MatIntroMatNat
OPGAVEFORSIDE

AFLEVERINGSOPGAVE# 5

DATO(dd-mm-åå): 28-10-19

Klasse# 8 **Skemagruppe (A eller C):** C

Studieretning: Machine Learning & Datavidenskab

Navn (inkl. mellemnavne):

Sebastian Winkelmann

KU-brugernavn: pbf475

Hvis mapledelen er udfærdiget i samarbejde med andre (max. 2 andre) angives deres navne og KU-brugernavn her:

5.1 Største- og mindsteværdi for $f(x, y)$

$$f(x,y) = 3x + 2y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, x-2 \leq y \leq x\} \tag{5.1}$$

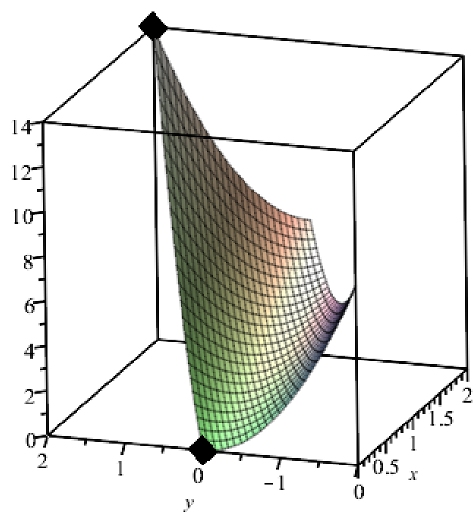
5.1.a Argumentation

Vi kan se på udtrykket at funktionen er stigende i intervallet $x > 0$. Den mindste y-værdi er når $x = 0$, da $0-2 = -2 \leq y \leq 0$, mens den største værdi for x og y er 2. Således er mængden begrænset, men også lukket/afsluttet da den indeholder alle sine randpunkterne. Af (5.1) fremgår der desuden at $f(x, y)$ er en funktion bestående af $g(x) = 3x$ og $h(y) = 2y^2$, som begge er kontinuerte funktioner. Trods disse kontinuerte funktionerne g, h ikke har maksima (dog har h et minima), opnår de i domænet både maksimums- og minimumsværdi. Samme egenskab besidder $f(x, y)$. **Da $A \subset \mathbb{R}^2$ er en lukket, begrænet mængde og $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuert, opnår f – ifølge ekstremalværdisætningen – både maksimum og minimum.**

5.1.b Plot

I maple skriver jeg følgende:

```
f := (x, y) -> 3*x + 2*y^2; s := plot3d(f(x, y), x = 0 .. 2, y = x-2 .. x);
p := pointplot3d([(0, 0, 0), (2, 2, 14)], symbolsize = 50);
display([s, p]);
```



Figur 5.1: Plot i Maple

Maksimumspunktet er ved $f(x, y) = 14$, altså i punktet $(2, 2, 14)$. Minimumspunktet er ved $f(x, y) = 0$, som er ved $(0, 0, 0)$, hvor begge er randpunkter i A.

5.2 TKO 2.17 – Tangentplan

Når f er C^1 og $\mathbf{a}$ et indre punkt i D_f, er tangenthyperplanen givet ved den affine funktion

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \tag{5.2}$$

5.2.c $h(x, y) = (x + y)e^{x-y^2}$ i $\mathbf{c} = (4, -2)$

$c_x = 4, c_y = -2$ er i $D_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ og $x + y$ samt e^{x-y^2} er C^1. Jeg finder først gradienten for h. Bruger kædereglen for sammensatte funktioner og produktreglen. $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = (1 + 0)e^{x-y^2} + (x + y)e^{x-y^2}(1 - 0)$.

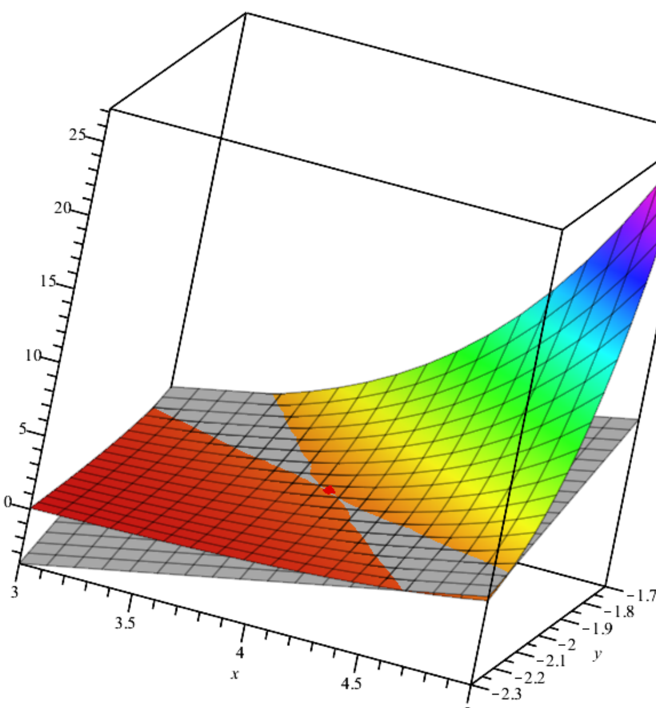
$$\nabla h(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h(x, y),\ \frac{\partial}{\partial y}h(x, y)\right) = \left((1 + x + y) \cdot e^{x-y^2},\ e^{x-y^2} + (x + y) \cdot (-2)ye^{x-y^2}\right)$$
$$\nabla h(4, -2) = \left((1 + 4 - 2) \cdot e^{4-4},\ e^{4-4} + (4 - 2) \cdot (-2)(-2)e^{4-4}\right) = (3 \cdot 1, 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1) = (3, 9)$$

Den fundne gradient ved $\mathbf{c}$ kan nu benyttes på (5.2):

$$h_t(x, y) = \left((4 - 2)e^{4-4}\right) + (3, 9) \cdot (x - 4, y + 2) = 2 + 3x - 12 + 9y + 18 = 8 + 3x + 9y \tag{5.3}$$

Altså er tangentplanen for h givet ved $h_t(x, y) = 3x + 9y + 8$. Tegnes i Maple ved

```
c := pointplot3d([4, -2, h(4, -2)], symbolsize = 15, color = red)
f := plot3d([h(x, y), 3*x + 9*y + 8], x = 3 .. 5, y = -2.3 .. -1.7, numpoints = 300,
color = [h(x, y), grey]); display([c, f])
```



Figur 5.2: Plot af $h(x, y)$ `(farvet)`, $h_t(x, y)$ `(grå)` og $\mathbf{c} = (4, -2)$ `(rød)`

5.2.d $\quad k(x,y)=\frac{x\ln y}{\sqrt{1+x^2}}$ i $\mathbf{d}=(0,e)$

Da $d_x=0, d_y=e$ (hvilket er i $D_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y>0\}$) og både $x\ln x$ og $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ er C_1, kan tangentplanen bruges. Samme fremgangsmåde. Først findes gradienten for $k(x,y)$: $\frac{\partial k(x,y)}{\partial x}=\frac{1\ln y}{\sqrt{1+x^2}}+(-\frac{1}{2})\frac{x\ln y}{\sqrt{1+x^2}}2x$

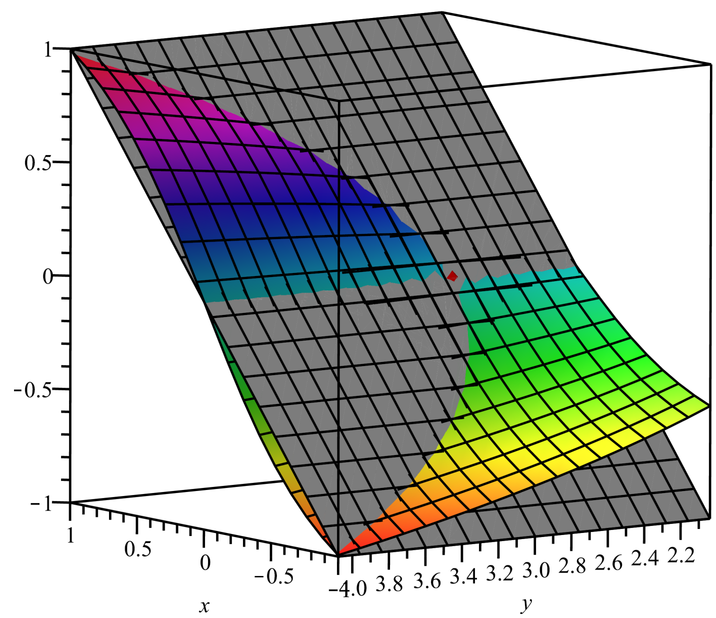
$$\nabla k(x,y)=\left(\frac{\ln y}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x}{2}\frac{x\ln y}{\sqrt{1+x^2}},\ \frac{x}{y\sqrt{1+x^2}}\right)=\left(\frac{\ln y}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x^2\ln y}{\sqrt{1+x^2}^3},\ \frac{x}{y\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$\nabla k(0,e)=\left(\frac{\ln e}{\sqrt{1+0^2}}-\frac{0^2\ln y}{\sqrt{1+0^2}^3},\ \frac{0}{e\sqrt{1+0^2}}\right)=(1,0)$$

Den fundne gradient ved $\mathbf{d}$ kan nu benyttes på (5.2):

$$k_t(x,y)=\frac{0\ln e}{\sqrt{1+0^2}}+(1,0)\cdot(x-0,y-e)=0+x-0+0y-0e=x \tag{5.4}$$

Altså er tangentplanen for k givet ved $k_t(x,y)=x$. Tegnes i Maple ved

```
d := pointplot3d([0, exp(1), k(0, exp(1))], symbolsize = 15, color = red)
f := plot3d([k(x, y), x], x = -1 .. 1, y = 0.75*exp(1) .. 1.5*exp(1), numpoints = 300,
color = [k(x, y), grey]); display([d, f])
```



Figur 5.3: Plot af $k(x,y)$ `(farvet)`, $k_t(x,y)$ `(grå)` og $\mathbf{d}=(0,e)$ `(rød)`

5.3 (iii) Homogene funktioner

$D \subset \mathbb{R}^2$ og $k \in \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ er homogen af grad k hvis der for alle $t > 0$ og alle $(x, y) \in D$ gælder, at

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y) \tag{5.5}$$

5.3.a Eksempel på homogen funktion af grad $k = 3$

Funktionen

$$L(x, y) = x^3 + y^3$$

er en homogen funktion af grad $k = 3$, da $L(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3 L(x, y)$.

5.3.b Vis at f opfylder Eulers ligning

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = k \cdot f(x, y) \tag{5.6}$$

Kædereglen giver

$$\frac{\partial f}{\partial t}(tx, ty) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \cdot \frac{\partial tx}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \cdot \frac{\partial ty}{\partial t} = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$$

Mens $f(tx, ty) = t^k f(x, y)$:

$$\begin{aligned}
D_1 f(tx, ty)t &= t^k \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \implies D_1 f = t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\
D_2 f(tx, ty)t &= t^k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \implies t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\
D_3 f(tx, ty) &= \frac{\partial}{\partial t} t^k f(x, y) = kt^{k-1} f(x, y) = xD_1 f + yD_2 f
\end{aligned}$$

Vi kan bruge dette med kædereglen

$$\begin{aligned}
D_1 f(tx, ty)x + D_2 f(tx, ty)y &= D_3 f(tx, ty) \\
t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x}x + t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial y}y &= kt^{k-1} f(x, y) \\
\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y &= kf(x, y)
\end{aligned}$$

5.3.c Tjek at funktion fra (a) opfylder Eulers ligning

Når $L(x, y) = x^3 + y^3$ og $k = 3$, da gælder der at

$$x\frac{\partial(x^3 + y^3)}{\partial x} + y\frac{\partial(x^3 + y^3)}{\partial y} = x \cdot (3x^2) + y(3y^2) = 3x^3 + 3y^3 = 3 \cdot (x^3 + y^3) = 3 \cdot L(x, y)$$

Altså opfylder $L(x, y)$ fra (a) Eulers ligning.

5.3.d Fortolkning af $C = \frac{\partial B}{\partial m}$ og $D = -\frac{1}{100}\frac{\partial B}{\partial h}$

$$B(m, h) = \frac{m}{h^2} \tag{5.7}$$

C angiver hvordan BMI ændrer sig med hensyn til massen, mens D beskriver ændringen i BMI med hensyn til højden. C er den lineære afhængighed af m for B, som viser at jo større h, desto langsommere vil BMI'en B stige. D viser en skalering af ændringen af B når h ændres, med ændring af fortegn, så en positiv D medfører negativ hældning, og en negativ D medfører positiv hældning. Da der for ethvert mennesker gælder at $m, h \geq 0$, vil der ved et hvert m, h være en positiv hældning, således at $C, D \geq 0$.

5.3.e Person med vægt m, højde h og BMI $B = 22$.

$$m \cdot C + 22 = 100 \cdot h \cdot D$$

Det kan omskrives ved at isolere for $22 = B$, altså

$$m \cdot C + B = 100 \cdot h \cdot D \implies B = 100 \cdot -\frac{1}{100}\frac{\partial B}{\partial h} \cdot h - m \cdot \frac{\partial B}{\partial m} = -h\frac{\partial B}{\partial h} - m\frac{\partial B}{\partial m}$$

$\frac{\partial B}{\partial h} = -2\frac{m}{h^3}$ og $\frac{\partial B}{\partial m} = \frac{1}{h^2}$. Dette indsættes

$$B = -h \cdot (-2\frac{m}{h^3}) - m \cdot \frac{1}{h^2} = 2\frac{m}{h^2} - \frac{m}{h^2} = \frac{m}{h^2}$$

Jeg har hermed vist at $B = \frac{m}{h^2} \iff m \cdot C + B = 100 \cdot h \cdot D$. Da dette gælder for alle B, må det nødvendigvis også gælde for $B = 22$.