Matematiknoter til Matematik A og videregående

Matematik

Matematik

... og hvad der kommer med

Sebastian Winkelmann

14. november 2019

INDHOLD

Del I

MATEMATIK A

Del II

VIDEREGÅENDE

1

REELLE OG KOMPLEKSE TAL

1.1 POLYNOMIER OG POLYNOMIEDIVISION

Et n-te gradspolynomium er udtrykt på formen

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{1}$$

Ved polynomiedivision deler man to polynomier med hinanden.

1.1.1 *Eksempel*

For at dele $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4$ med $Q(x) = x^2 - 2x + 4$ skal vi gøre som med et normalt divisionsstykke:

$$2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 : x^2 - 2x + 4 \tag{2}$$

For at få det til at passe med det største led af divindenden ganger vi divisoren med $2x^2$. Således er divisoren nu $2x^4 - 4x^3 + 8x^2$. Nu trækker vi divisoren fra dividenden:

$$2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 \tag{3}$$

$$-(2x^4 - 4x^3 + 8x^2) = \tag{4}$$

$$8x^3 - 11x^2 + x + 4 \tag{5}$$

Næste led, $8x^3$, kan vi få til at gå op i x^2 præcis $8x$ gange. Således har vi at divisoren er $8x \cdot (x^2 - 2x + 4) = 8x^3 - 16x^2 + 32x$, som vi trækker fra divindenden:

$$8x^3 - 11x^2 + x + 4 \tag{6}$$

$$-(8x^3 - 16x^2 + 32x) = \tag{7}$$

$$5x^2 - 31x + 4 \tag{8}$$

Næste led! $5x^2$ går op i x^2 5 gange, så

$$5x^2 - 31x + 4 \tag{9}$$

$$-(5x^2 - 10x + 20) = \tag{10}$$

$$-21x - 16 \tag{11}$$

Den *ufuldstændige* kvotient $K(x)$ (uden resten $R(x)$) er hermed summen af de tal vi har brugt:

$$2x^2 + 8x + 5$$

Her er resten (11), altså der hvor vi ikke længere kan bruge det største led i divisoren. Altså er

$$2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 4 = (2x^2 + 8x + 5)(x^2 - 2x + 4) + (21x - 16) \tag{12}$$

Når graden af $P(x)$ er mindre end $Q(x)$ vil $K(x) = 0$ og $R(x) = P(x)$.
Et tal a er en rod i polynomiet $P(x)$ hvis og kun hvis $P(x)$ er delelig med $x - a$.

1.1.2 *Rødder*

1.2 REELLE TALS KOMPLETHED

En delmængde A af $\mathbb{R}$ kaldes *opad begrænset* hvis der findes et tal b som er større eller lig med alle andre elementer i A. Dette b kaldes for et **supremum** til A hvis b er mindre end alle andre supremer.

1.2.1 *Komplethedsprincippet*

Enhver ikke-tom, opad begrænset delmængde A af $\mathbb{R}$ har et supremum.
Derudover har enhver ikke-tom, nead begrænset delmængde B af $\mathbb{R}$ en infimum.

1.3 KOMPLEKSE TAL

Vi ved at den imaginære enhed er defineret ved $i^2 = -1$, samt at et komplekst tal udtrykkes på formen $z = a + ib$, hvor a og b er reelle tal, men a betegner den reelle del ($a = \text{Re}(z)$) og b betegner den imaginære del ($b = \text{Im}(z)$). Sum og differens findes let, når $z = a + ib$ og $w = c + id$

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \tag{13}$$

$$z - w = (a - c) + i(b - d) \tag{14}$$

Hvorimod multiplikation findes ved

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{15}$$

Og division er givet ved

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \tag{16}$$

Og den inverse er givet ved

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2} \tag{17}$$

Ved **konjugation** bliver der vendt fortegn for andet led, hvilket kan opfattes som en spejling af z om den reelle plan. Her er yderligere regneregler, blot for konjugation:

$$\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w} \tag{18}$$

$$\overline{z} - \overline{w} = \overline{z - w} \tag{19}$$

$$\overline{z}\ \overline{w} = \overline{zw} \tag{20}$$

$$\frac{\overline{z}}{\overline{w}} = \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} \tag{21}$$

1.3.1 *Geometrisk signifikans*

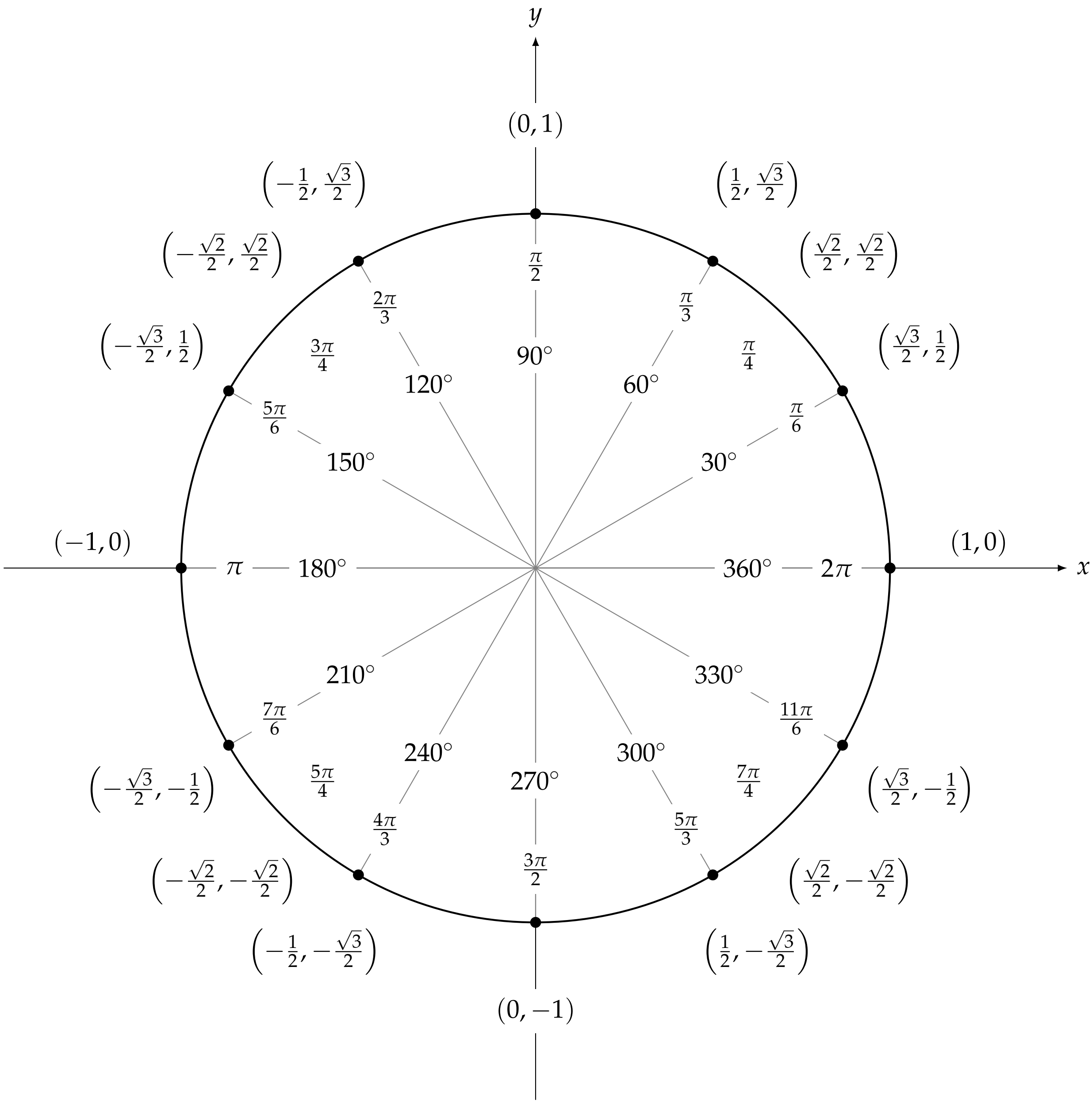
Komplekse tal kan opfattes geometrisk på koordinatsystemer. Enten i form af en reel x-akse og en imaginær y-akse, eller på polærform, hvor der vil være et argument ($\text{Arg}(z) = \theta$) og et modulus ($|z| = r$). Her er koefficienterne givet ved $a = r \cdot \cos\theta$ og $b = r \cdot \sin\theta$ – hvor $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ og $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Summen kan geometrisk observeres som en vektorsum, med parallelogrammet.

Sætning 1.3.1. *Geometrisk fortolkning af produkt af komplekse tal (3.2.3).* $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ *samt* $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right) \tag{22}$$

Dette kan man (ifølge Euler) omforme til eksponentialfunktion. Læs 1.4.

1.3.2 *Enhedscirklen*



$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$

1.3.3 *Algebraiske egenskaber*

1. **Kommutative lov** – $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ og $z_1 z_2 = z_2 z_1$
2. **Associative lov** – $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, osv.
3. **Distributive lov** – $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
4. **Nul- og enhedselement** – $z_1 + 0 = z_1$ og $z_1 \cdot 1 = z_1$
5. **Modsatte tal** – for hvert komplekst tal z, findes der et komplekst tal $-z$ hvor $z + (-z) = 0$

6. **Inverse tal** – for hvert komplekst tal $z \neq 0$, findes der et komplekst tal w hvor $zw = 1$

1.3.4 *Trekantsuligheden*

Ved komplekse tal z og w vil der gælde at

$$|x + w| \leq |z| + |w| \tag{23}$$

1.4 DEN KOMPLEKSE EKSPONENTIALFUNKTION

Et komplekst tal $z = a + ib$ kan udtrykkes

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b) \tag{24}$$

hvor e^z er et komplekst tal med modulus e^a og argumentet b. Der gælder desuden at $z = re^{i\theta}$.

1.5 n-TE RØDDER

Sætning 1.5.1. *n-te rødder af et komplekst tal. $z \in \mathbb{C}$, hvor at $w \in \mathbb{C}$ er en n-te rod af z hvis $w^n = z$. Alle disse rødder kan findes således, når $z = re^{i\theta}$. Da har vi*

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \tag{25}$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)} \tag{26}$$

$$\ldots \tag{27}$$

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right)} \tag{28}$$

Så vil der altså gælde at $z = re^{i\theta}$ præcist har n n-rødder givet ovenover.

1.6 KOMPLEKSE 2.GRADSLIGNINGER

Vi har en ligning

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad \text{hvor } a \neq 0 \tag{29}$$

Rødderne er givet ved

$$\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tag{30}$$

Rødder vil blot være hinandens konjugerede.

1.6.1 *Algebraens fundamentalsætning*

Hvis $p(z) = c_h z^n + \ldots + c_1 z + c_0, c_n \neq 0$, da findes $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ så $p(n) = c_n(z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$.

Se desuden på et polynomium $P(x)$ og et tal α. Vi kan dividere disse, og få en kvotient og rest:

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + r$$

hvor der gælder at α er rod i $P(x) \iff r = 0$.

2

KONVERGENS, FØLGER, KONTINUITET OG GRÆNSER

En følge er en uendelig sekvens af tal

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{31}$$

Man bruger notationen $\{a_n\}$ for en følge, for eksempel

$$\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots, a^n, \ldots$$
$$\{1/n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$
$$\{\cos n\} = \cos 1, \cos 2, \cos 3, \ldots, \cos n, \ldots$$
$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

Man kan desuden angive det ønskede interval (hvis det er forskellig for $[n, \infty)$):

$$\{a_n\}_{n=z}^{\infty}$$

2.1 KONVERGENS AF FØLGER

Talfølger kan enten gå mod et bestemt tal, eller fortsætte i det uendelige. I

$$\left\{\frac{n}{n-1}\right\} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n-1}, \ldots \tag{32}$$
$$\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots \tag{33}$$

er det kun (32) som rent faktisk går mod et tal (her tallet 1), mens (33) blot stiger til et større tal hver for hver gang. Her siger vi at **32 konvergerer mod grænseværdien 1**, mens **33 divergerer**.

Definition 2.1.1. Konvergens af følge Følgen $\{a_n\}$ konvergerer mod tallet a når der for ethvert reelt tal $\epsilon > 0$ findes et tal $N \in \mathbb{N}$, således at $|a_n - a| < \epsilon$ for alle $n \geq N$. I så fald

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{34}$$

En følge som konvergerer mod et tal, kaldes *konvergent*, mens en følge som ikke konvergerer kaldes *divergent*. Eller skrevet på en anden måde

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

Altså vil der være konvergens når man for afstanden $|a_n - n|$ kan vælge et tilstrækkelig stort n, således at afstanden bliver mindre.
Andre skrivemåder benyttes iøvrigt også

$$a_n$$

$$(a_n)$$

1. Hvis $\{a_n\}$ er konvergent så er grænseværdien entydig!
2. Hvis $\{a_n\}$ er konvergent så er $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ begrænset
3. ALLE periodiske funktioner divergerer

Der findes voksende og aftagende talfølger, altså hhv. $a_{n+1} > a_n$ og $a_{n+1} < a_n$, i så fald er den desuden monoton. Er den samme talfølge begrænset, da er den konvergent.
Supremumsegenskaben ved $\mathbb{R}$: Enhver ikke-tom begrænset delmængde $A \subseteq \mathbb{R}$ har en mindste øvre grænse (supremum).

2.2 GRÆNSEVÆRDIER

Når grænseværdien eksisterer skriver vi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad a_n \to a \text{ for } n \to \infty \tag{35}$$

Sætning 2.2.1. *Antag at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er konvergente med grænseværdi a, b, da gælder*

$$a_n \pm b_n \to a \pm b \; for \; n \to \infty$$

$$a_n b_n \to ab \; for \; n \to \infty$$

2.3 KONTINUERLIGE FUNKTIONER

Definition 2.3.1. Kontinuitet En funktion f er *kontinuert* i et punkt $a \in D_f$ når følgende gælder: For enhver $\epsilon > 0$ findes der en $\delta > 0$ så når $x \in D_f$ og $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Vi kan altså få afstanden mellem $f(x)$ og $f(a)$ mindre end ϵ ved at kræve at afstanden mellem x og a er mindre end δ.

Sætning 2.3.1. *Antag at f og g er kontinuerte i punktet a. Da vil funktionerne $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ også være kontinuerte i a. Hvis $g(a) \neq 0$ vil $\frac{f}{g}$ også være kontinuert i a.*

Sætning 2.3.2. *Antag at f og g er kontinuerte i punktet a og f i punktet $g(a)$. Da er den sammensatte funktion $h(x) = f[g(x)]$ også kontinuert i punktet a.*

Sætning 2.3.3. *Skæringssætningen Når en kontinuert funktion f går fra plus til negativ værdi, da vil f på et eller andet punkt være lig 0. Antag at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuert funktion hvor $f(a)$ og $f(b)$ har modsat fortegn. Da findes der et tal $c \in (a, b)$ således at $f(c) = 0$.*

2.3.1 *Grænseværdi af funktion*

For grænseværdierne $\lim_{x\to a} f(x) = F$ og $\lim_{x\to a} g(x) = G$ gælder der at

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = F + G \tag{36}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = F - G \tag{37}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = F \cdot G \tag{38}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, \quad \text{forudsat at } G \neq 0 \tag{39}$$

2.3.2 *Ekstremalsætning*

Sætning 2.3.4. *Enhver kontinuert funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ har maksimum- og minimumspunkter.*

3

INFINITESIMALREGNING

3.1 DIFFERENTIABILITET

Definition 3.1.1. Lad $c \in]a,b[$ og $D =]a,b[\setminus\{c\}$. Lad $f : D \to \mathbb{R}$. Vi siger at f har grænseværdi d når $x \to c$ hvis $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \quad x \in D, |x-c| < \delta \implies |f(x) - d| > \epsilon$. Da skriver vi at $\lim_{x\to c} f(x) = d, (x) \to d$ når $x \to c$.
Bemærk at f er kontinuert i et (indre) punkt $c(x) \to f(c)$ når $x \to c$.

Definition 3.1.2. Antag at f er defineret på et åbent interval der indeholder a, så siger vi at f er differentiabel i et punkt a hvis der gælder at

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a)$$

3.2 INTEGRALREGNING

Hvis $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert så

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{er differentiabel i } x \text{ og } \; F'(x) = f(x)$$

Hospitalsreglen

4

DIFFERENTIALLIGNINGER

4.1 INTEGRATION

4.1.1 *Delvis/partiel integration (produkt)*

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

eller

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

4.1.2 *Integration ved substitution (sammensat)*

Når der er en sammensat funktion.

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$$

eller

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Vi kan benytte det på $\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$, når $u = \sqrt{x}+1$ og $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Bemærk at $\sqrt{x} = u - 1$, da $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \implies 2\sqrt{2x}du = 2(u-1)du = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{1}{u}2(u-1)du = \int 2 - \frac{2}{u}du = 2u - 2\ln u + C = 2(\sqrt{x}+1) - 2\ln(\sqrt{x}+1+C$$

4.2 FØRSTE-ORDENS LINEÆRE DIFFERENTIALLIGNINGER

Når $y(x)$ er den ubekendte funktion, og når

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$$

hvor $f(x), g(x)$ er kendte funktioner er der en lineær differentialligning.

Sætning 4.2.1. *Hvis $F = \int f(x)dx$, dvs. $F'(x) = f(x)$ da er samtlige løsninger til det ovenover, givet ved*

$$y(x) = e^{-F(x)} \left(\int e^{F(x)} g(x)dx + C \right) \tag{40}$$

4.3 SEPARABLE DIFFERENTIALLIGNINGER

Kan en differentialligning omskrives til at være på formen

$$q(y)y' = p(x) \tag{41}$$

Da er det en separabel diff. lign. Til sidst løser man ligningen $Q(y) = P(x) + C$ for y.

4.4 ANDENORDENS, HOMOGENE LIGNINGER MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

Homo- eller inhomogen er på formen:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

hvor der ved homogen gælder at $h(x) = 0$. En Løsning på homogen med konstante koefficienter

$$ay'' + py' + qy = 0$$

vil være givet ved to rødder, r_1 og r_2:

$$r = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 4aq}}{2a} \tag{42}$$

Hvor alle løsninger er givet ved

$$y = C = e^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$