Theoretische Physik (Hebecker)

Robin Heinemann

November 24, 2016

Contents

Einleitung:

- Webseite: www.thphys.uni-heidelberg.de/hebecker/TP1/tp1.html

- Bartelman skripte

1 Semesterüberblick

1. Newtonsche Mechanik
2. Lagrange / Hamilton Mechanik / Statistik / Kontinua
3. Elektrodynamik / Spezielle Relativitättheorie
4. Quatenmechanik
5. Thermodynamik / Quantenstatistik
6. Allgemeine Relativitättheorie / Kosmologie
7. Quatenfeldtheorie I (ggf. 5.)
8. Quatenfeldtheorie II (ggf. 6. $\Leftarrow$ Stringtheorie / Teilchenphysik / Supersymmetrie)
9. Masterarbeit
10. Masterarbeit

1.1 Mathe

wichtig:

- Gruppentheorie
- Differientialgeometrie

2 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik: Bescheibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung $\rightarrow$ Dynamik)

2.1 Kinematik der Massenpunktes in <u>einer</u> Dimension

2.1.1 Graphik

- Ort: x
- zu Zeit t : $x(t)$
- Geschwindigketi: $v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung: $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$

- Beispiel: $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2,\ v(t) = v_0 + a_0 t,\ a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B. $x(t_0) \equiv x_0$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t'$$

Man prüft leicht $\dot{x}(t) = v(t)$

  - Es gibt keine andere Funktion $\tilde{x}(t)$ mit $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$ und $\tilde{x}(t_0) = x_0$

Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben: $a(t) = a_0,\ t_0 = 0, v_0, x_0$

$$\Rightarrow\ v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 \mathrm{d}t' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t')\mathrm{d}t' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechung

2.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$$

2.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$\mathrm{d}f$ bezeichnet den in Δx linearen Anteil des Zuwaches $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$.

- Aus $\Delta f = f'(x)\Delta(x) + O(\Delta x^2)$ folgt $\mathrm{d}f = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätabbildung: $x \mapsto x \Rightarrow \mathrm{d}x = \Delta x$

$$\Rightarrow \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x \text{ oder } \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

  Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für $f'(x)$, aber nützlich, weil bei kleinen Δx $\mathrm{d}f \simeq \Delta f$ (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwertdefinition)

- $f'(x)$ wieder Funktion $\Rightarrow$ analog: $f''(x),\ f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$

- Praxis

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

  - Begründung (nur zum letzen Punkt)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(f(y))} = \frac{\mathrm{d}y}{f'(y)\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

  - Schöne Beispiele

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$
$$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x)) = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

    Besser:

$$\tan^{-1}(y) = (\sin y \frac{1}{\cos y})' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y (\frac{1}{\cos y})' = 1 + \sin y (-\frac{1}{\cos^2 y})(-\sin y) =$$

$$1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Verknüpfung

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

- Inverse

$$f^{-1} : x = f(y) \mapsto y$$

- Grenzwerte:
  - nützliche Regel: l'Hôpital ("$\frac{0}{0}$")
    Falls $\lim_{x \to x_0} f, g = 0$ und $\lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$ existiert, so gilt $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'}{g'}$
  - weitere nützliche Regel

$$\lim \frac{\text{Beschränkt}}{\text{Unbeschränkt und monoton wachsend}} = 0$$

    * Beispiel:

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$

  - Kürzen unter lim
    * Beispiel:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

2.2.3 Integrieren

Fundamentalsatz der Analysis

$$\int^y f(x)\mathrm{d}x = F(y) \& F'(y) = f(y)$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

($\rightarrow$ saubere Definition über Riemansches Integral)

Praxis

Partielle Integration

$$\int^y f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(y)g(y) - \int^y f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Substitution Unter Annahme einer invertierbaren Funktion $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y = \int f(x(y))x'(y)\mathrm{d}y$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

Substitution $y = g(x)$

Klassiker

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \int \ln x 1\mathrm{d}x = \ln x x - \int \frac{1}{x}x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1)$$

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\int e^y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

2.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional $\rightarrow$ Bewegung in der Ebene. Trajektorie: $x(t), y(t)$

Bespiel

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$

$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

TODO Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)

Raumkurve Menge aller Punkte $\{x, y\}$, die das Teilchen durchläuft

TODO Skizze Nichtriviale Darstellung nur im Raum (Raumkurve)

2.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Tranjektorie ist erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit Formal keim Problem: Trajektorie ist

- $$x(t), y(t), z(t)$$
- $$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$
- $$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:
$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \dot{v}^i(t); i = 1, 2, 3$$

2.4 Vektorräume

Eine Menge V heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition $(+)$
- die Multiplikation mit reellen Zahlen $(*)$

definiert sind.

$$x : V \times V \to V$$
$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \to V$$

$V \times V$ - Produktmenge $\equiv$ Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \qquad \text{Assoziativität}$$
$$v + w = w + v \qquad \text{Kommutativität}$$
$$\exists 0 \in V : v + 0 = v \,\forall\, v \in V \qquad \text{Null}$$
$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \qquad \text{Distributvität}$$
$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{Distributivität}$$
$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \qquad \text{Assoziativität der Multiplikation}$$
$$1v = v \qquad \text{Multiplikation mit Eins}$$

2.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit $0 \in \mathbb{R}$ als Vektorraumnull)

2.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 & \dots & x^n) \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 & \dots y^n \end{pmatrix}$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$
$$\vec{0} \equiv (0, \dots, 0)$$
$$\alpha\vec{x} \equiv (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$$

TODO (Maybe) Skizze 3D Vektor $\rightarrow$ übliche Darstellung durch "Pfeile"

2.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow \vec{x}(t))(x^1(t), x^1(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), a\vec{(t)} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitun voraus:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \Rightarrow \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \dots, y^{n'}(x))$$

2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, v_0 t)$$
$$\vec{v} = (-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0)$$
$$\vec{a} = (-R\omega^2\cos\omega t, -R\omega^2\sin\omega t, 0)$$

TODO Skizze (Raumkurve) **Kommentar:**
$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$ leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen $[x] = \mathrm{m}$, $[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$
Wir können wie in $d = 1$ von $\vec{a}$ zu $\vec{v}$ zu $\vec{x}$ gelangen!

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\vec{a}(t') = (v_0^1 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' a^2(t'))$$

Üben: Schraubenbahn; $t_0 = 0$, $\vec{x_0} = (R, 0, 0), v_0 = (0, R\omega, v_0)$ Es folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t))(0, R\omega, v_0) + \int_0^t \mathrm{d}t'(-R\omega^2)(\cos\omega t', \sin\omega t', 0)& \\
=&(0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2)(\frac{1}{\omega}\sin\omega t', -\frac{1}{\omega}\cos\omega t', 0) \mid_0^t \\
=&(0, R\omega, v_0) - R\omega(\sin\omega t, -\cos\omega t, 0) - (0, -1, 0) \\
=&(-R\omega\sin\omega t, R\omega + R\omega\cos\omega t - R\omega, v_0) \\
=&(-R\omega\sin\omega t, R\omega\cos\omega t, v_0)
\end{aligned}$$

Bemerkung Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemansche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^t \vec{v}(t')\mathrm{d}t' = \lim_{n\to\infty}(v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \ldots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

mit $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$

2.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

2.6.1 Symmetrische Bilinearform

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ "linear" Abbildung von $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto v \cdot w$ mit den Eigenschaften

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls $v \cdot v \geq 0$,
Sie heißt positiv-definit, falls $v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0$ Hier : Skalarprodukt $\equiv$ positiv definite symmetrische Bilinearform

2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$: Wir definieren

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + \ldots + x^n y^n \equiv \sum_{i=1}^n x^i y^i \equiv \underbrace{x^i y^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidiesches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7x^1y^2 + x^2y^2$ anderes Beispiel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1y^1 - x^2y^2$$

symmetrische Bilinearform, nicht positiv, semidefinit! Frage:
Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber nicht positiv definit

$$\vec{x}\vec{y} = x^1y^1$$

2.7 Abstand zwischen Raumpunkten

Der anschauliche Abstand zweichen Raumpunkten $\vec{x}, \vec{y}$:

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})(\vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x^i - y^i)^2} = \sqrt{(x^i - y^i)(x^i - y^i)}$$

$$= \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x}\vec{y}} = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta}$$

Haben benutzt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$

2.7.1 Spezialfall

$$\vec{x} = (x^1, 0, 0), \vec{y} = (y^1, y^2, 0)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 \cdot y^1; \cos\theta = \frac{y^1}{|\vec{y}|}; |\vec{x}| = x^1$$

TODO Skizze

$$\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

Dass dies für beliebige Vektoren gilt, wird später klar werden.

2.7.2 Infinisetimaler Abstand

Speziell wird der infinitesimale Abstand wichtig sein:

$$\mathrm{d}\vec{x} = (\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \mathrm{d}x^3)$$

$$\mathrm{d}\vec{x} = (\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t, \frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t) = (v^1\mathrm{d}t, v^2\mathrm{d}t, v^3\mathrm{d}t) = (v^1, v^2, v^3)\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}t, \text{ oder: } \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}$$

($\mathrm{d}\vec{x}$ analog zu $\mathrm{d}f$ vorher);
$\mathrm{d}\vec{x}^2 = |\mathrm{d}\vec{x}|^2 = |\vec{v}|^2\mathrm{d}t^2$
$|\mathrm{d}x| = |\vec{v}|\mathrm{d}t$.

2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

$|d\vec{x}|$ entlang $\vec{x}(t)$ aufaddieren $\rightarrow$ Bogenlänge.

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathrm{d}\vec{x}| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t'}\right| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \sqrt{\dot{\vec{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\vec{v}(t')^2}$$

Infinitesimale Version:

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right| = |\vec{v}|$$

Man kann (im Prinzip) $s(t) = s$ nach t auflösen.

$$\Rightarrow t = t(s) \Rightarrow \underbrace{\vec{x}(s)}_{\text{Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge } s} \equiv \vec{x}(t(s))$$

Nützlich, zum Beispiel für die Definition des Tangentenvektors:

$$\vec{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(s)}{\mathrm{d}s}$$

Es gilt

$$\vec{T} \parallel \vec{v}; \left|\vec{T}\right| = \left|\frac{\vec{v}\mathrm{d}t}{|\vec{v}|\mathrm{d}t}\right| = 1 \Rightarrow \vec{T}\cdot\vec{T} = 1$$

Ableiten nach s:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(1) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}(\vec{T}\cdot\vec{T}) = \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\cdot\vec{T} + \vec{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = 2\vec{T}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$$

Nutze

$$\vec{T}\cdot\vec{T} = T^i T^i$$

$\Rightarrow$ Ableitung des Tangentenvektors ist ortogonal zum Tangentenvektor. Krümmungsradius der Bahn:

$$\rho \equiv \frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|}$$

Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}}{\left|\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}\right|} = \rho\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}$$

2.8.1 Beispiel in d=2

$$\vec{x}(t) = R(\cos\omega t, \sin\omega t)$$

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos\omega t)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = R\omega$$

$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'|\vec{v}| = R\omega t;\ t(x) == \frac{s}{R\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(s) = R(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}), \vec{T} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{R}(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R}) \Rightarrow \rho = R;\ \vec{N} = -(\cos\frac{s}{R}, \sin\frac{s}{R})$$

TODO Skizze

2.9 Vektorprodukt

$$V \times V \mapsto V;\ (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

$$c^i = (\vec{a} \times \vec{b})^i \equiv \sum_{i,k=1}^{3} \varepsilon^{ijk} a^j b^k = \varepsilon^{ijk} a^j b^k$$

dabei:

- $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{321} = 1$
- $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$
- sonst 0 (\$$\varepsilon^{\mathrm{ijk}} = 0$, falls zwei Indizes gleich)

Alternativ:

- $$|\vec{c}| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right||\sin\theta|$$
- Richtung von $\vec{c}$ definiert durch $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{c}$
- Vorzeichen von $\vec{c}$ ist so, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein "Rechtssystem" bilden

TODO Skizze

2.10 Binormalenvektor

$$= \vec{T} \times \vec{N}$$

$\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ heißen "begleitendes Dreibein" und bilden ein Rechtssystem. alle haben Länge 1 $\vec{T}, \vec{N}$ spannen die "Smiegeebene" auf

2.10.1 Zur Information

$$\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\vec{N};\ \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\sigma}\vec{B};\ \frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sigma}\vec{B} - \frac{1}{\rho}\vec{T}$$

σ definiert die Torsion.

3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik

3.1 Newtonsche Axiome

Dynamik: Ursachen der Bewegungsänderung $\rightarrow$ Kräfte: $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

1. Es existierten Inertialsysteme (Koordinatensysteme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft wirkt) nicht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt: $\ddot{\vec{x}} = 0$
2. In solchen Systemen gilt: $\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$
3. Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt:

$$\vec{F_1}2 = -\vec{F_2}1$$

2 definiert die **träge** Masse Die entscheidene physikalische Aussage von $2.$ ist das Auftreten von $\ddot{\vec{x}}$ (nicht etwa $\dot{\vec{x}}$ oder $\dddot{\vec{x}}$) Alternative Diskussionen der obigen Axiomatik:

- zum Beispiel Kapitel 1.2 von Jose/Saletan (mit 2 Definition der Kraft)

3.2 Trajektorie

Vorhersagen erfordern: $\vec{F} \rightarrow$ Trajektorie. Genauer: Sei $\vec{F}(\vec{x}, t)$ gegeben. Berechne $\vec{x}(t)$!

3.3 Differentialgleichungen

hier nur "gewöhnliche DGL" (nur Ableitungen nach einer Variable) (im Gegensatz zu "partiellen" (Ableitung nach verschiedenen Variabeln))

3.3.1 1. Ordung

Die allgemeine Form einer gewöhlichen Dgl. 1. Ordnung ($\Rightarrow$ nur 1. Ableitung):

$$y'(x) = f(x, y)$$

Lösung Funktionn: $y : x \mapsto y(x)$ mit $y'(x) = f(x, y(x))$ (im Allgemeinen wird x aus einem gewissen Intervall kommen: $x \in I \equiv (a, b) \subseteq \mathbb{R}$)

3.3.2 Anfangswertproblem

Gegeben durch:

1. Dgl.: $y' = f(x, y)$
2. Anfangsbedingung $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Funktion $y(x)$ mit (für $x \in I, x_0 \in I$:

1. $y'(x) = f(x, y(x))$
2. $y(x_0) = y_0$

3.3.3 partielle Ableitung

Wir betrachten ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Rechenregeln: Wie bei normalen Ableitung, nur mit x fest.

Beispiel

$$f(x,y,z) \equiv x^2 + yz$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = z$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y$$

3.3.4 Existenz und Eindeutigkeit

... viele Theoreme über Existenz und Eindeutigkeit (Peano und Picand / Lindelöf) Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert falls:

$$f(x,y) \wedge \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

stetig sind.

"Begründung" Zeichne an jedem Punkt (x, y) einen Vektor $(1, f(x, y))$ ein.

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{(x, y(x))}{1}$$

Weiteres Argument für die Existenz und Eindeutigkeit TODO(Skizze) Steigung der gesuchten Funktion bei x_0 ist bekannt als $f(x_0, y_0) \Rightarrow$ kann Wert der Funktion bei $x+\Delta x$ abschätzen: $y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)$ (für kleine Δx) Kenne Steigung bei $x_0 \Delta x : f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)) \Rightarrow$ Schätze Wert der Funktion bei $x_0 + 2\Delta x$ ab. ($\Rightarrow$ perfekt für Numerik)

3.3.5 Beispiele

1.
$$y'(x) = f(x,y), f(x,y) = 3$$
$$y'(x) = 3 \Rightarrow y(x) = \int 3\mathrm{d}x = 3x + c$$

   Das ist schon die allgemeine Lösung der Dgl. Ein Anfangswertproblem, zum Beispiel mit $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ lässt sich duch Bestimmen der Konstanten lösen:

$$y(x) = 3x + c \Rightarrow 1 = 3(-1) + c \Rightarrow c = 4 \Rightarrow y(x) = 3x + 4$$

3.3.6 Seperation der Variablen

Seperation der Variablen funktioniert wenn $f(x,y) = g(x)h(y)$

Beispiel

$$f(x,y) = \frac{x}{y} \Rightarrow y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x$$

Variablen sind getrennt, kann einfach Integrieren

$$\int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + 2c}$$

Lösen allgemeines Anfangswertproblem allgemeines Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung (x_0, y_0)

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \Rightarrow 2c = y_0^2 - x_0^2 \Rightarrow y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \geq 0 \\ -\sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

1. **TODO** Skizze

3.3.7 System von Dgl

(fast) alles oben gesagte funktioniert auch für Systeme gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$\frac{\mathrm{d}y^1(x)}{\mathrm{d}x} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$
$$\frac{\mathrm{d}y^n(x)}{\mathrm{d}x} = f^n(x, y^n, \dots, y^n)$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Wir haben hier eine vektorwertige Funktion von $n+1$ Variablen benutzt:

$$\vec{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingungen: $(x_0, \vec{y}_0) \to n+1$ Parameter. Einer davon entspricht der verschiebung entlang der ein under derselben Lösung $\Rightarrow$ allgemeine Lösung hat $(n+1)-1 = n$ Parameter oder Integrationskonstanten.

3.3.8 Systeme von n gewöhnlicher Dgl. p-ter Ordnung

$$\vec{y}^{(p)}(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(p-1)})$$

Anfangsbedingungen: $(x_0, \vec{y}_0, \vec{y}_0', \dots, \vec{y}_0^{(p-1)}), \vec{y}_0' \mathrel{\hat{=}} \vec{y}'(x)$ bei $x = x_0$

Tatsache Systeme von Dgl können auf größere Systeme niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden. Wir illustieren dies am Beispiel mit $p = 2$

Beispiel

$$\vec{y}''(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

Dies ist äquivalent zu einem System von $2n$ Dgl 1. Ordnung

$$\begin{cases} \vec{z}'(x) & = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ \vec{y}'(x) & = \vec{z} \end{cases} \qquad (\equiv g(x, \vec{y}, \vec{z}))$$

Ursprüngliche Form folgt duch Eisezten der 2. Gleichung in die erste. Das verallgemeinert sich sofort auf die Ordnung p: Man gibt einfach der $(p-1)$ niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variablen. Die zusätzlichen Dgl sind schlicht die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ehemaligen Ableitungen handelt.
$\Rightarrow$ System von np Dgl 1. Ordung; allgemeine Lösung hat np Parameter

3.3.9 Erste physikalische Beipiele

Punktmasse 3 Dgl 2. Ordung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\vec{F}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})$$

$\Rightarrow$ 6 Dgl 1. Ordung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} & = \frac{1}{m}\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{x}} & = \vec{v} \end{cases} \tag{1}$$

In vielen Fällen: (zeitunabhängiges) Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ ("Vektorfeld").

Darstellung in $d = 2$ (Skizze Vektorfeld). wichtig: doppelte Makierung der Achsen

Einfachster Fall ($d = 1$) betrachte den Fall, dass F von v, aber nicht von t abhängt:

$$\begin{cases} \dot{v} & = \frac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} = v \end{cases} \tag{2}$$

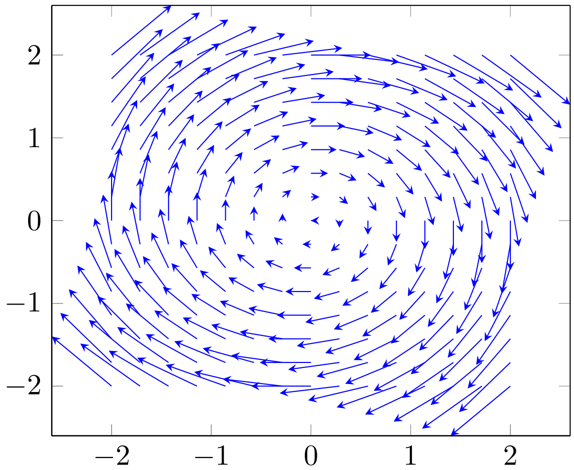
$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(x,v)}{m} \\ v \end{pmatrix}$$

1. **TODO** Darstellung im Phasenraum Analyse im Phasenraum passt perfekt zur früheren allgemeinen Analyse von Dgl 1. Ordnung Analog in $d = 3$: Vektorfeld: $(\frac{\vec{F}}{m}, \vec{v})$, Phasenraum $(\vec{x}, \vec{v})$ oder $(\vec{x}, \vec{p})$ ist 6-dimensional

Harmonischer Oszilator $(d = 1)$ $F(x) = -kx$

$$\begin{cases} \dot{v} & = -x \\ \dot{x} & = v \end{cases} \tag{3}$$

Phasenraum des Harmonischen Oszilators



Freier Fall mit Luftwiederstand Aufgabe: Bestime zeitliche Entwicklung von v wenn Körper im Schwerefeld losgelassen wird. $F_R = -cv^2$
Problem $1 - dim$: x wachse nach unten, Start bei $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$F = m\ddot{x} \Rightarrow mg - c\dot{x}^2 = m\ddot{x} \Rightarrow \begin{cases} mg - cv^2 & = m\dot{v} \\ v & = \dot{x} \end{cases}$$

Erste Gleichung enthält kein x und kann unabhängig gelöst werden:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v^2$$
$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{g - \frac{c}{m}v^2}$$

Konstanten und Dimensionen

$$[g] = \mathrm{m\,s^{-2}}; [\frac{c}{m}] = \mathrm{N\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^2}$$

Kann leicht Konstanten der Dimension Zeit und Geschwindigkeit bilden:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

Benutze jetzt die dimensionslosen Variablen $t' = \frac{t}{\hat{t}}, v' = \frac{v}{\hat{v}}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}t' = \frac{dv'}{1 - v^{2\prime}} = \frac{\mathrm{d}v'}{2}(\frac{1}{1+v'} + \frac{1}{1-v'})$$

$$2t' = \ln 1 + v' - \ln 1 - v' + c$$

$v' = 0$ bei $t' = 0 \Rightarrow c = 0$ Auflösen nach v':

$$e^{2t'} = \frac{1+v'}{1-v'} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow v' = 1 - \frac{2}{e^{2t'}+1} \Rightarrow v = \hat{v}(1 - \frac{2}{e^{\frac{2t}{\hat{t}}}} + 1)$$

$\Rightarrow \hat{v}$ ist Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell angenommen, wenn $t \gg \hat{t}$

Zugabe: einfache physikalische Argumente für die Größe von c:

1. $[c] = \mathrm{kg\,m^{-1}}$, Input: A (Querschnitt), $\rho_L \Rightarrow c \sim \rho_L A$
2. Energiebilanz an verdrängter Luft:

$$F_R \cdot l \sim E_{\text{kin,Luft}} \sim \rho_L l A \frac{v^2}{2}$$

3.4 Taylorentwickung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$. Untersuche Verhalten beliebiger glatter Funktionen $f(x)$ nahe $x = 0$

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x \mathrm{d}x' f'(x') \\
&= f(0) + f'(x')(x_-x)\Big|_0^x - \int_0^x \mathrm{d}x' f''(x')(x'-x) \\
&= f(0) + f'(0)x - f''(x')\frac{(x'-x)}{2}\Big|_0^x + \int_0^x \mathrm{d}x' f'''(x')\frac{(x'-x)^2}{2} \\
&= f(0) + f'(x)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{m} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \overbrace{\int_0^x \mathrm{d}x' f^{(m+1)}(x')\frac{(x'-x)^m}{m!}}^{\text{Restglied}}$$

Falls das Restgliend für $n \to \infty$ verschwindet:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

Analog: Taylor-Reihe:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

1. Oft erste Terme = gute Näherung
2. Verallgemeinerung auf viele Variablen

3.4.1 Interessantes "Gegenbeispiel"

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Überzeugen sie sich, dass alle Ableitungen existieren, auch bei Null!
Sie Brauchen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Die Ableitungen verschwinden sogar bei Null $\Rightarrow$ Taylor-Reihe ist Null, keine gute Näherung

3.5 Harmonicher Oszillator

- eines der wichtigesten physikalischen Systeme
- beschreibt viele kompilziertere Systeme angenähert

3.5.1 Eindimensionales System

$d = 1, F = F(x)$

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}}{dx} v(x) = -v'(x)$$

Damit haben wir das **Potetial** ($\rightarrow$ beschreibt die potentielle Energie des Massenpunktes) v als Stammfunktion von $-F$ definiert

- Skizze

Massenpunkt kann nur ruhen, wo $F = 0$ beziehungsweise $V' = 0$. Genauer: Nur Minima (Maxima instabil).

Ziel Untersuchung der Bewegung in der Nähe von Minimal (also bei $x \approx x_0$ wobei $v'(x_0) = 0$ gelte)
$V(x)$ bei x_0, $V'(x_0) = 0, |x - x_0|$ klein

$$\Rightarrow V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2} v''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$\Rightarrow F(x) \simeq -V''(x_0)(x - x_0)$$

$$x - x_0 \equiv y \Rightarrow \quad \underbrace{F(y) = -ky}_{\text{harmonischer Oszillator}} \quad , k \equiv v''(0)$$

Wir sehen: Harmonischer Oszillator ist eine Idealisierung von potentiell sehr großem Nutzen (viele Systeme)

Lösung Newton $\Rightarrow m\ddot{y} = -ky$ beziehungsweise $\ddot{y} = -\omega^2 y, \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$
$\Rightarrow \sin\omega t$ und $\cos\omega t$ sind Lösungen
$\Rightarrow y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ iist auch Lösung (wegen Linearität)
(wegen der beiden frei wählbaren Konstanten ist dies schon die allgemeine Lösung)

Verallgemeinerungen

- Reibungterm $\sim \dot{y}$
- treibende Kraft $\sim f(t)$

3.6 Lineare Differentialgleichungen

allgemeine Form einer linearen Dgl. n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + f_0(x)y(x) = f(x)$$

Das Wort linear bezieht sich nur auf y, nicht x
Die Dgl. heißt homogen falls $f(x) \equiv 0$ Homogen von Grad p: Ersetzung $y \to \alpha y$ führt zu Vorfaktor αp, hier $p = 1$

- wir hatten oben dem Fall $n = 2$ "mit konstanten Koeffizienten"
- noch einfacheres Beispiel: $n = 1, f \equiv 0$ (aber beliebige Koeffizienten)

  $$y' + a(x)y = 0$$

  Das ist seperabel:

  $$\frac{\mathrm{d}y}{dx} + a(x)y = 0$$
  $$\frac{\mathrm{d}y}{dx} = -a(x)y$$
  $$\frac{\mathrm{d}y}{x} = -a(x)\mathrm{d}x$$
  $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(x)\mathrm{d}x$$
  $$\ln y - A(x) + c_1$$
  $$y = ce^{-A(x)}$$

  $A(x)$ sei eine beliebege aber fest gewählte Stammfunktion von a Wir können den inhomogenen Fall lösen, durch "Variation der Konstanten"

- Ansatz: $y = C(x)e^{-A(x)}$, Dgl. $y' + ay = f$

$$(ce^{-A})' + aCe^{-A} = f$$

$$c'e^{-A} - CA'e^{-A} + Cae^{-A} = f$$

Beachte $A' = a$

$$\Rightarrow c'e^{-A} = fe^{A}, c(x) = \int \mathrm{d}x f(x) e^{A(x)}$$

$$y(x) = \left[\int^{x} \mathrm{d}x' f(x') e^{A(x')}\right] e^{-A(x)}$$

$f(x')$ ist eine frei wählbare additive Konsante im x'-Int. ($C(x) \to C(x) + \alpha$) entspricht der Addition der Lösung der homogenen Dgl.

3.6.1 Zusammenfassung / Verallgemeinerung auf $n > 1$

Definition 1 Linear Unabhängig**.** Ein Satz von Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ heißt linear unabhängig, falls jede Linearkombination bei der nicht alle Koeffizienten Null sind auch nicht Null ist:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots \alpha_n f_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

(identisch zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren)

Fakt Kennt man n linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Dgl. n-ter Ordnung, so kenn man die allgemeine Lösung:

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Die allgeimeine Lösung ist stets von dieser Form.

Wenn wir außerdem eine **partikuläre** Lösung der onhomogenen Gleichung haben, so haben wir auch schon deren allgemeinen Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

"Beweis" durch Einsetzen in

$$y^{(n)} + f_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + f_0 y = f$$

3.6.2 Finden der partikulären Lösung

Auch bei $n > 1$: Variation der Konstanten (Funktioniert gut bei konstanten Koeffizienten) Mächtigere Methoden: Überführen von System von linearen Dgl. 1. Ordnung (braucht Matrixrechnung)

4 Erhaltungssätze in Newtonscher Mechanik

4.1 Impulserhaltung

Systeme mit mehreren Massenpunkten $a, b \in \{1, \dots, n\}$
Trajektorien: $\vec{x}_a(t), a = 1, \dots, n$

Satz 1 Impulserhaltung**.** *Bei verschwindenen externen Kräften ($\vec{F}_{ext} = 0$) gilt:*

$$\vec{p} \equiv \sum_a \vec{P}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\vec{x}_a} = \ \ const$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= \sum_a m_a \ddot{\vec{x}_a} \\
&= \sum_a \vec{F}_a \\
&= \sum_a (\sum_{\substack{b \\ a \neq b}} \vec{F_{ab}}) \\
&= \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \vec{F_{ab}} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b\text{)} \\
&= \sum_{a>b} \vec{F_{ab}} + \sum a < b\vec{F_{ab}} \\
&= \sum_{a>b} (\vec{F_{ab}} + \vec{F_{ba}}) && \underset{\text{3. Newtonsches Axiom}}{\overset{= 0}{\downarrow}}
\end{aligned}$$

□

mit äußeren Kräften:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_a \vec{F}_{a,ext.} \equiv \vec{F}_{ext}$$

Falls zum Beispiel die äußere Kraft nicht in x^1 -Richtung wirkt ($\mathrm{F}^1_{\mathrm{ext}} = 0$), so gilt immer nocht p^1 = const (eigentlich drei Erhaltungssätze für \$p^1, p^2,p^3, manchmal gelten nur einige davon)

4.2 Drehimpusherhaltung

Oft: Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie zweier Massenpunkte:

- Gravitationskraft
- Elektrostatitsche Kraft
- Modell der masselosen Stange ($\rightarrow$ Modell für starre Körper!)

Definition 2 Drehimpuls**.**

$$\vec{L}_a \equiv \vec{x}_a \times \vec{p}_a$$
$$(\vec{L}_a)^i = \varepsilon^{ijk} x_a^j p_a^k$$

Falls $\vec{F}_{a,ext} = 0$ und alle interen Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie der jeweiligen Punkte, dann gilt **Drehimplusherhaltung**

Satz 2 Drehimpulserhaltung**.**

$$\vec{L} \equiv \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \dot{\vec{x}}_a = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \quad const$$

Beweis. Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{L}} &= \sum_a m_a(\dot{\vec{x}}_a \times \dot{\vec{x}}_a + \vec{x}_a + \ddot{\vec{x}}_a) \\
&= \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a \\
&= \sum_{a \neq b} \vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b, a \neq b) \\
&= \sum_{a>b} (\vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} + \vec{x}_b \times \vec{F}_{ba}) \\
&= \sum_{a>b} (\vec{x}_a - \vec{x}_b) \times \vec{F}_{ab}
\end{aligned}$$

da $\vec{F}_{ab} \parallel (\vec{x}_a - \vec{x}_b)$ per Annahme

$$= 0$$

□

Bei externen Kräften:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_{a,ext} \equiv \vec{M}_{ext}$$

M_{ext} ist das durch äußere Kräfte auf Punkt a ausgeübte **Drehmoment**, allgemein (für einzelnen Punkt):

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

Wichtig: Drehimpulserhaltung gilt auch dann wenn alle äußeren Kräfte **Zentralkräfte** sind, Zentralkraft:

$$\vec{F}_a \parallel \vec{x}_a$$

Drehimpuls hängt vom Koordinatensystem ab.

Bemerkung 1. $\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$ (allgemeiner jedes Kreuzprodukt von Vektoren)
ist ein **Axial-** oder **Pseudovektor**, das heißt: Bei Drehungen wei Vektor, Bei Reflexion an ursprung kein Vorzeichenänderung

Beweis.

$$\vec{a} \to -\vec{a}, \vec{b} \to -\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \to +\vec{a} \times \vec{b}$$

□

4.3 Konservative Kräfte und Energieerhaltung

Definition 3 Gradient**.** Gradient von V:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ ist ein "Differentialoperator", also:

$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x,y) \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

Dementsprechen $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ist ein "Differentialoperator" zweiter Ordung, also:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} : f(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$$

$\vec{\nabla} V$ ist gute Schreibweise, weil $\vec{\nabla}$ ein vektorwertiger Differentialoperator ist:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

Definition 4 konservatives Kraftfeld**.** Ein zeitunabhängiges Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x})$ heißt **konservativ** falls es eine Funktion $V(\vec{x})$ ("Potential") gibt. dodass

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

4.3.1 Energieerhaltung

Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt:

$$E = \underset{\text{kinetisch}}{T} + \underset{\text{potentielle Energie}}{V} = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}(t)^2 + V(\vec{x}(t)) = \text{const}$$

Begründung

$$\frac{\mathrm{d}T}{dt} = \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{dt}(\dot{x}^i\dot{x}^i) = \frac{m}{2}2\dot{x}^i\ddot{x}^i = m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(x^1+\Delta x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1,x^2,x^3)}{\Delta t}$$

mit $\Delta x = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{dt}\Delta t$

Umschreiben des Zählers

$$\begin{aligned} & V(x^1+\Delta x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3) \\ & +V(x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3+\Delta x^3) \\ & +V(x^1, x^2, x^3+\Delta x^3) - V(x^1,x^2,x^3) \\ & \cong \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2+\Delta x^2, x^3+\Delta x^3)\Delta x^1 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1,x^2,x^3+\Delta x^3)\Delta x^2 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(\vec{x})\Delta x^3 \end{aligned}$$

Teilen durch Δt, Grenzwertbildung

$$\frac{\mathrm{d}V}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{x}(t))\frac{\mathrm{d}x^i}{dt}$$

oder (allgemeine Rechenregel)

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i$$

Allgemeine Formulierung der Rechenregel: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \wedge \vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ Die Verknüpfung $f \circ \vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion. Für diese gilt:

$$\underbrace{\mathrm{d}f}_{\text{totales Differential}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = (\vec{\nabla} f)\mathrm{d}\vec{x} \tag{4}$$

oder totale Ableitung:

$$\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

Unsere Anwendung

$$\tag{7}$$

$$\dot{E} = m\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i}\dot{x}^i = \vec{F}\dot{\vec{x}} + (\vec{\nabla} V)\dot{\vec{x}} = 0 \ \checkmark \tag{8}$$

$$V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$$

Vergleiche:

$$f(x + \Delta) - f(x) \cong f'(x)\Delta$$

4.3.2 Kriterium für Konservativität

Für *einfach zusammenhängende Gebiete*[1] gilt:

$$\vec{F} \text{ ist konservativ } \Leftrightarrow \vec{\nabla}\vec{F} = 0$$

Begründung $\Rightarrow$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\equiv \text{ Rotation von } F \ (\mathrm{rot}\, F)} = 0$$

[1] Jede geschlossene Kurve kann auf Länge Null zusammengezogen werden

$$
\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\times\vec{F})^i &= \varepsilon^{ijk}\frac{\partial}{\partial x^j}F^k = \varepsilon^{ijk}\partial^i F^k \\
&= -\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V = -\frac{1}{2}(\varepsilon^{ijk}-\varepsilon^{ikj})\partial^j\partial^k V \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V + \frac{1}{2}\varepsilon^{ikj}\underbrace{\partial^k\partial^j}_{\text{habe benutzt } \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}} V \\
&\underset{\substack{\downarrow \\ k\leftrightarrow j}}{=} -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\partial^j\partial^k V = 0
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$

Wähle beliebiges festes $\vec{x}_0$ im Gebiet. Definiere Potential als minus Arbeit am Massenpunkt $\rightarrow$ *Abbildung*

$$V(\vec{x}) \equiv -\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(x)\mathrm{d}\vec{s} \qquad \text{(Linienintegral)}$$

Linienintegral kann immer definiert werden, wenn Kurve durch Gebiet mit Vektorfeld verläuft

$$\mathrm{d}\vec{s} \equiv \mathrm{d}\vec{x}(s) = (\frac{\mathrm{d}x^1}{d\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}x^2}{d\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}x^3}{d\mathrm{d}x})\mathrm{d}s$$

Also gilt:

$$\vec{F}\mathrm{d}\vec{s} = \underbrace{F^i(\frac{\mathrm{d}x^i}{ds})\mathrm{d}s}_{\text{Integrand im normalen Riemann Inegral}}$$

Wähle beliebigen kleinen Vektor $\vec{l}$ und berechne:

$$
\begin{aligned}
\vec{l}\vec{F}(\vec{x}) &\cong -(-\int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{l}}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F}) \\
&= -((-\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}+\vec{l}}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F}) - (-\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F})) \\
&= -(V(\vec{x}+\vec{l}) - V(\vec{x})) \\
&\cong -\frac{\partial V}{\partial x^i}l^i = -\vec{l}(\vec{\nabla}V) \\
&\Rightarrow \vec{l}(\vec{F}+\vec{\nabla}V) = 0 \\
&\Rightarrow \vec{F}+\vec{\nabla}V = 0\checkmark
\end{aligned}
$$

Lücke: Wegunabhängigketi der Definition von V:
Wähle zwei unterschiedliche Wege (L_1, L_2):

$$\int_{L_1}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F} - \int_{L_2}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Rand von } \Sigma}}{\oint}\mathrm{d}\vec{s}\vec{F}$$

Satz von Stokes

$$= \int_\Sigma d\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{F})^i = (\vec{\nabla} \times \vec{F})^i = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} F^k$$

zum Beispiel:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})^1 = \frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}$$

$$\int_{L_2} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} - \int_{L_1} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{"Stokes"}}}{=} \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{f} * (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \overset{!}{=} 0$$

4.4 Satz von Stokes

Definition 5 Satz von Stokes**.**

$$\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} &= \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}sF^1(x,0) + \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}sF^2(\Delta x^1, s) - \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}sF^1(s, \Delta x^2) - \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}sF^2(0,s) \\
&= \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}s(F^1(s,0) - F^1(s,\Delta x^2)) + \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}s(F^2(\Delta x^1, s) - F^2(0,s)) \\
&= \int_0^{\Delta x^1} \mathrm{d}s(\frac{\partial F^1}{\partial x^2})\Delta x^2 + \int_0^{\Delta x^2} \mathrm{d}s\frac{\partial F^2}{\partial x^1}\Delta x^1 + O(\Delta^3) \\
&= \Delta x^1 \Delta x^2 (\frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}) + O(\Delta^3) \\
&= \Delta x^1 \Delta x^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F})^3 + O(\Delta^3) \\
&= \underbrace{\Delta x^1 \Delta x^2 \hat{e_3}}_{\Delta\vec{f}= \text{ Der dem kleinen Flächenelement zugeordnete Vektor}}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\
&\approx \Delta\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})
\end{aligned}$$

Allgemein steht $\Delta\vec{f}$ oder $\mathrm{d}\vec{f}$ für ein kleines oder infinitesimales Flächenelement, Länge $\hat{=}$ Größe der Fläche Die Richtung des Vektors definiert **Orientierung** der Fläche (Zum Beispiel Oben = da, wo der Pfeil hinzeigt)
Randkurve: so definiert, dass man von oben gesehen linksherum (mathematisch positiver Drehsinn) läuft

1. Spezielle Lange in unsererer Rechung unwichtig

2. Übergang zu größeren Flächen durch Aufaddieren

Fläche $= N\Delta^2 \Rightarrow N \sim \frac{1}{Delta^2}$

$$\sum_{\text{Rechtecke}} \oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Zahl der Rechtecke} = O(\Delta)}}{N} O(\Delta^3)$$

weil sich nicht "innere Ränder wegheben"

$$\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

klar

$$\oint \mathrm{d}\vec{s}\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Glätten des Randes: Zerlegung des Randes $\Delta\vec{s}$ in kleine Rechtecke $\Delta\vec{s}_1, \Delta\vec{s}_2$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{s} &= \Delta\vec{s}_1 + \Delta\vec{s}_2 \\ \vec{F}\Delta\vec{s} &= \vec{F}\Delta\vec{s}_1 + \vec{F}\Delta\vec{s}_2 = \vec{F}_1\Delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2\Delta\vec{s}_2 + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

$\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ jeweils am Mittelpunkt der Linienelemente Zahl derartiger Randelemente $\sim \frac{1}{\Delta} \Rightarrow$ Fehler $O(\Delta)$
$\Rightarrow$ Auch nach Summation bleibt Fehler von $O(\Delta)$

Besser wäre Zerlegung in Simplices ("Haben sie mal versucht eine Schildkröte zu fliesen") $\square$

Für unsere Anwendung: wichtig, dass jede geschlossene Kurve inn einem einfach zusammenhängenden Gebiet, **Rand** ist.

4.5 Energieerhaltung für Systeme von Massenpunkten

Massenpunkte: $\vec{x}_a, a = 1, \ldots, n$
Kräfte: seien $\parallel$ zu $\vec{x}_a - \vec{x}_b$ ("Zentralkräfte")
Solche Kräfte kann man stets schreiben als:

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

mit:

$$V_{ab} = Vba, \vec{\nabla}_a = (\frac{\partial}{\partial x_a^1}, \frac{\partial}{\partial x_a^2}, \frac{\partial}{\partial x_a^3})$$

dazu:

$$-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = (-\vec{\nabla}_a|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)V'_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

Dies zeigt:

$$\begin{aligned} &= -\vec{\nabla}_a\sqrt{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2} \\ &= \frac{\vec{x}_a - \vec{x}_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|} \end{aligned}$$

Wir können passendes V für jede Zentralkraft finden. Man berechnet einfach V' und sucht die Stammfunktion.

Prüfe Konsistenz mit 3. Axiom:

$$\underbrace{-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)}_{\vec{F}_{ab}} = +\vec{\nabla}_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = \underbrace{+\vec{\nabla}_b V_{ba}(|\vec{x}_b - \vec{x}_a|)}_{-\vec{F}_{ba}}$$

In diesem System gilt Energieerhaltung:

$$E = \sum_a T_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a<b} V_{ab} = \text{ const}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \sum_a \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_a + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}((\vec{\nabla}_a V_{ab})\dot{\vec{x}}_a + (\vec{\nabla}_b V_{ab})\dot{\vec{x}}_b) \\ &= \sum_{a\neq b} \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}(-\vec{F}_{ab}\dot{\vec{x}}_a - \underbrace{\vec{F}_{ab}\dot{\vec{x}}_b}_{\text{Umbennenung } a\leftrightarrow b}) = 0 \\ (&= W - \frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W)\end{aligned}$$

Bemerkung: Passend gewähltes V_{ab} gibt das Modell der starren Stangen

4.6 Eindimensionale Bewegung

$$F(x) = m\ddot{x}$$

- mit Einsatz allgemein lösbar!
- Startpunkt: Jedes 1-dim. zeitunabhängiges Kraftfelt ist konservativ

  $$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \text{ const}$$

  (bis auf Vorzeichen)

  $$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

  $$t = \in \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

  Integral lösen, Integrationskonstante und Energie so bestimmen, das Anfangswertproblem gelöst

  $$t = t(x) \text{ auflösen } \Rightarrow x = x(t)\checkmark$$

  viel einfacher als allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung

5 Harmonischer Oszillator in komplexen Zahlen

Motivation

Harmonischer Oszillator mit Reibung:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x}$$

Exponentieller Ansatz:

$$x \sim e^{\alpha t} \Rightarrow \alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0$$

gesucht: α, Betrachte Genzfälle:

1. ω klein
$$\Rightarrow \alpha^2 + c\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -c \Rightarrow x \sim e^{-ct}$$

2. ω groß (beziehungsweise c klein)
$$\alpha^2 + \omega^2 \simeq 0$$
nicht lösbar!

Aber: wir wissen schon $\sin \omega t, \cos \omega t$ sind Lösungen.
Falls jede gesuchte Gleichung lösbar $\Rightarrow$ Hoffnung auf elegante allgemeine Lösung
Speziell: $\alpha^1 = -1$ (für $\omega = 1, c = 0$)

5.1 Komplexe Zahlen

5.1.1 Ziel

reelle Zahlen so zu erweitern, dass $x^2 = -1$ lösbar

5.1.2 Naive Definition

Definiere "Imaginäre Einheit" $x^2 = -1$ lösbar "i", so dass $i^2 = -1$ Wollen addieren und Multiplizieren, deshalb erkläre komplexe Zahl $\mathbb{C}$ als:

$$\mathbb{C} \ni z)x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Wir definieren außerdem:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \equiv x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

5.1.3 präsizere Definition

Definition 6 Körper**.** Körper ("Field") ist eine Menge K mit zwei binären Operationen (" + ", " · "), so dass:

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ (Assoziativität)
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (Kommutativität)
- $\exists\, 0 \in K : \alpha + 0 = \alpha \,\forall\, \alpha$ (Null)
- $\forall\, \alpha\, \exists (-\alpha) \in K : \alpha + (-\alpha) = 0$ (Additives Inverses)
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (Assoziativität der Mult.)
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (Kummutativität der Mult.)
- $\exists\, 1 \in K : 1 \cdot \alpha = \alpha \,\forall\, \alpha$ (Eins)
- $\forall\, \alpha \neq 0 \,\exists\, \alpha^{-1} \in K : \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ (Inverses der Mult.)
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (Distributivität)

Wir kennen bereits:

- $K = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen)
- $K = \mathbb{R}$ (reelle Zahlen)

Definition 7 Komplexer Zahlenkörper**.** Komplexe Zahlen sind die Menge $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ mit den Operationen

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \equiv (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Das ist äquivalent zu unserer "naiven Definition" $z = x + iy$

Aufgabe: Prüfen sie, dass die Axiome erfült sind!
Schwierigster Teil: Multiplikations-Inverses, Idee / Vorschlag:

$$z^{-1} = (x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Darstellung durch Vektoren in Ebene liegt nahe.

- Addition: $\equiv$ Vektoraddition
- Multiplikatoin: Beträge der Vektoren werden multipliziert, Winkel "arg" werden addiert.
- $\arg z = \phi$

- $\Re z = x$
- $\Im z = y$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Übliche Funktionen $(\exp, \ln, \sin, \cos)$ können mittels ihrer in $\mathbb{R}$ bekannten Taylorreihe auf $\mathbb{C}$ übertragen werden
Besonders wichtig:

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Brauchen $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$
Nachrechnen:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Binomialkoeffizient} \\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}}{\binom{n}{k}} z^k w^{n-k}$$

englisch: "n choose k"

durch Umschreiben der Summen erhält man:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^l}{l!} = e^z e^w \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\text{reelle Zahl}} \overbrace{e^{iy}}^{\text{komplexe Zahl e vom Betrag 1}}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{iy^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \sin\phi$$

5.1.4 Zusammenfassung:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$w = e^z = e^x e^{iy} = |w|e^{i\arg w}$$

$$\ln w = z = x + iy = \ln|w| + i\arg w$$

Problem: $\arg w$ und deshalb ln nicht eindeutig definiert
Lösung: Definiere $\arg w \in (-\pi, \pi)$

5.1.5 Fundamentalsatz der Algebra

In $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

eine Nullstelle z_0

In der Tat hat es sogar n Nullstellen:

$$P_n(z) = (z - z_0) \cdot \underbrace{P_{n-1}(z)}_{\text{Hat wieder eine Nullstelle, usw.}}$$

(Man sagt: Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen)

- Es gibt auf $\mathbb{C}$ wichtige Abbildung: "komplexe Konjugation"

  $$z \to z^* \mathrel{\hat{=}} z \to \bar{z}$$

  Definiert durch:

  $$(x + iy)^* = x - iy, (\rho e^{i\phi})^* = \rho e^{-i\phi}$$

  also auch

  $$(z^*)^* = z$$

5.1.6 Quaternionen

$$1, i \to 1, i, j, k, i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, ji = -k, jk = i, \ldots$$

5.2 Anwendung auf harmonischen Oszillator

Erinnerung: pyhsikalisches Problem:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Fall $\frac{c}{2} > \omega$ (Kriechfall)

$$x = e^{\alpha t}, \alpha^2 + c\alpha + \omega^2 = 0$$
$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}$$

$\Rightarrow$ 2 linear unabhängige Lösungen, also allgemeine Lösung durch linare Superposition

$\Rightarrow$ exponentielles Abfallverhalten, ohne Oszillationen

Fall $\frac{c}{2} < \omega$ (Schwingfall), $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \equiv -\frac{c}{2} \pm i\tilde{\omega}$$
$$x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\frac{c}{2}t}(\cos \pm\tilde{\omega}t + i \sin \pm\tilde{\omega}t)$$
$$x_{1,2} = e^{-\frac{c}{2}t}(\cos \tilde{\omega}t \pm i \sin \tilde{\omega}t)$$

Durch Linearkombination $\rightarrow$ 2 reelle Lösungen:

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \cos \tilde{\omega}t; \qquad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \sin \tilde{\omega}t$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung durch Linearkombination

$\Rightarrow$ gedämpfte Schwingung

Fall $\frac{c}{2} = \omega$ (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$\Rightarrow$ Nur eine linear unabhängige Lösung, brauche weitere Lösung um allgemeine Anfangsbedinungen zu erfüllen

Idee: Betrachte Schwingfall Lösungen für $\tilde{\omega} \rightarrow 0$

Taylor:

$$\cos x = 1 + (x^2); \qquad \sin x = x + O(x^3)$$
$$\Rightarrow x_1 = e^{-\frac{c}{2}t}; \qquad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t}\tilde{\omega}t$$

$\Rightarrow$ Wieder asymptotische Annäherung an 0 ohne Oszillation

5.3 harmonischer Oszillator mit periodisch treibender Kraft

Inhomogene Dgl:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), F(t) = f e^{i\underline{\omega} t}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{i\underline{\omega} t} \\ \Rightarrow (A(-\underline{\omega}^2 + ic\underline{\omega} + \omega^2) - \frac{f}{m}) e^{i\omega t = 0} \\ A \equiv |A| e^{i\phi} &= \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \underline{\omega}^2 + ic\underline{\omega}} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a-ib} \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2-b^2}$$

und elementarer Algebra findet man den Realteil der Lösung:

$$\begin{aligned} \Re x(t) &= |A| \cos \underline{\omega} t + \phi \\ |A| = \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{\omega^2 - \underline{\omega}^2 + c^2 \underline{\omega}^2}}, \tan\phi &= \frac{c\underline{\omega}}{\underline{\omega}^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung ergibt sich, indem man zu dieser partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

Wichtig: Langzeitverhalten ist durch die partikuläre Lösung bestimmt $\Rightarrow$ Resonanzkatastrophe bei $c \to 0 \& \underline{\omega} \to \omega$