MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 4

DATO(dd-mm-åå): 21-10-19

Klasse# 8 **Skemagruppe (A eller C):** C

Studieretning: Machine Learning & Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne):

Sebastian Winkelmann

KU-brugernavn: pbf475

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

4.1 Partielt afledte

Jeg tager først den partielle afledede ved $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ og derefter $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

4.1.a $f(x,y) = y^2(1+4xy)$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} y^2(1+4xy)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2(4y)\right) \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} 4y^3 = 12y^2 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} y^2(1+4xy)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y(1+4xy) + y^2(4x)\right) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} 2y + 8y^2x + 4y^2x = 12y^2 \tag{4.4}$$

4.1.b $g(x,y) = xy + 2\cos(4x+y)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(xy + 2\cos(4x+y)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2\sin(4x+y)\right) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - 2\sin(4x+y)\right) = 1 - 8\cos(4x+y) \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(xy + 2\cos(4x+y)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - 8\sin(4x+y)\right) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - 8\sin(4x+y)\right) = 1 - 8\cos(4x+y) \tag{4.8}$$

4.1.c $h(x,y) = 2x\ln(x^2-4y)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(2x\ln(x^2-4y)\right) = -\frac{8}{x^2-4y} + \frac{16x^2}{(x^2-4y)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\ln(x^2-4y)\right)\right) = -\frac{8}{x^2-4y} + \frac{16x^2}{(x^2-4y)^2}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(2x\ln(x^2-4y)\right) = -\frac{8}{x^2-4y} + \frac{16x^2}{(x^2-4y)^2}$$

Figur 4.1: Udregning i Maple

Når man tager den partielle afledede $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2)$ differentieres der først med hensyn til x_2 (og man behandler x_1 som en konstant), for derefter at differentiere den afledede med hensyn til x_1 (hvor x_2 er en konstant).

Der tegner sig desuden det mønster at rækkefølgen af partiel differentiation er redundant (kommutativt egenskab). Der gælder altså at

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

4.2 Kontinuitet

$$h(x,y) = \frac{\cos x - \cos y}{2(x^2+y^2)}, \quad h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \tag{4.9}$$

Bestem $H(x) := \lim_{y\to 0} h(x,y), \quad x \in \mathbb{R}$

Lad os bestemme grænseværdien H:

$$H(x) = \lim_{y\to 0} h(x,y) = \frac{\cos x - \lim_{y\to 0}\cos y}{2(x^2 + \lim_{y\to 0} y^2)} = \frac{\cos x - 1}{2x^2}, \text{ for } x \neq 0 \tag{4.10}$$

Vi observerer at 4.10 er en sammensat funktion: $f(x) = \cos x - 1$ og $g(x) = 2x^2$. Da både f og g er kontinuerte funktioner må også H være kontinuert for alle $x \neq 0$. Lad os se på den situation hvor $x = 0$ (vi tager grænseværdien og benytter L'Hôpitals regel på 0/0-udtryk to gange).

$$H(0) = \lim_{y\to 0} h(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-\cos y}{2y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-(\cos y)'}{2(y^2)'} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{4y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{4} = \frac{1}{4} \tag{4.11}$$

Således er H defineret, selv i $x = 0$. Vi skal nu finde ud af hvad grænseværdien af $H(x)$ er:

$$\lim_{x\to 0} H(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(2x^2)'} = lim_{x\to 0} frac(-\sin x)'(4x)' = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{4} = -\frac{1}{4} \tag{4.12}$$

Sammenholder vi resultaterne for 4.11 og 4.12, da der vi at $\lim_{x\to 0} H(x) \neq H(0)$, hvorfor $H(x)$ ikke er kontinuert. Det samme må nødvendigvis gælde for $h(x,y)$, hvorfor en $c = h(0,0)$ ikke findes. Ej heller er $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ defineret da grænseværdien afhænger om man tager den af x- eller y-aksen ($\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} h \neq \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} h$).

4.3 Toningsopgave – Taylor og $\arcsin x$

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.3.a $T_3 f$ omkring $a = 0$ for $f = \arcsin$

Taylorpolynomiet for arcsin vil have følgende forskrift

$$T_3 f = \arcsin 0 + (\arcsin)'(0) \cdot x + (\arcsin)''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + (\arcsin)^{(3)}(0) \cdot \frac{x^3}{6} \tag{4.13}$$

Vi finder differentialkvotienterne fra 4.13. Bruger potensregel og produktregel.

$$\begin{aligned}
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
(\arcsin x)'' &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}^3} \\
(\arcsin x)''' &= \left(x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right)' = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} + x\frac{2x\cdot 3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3} + \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}^5}
\end{aligned}$$

Da

$$T_3 f = 0 + \frac{1}{\sqrt{1}}x + \frac{0}{\sqrt{1}^3}\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{1}^3} + \frac{3(0)^2}{\sqrt{1}^5}\right)\frac{x^3}{6} = x + \frac{x^3}{6}$$

4.3.b Tilnærmelse af π

Vi indsætter $x = \frac{1}{2}$ i $T_3 f$:

$$b = T_3 f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8 \cdot 6} = \frac{24}{48} + \frac{1}{48} = \frac{25}{48} \tag{4.14}$$

Da arcsin er sins inverse, da vil dette på enhedscirklen svare til den vinkel hvor højden/y-værdien for punktet er $\frac{1}{2}$ (ved $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$). Lad os bestemme $6b = \frac{150}{48} = 3.125$. Differensen mellem π og $6b$ er $\pi - 3.125 = 0.0166$. Min egen approksimation af $\pi \approx 3.14159$, hvorved afvigelsen vil være $3.14159 - 3.125 = 0.01659$.

4.3.c Maksimal afvigelse

$$|R_n \arcsin x| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}, \text{ for } M \geq |(\arcsin t)^{(4)}| \tag{4.15}$$

Da $\arcsin x$ og $(\arcsin x)^{(4)} = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$ er kontinuerte for $x \in [0, \frac{1}{2}]$ kan korollaret benyttes. Lad os finde dette M. Da vi kigger på intervallet hvor $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ vil den 4. afledede ved $t = 0$ være 0, mens den antager maksværdien ved $t = \frac{1}{2}$: $\frac{6 \cdot \frac{1}{8} + 9 \cdot \frac{1}{2}}{(\frac{3}{4})^{7/2}} = 14.3696$. Benytter man det fundne $M = 14.3696$ i 4.15, da får vi at

$$|R_3 \arcsin x| \leq \frac{14.3696}{(3+1)!}\left|\frac{1}{2} - 1\right|^{3+1} = 0.0374208\overline{3} \tag{4.16}$$

Da størrelsen af restledet/afvigelsen for approksimationen b skalerer med $6b$ skal man blot gange resultatet med 6:

$$6 \cdot 0.03742 \approx 0.2245$$

$$f''''(x) = \frac{15\,x^3}{\left(-x^2+1\right)^{7/2}} + \frac{9\,x}{\left(-x^2+1\right)^{5/2}}$$

$$M := evalf\left(maximize\left(f''''(x), x = 0\,..\,\frac{1}{2}\right)\right) = 14.36960670$$

$$R_3 := \frac{M}{(3+1)!} \cdot \left|\frac{1}{2} - 0\right|^4 = 0.03742085078$$

$$Err_{6b} = R_3 \cdot 6 = Err_{6b} = 0.2245251047$$

Figur 4.2: Udregninger i Maple

4.3.d Gentagelse af (a)–(c), med $n = 100$

(a) Bestemmelse af taylorpolynomium

$f(x) := \arcsin(x)$:; $T_{100}(x) := taylor(f(x), x = 0, 101)$:

$convert\left(evalf\left(T_{100}(x)\right), rational, 5\right)$

$$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{12}{395}x^9 + \frac{10}{447}x^{11} + \frac{8}{461}x^{13} + \frac{23}{1647}x^{15} + \frac{7}{606}x^{17} + \frac{9}{922}x^{19} + \frac{11}{1311}x^{21} + \frac{4}{547}x^{23} + \frac{9}{1396}x^{25}$$
$$+ \frac{5}{871}x^{27} + \frac{19}{3687}x^{29} + \frac{5}{1073}x^{31} + \frac{5}{1179}x^{33} + \frac{3}{773}x^{35} + \frac{5}{1401}x^{37} + \frac{10}{3033}x^{39} + \frac{1}{327}x^{41} + \frac{3}{1054}x^{43} + \frac{4}{1505}x^{45}$$
$$+ \frac{3}{1205}x^{47} + \frac{3}{1283}x^{49} + \frac{4}{1817}x^{51} + \frac{3}{1444}x^{53} + \frac{9}{4580}x^{55} + \frac{1}{537}x^{57} + \frac{5}{2828}x^{59} + \frac{3}{1784}x^{61} + \frac{4}{2497}x^{63} + \frac{3}{1963}x^{65}$$
$$+ \frac{4}{2739}x^{67} + \frac{4}{2863}x^{69} + \frac{5}{3736}x^{71} + \frac{1}{779}x^{73} + \frac{3}{2434}x^{75} + \frac{11}{9285}x^{77} + \frac{3}{2632}x^{79} + \frac{6}{5465}x^{81} + \frac{7}{6614}x^{83} + \frac{3}{2938}x^{85}$$
$$+ \frac{8}{8113}x^{87} + \frac{3}{3148}x^{89} + \frac{1}{1085}x^{91} + \frac{1}{1121}x^{93} + \frac{2}{2315}x^{95} + \frac{3}{3583}x^{97} + \frac{2}{2463}x^{99} + O\left(x^{101}\right)$$

Taylorpolynomiet $T_{100} \arcsin x$ er altså blevet bestemt.

$$b := subs\left(x = \frac{1}{2}, T_{100}f(x)\right) :$$
$$\pi - evalf(\,b \cdot 6) = 2.462839\ 10^{-33}$$

Den absolutte afvigelse[1] mellem min approksimation og π er altså $1.615 \cdot 10^{-16}$.

(c) Maksimal afvigelse

$$M := subs\left(x = \frac{1}{2}, \frac{d^{101}}{dx^{101}}(f(x))\right) :, \quad \left|R_{100}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right| \le \frac{M}{101!} \cdot \left|\frac{1}{2} - 0\right|^{101}, Err_b := evalf\left(\frac{M}{101!} \cdot \left|\frac{1}{2} - 0\right|^{101}\right):$$

Hvorfor den maksimale fejl for approksimationen vil være $6 \cdot Err_b = 0.001672668854$

Den maksimale afvigelse mellem π og $6b$ er 0.001673. Det er altså en betydelig ændring i præcision, men på bekostningen af at udtrykkets længden (og kompleksitet) forøges tilsvarende.

[1] Modsat før finder jeg ikke afvigelsen mellem T_{100} og min egen approksimation $\pi \approx 3.14159$ da præcisionen af $T_{100}(\frac{1}{2})$ er så god, at det giver bedre mening at sammenligne den med Maples egen approksimation af π.