MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 6

DATO(dd-mm-åå): 04-11-19

Klasse# 8 **Skemagruppe (A eller C):** C

Studieretning: Machine Learning & Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne):

Sebastian Winkelmann

KU-brugernavn: pbf475

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

6.1 Stationære punkter, ekstrema- og saddelpunkter for f

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x(7x^2 + 5x + \cos y) \tag{6.1}$$

```
f(x, y) := x*(7*x^2 + 5*x + cos(y));
solve({diff(f(x, y), x) = 0, diff(f(x, y), y) = 0}, {x, y})
```

$$\left\{x = 0, y = \pi N + \frac{\pi}{2}\right\}, \left\{x = -\frac{1}{3}, y = 2\pi N\right\}, \left\{x = -\frac{1}{7}, y = 2\pi N\right\}, \left\{x = -\frac{5}{21} \pm \frac{\sqrt{46}}{21}, y = 2\pi N + \pi\right\}$$

Der er altså tale om en periodisk funktion, hvor $N \in \mathbb{Z}$. Der er blevet fundet fem fuldstændige løsninger. Trods der da er tale om ∞ partikulære løsninger, vil hver fuldstændige løsning for et N, have samme egenskab som for $N+1$. ABC-kriteriet udregnes ved $D = AC - B^2$ (fra Hesser-matricen). Udregnes på de fem forskellige punkter ($N = 0$).

```
A=diff(f(x, y), x, x)=42x+10; B=diff(f(x, y), x, y)=-sin(y); C=diff(f(x, y), y, y)=-x cos(y);
ABC := (x, y) -> -(42*x + 10)*x*cos(y) - sin(y)^2
```

$$ABC\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1, \text{ så } AC - B^2 < 0. \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ er et saddelpunkt.}$$

$$ABC\left(-\frac{1}{3}, 0\right) = -\frac{4}{3}, AC - B^2 < 0. \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \text{ er et saddelpunkt.}$$

$$ABC\left(-\frac{1}{7}, 0\right) = \frac{4}{7}, AC - B^2 > 0 \text{ og } A = 42 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) + 10 = 4 > 0. \left(-\frac{1}{7}, 0\right) \text{ er et minimum}$$

$$ABC\left(\frac{\sqrt{46.0}}{21} - \frac{5.0}{21}, \pi\right) = 1.151271436, AC - B^2 > 0 \text{ og } 42 \cdot \left(\frac{\sqrt{46.0}}{21} - \frac{5.0}{21}\right) + 10 > 0. \left(\frac{\sqrt{46.0}}{21} - \frac{5.0}{21}, \pi\right) \text{ er et minimum.}$$

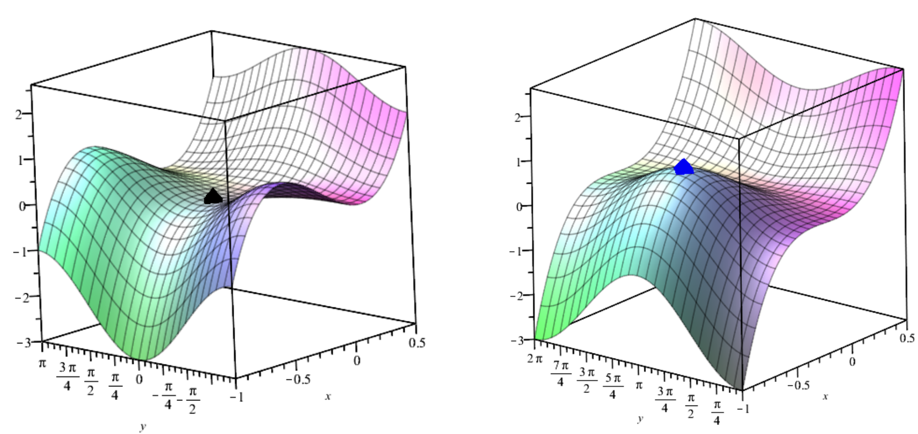
$$ABC\left(-\frac{\sqrt{46.0}}{21} - \frac{5.0}{21}, \pi\right) = 7.610633321, AC - B^2 > 0 \text{ og } 42 \cdot \left(-\frac{\sqrt{46.0}}{21} - \frac{5.0}{21}\right) + 10 < 0. \left(-\frac{\sqrt{46.0}}{21} - \frac{5.0}{21}, \pi\right) \text{ er et maksimum.}$$

Saddelpunkt indtegnes i Maple (se figur 6.1(a)):

```
p := pointplot3d([-1/3, 0, f(-1/3, 0)], symbolsize = 50, color = black)
display([plot3d(f(x, y), x = -1 .. 0.5, y = -Pi .. Pi), p])
```

Maksimumspunkt indtegnes i Maple (se figur 6.1(b)):

```
p := pointplot3d([-sqrt(46.0)/21.0 - 5.0/21, Pi, f(-sqrt(46.0)/21.0 - 5.0/21, Pi)],
symbolsize = 50, color = blue); display([plot3d(f(x, y), x = -1 .. 0.5, y = 0 .. 2*Pi), p])
```

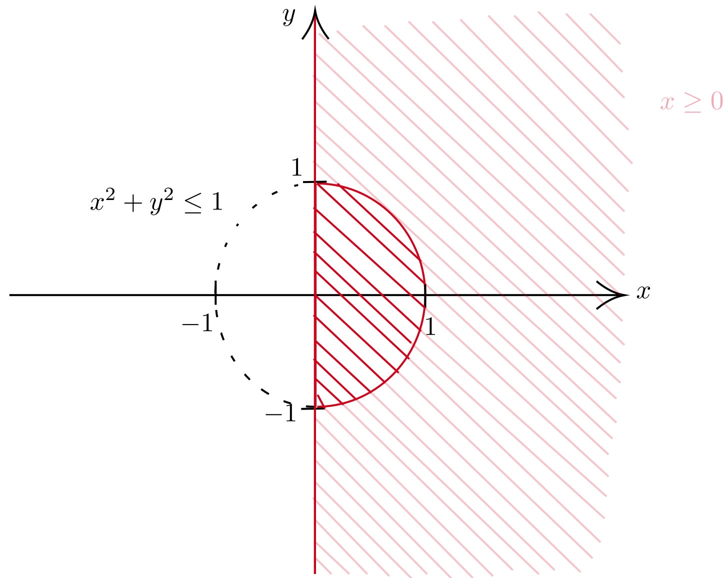


(a) Saddelpunkt i $(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{27})$. (b) Maksimumspunkt i $(-0.561, \pi, 0.899)$.

Figur 6.1: Saddelpunkt, lokalt minimumspunkt og maksimumspunkt.

6.2 Største- og mindsteværdi i D

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$$



(se ovenstående) funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x, y) = xy^2 - x^2$$

fs definitionsmængde D er lukket og begrænset ($x^2 + y^2 \leq 1$ betegner at f er indeholdt i en kugle med radius 1), samtidigt med at f er en kontinuert funktion – ergo findes der maks og minimum.
Man kan hurtigt ræsonnere sig frem til mindsteværdien. Da x er ikke-negativ, vil funktionen opnå mindsteværdi når x^2 er størst, og y^2 er mindst. Dette må nødvendigvis indtræffe når $y = 0$, så $x^2 = 1 \implies x = 1$ hvormed $f(1, 0) = -1$.

Lad os differentiere og sætte lig 0. Den partielt differentierede med hensyn til y giver at

$$\frac{\partial xy^2 - x^2}{\partial y} = 2xy = 0 \implies x \vee y = 0$$

Når $x = 0$ vil $f(0, y) = 0$, mens der for $f(x, 0) = -x^2$, og da $x \geq 0 \implies f(x, 0) \leq 0$ og $x^2 + 0^2 \leq 1 \implies x \leq 1$ (hvormed $0 \leq x \leq 1$) vil minimumspunktet være givet ved $(x, y) = (1, 0)$, med mindsteværdien $f(1, 0) = -1$.
Nu den partielt afledede for x:

$$\frac{\partial xy^2 - x^2}{\partial x} = y^2 - 2x = 0 \implies y^2 = 2x$$

Der er mange tal som opfylder denne ligning. Det er desuden ganske muligt at maksimumspunktet for f ikke er defineret ud fra dens partielt afledede, men befinder det sig på randen af definitionsmængden (altså $(x_{\max}, y_{\max}) \in \partial D$), hvorfor maksimumspunktet må ligge på *halvcirkelperiferien* af D. Bruger i stedet Lagranges multiplikatormetode til at finde de punkter hvor ∇f og ∇g er paralle, når $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ for alle $x \geq 0$.

$$\nabla f = \left\{y^2 - 2x,\, 2xy\right\}$$
$$\nabla g = \left\{\frac{\partial x^2 + y^2 - 1}{\partial x},\, \frac{\partial x^2 + y^2 - 1}{\partial x}\right\} = \{2x, 2y\}$$

Gradienternes parallelitet betyder at de blot er skaleringer af hinanden.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \implies \left\{y^2 - 2x,\, 2xy\right\} = \lambda \{2x, 2y\}$$

For gradienternes første element viser det sig at $y^2 - 2x = \lambda 2x \implies \lambda = \frac{y^2-2x}{2x}$ andet element viser det sig at $2xy = \lambda 2y \implies \lambda = x$ eller hvis $y = 0$ (hvilket bekræfter minimumspunktet, som er ved $(x, y) = (1, 0)$.). Benytter man $\lambda = x$ på $y^2 - 2x = \lambda 2x$, da får man at $y^2 = 2x^2 + 2x \implies y = \pm\sqrt{2}\sqrt{x^2 + x}$. Da vi løser for randen, må $x^2 + y^2 = 1 \implies x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Dette indsættes, når $0 = 2x + 2x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}
&0 = 2x + 2x^2 + y^2 = 2\sqrt{1 - y^2} + 2 - 2y^2 - y^2 = 2\sqrt{1 - y^2} - 3y^2 + 2 \\
&0 = 3x^2 + 2x - 1 \quad \text{, udnytter at } x = \sqrt{1 - y^2} \\
&0 = (x + 1)(3x - 1) \implies \quad (x + 1) = 0 \to x = -1 \quad \vee \quad 3x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Da $x \geq 0$ er $x = -1$ forkert, mens $x = \frac{1}{3}$ er brugbar. Altså $\frac{1}{3} = \sqrt{1 - y^2}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 - y^2} = \frac{1}{3} &\implies 1 - y^2 = \frac{1}{9} \\
y^2 = -\frac{8}{9} &\implies y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Altså er maksimumspunkterne

$$(x, y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \wedge (x, y) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Hvor størsteværdien er givet ved

$$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8 - 3}{27} = \frac{5}{27}$$

Mens minimumspunktet er givet ved $(1, 0)$ med mindsteværdien

$$f(1, 0) = 1 \cdot 0^2 - 1^2 = -1$$

6.3 Optimering af ruller

$$\ell + \frac{7d}{2} \leq 84 \text{ cm} \quad \text{og} \quad V_c = \pi\ell\frac{d^2}{4}$$

For at finde det maksimale volumen V_c vil man skulle optimere funktionen $V(\ell, d)$ under bibetingelser vha. Lagranges metode. Da V er en tiltagende, kontinuert funktion over $(\ell, d) \in \mathbb{R}^2$ vil den i den begrænsede og åbne definitionsmængde D opnå maksimum og minimum.

Funktionen $V(\ell, d) : D \to \mathbb{R}$, hvor $D = \left\{(\ell, d) \in \mathbb{R}^2 | \ell + \frac{7d}{2} \leq 84\right\}$ er givet ved

$$V(\ell, d) = \pi\ell\frac{d^2}{4}$$

Da funktionen er stigende (for $\ell \geq 0$ hvilket det må være, siden dimensionerne er ikke-negative) vil funktionsværdien kun være begrænset af bibetingelsen $\ell + \frac{7d}{2} \leq 84$, således at maksimumspunktet vil ligge på randen.

6.3.a Lagranges multiplikatormetode

Lagranges multiplikator benyttes, og uligheden $\ell + \frac{7d}{2} \leq 84$ skrives om til en ligning (da punktet pefinder sig på randen), således at

$$g(\ell, d) = \ell + \frac{7d}{2} - 84$$

Da gradienten for f og g skal være parallel, gælder der at $\nabla f(\ell, d) = \nabla h(\ell, d)$. Ligningen opstilles:

$$\nabla f(\ell, d) = \lambda \nabla h(\ell, d)$$

$$\left\{ \frac{\partial \left(\pi \ell \frac{d^2}{4}\right)}{\partial \ell}, \frac{\partial \left(\pi \ell \frac{d^2}{4}\right)}{\partial d} \right\} = \lambda \left\{ \frac{\partial \left(\ell + \frac{7d}{2} - 84\right)}{\partial \ell}, \frac{\partial \left(\ell + \frac{7d}{2} - 84\right)}{\partial d} \right\}$$

$$\left\{ \pi \frac{d^2}{4}, \pi \ell \frac{d}{2} \right\} = \left\{ \lambda, \lambda \frac{7}{2} \right\}$$

Alene for første elementerne i ovenstående fås at $\lambda = \pi \frac{d^2}{4}$. Indsættes dette for anden-elementerne fås der at

$$\pi \ell \frac{d}{2} = \frac{7}{8} \pi d^2 \implies \ell = \frac{14d}{8} = \frac{7}{4} d$$

Benytter vi igen at $\ell + \frac{7d}{2} = 84 \implies \frac{7}{4} d + \frac{7d}{2} = \frac{21d}{4} = 84$, kan vi finde d:

$$\frac{21d}{4} = 84 \implies d = 84 \cdot \frac{4}{21} = \frac{336}{21} = 16$$

hvilket betyder at $\ell = \frac{7}{4} \cdot 16 = 7 \cdot 4 = 28$. Altså er maksimumspunktet for V givet ved

$$(\ell, d) = (28, 16)$$

Dette må nødvendigvis ligge inde for definitionsmængden, men jeg dobbelttjekker: $28 + \frac{7 \cdot 16}{2} = 28 + 56 = 84$ (ligger altså på randen). Maksimumsværdien er givet ved

$$V(28, 16) = \pi \cdot 28 \cdot \frac{16^2}{4} = \pi \cdot 28 \cdot 16 \cdot 4 = \pi \cdot 1792 = 5629.73403523$$

6.3.b Eliminering af variable

Fra bibetingelsen kan der isoleres for en variabel, hvilket gør elimination muligt. Da der antages at maskimumspunktet er et randpunkt isoleres der for ℓ:

$$\ell + \frac{7d}{2} = 84 \implies \ell = 84 - \frac{7d}{2}$$

Indsættes dette i $V(\ell, d)$ får man en funktion af én variabel.

$$V(d) = \left(84 - \frac{7d}{2}\right) \pi \frac{d^2}{4} = 21 \pi d^2 - \frac{7 \pi d^3}{8}$$

For at finde denne funktions stationære punkter differentieres V og der sættes lig med nul:

$$V'(d) = \frac{\partial}{\partial d} \left(21 \pi d^2 - \frac{7 \pi d^3}{8}\right) = 42 \pi d - \frac{21 \pi d^2}{8} = 0$$

$$d = \frac{-42\pi \pm \sqrt{(42\pi)^2 - 4 \cdot \frac{-21\pi}{8} \cdot 0}}{2 \cdot \frac{-21\pi}{8}} = \frac{-42\pi \pm 42\pi}{-\frac{21\pi}{4}} = 0 \vee 16$$

Da V er stigende, må $d = 0$ konstituere minimumspunktet, mens $d = 16$ må være maksimum. ℓ findes: $\ell = 84 - \frac{7 \cdot 16}{2} = 84 - 56 = 28$. Det er samme maksimumspunkt som i (a), hvilket betyder at maksimumspunktet er givet ved

$$V(28, 16) = 5629.734$$