

# Theoretische Physik (Hebecker)

Robin Heinemann

December 9, 2016

## Contents

<b>1 Semesterüberblick</b>	<b>3</b>
1.1 Mathe . . . . .	3
<b>2 Kinematik des Massenpunktes</b>	<b>4</b>
2.1 Kinematik der Massenpunktes in einer Dimension . . . . .	4
2.1.1 Graphik . . . . .	4
2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel . . . . .	4
2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechnung . . . . .	4
2.2.1 Funktion . . . . .	4
2.2.2 Differentiation oder Ableitung . . . . .	5
2.2.3 Integrieren . . . . .	6
2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen . . . . .	7
2.3.1 Zweidimensionale Bewegung . . . . .	7
2.3.2 Dreidimensionale Bewegung . . . . .	7
2.4 Vektorräume . . . . .	8
2.4.1 Einfachstes Beispiel . . . . .	8
2.4.2 Unser Haupt-Beispiel . . . . .	8
2.5 Kinematik in $d > 1$ . . . . .	9
2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie . . . . .	9
2.6 Skalarprodukt . . . . .	9
2.6.1 Symmetrische Bilinearform . . . . .	10
2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors . . . . .	10
2.7 Abstand zwischen Raumpunkten . . . . .	10
2.7.1 Spezialfall . . . . .	10
2.7.2 Infinitesimaler Abstand . . . . .	11
2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein . . . . .	11
2.8.1 Beispiel in $d=2$ . . . . .	12
2.9 Vektorprodukt . . . . .	12
2.10 Binormalenvektor . . . . .	13
2.10.1 Zur Information . . . . .	13

<b>3</b>	<b>Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik</b>	<b>13</b>
3.1	Newtonsche Axiome . . . . .	13
3.2	Trajektorie . . . . .	13
3.3	Differentialgleichungen . . . . .	13
3.3.1	1. Ordnung . . . . .	14
3.3.2	Anfangswertproblem . . . . .	14
3.3.3	partielle Ableitung . . . . .	14
3.3.4	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	14
3.3.5	Beispiele . . . . .	15
3.3.6	Separation der Variablen . . . . .	15
3.3.7	System von Dgl. . . . .	16
3.3.8	Systeme von $n$ gewöhnlicher Dgl. $p$ -ter Ordnung . . . . .	16
3.3.9	Erste physikalische Beispiele . . . . .	17
3.4	Taylorentwicklung . . . . .	19
3.4.1	Interessantes "Gegenbeispiel" . . . . .	19
3.5	Harmonischer Oszillator . . . . .	20
3.5.1	Eindimensionales System . . . . .	20
3.6	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	21
3.6.1	Zusammenfassung / Verallgemeinerung auf $n > 1$ . . . . .	22
3.6.2	Finden der partikulären Lösung . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Erhaltungssätze in Newtonscher Mechanik</b>	<b>22</b>
4.1	Impulserhaltung . . . . .	22
4.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	23
4.3	Konservative Kräfte und Energieerhaltung . . . . .	24
4.3.1	Energieerhaltung . . . . .	25
4.3.2	Kriterium für Konservativität . . . . .	26
4.4	Kurvenintegrale . . . . .	28
4.5	Satz von Stokes . . . . .	28
4.6	Energieerhaltung für Systeme von Massenpunkten . . . . .	29
4.7	Eindimensionale Bewegung . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Harmonischer Oszillator in komplexen Zahlen</b>	<b>31</b>
5.1	Komplexe Zahlen . . . . .	31
5.1.1	Ziel . . . . .	31
5.1.2	Naive Definition . . . . .	32
5.1.3	präzisere Definition . . . . .	32
5.1.4	Zusammenfassung: . . . . .	34
5.1.5	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	34
5.1.6	Quaternionen . . . . .	35
5.2	Anwendung auf harmonischen Oszillator . . . . .	35
5.3	harmonischer Oszillator mit periodisch treibender Kraft . . . . .	36

<b>6</b>	<b>Symmetrie der Raumzeit</b>	<b>36</b>
6.1	Matrix, Determinante, Inverse Matrix . . . . .	36
6.2	Der Euklidische Raum . . . . .	39
6.3	Symmetriegruppe (M) . . . . .	41
6.4	Tensoren . . . . .	43
6.5	Galilei-Transformationen . . . . .	45
6.6	Affinier Raum . . . . .	46
6.7	Dynamik . . . . .	46
6.8	Zusammenfassung: . . . . .	47

Einleitung:

- Webseite: [www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html](http://www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html)
- Bartelman skripte

## 1 Semesterüberblick

1. Newtonsche Mechanik
2. Lagrange / Hamilton Mechanik / Statistik / Kontinua
3. Elektrodynamik / Spezielle Relativitätstheorie
4. Quatenmechanik
5. Thermodynamik / Quantenstatistik
6. Allgemeine Relativitätstheorie / Kosmologie
7. Quatenfeldtheorie I (ggf. 5.)
8. Quatenfeldtheorie II (ggf. 6.  $\Leftarrow$  Stringtheorie / Teilchenphysik / Supersymmetrie)
9. Masterarbeit
10. Masterarbeit

### 1.1 Mathe

wichtig:

- Gruppentheorie
- Differentialgeometrie

## 2 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik: Beschreibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung  $\rightarrow$  Dynamik)

### 2.1 Kinematik der Massenpunktes in einer Dimension

#### 2.1.1 Graphik

- Ort:  $x$
- zu Zeit  $t$ :  $x(t)$
- Geschwindigkeit:  $v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung:  $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Beispiel:  $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$ ,  $v(t) = v_0 + a_0 t$ ,  $a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B.  $x(t_0) \equiv x_0$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

Man prüft leicht  $\dot{x}(t) = v(t)$

– Es gibt keine andere Funktion  $\tilde{x}(t)$  mit  $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$  und  $\tilde{x}(t_0) = x_0$

Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

#### 2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben:  $a(t) = a_0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $v_0, x_0$

$$\implies v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t') dt' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

### 2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechnung

#### 2.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

### 2.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$df$  bezeichnet den in  $\Delta x$  linearen Anteil des Zuwachses  $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$ .

- Aus  $\Delta f = f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2)$  folgt  $df = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätsabbildung:  $x \mapsto x \implies dx = \Delta x$

$$\implies df = f'(x)dx \text{ oder } \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für  $f'(x)$ , aber nützlich, weil bei kleinen  $\Delta x$   $df \simeq \Delta f$  (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwertdefinition)

- $f'(x)$  wieder Funktion  $\implies$  analog:  $f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
- Praxis

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

– Begründung (nur zum letzten Punkt)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(f(y))} = \frac{dy}{f'(y)dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

– Schöne Beispiele

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

$$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

Besser:

$$\tan^{-1}(y) = \left(\sin y \frac{1}{\cos y}\right)' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y \left(\frac{1}{\cos y}\right)' = 1 + \sin y \left(-\frac{1}{\cos^2 y}\right)(-\sin y) =$$

$$1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \implies \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

- Verknüpfung

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

- Inverse

$$f^{-1} : x = f(y) \mapsto y$$

- Grenzwerte:

– nützliche Regel: l'Hôpital (" $\frac{0}{0}$ ")

Falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f, g = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$  existiert, so gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$

– weitere nützliche Regel

$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0$$

\* Beispiel:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$

– Kürzen unter lim

\* Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

### 2.2.3 Integrieren

#### Fundamentalsatz der Analysis

$$\int^y f(x) dx = F(y) \text{ \& } F'(y) = f(y)$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(→ saubere Definition über Riemansches Integral)

#### Praxis

##### Partielle Integration

$$\int^y f(x) g'(x) dx = f(y) g(y) - \int^y f'(x) g(x) dx$$

**Substitution** Unter Annahme einer invertierbaren Funktion  $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dy} dy = \int f(x(y)) x'(y) dy$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

Substitution  $y = g(x)$

**Klassiker**

$$\int \ln x dx = \int \ln x 1 dx = \ln x x - \int \frac{1}{x} x dx = x(\ln x - 1)$$
$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

## 2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

### 2.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional  $\rightarrow$  Bewegung in der Ebene. Trajektorie:  $x(t), y(t)$

**Bespiel**

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$

$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

**TODO Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)**

**Raumkurve** Menge aller Punkte  $\{x, y\}$ , die das Teilchen durchläuft

**TODO Skizze Nichttriviale Darstellung nur im Raum (Raumkurve)**

### 2.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Trajektorie ist erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit. Formal kein Problem: Trajektorie ist

•

$$x(t), y(t), z(t)$$

•

$$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$

•

$$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \ddot{x}^i(t); i = 1, 2, 3$$

## 2.4 Vektorräume

Eine Menge  $V$  heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition (+)
- die Multiplikation mit reellen Zahlen (\*)

definiert sind.

$$x : V \times V \rightarrow V$$

$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$V \times V$  - Produktmenge  $\equiv$  Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \quad \text{Assoziativität}$$

$$v + w = w + v \quad \text{Kommutativität}$$

$$\exists 0 \in V : v + 0 = v \quad \forall v \in V \quad \text{Null}$$

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \quad \text{Distributivität}$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{Distributivität}$$

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$

$$1v = v \quad \text{Multiplikation mit Eins}$$

### 2.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$  (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit  $0 \in \mathbb{R}$  als Vektorraumnull)

### 2.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n), \vec{y} = (y^1 \ \dots y^n)$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$

$$\vec{0} \equiv (0, \dots, 0)$$

$$\alpha \vec{x} \equiv (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$$

**TODO (Maybe) Skizze 3D Vektor**  $\rightarrow$  übliche Darstellung durch "Pfeile"



## 2.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow \vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitung voraus:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \implies \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \dots, y^{n'}(x))$$

### 2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, v_0 t)$$

$$\vec{v} = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0)$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0)$$

#### TODO Skizze (Raumkurve) Kommentar:

$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$  leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen  $[x] = \text{m}$ ,  $[v] = \text{m s}^{-1}$   
Wir können wie in  $d = 1$  von  $\vec{a}$  zu  $\vec{v}$  zu  $\vec{x}$  gelangen!

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t') = (v_0^1 + \int_{t_0}^t dt' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^t dt' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^t dt' a^3(t'))$$

**Üben:** Schraubenbahn;  $t_0 = 0$ ,  $\vec{x}_0 = (R, 0, 0)$ ,  $v_0 = (0, R\omega, v_0)$  Es folgt:

$$\begin{aligned} & \vec{v}(t) = (0, R\omega, v_0) + \int_0^t dt' (-R\omega^2)(\cos \omega t', \sin \omega t', 0) \\ & = (0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2) \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t', -\frac{1}{\omega} \cos \omega t', 0 \right) \Big|_0^t \\ & = (0, R\omega, v_0) - R\omega(\sin \omega t, -\cos \omega t, 0) - (0, -1, 0) \\ & = (-R\omega \sin \omega t, R\omega + R\omega \cos \omega t - R\omega, v_0) \\ & = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0) \end{aligned}$$

**Bemerkung** Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemansche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \lim_{n \rightarrow \infty} (v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \dots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

mit  $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$

## 2.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

### 2.6.1 Symmetrische Bilinearform

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$  "linear" Abbildung von  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto v \cdot w$  mit den Eigenschaften

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls  $v \cdot v \geq 0$ ,

Sie heißt positiv-definit, falls  $v \cdot v = 0 \implies v = 0$  Hier : Skalarprodukt  $\equiv$  positiv definite symmetrische Bilinearform

### 2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$ : Wir definieren

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n \equiv \sum_{i=1}^n x^i y^i \equiv \underbrace{x^i y^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidisches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  :  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7x^1 y^2 + x^2 y^2$  anderes Beispiel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1 y^1 - x^2 y^2$$

symmetrische Bilinearform, nicht positiv, semidefinit! Frage:

Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber nicht positiv definit

$$\vec{x} \vec{y} = x^1 y^1$$

## 2.7 Abstand zwischen Raumpunkten

Der anschauliche Abstand zweichen Raumpunkten  $\vec{x}, \vec{y}$ :

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{y}| &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2} = \sqrt{(x^i - y^i)(x^i - y^i)} \\ &= \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x}\vec{y}} = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta} \end{aligned}$$

Haben benutzt:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

### 2.7.1 Spezialfall

$$\vec{x} = (x^1, 0, 0), \vec{y} = (y^1, y^2, 0)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 \cdot y^1; \cos\theta = \frac{y^1}{|\vec{y}|}; |\vec{x}| = x^1$$

## TODO Skizze

$$\implies \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$$

Dass dies für beliebige Vektoren gilt, wird später klar werden.

### 2.7.2 Infinitesimaler Abstand

Speziell wird der infinitesimale Abstand wichtig sein:

$$d\vec{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$$

$$d\vec{x} = \left(\frac{dx^1}{dt}dt, \frac{dx^2}{dt}dt, \frac{dx^3}{dt}dt\right) = (v^1 dt, v^2 dt, v^3 dt) = (v^1, v^2, v^3)dt = \vec{v}dt, \text{ oder: } \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

( $d\vec{x}$  analog zu  $df$  vorher);

$$d\vec{x}^2 = |d\vec{x}|^2 = |\vec{v}|^2 dt^2$$

$$|dx| = |\vec{v}|dt.$$

### 2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

$|d\vec{x}|$  entlang  $\vec{x}(t)$  aufaddieren  $\rightarrow$  Bogenlänge.

$$s(t) = \int_{t_0}^t |d\vec{x}| = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\vec{x}}{dt'} \right| = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{\dot{\vec{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^t \sqrt{\vec{v}(t')^2}$$

Infinitesimale Version:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = |\vec{v}|$$

Man kann (im Prinzip)  $s(t) = s$  nach  $t$  auflösen.

$$\implies t = t(s) \implies \underbrace{\vec{x}(s)}_{\text{Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge } s} \equiv \vec{x}(t(s))$$

Nützlich, zum Beispiel für die Definition des Tangentenvektors:

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$

Es gilt

$$\vec{T} \parallel \vec{v}; \left| \vec{T} \right| = \left| \frac{\vec{v}dt}{|\vec{v}|dt} \right| = 1 \implies \vec{T} \cdot \vec{T} = 1$$

Ableiten nach  $s$ :

$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d\vec{T}}{ds}(\vec{T} \cdot \vec{T}) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

Nutze

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = T^i T^i$$

$\Rightarrow$  Ableitung des Tangentenvektors ist orthogonal zum Tangentenvektor. Krümmungsradius der Bahn:

$$\rho \equiv \frac{1}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}$$

Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} = \rho \frac{d\vec{T}}{ds}$$

### 2.8.1 Beispiel in d=2

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= R(\cos \omega t, \sin \omega t) \\ \vec{v}(t) &= R\omega(-\sin(\omega t), \cos \omega t) \\ |\vec{v}| &= \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = R\omega \\ s(t) &= \int_{t_0=0}^t dt' |\vec{v}| = R\omega t; \quad t(x) = \frac{s}{R\omega} \\ \Rightarrow \vec{x}(s) &= R(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}), \quad \vec{T} = \frac{d\vec{x}}{ds} = (-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}) \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= -\frac{1}{R}(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}) \Rightarrow \rho = R; \quad \vec{N} = -(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R})\end{aligned}$$

**TODO Skizze**

## 2.9 Vektorprodukt

$$V \times V \mapsto V; \quad (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

$$c^i = (\vec{a} \times \vec{b})^i \equiv \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} a^j b^k = \varepsilon^{ijk} a^j b^k$$

dabei:

- $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{321} = 1$
- $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{312} = -1$
- sonst 0 ( $\varepsilon^{ijk} = 0$ , falls zwei Indizes gleich)

Alternativ:

•

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta|$$

- Richtung von  $\vec{c}$  definiert durch  $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$
- Vorzeichen von  $\vec{c}$  ist so, dass  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ein "Rechtssystem" bilden

**TODO Skizze**

## 2.10 Binormalenvektor

$$= \vec{T} \times \vec{N}$$

$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$  heißen "begleitendes Dreibein" und bilden ein Rechtssystem. alle haben Länge 1  $\vec{T}, \vec{N}$  spannen die "Smiegeebene" auf

### 2.10.1 Zur Information

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{N}; \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{1}{\sigma}\vec{B}; \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{\sigma}\vec{B} - \frac{1}{\rho}\vec{T}$$

$\sigma$  definiert die Torsion.

## 3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik

### 3.1 Newtonsche Axiome

Dynamik: Ursachen der Bewegungsänderung  $\rightarrow$  Kräfte:  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

1. Es existierten Inertialsysteme (Koordinatensysteme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft wirkt) nicht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt:  $\ddot{\vec{x}} = 0$
2. In solchen Systemen gilt:  $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$
3. Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

4. definiert die **träge** Masse

Die entscheidene physikalische Aussage von 2. ist das Auftreten von  $\ddot{\vec{x}}$  (nicht etwa  $\dot{\vec{x}}$  oder  $\vec{x}$ ) Alternative Diskussionen der obigen Axiomatik:

- zum Beispiel Kapitel 1.2 von Jose/Saletan (mit 2 Definition der Kraft)

### 3.2 Trajektorie

Vorhersagen erfordern:  $\vec{F} \rightarrow$  Trajektorie. Genauer: Sei  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  gegeben. Berechne  $\vec{x}(t)$  !

### 3.3 Differentialgleichungen

hier nur "gewöhnliche DGL" (nur Ableitungen nach einer Variable) (im Gegensatz zu "partiellen" (Ableitung nach verschiedenen Variablen))

### 3.3.1 1. Ordnung

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Dgl. 1. Ordnung ( $\implies$  nur 1. Ableitung):

$$y'(x) = f(x, y)$$

**Lösung** Funktion:  $y : x \mapsto y(x)$  mit  $y'(x) = f(x, y(x))$  (im Allgemeinen wird  $x$  aus einem gewissen Intervall kommen:  $x \in I \equiv (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ )

### 3.3.2 Anfangswertproblem

Gegeben durch:

1. Dgl.:  $y' = f(x, y)$
2. Anfangsbedingung  $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Funktion  $y(x)$  mit (für  $x \in I, x_0 \in I$ :

1.  $y'(x) = f(x, y(x))$
2.  $y(x_0) = y_0$

### 3.3.3 partielle Ableitung

Wir betrachten ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$  Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rechenregeln: Wie bei normalen Ableitung, nur mit  $x$  fest.

### Beispiel

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y$$

### 3.3.4 Existenz und Eindeutigkeit

... viele Theoreme über Existenz und Eindeutigkeit (Peano und Picard / Lindelöf) Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert falls:

$$f(x, y) \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

stetig sind.

**"Begründung"** Zeichne an jedem Punkt  $(x, y)$  einen Vektor  $(1, f(x, y))$  ein.

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{(x, y(x))}{1}$$

**Weiteres Argument für die Existenz und Eindeutigkeit TODO(Skizze)** Steigung der gesuchten Funktion bei  $x_0$  ist bekannt als  $f(x_0, y_0) \implies$  kann Wert der Funktion bei  $x + \Delta x$  abschätzen:  $y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)$  (für kleine  $\Delta x$ ) Kenne Steigung bei  $x_0 + \Delta x$  :  $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)) \implies$  Schätze Wert der Funktion bei  $x_0 + 2\Delta x$  ab. ( $\implies$  perfekt für Numerik)

### 3.3.5 Beispiele

1.

$$y'(x) = f(x, y), f(x, y) = 3$$

$$y'(x) = 3 \implies y(x) = \int 3dx = 3x + c$$

Das ist schon die allgemeine Lösung der Dgl. Ein Anfangswertproblem, zum Beispiel mit  $(x_0, y_0) = (-1, 1)$  lässt sich durch Bestimmen der Konstanten lösen:

$$y(x) = 3x + c \implies 1 = 3(-1) + c \implies c = 4 \implies y(x) = 3x + 4$$

### 3.3.6 Separation der Variablen

Separation der Variablen funktioniert wenn  $f(x, y) = g(x)h(y)$

**Beispiel**

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \implies y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \implies ydy = xdx$$

Variablen sind getrennt, kann einfach integrieren

$$\int ydy = \int xdx \implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \implies y = \pm \sqrt{x^2 + 2c}$$

**Lösen allgemeines Anfangswertproblem** allgemeines Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung  $(x_0, y_0)$

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \implies 2c = y_0^2 - x_0^2 \implies y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \geq 0 \\ -\sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

1. **TODO** Skizze

### 3.3.7 System von Dgl.

(Fast) alles oben gesagte funktioniert auch für Systeme gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$\frac{dy^1(x)}{dx} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$

$$\frac{dy^n(x)}{dx} = f^n(x, y^1, \dots, y^n)$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Wir haben hier eine vektorwertige Funktion von  $n + 1$  Variablen benutzt:

$$\vec{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingungen:  $(x_0, \vec{y}_0) \rightarrow n + 1$  Parameter. Einer davon entspricht der Verschiebung entlang ein und derselben Lösung  $\implies$  allgemeine Lösung hat  $(n + 1) - 1 = n$  Parameter oder Integrationskonstanten.

### 3.3.8 Systeme von $n$ gewöhnlicher Dgl. $p$ -ter Ordnung

$$\vec{y}^{(p)}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(p-1)})$$

Anfangsbedingungen:  $(x_0, \vec{y}_0, \vec{y}'_0, \dots, \vec{y}^{(p-1)}_0), \vec{y}'_0 \triangleq \vec{y}'(x)$  bei  $x = x_0$

**Tatsache** Systeme von Dgl. können auf größere Systeme niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden. Wir illustrieren dies am Beispiel mit  $p = 2$

#### Beispiel

$$\vec{y}''(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

Dies ist äquivalent zu einem System von  $2n$  Dgl 1. Ordnung

$$\begin{cases} \vec{z}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ \vec{y}'(x) &= \vec{z} \end{cases} \quad (\equiv g(x, \vec{y}, \vec{z}))$$

Ursprüngliche Form folgt durch Einsetzen der 2. Gleichung in die Erste. Das verallgemeinert sich sofort auf die Ordnung  $p$ : Man gibt einfach der  $(p-1)$  niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variablen. Die zusätzlichen Dgl sind schlicht die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ehemaligen Ableitungen handelt.  $\implies$  System von  $p$  Dgl 1. Ordnung; allgemeine Lösung hat  $p$  Parameter



### 3.3.9 Erste physikalische Beispiele

**Punktmasse** 3 Dgl 2. Ordnung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

$\Rightarrow$  6 Dgl 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} &= \frac{1}{m} \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{x}} &= \vec{v} \end{cases} \quad (1)$$

In vielen Fällen: (zeitunabhängiges) Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x})$  ("Vektorfeld").

**Darstellung in  $d = 2$  (Skizze Vektorfeld).** wichtig: doppelte Markierung der Achsen

**Einfachster Fall ( $d = 1$ )** betrachte den Fall, dass  $F$  von  $v$ , aber nicht von  $t$  abhängt:

$$\begin{cases} \dot{v} &= \frac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} &= v \end{cases} \quad (2)$$

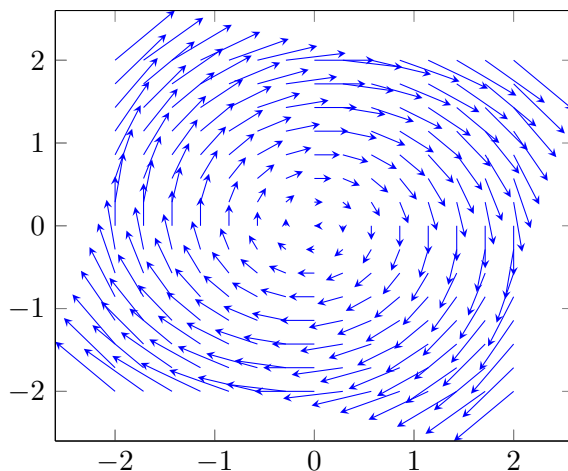
$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(x,v)}{m} \\ v \end{pmatrix}$$

1. **TODO** Darstellung im Phasenraum Analyse im Phasenraum passt perfekt zur früheren allgemeinen Analyse von Dgl 1. Ordnung Analog in  $d = 3$ : Vektorfeld:  $(\frac{\vec{F}}{m}, \vec{v})$ , Phasenraum  $(\vec{x}, \vec{v})$  oder  $(\vec{x}, \vec{p})$  ist 6-dimensional

**Harmonischer Oszillator ( $d = 1$ )**  $F(x) = -kx$

$$\begin{cases} \dot{v} &= -x \\ \dot{x} &= v \end{cases} \quad (3)$$

Phasenraum des Harmonischen Oszillators



**Freier Fall mit Luftwiderstand** Aufgabe: Bestimme die zeitliche Entwicklung von  $v$  wenn Körper im Schwerfeld losgelassen wird.  $F_R = -cv^2$   
 Problem 1 – *dim*:  $x$  wachse nach unten, Start bei  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$F = m\ddot{x} \implies mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \implies \begin{cases} mg - cv^2 &= m\dot{v} \\ v &= \dot{x} \end{cases}$$

Erste Gleichung enthält kein  $x$  und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v^2$$

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2}$$

Konstanten und Dimensionen

$$[g] = \text{m s}^{-2}; \left[\frac{c}{m}\right] = \text{N kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^2$$

Kann leicht Konstanten der Dimension Zeit und Geschwindigkeit bilden:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

Benutze jetzt die dimensionslosen Variablen  $t' = \frac{t}{\hat{t}}, v' = \frac{v}{\hat{v}}$

$$\implies dt' = \frac{dv'}{1 - v'^2} = \frac{dv'}{2} \left( \frac{1}{1 + v'} + \frac{1}{1 - v'} \right)$$

$$2t' = \ln 1 + v' - \ln 1 - v' + c$$

$v' = 0$  bei  $t' = 0 \implies c = 0$  Auflösen nach  $v'$ :

$$e^{2t'} = \frac{1 + v'}{1 - v'} \implies \dots$$

$$\implies v' = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1} \implies v = \hat{v} \left( 1 - \frac{2}{e^{\frac{2t}{\hat{t}}} + 1} \right)$$

$\implies \hat{v}$  ist Grenzggeschwindigkeit, wird exponentiell angenommen, wenn  $t \gg \hat{t}$

Zugabe: einfache physikalische Argumente für die Größe von  $c$ :

1.  $[c] = \text{kg m}^{-1}$ , Input:  $A$  (Querschnitt),  $\rho_L \implies c \sim \rho_L A$
2. Energiebilanz an verdrängter Luft:

$$F_R \cdot l \sim E_{\text{kin, Luft}} \sim \rho_L l A \frac{v^2}{2}$$

### 3.4 Taylorentwicklung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_0 = 0$ . Untersuche Verhalten beliebiger glatter Funktionen  $f(x)$  nahe  $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x dx' f'(x') \\ &= f(0) + f'(x')(x-x) \Big|_0^x - \int_0^x dx' f''(x')(x' - x) \\ &= f(0) + f'(0)x - f''(x') \frac{(x' - x)}{2} \Big|_0^x + \int_0^x dx' f'''(x') \frac{(x' - x)^2}{2} \\ &= f(0) + f'(x)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Allgemein:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^m f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \overbrace{\int_0^x dx' f^{(m+1)}(x') \frac{(x' - x)^m}{m!}}^{\text{Restglied}}$$

Falls das Restglied für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

Analog: Taylor-Reihe:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

1. Oft erste Terme = gute Näherung
2. Verallgemeinerung auf viele Variablen

#### 3.4.1 Interessantes "Gegenbeispiel"

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Überzeugen sie sich, dass alle Ableitungen existieren, auch bei Null!

Sie Brauchen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Die Ableitungen verschwinden sogar bei Null  $\implies$  Taylor-Reihe ist Null, keine gute Näherung

### 3.5 Harmonischer Oszillator

- eines der wichtigsten physikalischen Systeme
- beschreibt viele kompliziertere Systeme angenähert

#### 3.5.1 Eindimensionales System

$$d = 1, F = F(x)$$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}v(x) = -v'(x)$$

Damit haben wir das **Potential** ( $\rightarrow$  beschreibt die potentielle Energie des Massenpunktes)  $v$  als Stammfunktion von  $-F$  definiert

- Skizze

Massenpunkt kann nur ruhen, wo  $F = 0$  beziehungsweise  $V' = 0$ . Genauer: Nur Minima (Maxima instabil).

**Ziel** Untersuchung der Bewegung in der Nähe von Minimal (also bei  $x \approx x_0$  wobei  $v'(x_0) = 0$  gelte)

$V(x)$  bei  $x_0$ ,  $V'(x_0) = 0$ ,  $|x - x_0|$  klein

$$\begin{aligned}\Rightarrow V(x) &\simeq V(x_0) + \frac{1}{2}v''(x_0)(x - x_0)^2 \\ \Rightarrow F(x) &\simeq -V''(x_0)(x - x_0) \\ x - x_0 \equiv y &\Rightarrow \underbrace{F(y) = -ky}_{\text{harmonischer Oszillator}}, k \equiv v''(0)\end{aligned}$$

Wir sehen: Harmonischer Oszillator ist eine Idealisierung von potentiell sehr großem Nutzen (viele Systeme)

**Lösung** Newton  $\Rightarrow m\ddot{y} = -ky$  beziehungsweise  $\ddot{y} = -\omega^2 y$ ,  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\Rightarrow \sin \omega t$  und  $\cos \omega t$  sind Lösungen

$\Rightarrow y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$  ist auch Lösung (wegen Linearität)

(wegen der beiden frei wählbaren Konstanten ist dies schon die allgemeine Lösung)

#### Verallgemeinerungen

- Reibungsterm  $\sim \dot{y}$
- treibende Kraft  $\sim f(t)$

### 3.6 Lineare Differentialgleichungen

allgemeine Form einer linearen Dgl. n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_0(x)y(x) = f(x)$$

Das Wort linear bezieht sich nur auf  $y$ , nicht  $x$

Die Dgl. heißt homogen falls  $f(x) \equiv 0$  Homogen von Grad  $p$ : Ersetzung  $y \rightarrow \alpha y$  führt zu Vorfaktor  $\alpha^p$ , hier  $p = 1$

- wir hatten oben dem Fall  $n = 2$  "mit konstanten Koeffizienten"
- noch einfacheres Beispiel:  $n = 1, f \equiv 0$  (aber beliebige Koeffizienten)

$$y' + a(x)y = 0$$

Das ist separabel:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a(x)dx$$

$$\ln y - A(x) + c_1$$

$$y = ce^{-A(x)}$$

$A(x)$  sei eine beliebige aber fest gewählte Stammfunktion von  $a$  Wir können den inhomogenen Fall lösen, durch "Variation der Konstanten"

– Ansatz:  $y = C(x)e^{-A(x)}$ , Dgl.  $y' + ay = f$

$$(ce^{-A})' + ace^{-A} = f$$

$$c'e^{-A} - CA'e^{-A} + CAe^{-A} = f$$

Beachte  $A' = a$

$$\Rightarrow c'e^{-A} = fe^A, c(x) = \int dx f(x)e^{A(x)}$$

$$y(x) = \left[ \int^x dx' f(x')e^{A(x')} \right] e^{-A(x)}$$

$f(x')$  ist eine frei wählbare additive Konstante im  $x'$ -Int. ( $C(x) \rightarrow C(x) + \alpha$ ) entspricht der Addition der Lösung der homogenen Dgl.

### 3.6.1 Zusammenfassung / Verallgemeinerung auf $n > 1$

**Definition 1** Linear Unabhängig. Ein Satz von Funktionen  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  heißt linear unabhängig, falls jede Linearkombination bei der nicht alle Koeffizienten Null sind auch nicht Null ist:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \equiv 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

(identisch zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren)

**Fakt** Kennt man  $n$  linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Dgl.  $n$ -ter Ordnung, so kann man die allgemeine Lösung:

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Die allgemeine Lösung ist stets von dieser Form.

Wenn wir außerdem eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung haben, so haben wir auch schon deren allgemeine Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

”Beweis” durch Einsetzen in

$$y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + f_0y = f$$

### 3.6.2 Finden der partikulären Lösung

Auch bei  $n > 1$ : Variation der Konstanten (Funktioniert gut bei konstanten Koeffizienten) Mächtigere Methoden: Überführen von System von linearen Dgl. 1. Ordnung (braucht Matrixrechnung)

## 4 Erhaltungssätze in Newtonscher Mechanik

### 4.1 Impulserhaltung

Systeme mit mehreren Massenpunkten  $a, b \in \{1, \dots, n\}$

Trajektorien:  $\vec{x}_a(t), a = 1, \dots, n$

**Satz 1** Impulserhaltung. Bei verschwindenden externen Kräften ( $\vec{F}_{ext} = 0$ ) gilt:

$$\vec{p} \equiv \sum_a \vec{P}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a = \text{const}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{p}} &= \sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \\
 &= \sum_a \vec{F}_a \\
 &= \sum_a \left( \sum_{\substack{b \\ a \neq b}} \vec{F}_{ab} \right) \\
 &= \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b) \\
 &= \sum_{a > b} \vec{F}_{ab} + \sum_{a < b} \vec{F}_{ab} \\
 &= \sum_{a > b} (\vec{F}_{ab} + \vec{F}_{ba}) && \begin{array}{l} = 0 \\ \downarrow \\ \text{3. Newtonsches Axiom} \end{array}
 \end{aligned}$$

mit äußeren Kräften:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_a \vec{F}_{a,ext.} \equiv \vec{F}_{ext}$$

Falls zum Beispiel die äußere Kraft nicht in  $x^1$ -Richtung wirkt ( $F_{ext}^1 = 0$ ), so gilt immer noch  $p^1 = \text{const}$  (eigentlich drei Erhaltungssätze für  $p^1, p^2, p^3$ , manchmal gelten nur einige davon)

## 4.2 Drehimpulserhaltung

Oft: Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie zweier Massenpunkte:

- Gravitationskraft
- Elektrostatische Kraft
- Modell der masselosen Stange ( $\rightarrow$  Modell für starre Körper!)

**Definition 2** Drehimpuls.

$$\begin{aligned}
 \vec{L}_a &\equiv \vec{x}_a \times \vec{p}_a \\
 (\vec{L}_a)^i &= \varepsilon^{ijk} x_a^j p_a^k
 \end{aligned}$$

Falls  $\vec{F}_{a,ext} = 0$  und alle internen Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie der jeweiligen Punkte, dann gilt **Drehimpulserhaltung**

**Satz 2** Drehimpulserhaltung.

$$\vec{L} \equiv \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \dot{\vec{x}}_a = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \text{const}$$

*Beweis.* Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_a m_a (\dot{\vec{x}}_a \times \dot{\vec{x}}_a + \vec{x}_a \times \ddot{\vec{x}}_a) \\
&= \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a \\
&= \sum_{a \neq b} \vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b, a \neq b) \\
&= \sum_{a > b} (\vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} + \vec{x}_b \times \vec{F}_{ba}) \\
&= \sum_{a > b} (\vec{x}_a - \vec{x}_b) \times \vec{F}_{ab}
\end{aligned}$$

da  $\vec{F}_{ab} \parallel (\vec{x}_a - \vec{x}_b)$  per Annahme

$$= 0$$

□

Bei externen Kräften:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_{a,ext} \equiv \vec{M}_{ext}$$

$M_{ext}$  ist das durch äußere Kräfte auf Punkt  $a$  ausgeübte **Drehmoment**, allgemein (für einzelnen Punkt):

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

Wichtig: Drehimpulserhaltung gilt auch dann wenn alle äußeren Kräfte **Zentralkräfte** sind, Zentralkraft:

$$\vec{F}_a \parallel \vec{x}_a$$

Drehimpuls hängt vom Koordinatensystem ab.

*Bemerkung 1.*  $\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$  (allgemeiner jedes Kreuzprodukt von Vektoren) ist ein **Axial-** oder **Pseudovektor**, das heißt: Bei Drehungen wie Vektor, Bei Reflexion am Ursprung kein Vorzeichenänderung

*Beweis.*

$$\vec{a} \rightarrow -\vec{a}, \vec{b} \rightarrow -\vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow +\vec{a} \times \vec{b}$$

□

### 4.3 Konservative Kräfte und Energieerhaltung

**Definition 3** Gradient. Gradient von  $V$ :

$$\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right)$$



$\frac{\partial}{\partial x}$  ist ein "Differentialoperator", also:

$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x, y) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

Dementsprechen  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  ist ein "Differentialoperator" zweiter Ordnung, also:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} : f(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$\vec{\nabla}V$  ist gute Schreibweise, weil  $\vec{\nabla}$  ein vektorwertiger Differentialoperator ist:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

**Definition 4** konservatives Kraftfeld. Ein zeitunabhängiges Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x})$  heißt **konservativ** falls es eine Funktion  $V(\vec{x})$  ("Potential") gibt, sodass

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

#### 4.3.1 Energieerhaltung

Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt:

$$E = \underset{\text{kinetisch}}{T} + \underset{\text{potentielle Energie}}{V} = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}(t)^2 + V(\vec{x}(t)) = \text{const}$$

#### Begründung

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^i) = \frac{m}{2} 2 \dot{x}^i \ddot{x}^i = m \dot{\vec{x}} \ddot{\vec{x}} \\ \frac{dV}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3)}{\Delta t} \end{aligned}$$

mit  $\Delta x = \frac{d\vec{x}}{dt} \Delta t$

Umschreiben des Zählers

$$\begin{aligned} &V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ &+ V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ &+ V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3) \\ &\cong \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \Delta x^1 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \Delta x^2 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(\vec{x}) \Delta x^3 \end{aligned}$$

Teilen durch  $\Delta t$ , Grenzwertbildung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{x}(t)) \frac{dx^i}{dt}$$

oder (allgemeine Rechenregel)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x^i} dx^i$$

Allgemeine Formulierung der Rechenregel: Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Die Verknüpfung  $f \circ \vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion. Für diese gilt:

$$\underbrace{df}_{\text{totales Differential}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = (\vec{\nabla} f) d\vec{x} \quad (4)$$

oder totale Ableitung:

$$(5)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (6)$$

Unsere Anwendung

$$(7)$$

$$\dot{E} = m \dot{\vec{x}} \ddot{\vec{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i} \dot{x}^i = \vec{F} \dot{\vec{x}} + (\vec{\nabla} V) \dot{\vec{x}} = 0 \quad \checkmark \quad (8)$$

$$V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$$

Vergleiche:

$$f(x + \Delta) - f(x) \cong f'(x) \Delta$$

### 4.3.2 Kriterium für Konservativität

Für \*einfach zusammenhängende Gebiete\*<sup>1</sup> gilt:

$$\vec{F} \text{ ist konservativ} \iff \vec{\nabla} \vec{F} = 0$$

**Begründung**  $\implies$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \implies \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\equiv \text{Rotation von } F \text{ (rot } F)}} = 0$$

---

<sup>1</sup>Jede geschlossene Kurve kann auf Länge Null zusammengezogen werden

$$\begin{aligned}
(\vec{\nabla} \times \vec{F})^i &= \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} F^k = \varepsilon^{ijk} \partial^j F^k \\
&= -\varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V = -\frac{1}{2}(\varepsilon^{ijk} - \varepsilon^{ikj}) \partial^j \partial^k V \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V + \frac{1}{2} \varepsilon^{ikj} \underbrace{\partial^k \partial^j V}_{\substack{\text{habe benutzt } \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}}} \\
&= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V = 0 \\
&\quad \downarrow \\
&\quad k \leftrightarrow j
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$

Wähle beliebiges festes  $\vec{x}_0$  im Gebiet. Definiere Potential als minus Arbeit am Massenpunkt  $\rightarrow$  *Abbildung*

$$V(\vec{x}) \equiv - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(x) d\vec{s} \quad (\text{Linienintegral})$$

Linienintegral kann immer definiert werden, wenn Kurve durch Gebiet mit Vektorfeld verläuft

$$d\vec{s} \equiv d\vec{x}(s) = \left( \frac{dx^1}{ddx}, \frac{dx^2}{ddx}, \frac{dx^3}{ddx} \right) ds$$

Also gilt:

$$\vec{F} d\vec{s} = \underbrace{F^i \left( \frac{dx^i}{ds} \right)}_{\text{Integrand im normalen Riemann Integral}} ds$$

Wähle beliebigen kleinen Vektor  $\vec{l}$  und berechne:

$$\begin{aligned}
\vec{l} \vec{F}(\vec{x}) &\cong - \left( - \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{l}} d\vec{s} \vec{F} \right) \\
&= - \left( \left( - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}+\vec{l}} d\vec{s} \vec{F} \right) - \left( - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \vec{F} \right) \right) \\
&= -(V(\vec{x} + \vec{l}) - V(\vec{x})) \\
&\cong - \frac{\partial V}{\partial x^i} l^i = -\vec{l}(\vec{\nabla} V) \\
&\implies \vec{l}(\vec{F} + \vec{\nabla} V) = 0 \\
&\implies \vec{F} + \vec{\nabla} V = 0 \checkmark
\end{aligned}$$

Lücke: Wegunabhängigkeit der Definition von  $V$ :

Wähle zwei unterschiedliche Wege  $(L_1, L_2)$ :

$$\begin{aligned}
\int_{L_1} d\vec{s} \vec{F} - \int_{L_2} d\vec{s} \vec{F} &= \oint d\vec{s} \vec{F} \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \text{Rand von } \Sigma
\end{aligned}$$

Satz von Stokes

$$= \int_{\Sigma} d\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

$$(\text{rot } \vec{F})^i = (\vec{\nabla} \times \vec{F})^i = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} F^k$$

zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{F})^1 &= \frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \\ \int_{L_2} d\vec{s}\vec{F} - \int_{L_1} d\vec{s}\vec{F} &= \oint_{\partial\Sigma} d\vec{s}\vec{F} = \int_{\Sigma} d\vec{f} * (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\quad \text{"Stokes"} \end{aligned}$$

#### 4.4 Kurvenintegrale

Jedes Kurvenintegral kann durch Parametrisierung der Kurve berechnet werden. Kurve  $C \rightarrow \vec{x}(t)$

$$\begin{aligned} d\vec{x} &\equiv d\vec{s} \\ \int_C d\vec{s}\vec{F}(\vec{x}) &\equiv \int_C d\vec{x}\vec{F}(\vec{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \vec{F}(\vec{x}(t)) \end{aligned}$$

#### 4.5 Satz von Stokes

**Definition 5** Satz von Stokes.

$$\oint d\vec{s}\vec{F} = \int_{\Sigma} d\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \oint d\vec{s}\vec{F} &= \int_0^{\Delta x^1} ds F^1(x, 0) + \int_0^{\Delta x^2} ds F^2(\Delta x^1, s) - \int_0^{\Delta x^1} ds F^1(s, \Delta x^2) - \int_0^{\Delta x^2} ds F^2(0, s) \\ &= \int_0^{\Delta x^1} ds (F^1(s, 0) - F^1(s, \Delta x^2)) + \int_0^{\Delta x^2} ds (F^2(\Delta x^1, s) - F^2(0, s)) \\ &= \int_0^{\Delta x^1} ds \left( \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) \Delta x^2 + \int_0^{\Delta x^2} ds \frac{\partial F^2}{\partial x^1} \Delta x^1 + O(\Delta^3) \\ &= \Delta x^1 \Delta x^2 \left( \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) + O(\Delta^3) \\ &= \Delta x^1 \Delta x^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F})^3 + O(\Delta^3) \\ &= \underbrace{\Delta x^1 \Delta x^2 \hat{e}_3}_{\Delta \vec{f}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \end{aligned}$$

$\Delta \vec{f}$  = Der dem kleinen Flächenelement zugeordnete Vektor

$$\approx \Delta \vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Allgemein steht  $\Delta \vec{f}$  oder  $d\vec{f}$  für ein kleines oder infinitesimales Flächenelement, Länge  $\hat{=}$  Größe der Fläche Die Richtung des Vektors definiert **Orientierung** der Fläche (Zum Beispiel Oben = da, wo der Pfeil hinzeigt)

Randkurve: so definiert, dass man von oben gesehen linksherum (mathematisch positiver Drehsinn) läuft

1. Spezielle Lage in unsererer Rechnung unwichtig
2. Übergang zu größeren Flächen durch Aufaddieren

$$\text{Fläche} = N\Delta^2 \implies N \sim \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\sum_{\text{Rechtecke}} \oint d\vec{s} \vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Zahl der Rechtecke} = O(\Delta)}}{NO(\Delta^3)}$$

weil sich nicht "innere Ränder wegheben"

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

klar

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Glätten des Randes: Zerlegung des Randes  $\Delta \vec{s}$  in kleine Rechtecke  $\Delta \vec{s}_1, \Delta \vec{s}_2$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{s} &= \Delta \vec{s}_1 + \Delta \vec{s}_2 \\ \vec{F} \Delta \vec{s} &= \vec{F} \Delta \vec{s}_1 + \vec{F} \Delta \vec{s}_2 = \vec{F}_1 \Delta \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \Delta \vec{s}_2 + O(\Delta^2) \end{aligned}$$

$\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  jeweils am Mittelpunkt der Linienelemente Zahl derartiger Randelemente  $\sim \frac{1}{\Delta} \implies$  Fehler  $O(\Delta)$

$\implies$  Auch nach Summation bleibt Fehler von  $O(\Delta)$

Besser wäre Zerlegung in Simples (Haben sie mal versucht eine Schildkröte zu fliesen")  $\square$

Für unsere Anwendung: wichtig, dass jede geschlossene Kurve inn einem einfach zusammenhängenden Gebiet, **Rand** ist.

## 4.6 Energieerhaltung für Systeme von Massenpunkten

Massenpunkte:  $\vec{x}_a, a = 1, \dots, n$

Kräfte: seien  $\parallel$  zu  $\vec{x}_a - \vec{x}_b$  ("Zentralkräfte")

Solche Kräfte kann man stets schreiben als:

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

mit:

$$V_{ab} = V_{ba}, \vec{\nabla}_a = \left( \frac{\partial}{\partial x_a^1}, \frac{\partial}{\partial x_a^2}, \frac{\partial}{\partial x_a^3} \right)$$

dazu:

$$-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = (-\vec{\nabla}_a |\vec{x}_a - \vec{x}_b|) V'_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

Dies zeigt:

$$\begin{aligned} &= -\vec{\nabla}_a \sqrt{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2} \\ &= \frac{\vec{x}_a - \vec{x}_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \end{aligned}$$

Wir können passendes  $V$  für jede Zentralkraft finden. Man berechnet einfach  $V'$  und sucht die Stammfunktion.

Prüfe Konsistenz mit 3. Axiom:

$$\underbrace{-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)}_{\vec{F}_{ab}} = +\vec{\nabla}_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = \underbrace{+\vec{\nabla}_b V_{ba}(|\vec{x}_b - \vec{x}_a|)}_{-\vec{F}_{ba}}$$

In diesem System gilt Energieerhaltung:

$$E = \sum_a T_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a < b} V_{ab} = \text{const}$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \sum_a \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} ((\vec{\nabla}_a V_{ab}) \dot{\vec{x}}_a + (\vec{\nabla}_b V_{ab}) \dot{\vec{x}}_b) \\ &= \sum_{a \neq b} \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} (-\vec{F}_{ab} \dot{\vec{x}}_a - \underbrace{\vec{F}_{ab} \dot{\vec{x}}_b}_{\text{Umbenennung } a \leftrightarrow b}) = 0 \\ & (= W - \frac{1}{2} W - \frac{1}{2} W) \end{aligned}$$

Bemerkung: Passend gewähltes  $V_{ab}$  gibt das Modell der starren Stangen

## 4.7 Eindimensionale Bewegung

$$F(x) = m\ddot{x}$$

- mit Einsatz allgemein lösbar!
- Startpunkt: Jedes 1-dim. zeitunabhängiges Kraftfeld ist konservativ

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{const}$$

(bis auf Vorzeichen)

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \implies dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$
$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Integral lösen, Integrationskonstante und Energie so bestimmen, das Anfangswertproblem gelöst

$$t = t(x) \text{ auflösen} \implies x = x(t) \checkmark$$

viel einfacher als allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung

## 5 Harmonischer Oszillator in komplexen Zahlen

### Motivation

Harmonischer Oszillator mit Reibung:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x}$$

Exponentieller Ansatz:

$$x \sim e^{\alpha t} \implies \alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0$$

gesucht:  $\alpha$ , Betrachte Grenzfälle:

1.  $\omega$  klein

$$\implies \alpha^2 + c\alpha = 0 \implies \alpha = -c \implies x \sim e^{-ct}$$

2.  $\omega$  groß (beziehungsweise  $c$  klein)

$$\alpha^2 + \omega^2 \simeq 0$$

nicht lösbar!

Aber: wir wissen schon  $\sin \omega t, \cos \omega t$  sind Lösungen.

Falls jede gesuchte Gleichung lösbar  $\implies$  Hoffnung auf elegante allgemeine Lösung

**Speziell:**  $\alpha^2 = -1$  (für  $\omega = 1, c = 0$ )

### 5.1 Komplexe Zahlen

#### 5.1.1 Ziel

reelle Zahlen so zu erweitern, dass  $x^2 = -1$  lösbar

### 5.1.2 Naive Definition

Definiere "Imaginäre Einheit"  $x^2 = -1$  lösbar " $i$ ", so dass  $i^2 = -1$ . Wollen addieren und Multiplizieren, deshalb erkläre komplexe Zahl  $\mathbb{C}$  als:

$$\mathbb{C} \ni z) x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Wir definieren außerdem:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \equiv x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

### 5.1.3 präzisere Definition

**Definition 6** Körper. Körper ("Field") ist eine Menge  $K$  mit zwei binären Operationen (" $+$ ", " $\cdot$ "), so dass:

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$  (Assoziativität)
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  (Kommutativität)
- $\exists 0 \in K : \alpha + 0 = \alpha \forall \alpha$  (Null)
- $\forall \alpha \exists (-\alpha) \in K : \alpha + (-\alpha) = 0$  (Additives Inverses)
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  (Assoziativität der Mult.)
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$  (Kommutativität der Mult.)
- $\exists 1 \in K : 1 \cdot \alpha = \alpha \forall \alpha$  (Eins)
- $\forall \alpha \neq 0 \exists \alpha^{-1} \in K : \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$  (Inverses der Mult.)
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$  (Distributivität)

Wir kennen bereits:

- $K = \mathbb{Q}$  (rationale Zahlen)
- $K = \mathbb{R}$  (reelle Zahlen)

**Definition 7** Komplexer Zahlenkörper. Komplexe Zahlen sind die Menge  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  mit den Operationen

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \equiv (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Das ist äquivalent zu unserer "naiven Definition"  $z = x + iy$



**Aufgabe:** Prüfen sie, dass die Axiome erfüllt sind!

Schwierigster Teil: Multiplikations-Inverses, Idee / Vorschlag:

$$z^{-1} = (x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \implies$  Darstellung durch Vektoren in Ebene liegt nahe.

- Addition:  $\equiv$  Vektoraddition
- Multiplikation: Beträge der Vektoren werden multipliziert, Winkel "arg" werden addiert.
- $\arg z = \phi$
- $\Re z = x$
- $\Im z = y$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Übliche Funktionen (exp, ln, sin, cos) können mittels ihrer in  $\mathbb{R}$  bekannten Taylorreihe auf  $\mathbb{C}$  übertragen werden

**Besonders wichtig:**

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Brauchen  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Nachrechnen:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

$\downarrow$   
 Binomialkoeffizient  
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

englisch: "n choose k"

durch Umschreiben der Summen erhält man:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} z^k w^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} = e^z e^w
 \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\text{reelle Zahl}} \overbrace{e^{iy}}^{\text{komplexe Zahl e vom Betrag 1}}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{iy^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \cos y + i \sin y
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

#### 5.1.4 Zusammenfassung:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$$

$$\ln w = z = x + iy = \ln |w| + i \arg w$$

Problem:  $\arg w$  und deshalb  $\ln$  nicht eindeutig definiert

Lösung: Definiere  $\arg w \in (-\pi, \pi)$

#### 5.1.5 Fundamentalsatz der Algebra

In  $\mathbb{C}$  hat jedes Polynom

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

eine Nullstelle  $z_0$

In der Tat hat es sogar  $n$  Nullstellen:

$$P_n(z) = (z - z_0) \cdot \underbrace{P_{n-1}(z)}$$

Hat wieder eine Nullstelle, usw.

(Man sagt: Körper  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen)

- Es gibt auf  $\mathbb{C}$  wichtige Abbildung: "komplexe Konjugation"

$$z \rightarrow z^* \stackrel{\wedge}{=} z \rightarrow \bar{z}$$

Definiert durch:

$$(x + iy)^* = x - iy, (\rho e^{i\phi})^* = \rho e^{-i\phi}$$

also auch

$$(z^*)^* = z$$

### 5.1.6 Quaternionen

$$1, i \rightarrow 1, i, j, k, i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij = k, ji = -k, jk = i, \dots$$

## 5.2 Anwendung auf harmonischen Oszillator

Erinnerung: physikalisches Problem:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Fall  $\frac{c}{2} > \omega$  (Kriechfall)

$$x = e^{\alpha t}, \alpha^2 + c\alpha + \omega^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}$$

$\Rightarrow$  2 linear unabhängige Lösungen, also allgemeine Lösung durch lineare Superposition

$\Rightarrow$  exponentielles Abfallverhalten, ohne Oszillationen

Fall  $\frac{c}{2} < \omega$  (Schwingfall),  $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \equiv -\frac{c}{2} \pm i\tilde{\omega} \\ x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm i\tilde{\omega}t} = e^{-\frac{c}{2}t} (\cos \pm \tilde{\omega}t + i \sin \pm \tilde{\omega}t) \\ x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t} (\cos \tilde{\omega}t \pm i \sin \tilde{\omega}t)$$

Durch Linearkombination  $\rightarrow$  2 reelle Lösungen:

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \cos \tilde{\omega}t; \quad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \sin \tilde{\omega}t$$

$\Rightarrow$  allgemeine Lösung durch Linearkombination

$\Rightarrow$  gedämpfte Schwingung

Fall  $\frac{c}{2} = \omega$  (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$\Rightarrow$  Nur eine linear unabhängige Lösung, brauche weitere Lösung um allgemeine Anfangsbedingungen zu erfüllen

Idee: Betrachte Schwingfall Lösungen für  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$

Taylor:

$$\cos x = 1 + (x^2); \quad \sin x = x + O(x^3) \\ \Rightarrow x_1 = e^{-\frac{c}{2}t}; \quad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \tilde{\omega}t$$

$\Rightarrow$  Wieder asymptotische Annäherung an 0 ohne Oszillation

### 5.3 harmonischer Oszillator mit periodisch treibender Kraft

Inhomogene Dgl:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t), F(t) = f e^{i\omega t}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{i\omega t} \\ \Rightarrow (A(-\omega^2 + ic\omega + \omega^2) - \frac{f}{m}) e^{i\omega t} &= 0 \\ A &\equiv |A| e^{i\phi} = \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega^2 + ic\omega} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a-ib} \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2-b^2}$$

und elementarer Algebra findet man den Realteil der Lösung:

$$\begin{aligned} \Re x(t) &= |A| \cos \omega t + \phi \\ |A| &= \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{\omega^2 - \omega^2 + c^2 \omega^2}}, \tan \phi = \frac{c\omega}{\omega^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung ergibt sich, indem man zu dieser partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

**Wichtig:** Langzeitverhalten ist durch die partikuläre Lösung bestimmt  $\Rightarrow$  Resonanzkatastrophe bei  $c \rightarrow 0$  &  $\omega \rightarrow \omega$

## 6 Symmetrie der Raumzeit

### 6.1 Matrix, Determinante, Inverse Matrix

**Definition 8** Permutation. Eine Permutation (Bez:  $\sigma$ ) von  $n$  Elementen ist eine umkehrbare Abbildung einer Menge von  $n$  Elementen auf sich selbst:

Menge:  $\{1, \dots, n\}$ , Abb:  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, i \mapsto \sigma i$

oft nützlich: Man denke an die elementweise Anwendung von  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$

Eine Permutation heißt **gerade** ( $\text{sgn}(\sigma) = 1$ ), falls sie sich aus geradzahlig vielen Vertauschungen von Nachbarn ergibt. Zum Beispiel ist  $123 \rightarrow 312$  das Produkt von  $123 \rightarrow 132$  und  $123 \rightarrow 213$ :

$$123 \rightarrow 132 \rightarrow 312$$

**Definition 9** Levi-Cevita-Tensor.

$$\varepsilon^{\sigma(1)\dots\sigma(n)} \equiv \text{sgn}(\sigma)$$

Insbesondere:  $\varepsilon^{12\dots n} = 1$

- Eine  $(n \times m)$ -Matrix ist ein Schema  $A^{ij}$  von Zahlen, die jeweils Eintrag  $i$  in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  bezeichnen.
- Man kann eine  $(n \times m)$ -Matrix mit einer  $(m \times p)$ -Matrix multiplizieren:

$$(AB)^{ij} = \sum_{k=1}^m A^{ik} B^{kj}$$

das Ergebniss ist eine  $(n \times p)$ -Matrix

**Definition 10** Determinante. Für quadratische  $((n \times n)$ -Matrizen) definieren wir die **Determinante**:

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

$\downarrow$   
n-dim. Levi-Civita-Symbol

Damit erhält man:

Determinante einer  $(1 \times 1)$ -Matrix: die Zahl selbst.

Erstes nichttriviales Beispiel:  $(2 \times 2)$ -Matrix

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2!} \varepsilon^{ij} A^{ik} A^{jl} \varepsilon^{kl} \\ &= \frac{1}{2!} (\varepsilon^{12} A^{11} A^{22} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{12} A^{12} A^{21} \varepsilon^{21} + \varepsilon^{21} A^{21} A^{12} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} A^{22} A^{11} \varepsilon^{21}) \\ &= \frac{1}{2} (A^{11} A^{22} + A^{12} A^{21} - A^{21} A^{12} + A^{22} A^{11}) = A^{11} A^{22} - A^{12} A^{21} \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht:

$$\det A = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma A^{1\sigma(1)} A^{2\sigma(2)} \dots A^{n\sigma(n)}$$

Also:  $n!$  Summanden, Jeder ist Produkt von je einem Element aus jeder Zeile und Spalte der Matrix. Vorzeichen ist Vorzeichen der Permutation (siehe unten)

*Beispiel 1*  $(3 \times 3)$ -Matrix. Rechenschema:

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} & A^{21} & A^{22} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} & A^{31} & A^{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = A^{11} A^{22} A^{33} + A^{12} A^{23} A^{31} + \dots$$

Betrachte nun den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} &= \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_2 j_2} A^{i_1 j_2} \dots \\ &= \varepsilon^{i_2 i_1 \dots i_n} A^{i_2 j_2} A^{i_2 j_1} \dots = -\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots A^{i_n j_n}\end{aligned}$$

Vorzeichenwechslung durch Vertauschen zweier Indizes, obiger Ausdruck ist "total antisymmetrisch"

Totale Antisymmetrie ist die definierende Eigenschaft von  $\varepsilon$ . Sie bestimmt jeden Ausdruck mit  $n$  Indizes bis auf Vorfaktor. Deshalb:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

Multipliziere mit  $\varepsilon^{j_1 \dots j_n}$ :

$$n! \det A = c \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = c n!$$

$\Rightarrow$  alternative Formel für  $\det A$ :

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = (\det A) \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

Zentraler Fakt:  $A$  invertierbar  $\iff \det A \neq 0$

Inverse Matrix:

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{1}{(n-1)! \det A} \varepsilon^{ji_2 \dots i_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n}$$

Prüfen:

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{ij} A^{jk} &= \frac{1}{(n-1)! \det A} \varepsilon^{ji_2 \dots i_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n} A^{jk} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \\ &= \frac{1}{(n-1)! \det A} (\det A) \underbrace{\varepsilon^{kj_2 \dots j_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n}}_{(n-1)! \delta^{ik}} \\ &= \delta^{ik} \checkmark\end{aligned}$$

Kommentar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{ii_2 \dots i_n} \varepsilon^{jj_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \\ = (-1)^{i+j} \det(M(i, j)) \\ \downarrow \\ \text{Matrix der Cofaktoren}\end{aligned}$$

Matrix der Cofaktoren ergibt sich aus  $A$  Streichen von Zeile  $i$  und Spalte  $j$

## 6.2 Der Euklidische Raum

physikalischer Raum:  $V = \mathbb{R}^3$  mit Skalarprodukt  $\vec{x}, \vec{y} \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i$

Unser Ziel: Symmetrien, also Abbildungen  $R : V \rightarrow V, \vec{x} \mapsto \vec{x}'$ , welche die Struktur des Raumes respektieren. Das heißt:

$$\begin{aligned} R(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \alpha R(\vec{x}) + \beta R(\vec{y}) \\ R(\vec{x}, \vec{y}) &\equiv \vec{x} \cdot \vec{y} = R(x)R(y) \\ &\downarrow \end{aligned}$$

Sagt nur: Zahlen transformieren nicht

Zunächst nur Linearitätsbedingung (wird respektiert von allgemeinen linearen Transformationen)

$$x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j$$

oder

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix}$$

Symmetrie: Lineare Transformation:  $\vec{x} \mapsto R(\vec{x})$

konkret:  $x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise:

$$x \mapsto x' = Rx$$

- hier: Großbuchstaben = Matrizen
- Kleinbuchstaben = Vektoren

Beispiel 2 n = 2.

$$\begin{aligned} x'^1 &= R^{11} x^1 + R^{12} x^2 \\ x'^2 &= R^{21} x^1 + R^{22} x^2 \end{aligned}$$

Ganz explizit

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformation der beiden Basisvektoren

Jeder andere Vektor  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  ist schreibbar als  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Er transformiert demnach gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Wichtig: Symmetrietransformationen müssen verknüpfbar sein:  
Dazu: Betrachte zwei Transformationen:

$$R_1 : x \mapsto R_1 x; R_2 : x \mapsto R_2 x$$

zusammen:

$$R_1 \circ R_2 : x \mapsto R_2 R_1 x$$

Die Komponente  $i$  des entstehenden Vektors ist:

$$(R_2 R_1 x)^i = R_2^{ij} (R_1 x)^j = R_2^{ij} R_1^{jk} x^k$$

Man kann die Abbildung  $x \mapsto R_2 R_1 x$  auch "in einem Schritt" als Transformation durch die Produktmatrix  $R_2 R_1$  realisieren:

$$(R_2 R_1 x)^i = \underbrace{(R_2^{ij} R_1^{jk})}_{\text{Produktmatrix}} x^k$$

Die Produktmatrix ist  $(R_2 R_1)^{ij} = R_2^{ij} R_1^{jk} \equiv R_3^{ik}$  Hinweis zum expliziten Rechnen:

$$\begin{pmatrix} R_2^{11} & R_2^{12} & R_2^{13} \\ R_2^{21} & R_2^{22} & R_2^{23} \\ R_2^{31} & R_2^{32} & R_2^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{11} & R_1^{12} & R_1^{13} \\ R_1^{21} & R_1^{22} & R_1^{23} \\ R_1^{31} & R_1^{32} & R_1^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3^{11} & R_3^{12} & R_3^{13} \\ R_3^{21} & R_3^{22} & R_3^{23} \\ R_3^{31} & R_3^{32} & R_3^{33} \end{pmatrix}$$

Für den Begriff der Symmetrie brauchen wir Invertierbarkeit. Wir nennen eine Transformation beziehungsweise die entsprechende Matrix  $R$  invertierbar, falls es eine zweite Matrix  $R^{-1}$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ R &= id & (\text{Identitätsabbildung}) \\ (R^{-1})^{ij} R^{jk} &= \delta^{ik} \end{aligned}$$

Wäre Linearität die einzige wichtige Eigenschaft: dann wären die Symmetriefunktionen alle

$$R \in GL(n)$$

↓

Menge aller invertierbaren  $n \times m$  Matrizen

Wir brauchen zusätzlich:

$$\vec{x}\vec{y} = R(\vec{x})R(\vec{y}), R(x)^i = R^{ij} \times j$$



Dazu wichtige Schreibweise

$$(M^T)^{ij} = M^{ji} \quad (\text{T für Transponiert})$$

auch:  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \vec{x} = (x^1 \dots x^n)$  Es gilt:  $\vec{x}\vec{y} = x^T y = x^i y^i$   
es gilt weiterhin:

$$R(\vec{x})R(\vec{y}) = (Rx)^T(Ry) = (x^T R^T)(Ry) = x^T R^T R y$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned} ((AB)^T)^{ij} &= (AB)^{ji} = A^{jk} B^{ki} = B^{ki} A^{jk} = (B^T)^{ik} (A^T)^{kj} \\ &= (B^T A^T)^{ij} \\ \implies (AB)^T &= B^T A^T \end{aligned}$$

Ziel:  $x^T R^T R y = x^T y$  soll gelten für beliebige  $x, y$ . Dies gilt genau dann wenn  $R^T R = \mathbb{I}$

$$(R^T)^{ik} R^{kj} = \delta^{ij}$$

$$R^{ki} R^{kj} = \delta^{ij}$$

$$R^{ik} R^{jk} = \delta^{ij}$$

wenn  $AB = \mathbb{I}$ , so auch  $BA = \mathbb{I}$

Symmetrien des euklidischen Raums:  $xRx$  mit  $R^T R = \mathbb{I}$   $R \in O(3) \subset U(3)$

### 6.3 Symmetriegruppe (M)

Symmetrien in Physik und Mathe  $\rightarrow$  Gruppen

Bisher:

- Matrixgruppen
  - $GL(n)$  - Symmetriegruppe des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$
  - $O(n)$  - Symmetriegruppe des euklidischen Raumes

Allgemeiner: Eine Gruppe ist eine Menge  $G$  mit einer Binären Operation  $G \times G \rightarrow G$  für die gilt:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \forall a$  ("Eins")
- $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Eine Gruppe heißt "abelsch" falls  $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b$  Beispiele dafür:

- $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Falls sie statt "." die Operation "+" zur Gruppenoperation erklären, dann sind

- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$

Gruppen mit "+"

**Definition 11** Körper.  $K$  mit Operationen  $+, \cdot$  ist ein Körper falls:

- $(K, +)$  ist abelsche Gruppe (Eins = 0)
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist auch abelsche Gruppe
- Distributivität

$GL(n)$  ist eine (nichtabelsche) Gruppe. Müssen prüfen:  $A, B$  invertierbar  $\implies A \cdot B$  invertierbar. Wir geben das Inverse zu  $A \cdot B$  einfach an:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}B = \mathbb{I}$$

$GL^+(n)$  - orientierungserhaltende Untergruppe  $\equiv$  alle  $A$  in  $GL(n)$  mit  $\det A > 0$   
 $O(n)$  ist Untergruppe von  $GL(n)$ . Müssen prüfen dass  $A, B$  orthogonal  $\implies A \cdot B$  orthogonal. Dazu:

$$(A \cdot B)^T(A \cdot B) = B^T A^T A B = B^T B = \mathbb{I}$$

Wichtige Untergruppe: Spezielle Orthogonale Transformationen  $SO(n)$

Diese Transformationen erfüllen:  $\det(R) = 1$

Dazu zwei Fakten:  $\det A^T = \det A$ ,  $\det(AB) = (\det(A))(\det B)$  Damit folgt aus  $R^T R = \mathbb{I}$

$$\det(R^T R) = \det(R^T)(\det R) = (\det R)^2 = \det \mathbb{I} = 1, \det R = \pm 1$$

$\equiv$  Matrizen in  $O(n)$  mit  $\det = 1$

Speziell in  $n = 3$  (3d-Raum) wird die Reflexion bezüglich y,z Ebene beschrieben durch:

$$R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det R_x = -1$$

Fakt: Jedes Element von  $O(3)$  ist schreibbar als  $R$  oder  $R \cdot R_x$  mit  $R \in SO(3)$ ,  $SO(3)$  sind "echte" Drehungen.

Überlegen Sie sich, dass  $R \in SO(2)$  allgemein schreibbar ist als

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Identifizieren sie  $SO(2)$  mit folgender Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Die Gruppenoperation soll der komplexen Multiplikation entsprechen

## 6.4 Tensoren

Ein Tensor von Rang (oder Stufe)  $m$  im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V = \mathbb{R}^n$  ist eine multilineare Abbildung:

$$t : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{m\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Praktisch:

$$t : (\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \dots, \vec{x}_{(n)}) \mapsto t_{i_1 \dots i_m} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(m)}^{i_m}$$

*Beispiel 3.* • Euklidisches Skalarprodukt:  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \delta_{ij} x^i y^j \equiv \vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$$

- Noch einfacher:

$$t : V \rightarrow \mathbb{R} : t_i \vec{x} \rightarrow t_i x^i \in \mathbb{R}$$

Die Menge solcher linearen Abbildungen bildet auch einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum, den sogenannten Dualraum  $V^*$  (zu  $V$ ) Notation:  $\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\} \in V^*$

Erinnerung:  $\vec{x} = \{x^1, \dots, x^n\} \in V$

Oben(Unterschreiben der Indizes macht die "natürliche Wirkung") von  $\underline{t}$  auf  $\vec{x}$  besonders deutlich:  $t_i x^i \in \mathbb{R}$

- oben: kontravariant
- unten: kovariant ( $\rightarrow$  Co-Vektor  $\in V^*$ )

Für und: enorme Vereinfachung:

Wir haben immer euklidischen Raum und damit die besondere Rolle von  $\delta_{ij}$  und die inversen Matrix  $\delta^{ij}$

$$\delta_{ij} \delta^{jk} = \delta_i^k = (\delta_i^k)$$

Dies erlaubt uns Indizes beliebig zu "heben" und zu "senken":

$$t^i \equiv \delta^{ij} t_j, x_i \equiv \delta_{ij} x^j$$

Damit können wir  $V$  und  $V^*$  identifizieren. Wir können auch alle Tensor Indizes beliebig oben oder unten schreiben. Wir werden zur Vereinfachung weiterhin schreiben

$$\vec{x} \vec{y} = x^i y^i \text{ (eigentlich } x^i y^j \delta_{ij})$$

(Mehr zum Dualraum in Lineare Algebra)

Für uns: Tensor der Stufe 1: ist Vektor

$$t : \vec{x} \mapsto t^i x^i = \vec{t} \vec{x} \in \mathbb{R}$$

Wichtig für uns: Resultat von Anwendung eines Rang-1-Tensors auf Vektor ist invariant unter Drehungen:

$$x \mapsto Rx; t \mapsto Rt$$

$$x \mapsto x' = Rx, x'^j = R^{ij} x^j$$

Invarianz:

$$t^T x = t^T R^T R x$$

Betrachte einfaches, allgemeines Beispiel für Tensor der Stufe 2:

$$\begin{aligned} t &\equiv U \otimes W \in V \otimes V \\ t : (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto (u^i w^j) \cdot (x^i y^j) = (\vec{u} \cdot \vec{x}) \cdot (\vec{w} \cdot \vec{y}) \end{aligned}$$

mit  $t^{ij} \equiv u^i w^j$

$$= t^{ij} x^i y^j$$

Grob gesagt:  $V \otimes V$  ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen wie  $U \otimes W$   
Transformation von  $t^{ij} = u^i w^j$  unter Drehungen:

$$t^{ij} = u^i w^j \xrightarrow{R} R^{ik} u^k R^{jl} w^l = R^{ik} R^{jl} t^{kl}$$

Invarianz von  $t(\vec{x}, \vec{y})$  :

$$\begin{aligned} t(\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow (Rt)(Rx, Ry) = (R^{ik} R^{jl} t^{kl})(R^{ip} x^p)(R^{jq} y^q) \\ &= (R^{ik} R^{ip})(R^{jl} R^{jq}) t^{kl} x^p y^q \\ &= \delta^{kp} \delta^{lq} t^{kl} x^p y^q \\ &= t^{kl} x^k y^l \\ &= t(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Allgemeine Transformation eines Tensors unter Drehungen:

$$t \rightarrow t' = Rt, t'^{i_1 \dots i_m} = R^{i_1 j_1} \dots R^{i_m j_m} t^{j_1 \dots j_m}$$

Invarianz von  $t(\vec{u}_{(1)}, \dots, \vec{u}_{(m)})$  folgt wie oben.

Fortgeschrittener Kommentar: Gruppe wirkt auf Vektoren aus  $K \equiv$  Darstellung

Für unser Beispiel der Wirkung von  $O(n)$  auf  $\mathbb{R}^k$  war das "offensichtlich" mit Tensoren haben wir "nichttriviales Beispiel für Darstellung"

$$\underbrace{R \in O(n)}_{\text{Elemente } R^{ij}} \xrightarrow{\text{Darst.}} D(R) \in \underbrace{n^2 \times n^2\text{-Matrizen}}_{\text{Elemente } D(R)^{ij,kl} = R^{ik} R^{jl}}$$

Dieses  $D(R)$  wirkt wie oben beschrieben auf Tensoren:

$$t^{ij} \xrightarrow{D(R)} D(R)^{ij,kl} t^{kl}$$

$D(R)$  ist eine Darstellung von  $O(n)$ , die verschieden ist von der "definierenden" Darstellung

### Transformation von $\delta^{ij}$

$$\delta'^{ij} = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = \delta^{ij}$$

$\implies \delta^{ij}$  ist ein **invarianter Tensor**

weiteres Beispiel: (für  $m = n$ : Levi Civita-Tensor)

Wir schreiben nur  $m = n = 3$  Fall aus:

$$\varepsilon(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \varepsilon^{ijk} x^i y^j z^k = x^i \varepsilon^{ijk} y^j z^k = \vec{x}(\vec{y} \times \vec{z})$$

### Transformation:

$$\begin{aligned} \varepsilon'^{i_1 i_2 i_3} &= R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} R^{i_3 j_3} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3} = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \det(R) = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \\ &\quad \downarrow \\ &R \in SO(3) \end{aligned}$$

**Fakt:** Falls  $t_1, t_2$  Tensoren vom Rang  $m_1, m_2$  sind, so ist das folgende ein Tensor vom Rang  $m_1 + m_2 - 2l_i$ :

$$t_1^{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_m} t_2^{i_1 \dots i_l j_{l+1} \dots j_{m_2}} = t^{i_{l+1} \dots i_{m_1} j_{l+1} \dots j_{m_2}}$$

**Anwendungen:**  $\vec{a} \times \vec{v}$  ist ein Pseudovektor:

$$\begin{aligned} (\vec{a}' \times \vec{b}')^i &\equiv \varepsilon^{ijk} a'^j b'^k = \pm \varepsilon^{ijk} a^j b^k = \pm R^{il} \varepsilon^{ljk} a^j b^k = \pm R^{il} (\vec{a} \times \vec{b})^l \\ &\quad \downarrow \\ &\text{falls Spiegelung} \end{aligned}$$

## 6.5 Galilei-Transformationen

**Bisher:**  $\mathbb{R}^3$  mit Symmetriegruppe  $O(3)$

**Jetzt:** Physikalische Raum Zeit: Zusätzlich:  $t \in \mathbb{R}$

Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{neu}}$  Ereignisse  $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

Müssen abschaffen:  $\vec{0}$  im Vektorraum. In der Tat:  $|\vec{x}|, |\vec{y}|$  sind unphysikalisch, physikalisch ist nur  $|\vec{x} - \vec{y}|$ , ebenso ist nur  $t_1 - t_2$  physikalisch

$\implies$  Symmetrietransformationen:

1. Rotationen:  $(t, x) \mapsto (t, Rx), R \in O(3)$
2. Translationen:  $(t, x) \mapsto (t + s, x + y), s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3 \implies$  Abschaffung der  $0 \in \mathbb{R}$  und  $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$
3. Boosts:  $(t, x) \mapsto (t, x + vt), v \in \mathbb{R}^3$  "zeitabhängige Verschiebung"

Die Galilei-Gruppe  $G$  ist die von 1., 2. und 3. "generierte" Gruppe. Nichttrivialer

Boost    Rot.

Fakt: Jedes  $g \in G$  ist zerlegbar als  $g = \overset{\uparrow}{g_3} \circ \overset{\uparrow}{g_2} \circ \overset{\uparrow}{g_1}$  Man muss dazu unter anderem zeigen,

$\downarrow$   
Trans

dass es zu einem  $g_2 \circ g_1 \circ g_2'' \in G$  ein  $g_2'', g_1''$  gibt, sodass  $g_2 \circ g_1 \circ g_2' = g_2'' \circ g_1''$   
 "Boost" = Zunahme (der Geschwindigkeit). Boost einer Trajektorie:  $(t, \vec{x}(t)) \mapsto (t, \vec{x}(t) + \vec{v}_0 t)$   
 $\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t) \mapsto \vec{v}' = \dot{\vec{x}}(t) + \vec{v}_0$

Boost zerstören das Konzept der Gleichörtlichkeit: Seien  $(t, x), (t', x)$  zwei Ereignisse am gleichen Ort. Boost  $\implies (t, x + vt), (t', x + vt')$ , **nicht** mehr am gleichen Ort

## 6.6 Affinier Raum

**Definition 12.**  $O(3)$  Symmetriegruppe des euklidischen Raumes. "Elegant!"

Besser: Definition des **affinen Raumes**: Gegeben sein Menge  $A$ , ein Vektorraum  $V$  und eine Abbildung  $A \times A \rightarrow V, (P, Q) \mapsto \vec{PQ}$  sodass  $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ . Außerdem: Zu jedem  $P \in A, \vec{V}$  soll es eindeutig ein  $Q \in A$  geben, sodass  $\vec{PQ} = \vec{V}$ , das Paar  $(A, V)$  heißt affiner Raum

*Beispiel 4.* Zu jedem Vektorraum gehört ein affiner Raum: Wähle  $A \equiv V, V \times V \rightarrow V, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{y} - \vec{x}$

Sei  $(A^4, V^4)$  ein 4-dimensionaler affiner Raum. (Man denke zum Beispiel an den zu  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  gehörigen affinen Raum)

Physikalische Raumzeit:  $(A^{(4)}, V^{(4)})$  mit

1. Eine lineare Abbildung  $V^4 \rightarrow \mathbb{R}$  ("Zeitfunktion") (im konkreten Beispiel:  $((t, x), (t', x')) \mapsto t' - t$ )
2. Sei  $\tilde{V}^{(3)} \subset V^{(4)}$  der Raum von Pfeilen zwischen gleichzeitigen Ereignissen ( $v \in \tilde{V}^{(3)}$  heißt  $T(\tilde{v}) = 0$ ) Dann hat  $\tilde{V}$  ein Skalarprodukt, "Abstandsfunktion". Im konkreten Beispiel:  $(t, x), (t, x') \mapsto |x - x'|$

Zusammen bilden 1. und 2. eine Galileische Struktur. Die physikalische Raumzeit ist  $(A^{(4)}, V^{(4)})$  mit galileischer Struktur

$G$  sind die Transformationen des  $(A^{(4)}, V^{(4)})$ , welche seine Galileische Struktur respektieren.

## 6.7 Dynamik

Dynamik soll invariant sein! Betrachte Trajektorie, die die Bewegungsgleichung erfüllt:

$$(t, \vec{x}(t)), m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

Transformierte Trajektorie:

$$t', \vec{x}'(t') = (t + s, R\vec{x}(t) + \vec{y} + \vec{v}(t + s))$$

Dazu:

$$m \frac{d^2}{dt'^2} = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} (R\vec{x}(t) + \vec{y} + \vec{v}(t + s)) = m R \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = R \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

$\implies$  Newtonsche Dynamik ist invariant falls Kräfte wie Vektoren transformieren. (hatten wir schon verlangt) Bei Systemen von Massepunkten mit Zentralkräften ist die Kraft gleich dem Gradient, sie besitzt automatisch Vektor-Transformationseigenschaften

Wir fordern bei

$$mR \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = R \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

eigentlich

$$R \vec{F}(t, \vec{x}(t)) = \vec{F}'(t', \vec{x}'(t'))$$

Wichtig: Die Transformation von  $\vec{F}$  beinhaltet nicht nur Drehung, sondern auch Transformation über das Argument. Betrachte zur Vereinfachung  $R = \mathbb{K} \implies \vec{F}'(t', \vec{x}') = \vec{F}(t, \vec{x})$

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte: zum Beispiel Reibung

$$\begin{array}{c} \vec{F}_R = -\alpha(\vec{x} - v u) \\ \downarrow \\ \text{Medium} \end{array}$$

## 6.8 Zusammenfassung:

Allgemeingültiges Schema:

- Beschreibung der Bewegung festlegen (Spielfeld) (hier: affiner Raum und Galileische Struktur)
- Identifikation der Symmetriegruppe (hier Galilei Gruppe)
- Invarianz der Dynamik prüfen beziehungsweise fordern (Spielregeln) (Newtonsches Grundgesetz)