Theoretische Physik (Hebecker)

Robin Heinemann

December 15, 2016

Contents

Einleitung:

- Website: www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html
- Bartelman Skripte

1 Semesterüberblick

1. Newtonsche Mechanik
2. Lagrange / Hamilton Mechanik / Statistik / Kontinua
3. Elektrodynamik / Spezielle Relativitätstheorie
4. Quantenmechanik
5. Thermodynamik / Quantenstatistik
6. Allgemeine Relativitätstheorie / Kosmologie
7. Quantenfeldtheorie I (ggf. 5.)
8. Quantenfeldtheorie II (ggf. 6. $\Longleftarrow$ Stringtheorie / Teilchenphysik / Supersymmetrie)
9. Masterarbeit
10. Masterarbeit

1.1 Mathe

wichtig:

- Gruppentheorie
- Differientialgeometrie

2 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik: Beschreibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung $\rightarrow$ Dynamik)

2.1 Kinematik der Massenpunktes in einer Dimension

2.1.1 Graphik

- Ort: x
- zu Zeit $t:\ x(t)$
- Geschwindigkeit: $v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung: $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Beispiel: $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2,\ v(t) = v_0 + a_0 t,\ a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B. $x(t_0) \equiv x_0$

  $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t'$$

  Man prüft leicht $\dot{x}(t) = v(t)$

  - Es gibt keine andere Funktion $\tilde{x}(t)$ mit $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$ und $\tilde{x}(t_0) = x_0$

  Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben: $a(t) = a_0,\ t_0 = 0, v_0, x_0$

$$\implies \quad v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \mathrm{d}t' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t')\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechung

2.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

2.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\mathrm{d}f$ bezeichnet den in Δx linearen Anteil des Zuwachs $\Delta f \equiv f(x+\Delta x) - f(x)$.

- Aus $\Delta f = f'(x)\Delta(x) + O(\Delta x^2)$ folgt $\mathrm{d}f = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätsabbildung: $x \mapsto x \implies \mathrm{d}x = \Delta x$

  $$\implies \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \text{ oder } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

  Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für $f'(x)$, <u>aber</u> nützlich, weil bei kleinen Δx $\mathrm{d}f \simeq \Delta f$ (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwert-Definition)
- $f'(x)$ wieder Funktion $\implies$ analog: $f''(x),\ f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
- Praxis

  $$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$

  $$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

  $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

  - Begründung (nur zum letzten Punkt)

    $$(f^{-1})'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(f(y))} = \frac{\mathrm{d}y}{f'(y)\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

  - Schöne Beispiele

    $$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

    $$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

    Besser:

    $$\tan^{-1}(y) = (\sin y \frac{1}{\cos y})' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y (\frac{1}{\cos y})' = 1 + \sin y (-\frac{1}{\cos^2 y})(-\sin y) =$$

    $$1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \implies \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Verknüpfung
$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$
- Inverse
$$f^{-1} : x = f(y) \mapsto y$$
- Grenzwerte:
  - nützliche Regel: l'Hospital ("$\frac{0}{0}$")
    Falls $\lim_{x \to x_0} f, g = 0$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$ existiert, so gilt $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$
  - weitere nützliche Regel
$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0$$
    * Beispiel:
$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$
  - Kürzen unter lim
    * Beispiel:
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

2.2.3 Integrieren

Fundamentalsatz der Analysis

$$\int^y f(x) \mathrm{d}x = F(y) \& F'(y) = f(y)$$
$$\int f(x) \mathrm{d}x = F(x) + C$$
$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$
($\rightarrow$ saubere Definition über Riemannsches Integral)

Praxis

Partielle Integration

$$\int^y f(x) g'(x) \mathrm{d}x = f(y) g(y) - \int^y f'(x) g(x) \mathrm{d}x$$

Substitution Unter Annahme einer invertierbaren Funktion $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \int f(x(y))x'(y)\mathrm{d}y$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

Substitution $y = g(x)$

Klassiker

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \int \ln x 1\mathrm{d}x = \ln x x - \int \frac{1}{x}x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$
$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int e^y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

2.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional → Bewegung in der Ebene. Trajektorie: $x(t), y(t)$

Beispiel

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$
$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

TODO Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)

Raumkurve Menge aller Punkte $\{x, y\}$, die das Teilchen durchläuft

TODO Skizze Nichttriviale Darstellung <u>nur</u> im Raum (Raumkurve)

2.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Trajektorie ist erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit Formal kein Problem: Trajektorie ist

- $$x(t), y(t), z(t)$$
- $$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$
- $$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \dot{v}^i(t); i = 1, 2, 3$$

2.4 Vektorräume

Eine Menge V heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition $(+)$
- die Multiplikation mit reellen Zahlen $(*)$

definiert sind.

$$x : V \times V \to V$$
$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \to V$$

$V \times V$ - Produktmenge $\equiv$ Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \qquad \text{Assoziativität}$$
$$v + w = w + v \qquad \text{Kommutativität}$$
$$\exists 0 \in V : v + 0 = v \,\forall\, v \in V \qquad \text{Null}$$
$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \qquad \text{Distributivität}$$
$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{Distributivität}$$
$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \qquad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$
$$1v = v \qquad \text{Multiplikation mit Eins}$$

2.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit $0 \in \mathbb{R}$ als Vektorraum Null)

2.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \ldots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \ldots & x^n \end{pmatrix}), \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 & \ldots y^n \end{pmatrix}$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \ldots, x^n + y^n)$$
$$\vec{0} \equiv (0, \ldots, 0)$$
$$\alpha\vec{x} \equiv (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)$$

TODO (Maybe) Skizze 3D Vektor $\rightarrow$ übliche Darstellung durch "Pfeile"

2.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \to \vec{x}(t))(x^1(t), x^1(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), \vec{a(t)} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitung voraus:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \implies \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \ldots, y^{n'}(x))$$

2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, v_0 t)$$
$$\vec{v} = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0)$$
$$\vec{a} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0)$$

TODO Skizze (Raumkurve) **Kommentar:**
$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen $[x] = \mathrm{m}$, $[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$
Wir können wie in $d = 1$ von $\vec{a}$ zu $\vec{v}$ zu $\vec{x}$ gelangen!

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \vec{a}(t') = (v_0^1 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'))$$

Üben: Schraubenbahn; $t_0 = 0$, $\vec{x_0} = (R, 0, 0), v_0 = (0, R\omega, v_0)$ Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\vec{v}(t))(0, R\omega, v_0) + \int_0^t \mathrm{d}t'(-R\omega^2)(\cos \omega t', \sin \omega t', 0) \\
=&(0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2)(\frac{1}{\omega} \sin \omega t', -\frac{1}{\omega} \cos \omega t', 0) \mid_0^t \\
=&(0, R\omega, v_0) - R\omega(\sin \omega t, -\cos \omega t, 0) - (0, -1, 0) \\
=&(-R\omega \sin \omega t, R\omega + R\omega \cos \omega t - R\omega, v_0) \\
=&(-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0)
\end{aligned}$$

Bemerkung Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemannsche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t')\mathrm{d}t' = \lim_{n \to \infty} (v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \ldots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

mit $\Delta t = \frac{t - t_0}{N}$

2.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

2.6.1 Symmetrische Bilinearform

$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$ "linear" Abbildung von $V\times V\to\mathbb{R}$, $(v,w)\mapsto v\cdot w$ mit den Eigenschaften

- $v\cdot w=w\cdot v$
- $(\alpha u+\beta v)\cdot w=\alpha u\cdot w+\beta v\cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls $v\cdot v\geq 0$,
Sie heißt positiv-definit, falls $v\cdot v=0 \implies v=0$ Hier : Skalarprodukt $\equiv$ positiv definite symmetrische Bilinearform

2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v|=\sqrt{v\cdot v}=\sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$: Wir definieren

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x^1y^1+\ldots+x^ny^n\equiv\sum_{i=1}^{n}x^iy^i\equiv\underbrace{x^iy^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}|=\sqrt{(x^1)^2+\ldots+(x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidisches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}\cdot\vec{y}=7x^1y^2+x^2y^2$ anderes Beispiel:

$$\vec{x}\cdot\vec{y}\equiv x^1y^1-x^2y^2$$

symmetrische Bilinearform, <u>nicht</u> positiv, semidefinit! Frage:
Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber <u>nicht positiv definit</u>

$$\vec{x}\vec{y}=x^1y^1$$

2.7 Abstand zwischen Raumpunkten

Der anschauliche Abstand zwischen Raumpunkten $\vec{x},\vec{y}$:

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(\vec{x}-\vec{y})(\vec{x}-\vec{y})}=\sqrt{(\vec{x}-\vec{y})^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i-y^i)^2}=\sqrt{(x^i-y^i)(x^i-y^i)}$$

$$=\sqrt{\vec{x}^2+\vec{y}^2-2\vec{x}\vec{y}}=\sqrt{|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2-2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta}$$

Haben benutzt: $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

2.7.1 Spezialfall

$$\vec{x}=(x^1,0,0),\vec{y}=(y^1,y^2,0)$$

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x^1\cdot y^1;\cos\theta=\frac{y^1}{|\vec{y}|};|\vec{x}|=x^1$$

TODO Skizze

$$\Longrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

Dass dies für beliebige Vektoren gilt, wird später klar werden.

2.7.2 Infinitesimaler Abstand

Speziell wird der infinitesimale Abstand wichtig sein:

$$\mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3)$$

$$\mathrm{d}\vec{x} = (\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t) = (v^1\mathrm{d}t, v^2\mathrm{d}t, v^3\mathrm{d}t) = (v^1, v^2, v^3)\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}t,\ \text{oder: } \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

($\mathrm{d}\vec{x}$ analog zu $\mathrm{d}f$ vorher);
$\mathrm{d}\vec{x}^2 = |\mathrm{d}\vec{x}|^2 = |\vec{v}|^2\mathrm{d}t^2$
$|\mathrm{d}x| = |\vec{v}|\mathrm{d}t$.

2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

$|d\vec{x}|$ entlang $\vec{x}(t)$ aufaddieren $\to$ Bogenlänge.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}\vec{x}| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'}\right| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \sqrt{\dot{\vec{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\vec{v}(t')^2}$$

Infinitesimale Version:

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{v}|$$

Man kann (im Prinzip) $s(t) = s$ nach t auflösen.

$$\Longrightarrow t = t(s) \Longrightarrow \underbrace{\vec{x}(s)}_{\text{Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge } s} \equiv \vec{x}(t(s))$$

Nützlich, zum Beispiel für die Definition des Tangentenvektors:

$$\vec{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s}$$

Es gilt

$$\vec{T} \parallel \vec{v}; \left|\vec{T}\right| = \left|\frac{\vec{v}\mathrm{d}t}{|\vec{v}|\mathrm{d}t}\right| = 1 \Longrightarrow \vec{T}\cdot\vec{T} = 1$$

Ableiten nach s:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(1) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(\vec{T}\cdot\vec{T}) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = 2\vec{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$$

Nutze

$$\vec{T}\cdot\vec{T} = T^iT^i$$

$\implies$ Ableitung des Tangentenvektors ist orthogonal zum Tangentenvektor. Krümmungsradius der Bahn:

$$\rho \equiv \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|}$$

Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|} = \rho\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$$

2.8.1 Beispiel in d=2

$$\vec{x}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$$
$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos\omega t)$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = R\omega$$
$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'|\vec{v}| = R\omega t;\ t(x) == \frac{s}{R\omega}$$
$$\implies \vec{x}(s) = R(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}), \vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}) \implies \rho = R;\ \vec{N} = -(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R})$$

TODO Skizze

2.9 Vektorprodukt

$$V \times V \mapsto V;\ (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

$$c^i = (\vec{a} \times \vec{b})^i \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} a^j b^k = \varepsilon^{ijk} a^j b^k$$

dabei:

- $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{321} = 1$
- $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$
- sonst 0 ($\varepsilon^{ijk} = 0$, falls zwei Indizes gleich)

Alternativ:

- $$|\vec{c}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right||\sin\theta|$$
- Richtung von $\vec{c}$ definiert durch $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{c}$
- Vorzeichen von $\vec{c}$ ist so, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein "Rechtssystem" bilden

TODO Skizze

2.10 Binormalenvektor

$$= \vec{T} \times \vec{N}$$

$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ heißen "begleitendes Dreibein" und bilden ein Rechtssystem. alle haben Länge 1 $\vec{T}, \vec{N}$ spannen die "Schmiegebene" auf

2.10.1 Zur Information

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\vec{N}; \; \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\sigma}\vec{B}; \; \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sigma}\vec{B} - \frac{1}{\rho}\vec{T}$$

σ definiert die Torsion.

3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik

3.1 Newtonsche Axiome

Dynamik: Ursachen der Bewegungsänderung $\rightarrow$ Kräfte: $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

1. Es existierten Inertialsysteme (Koordinatensysteme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft wirkt) nicht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt: $\ddot{\vec{x}} = 0$

2. In solchen Systemen gilt: $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$

3. Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt:

$$\vec{F}_1 2 = -\vec{F}_2 1$$

4. definiert die **träge** Masse

Die entscheidende physikalische Aussage von 2. ist das Auftreten von $\ddot{\vec{x}}$(nicht etwa $\dot{\vec{x}}$oder $\dddot{\vec{x}}$) Alternative Diskussionen der obigen Axiomatik:

- zum Beispiel Kapitel 1.2 von Jose/Saletan (mit 2 Definition der Kraft)

3.2 Trajektorie

Vorhersagen erfordern: $\vec{F} \rightarrow$ Trajektorie. Genauer: Sei $\vec{F}(\vec{x}, t)$ gegeben. Berechne $\vec{x}(t)$!

3.3 Differentialgleichungen

hier nur "gewöhnliche DGL" (nur Ableitungen nach einer Variable) (im Gegensatz zu "partiellen" (Ableitung nach verschiedenen Variablen))

3.3.1 1. Ordnung

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Dgl. 1. Ordnung ($\Longrightarrow$ nur 1. Ableitung):

$$y'(x) = f(x, y)$$

Lösung Funktion: $y : x \mapsto y(x)$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ (im Allgemeinen wird x aus einem gewissen Intervall kommen: $x \in I \equiv (a, b) \subseteq \mathbb{R}$)

3.3.2 Anfangswertproblem

Gegeben durch:

1. Dgl.: $y' = f(x, y)$
2. Anfangsbedingung $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Funktion $y(x)$ mit (für $x \in I, x_0 \in I$:

1. $y'(x) = f(x, y(x))$
2. $y(x_0) = y_0$

3.3.3 partielle Ableitung

Wir betrachten ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rechenregeln: Wie bei normalen Ableitung, nur mit x fest.

Beispiel

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y$$

3.3.4 Existenz und Eindeutigkeit

... viele Theoreme über Existenz und Eindeutigkeit (Peano und Picand / Lindelöf) Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert falls:

$$f(x, y) \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

stetig sind.

"Begründung" Zeichne an jedem Punkt (x, y) einen Vektor $(1, f(x, y))$ ein.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{(x, y(x))}{1}$$

Weiteres Argument für die Existenz und Eindeutigkeit TODO(Skizze) Steigung der gesuchten Funktion bei x_0 ist bekannt als $f(x_0, y_0) \implies$ kann Wert der Funktion bei $x + \Delta x$ abschätzen: $y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)$ (für kleine Δx) Kenne Steigung bei $x_0 \Delta x$: $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)) \implies$ Schätze Wert der Funktion bei $x_0 + 2\Delta x$ ab. ($\implies$ perfekt für Numerik)

3.3.5 Beispiele

1.
$$y'(x) = f(x, y), f(x, y) = 3$$
$$y'(x) = 3 \implies y(x) = \int 3\mathrm{d}x = 3x + c$$

   Das ist schon die allgemeine Lösung der Dgl. Ein Anfangswertproblem, zum Beispiel mit $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ lässt sich durch Bestimmen der Konstanten lösen:

$$y(x) = 3x + c \implies 1 = 3(-1) + c \implies c = 4 \implies y(x) = 3x + 4$$

3.3.6 Separation der Variablen

Separation der Variablen funktioniert wenn $f(x, y) = g(x)h(y)$

Beispiel

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \implies y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} \implies y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$

Variablen sind getrennt, kann einfach Integrieren

$$\int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \implies y = \pm\sqrt{x^2 + 2c}$$

Lösen allgemeines Anfangswertproblem allgemeines Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung (x_0, y_0)

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \implies 2c = y_0^2 - x_0^2 \implies y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \geq 0 \\ -\sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

1. **TODO** Skizze

3.3.7 System von Dgl.

(Fast) alles oben gesagte funktioniert auch für Systeme gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}y^1(x)}{\mathrm{d}x} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$

$$\frac{\mathrm{d}y^n(x)}{\mathrm{d}x} = f^n(x, y^n, \dots, y^n)$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Wir haben hier eine vektorwertige Funktion von $n+1$ Variablen benutzt:

$$\vec{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingungen: $(x_0, \vec{y}_0) \to n+1$ Parameter. Einer davon entspricht der Verschiebung entlang ein und derselben Lösung $\implies$ allgemeine Lösung hat $(n+1)-1=n$ Parameter oder Integrationskonstanten.

3.3.8 Systeme von n gewöhnlicher Dgl. p-ter Ordnung

$$\vec{y}^{(p)}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(p-1)})$$

Anfangsbedingungen: $(x_0, \vec{y}_0, \vec{y}_0', \dots, \vec{y}_0^{(p-1)}), \vec{y}_0' \mathrel{\hat{=}} \vec{y}'(x)$ bei $x = x_0$

Tatsache Systeme von Dgl. können auf größere Systeme niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden. Wir illustrieren dies am Beispiel mit $p = 2$

Beispiel

$$\vec{y}''(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

Dies ist äquivalent zu einem System von $2n$ Dgl 1. Ordnung

$$\begin{cases} \vec{z}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ \vec{y}'(x) &= \vec{z} \end{cases} \qquad (\equiv g(x, \vec{y}, \vec{z}))$$

Ursprüngliche Form folgt durch Einsetzen der 2. Gleichung in die Erste. Das verallgemeinert sich sofort auf die Ordnung p: Man gibt einfach der $(p-1)$ niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variablen. Die zusätzlichen Dgl sind schlicht die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ehemaligen Ableitungen handelt.
$\implies$ System von p Dgl 1. Ordnung; allgemeine Lösung hat p Parameter

3.3.9 Erste physikalische Beispiele

Punktmasse 3 Dgl 2. Ordnung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\vec{F}(t,\vec{x},\dot{\vec{x}})$$

$\Longrightarrow$ 6 Dgl 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} & = \frac{1}{m}\vec{F}(t,\vec{x},\vec{v}) \\ \dot{\vec{x}} & = \vec{v} \end{cases} \tag{1}$$

In vielen Fällen: (zeitunabhängiges) Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ ("Vektorfeld").

Darstellung in $d = 2$ (Skizze Vektorfeld). wichtig: doppelte Markierung der Achsen

Einfachster Fall ($d = 1$) betrachte den Fall, dass F von v, aber nicht von t abhängt:

$$\begin{cases} \dot{v} & = \frac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} & = v \end{cases} \tag{2}$$

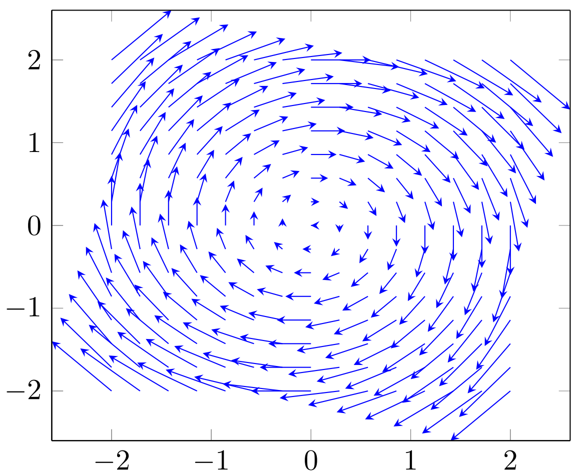
$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(x,v)}{m} \\ v \end{pmatrix}$$

1. **TODO** Darstellung im Phasenraum Analyse im Phasenraum passt perfekt zur früheren allgemeinen Analyse von Dgl 1. Ordnung Analog in $d = 3$: Vektorfeld: $(\frac{\vec{F}}{m}, \vec{v})$, Phasenraum $(\vec{x}, \vec{v})$ oder $(\vec{x}, \vec{p})$ ist 6-dimensional

Harmonischer Oszillator ($d = 1$) $F(x) = -kx$

$$\begin{cases} \dot{v} & = -x \\ \dot{x} & = v \end{cases} \tag{3}$$

Phasenraum des Harmonischen Oszillator



Freier Fall mit Luftwiderstand Aufgabe: Bestimme die zeitliche Entwicklung von v wenn Körper im Schwerefeld losgelassen wird. $F_R = -cv^2$
Problem $1 - dim$: x wachse nach unten, Start bei $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$F = m\ddot{x} \implies mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \implies \begin{cases} mg - cv^2 & = m\dot{v} \\ v & = \dot{x} \end{cases}$$

Erste Gleichung enthält kein x und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v^2$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{c}{m}v^2}$$

Konstanten und Dimensionen

$$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}; [\frac{c}{m}] = \mathrm{N\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^2}$$

Kann leicht Konstanten der Dimension Zeit und Geschwindigkeit bilden:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

Benutze jetzt die dimensionslosen Variablen $t' = \frac{t}{\hat{t}}, v' = \frac{v}{\hat{v}}$

$$\implies \mathrm{d}t' = \frac{dv'}{1 - v^{2\prime}} = \frac{\mathrm{d}v'}{2}(\frac{1}{1 + v'} + \frac{1}{1 - v'})$$
$$2t' = \ln 1 + v' - \ln 1 - v' + c$$

$v' = 0$ bei $t' = 0 \implies c = 0$ Auflösen nach v':

$$e^{2t'} = \frac{1 + v'}{1 - v'} \implies \dots$$
$$\implies v' = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1} \implies v = \hat{v}(1 - \frac{2}{e^{\frac{2t}{\hat{t}}}} + 1)$$

$\implies \hat{v}$ ist Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell angenommen, wenn $t \gg \hat{t}$

Zugabe: einfache physikalische Argumente für die Größe von c:

1. $[c] = \mathrm{kg\,m^{-1}}$, Input: A (Querschnitt), $\rho_L \implies c \sim \rho_L A$
2. Energiebilanz an verdrängter Luft:

$$F_R \cdot l \sim E_{\text{kin,Luft}} \sim \rho_L l A \frac{v^2}{2}$$

3.4 Taylorentwicklung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$. Untersuche Verhalten beliebiger glatter Funktionen $f(x)$ nahe $x = 0$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x \mathrm{d}x' f'(x') \\
&= f(0) + f'(x')(x_-x)\Big|_0^x - \int_0^x \mathrm{d}x' f''(x')(x' - x) \\
&= f(0) + f'(0)x - f''(x')\frac{(x'-x)}{2}\Big|_0^x + \int_0^x \mathrm{d}x' f'''(x')\frac{(x'-x)^2}{2} \\
&= f(0) + f'(x)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots
\end{aligned}
$$

Allgemein:

$$
f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{m} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \overbrace{\int_0^x \mathrm{d}x' f^{(m+1)}(x')\frac{(x'-x)^m}{m!}}^{\text{Restglied}}
$$

Falls das Restglied für $n \to \infty$ verschwindet:

$$
f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}
$$

Analog: Taylor-Reihe:

$$
f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}
$$

1. Oft erste Terme = gute Näherung
2. Verallgemeinerung auf viele Variablen

3.4.1 Interessantes "Gegenbeispiel"

$$
f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}
$$

Überzeugen sie sich, dass alle Ableitungen existieren, auch bei Null!
Sie Brauchen:

$$
\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0
$$

Die Ableitungen verschwinden sogar bei Null $\implies$ Taylor-Reihe ist Null, keine gute Näherung

3.5 Harmonischer Oszillator

- eines der wichtigsten physikalischen Systeme
- beschreibt viele kompliziertere Systeme angenähert

3.5.1 Eindimensionales System

$d = 1, F = F(x)$

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}}{dx}v(x) = -v'(x)$$

Damit haben wir das **Potential** ($\rightarrow$ beschreibt die potentielle Energie des Massenpunktes) v als Stammfunktion von $-F$ definiert

- Skizze

Massenpunkt kann nur ruhen, wo $F = 0$ beziehungsweise $V' = 0$. Genauer: Nur Minima (Maxima instabil).

Ziel Untersuchung der Bewegung in der Nähe von Minimal (also bei $x \approx x_0$ wobei $v'(x_0) = 0$ gelte)
$V(x)$ bei x_0, $V'(x_0) = 0, |x - x_0|$ klein

$$\implies V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2}v''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$\implies F(x) \simeq -V''(x_0)(x - x_0)$$

$$x - x_0 \equiv y \implies \underbrace{F(y) = -ky}_{\text{harmonischer Oszillator}} \quad , k \equiv v''(0)$$

Wir sehen: Harmonischer Oszillator ist eine Idealisierung von potentiell sehr großem Nutzen (viele Systeme)

Lösung Newton $\implies m\ddot{y} = -ky$ beziehungsweise $\ddot{y} = -\omega^2 y, \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$
$\implies \sin \omega t$ und $\cos \omega t$ sind Lösungen
$\implies y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ ist auch Lösung (wegen Linearität)
(wegen der beiden frei wählbaren Konstanten ist dies schon die allgemeine Lösung)

Verallgemeinerungen

- Reibungsterm $\sim \dot{y}$
- treibende Kraft $\sim f(t)$

3.6 Lineare Differentialgleichungen

allgemeine Form einer linearen Dgl. n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_0(x)y(x) = f(x)$$

Das Wort linear bezieht sich nur auf y, nicht x
Die Dgl. heißt homogen falls $f(x) \equiv 0$ Homogen von Grad p: Ersetzung $y \to \alpha y$ führt zu Vorfaktor αp, hier $p = 1$

- wir hatten oben dem Fall $n = 2$ "mit konstanten Koeffizienten"

- noch einfacheres Beispiel: $n = 1, f \equiv 0$ (aber beliebige Koeffizienten)

$$y' + a(x)y = 0$$

  Das ist separabel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{dx} + a(x)y = 0\\ \frac{\mathrm{d}y}{dx} = -a(x)y\\ \frac{\mathrm{d}y}{x} = -a(x)\mathrm{d}x\\ \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(x)\mathrm{d}x\\ \ln y - A(x) + c_1\\ y = ce^{-A(x)}\end{aligned}$$

  $A(x)$ sei eine beliebige aber fest gewählte Stammfunktion von a Wir können den inhomogenen Fall lösen, durch "Variation der Konstanten"

  – Ansatz: $y = C(x)e^{-A(x)}$, Dgl. $y' + ay = f$

$$(ce^{-A})' + aCe^{-A} = f$$

$$c'e^{-A} - CA'e^{-A} + Cae^{-A} = f$$

  Beachte $A' = a$

$$\implies c'e^{-A} = fe^{A}, c(x) = \int \mathrm{d}x f(x)e^{A(x)}$$

$$y(x) = \left[\int^x \mathrm{d}x' f(x')e^{A(x')}\right] e^{-A(x)}$$

  $f(x')$ ist eine frei wählbare additive Konstante im x'-Int. $(C(x) \to C(x) + \alpha)$ entspricht der Addition der Lösung der homogenen Dgl.

3.6.1 Zusammenfassung / Verallgemeinerung auf $n > 1$

Definition 1 Linear Unabhängig**.** Ein Satz von Funktionen $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ heißt linear unabhängig, falls jede Linearkombination bei der nicht alle Koeffizienten Null sind auch nicht Null ist:

$$\alpha_1 f_1(x) + \ldots \alpha_n f_n(x) \equiv 0 \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$$

(identisch zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren)

Fakt Kennt man n linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung, so kennt man die allgemeine Lösung:

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

Die allgemeine Lösung ist stets von dieser Form.

Wenn wir außerdem eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung haben, so haben wir auch schon deren allgemeinen Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

"Beweis" durch Einsetzen in

$$y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + f_0 y = f$$

3.6.2 Finden der partikulären Lösung

Auch bei $n > 1$: Variation der Konstanten (Funktioniert gut bei konstanten Koeffizienten) Mächtigere Methoden: Überführen von System von linearen Dgl. 1. Ordnung (braucht Matrixrechnung)

4 Erhaltungssätze in Newtonscher Mechanik

4.1 Impulserhaltung

Systeme mit mehreren Massenpunkten $a, b \in \{1, \ldots, n\}$
Trajektorien: $\vec{x}_a(t), a = 1, \ldots, n$

Satz 1 Impulserhaltung**.** *Bei verschwindenden externen Kräften ($\vec{F}_{ext} = 0$) gilt:*

$$\vec{p} \equiv \sum_a \vec{P}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\vec{x}_a} = \ const$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= \sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \\
&= \sum_a \vec{F}_a \\
&= \sum_a \Big(\sum_{\substack{b \\ a\neq b}} \vec{F}_{ab}\Big) \\
&= \sum_{\substack{a,b \\ a\neq b}} \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b) \\
&= \sum_{a>b} \vec{F}_{ab} + \sum a < b\vec{F}_{ab} \\
&= \sum_{a>b} (\vec{F}_{ab} + \vec{F}_{ba}) && \underset{\text{3. Newtonsches Axiom}}{\overset{= 0}{\downarrow}} \qquad \square
\end{aligned}$$

mit äußeren Kräften:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_a \vec{F}_{a,ext.} \equiv \vec{F}_{ext}$$

Falls zum Beispiel die äußere Kraft nicht in x^1 -Richtung wirkt ($\mathrm{F}^1_{\mathrm{ext}} = 0$), so gilt immer noch $p^1 = \text{const}$ (eigentlich drei Erhaltungssätze für p^1, p^2, p^3, manchmal gelten nur einige davon)

4.2 Drehimpulserhaltung

Oft: Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie zweier Massenpunkte:

- Gravitationskraft
- Elektrostatische Kraft
- Modell der masselosen Stange (→ Modell für starre Körper!)

Definition 2 Drehimpuls**.**

$$\vec{L}_a \equiv \vec{x}_a \times \vec{p}_a$$
$$(\vec{L}_a)^i = \varepsilon^{ijk} x_a^j p_a^k$$

Falls $\vec{F}_{a,ext} = 0$ und alle interne Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie der jeweiligen Punkte, dann gilt **Drehimpulserhaltung**

Satz 2 Drehimpulserhaltung**.**

$$\vec{L} \equiv \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \dot{\vec{x}}_a = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \ const$$

Beweis. Nachrechnen:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_a m_a(\dot{\vec{x}}_a \times \dot{\vec{x}}_a + \vec{x}_a + \ddot{\vec{x}}_a) \\
&= \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a \\
&= \sum_{a \neq b} \vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b, a \neq b\text{)} \\
&= \sum_{a>b} (\vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} + \vec{x}_b \times \vec{F}_{ba}) \\
&= \sum_{a>b} (\vec{x}_a - \vec{x}_b) \times \vec{F}_{ab}
\end{aligned}
$$

da $\vec{F}_{ab} \parallel (\vec{x}_a - \vec{x}_b)$ per Annahme

$$= 0$$

□

Bei externen Kräften:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_{a,ext} \equiv \vec{M}_{ext}$$

M_{ext} ist das durch äußere Kräfte auf Punkt a ausgeübte **Drehmoment**, allgemein (für einzelnen Punkt):

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

Wichtig: Drehimpulserhaltung gilt auch dann wenn alle äußeren Kräfte **Zentralkräfte** sind, Zentralkraft:

$$\vec{F}_a \parallel \vec{x}_a$$

Drehimpuls hängt vom Koordinatensystem ab.

Bemerkung 1. $\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$ (allgemeiner jedes Kreuzprodukt von Vektoren)
ist ein **Axial-** oder **Pseudovektor**, das heißt: Bei Drehungen wie Vektor, Bei Reflexion am Ursprung kein Vorzeichenänderung

Beweis.

$$\vec{a} \to -\vec{a}, \vec{b} \to -\vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} \to +\vec{a} \times \vec{b}$$

□

4.3 Konservative Kräfte und Energieerhaltung

Definition 3 Gradient**.** Gradient von V:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ ist ein "Differentialoperator", also:

$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x,y) \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

Dementsprechend $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ist ein "Differentialoperator" zweiter Ordnung, also:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} : f(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

$\vec{\nabla} V$ ist gute Schreibweise, weil $\vec{\nabla}$ ein vektorwertiger Differentialoperator ist:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

Definition 4 konservatives Kraftfeld**.** Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ heißt **konservativ** falls es eine Funktion $V(\vec{x})$ ("Potential") gibt. sodass

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

4.3.1 Energieerhaltung

Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt:

$$E = \underset{\text{kinetisch}}{T} + \underset{\text{potentielle Energie}}{V} = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}(t)^2 + V(\vec{x}(t)) = \text{const}$$

Begründung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{dt} &= \frac{m}{2} \frac{\mathrm{d}}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^i) = \frac{m}{2} 2 \dot{x}^i \ddot{x}^i = m \dot{\vec{x}} \ddot{\vec{x}} \\ \frac{\mathrm{d}V}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3)}{\Delta t} \end{aligned}$$

mit $\Delta x = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{dt} \Delta t$

Umschreiben des Zählers

$$\begin{aligned} & V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ + & V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ + & V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3) \\ \cong & \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \Delta x^1 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \Delta x^2 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(\vec{x}) \Delta x^3 \end{aligned}$$

Teilen durch Δt, Grenzwertbildung

$$\frac{\mathrm{d}V}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{x}(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{dt}$$

oder (allgemeine Rechenregel)

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

Allgemeine Formulierung der Rechenregel: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge \vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Die Verknüpfung $f \circ \vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion. Für diese gilt:

$$\underbrace{\mathrm{d}f}_{\text{totales Differential}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = (\vec{\nabla} f)\mathrm{d}\vec{x} \tag{4}$$

oder totale Ableitung:

$$\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Unsere Anwendung

$$\tag{7}$$

$$\dot{E} = m\ddot{\vec{x}}\dot{\vec{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i}\dot{x}^i = \vec{F}\dot{\vec{x}} + (\vec{\nabla} V)\dot{\vec{x}} = 0 \checkmark \tag{8}$$

$$V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$$

Vergleiche:

$$f(x + \Delta) - f(x) \cong f'(x)\Delta$$

4.3.2 Kriterium für Konservativität

Für *einfach zusammenhängende Gebiete*[1] gilt:

$$\vec{F} \text{ ist konservativ } \iff \vec{\nabla}\vec{F} = 0$$

Begründung $\implies$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \implies \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\equiv \text{ Rotation von } F \ (\mathrm{rot}\, F)} = 0$$

[1] Jede geschlossene Kurve kann auf Länge Null zusammengezogen werden

$$
\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\times\vec{F})^i &= \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}F^k = \varepsilon^{ijk}\partial^i F^k \\
&= -\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V = -\frac{1}{2}(\varepsilon^{ijk}-\varepsilon^{ikj})\partial^j\partial^k V \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V + \frac{1}{2}\varepsilon^{ikj}\underbrace{\partial^k\partial^j}_{\text{habe benutzt } \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}} V \\
&\underset{k\leftrightarrow j}{\underset{\downarrow}{=}} -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V = 0
\end{aligned}
$$

$\Longleftarrow$

Wähle beliebiges festes $\vec{x}_0$ im Gebiet. Definiere Potential als minus Arbeit am Massenpunkt $\to$ *Abbildung*

$$
V(\vec{x}) \equiv -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(x)\mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{(Linienintegral)}
$$

Linienintegral kann immer definiert werden, wenn Kurve durch Gebiet mit Vektorfeld verläuft

$$
\mathrm{d}\vec{s} \equiv \mathrm{d}\vec{x}(s) = (\frac{\mathrm{d}x^1}{d\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}x^2}{d\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}x^3}{d\mathrm{d}x})\mathrm{d}s
$$

Also gilt:

$$
\vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \underbrace{F^i(\frac{\mathrm{d}x^i}{ds})\mathrm{d}s}_{\text{Integrand im normalen Riemann Integral}}
$$

Wähle beliebigen kleinen Vektor $\vec{l}$ und berechne:

$$
\begin{aligned}
\vec{l}\vec{F}(\vec{x}) &\cong -(-\int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{l}} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F}) \\
&= -((-\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}+\vec{l}} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F}) - (-\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F})) \\
&= -(V(\vec{x}+\vec{l}) - V(\vec{x})) \\
&\cong -\frac{\partial V}{\partial x^i}l^i = -\vec{l}(\vec{\nabla}V) \\
&\Longrightarrow \vec{l}(\vec{F}+\vec{\nabla}V) = 0 \\
&\Longrightarrow \vec{F}+\vec{\nabla}V = 0\checkmark
\end{aligned}
$$

Lücke: Wegunabhängigkeit der Definition von V:
Wähle zwei unterschiedliche Wege (L_1, L_2):

$$
\int_{L_1}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F} - \int_{L_2}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \underset{\text{Rand von } \Sigma}{\underset{\downarrow}{\oint}}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F}
$$

Satz von Stokes

$$= \int_\Sigma \vec{df}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})^i = (\vec{\nabla} \times \vec{F})^i = \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}F^k$$

zum Beispiel:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})^1 = \frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}$$

$$\int_{L_2} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} - \int_{L_1} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{"Stokes"}}}{=} \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{f} * (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \stackrel{!}{=} 0$$

4.4 Kurvenintegrale

Jedes Kurvenintegral kann durch Parametrisierung der Kurve berechnet werden. Kurve $C \to \vec{x}(t)$

$$\mathrm{d}\vec{x} \equiv \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\int_C \mathrm{d}\vec{s}\vec{F}(\vec{x}) \equiv \int_C \mathrm{d}\vec{x}\vec{F}(\vec{x}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}\vec{F}(\vec{x}(t))$$

4.5 Satz von Stokes

Definition 5 Satz von Stokes**.**

$$\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} &= \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}sF^1(x,0) + \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}sF^2(\Delta x^1, s) - \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}sF^1(s,\Delta x^2) - \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}sF^2(0,s) \\
&= \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}s(F^1(s,0) - F^1(s,\Delta x^2)) + \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}s(F^2(\Delta x^1, s) - F^2(0,s)) \\
&= \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}s(\frac{\partial F^1}{\partial x^2})\Delta x^2 + \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}s\frac{\partial F^2}{\partial x^1}\Delta x^1 + O(\Delta^3) \\
&= \Delta x^1 \Delta x^2 (\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}) + O(\Delta^3) \\
&= \Delta x^1 \Delta x^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F})^3 + O(\Delta^3) \\
&= \underbrace{\Delta x^1 \Delta x^2 \hat{e_3}}(\vec{\nabla} \times \vec{F})
\end{aligned}$$

$\Delta\vec{f}$= Der dem kleinen Flächenelement zugeordnete Vektor

$$\approx \Delta\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Allgemein steht $\Delta\vec{f}$ oder $\mathrm{d}\vec{f}$ für ein kleines oder infinitesimales Flächenelement, Länge $\hat{=}$ Größe der Fläche Die Richtung des Vektors definiert **Orientierung** der Fläche (Zum Beispiel Oben = da, wo der Pfeil hin zeigt)
Randkurve: so definiert, dass man von oben gesehen linksherum (mathematisch positiver Drehsinn) läuft

1. Spezielle Lage in unserer Rechnung unwichtig
2. Übergang zu größeren Flächen durch Aufaddieren

Fläche $= N\Delta^2 \implies N \sim \frac{1}{Delta^2}$

$$\sum_{\text{Rechtecke}} \oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Zahl der Rechtecke} = O(\Delta)}}{NO(\Delta^3)}$$

weil sich nicht "innere Ränder wegheben"

$$\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

klar

$$\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Glätten des Randes: Zerlegung des Randes $\Delta\vec{s}$ in kleine Rechtecke $\Delta\vec{s}_1, \Delta\vec{s}_2$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{s} &= \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2 \\ \vec{F}\Delta\vec{s} &= \vec{F}\Delta\vec{s}_1 + \vec{F}\Delta\vec{s}_2 = \vec{F}_1\Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2\Delta\vec{s}_2 + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

$\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ jeweils am Mittelpunkt der Linienelemente Zahl derartiger Randelemente $\sim \frac{1}{\Delta} \implies$ Fehler $O(\Delta)$
$\implies$ Auch nach Summation bleibt Fehler von $O(\Delta)$
Besser wäre Zerlegung in Simplices ("Haben sie mal versucht eine Schildkröte zu fliesen") $\square$

Für unsere Anwendung: wichtig, dass jede geschlossene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, **Rand** ist.

4.6 Energieerhaltung für Systeme von Massenpunkten

Massenpunkte: $\vec{x}_a, a = 1, \ldots, n$
Kräfte: seien $\parallel$ zu $\vec{x}_a - \vec{x}_b$ ("Zentralkräfte")
Solche Kräfte kann man stets schreiben als:

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

mit:

$$V_{ab} = Vba, \vec{\nabla}_a = (\frac{\partial}{\partial x_a^1}, \frac{\partial}{\partial x_a^2}, \frac{\partial}{\partial x_a^3})$$

dazu:

$$-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = (-\vec{\nabla}_a |\vec{x}_a - \vec{x}_b|) V'_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

Dies zeigt:

$$= -\vec{\nabla}_a \sqrt{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2}$$

$$= \frac{\vec{x}_a - \vec{x}_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}$$

Wir können passendes V für jede Zentralkraft finden. Man berechnet einfach V' und sucht die Stammfunktion.

Prüfe Konsistenz mit 3. Axiom:

$$\underbrace{-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)}_{\vec{F}_{ab}} = +\vec{\nabla}_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = \underbrace{+\vec{\nabla}_b V_{ba}(|\vec{x}_b - \vec{x}_a|)}_{-\vec{F}_{ba}}$$

In diesem System gilt Energieerhaltung:

$$E = \sum_a T_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a<b} V_{ab} = \text{ const}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \sum_a \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} ((\vec{\nabla}_a V_{ab}) \dot{\vec{x}}_a + (\vec{\nabla}_b V_{ab}) \dot{\vec{x}}_b) \\
&= \sum_{a \neq b} \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} (-\vec{F}_{ab} \dot{\vec{x}}_a - \underbrace{\vec{F}_{ab} \dot{\vec{x}}_b}_{\text{Umbenennung } a \leftrightarrow b}) = 0 \\
&(= W - \frac{1}{2} W - \frac{1}{2} W)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Passend gewähltes V_{ab} gibt das Modell der starren Stangen

4.7 Eindimensionale Bewegung

$$F(x) = m\ddot{x}$$

- mit Einsatz allgemein lösbar!
- Startpunkt: Jedes 1-dim. zeitunabhängiges Kraftfeld ist konservativ

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{ const}$$

(bis auf Vorzeichen)

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \implies \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$
$$t = \in \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Integral lösen, Integrationskonstante und Energie so bestimmen, das Anfangswertproblem gelöst

$$t = t(x) \text{ auflösen } \implies x = x(t)\checkmark$$

viel einfacher als allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung

5 Harmonischer Oszillator in komplexen Zahlen

Motivation

Harmonischer Oszillator mit Reibung:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x}$$

Exponentieller Ansatz:

$$x \sim e^{\alpha t} \implies \alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0$$

gesucht: α, Betrachte Grenzfälle:

1. ω klein
$$\implies \alpha^2 + c\alpha = 0 \implies \alpha = -c \implies x \sim e^{-ct}$$

2. ω groß (beziehungsweise c klein)
$$\alpha^2 + \omega^2 \simeq 0$$
nicht lösbar!

Aber: wir wissen schon $\sin\omega t, \cos\omega t$ sind Lösungen.
Falls jede gesuchte Gleichung lösbar $\implies$ Hoffnung auf elegante allgemeine Lösung
Speziell: $\alpha^1 = -1$ (für $\omega = 1, c = 0$)

5.1 Komplexe Zahlen

5.1.1 Ziel

reelle Zahlen so zu erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar

5.1.2 Naive Definition

Definiere "Imaginäre Einheit" $x^2 = -1$ lösbar "i", so dass $i^2 = -1$ Wollen addieren und Multiplizieren, deshalb erkläre komplexe Zahl $\mathbb{C}$ als:

$$\mathbb{C} \ni z)x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Wir definieren außerdem:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \equiv x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

5.1.3 präzisere Definition

Definition 6 Körper**.** Körper ("Field") ist eine Menge K mit zwei binären Operationen ("$+$", "$\cdot$"), so dass:

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (Assoziativität)
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (Kommutativität)
- $\exists\, 0 \in K : \alpha + 0 = \alpha\, \forall\, \alpha$ (Null)
- $\forall\, \alpha\, \exists(-\alpha) \in K : \alpha + (-\alpha) = 0$ (Additives Inverses)
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (Assoziativität der Mult.)
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (Kommutativität der Mult.)
- $\exists\, 1 \in K : 1 \cdot \alpha = \alpha\, \forall\, \alpha$ (Eins)
- $\forall\, \alpha \neq 0\, \exists\, \alpha^{-1} \in K : \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ (Inverses der Mult.)
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (Distributivität)

Wir kennen bereits:

- $K = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen)
- $K = \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Definition 7 Komplexer Zahlenkörper**.** Komplexe Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit den Operationen

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \equiv (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Das ist äquivalent zu unserer "naiven Definition" $z = x + iy$

Aufgabe: Prüfen sie, dass die Axiome erfüllt sind!
Schwierigster Teil: Multiplikations-Inverses, Idee / Vorschlag:

$$z^{-1} = (x+iy)^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \implies$ Darstellung durch Vektoren in Ebene liegt nahe.

- Addition: $\equiv$ Vektoraddition
- Multiplikation: Beträge der Vektoren werden multipliziert, Winkel "arg" werden addiert.
- $\arg z = \phi$
- $\Re z = x$
- $\Im z = y$
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Übliche Funktionen $(\exp, \ln, \sin, \cos)$ können mittels ihrer in $\mathbb{R}$ bekannten Taylorreihe auf $\mathbb{C}$ übertragen werden
Besonders wichtig:

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Brauchen $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$
Nachrechnen:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\downarrow \\ \text{Binominialkoeffizient} \\ \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}} z^k w^{n-k}$$

englisch: "n choose k"

durch Umschreiben der Summen erhält man:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\frac{w^l}{l!} = e^z e^w \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\text{reelle Zahl}} \overbrace{e^{iy}}^{\text{komplexe Zahl e vom Betrag 1}}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{iy^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos y + i \sin y
\end{aligned}$$

$\implies$ Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

5.1.4 Zusammenfassung:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$$

$$\ln w = z = x + iy = \ln|w| + i \arg w$$

Problem: $\arg w$ und deshalb ln nicht eindeutig definiert
Lösung: Definiere $\arg w \in (-\pi, \pi)$

5.1.5 Fundamentalsatz der Algebra

In $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

eine Nullstelle z_0

In der Tat hat es sogar n Nullstellen:

$$P_n(z) = (z - z_0) \cdot \underbrace{P_{n-1}(z)}_{\text{Hat wieder eine Nullstelle, usw.}}$$

(Man sagt: Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen)

- Es gibt auf $\mathbb{C}$ wichtige Abbildung: "komplexe Konjugation"

$$z \to z^* \mathrel{\hat{=}} z \to \bar{z}$$

Definiert durch:

$$(x + iy)^* = x - iy, (\rho e^{i\phi})^* = \rho e^{-i\phi}$$

also auch

$$(z^*)^* = z$$

5.1.6 Quaternionen

$$1, i \to 1, i, j, k, i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = k, ji = -k, jk = i, \dots$$

5.2 Anwendung auf harmonischen Oszillator

Erinnerung: physikalisches Problem:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Fall $\frac{c}{2} > \omega$ (Kriechfall)

$$x = e^{\alpha t}, \alpha^2 + c\alpha + \omega^2 = 0$$
$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}$$

$\implies$ 2 linear unabhängige Lösungen, also allgemeine Lösung durch lineare Superposition

$\implies$ exponentielles Abfallverhalten, ohne Oszillationen

Fall $\frac{c}{2} < \omega$ (Schwingfall), $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \equiv -\frac{c}{2} \pm i\tilde{\omega}$$
$$x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\frac{c}{2}t}(\cos \pm\tilde{\omega}t + i \sin \pm\tilde{\omega}t)$$
$$x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t}(\cos \tilde{\omega}t \pm i \sin \tilde{\omega}t)$$

Durch Linearkombination $\to$ 2 reelle Lösungen:

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \cos \tilde{\omega}t; \qquad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \sin \tilde{\omega}t$$

$\implies$ allgemeine Lösung durch Linearkombination

$\implies$ gedämpfte Schwingung

Fall $\frac{c}{2} = \omega$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$\implies$ Nur eine linear unabhängige Lösung, brauche weitere Lösung um allgemeine Anfangsbedingungen zu erfüllen

Idee: Betrachte Schwingfall Lösungen für $\tilde{\omega} \to 0$

Taylor:

$$\cos x = 1 + (x^2); \qquad \sin x = x + O(x^3)$$
$$\implies x_1 = e^{-\frac{c}{2}t}; \qquad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t}\tilde{\omega}t$$

$\implies$ Wieder asymptotische Annäherung an 0 ohne Oszillation

5.3 harmonischer Oszillator mit periodisch treibender Kraft

Inhomogene Dgl:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t), F(t) = fe^{i\underline{\omega}t}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\underline{\omega}t} \\ \implies (A(-\underline{\omega}^2 + ic\underline{\omega} + \omega^2) - \frac{f}{m})e^{i\omega t = 0} \\ A \equiv |A|e^{i\phi} &= \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \underline{\omega}^2 + ic\underline{\omega}} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a-ib}\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2-b^2}$$

und elementarer Algebra findet man den Realteil der Lösung:

$$\begin{aligned} \Re x(t) = |A| \cos \underline{\omega}t + \phi \\ |A| = \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{\omega^2 - \underline{\omega}^2 + c^2\underline{\omega}^2}}, \tan\phi = \frac{c\underline{\omega}}{\underline{\omega}^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung ergibt sich, indem man zu dieser partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

Wichtig: Langzeitverhalten ist durch die partikuläre Lösung bestimmt $\implies$ Resonanzkatastrophe bei $c \to 0 \& \underline{\omega} \to \omega$

6 Symmetrie der Raum zeit

6.1 Matrix, Determinante, Inverse Matrix

Definition 8 Permutation**.** Eine Permutation (Bez: σ) von n Elementen ist eine umkehrbare Abbildung einer Menge von n Elementen auf sich selbst:
Menge: $\{1, \ldots, n\}$, Abb: $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}, i \mapsto \sigma i$
oft nützlich: Man denke an die elementweise Anwendung von σ auf $\{1, \ldots, n\} :\to \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$

Eine Permutation heißt **gerade** ($\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$), falls sie sich aus geradzahlig vielen Vertauschungen von Nachbarn ergibt. Zum Beispiel ist $123 \to 312$ das Produkt von $123 \to 132$ und $123 \to 213$:

$$123 \to 132 \to 312$$

Definition 9 Levi-Civita-Tensor**.**

$$\varepsilon^{\sigma(1)\dots\sigma(n)} \equiv \operatorname{sgn}(\sigma)$$

Insbesondere: $\varepsilon^{12\dots n} = 1$

- Eine $(n \times m)$- Matrix ist ein Schema A^{ij} von Zahlen, die jeweils Eintrag i in Zeile i und Spalte j bezeichnen.
- Man kann eine $(n \times m)$-Matrix mit einer $(m \times p)$-Matrix multiplizieren:

$$(AB)^{ij} = \sum_{k=1}^{m} A^{ik} B^{kj}$$

  das Ergebnis ist eine $(n \times p)$-Matrix

Definition 10 Determinante**.** Für quadratische ($(n \times n)$-Matrizen) definieren wir die **Determinante**:

$$\det A = \frac{1}{n!}\underset{\downarrow}{\varepsilon^{i_1\dots i_n}} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

n-dim. Levi-Civita-Symbol

Damit erhält man:
Determinante einer (1×1)-Matrix: die Zahl selbst.
Erstes nicht triviales Beispiel: (2×2)-Matrix

$$\begin{aligned}
\det A = \det \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2!}\varepsilon^{ij} A^{ik} A^{jl} \varepsilon^{kl} \\
&= \frac{1}{2!}(\varepsilon^{12} A^{11} A^{22} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{12} A^{12} A^{21} \varepsilon^{21} + \varepsilon^{21} A^{21} A^{12} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} A^{22} A^{11} \varepsilon^{21} \\
&= \frac{1}{2}(A^{11}A^{22} + A^{12}A^{21} - A^{21}A^{12} + A^{22}A^{11}) = A^{11}A^{22} - A^{12}A^{21}
\end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma A^{1\sigma(1)} A^{2\sigma(2)} \dots A^{n\sigma(n)}$$

Also: $n!$ Summanden, Jeder ist Produkt von je einem Element aus jeder Zeile und Spalte der Matrix. Vorzeichen ist Vorzeichen der Permutation (siehe unten)

Beispiel 1 (3×3)-Matrix*.* Rechenschema:

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} & A^{21} & A^{22} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} & A^{31} & A^{32} \end{pmatrix}$$
$$\det A = A^{11}A^{22}A^{33} + A^{12}A^{23}A^{31} + \dots$$

Betrachte nun den Ausdruck:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots} A^{i_2 j_2} A^{i_1 j_2} \dots$$
$$= \varepsilon^{i_2 i_1 \cdots} A^{i_2 j_2} A^{i_2 j_1} \dots = -\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots A^{i_n j_n}$$

Vorzeichenwechsel durch Vertauschen zweier Indizes, obiger Ausdruck ist "total antisymmetrisch"

Totale Antisymmetrie ist die definierende Eigenschaft von ε. Sie bestimmt jeden Ausdruck mit u Indizes bis auf Vorfaktor. Deshalb:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c\varepsilon^{j_1 \cdots j_n}$$

Multipliziere mit $\varepsilon^{j_1 \cdots j_n}$:

$$n! \det A = c\varepsilon^{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = cn!$$

$\implies$ alternative Formel für $\det A$:

$$e^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = (\det A)\varepsilon^{j_1 \cdots j_n}$$

Zentraler Fakt: A invertierbar $\iff$ $\det A \neq 0$

Inverse Matrix:

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{1}{(n-1)! \det A} \varepsilon^{j i_2 \dots i_n} \varepsilon^{i j_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n}$$

Prüfen:

$$\begin{aligned}
(A^{-1})^{ij} A^{jk} &= \frac{1}{(n-1)! \det A} \varepsilon^{j i_2 \dots i_n} \varepsilon^{i j_2 \dots j_n} A^{jk} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \\
&= \frac{1}{(n-1)! \det A} (\det A) \underbrace{\varepsilon^{k j_2 \dots j_n} \varepsilon^{i j_2 \dots j_n}}_{(n-1)! \delta^{ik}} \\
&= \delta^{ik} \checkmark
\end{aligned}$$

Kommentar:

$$\frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{i i_2 \dots i_n} \varepsilon^{j j_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n}$$
$$= (-1)^{i+j} \det(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Matrix der Cofaktoren}}}{M(i,j)})$$

Matrix der Cofaktoren ergibt sich aus A Streichen von Zeile i und Spalte j

6.2 Der Euklidische Raum

physikalischer Raum: $V = \mathbb{R}^3$ mit Skalarprodukt $\vec{x}, \vec{y} \to \vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i$
Unser Ziel: Symmetrien, also Abbildungen $R : V \to V, \vec{x} \mapsto \vec{x}'$, welche die Struktur des Raumes respektieren. Das heißt:

$$R(\alpha\vec{x} + \beta\vec{x}) = \alpha R(\vec{x}) + \beta R(\vec{y})$$

$$R(\vec{x}, \vec{y}) \equiv \vec{x}\vec{y} = R(x)R(y)$$

$\downarrow$

Sagt nur: Zahlen transformieren nicht

Zunächst nur Linearitätsbedingung (wird respektiert von allgemeinen linearen Transformationen)

$$x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j$$

oder

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix}$$

Symmetrie: Lineare Transformation: $\vec{x} \mapsto R(\vec{x})$
konkret: $x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise:

$$x \mapsto x' = Rx$$

- hier: Großbuchstaben = Matrizen
- Kleinbuchstaben = Vektoren

Beispiel 2 n = 2.

$$x'^1 = R^{11} x^1 + R^{12} x^2$$
$$x'^2 = R^{21} x^1 + R^{22} x^2$$

Ganz explizit

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformation der beiden Basisvektoren
Jeder andere Vektor ($\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$) ist schreibbar als $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Er transformiert demnach gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Wichtig: Symmetrietransformationen müssen verknüpfbar sein:
Dazu: Betrachte zwei Transformationen:

$$R_1 : x \mapsto R_1 x; R_2 : x \mapsto R_2 x$$

zusammen:

$$R_1 \circ R_2 : x \mapsto R_2 R_1 x$$

Die Komponente i des entstehenden Vektors ist:

$$(R_2 R_1 x)^i = R_2^{ij}(R_1 x)^j = R_2^{ij} R_1^{jk} x^k$$

Man kann die Abbildung $x \mapsto R_2 R_2 x$ auch "in einem Schritt" als Transformation durch die Produktmatrix $R_2 R_1$ realisieren:

$$(R_2 R_1 x)^i = \underbrace{(R_2^{ij} R_1^{jk})}_{\text{Produktmatrix}} x^k$$

Die Produktmatrix ist $(R_2 R_1)^{ij} = R_2^{ij} R_1^{jk} \equiv R_3^{ik}$ Hinweis zum expliziten Rechnen:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} R_1^{11} & R_1^{12} & R_1^{13} \\ R_1^{21} & R_1^{22} & R_1^{23} \\ R_1^{31} & R_1^{32} & R_1^{33} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} R_2^{11} & R_2^{12} & R_2^{13} \\ R_2^{21} & R_2^{22} & R_2^{23} \\ R_2^{31} & R_2^{32} & R_2^{33} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} R_3^{11} & R_3^{12} & R_3^{13} \\ R_3^{21} & R_3^{22} & R_3^{23} \\ R_3^{31} & R_3^{32} & R_3^{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

Für den Begriff der Symmetrie brauchen wir Invertierbarkeit. Wir nennen eine Transformation beziehungsweise die entsprechende Matrix R invertierbar, falls es eine zweite Matrix R^{-1} gibt, so dass

$$R^{-1} \circ R = id \qquad \text{(Identitätsabbildung)}$$
$$(R^{-1})^{ij} R^{jk} = \mathbb{1}^{ik} \equiv \delta^{ik}$$

Wäre Linearität die einzige wichtige Eigenschaft: dann wären die Symmetriefunktionen alle

$$R \in GL(n)$$
$$\downarrow$$
$$\text{Menge aller invertierbaren } n \times m \text{ Matrizen}$$

Wir brauchen zusätzlich:

$$\vec{x}\vec{y} = R(\vec{x})R(\vec{y}), R(x)^i = R^{ij} \times j$$

Dazu wichtige Schreibweise

$$(M^T)^{ij} = M^{ji} \qquad \text{(T für transponiert)}$$

auch: $x = \begin{pmatrix} x^i \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$, $\vec{x^i} = (x^1 \dots x^n)$ Es gilt: $\vec{x}\vec{y} = x^T y = x^i y^i$
es gilt weiterhin:

$$R(\vec{x})R(\vec{y}) = (Rx)^T(Ry) = (x^T T^T)(Ry) = x^T R^t Ry$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned} ((AB)^T)^{ij} = (AB)^{ji} = A^{jk}B^{jk} = B^{ki}B^{jk} = (B^T)^{ik}(A^{tilde})^{kj} \\ = (B^T A^T)^{ij} \\ \implies (AB)^T = B^T A^T \end{aligned}$$

Ziel: $x^T R^T Ry = xT_y$ soll gelten für beliebige x,y. Dies gilt genau dann wenn $R^T R = \nVdash$

$$(R^T)^{ik} R^{kj} = \delta^{ii}$$

$$R^{ki} R^{kj} = \delta^{ii}$$

$$R^{ik} R^{jk} = \delta^{ii}$$

wenn $AB = \nVdash$, so auch $BA = \nVdash$
Symmetrien des euklidischen Raums: xRx mit $R^T T = \nVdash$ $R \in O(3) \subset ULU3$

6.3 Symmetriegruppe (M)

Symmetrien in Physik und Mathe $\rightarrow$ Gruppen
Bisher:

- Matrixgruppen
  - $GL(n)$ - Symmetriegruppe des Vektorraums $\mathbb{R}^n$
  - $O(n)$ - Symmetriegruppe des euklidischen Raumes

Allgemeiner: Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Binären Operation $G \times G \rightarrow G$ für die gilt:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\exists\, e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \,\forall\, a$ ("Eins")
- $\forall\, a \in G \,\exists\, a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Eine Gruppe heißt "abelsch" falls $a \cdot b = b \cdot a \, \forall \, a, b$ Beispiele dafür:

- $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Falls sie statt "$\cdot$" die Operation "+" zur Gruppenoperation erklären, dann sind

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$

Gruppen mit " + "

Definition 11 Körper. K mit Operationen $+, \cdot$ ist ein Körper falls:

- $(K, +)$ ist abelsche Gruppe (Eins = 0)
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist auch abelsche Gruppe
- Distributivität

$GL(n)$ ist eine (nicht abelsche) Gruppe. Müssen prüfen: A, B invertierbar $\implies A \cdot B$ invertierbar. Wir geben das Inverse zu $A \cdot B$ einfach an:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}B = \not{\mathbb{K}}$$

$GL^+(n)$ - orientierungserhaltende Untergruppe $\equiv$ alle A in $GL(n)$ mit $\det A > 0$
$O(n)$ ist Untergruppe von $GL(n)$. Müssen prüfen dass A, B orthogonal $\implies A \cdot B$ orthogonal. Dazu:

$$(A \cdot B)^T (A \cdot B) = B^T A^T AB = B^T B = \not{\mathbb{K}}$$

Wichtige Untergruppe: Spezielle Orthogonale Transformation $SO(n)$
Diese Transformationen erfüllen: $\det(R) = 1$

Dazu zwei Fakten: $\det A^T = \det A, \det(AB) = (\det(A))(\det B)$ Damit folgt aus $R^T R = \not{\mathbb{K}}$

$$\det(R^T R) = \det(R^T)(\det R) = (\det R)^2 = \det \mathbb{R} = 1, \det R = \pm 1$$

$\equiv$ Matrizen in $O(n)$ mit det = 1

Speziell in $n = 3$ (3d-Raum) wird die Reflexion bezüglich y,z Ebene beschrieben durch:

$$R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det R_x = -1$$

Fakt: Jedes Element von $O(3)$ ist schreibbar als R oder $R \cdot R_x$ mit $R \in SO(3)$, $SO(3)$ sind "echte" Drehungen.

Überlegen Sie sich, dass $R \in SO(2)$ allgemein schreibbar ist als

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Identifizieren sie $SO(2)$ mit folgender Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Die Gruppenoperation soll der komplexen Multiplikation entsprechen

6.4 Tensoren

Ein Tensor von Rang (oder Stufe) m im n-dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ ist eine multilineare Abbildung:

$$t : \underbrace{V \times V \times \ldots \times V}_{m\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

Praktisch:

$$t : (\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(n)}) \mapsto t_{i_1 \ldots i_m} x^{i_1}_{(1)} \ldots x^{i_m}_{(m)}$$

Beispiel 3.

- Euklidisches Skalarprodukt: $V \times V \to \mathbb{R}$

$$\delta : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \delta_{ij} x^i y^j \equiv \vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$$

- Noch einfacher:

$$t : V \to \mathbb{R} : t_i \vec{x} \to t_i x^i \in \mathbb{R}$$

  Die Menge solcher linearen Abbildungen bildet auch einen n-dimensionalen Vektorraum, den sogenannten Dualraum V^* (zu V) Notation: $\underline{t} = \{t_1, \ldots, t_n\} \in V^*$
  Erinnerung: $\vec{x} = \{x^1, \ldots, x^n\} \in V$
  Oben(Unten schreiben der Indizes macht die "natürliche Wirkung") von $\underline{t}$ auf $\vec{x}$ besonders deutlich: $t_i x^i \in \mathbb{R}$

  - oben: kontravariant
  - unten: kovariant ($\to$ Co-Vektor $\in V^*$)

  Für und: enorme Vereinfachung:
  Wir haben immer euklidischen Raum und damit die besondere Rolle von δ_{ij} und die inversen Matrix δ^{ij}

$$\delta_{ij}\delta^{jk} = \delta_i^k = (\mathbb{1}_i^k)$$

  Dies erlaubt uns Indizes beliebig zu "heben" und zu "senken":

$$t^i \equiv \delta^{ij} t_j, x_i \equiv \delta_{ij} x^j$$

  Damit können wir V und V^* identifizieren. Wir können auch alle Tensor Indizes beliebig oben oder unten schreiben. Wir werden zur Vereinfachung weiterhin schreiben

$$\vec{x}\vec{y} = x^i y^i (\text{ eigentlich } x^i y^j \delta_{ij})$$

  (Mehr zum Dualraum in Lineare Algebra)

Für uns: Tensor der Stufe 1: ist Vektor

$$t : \vec{x} \mapsto t^i x^i = \vec{t}\vec{x} \in \mathbb{R}$$

Wichtig für uns: Resultat von Anwendung eines Rang-1-Tensors auf Vektor ist invariant unter Drehungen:

$$x \mapsto Rx; t \mapsto Rt$$

$$x \mapsto x' = Rx, x^{ij} = R^{ij}x^j$$

Invarianz:

$$t^T x = t^T R^T Rx$$

Betrachte einfaches, allgemeines Beispiel für Tensor der Stufe 2:

$$\begin{aligned} t &\equiv U \otimes W \in V \otimes V \\ t : (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto (u^i w^j) \cdot (x^i y^j) = (\vec{u} \cdot \vec{x}) \cdot (\vec{w} \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

mit $t^{ij} \equiv u^i w^j$

$$= t^{ij} x^i y^j$$

Grob gesagt: $V \otimes V$ ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen wie $U \otimes W$
Transformation von $t^{ij} = u^i w^j$ unter Drehungen:

$$t^{ij} = u^i w^j \xrightarrow{R} R^{ik} u^k R^{jl} w^l = R^{ik} R^{jl} t^{kl}$$

Invarianz von $t(\vec{x}, \vec{y})$:

$$\begin{aligned} t(\vec{x}, \vec{y}) \to (Rt)(Rx, Ry) &= (R^{ik} r^{jl} t^{kl})(R^{ip} x^p)(R^{jq} y^q) \\ &= (R^{ik} R^{ip})(R^{jl} R^{jq}) t^{kl} x^p y^q \\ &= \delta^{kp} \delta^{lq} t^{kl} x^p y^q \\ &= t^{kl} x^k y^l \\ &= t(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Allgemeine Transformation eines Tensors unter Drehungen:

$$t \to t' = Rt, t'^{i_1 \dots i_m} = R^{i_1 j_1} \dots R^{i_m j_m} t^{j_1 \dots j_m}$$

Invarianz von $t(\vec{u}_{(1)}, \dots, \vec{u}_{(m)})$ folgt wie oben.

Fortgeschrittener Kommentar: Gruppe wirkt auf Vektoren aus $K \equiv$ Darstellung

Für unser Beispiel der Wirkung von $O(n)$ auf $\mathbb{R}^k$ war das "offensichtlich" mit Tensoren haben wir "nicht triviales Beispiel für Darstellung"

$$\underbrace{R \in O(n)}_{\text{Elemente } R^{ij}} \overset{\text{Darst.}}{\mapsto} D(R) \in \underbrace{n^2 \times n^2\text{-Matrizen}}_{\text{Elemente } D(R)^{ij,kl} = R^{ik} R^{jl}}$$

Dieses $D(R)$ wirkt wie oben beschrieben auf Tensoren:

$$t^{ij} \overset{D(R)}{\mapsto} D(R)^{ij,kl} t^{kl}$$

$D(R)$ ist eine Darstellung von $O(n)$, die verschieden ist von der "definierenden" Darstellung

Transformation von δ^{ij}

$$\delta'^{ij} = R^{ik}R^{jl}\delta^{kl} = R^{ik}R^{jk} = \delta^{ij}$$

$\implies$ δ^{ij} ist ein **invarianter Tensor**

weiteres Beispiel: (für $m = n$: Levi Civita-Tensor)
Wir schreiben nur $m = n = 3$ Fall aus:

$$\varepsilon(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \varepsilon^{ijk}x^iy^jz^k = x^i\varepsilon^{ijk}y^jz^k = \vec{x}(\vec{y} \times \vec{z})$$

Transformation:

$$\varepsilon'^{i_1i_2i_3} = R^{i_1j_1}R^{i_2j_2}R^{i_3j_3}\varepsilon^{j_1j_2j_3} = \varepsilon^{i_1i_2i_3}\det(R) \underset{\substack{\downarrow \\ R \in SO(3)}}{=} \varepsilon^{i_1i_2i_3}$$

Fakt: Falls t_1, t_2 Tensoren vom Rang m_1, m_2 sind, so ist das folgende ein Tensor vom Rang $m_1 + m_2 - 2l_i$:

$$t_1^{i_1\dots i_l i_{l+1}\dots i_m} t_2^{i_1\dots i_l j_{l+1}\dots j_{m_2}} = t^{i_{l+1}\dots i_{m_1} j_{l+1}\dots j_{m_2}}$$

Anwendungen: $\vec{a} \times \vec{v}$ ist ein Pseudovektor:

$$(\vec{a}' \times \vec{b}')^i \equiv \varepsilon^{ijk}a'^jb'^k = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{falls Spiegelung}}}{\pm}\varepsilon'^{ijk}a'^jb'^k = \pm R^{il}\varepsilon^{ljk}a^jb^k = \pm R^{il}(\vec{a} \times \vec{b})^l$$

6.5 Galilei-Transformationen

Bisher: $\mathbb{R}^3$ mit Symmetriegruppe $O(3)$
Jetzt: Physikalische Raum Zeit: Zusätzlich: $t \in \mathbb{R}$
Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{neu}$ Ereignisse $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$
Müssen abschaffen: $\vec{0}$ im Vektorraum. In der Tat: $|\vec{x}|, |\vec{y}|$ sind unphysikalisch, physikalisch ist nur $|\vec{x} - \vec{y}|$, ebenso ist nur $t_1 - t_2$ physikalisch
$\implies$ Symmetrietransformationen:

1. Rotationen: $(t, x) \mapsto (t, Rx), R \in O(3)$
2. Translationen: $(t, x) \mapsto (t + s, x + y), s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3 \implies$ Abschaffung der $0 \in \mathbb{R}$ und $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$"
3. Boosts: $(t, x) \mapsto (t, x + vt), v \in \mathbb{R}^3$ "zeitabhängige Verschiebung"

Die Galilei-Gruppe G ist die von 1., 2. und 3. "generierte" Gruppe. Nicht trivialer Fakt: Jedes $g \in G$ ist schreibbar als $g = \overset{\substack{\text{Boost} \\ \uparrow}}{g_3} \circ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Trans}}}{g_2} \circ \overset{\substack{\text{Rot.} \\ \uparrow}}{g_1}$ Man muss dazu unter anderem

zeigen, dass es zu einem $g_2 \circ g_1 \circ g_2'' \in G$ ein g_2'', g_1'' gibt, sodass $g_2 \circ g_1 \circ g_2' = g_2'' \circ g_1''$
"Boost" = Zunahme (der Geschwindigkeit). Boost einer Trajektorie: $(t, \vec{x}(t)) \mapsto (t, \vec{x}(t) + \vec{v}_0 t)$
$\vec{v} = \dot{\vec{x}}t) \mapsto \vec{v}' = \dot{\vec{x}}t) + \vec{v}_0$

Boost zerstören das Konzept der Gleichörtlichkeit: Seien $(t, x), (t', x)$ zwei Ereignisse am gleichen Ort. Boost $\implies$ $(t, x + vt), (t', x + vt')$, **nicht** mehr am gleichen Ort

6.6 Affiner Raum

Definition 12. $O(3)$ Symmetriegruppe des euklidischen Raumes. "Elegant!".
Besser: Definition des **affinen Raumes**: Gegeben sein Menge A, ein Vektorraum V und eine Abbildung $A \times A \to V, (P, Q) \mapsto \vec{PQ}$ sodass $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$. Außerdem: Zu jeden $P \in A, \vec{V}$ soll es eindeutig ein $Q \in A$ geben, sodass $\vec{=} \vec{PQ}$, das Paar (A, V) heißt affiner Raum

Beispiel 4. Zu jedem Vektorraum gehört ein affiner Raum: Wähle $A \equiv V, V \times V \to V, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{y} - \vec{x}$

Sei (A^4, V^4) ein 4-dimensionaler affiner Raum. (Man denke zum Beispiel an den zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ gehörigen affinen Raum)
Physikalische Raumzeit: $(A^{(4)}, V^{(4)})$ mit

1. Eine lineare Abbildung $V^4 \to \mathbb{R}$ ("Zeitfunktion") (im konkreten Beispiel: $((t, x), (t', x')) \mapsto t' - t$)

2. Sei $\tilde{V}^{(3)} \subset V^{(4)}$ der Raum von Pfeilen zwischen gleichzeitigen Ereignissen ($v \in \tilde{V}^{(3)}$ heißt $T(\tilde{v}) = 0$) Dann hat $\tilde{V}$ ein Skalarprodukt, "Abstandsfunktion". Im konkreten Beispiel: $(t, x), (t, x') \mapsto |x - x'|$

Zusammen bilden 1. und 2. eine Galileische Struktur. Die physikalische Raumzeit ist $(A^{(4)}, V^{(4)})$ mit galileischer Struktur

G sind die Transformationen des $(A^{(4)}, V^{(4)})$, welche seine Galileische Struktur respektieren.

6.7 Dynamik

Dynamik soll invariant sein! Betrachte Trajektorie, die die Bewegungsgleichung erfüllt:

$$(t, \vec{x}(t)), m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

Transformierte Trajektorie:

$$t', \vec{x}'(t') = (t + s, R\vec{x}(t) + \vec{y} + \vec{v}(t + x))$$

Dazu:

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t'^2} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = mfrac\mathrm{d}^2\mathrm{d}t^2(R\vec{x}(t) + \vec{y} + \vec{v}(t + s)) = mR\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = R\vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

$\implies$ Newtonsche Dynamik ist invariant falls Kräfte wie Vektoren transformieren. (hatten wir schon verlangt) Bei Systemen von Massepunkten mit Zentralkräften ist die Kraft gleich dem Gradient, sie besitzt automatisch Vektor-Transformationseigenschaften

Wir fordern bei

$$mR\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = R\vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

eigentlich

$$R\vec{F}(t, \vec{x}(t)) = \vec{F}'(t', x'(t'))$$

Wichtig: Die Transformation von $\vec{F}$ beinhaltet nicht nur Drehung, sondern auch Transformation über das Argument. Betrachte zur Vereinfachung $R = \nVdash \implies \vec{F}'(t', \vec{x}') = \vec{F}(t, \vec{x})$

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte: zum Beispiel Reibung

$$\vec{F}_R = -\alpha(\dot{\vec{x}} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Medium}}}{\vec{u}})$$

6.8 Zusammenfassung:

Allgemeingültiges Schema:

- Beschreibung der Bewegung festlegen (Spielfeld) (hier: affiner Raum und Galileische Struktur)
- Identifikation der Symmetriegruppe (hier Galilei Gruppe)
- Invarianz der Dynamik prüfen beziehungsweise fordern (Spielregeln) (Newtonsches Grundgesetz)

7 Wechsel der Koordinatensystms und Scheinkräfte

7.1 Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum

$V = \mathbb{R}^n, n = 3$
Bisher:
Immer feste Basis

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^i \vec{e}^i$$

$\{e^i\}$ - duch "i" nummerierte Basisvektoren.
Wichtig:

- In Physik gibt es keine ausgezeichnete Basis.

- können Basis / Koordinatensystem wechseln

$$\vec{e}'^k = R^{ik}\vec{e}^k$$

(analog zu $\vec{x} = x^i\vec{e}^i$) **Wichig**: $\{\vec{e}'^i\}$ wieder Basis $\iff R \in GL(n)$
Hier: euklidischer Raum: Orthonormalbasen: $\vec{e}^i\vec{e}^j = \delta^{ij}$
Wenn $\{\vec{e}^i\}$ Orthonormalbasis, so wird $\{\vec{e}'^i\}$ auch eine sein, falls $R \in O(n)$

$$\vec{e}'^i\vec{e}'^j = (R^{ik}\vec{e}^k)(R^{jl}\vec{e}^l) = R^{ik}R^{jl}\delta^{kl} = \delta^{ij}$$

Wir können festen Vektor $\vec{x}$ bezüglich neuer Basis zerlegen:

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= x'^i\vec{e}'^i = x'^iR^{ij}\vec{e}^j = x^j\vec{e}^j \\
&\implies x^j = x'^iR^{ij} \\
&\xRightarrow{\cdot(R^T)^{jk}} x^j(R^T)^{jk} = x'^iR^{ij}(R^t)^{jk} \\
x'^k &= R^{kj}x^j \qquad\qquad \text{(gleiche Formel, wei bei Drehung um } R\text{)}
\end{aligned}$$

Dies ist nicht unerwartet, da $\{\vec{e}'^i\}$ aus $\{\vec{e}^i\}$ durch Drehung R^{-1} hervorgeht:

Dazu: Die Vektoren $\{\vec{e}^i\}$ haben bezüglich der Basis $\{\vec{e}^i\}$ die Komponenten δ^{ij}:

$$\begin{aligned}
\vec{e}^i &= \delta^{ij}\vec{e}^j, (\vec{e}^i)^j = \delta^{ij} \\
\vec{e}'^i &= R^{ij}\vec{e}^j, (\vec{e}'^i)^j = R^{ij}
\end{aligned}$$

also gilt:

$$\begin{aligned}
(\vec{e}'^i)^j &= R^{ij} = (R^{-1})^{ji} = (R^{-1})^{jk}\delta^{ki} = (R^{-1})^{jk}(\vec{e}^i)^k \\
(\vec{e}'^i)^j &= (R^{-1})^{jk}(\vec{e}^i)^k
\end{aligned}$$

$\implies$ Behauptung ist gezeigt

7.2 Aktive und Passive Beschreibung von Symmetrien

- Aktiv: Transformieren pyhsikalisches Objekt
- Passiv: Wechsle Koordinatensystem

Beispiel 5.

- Aktiv: $x \to x' = Rx$. Symmetrieforderung: $\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x} \cdot \vec{y}$, also: Skalarproduktinvariant
- Passiv: $\vec{x}$ fest. Komponenten (Es gilt: $\vec{e}'^i = R^{ij}\vec{e}^j$)

- x^i in Basis $\{\vec{e}^i\}$
- $x'^i = R^{ij}x^j$ in Basis $\{\vec{e}'^i\}$

Symmetrieforderung: Mathematischer Ausdruch für Skalarprodukt soll in neuen Komponenten die **gleiche Form haben**. In der Tat:

- alt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i$
- neu: $\vec{\cdot}\, \vec{y} = x^i y^i = (R^{-1})^{ij} x'^j (R^{-1})^{ik} y'^k = x'^i y'^i \checkmark$

Beispiel 6 Galilei-Transformation.

- Aktiv: $(t, x(t)) \to (t+s, Rx(t) + y + (t+s)v)$.
Symmetrieforderung: Neue Trajektorie ist auch physikalische Bewegung.
- Passiv: Sei $\vec{x}_0 = \vec{a} + \vec{b}t$ der Vektor, der vom alten zum neuen Koordinatenursprung zeigt:
$$\vec{x}_n = \vec{x} - (\vec{a} + \vec{b}t)$$
Bezeichne Komponenten von $\vec{x}_n$ bezüglich der neuen, gedrehten Basis mit x'^j
$$x'(t) = A^{-1}(x - a - bt) = Rx + y + vt$$
mit $R \equiv A^{-1}, y \equiv -A^{-1}a, v \equiv -A^{-1}b$ (könnte auch noch Uhren umstellen $\to s$)
  - Transformation sieht formal so aus, wie im aktiven Fall
  Symmetrieforderung: "Newton" soll gleiche Form haben: Prüfen dies:
$$\ddot{x}' = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{"noch" zeitunabhängig}}}{R}\ddot{x} = R\frac{F}{m} = \frac{F'}{m} \checkmark$$

7.3 Beschleunigte, nichtrotierende Koordinatensysteme

keine Symmetrietransformation! Nichinertialsysteme!
$\vec{x}_0(t)$ beschreibe Bewegung des "neuen" Ursprungs

$$\vec{x}_I = \vec{x}_0 + \vec{x} \implies \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_I - \ddot{v}x_0 \qquad (\textbf{I}\text{nertial})$$
$$m\ddot{\vec{x}} = m\ddot{\vec{x}}_I - m\ddot{\vec{x}}_0 = \vec{F} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Scheinkraft}}}{\vec{F}_s}$$
$$F_s \equiv -m\ddot{\vec{x}}_0$$

$\implies$ Im Nichtinertialsystem bewegt sich ein Punkt so, als gäbe es eine zusätzliche Kraft: $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{F}_s$

7.4 Kleine Drehungen

Definition 13 Spur**.**

$$M_{ii} = ^{(} M) = \sum_i a_i$$

$^{(}M)$ wird als Spur bezeichnet, und entspricht der Summe über die Diagnoalelemente

rotierendes Bezugssystem (NIS)

Drehungen: $R(t) \in SO(u), R^T R = \nVdash$ für $t \sim \epsilon, R(0) = \nVdash$

$$R(\epsilon) = \nVdash + \varepsilon M + O(\varepsilon^2)$$

$$R(\epsilon) R^T(\varepsilon) = (\nVdash + \varepsilon M)(\nVdash + \varepsilon M^T) \stackrel{!}{=}$$

$$= \nVdash + \epsilon(\underbrace{M + M^T}_{0}) \stackrel{!}{=} \nVdash$$

$\Longrightarrow$ M ist antisymmetrisch!, $M_{ij} = -M_{ji}$. Es gibt $N_A = \frac{n(n-1)}{2}$ linear unabhängige Basismatrizen T_a.

Beispiel 7 $n = 3$. Für $n = 3 : N_A = 3$:

$$M = \epsilon_a t_a t_1 \qquad = ($$

$$(T_i)_{j,k} = \varepsilon_{ijk}$$

$$\vec{\epsilon} = |\vec{\epsilon}| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\vec{\epsilon}) = \nVdash + |\epsilon| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(|\vec{\epsilon}|^2) = \begin{pmatrix} 1 & |\vec{\epsilon}| & 0 \\ -|\vec{\epsilon}| & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(|\vec{\epsilon}|^2)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos|\vec{\epsilon}| & \sin|\vec{\epsilon}| & 0 \\ -\sin|\vec{\epsilon}| & \cos|\vec{\epsilon}| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + O(|\vec{\epsilon}|^2)$$

Anwendung:

$$\vec{\Delta}\phi = -\vec{\epsilon}$$

$$R(\vec{\Delta}\phi = \nVdash - \vec{\Delta}\phi\vec{T})$$

$$R(\vec{\Delta}\phi)_{ij} = \delta_{ij} - \Delta\phi_k \varepsilon_{ijk}$$

$$R(\vec{\Delta}\phi)_{ij} v_j = v_i + \Delta\phi_k \varepsilon_{ikj} v_j$$

$$R(\vec{\Delta}\phi)\vec{v} = \vec{v} + \vec{\Delta}\phi \times \vec{v}$$

Trivia: Wenn jemand mit Deltas anfängt, dann hört er auch mit d's auf.

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= v \\
\vec{v}(t+\Delta t) &= R(\vec{\Delta\phi})\vec{v} \\
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} &= \frac{(R(\vec{\Delta\phi})-\not{1})}{\Delta t}\vec{v} = \underbrace{\frac{\vec{\Delta\phi}}{\Delta t}}_{\vec{\omega}}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} \\
\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{\Delta\phi}}{\Delta t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{\phi}}{dt} = \dot{\vec{\phi}}
\end{aligned}$$

7.5 Rotierendes Koordinatensystem

In diesem Abschnitt sei $r_x, \omega_x \in \mathbb{R}^3$
r_I: Geschwindigkeit im Intertialsystem

Im Inertialsystem

$$\begin{aligned}
r_I &= r_0(t) + r_N \\
&= r_0(t) + R(t)r
\end{aligned}$$

Newton im Intertext

$$\begin{aligned}
m\ddot{r}_I &= F_I \\
\implies m\ddot{r}_0 + (R\cdot r)^{\cdot\cdot} &= F_I = R\cdot F \\
\dot{R}(t)\cdot r &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{R(t+\Delta t)-R(t)}{\Delta t}r
\end{aligned}$$

wichtge Formel: $\dot{R}(t)\cdot r = R(\omega\times r)$, damit erhält man:

$$= \frac{(R(\Delta t)-\not{1})}{\Delta t}R(t)r = \underset{\substack{\downarrow \\ R\omega}}{\omega_{IS}}\times R(t)\cdot r = (R\omega)\times(Rr) = R(\omega\times r)$$

$$\begin{aligned}
(Rr)^{\cdot\cdot} &= (\dot{R}r + R\dot{r})^{\cdot} = (R(\omega\times r)+R\dot{r})^{\cdot} = \dot{R}(\omega\times r) + R(\dot{\omega}\times r) + R(\omega\times\dot{r}) + \dot{R}\dot{r} + R\ddot{r} \\
&= R(\omega\times(\omega\times r) + \dot{\omega}\times r + 2(\omega\times\dot{r}) + \ddot{r}) \\
\implies m\ddot{r} &= F - m((R^{-1})\ddot{r}_0 + \underbrace{\omega\times(\omega\times r)}_{F_{Zentrifugal}} + \underbrace{2\omega\times\dot{r}}_{F_{Coriolis}} + \underbrace{\dot{\omega}\times r}_{E_{Tangential}}\ )
\end{aligned}$$

Bemerkung 2 Zentrifugalkraft.

F_z:

$$
\begin{aligned}
(-\omega \times (\omega \times r))_k = -\varepsilon_{ijk}\omega_i\varepsilon_{lmj}\omega_l r_m \\
&= -(\delta_{lk}\delta_{mi} - \delta_{mk}\delta_{li})\omega_l r_m \omega_i \\
&= -(\omega r)\omega_k + r_k(\omega^2)
\end{aligned}
$$

für $\omega \perp r$:

$$\vec{F}_z = m\omega^2\vec{r}$$

Bemerkung 3 Corioliskraft.

F_c zum Beispiel: $r \perp \omega$

$$\vec{F}_c = -2m|\vec{\omega}||\vec{v}|\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = 2m|\omega||\omega v|\vec{e}_2$$

7.6 Trägheitstensor

Massenpunkte bei $\vec{r}_a$

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_a}{\Delta t} = \frac{\vec{\Delta}\phi}{\Delta t} \times \vec{r}_a = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_a}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_A \\
E_{kin} = \sum_a \frac{ma}{2}(\vec{r}^2_a) = \sum_a \frac{m_a}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}\omega_i(r_a)_j\omega_l(r_a)_m \\
&= \sum_a \frac{m_a}{2}(\delta_{jm}\delta_{ij} - \delta_{jl}\delta_{im})\omega_i\omega_l(r_a)_j(r_a)_m \\
&= \sum_a \frac{1}{2}\underbrace{m_a(\Delta_{ij}r_a^2 - (r_a)_i(r_a)_j)\omega_i\omega_j}_{I_{ij}} = \frac{1}{2}I_{ij}\omega_i\omega_j \\
&= \frac{1}{2}\omega^T I\omega \\
I &= \int \mathrm{d}^3r\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Massendichte}}}{\rho(r)}(\nVdash\vec{r}^2 - \vec{r} \otimes \vec{r}^T)
\end{aligned}
$$

$$I_{ij} = \int \mathrm{d}^3r\rho(r)(\vec{r}^2\delta_{ij} - r_ir_j)$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmn} &= N(\delta^{il}\delta^{jm}\delta^k n + \ldots) \\
\delta^{ij} &= i
\end{aligned}
$$