MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 3

DATO(dd-mm-åå): 07-10-19

Klasse# 8 **Skemagruppe (A eller C):** C

Studieretning: Machine Learning & Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne):

Sebastian Winkelmann

KU-brugernavn: pbf475

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

3.1

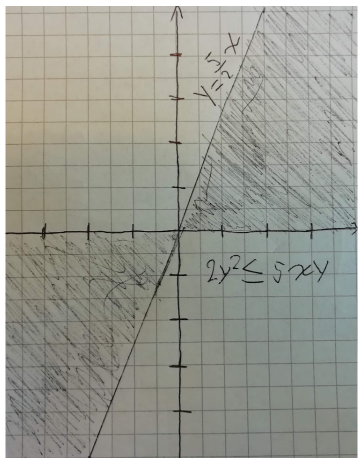
Betragt funktionen $f(x,y) = \sqrt{5xy - 2y^2}$.

3.1.a Bestem definitionsmængden D_f. Skitser D_f i xy-planen

Da man ikke kan tage kvadratroden af et negativt tal gælder der at $2y^2 \leq 5xy$. Således kan vi isolere for y, så $y \leq \frac{5}{2}x$. Vi har altså definitionsmængden for f i den reelle mængde givet ved

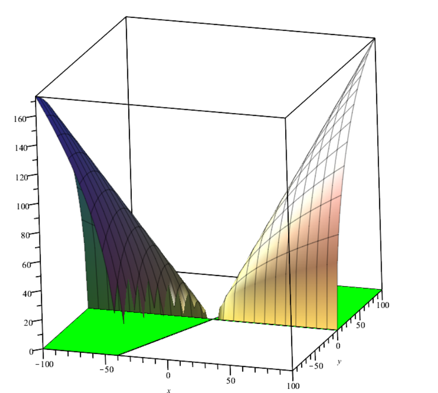
$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq \frac{5}{2}x\} \tag{3.1}$$

Dette kan meget nemt skitseres ved at at skraveres det område som er mellem ligningen $f(x) = \frac{5}{2}x$ og x-aksen:



3.1.b Illustration af $f(x,y)$ og uligheden

```
p1 := plot3d([√(5·x·y−2·y^2)], x = −100..100, y = −100..100) :
f1 := plottools[transform]((x, y) → [x, y, 0])( inequal(5·x·y ≥ 2·y^2, x = −100..100, y = −100..100, color = "green")) :
plots[display]([p1, f1], axes = box);
```



3.1.c Grænseværdien

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(rh,h)}{h}, \quad r \geq \frac{2}{5}$$

Lad os indsætte værdierne:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2(5r-2)}}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{h\sqrt{5r-2}}{h}\\ &= \sqrt{5r-2}\end{aligned}$$

Således er grænseværdien blev fundet ved faktorisering af h, til at være $\sqrt{5r-2}$. Bemærk at h er positiv som $h \to 0$, derved givet at grænseværdien også er.

3.2 $f(x) = 2x^4 + 5x^2 - 2$

3.2.a Alle taylorpolynomier omkring $x = 1$

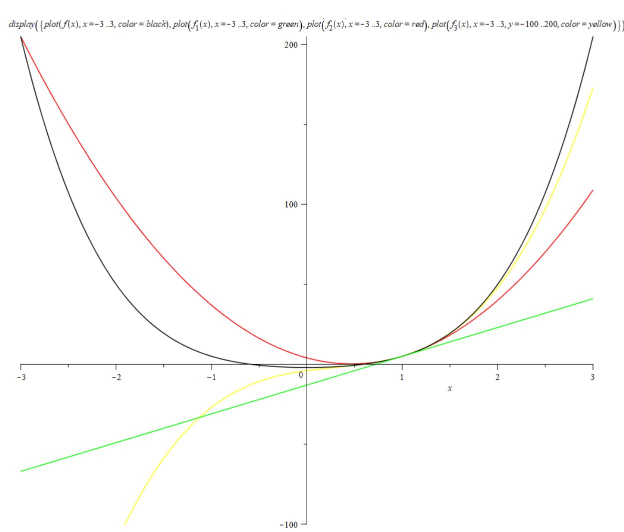
Følger det generelle udtryk for Taylorpolynomium:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{3.2}$$

hvor udviklingspunktet er a.

$$\begin{aligned}
T_0 f &= f(1) = 2 + 5 - 2 = 5\\
T_1 f &= 5 + (2\cdot 4 + 5\cdot 2 - 0)\cdot(x-1) = 5 + 18(x-1)\\
T_2 f &= 5 + 18(x-1) + \frac{2\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 1}{2}\cdot(x-1)^2 = 5 + 18(x-1) + \frac{34}{2}(x-1)^2\\
T_3 f &= 5 + 18(x-1) + 17(x-1)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2 + 0}{3!}(x-1)^3 = 5 + 18(x-1) + 17(x-1)^2 + \frac{48}{3!}(x-1)^3\\
T_4 f &= T_3 f + \frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}(x-1)^4 = 5 + 18(x-1) + 17(x-1)^2 + 8(x-1)^3 + \frac{48}{4!}(x-1)^4\\
T_{5\ldots} f &= 5 + 18(x-1) + 17(x-1)^2 + 8(x-1)^3 + 2(x-1)^4 + 0 + \cdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

3.2.b Plot



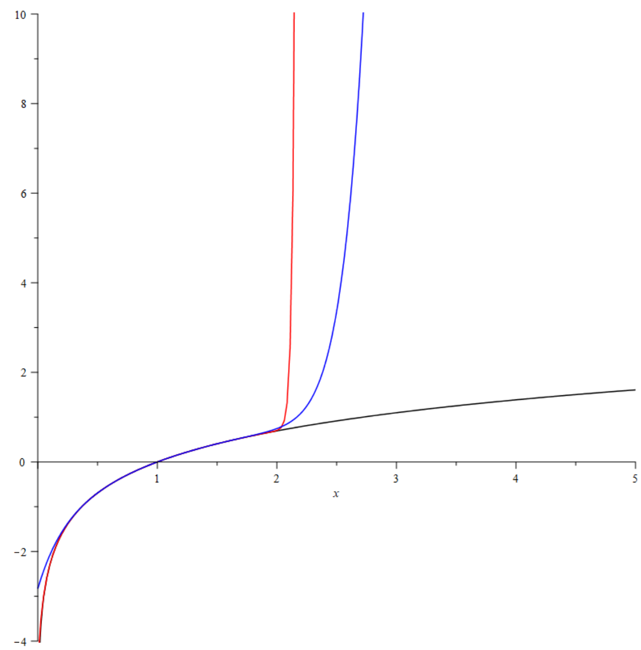
Figur 3.1: Plot af $f(x)$, $T_1 f(x)$, $T_2 f(x)$ og $T_3 f(x)$

3.3 Naturlig logaritme

Betragt den naturlige logaritmefunktion $f(x) = \ln x$*, og lad* $T_n \ln$ *være taylorpolynomiet af* n*'te grad omkring* $x = 1$*. Benyt formlen for den* n*-te afledte af* $\ln$*,* $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$*.*

3.3.a Illustrer graferne for $\ln, T_9 \ln$ og $T_{49} \ln$ i et fælles koordinatsystem

$display(\{plot(f(x), x = 0..5, color = black), plot(f_9(x), x = 0..5, y = -4..10, color = blue), plot(f_{49}(x), x = 0..5, y = -4..10, color = red)\})$



Figur 3.2: Plot af $f(x)$, $T_9 f(x)$ og $T_{49} f(x)$

3.3.b Argumentér ud fra Taylors formel med restled for at

$$|R_n \ln x| = |\ln x - T_n \ln x| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$$

for $x > 1$. Udregn for $x = 2$, $x = 1.9$ og $x = 2.1$, værdien af $T_{49} \ln x$ og sammenlign med $\ln x$. Kontrollér uligheden ovenfor. Forklar forskellen mellem tilfældene $x < 2$ og $x > 2$.

11.2.2 Korollar. Når f og dens $n+1$-afledede er kontinuerlig i intervallet $[a, x]$, lad M være et tal så $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ for alle t mellem a og x, da er

$$|R_n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{3.3}$$

Da $(\ln x)^{(n+1)}$ og $\ln x$ er defineret for alle $x > 0$ (og $a = 1$), da kan korollaret benyttes. Vi finder værdien for M:

$$M \geq |f^{(n+1)}(t)| = |(-1)^{n+1-1}(n+1-1)!t^{-(n+1)}$$
$$M \geq |(-1)^n n! t^{-(n+1)}| = |t^{-(1+n)} n!|$$

Da det i forvejen er ikke-negativt, kan vi sige $M \geq t^{1-n} n!$ og når $x > 1$ kan dette simplificeres til $M \geq n!$ (da $n \to \infty \implies t^{n-1} \to 0$ når $t > 1$ og at vi kan tage højde for den højeste værdi ved at sige $t = 1 \implies t^{1-n} = 1$, så udtrykket er $n!$). Vi kan sætte dette M ind og simplificere:

$$|R_n f(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = \frac{1}{n+1}|x-1|^{n+1}$$

da $x > 1$ vil $x - 1 > 0$:

$$|R_n \ln x| = |\ln x - T_n \ln x| \leq \frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1} \tag{3.4}$$

Når $x < 2$ følger $T_{49} f$ grafen for $f(x)$ relativt præcist, hvorimod den ved $x > 2$ begynder at afvige eksponentielt. Efter $x = 2$ bliver afvigelsen enorm, og $T_{49} f$ er herefter voksende i $[2, \infty)$. Da hvert led i taylorpolynomiet har $(x-1)^k$, vil hældningen/afvigelsen stige så snart $x - 1 > 1 \implies x > 2$. Da der ved et 49-grads polynomium vil der være værdier opløftet i 49, hvilket vil give meget stor hældning, modsat $\ln x$ som flader ud.

$T_2 := evalf(T_{49}f(2)) = 0.7032471606$	$T_{1.9} := evalf(T_{49}f(1.9)) = 0.6419086500$	$T_{2.1} := evalf(T_{49}f(2.1)) = 1.871666759$
$f_2 := evalf(\ln(2)) = 0.6931471806$	$f_{1.9} := evalf(\ln(1.9)) = 0.6418538862$	$f_{2.1} := evalf(\ln(2.1)) = 0.7419373447$
$\lvert f_2 - T_2 \rvert = 0.0100999800$	$\lvert f_{1.9} - T_{1.9} \rvert = 0.0000547638$	$\lvert f_{2.1} - T_{2.1} \rvert = 1.129729414$
$R_{49}f(2.) = 0.02000000000$	$R_{49}f(1.9) = 0.0001030755041$	$R_{49}f(2.1) = 2.347817058$

Figur 3.3: Udregning af $T_{49} f(x)$, $f(x)$, $|\ln x - T_n \ln x|$ og $\frac{1}{n+1}(x-1)^{n+1}$

På ovenstående figur kan det tydeligt ses at $T_{49} f$ og f har relativt ens funktionsværdier for $x < 2$, men at afvigelsen hurtigt bliver større eftersom x stiger. Det kan desuden konkluderes at den øvre grænse for restleddet holder for alle tre værdier.