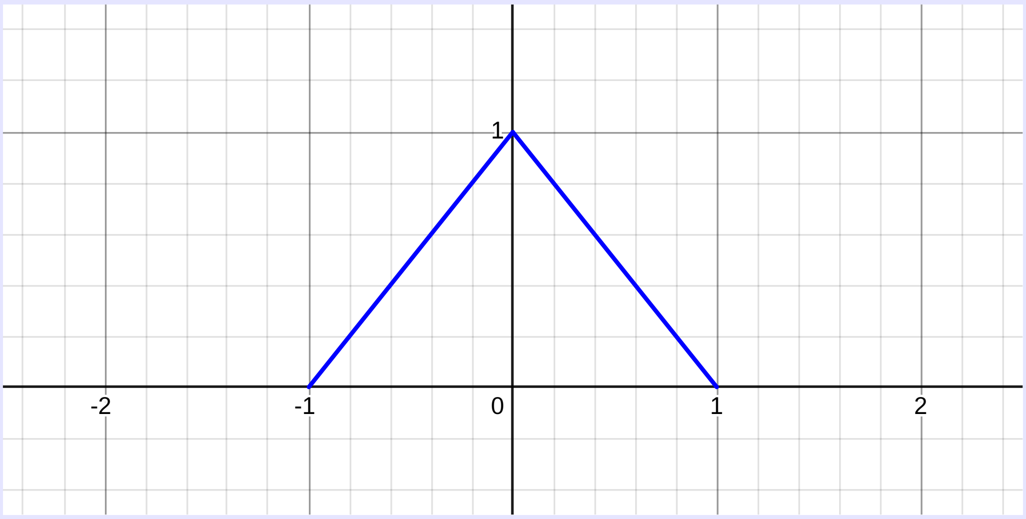
# Varianza

$$f(x) = \begin{cases} -|x| + 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X] = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x^3 + x^2\, dx + \int_{0}^{1} -x^3 + x^2\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\text{Var}[X] = \frac{1}{6} = 0.167$

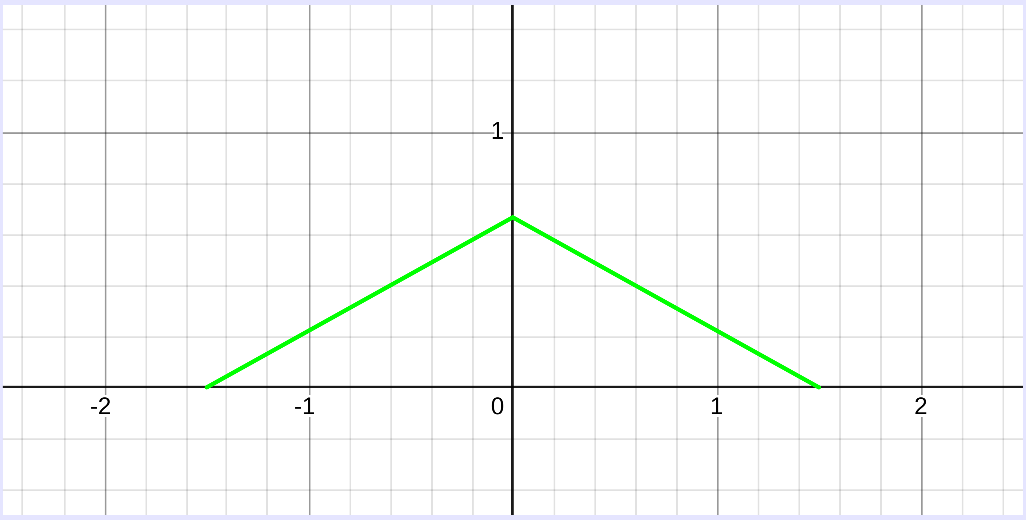


$$f(y) = \begin{cases} -\frac{4}{9}|x| + \frac{2}{3}, & -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\,dy = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{3}y^2\,dy + \int_{0}^{\frac{3}{2}} -\frac{4}{9}y^3 + \frac{2}{3}y^2\,dy$$
$$= \left[\frac{y^4}{9} + \frac{2}{9}y^3\right]_{-\frac{3}{2}}^{0} + \left[-\frac{y^4}{9} + \frac{2}{9}y^3\right]_{0}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{3}{8} = 0.375$$



# Covarianza

**Definizione**

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \\ &= \begin{cases}\sum_i \sum_j (x_i-\mathbb{E}[X])(y_j-\mathbb{E}[Y])P(x_i,y_j) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbb{E}[X])(y-\mathbb{E}[Y])f(x,y)\,dx\,dy\end{cases}\end{aligned}$$

**Formule**

Se $X \perp\!\!\!\perp Y \implies \mathrm{Cov}(X,Y)=0$

**Dimostrazione**

(Nel caso continuo)

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mathbb{E}[X])f_X(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mathbb{E}[Y])f_Y(y)\,dy\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{E}[X]f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[X]\cdot 1 = 0$$

Analogamente per $y$

$\implies \mathrm{Cov}(X,Y) = 0\cdot 0 \implies \dots$

# Correlazione

**Formule**

$X, Y$ variabili aleatorie legate da una relazione lineare $Y = aX+b \quad a,b\in\mathbb{R}$

$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 = \mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]$

**Dimostrazione**

$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X]+b \implies Y-\mathbb{E}[Y] = a(X-\mathbb{E}[X])$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])a(X-\mathbb{E}[X])] \\ &= \mathbb{E}[a(X-\mathbb{E}[X])^2] = a\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{a}\mathrm{Var}[Y]\end{aligned}$$

$\implies [\mathrm{Cov}(X,Y)]^2 = a\mathrm{Var}[X]\frac{1}{a}\mathrm{Var}[Y] = \dots$

# Coefficiente di correlazione

**Definizione**

E' un indice adimensionale che misura la dipendenza lineare tra $X$ e $Y$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

$\implies \rho = \pm 1$ se $X$ e $Y$ sono perfettamente correlate tra di loro

$X \perp\!\!\!\perp Y \implies \rho = 0$

Vale $\rho \in [-1, 1]$:

- $|\rho|$ vicino a $1$ indica una buona correlazione
- $|\rho|$ vicino a $0$ indica poca correlazione

**Approfondimento**

Normalmente $Y = aX + b + Z$ dove $Z$ rende incerta la relazione tra $X$ e $Y$
: $Z : \mathbb{E}[Z] = 0$ e $\text{Var}[Z]$ è minima
$\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b + \mathbb{E}[Z] \implies b = \mathbb{E}[Y] - a\mathbb{E}[X]$
$Z = Y - aX + b \implies \text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + a^2\text{Var}[X] - 2a\text{Cov}(X,Y)$

$$\frac{d\text{Var}[Z]}{da} = 2a\text{Var}[X] - 2\text{Cov}(X,Y)$$

Il minimo corrisponde a $2a\text{Var}[X] - 2a\text{Cov}(X,Y) = 0 \implies$

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}[X]}$$

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{[\text{Var}[X]]^2}\text{Var}[X] - 2\frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}[X]}\text{Cov}(X,Y) =$$

$$= \text{Var}[Y] + \frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}\text{Var}[Y] - 2\frac{[\text{Cov}(X,Y)]^2}{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}\text{Var}[Y]$$

$= \text{Var}[Y](1 - \rho^2 - 2\rho^2) = \text{Var}[Y](1 - \rho^2)$
Se $\rho^2 = 1$ la dipendenza lineare è perfetta

# Funzione generatrice di momenti

## Definizione

$X$ variabile aleatoria, $t \in \mathbb{R}$
La speranza matematica $\Phi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}]$ è una formula analitica per calcolare i momenti di una variabile aleatoria

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{d^n \Phi_X(t)}{dt^n}\bigg|_{t=0} = \Phi_X^{(n)}(0)$$

### Dimostrazione

Utilizzando lo sviluppo di Taylor
$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[1 + tX + \frac{t^2X^2}{2!} + \ldots\right] = 1 + t\mathbb{E}[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \ldots$

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_i e^{tx_i} P(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx \end{cases}$$

Se converge esiste la funzione generatrice dei momenti, questa fissa tutti i momenti di $X$ e la determina univocamente

Se due variabili aleatorie hanno la stessa funzione generatrice di momenti allora seguono la stessa distribuzione

## Formule

$X_1, X_2$ variabili aleatorie, $Y = X_1 + X_2$
$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}]$

### Dimostrazione

$\ldots = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{tX_1 + tX_2}] = \ldots$

Se $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \implies$
$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdot \Phi_{X_2}(t)$

### Dimostrazione

$\ldots = \mathbb{E}[e^{tX_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{tX_2}] = \ldots$