Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

November 27, 2016

Contents

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \Rightarrow B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- $A \Leftrightarrow B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

Direkter Schluss $A \Rightarrow B$

Beispiel m gerade Zahl $\Rightarrow m^2$ gerade Zahl

1. Beweis m gerade $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \Rightarrow m^2 = 4n^2 = 2k,$ wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}\square$

Beweis der Transponerten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \Rightarrow B$ zeigt man $\neg B \Rightarrow \neg A$ $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade

1. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\Rightarrow m^2$ ungerade

   $\exists n \in \mathbb{N}: \; m = 2n{+}1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2k{+}1, k = 2n^2{+}2n \in \mathbb{N} \Rightarrow m^2$ ungerade$\square$

Indirekter Schluss (Beweis durch Wiederspruch) Man nimmt an, dass $A \Rightarrow B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \Rightarrow \neg C$, also ein Wiederspruch

Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

1. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

   $$a^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \Rightarrow b^2 = 2c^2 \Rightarrow b^2 \text{ gerade } \Rightarrow b \text{ ist gerade (schon gezeigt)}$$

   $$\Rightarrow \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \Rightarrow b^2 = 4d^2$$

   Außerdem $b^2 = 2c^2 \Rightarrow 2c^2 = 4d^2 \Rightarrow c^2 = 2d^2 \Rightarrow c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet $\square$

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogennante leere Summe)

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot \ldots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x ¬∈ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$
$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M\text{für die } x \in \ M \Leftrightarrow A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)

  $$\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in M)$$

  ,zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- $$A = B \Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

- $$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge) } \Leftrightarrow A \subset M \wedge A \neq M$$

- $$\emptyset : \text{ leere Menge } \nexists x : x \in \emptyset$$

  . Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

  $$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt
  $$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung
  $$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)

  $$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c)$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A

$$\mathcal{P}\left(A\right) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

Beispiel

$$\mathcal{P}\left(\{1,2\}\right) = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\emptyset\}$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}$, $\left(A_i\right)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen A

Durchschnitt von A

$$\cap_{i\in I} = \{x \mid \forall_{i\in I}\, x \in A_i\}$$

Vereinigung

$$\cup_{i\in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ — Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ — Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$
  $A \cup B = B \cup A$ — Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
  Seien $A, B \subseteq D\, (C_D A := D \setminus A)$, dann gilt

$$C_D\left(C_D A\right) = A$$

$$C_D\left(A \cap B\right) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D\left(A \cup B\right) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \Leftrightarrow x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \Leftrightarrow x \in D \setminus (A \cup B) \ \square$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_i, \ldots, y_n\} \not\Longrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in A_j j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

Beispiel

- $$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
- R^n n-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \nsim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in sogenannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(X) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \to Y \Leftrightarrow D(R) = X, \forall\, x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.
X heißt Definitionsbereich von f
Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)
$x \in X$ heißt Argument
$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

- surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
- injectiv, $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn f surjektiv und injectiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ durch $y \to x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

Bemerkung

$$(x, y) \in \text{ Graph } f \Leftrightarrow (y, x) \in \text{ Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \to Z \text{ ist durch } x \to g\left(f\left(x\right)\right) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d\left(A\right) = I_A : A \to A, \text{ durch } x \to x$$

Beispiel

- $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$
  $$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$
  $(n-1)$ dimensionale sphere in $\mathbb{R}^n$
- Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \to X$
  f heißt Projektion, f surjektiv
  $$f\left(M\right) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen $\oplus_x$ bzw. $\oplus_y$ (zum Beispiel Addition, Ordungsrelation), ho heißt die Abbildung $f : X \to Y$ homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt $\forall\, x_1, x_2 \in X f\left(x_1 \oplus_x x_2\right) = f\left(x_1\right) \oplus_y f\left(x_2\right)$ Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphisumus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},\ \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n, gibt es genau einen "Nachfolger" $n' \left(=: n + 1\right)$
3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. $n' = m' \Rightarrow n = m$
5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:
Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf $\mathbb{N}$ Addition (+), Multiplikation ($\cdot$) und Ordung ($\leq$) einführen. Wir definieren:
$1' = 2, 2' = 3, \ldots\ n+1 := m'\ n+m' := (n+m)'\,;\ n \cdot m' := nm+n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu $\mathbb{N}$ ist Wir definieren $n < m \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} : x+m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:

1. Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt
2. Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n+1)$

Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

Beweis: Wir definieren die Tailmenge $M \subseteq \mathbb{N},\ M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ $\square$

Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis

1. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
2. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2)\,\square$$

Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1} x$$

(iterative (rekursive) Definition)
Auf $\mathbb{N}$ sind diese elementaren Operationene erklärt:

- Addition $a + b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Vorraussetzungen):
  - Subtraktion $a - b$
  - Division $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$ ist bezüglich "$-$" oder "/" nicht vollständig, das heißt $n + x = m$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$ Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
  Negative Zahl $(-n)$ ist definiert duch $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $(bx = y)$

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$ sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. $\mathbb{K}$ heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kummutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$:
  1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativität
  2. $a + b = b + a$ Kommutativität
  3. $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$ Existenz des Nullelement
  4. $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$ Existstenz des Nagativen
- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppte, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$
  1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assozativität
  2. $a \cdot b = b \cdot a$ Kummutativität
  3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ Existenz des Einselement
  4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ Inverse
- Verträglichkeit
  1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributivität

Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnung "$\leq$" duch

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ in folgendem Sinne verträglich (Axiom M0):

- $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a \cdot b$

Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+ \left(\mathbb{Q}_{\geq 0}\right)$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & n = 0 \\ \exists f : A \to \{1, \ldots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \to \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt überabzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

Beispiel $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & x < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen $f\left(\mathbb{Z}\right) = \mathbb{N}$
  Offenbar $f\left(\mathbb{Z}\right) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f\left(\mathbb{Z}\right)$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f\left(z\right) = n$. Man unterscheide:
  - n gerade $\to$ Wähle $z = \frac{n}{2}$
  - n ungerade $\to$ $z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f\left(z_1\right) = f\left(z_2\right)$
  ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$, denn sonst währe $f\left(z_1\right)$ ungerade und $f\left(z_1\right)$ gerade **Wiederspruch**. Falls
  - $z_1, z - 2 \geq 0 \Rightarrow 2z_1 = f\left(z_1\right) = f\left(z_2\right) = 2z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$
  - $z_1, z - 2 < 0 \Rightarrow -2z_1 - 1 = f\left(z_1\right) = f\left(z_2\right) = -2z_2 - 1 \Rightarrow z_1 = z_2$ $\square$

Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{R}$ überabzählbar

Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (2,2) \to (1,3) \to (2,3) \to (3,2) \to (3,1)$$

Korollar 1.30 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ abzählbar $\Rightarrow M_1 \times \ldots \times M_n$ abzählbar.

Beweis Durch vollständige Induktion $M_1 \times (M_2 \times \ldots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

Satz Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ist überabzählbar. (Zum Beispiel: $1,0,0,0,\ldots,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{k-te Stelle}}}{1},\ldots,0,\ldots$)

Beweis M ist unendlich, denn die Folgen $f_k : 0,,\ldots,0,1,0,\ldots$ sind parrweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar. Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Abzählung mit $f_k = (z_{knn\in\mathbb{N}})$.

$$\begin{array}{lllll} 1 & 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 1 & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{array}$$

$f : 0010$ Man setze $f = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k \, \forall \, k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar. ("Cantorsche Diagonalverfahren").

2.6 Ordnung

2.6.1 Definition

Sei A eine Menge. Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Teilordnung (Halbordnung) auf A, wenn $\forall \, y, x, z \in A$ gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Symmetrie)

3. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

Wenn außerdem noch $\forall\, x, y \in A$ gilt:

4. $x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit je zweier Elemente)

so heißt R (totale) Ordung auf A. $(A,≤) heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

Beispiel

1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge

2. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}\,(A)$ einer Menge A eine Teilordnung "$\leq$":

$$B \leq C \Leftrightarrow B \subseteq C\, \forall\, B, C \in \mathcal{P}\,(A)$$

   Beweis: 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordung). Wähle $B, C \in \mathcal{P}\,(a)\,, B, C \neq \emptyset, B \cap C = \emptyset$. Dann gilt weder $B \subseteq C$ noch $C \subseteq B$ □

3. Sei $F := \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren $f \leq g \Leftrightarrow \forall\, x \in A : f\,(x) \leq g\,(x)$
   (1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls A mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

2.7 Maximum und Minimum einer Menge

2.7.1 Definition

Sei $(A, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge, $a \in A$
Maximum:

$$a = \max A \Leftrightarrow \forall\, x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \max A \Leftrightarrow \forall\, x \in A : a \leq x$$

2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist a eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall\, x \in A \begin{cases} x \leq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 \leq a_1 \\ a_1 \leq a_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

2.8 Schranken

Sei $(A, \leq)$ eine (total geordnete) Menge, $B \subseteq A$

1. $S \in A$ heißt obere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall\, x \in B : x \leq S$
   $S \in A$ heißt untere Schranke zu $B \Leftrightarrow \forall\, x \in B : S \leq x$

2. $\bar{S}\,(B) := \{S \in A \mid S$ S ist untere Schranke zu $B\}$
   $\underset{\sim}{S}\,(B) := \{S \in A \mid S$ S ist obere Schranke zu $B\}$

3. Existiert $g := \min \underset{\sim}{S}\,(B)$ beziehungsweise $g := \max \bar{S}$ so sagen wir:
   $g = \sup B$ (kleinste obere Schranke, <u>supremum</u>, obere "Grenze" von B in A)
   $g = \inf B$ (größte obere Schranke, <u>infimum</u>, untere "Grenze" von B in A)

2.8.1 Bemerkung

1. Existiert $\max B = \bar{b}$, so folt $\sup B = \bar{b}$, denn $\bar{b} \in \underset{\sim}{S}\,(B)$ nach Definition.

   $$s \in \underset{\sim}{S}\,(B) \Rightarrow \bar{b} \leq s, \text{ da } \bar{b} \in B$$

   Ebeso gilt: $\exists \min B = \underline{b} \Rightarrow \inf B = \underline{b}$

2.8.2 Beispiel

1. $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \mathbb{R}, \ \left(1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
   - Es gilt $1 \in B, \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \leq 1$, daher folgt $\max B = \sup B = 1$
   - Sei $s \leq 0$, dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : s \leq \frac{1}{n}$, also $s \in \bar{S}\,(B)$
     Sei $s > 0 \Rightarrow s > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{s}$, also $s \notin \bar{S}\,(B)$
     Es folgt $\bar{S}\,(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq 0\}$ insbesondere $0 \in \bar{S}\,(B)$
     Ferner gilt $\forall\, s \in \bar{S}\,(B) : s \leq 0 \Rightarrow \underline{0} = \max \bar{S}\,(B) = \inf B$

2. $A = \mathbb{Q}, B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$. Es gilt $0 = \min B = \inf B$, aber $\sup B$ existiert nicht in $\mathbb{Q}$

2.9 Reelle Zahlen

$x^2 = 2$ hat keine Lösungen in $\mathbb{Q}$. Allerdings können wir $\sqrt{2}$ "beliebig gut" durch $y \in \mathbb{Q}$ approximieren, das heißt $\forall\, \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{Q} : 2 - \varepsilon \leq y^2 \leq 2 + \varepsilon$ Das motiviert die folgende Vorstellung:

1. $\mathbb{Q}$ ist "unvollständig"

2. $\mathbb{Q}$ ist "dicht" in $\mathbb{R}$

2.9.1 Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)

Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge hat ein Supremum oder Infimum.

2.9.2 Axiomatischer Standpunkt

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ (genannt Menge der reellen Zahlen) mit Addition, Multiplikation, Ordung, die die Definition eines Körper und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und $(\mathbb{R},+,\cdot)$ mit "$\leq$" eine Ordung bildet.

2.9.3 Bemerkung

1. Bis auf Isomorphie gibt es höchstens ein solches $\mathbb{R}$, das heißt $\tilde{\mathbb{R}}$ ein weiteres System der reellen Zahlen ist, dann $\exists$ bijektive Abbildung $f:\mathbb{R}\to\tilde{\mathbb{R}}$ die bezüglich Additoin, Multiplikation, Ordung eine Homomorphie ist.

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R}:$$

$$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$$
$$f\left(xy\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$$
$$x\leq y\Rightarrow f\left(x\right)\leq f\left(y\right)$$

2. $\mathbb{N}$ (und damit auch $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$) lassen sich durch injektive Homomorphismus $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ einbetten

$$g\left(\tilde{0}_{\in\mathbb{N}}\right)=0_{\in\mathbb{R}}$$
$$g\left(\tilde{n}_{\in\mathbb{N}}+1\right)=g\left(n_{\in\mathbb{R}}\right)+1$$
$$g\left(1_{\in\mathbb{N}}\right)=1_{\in\mathbb{R}}$$

2.9.4 Konstruktiver Standpunkt

Wir können $\mathbb{R}$ ausgehend von $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Methode der Abschnitte Jede reelle Zahl wird charakterisiert durch ein "rechts offenes, unbeschränktes Interval", dessen "rechte Grenze" die Zahl erstellt.

$$\mathbb{R}:=\{A\subseteq\mathbb{Q}\begin{cases}A\neq\emptyset\\ x\in A,y\leq x\Rightarrow y\in A\\ \forall\, x\in A\exists y\in A,x<y\end{cases}$$

Mehtode der Cauchy-Folgen Jede reelle Zahl wird charaktierisiert als "Grenzwert" eine Klasser äquivalenter "Cauchy Folgen" aus $\mathbb{Q}$ (später)

2.9.5 Definition 1.37

- $$x \in \mathbb{R} \text{ heißt } \begin{cases} \text{positiv} & 0 < x \\ \text{nichtnegativ} & 0 \leq x \\ \text{negativ} & x < 0 \\ \text{nichtpositiv} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

- Die Vorzeichen- oder Signumfunktion
$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2.9.6 Satz 1.38

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$
   Beweis:
$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 &= |x|^2 + 2xy + |y|^2 && (1) \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y^2| && (2) \\ &= (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x + y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y| && \square \end{aligned}$$
3. $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

2.9.7 Satz 1.39

1. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
   Beweis:
$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y| && (3) \\ |y| &= |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y| && (4) \\ ||x| - |y|| &= \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y| && \square \end{aligned}$$
2. $$|x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon \\ y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \end{cases}$$

Beweis:

$$|x-y| = \max\{x-y, y-x\} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \leq \varepsilon \\ y-x \leq \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y+\varepsilon \\ y-x \leq \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow y-\varepsilon \leq x \leq y+\varepsilon \tag{5}$$

Vertausche x und $y \Rightarrow x-\varepsilon \leq x+\varepsilon$ $\square$

2.9.8 Definition 1.40

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a, b[$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts-halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links-halboffenes Intervall
- $\varepsilon > 0, I_\varepsilon(x) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon = B_\varepsilon(x)\,(\text{Kugel})\}$

2.9.9 Lemma 1.41

Es gilt $y \in I_\varepsilon(x) \Rightarrow \exists \delta > 0 : I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$

Beweis Sei $y \in I_\varepsilon(x) \Rightarrow |x-y| < \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon - |x-y| > 0$ Wähle $0 < \delta < \varepsilon - |x-y|$. Es ist nun zu zeigen $I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$, das heißt $z \in I_\delta(y) \Rightarrow z \in I_\varepsilon(x)$. Es gilt

$$\begin{aligned} & z \in I_\delta(y) \Rightarrow |z-y| < \delta && (6) \\ \Rightarrow & |z-x| = |z-y+y-x| \leq |z-y| + |y-x| \leq \delta + |x-y| < \varepsilon && (7) \\ \Rightarrow & z \in I_\varepsilon(x) && \square \end{aligned}$$

2.9.10 Definition 1.42

A, B seien geordnete Mengen, $f : A \to B$ heißt:

- monoton $\begin{cases} \text{wachsed} & x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \\ \text{fallend} & x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \end{cases}$
- streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \\ \text{fallend} & x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \end{cases}$

Beispiel 1.43 $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis Induktion + Axiom M0 □

2.9.11 Lemma 1.44

Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}, f : M \to N$ streng monoton und bijektiv. Dann ist f^{-1} streng monoton.

Beweis Wir betrachten den Fall f streng monoton wachsend. Seien $y1,y2 ∈ N, y1 < y2,x1 = f-1(y1), x2 = f-1(y2).
Behauptung $x_1 < x_2$ (sonst wäre $x1 ≥ x2).
Falls $x_1 > x_2 \xrightarrow{\text{streng monoton}} f(x_2) > f(x_2)$ **Widerspruch** zu $y_1 < y_2$
Falls $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$ **Widerspruch** zur Annahme $y_1 < y_2$ □

2.9.12 Definition 1.45 Produktzeichen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^n := \prod_{j=1}^{n} a$ und für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$ $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

2.9.13 Satz 1.46

Es gilt $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),$n, m \in \mathbb{N}_0$ (beziehungsweise $\mathbb{Z}$)

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m =$ an m$
3. $(ab)^m = a^m b^m$

Beweis Zunächst f+r $n, m \in \mathbb{N}_0$ durch Indukton nach n, dann für $n, m \in \mathbb{Z}$ (mit Hilfe der Definition von a^{-n})

2.9.14 Definition 1.47

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$$

2.9.15 Lemma 1.48

Sei $k, n \in \mathbb{N}_0$

1. $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$
   $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

2.9.16 Satz 1.49

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Beweis Induktion:

- Induktionsanfang: $n = 0, (x+y)^0 = 1, \binom{0}{j} x^0 y^0 = 1$ nach Definition
- Induktionsschritt $n \to n+1:$

  $(x+y)^{n+1} = (x+y)\,(x+y)^n$

  mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&= (x+y) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j+1} y^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^{j+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n+1-j} y^j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i}_{\text{Substitution } i:=j+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}\right)}_{\binom{n+1}{j} \text{nach Lemma 1.48}} x^{n+1-j} y^j + y^{n+1} \\
&= \sum j = 0^{n+1} \binom{n+1}{j} x^{n+1-j} y^j
\end{aligned}$$

□

2.9.17 Folgerung 1.50

1. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$
2. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

Beweis: Setze in Binomische Formel $x = 1, y = 1$ beziehungsweise $y = -1$ □

2.9.18 Lemma 1.51

Sei $m \in R$ nach oben (beziehungsweise nach unten) beschränkt
Dann gilt

1. $s = \sup M \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists x \in M : s - \varepsilon < x\,(\geq s)$
2. $l = \inf M \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists x \in M : (l \leq)\, x < l + \varepsilon$

Beweis Wir beweisen 1.
$s \neq \sup M \Leftrightarrow s$ ist nicht die kleinste obere Schranke von $m \Leftrightarrow$ es gibt eine kleinere obere Schranke $s' = s - \varepsilon$ von $M \Leftrightarrow$ nicht $\forall\, \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > s - \varepsilon$ $\square$

2.9.19 Lemma 1.52

$\mathbb{N}$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}$

Beweis sonst $\exists x = \sup \mathbb{N}$ (nach Vollständigkeits Axiom), x kleinste obere Schranke $\xRightarrow{[[\text{Lemma 1.51}]]} \varepsilon = \frac{1}{2} \exists m_o \in \mathbb{N} : x - \frac{1}{2} < m_0 \Rightarrow m_0 + 1 \in \mathbb{N}, m_0 + 1 > x + \frac{1}{2} > x \Rightarrow x$ inst nicht die obere Schranke von $\mathbb{N}$ $\square$

2.9.20 Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung)

$$\forall\, x \in [-1, \infty)\,, n \in \mathbb{N}_0 : (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis Beweis durch Induktion:

- **IA**: $n = 0$ klar
- **IS**:

$$\begin{aligned} n \to n+1 : (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n\,(1+x) && (8)\\ &\geq (1+nx)\,(1+x) = 1 + nx^2 + (n+1)\,x && (9)\\ &\geq 1 + (n+1)\,x \text{ da } x^2 \geq 0 && \square \end{aligned}$$

2.9.21 Folgerung 1.54

1. Sei $y \in (1, \infty)$. Dann gilt $\forall\, c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 y^n \in (c, \infty)$ ("Konvergenz" von y^n gegen 0)
2. Sei $y \in (-1, 1)$. Dann gilt $\forall\, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_0 : y^n \in I_\varepsilon\,(0)$ ("Konvergenz" y^n gegen 0)

Beweis

1. Für $x = y - 1 > 0$ gilt dann nach 2.9.20

   $$\underbrace{(1+x)^n}_{y} \geq 1 + nx \Rightarrow y^n > nx$$

   Nach 2.9.19 existiert für $c > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{c}{x} \Rightarrow$

   $$\forall\, n \geq n_0 : y^n > nx \geq n_0 x \geq \frac{c}{x} x = c \Rightarrow \forall\, n \geq n_0 : y^n \in (c, \infty)$$

2. Für $x = \frac{1}{|y|} > 1 \xRightarrow{\text{nach [[1541]] mit } c=\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|y^n|} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |y^n| < \varepsilon \square$$

2.9.22 Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel)

$$\forall m \in \mathbb{N}, a \in [a, \infty) \text{ gilt } \exists! x \in [0, \infty) : x^m = a$$

Beweis (Skizze 1, 2) Wir geben ein Iterationsverfahren

$$p_3(x) = m$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_3 > 0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0, m \geq 2$, x muss die Gleichung $x^m - a = 0$ lösen, das heißt Nullstelle der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^m - a$ suchen. Diese approximieren wir nach dem **Newton Verfahren**
x_0 sodass $x_0^m - a \geq 0$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftarrow \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

$$x_{n+1} := \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{F(x_n)} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}}$$

$$= x_n \left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)$$

Hoffnung: $x_n \to x^*$
`Skizze 3`
Sei $x_0^m > a$. Wir zeigen

1. $x_n > 0$
2. $x_n^m \geq a$
3. $x_{n+1} \leq x_n$

Beweis:

1. Induktion
2. Induktion
   - $n = 0, x_0^m \geq \Rightarrow x_0 > 0$, da $a > 0, x_0 \geq 0$

- $n \to n+1$

$$x_n > 0, x_n^m \geq a \Rightarrow x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) \geq 0$$

weil

$$x_{n+1}^n = \underbrace{x_n^m}_{\geq 0} \left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)^m \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} x_n^m \left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) = 0$$

$\Rightarrow x_{n+1} > 0$, da $a > 0$

3. Nach 2:
$$x_n^m \geq a \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{x_n^m}\right) \leq 1$$
Nach 1:
$$x_m > 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) < x_n$$
Wegen 1 ist $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nach unten beschränkt $\Rightarrow$
$$x := \inf M \text{ existiert}$$
Wir wollen zeigen, dass $x^m = a$. Es gilt
$$x \leq x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) x_n + \frac{1}{m} \frac{a}{x_n^{m-1}}$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{m}\right) x_n + \frac{a}{m} \sup\{\frac{1}{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0}\}$$

4. Es gilt nach nach 2
$$a \leq \inf\{x_n^m \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^m = x^m$$
und damit $x > 0$
Ferner gilt
$$y = \sup\{\frac{1}{x_n^{m-1}} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \inf\{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0\}^{-1}$$
mit 2.9.23
$$= \left(\frac{1}{\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}\right)^{m-1} = \frac{1}{x^{m-1}} \Rightarrow ay \leq \frac{a}{x^{m-1}}$$

5. Von oben wissen wir, dass $x \leq ay$
$$\Rightarrow x \leq ay \leq \frac{a}{x^{m-1}} \Rightarrow x^m \leq a$$

Aus 4 und 5 folgt $x^m = a$ $\square$

2.9.23 Lemma 1.56

1. Seien für $n \in \mathbb{N}_0 : y_n > 0$ und $\inf\{x_n \mid x \in \mathbb{N}_0\} > 0$
   Dann gilt
   $$\sup\{\frac{1}{y_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \frac{1}{\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$$
2. Seien für $n \in \mathbb{N}_0, y_n > 0, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:
   $$\inf\{y_n^k \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^k$$

(ohne Beweis)

3 Komplexe Zahlen

Motivation: $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$
Wir betracheten die Menge der Paare $\{x, y\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf denen die Addition und Multiplikation wie folgt definiert ist:

- (KA) $\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_2 + y_2\}$
- (KM) $\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = \{x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1\}$

3.1 Komplexer Zahlkörper

1. Die Menge der Paare $z = \{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition 3 und Multiplikation 3 bildet den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** mit den neutralen Elementn $\{0, 0\}$ und $\{1, 0\}$
2. Die Gleichung $z^2 + \{1, 0\} = \{0, 0\}$ hat in $\mathbb{C}$ zwei Lösungen, welche mit $\imath := \{0, \pm 1\}$ bezeichnet werden
3. Der Körper $\mathbb{R}$ ist mit der Abbildung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$ isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$

3.1.1 Beweis

1. Die Gültigkeit des Kommutativitäts-, Assoziativs-, und Distributibitätsgesetzes verifiziert man durch Nachrechenen.
   Neutrale Elemente: Wir lösen die Gleichung $a + z = \{0, 0\}$ für beliebige gegebene $a \in \mathbb{C}, a = \{a_1, a_2\}$
   $$\Rightarrow z = \{-a_1, -a_2\}$$
   $$a \cdot z = \{1, 0\}$$
   $$z = \frac{1}{a} := \{\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\}, \text{ weil } a \cdot \frac{1}{a}$$
   $$\text{weil } a\frac{1}{a} = \{a_1\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_2a_1}{a_1^2 + a_2^2}\}$$

2. $i := \{0,1\}$ hat die Eigenschaft

$$1+\imath^2 = \{1,0\} + \{0^2 - 1^2, 0\} = \{0,0\} \Rightarrow 1+\imath^2 = 0$$

   Ähnlich $1+(-\imath)^2 = 0$

3. Die Zuordnung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x,0\} \in \mathbb{C}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf eine Untermenge von $\mathbb{C}$ ab, welche bezüglich der komplexen Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist □

3.2 Notation

$z = \{x,y\} =: x + \imath y,\ x,y \in \mathbb{R}$

- x ist Realteil $x = \Re z$
- y ist Imaginärteil $x = \Im z$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \imath y_1) + (x_2 + \imath y_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{\Re(z_1+z_2)} + \imath \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\Im(z_1+z_2)}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_1 + \imath y_2) = x_1x_2 + \imath y_1 x_2 + \imath y_2 x_1 + (\imath y_1)(\imath y_2) = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\Re(z_1z_2)} + \imath \underbrace{(x_1y_2 + y_1x_2)}_{\Im(z_1,z_2)}$$

3.3 TODO Graphische Darstellung

3.4 Bemerkung

Die reellen Zahlen sind durch $\Im z = 0$ charakterisiert.

$$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 + \imath y_i = x_2 + \imath y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

3.5 Korollar 1.59

Jede quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0,\ p,q \in \mathbb{R}$$

besitzt in $\mathbb{C}$ genau zwei Lösungen

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} & p^2 \geq 4q \\ -\frac{1}{2} \pm \imath\frac{1}{2}\sqrt{|p^2 - 4q|} & p^2 - 4q < 0 \end{cases}$$

3.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung der Form

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0$$

hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung. Beweis → Funktionstheorie

3.7 Betrag

Für komplese Zahlen lässt sich ein Absolutbetrag definieren

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Damit:

$$x = \qquad r\cos\alpha y = \qquad r\sin\alpha z = \qquad x + \imath y = r\left(\cos\alpha + \imath\sin\alpha\right) \tag{10}$$

3.8 Konjugation

Zu einem $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ definieren wir eine konjugierte komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \imath y \in \mathbb{C}$$

Dann gilt

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

Aus der Definition:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$
- $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $y = \frac{z-\bar{z}}{2\imath}$

4 Folgen

Eine Folge von reellen Zahlen wird gegeben durch eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$$

Wir bezeichnen die Folge auch mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
Topologische Struktur auf Mengen.

- Abstände in $\mathbb{R}^1$ Betrag $|x - y| \xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}}$ Norm / Metrik
- Umgebung in $\mathbb{R}^1$ ε-Intervall $\xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}}$ Kugel Umgebung

Wir betrachten Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ (oder $\mathbb{C}$)

4.1 Definition 2.1 Konverenz

Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) gegen den Grenzwert (oder Limes) $a \in \mathbb{K}$ konvergiert

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \ \left(a = \lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ von einem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists n\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_\varepsilon a_n \in I_\varepsilon\left(a\right)$$

4.2 Folgerung 2.2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beziehungsweise fallende Folge reeller Zahlen $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und sei nach oben beziehungsweise unten beschränkt. Dann gilt

$$a_n \to \sup M, a_n \to \inf M$$

Beweis → Übungen

4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge wenn:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(Cauchy Kriterium)

4.4 Definition 2.4 Teilfolge

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Auswahl $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei a_{n_k} auch die Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind

Beispiel 1 Beispiel 2.5.

$$a_n = \frac{1}{m}$$

ist eine Cauchy-Folge. Für ein $\varepsilon > 0$ wählen wir n_ε so dass $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Für beliebiges $n \geq m > N$

$$|a_m - a_n| = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}| = \frac{n-m}{mn} \leq \frac{n}{mn} = \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon\square$$

Satz 1 Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

Aus dieser Teilfolge kann man eine weitere Teilfolge

$$\left(a_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$$

extrahieren

$$|a_{n_{k_{i+1}}}| > 2|a_{n_{k_l}}| \quad l \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$|a_{n_{k_{i+1}}} - a_{n_{k_l}}| \geq |a_{n_{k_{i+1}}}| - |a_{n_{k_l}}| > |a_{n_{k_l}}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

im Widerspruch zur Cauchy-Folgen Eigenschaft. $\square$

Satz 2 Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge**.**

Beweis.

$$
\begin{aligned}
a_n \xrightarrow[k\to\infty]{} a &\Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_\varepsilon : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \forall\, n, m \in n_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

□

Lemma 1. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) welche gegen $a \in \mathbb{K}$ und $\tilde{a} \in \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist $a = \tilde{a}$.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch.
Falls $|a - \tilde{a}| > 0$, dann

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_\varepsilon \varepsilon = |a - \tilde{a}|, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ein m_ε, sodass

$$|a_n - \tilde{a} < \frac{\varepsilon}{2}|\, \forall\, n \geq m_\varepsilon$$

Dann für $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$:

$$|a - \tilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon ↯$$

Widerspruch $\Rightarrow a = \tilde{a}$ □

Bemerkung 1. Die Mengen Abständen heißen *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert

Definition 1 Häufungwert, Häufungspunkt**.** Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenelemente a_n gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$

Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge M von $\mathbb{K}$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ existieren unendlich viele $x \in M$, sodass $|a - x| < \varepsilon$

Beispiel 2.

1. $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
   - divergente Folge
   - besitzt 2 Häufungswerte $a^{(1)} = 1, a^{(2)} = -1$

2. Wir nehmen $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ und definieren eine neue Folge c_n sodass

$$
\begin{aligned}
c_{2n} &:= b_n, n \in \mathbb{N} \\
c_{2n+1} &:= a_n, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

   $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 2 Häufungswerte a und b

Bemerkung 2. Nach 1 hat die konvergente Folge 1 Haufungswert

Lemma 2 2.11. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Cauchy-Folge in* $\mathbb{K}$ *und* a *ein Häufungswert von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *dann konvergiert* $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \,\forall\, n, m > n_\varepsilon \text{ (aus Cauchy-Folge)}$$

und $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ mit

$$|a - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (Häufungswert)}$$

Dann folgt

$$\forall\, n > m_\varepsilon : |a - a_n| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - a_n| < \varepsilon \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$ □

Satz 3. *A abgeschlossen* $\Leftrightarrow$ *(a Häufungspunkt von* $A \Rightarrow a \in A$*)* A *abgeschlossen in* M $\Leftrightarrow M \setminus A =: CA$ *offen*

Beweis. ($\Leftarrow$):
Sei jeder Häufungspunkt von A in A $x \in CA\,(= \mathbb{R} \setminus A) \Rightarrow x$ kein Häufungspunkt von $A, x \notin A$

$$\Rightarrow \varepsilon : I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA$$

$\Rightarrow CA$ offen $\Rightarrow A$ abgeschlossen
($\Rightarrow$):
Sei A abgeschlossen, also CA offen, ist Häufungspunkt $x \notin A$ das heißt $x \in CA$, so gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA \Rightarrow I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset\text{lightning}$$

Widerspruch zur Definition von Häufungspunkt $\Rightarrow$ jeder Häufungspunk von A ist in A □

Lemma 3 2.14. *Jede Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ *besitzt eine monotone Teilfolge*

Beweis. Sei $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, k \geq n, a_n \geq a_k\}$

- Fall 1: B unendlich. Wir zählen $B \subseteq \mathbb{N}$ monoton wachsed \

$$n_0 = \min B$$
$$n_{k+1} = \min\{n \in B, n > n_k\}$$

  Dann ist die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend

- Fall 2: B ist endlich oder leer

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 : n \notin B$$

das heißt

$$\exists k \leq n : a_n < a_k$$

Damit können wir definieren

$$n_{k+1} = \min\{k \geq n_k : a_{n_k} < a_k\}$$

und die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsed

$\square$

Beispiel 3. 1. $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \quad B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ monoton fallend

2. $a_n = (-1)^n n, (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monotone Teilfolge

Satz 4 Satz von Bolzano Weierstrass. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ (gilt in $\mathbb{R}^n$!) Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *A ist beschränkt abgeschlossen*

2. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A hat einen Häufungswert in A*

3. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A hesitzt eine in A konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*

Beweis. Wir zeigen $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1 \Rightarrow 3$
$3 \Rightarrow 2$:
Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ a ist auch der Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$2 \Rightarrow 1$:

1. Beschränktheit: Angenommen dies ist falsch. Dann

$$\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A : |a_n - a| \geq n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \ \ (a \in A)$$

Nach Voraussetzungen hat jede diese Folge einen Häufungspunkt $x \in A$ und es gilt

$$|x - a| \geq |a_n - a| - |a_n - x| \geq n - |x - a_n|$$

Dabei gilt $|x - a_n| < 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ (aus Häufungswert)

$$\Rightarrow |x - a| \geq n - 1$$

Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ $\lightning$

2. Abgeschlossenheit: Wir nutzen Satz 3 Zu zeigen: wenn a Häufungspunkt von $A \Rightarrow a \in A$ Für

$$I_{\frac{1}{n}}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \frac{1}{n}\}$$

gilt

$$I_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_n \in A : |a_n - a| < \frac{1}{n}$$

Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$, da $\frac{1}{n} \to 0$ Nach Voraussetzung hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert $\tilde{a} \in A$. Wir zeigen $a = \tilde{a}$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned}
&\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon && \text{(Aus } a_n \to a\text{)}\\
&\exists m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |\tilde{a} - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} && \text{(Aus Häufungswert)}\\
&\Rightarrow |a - \tilde{a}| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon}| < \varepsilon\\
&\Rightarrow |a - \tilde{a}| = 0\\
&\Rightarrow \tilde{a} = a \in A
\end{aligned}$$

$1 \Rightarrow 3$:
Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge (nach 3), (a_{n_k}) ist beschränkt, da A beschränkt ist $\Rightarrow (a_{n_k})$ ist konvergent (4.2)
Wir müssen zeigen, dass

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \in A$$

Angenommen $a \notin A \Rightarrow a \in \mathcal{C}A, \mathcal{C}A$ ist offen

$$\Rightarrow \exists I_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{C}A \Rightarrow I_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$$

Nun ist aber mit geeigneten $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_\varepsilon : a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) : a_{n_k} \in A \Rightarrow a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) \cap A$$ □

Bemerkung 3.
- Erweiterung zu $\mathbb{R}^n$ möglich
- Ein Raum heißt folgenkompakt, wenn jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge hat
  - Nach B-W Satz ist $\mathbb{R}\,(\mathbb{R}^n)$ folgenkompakt
- In $\mathbb{R}$ alle Cauchy-Folgen konvergieren
  - Cauchy Folge in $\mathbb{R} \Rightarrow$ beschränkt und Wertemenge ist abgeschlossen $\xRightarrow{B-W Satz}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungswert in $A \overset{2}{\Rightarrow}$ konvergiert gegen $a \in A$

4.5 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Satz 5. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{K}\,(\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C})$

$$b_0 \neq 0 \,\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Satz 6 2.15. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $a_n \leq b_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2. $|a_n| \leq b_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\lim\limits_{n\to\infty a_n}\right| \leq \lim b_n$

Beweis. 1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

$$\exists n_\varepsilon : \forall\, n \geq n_\varepsilon : b_n \leq \lim_{k\to\infty} b_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{k\to\infty} b_k + \varepsilon \,\forall\, \varepsilon > 0$$
$$\Rightarrow \lim_{\to\infty} a_k \leq \lim_{k\to\infty} b_k$$

2. Wir wählen $a_n = |a_n|$ und müssen noch zeigen

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty}| a_n \qquad \text{(Übung)}$$

□

4.6 Geometrische Folge

Die geometrische Folge ist definiert durch

$$a_n = cq^n$$

Lemma 4 2.16. $\forall\, q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ *konvergiert die geometrische Folge $a_n = cq^n$ gegen Null.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Annahme ist $|q| < 1 \Rightarrow |q|^{-1} > 1$, somit $|q|^{-1} = 1 + x$ für ein $x > 0$.

Zu zeigen: $|cq^n - 0| < \varepsilon$ für genug große n, das heißt

$$c\left(\frac{1}{1+x}\right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n$$

Das Archimedische Axiom garantiert die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n_0 > \frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x} = \frac{c-\varepsilon}{x\varepsilon}$$

$$\forall\, n \geq n_0 : \frac{c}{\varepsilon} = \left(\frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x}x + 1 < n_0 x + 1 \leq nx + 1\right)$$

daraus folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n \Rightarrow cq^n \to 0 \qquad \square$$

Folgerung 1 2.17. Die geometrische Reihe

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

konvergiert für $|q| < 1$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

Beweis.

zu Beweisen mit Induktion

$$(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n) = 1 + q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n - \frac{1}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}-1}{1-q} = -\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

$$|S_n - \frac{1}{1-q}| = c|q|^n < \varepsilon \,\forall\, n \geq n_\varepsilon$$

$c = \left|\frac{1}{1-q}\right|$

$$s_n \to \frac{1}{1-q} \qquad \square$$

Beispiel 4 2.18.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} \leq \lim\limits_{n\to\infty} cq^n$ mit $|q| < 1$
2. $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1+1_n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$
3. $a_n = \sqrt[m]{x}$, x gegeben, $\xrightarrow{n\to\infty} 1$ Übungen
4. $a_n = \sqrt[n]{m} \xrightarrow{n\to\infty} 1$
5. $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
   - beschränkt: $a_n < 3 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$
   - $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, Limes ist sogennante Zahl e
6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiev definiert: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Fibonacci Folge

4.7 Umgebung

Definition 2 2.19. $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$

Folgerung 2 2.20. Aus der Definition folgt

1. Sei $U_i, i \in I$ Umgebung von a, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ Umgebung von a
2. Sind $U_1, \ldots, U_n$ Umgebung von a, so ist auch $U_1 \cap \ldots U_n$ Umgebung von a
3. $\forall$ Umgebung von a : $\exists$ Umgebung von a, sodass $\forall y \in V, U$ Umgebung von y ist

Beweis. 1. Für irgendein

$$i_0 \in I \, \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

2. Es gilt nach Voraussetzung $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n > 0$ mit $I_{\varepsilon_i}(a) \subseteq U_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Folglich gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\} > 0,\ I_\varepsilon(a) \subseteq U_i \, (\forall i = 1, \ldots, n) \Rightarrow I_\varepsilon(a) \subseteq U_1 \cap \ldots U_n$

3. Nach Vorraussetzung gibt es für eine Umgebung U von a ein $\varepsilon > 0$ mit $I_\varepsilon(a) \subseteq U$ $V := I_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subseteq U$ ist ebenfalls Umgebung von a und $\forall y \in V$ gilt

$$I_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq I_\varepsilon(x) \subseteq U, \text{ denn } \underbrace{|y - z|}_{z \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x - z| \leq |x - y| + |x - z| < \varepsilon$$

□

Definition 3 2.21.

1. $A \subseteq \mathbb{K}$ ist offen $\Leftrightarrow \forall a \in A$ ist A die Umgebung von a
   (in $\mathbb{R} \, \forall a \in A \, \exists \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$) Für Intervalle (a, b) haben wir schon gezeigt, dass sie offen sind
2. $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt abgeschlossen $\Leftrightarrow C_\mathbb{K} A$ offen
3. Abschließung von A:

$$\bar{A} := \{a \in \mathbb{K} \mid a \in A \vee a \text{ Häufungspunk von } A\}$$

4. Rand von A:

$$\partial A := \{a \in \mathbb{K} \mid \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } a : A \cap U \neq \emptyset \wedge CA \cap U \neq \emptyset\}$$

Beispiel 5 2.22.

$$
\begin{aligned}
A &= (a,b] \\
\bar{A} &= [a,b] \\
\partial A &= \{a,b\} \\
\forall\, \varepsilon > 0 I_\varepsilon\left(a\right) \cap (a,b] &\neq \emptyset \\
I_\varepsilon\left(a\right) \cap \mathbb{R} \setminus (a,b] &\neq \emptyset
\end{aligned}
$$

Sei $A = \mathbb{Q}$, dann $\bar{A} = \mathbb{R}$, $\partial A = \mathbb{R}$ denn in jedem \$$\varepsilon$-\$Intervall um eine rationale Zahl gilt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen

Bemerkung 4.

- Die Grenzwerte und Häufungswerte kann man auch in ganz

  $$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{R}}$$

  mit einer neuen Definition von Abstand:

  $$(x,y) := \left|\xi\left(x\right) - \left|\xi\left(y\right)\right|\right|$$

  $$\xi\left(x\right) := \begin{cases} \frac{|x|}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases}$$

- $\hat{\mathbb{R}}$ ist folgenkompakt
- Algebraische Operationen in $\hat{\mathbb{R}}$

  $$
  \begin{aligned}
  x + \infty := \infty + x &:= \infty\, \forall\, x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\
  x - \infty := -\infty + x &:= -\infty\, \forall\, x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\
  x \cdot \infty := \infty \cdot x &:= \begin{cases} \infty & \forall\, x \in \hat{\mathbb{R}}, x > 0 \\ -\infty & \forall\, x \in \hat{\mathbb{R}}, x < 0 \end{cases} \\
  \frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} =: 0
  \end{aligned}
  $$

  Sinnlos wäre:

  $$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot \left(-\infty\right), \frac{\infty}{\infty}, \ldots$$

- Damit könne wir die Rechenregeln auch für Folgen in $\hat{\mathbb{R}}$ formulieren
- In $\hat{\mathbb{R}}$ hat jede Folge einen Häufungswert

Definition 4 2.23. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge von reellen Zahlen, $\emptyset \neq H \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ die Menge der Häufungswerte von (a_n) in $\hat{\mathbb{R}}$.
Dann sei:

$$\overline{\lim} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf a_n := \inf H \qquad \text{(Limes inferior)}$$

$$\underline{\lim} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup a_n := \inf H \qquad \text{(Limes superior)}$$

Bemerkung 5.

1. Definition 4 kann man auch für $\mathbb{R}$ formulieren
2. $$a = \lim_{n\to\infty} \inf a_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \begin{cases} (1)\{n \mid |a - a_n| < \varepsilon\} \text{ ist unendlich (weil } a \text{ Häufungswert ist)} \\ (2)\{n \mid a_n < a - \varepsilon\} \text{ ist endlich (} a \text{ ist kleinste Häufungswert)} \end{cases}$$

Beispiel 6 2.24.

$$a_n = n + (-1)^n\, n$$
$$a_{2n+1} = 0\,\forall\, n \Rightarrow 0 \text{ ist Häufungswert}$$
$$a_{2n} = 4n \to \infty \Rightarrow \infty \text{ ist Häufungswert}$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$$

Bemerkung 6.

- $a_n \to a$ in $\hat{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf (a_n + b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf (a_n \cdot b_n)$ für $a_n, b_n > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \sup b_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ (zum Beispiel betrachte $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}$)

5 Reihen (Unendliche Summen)

Definition 5 2.19. Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(**unendliche Summe**) konvergiert, wenn die Folge ihrer **Partialsummen** konvergiert

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xrightarrow{n\to\infty} S_\infty < \infty$$

Beispiel 7.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

2. $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$ $\mathrm{S_n}$ $(= -1, 0, -1, 0, \ldots)$ konvergiert nicht

3. $\displaystyle S_n = \sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ Für $|z| < 1$ konvergiert $\displaystyle S_n \to \frac{1}{1-z} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$

4. Harmonische Reihe: Seien $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, Behauptung $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, also divergent

Beweis von 4.

$$S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}}_{2^j \text{ Summanden}} \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

□

Satz 7. *Seien* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, dann sind auch die Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen □

5.1 Konvergenzkriterien

Cauchy Kriterium für Paritalsummen besagt, dass eine Reihe genau dann konvergent ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_\varepsilon : |s_n - s_m| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon$$

Lemma 5 2.28 Reihenkonvergenz. *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *kann nur dann knvergent sein, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind und ihre Glieder eine Nullfolge bilden*

Beweis. Sei $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s_\infty - s_\infty = 0$$

Die Beschränktheit der Paritalsummen folgt notwendig aus der Beschränktheit konvergenter Folgen. □

Satz 8 2.29. *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge. Dann* $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$

Beweis.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 - a_{n+1} \Rightarrow |s_n - a_1| = |a_{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

Beispiel 8 2.30.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{n+1}} \right) = a_1 = \frac{1}{2}$$

Definition 6 2.31. Eine Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ heißt alternierend, wenn ihre Elemente alternierende Vorzeichen haben, das heißt $a_n \cdot a_n + 1 \leq 0$

Satz 9 2.32.

1. *Eine alternierende Reihe* $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent, wenn die Absolutbeträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden*
2. *Für die Reihenreste gilt dabei die Abschätzung*

$$|\sum_{k=m}^{\infty} a_k| \leq |a_m|$$

Beweis. 1. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 > 0$. Dannist $a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0, a_{2n} + a_{2n+1} \geq 0$ Und folglich

$$s_{2n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$
$$s_{2n} = (a_1) + (a_2 + a_4) + \ldots + \left(\underbrace{a_{2n-1} + a_{2n}}_{\geq 0}\right) \geq s_{2n-2} \geq \ldots \geq s_2$$

Ferner gilt

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$$

und somit

$$s_2 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_1$$

(S_{2n}) monoton wachsend, s_{2n+1} monoton fallend, beide beschränkt

$$\Rightarrow s_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} s_*, \Rightarrow s_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} s^*$$
$$s_{sn} \leq s_* \leq s^* \leq s_{2n+1}$$

da (a_n) Nullfolge

$$|s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}| \to 0$$
$$s_* = s^* = s_\infty$$

2. Aus 1. folgt $m = 2n + 1$

$$0 \leq s_\infty - s_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = s_\infty - s_{2n+1} + a_{2n+1} \leq a_{2n+1}$$

und sonst

$$|\sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k| \leq |a_{2n+1}|$$

Ana log im Fall $m = 2n$

□

Beispiel 9 2.33. 1. $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konvergiert nach dem Leibnitz Kriterium

$$|\frac{(-1)^{k-1}}{k}| = \frac{1}{k} \to 0 \text{ monoton}$$

2. Die Leibnitz Reihe $s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ konverget nach Leibnitz Kriterium

Bemerkung 7 Monotonie ist wichtig.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } a_{2k} := -\frac{1}{2^k}, a_{2k-1} := \frac{1}{k}$$

ist divertent:

- $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, aber
- $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$

Definition 7 2.34. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, genau dann wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist

Satz 10 2.35. *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent in* $\mathbb{R}$. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent*

Beweis. Mit Cauchy Kriterium:

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

aus der Absolutkonverenz □

Satz 11 2.36 Umordnungssatz**.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe in* $\mathbb{R}$. *Dann gilt für jede bijektive Abbildung* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beweis. Ranacher für spezifische Umordung □

Beispiel 10 2.37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergent (aber nicht absolut)

Behauptung: $\exists$ Umordnung τ, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)}$ divergiert Beachte

$$\frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+3} + \ldots + \frac{2 \cdot 2^j - 1}{\leq} 2^{j-1} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ Die Umordung

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^j+1}+\frac{1}{2^j+3}+\ldots+\frac{1}{2^{j+1}-1}\right)-\frac{1}{2^k+2}}_{>\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}}$$

konvergiert nicht

Satz 12 2.38 Cauchyprodukt für Reihen. *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen (in* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*). Sei* $c_m = \sum_{k=1}^{m} a_k b_{m-k}$*. Dann konvergiert*

$$\sum_{m=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$$

(ohne Beweis)

Satz 13 2.39 Vergleichkriterium. *Gegeben seien zwei Reihen* $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tilde{s}_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$

1. *Gilt für fast alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit einer Konstante* $\alpha > 0 \quad |a_k| \leq \alpha \tilde{a}_k$
   (für fast alle $n \in \mathbb{N} :=$ *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *außer endlich viele)*
   so ist $\tilde{s}_\infty$ *eine* ***Majorante*** *von* s_∞ *und aus der absoluten Konvergenz von* $\tilde{s}_\infty$ *folgt auch die von* s_∞*, absolute Divergenz von* s_∞ *impliziert die absolute Divergenz von* $\tilde{s}_\infty$