

Einführung in die Anwendungsorientierte Informatik (Köthe)

Robin Heinemann

December 13, 2016

Contents

1	Was ist Informatik?	3
1.1	Teilgebiete	3
1.1.1	theoretische Informatik (ITH)	3
1.1.2	technische Informatik (ITE)	3
1.1.3	praktische Informatik	3
1.1.4	angewandte Informatik	4
2	Wie unterscheidet sich Informatik von anderen Disziplinen?	4
2.1	Mathematik	4
3	Informatik	4
3.1	Algorithmus	4
3.2	Daten	5
3.2.1	Beispiele für Symbole	5
3.3	Einfachster Computer	6
3.3.1	TODO Graphische Darstellung	6
3.3.2	TODO Darstellung durch Übergangstabellen	6
3.3.3	Beispiel 2:	6
4	Substitutionsmodell (funktionale Programmierung)	8
4.1	Substitutionsmodell	8
4.2	Bäume	9
4.2.1	Beispiel	10
4.3	Rekursion	10
4.4	Präfixnotation aus dem Baum rekonstruieren	10
4.5	Präfixnotation aus dem Baum rekonstruieren	10
4.6	Berechnen des Werts mit Substitutionsmodell	11

5	Maschinensprachen	11
5.1	Umwandlung in Maschinensprache	11
6	Funktionale Programmierung	12
6.1	Beispiel	12
6.2	Vorteile von Zwischenergebnissen	13
6.3	Funktionale Programmierung in c++	13
7	Prozedurale Programmierung	15
7.1	Von der Funktionalen zur prozeduralen Programmierung	15
7.2	Kennzeichen	16
7.2.1	Prozeduren	16
7.2.2	Steuerung des Programmablaufs	16
7.2.3	Veränderung von Speicherzellen	17
7.2.4	Schleifen	18
7.2.5	prozedurale Wurzelberechnung	18
7.2.6	for-Schleife	19
8	Datentypen	21
8.1	Basistypen	21
8.2	zusammengesetzte Typen	21
8.3	Zeichenketten-Strings:	21
9	Umgebungsmodell	23
10	Referenzen	25
11	Container-Datentypen	26
11.1	std::vector	28
11.1.1	Effizienz von push_back	29
12	Iteratoren	31
13	Insertion Sort	34
14	generische Programmierung	35
15	Effizienz von Algorithmen und Datenstrukturen	38
15.1	Bestimmung der Effizienz	38
15.1.1	wall clock	38
15.1.2	algorithmische Komplexität	39
15.1.3	Anwendung	41
16	Zahlendarstellung im Computer	41
16.1	Natürliche Zahlen	41
16.1.1	Pitfalls	42

16.1.2 arithmetische Operationen	42
16.2 Ganze Zahlen	45

1 Was ist Informatik?

”Kunst” Aufgaben mit Computerprogrammen zu lösen.

1.1 Teilgebiete

1.1.1 theoretische Informatik (ITH)

- Berechenbarkeit: Welche Probleme kann man mit Informatik lösen und welche prinzipiell nicht?
- Komplexität: Welche Probleme kann man effizient lösen?
- Korrektheit: Wie beweist man, dass das Ergebnis richtig ist?
Echtzeit: Dass das richtige Ergebnis rechtzeitig vorliegt.
- verteilte Systeme: Wie sichert man, dass verteilte Systeme korrekt kommunizieren?

1.1.2 technische Informatik (ITE)

- Auf welcher Hardware kann man Programme ausführen, wie baut man dies Hardware?
- CPU, GPU, RAM, HD, Display, Printer, Networks

1.1.3 praktische Informatik

- Wie entwickelt man Software?
- Programmiersprachen und Compiler: Wie kommuniziert der Programmierer mit der Hardware? **IPI, IPK**
- Algorithmen und Datenstrukturen: Wie baut man komplexe Programme aus einfachen Grundbausteinen? **IAL**
- Softwaretechnik: Wie organisiert man sehr große Projekte? **ISW**
- Kernanwendung der Informatik: Betriebssysteme, Netzwerke, Parallelisierung **IBN**
 - Datenbanksysteme **IDB1**
 - Graphik, Graphische Benutzerschnittstellen **ICG1**
 - Bild- und Datenanalyse
 - maschinelles Lernen
 - künstliche Intelligenz

1.1.4 angewandte Informatik

- Wie löst man Probleme aus einem anderem Gebiet mit Programmen?
- Informationstechnik
 - Buchhandlung, e-Kommerz, Logistik
- Web Programmierung
- scientific computing für Physik, Biologie
- Medizininformatik
 - bildgebende Verfahren
 - digitale Patientenakte
- Computer Linguistik
 - Sprachverstehen, automatische Übersetzung
- Unterhaltung: Spiele, special effects im Film

2 Wie unterscheidet sich Informatik von anderen Disziplinen?

2.1 Mathematik

Am Beispiel der Definition $a \leq b : \exists c \geq 0 : a + c = b$

Informatik:

Lösungsverfahren: $a - b \leq 0$, das kann man leicht ausrechnen, wenn man subtrahieren und mit 0 vergleichen kann.

Quadratwurzel: $y = \sqrt{x} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x (\implies x > 0)$

Informatik: Algorithmus aus der Antike: $y = \frac{x}{y}$ iteratives Verfahren:

Initial Guess $y^{(0)} = 1$ schrittweise Verbesserung $y^{(t+1)} = \frac{y^{(t)} + \frac{x}{y^{(t)}}}{2}$

3 Informatik

Lösungswege, genauer Algorithmen

3.1 Algorithmus

schematische Vorgehensweise mit der jedes Problem einer bestimmten **Klasse** mit **endliche** vielen **elementaren** Schritten / Operationen gelöst werden kann

- schematisch: man kann den Algorithmus ausführen, ohne ihn zu verstehen (\implies Computer)
- alle Probleme einer Klasse: zum Beispiel: die Wurzel aus jeder beliebigen nicht-negativen Zahl, und nicht nur $\sqrt{11}$

- endliche viele Schritte: man kommt nach endlicher Zeit zur Lösung
- elementare Schritte / Operationen: führen die Lösung auf Operationen oder Teilprobleme zurück, die wir schon gelöst haben

3.2 Daten

Daten sind Symbole,

- die Entitäten und Eigenschaften der realen Welt im Computer repräsentieren.
- die interne Zwischenergebnisse eines Algorithmus aufbewahren

⇒ Algorithmen transformieren nach bestimmten Regeln die Eingangsdaten (gegebene Symbole) in Ausgangsdaten (Symbole für das Ergebnis). Die Bedeutung / Interpretation der Symbole ist dem Algorithmus egal $\hat{=}$ "schematisch"

3.2.1 Beispiele für Symbole

- Zahlen
- Buchstaben
- Icons
- Verkehrszeichen

aber: heutige Computer verstehen nur Binärzahlen ⇒ alles andere muss man übersetzen
Eingangsdaten: "Ereignisse":

- Symbol von Festplatte lesen oder per Netzwerk empfangen
- Benutzerinteraktion (Taste, Maus, ...)
- Sensor übermittelt Messergebnis, Stoppuhr läuft ab

Ausgangsdaten: "Aktionen":

- Symbole auf Festplatte schreiben, per Netzwerk senden
- Benutzeranzeige (Display, Drucker, Ton)
- Stoppuhr starten
- Roboteraktion ausführen (zum Beispiel Bremsassistent)

Interne Daten:

- Symbole im Hauptspeicher oder auf Festplatte
- Stoppuhr starten / Timeout

3.3 Einfachster Computer

endliche Automaten (endliche Zustandsautomaten)

- befinden sich zu jedem Zeitpunkt in einem bestimmten Zustand aus einer vordefinierten endlichen Zustandsmenge
- äußere Ereignisse können Zustandsänderungen bewirken und Aktionen auslösen

3.3.1 TODO Graphische Darstellung

graphische Darstellung: Zustände = Kreise, Zustandsübergänge: Pfeile

3.3.2 TODO Darstellung durch Übergangstabellen

Zeilen: Zustände, Spalten: Ereignisse, Felder: Aktion und Folgezustände

Zustände \ Ereignisse	Knopf drücken	Timeout
aus	$\Rightarrow \{\text{halb}\}$	
{4 LEDs an}	%	($\Rightarrow \{\text{aus}\}, \{\text{nichts}\}$)
halb	($\Rightarrow \{\text{voll}\}, \{8 \text{ LEDs an}\}$)	%
voll	($\Rightarrow \{\text{blinken an}\}, \{\text{Timer starten}\}$)	%
blinken an	($\Rightarrow \{\text{aus}\}, \{\text{Alle LEDs aus, Timer stoppen}\}$)	($\Rightarrow \{\text{blinken aus}\}, \{\text{alle LEDs}\}$)
blinken aus	($\Rightarrow \{\text{aus}\}, \{\text{Alle LEDs aus, Timer stoppen}\}$)	($\Rightarrow \{\text{blinken an}\}, \{\text{alle LEDs}\}$)

Variante: Timer läuft immer (Signal alle 0.3s) \Rightarrow Timeout ignorieren im Zustand "aus", "halb", "voll"

3.3.3 Beispiel 2:

1 0 1 1 0 1 0	$= 2 + 8 + 16 + 74 = 90_{\text{dez}}$	(1)
+ 0 1 1 1 0 0 1	$= 1 + 8 + 16 + 32 = 57_{\text{dez}}$	(2)
1 0 0 1 0 0 1 1	$= 1 + 2 + 16 + 128 = 147_{\text{dez}} \checkmark$	(3)

Implementation mit Endlichen Automaten Prinzipien:

- wir lesen die Eingangsdaten von rechts nach links
- Beide Zahlen gleich lang (sonst mit 0en auffüllen)
- Ergebnis wird von rechts nach links ausgegeben

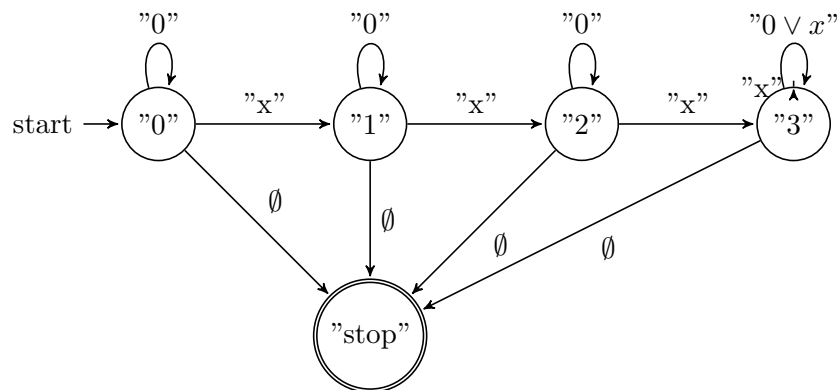
TODO Skizze der Automaten

Zustand	Ereignis	Ausgeben
start	(0,1)	"1"
start	(1,0)	"1"
start	(0,0)	"0"
start	(1,1)	"0"
carry = 1	(1,1)	"1"
carry = 1	(0,1)	"0"
carry = 1	(1,0)	"0"
carry = 1	\emptyset	"1"

Wichtig: In jedem Zustand muss für **alle möglichen** Ereignisse eine Aktion und Folgezustand definiert werden. Vergisst man ein Ereignis zeigt der Automat undefiniertes Verhalten, also einen "Bug". Falls keine sinnvolle Reaktion möglich ist: neuer Zustand: "Fehler" \Rightarrow Übergang nach "Fehler", Aktion: Ausgeben einer Fehlermeldung

TODO Skizze Fehlermeldung Ein endlicher Automat hat nur ein Speicherelement, das den aktuellen Zustand angibt. Folge:

- Automat kann sich nicht merken, wie er in den aktuellen Zustand gekommen ist ("kein Gedächtnis")
- Automat kann nicht beliebig weit zählen, sondern nur bis zu einer vorgegebenen Grenze



Insgesamt: Man kann mit endlichen Automaten nur relativ einfache Algorithmen implementieren. (nur reguläre Sprachen) Spendiert man zusätzlichen Speicher, geht mehr:

- Automat mit Stack-Speicher (Stapel oder Keller) \Rightarrow Kellerautomat (Kontextfreie Sprachen)
- Automat mit zwei Stacks oder äquivalent Turing-Maschine kann alles ausführen, was man intuitiv für berechenbar hält

Markov Modelle: endliche Automaten mit probabilistischen Übergängen. Bisher: Algorithmen für einen bestimmten Zweck (Problemklasse) Frage: Gibt es einen universellen Algorithmus für alle berechenbare Probleme? Betrachte formale Algorithmusbeschreibung als Teil der Eingabe des universellen Algorithmus.

4 Substitutionsmodell (funktionale Programmierung)

- einfaches Modell für arithmetische Berechnung "Taschenrechner"
- Eingaben und Ausgaben sind Zahlen (ganze oder reelle Zahlen). Zahlenkonstanten heißen "Literele"
- elementare Funktionen: haben eine oder mehrere Zahlen als Argumente (Parameter) und liefern eine Zahl als Ergebnis (wie Mathematik):
 - $\text{add}(1,2) \rightarrow 3$, $\text{mul}(2,3) \rightarrow 6$, analog $\text{sub}()$, $\text{div}()$, $\text{mod}()$
- Funktionsaufrufe können verschachtelt werden, das heißt Argumente kann Ergebnis einer anderen Funktion sein
 - $\text{mul}(\text{add}(1,2), \text{sub}(5,3)) \rightarrow 6$

4.1 Substitutionsmodell

Man kann einen Funktionsaufruf, dessen Argument bekannt ist (das heißt Zahlen sind) durch den Wert des Ergebnisses ersetzen ("substituieren"). Geschachtelte Ausdrücke lassen sich so von innen nach außen auswerten.

$$\text{mul}(\text{add}(1, 2), \text{sub}(5, 3))$$

$$\text{mul}(3, \text{sub}(5, 3))$$

$$\text{mul}(3, 2)$$

$$6$$

- Die arithmetischen Operationen $\text{add}()$, $\text{sub}()$, $\text{mul}()$, $\text{div}()$, $\text{mod}()$ werden normalerweise von der Hardware implementiert.
- Die meisten Programmiersprachen bieten außerdem algebraische Funktionen wie: $\text{sqrt}()$, $\text{sin}()$, $\text{cos}()$, $\text{log}()$
 - sind meist nicht in Hardware, aber vorgefertigte Algorithmen, werden mit Programmiersprachen geliefert, "Standardbibliothek"
- in C++: mathematisches Modul des Standardbibliothek: "cmath"
- Für Arithmetik gebräuchlicher ist "Infix-Notation" mit Operator-Symbolen "+", "-", "*", "/", "%"

- $\text{mul}(\text{add}(1,2), \text{sub}(5,3)) \iff ((1+2)*(5-3))$
 - oft besser, unter anderem weil man Klammer weglassen darf
 - 1. "Punkt vor Strichrechnung" $3+4*5 \iff 3+(4*5)$, mul, div, mod binden stärker als add, sub
 - 2. Operatoren gleicher Präzedenz werden von links nach rechts ausgeführt (links-assoziativ)
 $1+2+3-4+5 \iff (((1+2)+3)-4)+5$
 - 3. äußere Klammer kann man weglassen $(1+2) \iff 1+2$
- Computer wandeln Infix zuerst in Präfix Notation um
 1. weggelassene Klammer wieder einfügen
 2. Operatorensymbol durch Funktionsnamen ersetzen und an Präfix-Position verschieben

$$\begin{aligned}
 &1 + 2 + 3 * 4 / (1 + 5) - 2 \\
 &(((1 + 2) + ((3 * 4) / (1 + 5))) - 2) \\
 &\text{sub}(\text{add}(\text{add}(1, 2), \text{div}(\text{mul}(3, 4), \text{add}(1, 5))), 2) \\
 &\text{sub}(\text{add}(3, \text{div}(12, 6)), 2) \\
 &\text{sub}(\text{add}(3, 2), 2) \\
 &\text{sub}(5, 2) \\
 &2
 \end{aligned}$$

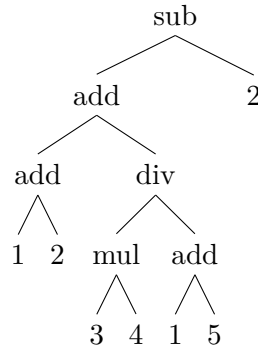
4.2 Bäume

- bestehen aus Knoten und Kanten (Kreise und Pfeile)
- Kanten verbinden Knoten mit ihren Kind-knoten
- jeder Knoten (außer der Wurzel) hat genau ein Elternteil ("parent node")
- Knoten ohne Kinder heißen Blätter ("leaves / leaf node")
- Teilbaum
 - wähle beliebigen Knoten
 - entferne temporär dessen Elternkante, dadurch wird der Knoten temporär zu einer Wurzel, dieser Knoten mit allen Nachkommen bildet wieder einen Baum (Teilbaum des Originalbaumes)
- trivialer Teilbaum hat nur einen Knoten
- Tiefe: Abstand eines Knotens von der Wurzel (Anzahl der Kanten zwischen Knoten und Wurzel)
 - Tiefe des Baums: maximale Tiefe eines Knoten

4.2.1 Beispiel

$$1 + 2 + 3 * 4 / (1 + 5) - 2$$

$$sub(add(add(1, 2), div(mul(3, 4), add(1, 5))), 2)$$



4.3 Rekursion

Rekursiv $\hat{=}$ Algorithmus für Teilproblem von vorn.

4.4 Präfixnotation aus dem Baum rekonstruieren

1. Wenn die Wurzel ein Blatt ist: Drucke die Zahl
2. sonst:
 - Drucke Funktionsnamen
 - Drucke "("
 - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das linke Kind (Teilbaum mit Wurzel = linkes Kind)
 - Drucke ","
 - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das rechte Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind)
 - Drucke ")"

\Rightarrow

$$sub(add(add(1, 2), div(mul(3, 4), add(1, 5))), 2)$$

4.5 Präfixnotation aus dem Baum rekonstruieren

1. Wenn die Wurzel ein Blatt ist: Drucke die Zahl
2. sonst:
 - Drucke Funktionsnamen
 - Drucke "("

- Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das linke Kind (Teilbaum mit Wurzel = linkes Kind)
- Drucke Operatorsymbol
- Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das rechte Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind)
- Drucke ")"

⇒

$sub(add(add(1, 2), div(mul(3, 4), add(1, 5))), 2)$

⇒ **inorder**

4.6 Berechnen des Werts mit Substitutionsmodell

1. Wenn Wurzel dein Blatt gib Zahl zurück
2. sonst:
 - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das linke Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind), speichere Ergebnis als "lhs"
 - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das rechte Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind), speichere Ergebnis als "rhs"
 - berechne funktionsname(lhs,rhs) und gebe das Ergebnis zurück

⇒ **post-order**

5 Maschinensprachen

- optimiert für die Hardware
- Gegensatz: höhere Programmiersprachen (c++)
 - optimiert für Programmierer
- Compiler oder Interpreter übersetzen Hoch- in Maschinensprache

5.1 Umwandlung in Maschinensprache

1. Eingaben und (Zwischen)-Ergebnisse werden in Speicherzellen abgespeichert ⇒ jeder Knoten im Baum bekommt eine Speicherzelle
2. Speicherzellen für Eingaben initialisieren
 - Notation: SpZ ← Wert
3. Rechenoperationen in Reihenfolge des Substitutionsmodell ausführen und in der jeweiligen Speicherzelle speichern

- Notation: SpZ-Ergebnis \leftarrow fname SpZArg1 SpZArg2

4. alles in Zahlencode umwandeln

- Funktionsnamen:

Opcode	Wert
init	1
add	2
sub	3
mul	4
div	5

6 Funktionale Programmierung

- bei Maschinsprache werden Zwischenergebnisse in Speicherzellen abgelegt
- das ist auch in der funktionalen Programmierung eine gute Idee
- Speicherzellen werden durch Namen (vom Programmierer vergeben) unterschieden

6.1 Beispiel

Lösen einer quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 2px + q = 0, p = -\frac{b}{2a}, q = \frac{c}{a}$$

$$x_2 = p + \sqrt{p^2 - q}, x_2 = p - \sqrt{p^2 - q}$$

ohne Zwischenergebnisse:

$$x_1 \leftarrow \text{add}(\text{div}(\text{div}(b, a), -2), \text{sqrt}(\text{sub}(\text{mul}(\text{div}(b, a), -2), \text{div}(\text{div}(b, a) - 1)), \text{div}(c, a)))$$

mit Zwischenergebnis und Infix Notation

$$p \leftarrow b/c / -2 \text{ oder } p \leftarrow -0.5 * b/a$$

$$a \leftarrow c/a$$

$$d \leftarrow \text{sqrt}(p * p - q)$$

$$x_1 \leftarrow p + d$$

$$x_2 \leftarrow p - d$$

6.2 Vorteile von Zwischenergebnissen

1. lesbarer
2. redundante Berechnung vermieden. Beachte: In der funktionalen Programmierung können die Speicherzellen nach der Initialisierung nicht mehr verändert werden
3. Speicherzellen und Namen sind nützlich um Argumente an Funktionen zu übergeben
⇒ Definition eigener Funktionen

```
function sq(x) {  
    return x * x  
}
```

⇒ $d \leftarrow \text{sqrt}(\text{sq}(p) - q)$ Speicherzelle mit Namen "x" für das Argument von *sq*

6.3 Funktionale Programmierung in c++

- in c++ hat jede Speicherzelle einen Typ (legt Größe und Bedeutung der Speicherzelle fest)
 - wichtige Typen

int	ganze Zahlen
double	reelle Zahlen
std::string	Text

int: 12, -3
double: -1.02, $1.2e - 4 = 1.2 * 10^{-4}$
std::string: "text"

- Initialisierung wird geschrieben als "typename spzname = Wert;"

```
double a = ...;  
double b = ...;  
double c = ...;  
double p = -0.5 b / a;  
double q = c / a;  
double d = std::sqrt(p*p - q);  
double x1 = p + d;  
double x2 = p - d;  
std::cout << "x1: " << x1 << ", x2: " << x2 << std::endl;
```

- eigene Funktionen in C++

```
// Kommentar (auch /* */)
type_ergebnis fname(type_arg1 name1, ...) {  
    // Signatur / Funktionskopf / Deklaration  
    return ergebnis;  
    /* Funktionskörper / Definition / Implementation */  
}
```

- ganze Zahl quadrieren:

```
int sq(int x) {
    return x*x;
}
```

- reelle Zahl quadrieren:

```
double sq(double x) {
    return x*x;
}
```

- beide Varianten dürfen in c++ gleichzeitig definiert sein \implies "function overloading" \implies c++ wählt automatisch die richtig Variable anhand des Argumenttyps ("overload resolution")

```
int x = 2;
double y = 1.1
int x2 = sq(x) // int Variante
double y2 = sq(y) // double Variante
```

- jedes c++-Programm muss genau eine Funktion namens "main" haben. Dort beginnt die Programmausführung.

```
int main() {
    Code;
    return 0;
}
```

- return aus der "main" Funktion ist optional
- Regel von c++ für erlaubte Name
 - erstes Zeichen: Klein- oder Großbuchstaben des englischen Alphabets, oder "_"
 - optional: weitere Zeichen oder, "_" oder Ziffer 0-9
- vordefinierte Funktionen:
 - eingebaute $\hat{=}$ immer vorhanden
 - Infix-Operatoren +, -, *, /, %
 - Präfix-Operatoren *operator*+, *operator*-, ...
 - Funktion der Standardbibliothek $\hat{=}$ müssen "angefordert" werden
 - Namen beginnen mit "std::", "std::sin,..."
 - sind in Module geordnet, zum Beispiel
 - cmath \implies algebraische Funktion
 - complex \implies komplexe Zahlen
 - string \implies Zeichenkettenverarbeitung

- um ein Modul zu benutzen muss man zuerst (am Anfang des Programms) sein Inhaltsverzeichnis importieren (Header inkludieren) → `include <name>`
- ```

#include <iostream>
#include <string>
int main() {
 std::cout << "Hello, world!" << std::endl;
 std::string out = "mein erstes Programm\n";
 std::cout << out;
 return 0;
}

```
- overloading der arithmetischen Operationen
    - overloading genau wie bei *sq*
      - $3 * 4 \Rightarrow$  int Variante
      - $3.0 * 4.0 \Rightarrow$  double Variante
      - $3 * 4.0 \Rightarrow$  automatische Umwandlung in höheren Typ, hier "double"  $\Rightarrow$  wird als  $3.0 * 4.0$  ausgeführt
  - $\Rightarrow$  Division unterscheidet sich
    - Integer-Division:  $12 / 5 = 2$  (wird abgerundet)
    - Double-Division:  $12.0 / 5.0 = 2.4$
    - $-12 / 5 = 2$  ( $\Rightarrow$  truncated Division)
    - $12.0 / 5.0 = 2.4$
    - Gegensatz (zum Beispiel in Python)
      - floor division  $\Rightarrow$  wird immer abgerundet  $\Rightarrow -12 / 4 = -2$

## 7 Prozedurale Programmierung

### 7.1 Von der Funktionalen zur prozeduralen Programmierung

- Eigenschaften der Funktionalen Programmierung:
  - alle Berechnungen durch Funktionsaufruf, Ergebnis ist Rückgabe
  - Ergebnis hängt nur von den Werten der Funktionsargumente ab, nicht von externen Faktoren "referentielle Integrität"
  - Speicherzellen für Zwischenergebnisse und Argumente können nach Initialisierung nicht geändert werden "write once"
  - Möglichkeit rekursiver Funktionsaufrufe (jeder Aufruf bekommt eigene Speicherzellen)
    - Vorteile

- natürliche Ausdrucksweise für arithmetische und algebraische Funktionalität ("Taschenrechner")
- einfache Auswertung durch Substitutionsmodell → Auswertungsreihenfolge nach Post-Order
- mathematisch gut formalisierbar  $\implies$  Korrektheitsbeweise, besonders bei Parallelverarbeitung
- Rekursion ist mächtig und natürliche für bestimmte Probleme (Fakultät, Baum-Traversierung)
- Nachteile
  - viele Probleme lassen sich anders natürlicher ausdrücken (z.B. Rekursion vs. Iteration)
  - setzt unendlich viel Speicher voraus (  $\implies$  Memory Management notwendig  $\implies$  später)
  - Entitäten, die sich zeitlich verändern sind schwer zu modellieren
- Korollar: kann keine externen Ressourcen (z.B. Konsole, Drucker, ..., Bildschirm) ansprechen "keine Seiteneffekte"
  - $\implies$  Multi-Paradigmen-Sprachen, zum Beispiel Kombination von Funktionaler Programmierung und prozeduraler Programmierung

## 7.2 Kennzeichen

### 7.2.1 Prozeduren

- Prozeduren: Funktionen, die nichts zurückgeben, haben nur Seiteneffekte
- Beispiel

```
std::cout << "Hello\n"; // Infix
operator<<(std::cout, "Hello\n"); // Präfix
```

- Prozeduren in c++

1. Funktion die "void" zurück gibt (Pseudotyp für "nichts")

```
void foo(int x) {
 return;
}
```

2. Returnwert ignorieren

### 7.2.2 Steuerung des Programmablaufs

- Anweisungen zur Steuerung des Programmablaufs

```
if(), else, while(), for()
```

- Funktional



```
int abs(int x) {
 return (x >= 0) ? x : -x;
}
```

- Prozedural

```
int abs(int x) {
 if(x >= 0) {
 return x;
 } else {
 return -x;
 }

 // oder
 if(x >= 0) return x;
 return -x;
}
```

### 7.2.3 Veränderung von Speicherzellen

- Zuweisung: Speicherzellen können nachträglich verändert werden ("read-write")

- prozedural:

```
int foo(int x) { // x = 3
 int y = 2;
 int z1 = x * y; // z1 = 6
 y = 5;
 int z2 = z * y; // z2 = 15
 return z1 + z2; // 21
}
```

- funktional:

```
int foo(int x) { // x = 3
 int y1 = 2;
 int z1 = x * y1; // z1 = 6
 int y2 = 5;
 int z2 = z1 * y2; // z2 = 15
 return z1 + z2; // 21
}
```

- Syntax

```
name = neuer_wert; // Zuweisung
typ name = neuer_wert; // Initialisierung
typ const name = neuer_wert; // write once
```

- $\Rightarrow$  Folgen: mächtiger, aber ermöglicht völlig neue Bugs  $\Rightarrow$  erhöhte Aufmerksamkeit beim Programmieren

- die Reihenfolge der Ausführung ist viel kritischer als beim Substitutionsmodell
- Programmierer muss immer ein mentales Bild des aktuellen Systemzustands haben

#### 7.2.4 Schleifen

Der gleiche Code soll oft wiederholt werden

```
while(Bedingung) {
 // Code, wird ausgeführt solange Bedingung "true"
}

int counter = 0;
while(counter < 3) {
 std::cout << counter << std::endl;
 counter++; // Kurzform für counter = counter + 1
}
```

| counter | Bedingung | Ausgabe |
|---------|-----------|---------|
| 0       | true      | 0       |
| 1       | true      | 1       |
| 2       | true      | 2       |
| 3       | false     | ∅       |

- in c++ beginnt Zählung meist mit 0 ("zero based")
- vergisst man Inkrementieren  $\implies$  Bedingung immer "true"  $\implies$  Endlosschleife  $\implies$  Bug
- drei äquivalente Schreibweisen für Inkrementieren:
  - counter = counter + 1; // assignment  $\hat{=}$  Zuweisung
  - counter += 1; // add-assignment  $\hat{=}$  Abkürzung
  - ++counter; // pre-increment

#### 7.2.5 prozedurale Wurzelberechnung

**Ziel**

```
double sqrt(double y);
```

**Methode** iterative Verbesserung mittels Newtonverfahren initial\_guess  $x^{(0)}$  ("geraten"),  $t = 0$   
while not\_good\_enough( $x^{(t)}$ ):  
update  $x^{(t+1)}$  from  $x^{(t)}$  (zum Beispiel  $x^{(t+1)} = x^{(t)} + \Delta^{(t)}$  additives update,  $x^{(t+1)} = x^{(t)}\Delta^{(t)}$  multiplikatives update)  
 $t = t + 1$

**Newtonverfahren** Finde Nullstellen einer gegebenen Funktion  $f(x)$ , das heißt suche  $x^*$  sodass  $f(x^*) = 0$  oder  $|f(x^*)| < \varepsilon$  Taylorreihe von  $f(x)$ :  $f(x + \Delta) \approx f(x) + f'(x)\Delta +$   
setze  $x^* = x + \Delta$

$$0 \stackrel{!}{=} f(x^*) \approx f(x) + f'(x)\Delta = 0 \implies \Delta = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Iterationsvorschrift:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{f(x^{(t)})}{f'(x^{(t)})}$$

Anwendung auf Wurzel: setze  $f(x) = x^2 - y \implies$  mit  $f(x^*) = 0$  gilt

$$(x^*)^2 - y = 0 \quad (x^*)^2 = y \quad x^* = \sqrt{y} \quad f'(x) = 2x$$

Iterationsvorschrift:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{(x^{(t)})^2 - y}{2x^{(t)}} = \frac{x^{(t)^2} + y}{2x^{(t)}}$$

```
double sqrt(double y) {
 if(y < 0.0) {
 std::cout << "Wurzel aus negativer Zahl\n";
 return -1.0;
 }
 if(y == 0.0) return 0.0;

 double x = y; // initial guess
 double epsilon = 1e-15 * y;

 while(abs(x * x - y) > epsilon) {
 x = 0.5*(x + y / x);
 }
}
```

### 7.2.6 for-Schleife

```
int c = 0;
while(c < 3) {
 // unser Code
}
```

```

 c++; // vergisst man leicht
}

```

Bei der while Schleife kann man leicht vergessen *c* zu inkrementieren, die for Schleife ist idiotensicher

Äquivalent zu der while Schleife oben ist:

```

for(int c = 0; c < 3; c++) {
 // unser Code
}

```

Allgemeine Form:

```

for(init; Bedingung; Inkrement) {
 // unser Code
}

```

- Befehle, um Schleifen vorzeitig abubrechen
  - continue: Bricht aktuelle Iteration ab und springt zum Schleifenkörper
  - break: bricht die ganze Schleife ab und springt hinter das Schleifenende
  - return: beendet Funktion und auch die Schleife

Beispiel: nur gerade Zahlen ausgeben

```

for(int i = 0; i < 10; i++) if(c % 2 == 0) std::cout << c << std::endl;

```

Variante mit continue:

```

for(int i = 0; i < 10; i++) {
 if(c % 2 != 0) continue;
 std::cout << c << std::endl;
}

```

```

for(int i = 0; i < 10; i += 2) {
 std::cout << c << std::endl;
}

```

```

double sqrt(double y) {
 while(true) {
 x = (x + y / 2) / 2.0;
 if(abs(x * x - y) < epsilon) {
 return x;
 }
 }
}

```

## 8 Datentypen

### 8.1 Basistypen

Bestandteil der Sprachsyntax und normalerweise direkt von der Hardware unterstützt (CPU)

- int, double, bool (  $\implies$  später mehr)

### 8.2 zusammengesetzte Typen

mit Hilfe von "struct" oder "class" aus einfachen Typen zusammengesetzt

- wie das geht  $\implies$  später
- Standardtypen: in der C++ Standardbibliothek definiert, aktivieren durch `#include <module_name>`
  - std::string, std::complex, etc.
- externe Typen: aus anderer Bibliothek, die man zuvor herunterladen und installieren muss
- eigene Typen: vom Programmierer selbst implementiert  $\implies$  später

Durch "objekt-orientierte Programmierung" (  $\implies$  später) erreicht man, dass zusammengesetzte Typen genauso einfach und bequem und effizient sind wie Basistypen (nur c++, nicht c)

- "Kapselung": die interne Struktur und Implementation ist für Benutzer unsichtbar
- Benutzer manipuliert Speicher über Funktionen ("member functions")  $\hat{=}$  Schnittstelle des Typs, "Interface", API

$\implies$  Punktsyntax: `type_name t = init; t.foo(a1, a2);`  $\hat{=}$  `foo(t, a1, a2);`

### 8.3 Zeichenketten-Strings:

zwei Datentypen in c++

- klassischer c-string: `char[]` ("Charakter Array")  $\implies$  nicht gekapselt, umständlich
- c++ string: `std::string` gekapselt und bequem (nur dieser in der Vorlesung)
- string Literale: "Zeichenkette", einzelnes Zeichen: `'z'` ("`z`" = Kette der Länge 1)  
Vorsicht: die String-Literale sind c-strings (gibt keine c++ string-Literale), müssen erst in c++ strings umgewandelt werden, das passiert meist automatisch
  - `#include <string>`
  - Initialisierung:

```

std::string s = "abcde";
std::string s2 = s1;
std::string leer = "";
std::string leer(); // Abkürzung, default Konstruktor

```

- Länge

```

s.size();
assert(s.size() == 5);
assert(leer.size() == 0);
s.empty() // Abkürzung für s.size() == 0

```
- Zuweisung

```

s = "xy";
s2 = leer;

```
- Addition Aneinanderkettung von String ("concatenate")

```

std::string s3 = s + "ijh"; // "xyijh"
s3 = "ghi" + s; // "ghixy"
s3 = s + s; // "xyxy"
// aber nicht!!
s3 = "abc" + "def"; // Bug Literale unterstützen + mit ganz anderer Bedeutung
s3 = std::string("abc") + "def"; // Ok

```
- Add-Assignment: Abkürzung für Addition gefolgt von Zuweisung

```

s += "nmk"; // s = s + "nmk" => "xynmk"

```
- die Zeichen werden intern in einem C-Array gespeichert (Array = "Feld")

Array: zusammenhängende Folge von Speicherzellen des gleichen Typs, hier 'char' (für einzelne Zeichen), Die Länge wird (bei std::string) automatisch angepasst, die einzelnen Speicherzellen sind durchnummeriert in c++: von 0 beginnend  $\hat{=}$  Index

  - Indexoperator:

```

s[index]; // gibt das Zeichen an Position "index" zurück

```

Anwendung: jedes Zeichen einzeln ausgeben

```

std::string s = "abcde";

for(int i = 0; i < s.size(); i++) {
 std::cout << s[i] << std::endl;
}

```

String umkehren

```

int i = 0; // Anfang des Strings
int k = s.size() - 1; // Ende des String
while(i < k) {
 char tmp = s[i];

```

```

 s[i] = s[k];
 s[k] = tmp;
 i++; k--;
}

```

Variante 2: neuen String erzeugen

```

std::string s = "abcde";
std::string r = "";
for(int i = s.size() - 1; i >= 0; i--) {
 r += s[i];
}

```

## 9 Umgebungsmodell

Gegenstück zum Substitutionsmodell (in der funktionalen Programmierung) für die prozedurale Programmierung

- Regeln für Auswertung von Ausdrücken
- Regeln für automatische Speicherverwaltung
  - Freigeben nicht mehr benötigter Speicherzellen,  $\implies$  bessere Approximation von "unendlich viel Speicher"
- Umgebung beginnt normalerweise bei "{" und endet bei "}"
 

Ausnahmen:

  - *for*: Umgebung beginnt schon bei "for"  $\implies$  Laufvariable ist Teil der Umgebung
  - Funktionsdefinitionen: Umgebung beginnt beim Funktionskopf  $\implies$  Speicherzellen für Argumente und Ergebnis gehören zur Umgebung
  - globale Umgebung außerhalb aller "{}" Klammern
- automatische Speicherverwaltung
  - Speicherzellen, die in einer Umgebung angelegt werden (initialisiert, deklariert) werden, am Ende der Umgebung in umgekehrter Reihenfolge freigegeben
  - Compiler fügt vor "}" automatisch die Notwendigen Befehle ein
  - Speicherzellen in der globalen Umgebung werden am Programmende freigegeben

```

- int global = 1;
 int main() {
 int l = 2;
 {
 int m = 3
 } // <- m wird freigegeben
}

```

```

} // <- 1 wird freigegeben
// <- global wird freigegeben

```

- Umgebungen können beliebig geschachtelt werden  $\implies$  alle Umgebungen bilden einen Baum, mit der globalen Umgebung als Wurzel
- Funktionen sind in der globalen Umgebung definiert
  - Umgebung jeder Funktion sind Kindknoten der globalen Umgebung (Ausnahme: Namensräume  $\implies$  siehe unten)
  - $\implies$  Funktions Umgebung ist **nicht** in der Umgebung, wo die Funktion aufgerufen wird
- Jede Umgebung besitzt eine **Zuordnungstabelle** für alle Speicherzellen, die in der Umgebung definiert wurden

| Name | Typ | aktueller Wert |
|------|-----|----------------|
| 1    | int | 2              |

- jeder Name kann pro Umgebung nur einmal vorkommen
- Ausnahme Funktionsnamen können mehrmals vorkommen bei function overloading (nur c++)
- Alle Befehle werden relativ zur aktuellen Umgebung ausgeführt
  - aktuell: Zuordnungstabelle der gleichen Umgebung und aktueller Wert zum Zeitpunkt des Aufrufs
  - Beispiel:  $c = a * b$ ;
  - Regeln:
    - wird der Name (nur  $a, b, c$ ) in der aktuellen Zuordnungstabelle gefunden
      1. Typprüfung  $\implies$  Fehlermeldung, wenn Typ und Operation nicht zusammenpassen
      2. andernfalls, setze aktuellen Wert aus Tabelle in Ausdruck ein (ähnlich Substitutionsmodell)
    - wird Name nicht gefunden: suche in der Elternumgebung weiter
    - wird der Name bis zur Wurzel (globale Umgebung) nicht gefunden  $\implies$  Fehlermeldung
    - $\implies$  ist der Name in mehreren Umgebungen vorhanden gilt der zuerst gefundene (Typ, Wert)
- $\implies$  Programmierer muss selbst darauf achten, dass
  1. bei der Suche die gewünschte Speicherzelle gefunden wird  $\implies$  benutze "sprechende Namen"
  2. der aktuelle Wert der richtig ist  $\implies$  beachte Reihenfolge der Befehle!



- Namensraum: spezielle Umgebungen in der globalen Umgebung (auch geschachtelt) mit einem Namen

Ziele:

- Gruppieren von Funktionalität in Module (zusätzlich zu Headern)
- Verhinderung von Namenskollisionen

Beispiel: c++ Standardbibliothek:

```
namespace std {
double sqrt(double x);
namespace chrono {
class system_clock;
}
}
```

// Benutzung mit Namespace-Präfix:

```
std::sqrt(80);
std::chrono::system_clock clock;
```

Besonderheit: mehrere Blöcke mit selbem Namensraum werden verschmolzen

Beispiel

```
int p = 2;
int q = 3;

int foo(int p) {
 return p * q;
}

int main() {
 int k = p * q; // beides global => 6 = 2 * 3
 int p = 4; // lokales p verdeckt globales p
 int r = p * q; // p lokal, q global => 12 = 4 * 3
 int s = foo(p); // lokale p von main() wird zum lokalen p von foo() 12 = 4 * 3
 int t = foo(q); // globales q wird zum lokalen p von foo() 9 = 3 * 3
 int q = 5;
 int n = foo(q); // lokales q wird zum lokalen p von foo() 15 = 5 * 3
}
```

## 10 Referenzen

sind neue (zusätzliche) Namen für vorhandene Speicherzellen

```
int x = 3; // neue Variable x mit neuer Speicherzelle
int & y = x; // Referenz: y ist neuer Name für x, beide haben die selbe Speicherzelle
y = 4; // Zuweisung an y, aber x ändert sich auch, das heißt x == 4
```

```
x = 5; // jetzt y == 5
int const & z = x; // read-only Referenz, das heißt z = 6 ist verboten
x = 6; // jetzt auch z == 6
```

Hauptanwendung:

- die Umgebung, in der eine Funktion aufgerufen wird und die Umgebung der Implementation sind unabhängig, das heißt Variablen der einen Umgebung sind in der anderen nicht sichtbar
- häufig möchte man Speicherzellen in beiden Umgebungen teilen  $\implies$  verwende Referenzen
- häufig will man vermeiden, dass eine Variable kopiert wird (pass-by-value)
  - Durch pass-by-reference braucht man keine Kopie  $\implies$  typisch "const &", also read-only, keine Seiteneffekte

```
int foo(int x) { // pass-by-value
 x += 3;
 return x;
}

int bar(int & y) { // pass-by-reference
 y += 3; // Seiteneffekt der Funktion
 return y;
}

void baz(int & z) { // pass-by-reference
 z += 3;
}

int main() {
 int a = 3;
 std::cout << foo(a) << std::endl; // 5
 std::cout << a << std::endl; // 3
 std::cout << bar(a) << std::endl; // 5
 std::cout << a << std::endl; // 5
 baz(a);
 std::cout << a << std::endl; // 8
}
```

in der funktionalen Programmierung sind Seiteneffekte grundsätzlich verboten, mit Ausnahmen, zum Beispiel für Ein-/Ausgabe

## 11 Container-Datentypen

Dienen dazu, andere Daten aufzubewahren

- Art der Elemente:
  - homogene Container: alle Elemente haben gleichen Type (typisch für c++)
  - heterogene Container: Elemente könne verschiedene Typen haben (z.B. Python)
- nach Größen
  - statische Container: feste Größe, zur Compilezeit bekannt
  - dynamische Container: Größe zur Laufzeit veränderbar
- Arrays sind die wichtigsten Container, weil effizient auf Hardware abgebildet und einfach zu benutzen
  - klassisch: Arrays sind statisch, zum Beispiel C-Arrays (hat c++ geerbt)
 

```
int a[20];
```
  - modern: dynamische Arrays
    - Entdeckung einer effizienten Implementation
    - Kapselung durch objekt-orientierte Programmierung (sonst zu kompliziert)
- wir kennen bereits ein dynamisches Array: std::string ist Abbildung int (Index) → char (Zeichen), mit  $0 \leq \text{index} < \text{s.size}()$ 
  - wichtigste Funktion: s.size() (weil Größe dynamisch), s[4 ] Indexzugriff, s+="mehr" Zeichen anhängen

- wir wollen dasselbe Verhalten für beliebige Elementtypen:

```
#include <vector>

// Elementtyp Größe Initialwert der Elemente
std::vector<double > v(20 , 0.0);
// analog
std::vector<int>;
std::vector<std::string>;
```

- weitere Verallgemeinerung: Indextyp beliebig (man sagt dann "Schlüssel-Typ") "assoziatives Array"

- typische Fälle:
  - Index ist nicht im Bereich (0,size], zum Beispiel Matrikelnummern
  - Index ist string, zum Beispiel Name eines Studenten

```
#include <map>
#include <unordered_map>

// Binärer Suchbaum
```

```

std::map;

// Hashtabelle, siehe Algorithmen und Datenstrukturen
std::unordered_map;

// Schlüsseltyp Elementtyp
std::map<int , double> noten; noten[3121101] = 10;
std::map<std::string, double> noten; noten["krause"] = 10;

```

- Indexoperationen wie beim Array
- Elemente werden beim 1. Zugriff automatisch erzeugt (dynamisch)
- alle dynamischen und assoziativen Arrays unterstützen `a.size()` zum Abfragen der Größe

## 11.1 std::vector

- Erzeugen:

```

std::vector<double> v(20, 1.0);
std::vector<double> v; // leeres Array
std::vector<double> v = {1.0, -3.0, 2.2}; // "initializer list": Element für Anfangs

```

- Größe:

```

v.size();
v.empty(); // => v.size() == 0

```

- Größe ändern

```

v.resize(neue_groesse, initialwert);
// Dann:
// Fall 1: neue_groesse < size(): Element ab Index "neue_groesse" gelöscht die anderen
// Fall 2: neue_groesse > size(): neue Elemente mit Initialwert am Ende anhängen, die
// Fall 3: neue_groesse == size(): nichts passiert

```

```

v.push_back(neues_element); // ein neues Element am Ende anhängen (ähnlich string +=)
v.insert(v.begin() + index, neues_element); // neues element an Position "index" einfügen
// Falls index == size(): am Ende anhängen, sonst: alte Elemente ab Index werden ein

```

```

v.pop_back(); // letztes Element löschen (effizient)
v.erase(v.begin() + index); // Element an Position index löschen, alles dahinter ein
v.clear(); // alles löschen

```

- Zugriff

```

v[k]; // Element bei Index k
v.at(k); // wie v[k], aber Fehlermeldung, wenn nicht 0 <= k < size() (zum Debuggen)

```

- Funktionen für Container benutzen in c++ immer Iteratoren, damit sie für verschiedene Container funktionieren

- Iterator-Range

```
// erstes Element
v.begin()
```

```
// hinter letztem Element
v.end()
```

- im Header <algorithm>

- alle Elemente kopieren

```
std::vector<double> source = {1.0, 2, 3, 4, 5};
std::vector<double> target(source.size(), 0.0);
std::copy(source.begin(), source.end(), target.begin());
std::copy(source.begin() + 2, source.end() - 1, target.begin()); // nur index 2
```

- Elemente sortieren

```
std::sort(v.begin(), v.end()); // "in-place" sortieren
```

- Elemente mischen:

```
std::random_shuffle(v.begin(), v.end()); // "in-place" mischen
```

### 11.1.1 Effizienz von push\_back

Warum ist push\_back() effizient? (bei std::vector)

- veraltete Lehrmeinung: Arrays sind nur effizient wenn statisch (das heißt Größe zur Compilezeit, oder spätestens bei Initialisierung, bekannt)
  - sonst: andere Datenstruktur verwenden, zum Beispiel verkettete Liste (std::list)
- modern: bei vielen Anwendungen genügt, wenn Array (meist) nur am Ende vergrößert wird (zum Beispiel push\_back())
  - dies kann sehr effizient unterstützt werden  $\implies$  dynamisches Array
- std::vector verwaltet intern ein statisches Array der Größe "capacity", v.capacity()  $\geq$  c.size()
  - wird das interne Array zu klein  $\implies$  wird automatisch auf ein doppelt so großes umgeschaltet
  - ist das interne Array zu groß, bleiben unbenutzte Speicherzellen als Reserve
- Verhalten bei push\_back():
  1. noch Reserve vorhanden: lege neues Element in eine unbenutzte Speicherzelle  $\implies$  billig

## 2. keine Reserve

- alloziere neues statisches Array mit doppelt Kapazität
- kopiere die Daten aus dem alten in das neue Array
- gebe das alte Array frei
- gehe zum Anfang des Algorithmus, jetzt ist wieder Reserve vorhanden

· das Umkopieren ist nicht zu teuer, weil es nur selten notwendig ist

· Beispiel:

```
std::vector<int> v;
```

```
for(int i = 0; i < 32; i++) v.push_back(k);
```

| k     | capacity vor push_back() | capacity nach push_back() | size() | Reserve | #Umkopieren |
|-------|--------------------------|---------------------------|--------|---------|-------------|
| 0     | 0                        | 1                         | 1      | 0       | 0           |
| 1     | 1                        | 2                         | 2      | 0       | 1           |
| 2     | 2                        | 4                         | 3      | 1       | 2           |
| 3     | 4                        | 4                         | 4      | 0       | 2           |
| 4     | 4                        | 8                         | 5      | 3       | 4           |
| 5-7   | 8                        | 8                         | 8      | 0       | 0           |
| 8     | 8                        | 16                        | 9      | 7       | 8           |
| 9-15  | 16                       | 16                        | 16     | 0       | 0           |
| 16    | 16                       | 32                        | 17     | 15      | 16          |
| 17-31 | 32                       | 32                        | 32     | 0       | 0           |

· was kostet das:

- 32 Elemente einfügen = 32 Kopien extern  $\Rightarrow$  intern
- aus altem Array ins neu kopieren  $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 31$  kopieren intern  $\Rightarrow$  intern
- $\Rightarrow$  im Durchschnitt sind pro Einfügung 2 Kopien nötig
- $\Rightarrow$  dynamisches Array ist doppelt so teuer wie das statische  $\Rightarrow$  immer noch sehr effizient

· relevante Funktionen von std::vector

```
v.size() // aktuelle Zahl der Elemente
v.capacity() // aktuelle Zahl Speicherzellen
assert(v.capacity() - v.size() >= 0) // Reserve
v.resize(new_size) // ändert immer v.size(), aber v.capacity() nur wenn < new_size
v.reserve(new_capacity) // ändert v.size() nicht, aber v.capacity() falls new_capacity > v.capacity()
v.shrink_to_fit() // == v.reserve(v.size()) Reserve ist danach 0, wenn Endgröße erreicht
```

· wenn Reserve > size: capacity kann auch halbiert werden

- wichtige Container der c++ Standardbibliothek
- wir hatten dynamische Arrays `std::string`, `std::vector`, assoziative Arrays `std::map`, `std::unordered_map`
- `std::set`, `std::unordered_set`: Menge, jedes Element ist höchstens einmal enthalten zum Beispiel Duplikate
- `std::stack` (Stapel, Keller): unterstützt `push` und `pop()` mit Last in- First out Semantik (LIFO) äquivalent zu `push_back()` und `pop_back()` bei `std::vector`
- `std::queue` (Warteschlange) `push()` und `pop()` mit First in-first out Semantik (FIFO)
- `std::deque` ("double-ended queue") gleichzeitig stack und queue, `push`, `pop_front()`, `pop_back()`
- `std::priority_queue`, `push()` und `pop()` - Element mit höchster niedrigster Priorität (user defined)

## 12 Iteratoren

- für Arrays lautet die kanonische Schleife

```
for(int i = 0; i != v.size(); i++) {
 int current = v[i]; // lesen
 v[i] = new_value; // schreiben
}
```
  - wir wollen eine so einfache Schleife für beliebige Container
    - der Index-Zugriff `v[i]` ist bei den meisten Container nicht effizient
    - Iteratoren sind immer effizient  $\implies$  es gibt sie in allen modernen Programmiersprachen, aber Details sehr unterschiedlich
    - Analogie: Zeiger einer Uhr, Cursor in Textverarbeitung
      - $\implies$  ein Iterator zeigt immer auf ein Element des Containers, oder auf Spezialwert "ungültiges Element"
    - in c++ unterstützt jeder Iterator 5 Grundoperationen
      1. Iterator auf erstes Element erzeugen: `auto iter = v.begin();`
      2. Iterator auf "ungültiges Element" erzeugen: `auto end = v.end();`
      3. Vergleich `iter1 == iter2` (Zeigen auf gleiches Element), `iter != end`:
- iter zeigt **nicht** auf ungültiges Element
1. zum nächsten weitergehen: `++iter`. Ergebnis ist `v.end()`, wenn man vorher beim letzten Element war

2. auf Daten zugreifen: `*iter` ("Dereferenzierung") analog `v[k]`

kanonische Schleife:

```
for(auto iter = v.begin(); iter != v.end(); ++iter) {
 int current = *iter; // lesen
 *iter = new_value; // schreiben
}
// Abkürzung: range-based for loop
for(auto & element : v) {
 int current = element; // lesen
 element = new_value; // schreiben
}
```

- Iteratoren mit den 5 Grundoperationen heißen "forward iterator" (wegen `++iter`)
- "bidirectional iterators": unterstützen auch `--iter`, zum vorigen Element ((fast) alle Iteratoren in `std`)
- "random access iterators": beliebige Sprünge `*iter += 5; *iter -= 3;`
- Besonderheit für assoziative Arrays (`std::map`, `std::unordered_map`) Schlüssel und Werte können beliebig gewählt werden

- $\Rightarrow$  das aktuelle Element ist ein Schlüssel / Wert -Paar, das heißt Iterator gibt Schlüssel und Wert zurück

```
(*iter).first; // Schlüssel
(*iter).second; // Wert
// Abkürzung
iter->first;
iter->second;
```

- bei `std::map` liefern die Iteratoren die Elemente in aufsteigender Reihenfolge der Schlüssel

- Die Funktion `std::transform()`

- wir hatten: `std::copy()`

```
std::vector<double> source = {1, 2, 3, 4};
std::vector<double> target(source.size());
std::copy(source.begin(), source.end(), target.begin());
```

- `std::transform`:

```
// nach Kleinbuchstaben konvertieren
std::string source = "aAbCdE";
std::string target = source;
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(), std::tolower); // 1
// die Daten quadrieren
double sq(double x) { return x * x; }
```



```

std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(), sq); // target == +
// das ist eine Abkürzung für eine Schleife
auto src_begin = source.begin();
auto src_end = source.end();
auto tgt_begin = target.begin();

for(; src_begin != src_end; src_begin++, tgt_begin++) {
 *tgt_begin = sq(*src_begin);
}

```

- Der Argumenttyp der Funktion muss mit dem source Elementtyp kompatibel sein. Der Returntyp der Funktion muss mit dem Target-Elementtyp kompatibel sein.
- Das letzte Argument von std::transform() muss ein Funktor sein (verhält sich wie eine Funktion), drei Varianten:

1. normale Funktion, z.B. sq. Aber: wenn Funktion für mehrere Argumenttypen überladen ist (overloading) (zum Beispiel, wenn es sq(double) und sq(int) gibt), muss der Programmierer dem Compiler sagen, welche Version gemeint ist  $\implies$  für Fortgeschrittene ("functionpointer cast")
2. Funktionsobjekt  $\implies$  objekt-orientierte Programmierung
3. Definiere eine namenlose Funktion  $\implies$  "Lambda-Funktion  $\lambda$ "

- statt  $\lambda$  verwenden wir den Universalnamen  $\square$

```

std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(), [] (double)
// Returntyp setzt Computer automatisch ein, wenn es nur einen return-B

```

- Lambda-Funktionen können noch viel mehr  $\implies$  für Fortgeschrittene
- std::transform() kann in-place arbeiten (das heißt source-Container überschreiben), wenn source und target gleich

```

std::transform(source.begin(), source.end(), source.begin(), sq);

```

- Die Funktion std::sort() zum in-place sortieren eines Arrays

```

std::vector<double> v = {4, 2, 3, 5, 1};
std::sort(v.begin(), v.end()); // v == {1, 2, 3, 4, 5}

```

- std::sort ruft intern den <-Operator des Elementtyps auf, um Reihenfolge zu bestimmen
- die <-Operation muss eine totale Ordnung der Elemente definieren:
  - $a < b$  muss für beliebige  $a, b$  ausführbar sein
  - transitiv:  $(a < b) \wedge (b < c) \implies (a < c)$
  - anti-symmetrisch:  $\neg(a < b) \wedge \neg(b < a) \implies a == b$

## 13 Insertion Sort

schnellster Sortieralgorithmus für kleine Arrays ( $n \leq 30$ ) hängt von Compiler und CPU ab

- Idee von Insertion Sort:
  - wie beim Aufnehmen und Ordnen eines Kartenblatts
  - gegeben: bereits sortierte Teilmenge bis Position  $k - 1$  Karten bereits in Fächer
  - Einfügen des  $k$ -ten Elements an richtiger Stelle  $\rightarrow$  Erzeuge Lücke an richtiger Position durch verschieben von Elementen nach rechts
  - Wiederholung für  $k = 1, \dots, N$
  - Beispiel:

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 5 | 1 |
| 4 | — | 3 | 5 | 1 |
| — | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | — | 5 | 1 |
| 2 | — | 4 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | — | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | — |
| — | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

```
void insertion_sort(std::vector<double> & v) {
 for(int i = 0; i < v.size(); i++) {
 double current = v[i];
 int j = i; // Anfangsposition der Lücke
 while(j > 0) {
 if(v[j - 1] < current) { // -> if(cmp(a, b))
 break; // j ist richtige Position der Lücke
 }
 v[j] = v[j - 1];
 j--;
 }
 v[j] = current;
 }
}
```

- andere Sortierung: definiere Funktor  $\text{cmp}(a, b)$ , der das gewünschte kleiner realisiert (gibt genau dann "true" zurück, wenn  $a$  "kleiner"  $b$  nach neuer Sortierung)

- neue Sortierung am besten per Lambda-Funktion an `std::sort` übergeben

```
std::sort(v.begin(), v.end()); // Standardsort mit "<"
std::sort(v.begin(), v.end(), [](double a, double b) { return a < b; }); // Standard
std::sort(v.begin(), v.end(), [](double a, double b) { return b < a; }); // absteigend
std::sort(v.begin(), v.end(), [](double a, double b) { return std::abs(a) < std::abs(b); }); // nach Absolutwert
std::sort(v.begin(), v.end(), [](std::string a, std::string b) {
 std::transform(a.begin(), a.end(), a.begin(), std::tolower);
 std::transform(b.begin(), b.end(), b.begin(), std::tolower);
 return a < b;
});
```

## 14 generische Programmierung

`insertion_sort` soll für beliebige Elementtypen funktionieren

```
template<typename T>
void insertion_sort(std::vector<T> & v) {
 for(int i = 0; i < v.size(); i++) {
 T current = v[i];
 int j = i; // Anfangsposition der Lücke
 while(j > 0) {
 if(v[j - 1] < current) { // -> if(cmp(a, b))
 break; // j ist richtige Position der Lücke
 }
 v[j] = v[j - 1];
 j--;
 }
 v[j] = current;
 }
}
```

- Ziel: benutze template-Mechanismus, damit **eine** Implementation für viele verschiedene Typen verwendbar ist
  - erweitert funktionale und prozedurale und objekt-orientierte Programmierung
- zwei Arten von Templates ("Schablone"):
  1. Klassen-templates für Datenstrukturen, zum Beispiel Container sollen beliebige Elementtypen unterstützen
    - Implementation  $\implies$  später
    - Benutzung: Datenstrukturname gefolgt vom Elementtyp in spitzen Klammern (`std::vector<double>`), oder mehrere Typen, zum Beispiel Schlüssel und Wert bei `std::map<std::string, double>`

2. Funktionen-Templates: es gab schon function overloading

```
int sq(int x) {
 return x * x;
}
```

```
double sq(double x) {
 return x * x;
}
```

// und so weiter für komplexe und rationale Zahlen...

- Nachteil
  - wenn die Implementationen gleich sind → nutzlose Arbeit
  - Redundanz ist gefährlich: korrigiert man einen Bug wird leicht eine Variante vergessen

- mit templates reicht eine Implementation

```
template<typename T> // T: Platzhalter für beliebigen Typ, wird später durch
T sq(T x) {
 return x * x; // implizierte Anforderung an den Typ T, er muss Multiplik
}
```

- wie bei Substituieren von Variablen mit Werten, aber jetzt mit Typen
- Benutzung:
  - Typen für die Platzhalter hinter dem Funktionsnamen in spitzen klammern

```
sq<int>(2) == 4;
sq<double>(3.0) == 9.0,
```

- meist kann man die Typenangabe <type> weglassen, weil der Computer sie anhand des Argumenttyps automatisch einsetzt:

```
sq(2); // == sq<int>(2) == 4
sq(3.0); // == sq<double>(3.0) == 9
```

- kombiniert man templates mit Overloading, wird die ausprogrammierte Variante vom Compiler bevorzugt. Komplizierte Fälle (Argument teilweise Template, teilweise hard\_coded) ⇒ für Fortgeschrittene
- Beispiel 2: Funktion, die ein Array auf Konsole ausgibt, für beliebige Elementtypen

```
template<typename ElementType>
void print_vector(std::vector<ElementType> const & v) {
 std::cout << "{";
 if(v.size() > 0) {
```

```

 std::cout << " " << v[0];
 for(int i = 1; i < v.size(); i++) {
 std::cout << ", " << v[i];
 }
 }
 std::cout << " }";
}

```

- Verallgemeinerung für beliebige Container mittels Iteratoren:

```

std::list<int> l = {1, 2, 3};
print_container(l.begin(), l.end()); // "{1,2,3}"

```

- es genügen forward\_\_iterators

```

Iterator iter2 = iter1; // Kopie erzeugen
iter1++; // zum nächsten Element
iter1 == iter2; // Zeigen sie auf das selbe Element?
iter1 != end;
*iter1; // Zugriff auf aktuelles Element

```

```

template<typename Iterator>
void print_container(Iterator begin, Iterator end) {
 std::cout << "{";
 if(begin != end) { // Container nicht leer?
 std::cout << " " << *begin++;
 for(;begin != end; begin++) {
 std::cout << ", " << *begin;
 }
 }
 std::cout << "}";
}

```

- Beispiel 3: überprüfen, ob Container sortiert ist

```

template<typename E, typename CMP>
bool check_sorted(std::vector<E> const & v, CMP less_than) {
 for(int i = 1; i < v.size(); i++) {
 if(less_than(v[i], v[i - 1])) { // statt v[i] < v[i - 1], ausnutzen
 return false;
 }
 }
 return true;
}

```

```

// Aufruf:
std::vector<double> v = {1.0, 2.0, 3.0};
check_sorted(v, [](double a, double b) { return a < b; }); // == true

```

```

check_sorted(v, [](double a, double b) { return a > b; }); // == false

// Implementation für Iteratoren
template<typename Iterator, typename CMP>
bool check_sorted(Iterator begin, Iterator end, CMP less_than) {
 if(begin == end) {
 return true;
 }
 Iterator next = begin;
 ++next;
 for(; next != end; ++begin, ++next) {
 if(less_than(*next, *begin)) {
 return false;
 }
 }
 return true;
}
// == std::is_sorted

```

- Bemerkung: Compiler-Fehlermeldungen bei Template-Code sind oft schwer zu interpretieren,  $\implies$  Erfahrung nötig aber: Compiler werden darin immer besser, besonders clang-Compiler
- mit Templates kann man noch viel raffinierter Dinge machen, zum Beispiel Traits-Klassen, intelligent libraries template meta programming  $\implies$  nur für Fortgeschrittene

## 15 Effizienz von Algorithmen und Datenstrukturen

### 15.1 Bestimmung der Effizienz

2 Möglichkeiten:

1. Messe die "wall clock time" - wie lange muss man auf das Ergebnis warten
2. unabhängig von Hardware benutzt man das Konzept der algorithmischen Komplexität

#### 15.1.1 wall clock

wall clock time misst man zum Beispiel mit dem Modul <chrono>

```

#include <chrono>
#include <iostream>

int main() {
 // alles zur Zeitmessung vorbereiten

```

```

 auto start = std::chrono::high_resolution_clock::now(); // Startzeit
 // code der gemessen werden soll
 auto stop = std::chrono::high_resolution_clock::now();
 std::chrono::duration<double> diff = stop - start; // Zeitdifferenz
 std::cout << "Zeitdauer: " << diff.count() << " Sekunden\n" << std::endl; // ausgeben
}

```

Pitfalls:

- moderne Compiler optimieren oft zu gut, das heißt komplexe Berechnungen werden zur Compilezeit ausgeführt und ersetzt  $\implies$  gemessene Zeit ist viel zu kurz.  
Abhilfen:
  - Daten nicht "hard-wired", sondern zum Beispiel von Platte lesen
  - "volatile" Schlüsselwort "volatile int k = 3;"
- der Algorithmus ist schneller als die clock  $\implies$  rufe den Algorithmus mehrmals in einer Schleife auf
- die Ausführung ihres Programms kann vom Betriebssystem jederzeit für etwas wichtigeres unterbrochen werden (zum Beispiel Mail checken)  $\implies$  gemessene Zeit zu lang  $\implies$  messe mehrmals und nimm die kürzeste Zeit (meist reicht 3 bis 10 fach)
- Faustregel: Messung zwischen 0.02s und 3s

Nachteil: Zeit hängt von der Qualität der Implementation, den Daten (insbesondere der Menge) und der Hardware ab

### 15.1.2 algorithmische Komplexität

Algorithmische Komplexität ist davon unabhängig, ist eine Art theoretisches Effizienzmaß. Sie beschreibt, wie sich die Laufzeit verlängert, wenn man mehr Daten hat.

*Beispiel 1.* Algorithmus braucht für  $n$  Elemente  $x$  Sekunden, wie lange dauert es für  $2n$ ,  $10n$  für große  $n$

Bei effiziente Algorithmen steigt der Aufwand mit  $n$  nur langsam (oder bestenfalls gar nicht)

Grundidee:

1. berechne, wie viele elementare Schritte der Algorithmus in Abhängigkeit von  $n$  benötigt  $\implies$  komplizierte Formel  $f(n)$
2. vereinfache  $f(n)$  in eine einfache Formel  $g(n)$ , die dasselbe wesentliche Verhalten hat. Die Vereinfachung erfolgt mittels **O-Notation** und ihren Verwandten  
Gegeben:  $f(n)$  und  $g(n)$

a)  $g(n)$  ist eine asymptotische (für große  $n$ ) obere Schranke für  $f(n)$  (" $f(n) \leq g(n)$ "),  $f(n) \in O(g(n))$  " $f(n)$  ist in der Komplexitätsklasse  $g(n)$ ", wenn es ein  $n_0$  (Mindestgröße) gibt und  $C$  (Konstante) gibt, sodass  $\forall n > n_0 : f(n) \leq Cg(n) \iff f(n) \in O(g(n))$

b)  $g(n)$  ist asymptotische untere Schranke für  $f(n)$  ( $f(n) \geq g(n)$ )

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists n_0, C : \forall n > n_0 f(n) \geq Cg(n)$$

c)  $g(n)$  ist asymptotisch scharfe Schranke für  $f(n)$  ( $f(n) = g(n)$ )

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$$

Regeln:

1.  $f(n) \in \Theta(f(n)) \implies f(n) \in O(f(n)), f(n) \in \Omega(f(n))$
2.  $c'f(n) \in \Theta(f(n))$
3.  $O(f(n)) \cdot O(g(n)) \in O(f(n)g(n))$  Multiplikationsregel
4.  $O(f(n)) + O(g(n)) \in O(\text{"max"}(f(n), g(n)))$  Additionsregel  
 formal: wenn  $f(n) \in O(g(n)) \implies O(f(n)) + O(g(n)) \in O(g(n))$   
 $g(n) \in O(f(n)) \implies O(f(n)) + O(g(n)) \in O(f(n))$
5.  $n^p \in O(n^q)$  wenn  $p \leq q$

Beliebte Wahl für  $g(n)$

- $O(1)$  "konstante Komplexität"  
elementare Operation "+, -, \*, /", Array-Zugriff  $v[k]$  ( $v$ : `std::vector`)
- $O(\log(n))$  "logarithmische Komplexität"  
zum Beispiel: auf Element von `std::map` zugreifen  $m[k]$  ( $m$ : `std::map`)
- $O(n)$  "lineare Komplexität"  
zum Beispiel `std::transform()` ( $n$  = Anzahl der transformierten Elemente)
- $O(n \log(n))$  "n log n", "log linear" "linearithmisch"  
Beispiel: `std::sort`
- $O(n^2)$  "quadratische Komplexität"
- $O(n^p)$  "polynomielle Komplexität"
- $O(2^n)$  "exponentielle Komplexität"

Beispiel 2.

$$f(n) = 1 + 15n + 4n^2 + 7n^3 \in O(n^3)$$



### 15.1.3 Anwendung

1. Fibonacci-Zahlen:  $f_k = f_{k-2} + f_{k-1}$

|       |   |   |   |   |   |   |   |    |    |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| k     | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  |
| $f_k$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 |

```
int fib1(int k) {
 if(k < 2) { // O(1)
 return k; // O(1)
 }
 // O(1)
 int f1 = 0; // letzten beiden Fibonacci Zahlen, anfangs die ersten beiden
 int f2 = 1;
 for(int i = 2; i <= k; i++) { // f(k) = k - 1 e O(k)
 int f = f1 + f2; // O(1)
 f1 = f2; // O(1)
 f2 = f; // O(1)
 } // gesamte Schleife: O(1)*O(k) = O(k)
 return f2;
} // gesamte Funktion: teuerstes gewinnt: O(k)

// rekursive Variante:
int fib2(int k) {
 if(k < 2) { // O(1)
 return k; // O(1)
 }
 return fib2(k - 2) + fib2(k - 1);
}
```

- sehr ineffizient, weil alle Fibonacci-Zahlen  $< k$  mehrmals berechnet werden

Sei  $f(k)$  die Anzahl der Schritte,  $f'(k)$  die Schritte oberhalb, Annahme: jeder Knoten ist  $O(1) \implies f(k) \in O(\text{Anzahl Knoten})$ . Oberhalb ist der Baum vollständig (jeder innere Knoten hat zwei Kinder), Anzahl der Knoten im vollständigen Baum der Tiefe  $l$ :

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^l = 2^{l+1} - 1$$

## 16 Zahlendarstellung im Computer

Problem: es gibt  $\infty$  viele Zahlen, aber der Computer ist endlich.

### 16.1 Natürliche Zahlen

Natürliche Zahlen  $\implies x \geq 0$ . c++ bietet Typen verschiedener Größe.

| klassisch          | mit Größe | Anzahl Bits   | Bereich                | Literale |
|--------------------|-----------|---------------|------------------------|----------|
| unsigned char      | uint8_t   | ( $\geq$ ) 8  | 0 - 255                |          |
| unsigned short     | uint16_t  | ( $\geq$ ) 16 | 0 - 65535              |          |
| unsigned int       | uint32_t  | ( $\geq$ ) 32 | 0 - $4 \times 10^9$    |          |
| unsigned long      |           | 32 oder 64    |                        |          |
| unsigned long long | uint64_t  | 64            | 0 - $2 \times 10^{19}$ | L        |

was passiert bei zu großen Zahlen?

- alle Operationen werden Modulo  $2^m$  ausgeführt, wenn der Typ  $m$  Bits hat

```
uint8_t x = 250, y = 100;
uint8_t s = x + y; // 350 % 256 = 94
uint8_t p = x * y; // 25000 % 256 = 168
```

”integer overflow”: einfach Bits oberhalb von  $m$  wegwerfen

### 16.1.1 Pitfalls

```
std::vector<uint8_t> v = { ... };
uint8_t sum = 0; // FALSCH, da es zu overflow kommen kann
// verwende uint32_t, uint64_t, verhindern overflow mit hoher Wahrscheinlichkeit
for(int k = 0; k < v.size(); k++) {
 sum += v[k];
}

// Endlosschleife, da i nie < 0, da unsigned
// Abhilfe: int verwenden
for(uint8_t i = v.size(); i >= 0; i++) {
 // auf v[k] zugreifen
}
```

### 16.1.2 arithmetische Operationen

- Addition in Kapitel Automaten

**Subtraktion** Subtraktion kann auf Addition zurückgeführt werden Erinnerung: Restklassenarithmetik: (Modulo)

alle Zahlen mit dem gleichen Rest modulo  $k$  bilden ”Äquivalenzklasse”, zum Beispiel

$k = 4$

$$\begin{array}{llll} 0 & \text{mod } 4 = 0 \equiv 4 & \text{mod } 4 \equiv 8 & \text{mod } 4 \equiv 12 \quad \text{mod } 4 \dots \\ 1 & \text{mod } 4 = 0 \equiv 5 & \text{mod } 4 \equiv 9 & \text{mod } 4 \equiv 13 \quad \text{mod } 4 \dots \\ 2 & \text{mod } 4 = 0 \equiv 6 & \text{mod } 4 \equiv 10 & \text{mod } 4 \equiv 14 \quad \text{mod } 4 \dots \\ 3 & \text{mod } 4 = 0 \equiv 7 & \text{mod } 4 \equiv 11 & \text{mod } 4 \equiv 15 \quad \text{mod } 4 \dots \end{array}$$

Ein Mitglied jeder Äquivalenzklasse wird Repräsentant.

Hier: kleinste Repräsentanten  $0, \dots, (k-1)$ , mit  $k = 2^m$  sind das gerade die uint-Werte  
Eigenschaft: man kann Vielfache  $nk$  addieren, ohne Äquivalenzklasse zu ändern:

$$(a - b) \text{ mod } 2^m = (a + \underbrace{2^m - b}_z) \text{ mod } 2^m = (a + z) \text{ mod } 2^m$$

$z$ : Zweierkomplement

$z = (2^m - b) \text{ mod } 2^m$  lässt sich billig berechnen als  $(\sim b + 1) \text{ mod } 2^m$  Dabei ist  $\sim$  bitweise Negation (dreht alle Bits um)

$$\cdot m = 4, \sim(1001) = 0110$$

**Satz 1.**

$$(2^m - b) \text{ mod } 2^m = (\sim b + 1) \text{ mod } 2^m$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} b + \sim b &= 1111 \dots 1 = 2^m - 1 \\ \sim b + 1 &= 2^m - b \end{aligned}$$

Fall 1:  $b > 0$

$$\begin{aligned} \implies \sim b < 2^m - 1 &\implies \sim b + 1 < 2^m \implies (\sim b + 1) \text{ mod } 2^m = \sim b + 1 \\ &\implies (\sim b + 1) \text{ mod } 2^m = (2^m - b) \text{ mod } 2^m \end{aligned}$$

Fall 2:  $b = 0$

$$\begin{aligned} \implies \sim b &= 2^m - 1 \\ \sim b + 1 &= 2^m \\ (\sim b + 1) \text{ mod } 2^m &= 0 \\ 2^m - b = 2^m z &= (2^m - b) \text{ mod } 2^m = (\sim b + 1) \text{ mod } 2^m = 0 \end{aligned}$$

□

**Multiplikation** Neue Operationen:  $\ll$  und  $\gg$  (left und right shift). Verschiebt die Bits um  $k$  Positionen nach links oder rechts. Die herausgeschobenen Bits werden vergessen und auf der anderen Seite durch 0-bits ersetzt.

```
// m = 8
assert(11011101b << 3 == 11101000b)
assert(11011101b >> 3 == 00011011b)
```

**Satz 2.**

$$x \ll k \equiv (x \cdot 2^k) \mod 2^m$$

$$x \gg k \equiv \left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Operation  $\&$  und  $|$ : bitweise und beziehungsweise oder-Verknüpfung (nicht verwechseln mit  $\&\&$  und  $||$  für logische Operationen)  $m = 8$ :  $10110011 \& 1 = 10110011$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

(testet, ob in linker Zahl Bit 0 gesetzt ist)  $10110011 | 1 = 10110011$

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

kombiniere  $\&$  mit  $\ll$ :

$$x \& (1 \ll k)$$

testet, ob in  $x$  Bit  $k$  gesetzt ist.

```
uint8_t mul(uint8_t x, uint8_t y) {
 uint8_t res = 0;
 for(int i = 0; i < 8; i++) {
 if(y & (1 << i)) {
 res += x;
 }
 x = x << 1; // x * 2
 }
}
```

## 16.2 Ganze Zahlen

| klassisch        | mit Größe | Anzahl Bits | Bereich                    |
|------------------|-----------|-------------|----------------------------|
| signed char      | int8_t    | 8           | -128 ... 127               |
| signed short     | int16_t   | 16          | $-2^{15} \dots 2^{15} - 1$ |
| signed int       | int32_t   | 32          | $-2^{31} \dots 2^{31} - 2$ |
| signed long      |           | 32 oder 64  |                            |
| signed long long | int64_t   | 64          | $-2^{63} \dots 2^{63} - 1$ |

Wird der erlaubte Bereich überschritten, ist Verhalten Compiler abhängig. In der Praxis: auch Modulo  $2^m$ , aber mit anderen Repräsentanten.

für Restklassen:

statt  $0 \dots 2^m$  bei unsigned jetzt  $-2^{m-1} \dots 2^{m-2} - 1$

das heißt:

- $x < 2^{m-1}$ : Repräsentant bleibt
- $x \geq 2^{m-1}$ : neuer Repräsentant  $x - 2^m$  ist gleiche Restklasse

Vorteil:  $x, -, *$  kann von unsigned übernommen werden

$a, b$  signed:  $a \text{ OP } b \rightarrow c$  signed (interpretiere Bitmuster von  $a$  und  $b$  als unsigned und Interpretiere das Ergebnis dann als signed) Konsequenzen:

- bei negativer Zahl ist höchstes Bit 1, weil  $x \rightarrow x - 2^m$  falls  $x \geq 2^{m-1}$
- unäre Negation  $-x$  durch Zweierkomplement

$$\begin{aligned}
 -x &= (\sim x + 1) \mod 2^m \\
 -0 &= (\sim 00000000 + 1) \mod 2^8 \\
 &= (11111111 + 1) \mod 2^8 \\
 &= \underbrace{(100000000)}_{2^8} \mod 2^8 = 0 - 1 = (\sim 00000001 + 1) \mod 2^8 \\
 &= (11111110 + 1) \mod 2^8 \\
 &= \underbrace{(11111111)}_{2^8 - 1 < 2^8} \mod 2^8 \\
 &= 11111111
 \end{aligned}$$

Ausnahmeregel für  $\gg$  bei negativen Zahlen: Compilerabhängig, meist wird links ein 1-Bit reingeschoben, damit Zahl negativ bleibt  $\Rightarrow$  es gilt immer noch  $x \gg k = (x/2^k)$   
 Reichen 64 Bit nicht aus (zum Beispiel bei moderner Verschlüsselung) verwende BigInt: Datentyp variabler Größe. Zum Beispiel GNU Multi-Precision Library