

# Mathematischer Vorkurs

Robin Heinemann

November 25, 2016

## Contents

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Messwert und Maßeinheit</b>                           | <b>4</b>  |
| 1.1      | Beispiel . . . . .                                       | 4         |
| 1.2      | Bezeichnungen . . . . .                                  | 4         |
| 1.3      | Maßeinheiten . . . . .                                   | 5         |
| 1.3.1    | Beispiel: . . . . .                                      | 5         |
| 1.3.2    | SI-Einheiten . . . . .                                   | 5         |
| 1.4      | Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik . . . . . | 6         |
| 1.4.1    | Grundlage . . . . .                                      | 6         |
| 1.4.2    | natürliches Einheitensystem . . . . .                    | 6         |
| 1.5      | Endliche Messgenauigkeit . . . . .                       | 6         |
| <b>2</b> | <b>Zeichen und Zahlen</b>                                | <b>7</b>  |
| 2.1      | Symbole . . . . .  | 7         |
| 2.1.1    | Summenzeichen . . . . .                                  | 7         |
| 2.1.2    | Produktzeichen . . . . .                                 | 9         |
| 2.1.3    | Fakultätszeichen . . . . .                               | 9         |
| 2.2      | Zahlen . . . . .   | 9         |
| 2.2.1    | Rechengesetze für reelle Zahlen . . . . .                | 9         |
| 2.2.2    | Satz des Pythagoras . . . . .                            | 11        |
| 2.2.3    | binomische Formeln: . . . . .                            | 11        |
| 2.2.4    | Pascalsches Dreieck . . . . .                            | 11        |
| 2.2.5    | Beweisprinzip der Vollständigen Induktion . . . . .      | 11        |
| 2.2.6    | Quadratische Ergänzung . . . . .                         | 12        |
| <b>3</b> | <b>Folgen und Reihen</b>                                 | <b>12</b> |
| 3.1      | Folge . . . . .  | 12        |
| 3.1.1    | Definition . . . . .                                     | 12        |
| 3.1.2    | Beispiele . . . . .                                      | 12        |
| 3.1.3    | Frage . . . . .  | 13        |
| 3.1.4    | Beschränktheit . . . . .                                 | 13        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 3.1.5    | Monotonie . . . . .  | 13        |
| 3.1.6    | Konvergenz . . . . .   | 13        |
| 3.2      | Reihen (unendliche Reihen) . . . . .                                       | 14        |
| 3.2.1    | Bemerkung . . . . .  | 14        |
| 3.2.2    | Rechenregeln für konvergente Reihen . . . . .                              | 14        |
| 3.2.3    | Beispiel . . . . .   | 14        |
| 3.2.4    | Absolute Konvergenz . . . . .  | 14        |
| <b>4</b> | <b>TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))</b>                | <b>15</b> |
| <b>5</b> | <b>Funktionen</b>  | <b>15</b> |
| 5.1      | Normal-Hyperbel . . . . .  | 15        |
| 5.1.1    | Physik-Beispiel . . . . .  | 15        |
| 5.2      | kubische Parabel . . . . .   | 15        |
| 5.2.1    | Physik-Beispiel . . . . .  | 15        |
| 5.2.2    | Verallgemeinerung . . . . .  | 15        |
| 5.3      | $y = ax^{-2}$ . . . . .  | 15        |
| 5.3.1    | Physik-Beispiel . . . . .  | 15        |
| 5.4      | Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen . . . . .                      | 16        |
| 5.5      | Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen . . . . . | 16        |
| 5.6      | Rationale Funktionen . . . . .   | 16        |
| 5.6.1    | Beispiel . . . . .   | 16        |
| 5.7      | Trigonometrische Funktionen . . . . .                                      | 16        |
| 5.7.1    | <b>TODO</b> Table Formula? . . . . .                                       | 17        |
| 5.7.2    | <b>TODO</b> Veranschaulichung am Einheitskreis . . . . .                   | 17        |
| 5.7.3    | Tangens/Cotangens . . . . .  | 17        |
| 5.7.4    | Additionstheoreme . . . . .  | 17        |
| 5.8      | Exponentialfunktionen . . . . .  | 17        |
| 5.8.1    | Rechenregeln . . . . .   | 17        |
| 5.8.2    | Beispiel radioaktiver Zerfall . . . . .                                    | 18        |
| 5.9      | Cosinus hyperbolicus . . . . .   | 18        |
| 5.10     | Sinus hyperbolicus . . . . .   | 18        |
| 5.11     | Tangens hyperbolicus . . . . .   | 18        |
| 5.12     | Cotangens hyperbolicus . . . . .   | 18        |
| 5.13     | Wurzelfunktion . . . . .   | 18        |
| 5.13.1   | Beispiel . . . . .   | 18        |
| <b>6</b> | <b>Funktionen mit Ecken und Sprüngen</b>                                   | <b>19</b> |
| 6.1      | Betragsfunktion . . . . .  | 19        |
| 6.2      | Heaviside-Stufenfunktion . . . . .   | 19        |
| 6.2.1    | <b>TODO</b> Graphik . . . . .  | 19        |
| 6.2.2    | Beispiel . . . . .   | 19        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 6.3       | "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion) . . . . . | 19        |
| 6.3.1     | <b>TODO</b> Graphik . . . . .   | 19        |
| <b>7</b>  | <b>Verkettung von Funktionen</b>  | <b>19</b> |
| 7.1       | Beispiel . . . . .  | 20        |
| 7.2       | Spiegelsymmetrie (Siegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$ ) . . . . .                     | 20        |
| 7.2.1     | Beispiel . . . . .  | 20        |
| 7.2.2     | Zerlegung . . . . .   | 20        |
| <b>8</b>  | <b>Eigenschaften von Funktionen</b>   | <b>21</b> |
| 8.1       | Beschränktheit . . . . .  | 21        |
| 8.1.1     | Beispiel . . . . .  | 21        |
| 8.2       | Monotonie . . . . .   | 21        |
| 8.2.1     | Beispiel . . . . .  | 21        |
| <b>9</b>  | <b>Umkehrfunktionen</b>   | <b>21</b> |
| 9.1       | Graph der Umkehrfunktion . . . . .  | 22        |
| 9.1.1     | Beispiel $y = x^2$ . . . . .  | 22        |
| 9.1.2     | Graphisch . . . . .   | 22        |
| <b>10</b> | <b>what after this?</b>   | <b>22</b> |
| <b>11</b> | <b>Integral und Differenzialrechnung</b>  | <b>22</b> |
| 11.1      | Die Kunst des Integrierens . . . . .  | 22        |
| 11.2      | Ableiten über Umkehrfunktion . . . . .  | 23        |
| 11.3      | Integrationsregeln . . . . .  | 23        |
| 11.3.1    | Lineare Zerlegung . . . . .   | 23        |
| 11.3.2    | Substitutionsregel . . . . .  | 23        |
| 11.3.3    | Partielle Integration . . . . .   | 24        |
| 11.3.4    | Weitere Integrationstricks . . . . .  | 25        |
| 11.4      | Uneigentliche Integrale . . . . .   | 25        |
| 11.4.1    | Unendliches Integralintervall . . . . .   | 25        |
| 11.5      | Cauchy Hauptwert . . . . .  | 26        |
| 11.5.1    | Unbeschränkter Integrand . . . . .  | 26        |
| 11.6      | Integralfunktionen . . . . .  | 26        |
| 11.7      | Gamma-Funktion . . . . .  | 27        |
| 11.7.1    | Definition . . . . .  | 27        |
| <b>12</b> | <b>Vektoren</b>   | <b>27</b> |
| 12.1      | $\mathbb{R}^3$ . . . . .  | 27        |
| 12.1.1    | Orthonormal . . . . .   | 27        |
| 12.2      | Skalarprodukt und Kronecker-Symbol . . . . .  | 27        |
| 12.2.1    | Motivation: mechanische Arbeit . . . . .  | 27        |
| 12.2.2    | Definition . . . . .  | 27        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 12.2.3    | Spezialfälle . . . . .  | 27        |
| 12.2.4    | Betrag: . . . . .   | 27        |
| 12.2.5    | Eigenschaften . . . . .                                       | 28        |
| 12.2.6    | Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem . . . . . | 28        |
| 12.2.7    | Kronecker Symbol . . . . .                                    | 28        |
| 12.2.8    | Komponentendarstellung des Skalarprodukts . . . . .           | 28        |
| <b>13</b> | <b>Matrizen</b>   | <b>29</b> |
| 13.1      | Determinante . . . . .  | 29        |
| 13.2      | Homogenes Gleichungssystem . . . . .                          | 29        |
| 13.3      | Levi Civita Symbol . . . . .                                  | 29        |
| 13.4      | Vektorprodukt / Kreuzprodukt . . . . .                        | 29        |
| 13.5      | Spatprodukt . . . . .   | 30        |
| 13.6      | Geschachteltes Vektorprodukt . . . . .                        | 30        |
| 13.6.1    | Beweis . . . . .  | 30        |
| <b>14</b> | <b>misc</b>   | <b>30</b> |

## 1 Messwert und Maßeinheit

Zu jeder phys. Größe gehören Messwert und Maßeinheit, d.h.  $\text{Zahlewert} \cdot \text{Einheit}$

### 1.1 Beispiel

Geschw.  $v = \text{km s}^{-1}$

### 1.2 Bezeichnungen

| Abkürzung | Bedeutung        |
|-----------|------------------|
| t         | time             |
| m         | mass             |
| v         | velocity         |
| a         | acceleration     |
| F         | Force            |
| E         | Energy           |
| T         | Temperature      |
| p         | momentum         |
| I         | electric current |
| V         | potential        |

Wenn das lateinische Alphabet nicht ausreicht: griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \Gamma, \epsilon, \zeta, \eta, \Theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \Xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi, \omega, \Omega$

### 1.3 Maßeinheiten

Maßeinheiten werden über Maßstäbe definiert.

#### 1.3.1 Beispiel:

1 m = Strecke, die das Licht in  $\frac{1}{299792458}$  s zurücklegt.

#### 1.3.2 SI-Einheiten

Internationaler Standard (außer die bösen Amerikaner :D)

| Größe              | Einheit   | Symbol |
|--------------------|-----------|--------|
| Länge              | Meter     | m      |
| Zeit               | Sekunden  | s      |
| Masse              | Kilogramm | kg     |
| elektrischer Strom | Ampere    | A      |
| Temperatur         | Kelvin    | K      |
| Lichstärke         | Candela   | cd     |
| ebener Winkel      | Radian    | rad    |
| Raumwinkel         | Steradian | sr     |
| Stoffmenge         | Mol       | mol    |

**Radian** Kreisumfang  $U = 2\pi r$  Bogenmaß  $b = \phi r$   
Umrechnung in Winkelgrad

$$2\pi \text{ rad} \stackrel{\wedge}{=} 360^\circ$$

$$\frac{\text{Winkel in Radian}}{2\pi} = \frac{\text{Winkel in Grad}}{360}$$

**Steradian**

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

#### Abgeleitete Einheiten

| Größe                   | Einheit | Symbol   | Equivalent           |
|-------------------------|---------|----------|----------------------|
| Frequenz                | Hertz   | Hz       | 1/s                  |
| Kraft                   | Newton  | N        | kg m s <sup>-2</sup> |
| Energie                 | Joule   | J        | N m                  |
| Leistung                | Watt    | W        | J s <sup>-1</sup>    |
| Druck                   | Pascal  | Pa       | N m <sup>-2</sup>    |
| elektrischer Ladung     | Coulomb | C        | A s                  |
| elektrisches Potenzial  | Volt    | V        | J C <sup>-1</sup>    |
| elektrischer Widerstand | Ohm     | $\Omega$ | V A <sup>-1</sup>    |
| Kapazität               | Farad   | F        | C N <sup>-1</sup>    |
| magn. Fluss             | Weber   | Wb       | V s <sup>-1</sup>    |

## Prefix / Größenordnungen

| Prefix | $\log\{10\}$ | Abkürzung |
|--------|--------------|-----------|
| Dezi   | -1           | d         |
| Zenti  | -2           | c         |
| Milli  | -3           | m         |
| Mikro  | -6           | $\mu$     |
| Nano   | -9           | n         |
| Piko   | -12          | p         |
| Femto  | -15          | f         |
| Atto   | -18          | a         |
| Zepta  | -21          | z         |
| Yokto  | -24          | y         |
| Deka   | 1            | D         |
| Hekto  | 2            | h         |
| Kilo   | 3            | k         |
| Mega   | 6            | M         |
| Giga   | 9            | G         |
| Tera   | 12           | T         |
| Peta   | 15           | P         |
| Exa    | 18           | E         |
| Zetta  | 21           | Z         |
| Yotta  | 24           | Y         |

## 1.4 Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik

### 1.4.1 Grundlage

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.5822 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

betrachte  $\frac{\hbar c}{\text{MeV m}} = 197.33 \times 10^{-15}$

### 1.4.2 natürliches Einheitensystem

$\hbar = c = 1$  In diesem Fall ist  $1/\text{MeV} = 197.44 \text{ fm}$  In diesem Einheitensystem ist die Einheit von  $[Energie] = [Masse] = [Länge]^{-1} = [Zeit]^{-1}$

## 1.5 Endliche Messgenauigkeit

z.B. Plancksches Wirkungsquantum

$$\hbar = 1.05457168(18) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Das bedeutet, dass der Wert von  $\hbar$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % zwischen den beiden Schranken liegt

$$1.05457150 \times 10^{-34} \text{ J s} \leq \hbar \leq 1.05457186 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

## 2 Zeichen und Zahlen

### 2.1 Symbole

| Zeichen              | Bedeutung                                    |
|----------------------|--|
| +                    | plus   |
| ·                    | mal  |
| =                    | gleich                                       |
| <                    | ist kleiner als                              |
| >                    | ist größer als                               |
| ∠                    | Windel zwischen                              |
| −                    | minus  |
| /                    | geteilt                                      |
| ≠                    | ungleich                                     |
| ≤                    | kleiner gleich                               |
| ≥                    | größer gleich                                |
| ≈                    | ungefähr gleich                              |
| ±                    | plus oder minus                              |
| ⊥                    | steht senkrecht auf                          |
| ≡                    | ist identisch gleich                         |
| ≪                    | ist klein gegen                              |
| ≫                    | ist groß gegen                               |
| ∞                    | größer als jede Zahl                         |
| $\rightarrow \infty$ | eine Größe wächst über alle Grenzen \ Limes  |
| $\sum$               | Summe  |
| ∈                    | Element von                                  |
| ⊆                    | ist Untermenge von oder gleich               |
| ∪                    | Vereinigungsmenge                            |
| ∃                    | es existiert ein                             |
| ⇒                    | daraus folgt, ist hinreichende Bedingung für |
| ⇐                    | gilt wenn, ist notwendige Bedingung für      |
| ∃!                   | es existiert genau ein                       |
| ∉                    | kein Element von                             |
| :=                   | ist definiert durch                          |
| ∅                    | Nullmenge                                    |
| ∀                    | für alle                                     |

#### 2.1.1 Summenzeichen

##### Beispiel

1.

$$\sum_{n=1}^3 a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

2. Summe der ersten  $m$  natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n = 1 + 2 + \dots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

3. Summe der ersten  $m$  Quadrate der natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n^2 = 1 + 4 + \dots + (m-1)^2 + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

4. Summe der ersten  $m$  Potenzen einer Zahl ( $q \neq 1$ )

$$\sum_{n=0}^m q^n = 1 + q + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

sog. *geometrische Summe*

- Beweis

$$s_m = 1 + \dots + q^m$$

$$qs_m = q + \dots + q^{m+1}$$

$$s_m - qs_m = s_m(1 - q) = 1 - q^{m+1}$$

## Rechenregeln

1.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j$$

2.

$$c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n ca_k$$

3.

$$\sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{j=m}^n nb_k = \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k)$$

4.

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^p a_k = \sum_{k=m}^p a_k$$

5.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$



6.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j$$

falls  $n = m$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j$$

### 2.1.2 Produktzeichen

**Beispiel**

$$\prod_{n=1}^3 a_n = a_1 a_2 a_3$$

### 2.1.3 Fakultätszeichen

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m = \prod_{n=1}^m n$$

$$0! = 1$$

## 2.2 Zahlen

Erinnerung natürliche Zahlen  $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$  ganze Zahlen  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup 0 \cup -a \mid a \in \mathbb{N}$  rationale Zahlen  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \frac{b}{a} \mid a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} b \in \mathbb{Z}$  reelle Zahlen  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{unendliche Dezimalbrüche}$   
Die reellen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig auf die Zahlengerade abbilden, d.h. jedem Punkt entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt

### 2.2.1 Rechengesetze für reelle Zahlen

**Addition**

- Assoziativität  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativität  $a + b = b + a$
- neutrales Element  $a + 0 = a$
- Existenz des Negatives  $a + x = b$  hat immer genau eine Lösung:  $x = b - a$  für  $0 - a$  schreibe wir  $-a$

### Multiplikation:

- Assoziativität  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kommutativität  $a \cdot b = b \cdot a$
- neutrales Element  $a \cdot 1 = a$
- Inverses  $a \cdot x = b$  hat für jedes  $a \neq 0$  genau eine Lösung  $x = \frac{b}{a}$  für  $\frac{1}{a}$  schreiben wir  $a^{-1}$
- Distributivgesetz  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**Ordnung der reellen Zahlen** Die kleiner-Beziehung  $a < b$ , oder auch  $b > a$  hat folgende Eigenschaften:

- Trichotomie: Es gilt immer genau eine Beziehung  $a < b$ ,  $a = b$   $a > b$
- Transitivität: Aus  $a < b$  und  $b < c$  folgt  $a < c$

### Beispiele, Folgerungen

**Rechenregeln für Potenzen**  $b^n := b \cdot b \cdot \dots \cdot b$   $n \in \mathbb{N}$  Faktoren

$$b^0 := 1$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

### Betrag einer reellen Zahl

$$|a| := \begin{cases} a & a \leq 0 \\ -a & a > 0 \end{cases}$$

### Eigenschaften

$$|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$|a| = 0$$

nur für  $a = 0$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dreieckungleichung

### 2.2.2 Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

### 2.2.3 binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Allgemein:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (\pm)^k$$

(Klammer) Binominal koeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}$$

### 2.2.4 Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{c} n = 0 \quad 1 \\ n = 1 \quad 1 \quad 1 \\ n = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n = 3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n = 4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ n = 5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

### 2.2.5 Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

**Beispiel** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  soll die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen bewiesen werden

$$A(n) := \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1. Induktionsanfang  $A(1) = 1 \checkmark$
2. Induktionsschritt Falls  $A(k)$  richtig ist, wird gezeigt, dass auch  $A(k+1)$  richtig ist

$$\begin{aligned} A(k+1) &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{A(k)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \end{aligned}$$

### 2.2.6 Quadratische Ergänzung

$$x^2 + ax + b = 0$$
$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

## 3 Folgen und Reihen

### 3.1 Folge

#### 3.1.1 Definition

Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl  $n$  eine reelle Zahl  $a_n$  zuweist.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

#### 3.1.2 Beispiele

- die natürlichen Zahlen selbst

$$n_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots)$$

- alternierende Folge

$$((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

- harmonische Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$$

- inverse Fakultäten

$$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots)$$

- Folge echter Brüche

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$$

- geometrische Folge

$$(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (q, q^2, q^3, \dots)$$

charakteristische Eigenschaft der geometrischen Folge  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$   $q$  heißt Quotient der Folge allgemeines Bildungsgesetz  $a_n = a_1 q^{n-1}$

- Folge der Ungeraden Zahlen (arithmetische Folge)

$$(1 + (n-1) \cdot 2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots)$$

$a_{n+1} - a_n = d$   $d$  heißt Differenz der Folge allgemeines Bildungsgesetz  $a_n = a_1 + (n-1)d$

- "zusammengesetzte Folgen" (hier Exponentialfolge)

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(2, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{3}, \dots\right)$$

### 3.1.3 Frage

Kann man etwas über das Verhalten von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $n \rightarrow \infty$  aussagen, ohne tatsächlich "die Reise ins Unendliche" anzutreten?

### 3.1.4 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke  $B$  für die Glieder der Folge gibt:  $a_n \leq B$ , d.h.  $\exists B : a_n \leq B \forall n \in \mathbb{N}$ . Nach unten beschränkt:  $\exists A : A \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

### 3.1.5 Monotonie

- Eine Folge heißt monoton steigend, wenn aufeinanderfolgende Glieder mit wachsender Nummer immer größer werden:  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend  $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend  $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend  $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

### 3.1.6 Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$  oder hat den Grenzwert  $a$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|a - a_n| < \epsilon \forall n > N(\epsilon)$ . Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

#### Beispiel

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

### Grenzwertfreie Konvergenzkriterien

- jede monoton wachsend, nach oben beschränkte Folge ist konvergent, entsprechend ist jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent
- Cauchy-Kriterium: Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \forall n, m > N(\epsilon)$$

Für harmonische Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - n}{mn} \right| < \left| \frac{m}{mn} \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ für } n > N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

### 3.2 Reihen (unendliche Reihen)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen, Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$$

der Partialsumme heißt (unendliche) Reihe und wird oft mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet Konvergiert die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet

#### 3.2.1 Bemerkung

Ergebnisse für Folgen gelten auch für Reihen

#### 3.2.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  zwei konvergente Reihen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

konvergent und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Für das Produkt zweier unendlicher Reihen gilt i.A. keine so einfache Formel

#### 3.2.3 Beispiel

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^m q^n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ für } q < 1, q \neq 0$$

#### 3.2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. Absolut konvergente Reihen können ohne Änderung der Grenzwertes umgeordnet werden, d.h. jede ihrer Umordnungen konvergiert wieder und zwar immer gegen den gleichen Grenzwert.

## 4 TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))

## 5 Funktionen

### 5.1 Normal-Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

#### 5.1.1 Physik-Beispiel

- Boyle-Mariettsches Gesetz
- Druck  $p$  eines idealen Gases in einem Volumen  $V$  bei konstanter Temperatur und Gasmenge:  $p = \frac{\text{cons}}{V}$

### 5.2 kubische Parabel

$$y = ax^3$$

#### 5.2.1 Physik-Beispiel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

#### 5.2.2 Verallgemeinerung

$$y = ax^n \quad n \in \mathbb{N}$$

### 5.3 $y = ax^{-2}$

#### 5.3.1 Physik-Beispiel

Coulomb Gesetz der Elektrostatik

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

## 5.4 Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n$$

- gerade n: f ist symmetrisch, d.h.  $f(-x) = f(x)$
- ungerade n: f ist antisymmetrisch, d.h.  $f(-x) = -f(x)$

## 5.5 Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen

Polynom m-ten Grades

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

## 5.6 Rationale Funktionen

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q_n(x) \neq 0\}$$

$P_m(x)$  Polynom m-ten Grades,  $Q_n(x)$  n-ten Grades

### 5.6.1 Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

"Lorentz-Verteilung beschreibt die Linienbreite einer Spektrallinie"

## 5.7 Trigonometrische Funktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

| $\alpha$ | $\sin \alpha$        | $\cos \alpha$        | $\tan \alpha$        |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0        | 0                    | 1                    | 0                    |
| 30°      | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 45°      | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    |
| 60°      | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           |
| 90°      | 1                    | 0                    | $\rightarrow \infty$ |



### 5.7.1 TODO Table Formula?

### 5.7.2 TODO Veranschaulichung am Einheitskreis

$\sin \alpha = y$  Periodische Erweiterung auf  $\alpha < 0, \alpha > \frac{\pi}{2}$

Periodische Funktion:

$$\sin x + 2\pi = \sin x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

$$\cos x + 2\pi = \cos x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

#### Beispiel

$$\sin x + \pi = -\sin x$$

$$\cos x + \pi = -\cos x$$

$$\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x$$

#### TODO Graphik

### 5.7.3 Tangens/Cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

#### TODO Graphik

### 5.7.4 Additionstheoreme

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

## 5.8 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = b^x \quad b > 0, x \in \mathbb{R}$$

### 5.8.1 Rechenregeln

$$b^x b^y = b^{x+y} \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

natürliche Exponentialfunktion mit Zahl  $e$  als Basis

$$y = f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

### 5.8.2 Beispiel radioaktiver Zerfall

$$N(t) = N(0)e^{\frac{-t}{\tau}}$$

### 5.9 Cosinus hyperbolicus

$$y = \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

### 5.10 Sinus hyperbolicus

$$y = \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

### 5.11 Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

### 5.12 Cotangens hyperbolicus

$$y = \coth x := \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

### 5.13 Wurzelfunktion

Umkehrfunktion der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Wurzelfunktion:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

n gerade: vor der Umkehrung ist die Einschränkung des Definitionsbereiches auf  $x \geq 0$  notwendig

#### 5.13.1 Beispiel

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$

Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt{x - 1}$$

## 6 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

### 6.1 Betragsfunktion

$$y = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

### 6.2 Heaviside-Stufenfunktion

$$y = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

#### 6.2.1 TODO Graphik

#### 6.2.2 Beispiel

$$y = \Theta(x)\Theta(-x + a)$$

TODO Graphik

### 6.3 "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion)

$$\Theta_a(x) := \frac{\Theta(x + a)\Theta(-x + a)}{2a}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Theta_a = \text{"Dirak } \delta\text{-Funktion"}$$

#### 6.3.1 TODO Graphik

## 7 Verkettung von Funktionen

Seien

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $w_g \subseteq D_f$ , dann ist die Funktion  $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \forall x \in D_g$$

## 7.1 Beispiel

$$z = g(x) = 1 + x^2 \quad W_g : z \geq 1$$

$$y = f(z) = \frac{1}{z} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

also  $W_g \subset D_f$ , sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

## 7.2 Spiegelsymmetrie (Siegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$ )

Eine Funktion  $f(x)$  heißt

- gerade(symmetrisch) wenn  $f(-x) = f(x)$
- ungerade (antisymmetrisch) wenn  $f(-x) = -f(x)$

### 7.2.1 Beispiel

#### gerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = |x|$

#### ungerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin(x)$

#### keins von beidem

- $f(x) = sx + c$

### 7.2.2 Zerlegung

Jede Funktion lässt sich in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegen

- gerader Anteil:

$$f_+(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = f_+(-x)$$

- ungerader Anteil:

$$f_{-}(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = -f_{-}(-x)$$

- check:

$$f_{+}(x) + f_{-}(x) = f(x) \quad \checkmark$$

## 8 Eigenschaften von Funktionen

### 8.1 Beschränktheit

$f$  heißt nach oben beschränkt im Intervall  $[a, b]$ , wenn es eine obere Schranke gibt, d.h.

$$\exists B \in \mathbb{R} : f(x) \leq B \forall x \in [a, b]$$

analog: nach unten beschränkt

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) \geq A \forall x \in [a, b]$$

#### 8.1.1 Beispiel

$f(x) = x^2$  durch  $A = 0$  nach unten beschränkt

$f(x) = \Theta(x)$   $B = 1$ ,  $A = 0$

### 8.2 Monotonie

Eine Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  heißt monoton steigend im Intervall  $[a, b] \subseteq D_f$ , wenn aus  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$  stets folgt  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Gilt sogar  $f(x_1) < f(x_2)$  so heißt  $f$  streng monoton steigend im Intervall  $[a, b]$ . Analog heißt  $f$  monoton (streng monoton) fallend, wenn stets folgt  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ).

#### 8.2.1 Beispiel

$f(x) = x^3$  streng monoton steigend

## 9 Umkehrfunktionen

Sei  $f : D_f \rightarrow W_f$  eineindeutig(bijektiv), dann kann man die Gleichung  $y = f(x)$  eindeutig nach  $x$  auflösen

$$x = f^{-1}(y) := g(y) \quad D_g = W_f, \quad W_g = D_f$$

$$f^{-1} = g : W_f \rightarrow D_f$$

Die ursprüngliche Abbildung  $y = f(x)$  und die Umkehrabbildung  $x = f^{-1}(y) = g(y)$  heben sich in ihrer Wirkung auf

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

## 9.1 Graph der Umkehrfunktion

1. Gegebenfalls Einschränkung von  $D_f$ , sodass eine bijektive Funktion vorliegt
2. Auflösen der Gleichung  $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$
3. Umbenennung der Variablen: die unabhängige Variable  $y$  wird wieder  $x$  genannt, die abhängige wieder  $y$ :  $y = f^{-1}(x)$

### 9.1.1 Beispiel $y = x^2$

1. Einschränkung  $D_f$  auf  $x \geq 0$
2.  $y = x^2, x \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$
3. Umbenennung:  $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

### 9.1.2 Graphisch

Spiegelung an  $y = x$

## 10 what after this?

## 11 Integral und Differenzialrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

| $F(x) = \int f(x) dx$ | $f(x)$     | Bemerkungen                |
|-----------------------|------------|----------------------------|
| const                 | 0          |                            |
| $x^r$                 | $rx^{r-1}$ | $r \in \mathbb{R}$         |
| $\frac{x^{r+1}}{r+1}$ | $x^r$      | $-1 \neq r \in \mathbb{R}$ |

### 11.1 Die Kunst des Integrierens

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_a^b$$

## 11.2 Ableiten über Umkehrfunktion

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 11.3 Integrationsregeln

### 11.3.1 Lineare Zerlegung

$$\int_{a_1}^{a_2} cf(x) + bg(x)dx = c \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + b \int_{a_1}^{a_2} g(x)dx$$

#### Beispiel

$$F = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 (1 - x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx = \frac{8}{15}$$

### 11.3.2 Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

merke:  $\frac{g(x)}{dx} dx = g'(x)dx = dy$

$$y = g(x), \quad \frac{dy}{dx} = g'(x), \quad dy = g'(x)dx$$

**Beweis**  $F$  sei die Stammfunktion zu  $f$ ,  $F' = f$

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

#### Beispiel

•

$$\int_1^5 \sqrt{2x+1} dx = \int_1^9 \sqrt{y} \frac{1}{2} dy = \frac{26}{3}$$

$$y = 2x + 1 \quad y' = g'(x) = \frac{dy}{dx} = g'(x) = 2 \Rightarrow dy = 2dx \Rightarrow \frac{1}{2} dy = dx$$

•

$$\int_0^b t e^{-\alpha t^2} dt = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{-\alpha b^2} e^y dy = -\frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha b^2} - 1)$$

$$y = g(t) = -\alpha t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -2\alpha t \Rightarrow dy = -2\alpha t dt \Rightarrow dt = -\frac{1}{2\alpha t} dy$$

- 

$$\int_0^T \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega T} dy$$

- 

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{y} dy = \ln |y| \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

- 

$$\int \frac{dx}{ax \pm b} = \frac{1}{a} \ln |ax \pm b| + c$$

- 

$$\int_a^b g^n(x) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} y^n dy$$

### 11.3.3 Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

#### Beweis

$$F(x) = f(x) g(x) \Rightarrow F'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$f(x) g(x) \Big|_a^b = \int_a^b f'(x) g(x) dx + \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx = \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

#### Beispiel

- 

$$\int_a^b x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b x dx$$

- 

$$\int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

- 

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$



## Kreisfläche

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\int_a^b \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos t \cos t dt = \frac{1}{2} (\arcsin b + b\sqrt{1 - b^2} - \arcsin a - a\sqrt{1 - a^2})$$
$$x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x, \quad \frac{x}{dt} = \cos t, \quad dx = \cos t dt$$
$$\int \cos t \cos t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t dt = \sin t \cos t + \int 1 - \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2}$$

## In Polarkoordinaten

$$y = \sin t$$
$$x = \cos t$$
$$dx = -\sin t dt$$
$$dA = y dx = -\sin^2 t dt$$
$$A = \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

## Zerlegung

$$dA = 2\pi r dr$$
$$\int dA = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2$$

### 11.3.4 Weitere Integrationstricks

**Partialbruchzerlegung**  $\Rightarrow$  Integration rationaler Funktionen

$$\int_a^b \frac{dx}{1 - x^2} \text{ mit } \{-1, 1\} \notin [a, b]$$
$$1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$$
$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{\alpha}{1 - x} + \frac{\beta}{1 + x} = \frac{\alpha(1 + x) + \beta(1 - x)}{(1 - x)(1 + x)} = \frac{\alpha + \beta + x(\alpha - \beta)}{1 - x^2} \Rightarrow \alpha = \beta \frac{1}{2}$$
$$\int_a^b \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left( \int_a^b \frac{1}{1 - x} dx + \int_a^b \frac{1}{1 + x} dx \right)$$

## 11.4 Uneigentliche Integrale

### 11.4.1 Unendliches Integralintervall

**Definition** Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem Intervall  $[a, R)$ ,  $a < R < \infty$  (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$  existiert setzt man

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

### Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & s > 1 \\ \infty & s \leq 1 \end{cases}$$

## 11.5 Cauchy Hauptwert

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

P := "principal Value"

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^c x^{2n-1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b x^{2n-1} dx = \infty \\ P \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x^{2n-1} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n} \underbrace{(c^{2n} - (-c)^{2n})}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

### 11.5.1 Unbeschränkter Integrand

Situation: Integrand wird an einer Stelle  $x_0 \in [a, b]$  unbeschränkt

**Definition** Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem Teilintervall  $[a + \eta, b]$ ,  $0 < \eta < b - a$  (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$  existiert, heißt das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  konvergent

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$$

### Beispiel

$$\int_0^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (b^\epsilon - \eta^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} b^\epsilon$$

### Principal value

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\eta} f(x) dx + \int_{x_0+\eta}^b f(x) dx$$

## 11.6 Integralfunktionen

$$\begin{aligned} \ln x &= \int_1^x \frac{dx}{x} \\ \arctan x &= \int_0^y \frac{dx}{1+x^2} \\ \operatorname{erf}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Elliptisches Integral

## 11.7 Gamma-Funktion

### 11.7.1 Definition

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Satz: Es gilt  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(m+1) = m! \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(x+1) = \int_{\epsilon}^R t^x e^{-t} dt = \underbrace{t^x e^{-t}}_{R \rightarrow \infty, t \rightarrow 0} \Big|_{\epsilon}^R + x \int_{\epsilon}^R t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f(t) = -e^{-t} \Leftrightarrow f'(t) = e^{-t}$$

$$g(t) = t^x \Rightarrow x t^{x-1} = g'(t)$$

## 12 Vektoren

### 12.1 $\mathbb{R}^3$

#### 12.1.1 Orthonormal

Länge eins, senkrecht aufeinander und sie bilden eine Basis, also jeder Vektor hat genau eine Darstellung:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k a = \underbrace{a_k e_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

## 12.2 Skalarprodukt und Kronecker-Symbol

### 12.2.1 Motivation: mechanische Arbeit

#### 12.2.2 Definition

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

#### 12.2.3 Spezialfälle

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  antiparallel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

#### 12.2.4 Betrag:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 = a^2$$

### 12.2.5 Eigenschaften

- Kommutativgesetz

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Homogenität

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

- Distributivgesetz

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

- 

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0 \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

### 12.2.6 Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem

Basisvektoren  $\vec{e}_k, k = 1, 2, 3$  Orthogonalität  $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle = 0 \quad l \neq k$  Für  $k = l$ :  $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle = \cos(0) = 1$  Orthonormalität

### 12.2.7 Kronecker Symbol

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Entspricht Komponenten der Einheitsmatrix Symmetrie gegen Vertauschung der Indizes

$$\delta_{kl} = \delta_{lk} \quad \text{Spur: } \delta_{kk} = \underbrace{\sum_{k=1}^3 \delta_{kk}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}} = 3$$

### 12.2.8 Komponentendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{a_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\vec{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k = \underbrace{b_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left( \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k \right) \cdot \left( \sum_{l=1}^3 b_l \vec{e}_l \right) = \sum_{k,l=1}^3 a_k b_l \underbrace{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^3 a_k b_k$$

## 13 Matrizen

### 13.1 Determinante

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)})$  Summe über alle Permutationen von  $S_n$ , Vorzeichen der Permutation ist positiv, wenn eine gerade Anzahl an Vertauschungen notwendig ist, und entsprechend negativ bei einer ungeraden Anzahl.

### 13.2 Homogenes Gleichungssystem

$$A\vec{x} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} & = & 0 \\ \underbrace{a_{31}}_{\vec{a}_1} & \underbrace{a_{32}}_{\vec{a}_2} & \underbrace{a_{33}}_{\vec{a}_3} & 0 \end{matrix}$$

sind  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  linear unabhängig, dann gibt es nur die Lösung  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  Nicht-triviale Lösung nur wenn  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  linear abhängig  $\Rightarrow \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , sodass z.B.  $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3$  Wenn  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  linear unabhängig, dann  $\det A = 0$ .

### 13.3 Levi Civita Symbol

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \prod_{1 \leq p < q \leq n} \frac{i_p - i_q}{p - q} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{k,l,m} = \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \quad (3)$$

### 13.4 Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3, \quad (7)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

### 13.5 Spatprodukt

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}| = \text{Volumen eines Spats}$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c}$$

### 13.6 Geschachteltes Vektorprodukt

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \vec{b}) \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b})$$

#### 13.6.1 Beweis

$$\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_k) = \varepsilon_{pqm} a_p \varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_m$$

## 14 misc

- mathe für physiker vs. analysis
- klausuren gebündelt
- auslandssemester