

Lineare Algebra (Vogel)

Robin Heinemann

November 30, 2016

Contents

1	Einleitung	3
1.1	Plenarübung	3
1.2	Moodle	3
1.3	Klausur	3
2	Grundlagen	3
2.1	Naive Aussagenlogik	3
2.2	Beweis	5
2.2.1	beweisen	5
2.2.2	Beweismethoden für diese Implikation $A \Rightarrow B$	5
2.3	Existenz- und Allquantor	6
2.3.1	Existenzquantor	6
2.3.2	Allquantor	6
2.3.3	Negation von Existenz- und Allquantor	7
2.3.4	Spezielle Beweistechniken für Existenz und Allaussagen	7
2.4	Naive Mengenlehre	7
2.4.1	Schreibweise	7
2.4.2	Angabe von Mengen	7
2.4.3	leere Menge	7
2.4.4	Zahlenbereiche	8
2.4.5	Teilmenge	8
2.4.6	Durchschnitt	8
2.4.7	Vereinigung	8
2.4.8	Differenz	9
2.4.9	Bemerkung zu Vereinigung und Durchschnitt	9
2.4.10	Bemerkung zu Äquivalenz von Mengen	9
2.4.11	Kartesisches Produkt	10
2.4.12	Potenzmenge	10
2.4.13	Kardinalität	10
2.4.14	Bemerkung zu natürlichen Zahlen	11

2.4.15	Prinzip der vollständigen Induktion	11
2.5	Relationen	11
2.5.1	Definiton	11
2.5.2	Eigenschaften von Relationen	12
2.5.3	Halbordnung / Totalordnung	12
2.5.4	Größtes / kleinstes Element	13
2.5.5	maximales / minimales Element	13
2.5.6	Äquivalenzrelation	14
2.6	Abbildungen	15
2.6.1	Definition	16
2.6.2	Beispiel	16
2.6.3	Anmerkung über den Begriff der Familie	16
2.6.4	Bild	16
2.6.5	Restriktion	17
2.6.6	Komposition	17
2.6.7	Eigenschaften von Abbildungen	18
3	Gruppen, Ringe, Körper	21
3.1	Gruppe	21
3.1.1	Verknüpfung	21
3.1.2	Monoid	21
3.1.3	Inverses	22
3.1.4	Gruppe	22
3.1.5	Abelsche Gruppe	23
3.1.6	Permutationen	24
3.1.7	Restklassen	24
3.1.8	Gruppenhomomorphismus	27
3.2	Ring	28
3.2.1	Anmerkung	29
3.2.2	Beispiel	29
3.2.3	Bemerkung 6.3	29
3.2.4	Bemerkung 6.4	30
3.2.5	Integritätsbereich	31
3.3	Körper	32
3.3.1	Beispiel	32
3.3.2	Bemerkung 6.11	32
3.3.3	Bemerkung 6.12	33
3.3.4	Folgerung 6.13	33
3.3.5	Definition 6.14	34
4	Polynome	34
5	Vektorräume	39

1 Einleitung

Übungsblätter/Lösungen: jew. Donnerstag / folgender Donnerstag Abgabe Donnerstag
9:30 50% der Übungsblätter

1.1 Plenarübung

Aufgeteilt

1.2 Moodle

Passwort: vektorraumhomomorphismus

1.3 Klausur

24.02.2017

2 Grundlagen

2.1 Naive Aussagenlogik

naive Logik: wir verwenden die sprachliche Vorstellung (\neq mathematische Logik: eigne Vorlesung) Eine Aussage ist ein feststehender Satz, dem genau einer der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann. Aus einfachen Aussagen kann man durch logische Verknüpfungen kompliziertere Aussagen bilden. Angabe der Wahrheitswertes der zusammengesetzten Aussage erfolgt durch Wahrheitstafeln (liefern den Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage, aus dem Wahrheitswert der einzelnen Aussagen). Im folgenden seien A und B Aussagen.

- Negation (NICHT-Verknüpfung)

– Symbol: \neg

– Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

– Beispiel: A : 7 ist eine Primzahl (w) $\neg A$: 7 ist keine Primzahl (f)

- Konjunktion (UND-Verknüpfung)

– Symbol \wedge

– Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- Disjunktion (ODER-Verknüpfung)

- Symbol: \vee

- Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

- exklusives oder: $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$

- Beispiel A : 7 ist eine Primzahl (w), B : 5 ist gerade (f)

- $A \wedge B$ 7 ist eine Primzahl und 5 ist gerade (f)

- $A \vee B$ 7 ist eine Primzahl oder 5 ist gerade (w)

- Implikation (WENN-DANN-Verknüpfung)

- Symbol: \Rightarrow

- Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- Sprechweise: A impliziert B , aus A folgt B , A ist eine hinreichende Bedingung für B (ist $A \Rightarrow B$ wahr, dann folgt aus A wahr, B ist wahr), B ist eine notwendige Bedingung für A (ist $A \Rightarrow B$ wahr, dann kann A nur dann wahr sein, wenn Aussage B wahr ist)

- Beispiel Es seien $m, n \in \mathbb{N}$

- * A : m ist gerade

- * B : mn ist gerade

- * Dann gilt $\forall m, n \in \mathbb{N} A \Rightarrow B$ wahr

Fallunterscheidung:

- m gerade, n gerade, dann ist A wahr, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr

- m gerade, n ungerade, dann ist A wahr, B falsch, d.h. $A \Rightarrow B$ falsch

- m ungerade, n gerade, dann ist A falsch, B wahr, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr

- m ungerade, n ungerade, dann ist A falsch, B falsch, d.h. $A \Rightarrow B$ wahr

- Äquivalenz (GENAU-DANN-WENN-Verknüpfung)

- Symbol \Leftrightarrow
- Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- Sprechweise: A gilt genau dann, wenn B gilt, A ist hinreichend und notwendig für B

Die Aussagen $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ sind gleichbedeutend:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

- Beispiel: Es sei n eine ganze Zahl

$A : n - 2 > 1$

$B : n > 3$

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A \Leftrightarrow B$ $C : n > 0$

$D : n^2 > 0$

Für $n = -1$ ist die Äquivalenz $C \Leftrightarrow$ falsch (C falsch, D wahr)

Für alle ganzen Zahlen n gilt zumindest die Implikation $C \Rightarrow D$

2.2 Beweis

Mathematische Sätze, Bemerkungen, Folgerungen, etc. sind meistens in Form wahrer Implikationen formuliert

2.2.1 beweisen

Begründen warum diese Implikation wahr ist

2.2.2 Beweismethoden for diese Implikation $A \Rightarrow B$

- direkter Beweis ($A \Rightarrow B$)
- Beweis durch Kontraposition ($\neg B \Rightarrow \neg A$)
- Widerspruchsbeweis ($\neg(A \wedge \neg B)$)

Diese sind äquivalent zueinander

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Beispiel m, n natürliche Zahlen

$$A : m^2 < n^2$$

$$B : m < n$$

Wir wollen zeigen, dass $A \Rightarrow B$ für alle natürlichen Zahlen m, n wahr ist

- direkter Beweis:

$$A : m^2 < n^2 \Rightarrow 0 < n^2 - m^2 \Rightarrow 0 < (n - m) \underbrace{(n + m)}_{>0} \Rightarrow 0 < n - m \Rightarrow m < n$$

- Beweis durch Kontraposition:

$$\neg B : m \geq n \Rightarrow m^2 \geq nm \wedge mn \geq n^2 \Rightarrow m^2 \geq n^2 \Rightarrow \neg A$$

- Beweis durch Widerspruch:

$$A \wedge \neg B \Rightarrow m^2 < n^2 \wedge n \leq m \Rightarrow m^2 < n^2 \wedge mn \leq m^2 \wedge n^2 \leq mn \Rightarrow mn \leq m^2 < n^2 \leq mn$$

Widerspruch

2.3 Existenz- und Allquantor

2.3.1 Existenzquantor

$\exists x A(x)$ Aussage, die von Variable x abhängt

$\exists x : A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Es existiert ein x , für das $A(x)$ wahr ist" (hierbei ist "existiert ein x " im Sinne von "existiert mindestens ein x " zu verstehen)

Beispiel:

$$\exists n \in \mathbb{N} : n > 5 \quad (\text{w})$$

$\exists! x : A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Es existiert genau ein x , für das $A(x)$ wahr ist"

2.3.2 Allquantor

$\forall x : A(x)$ ist gleichbedeutend mit "Für alle x ist $A(x)$ wahr" Beispiel:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 4n \text{ ist gerade}$$

2.3.3 Negation von Existenz- und Allquantor

$$\neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$$

$$\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$$

2.3.4 Spezielle Beweistechniken für Existenz und Allaussagen

- Angabe eines Beispiel, um zu zeigen, dass eine Existenzaussage wahr ist.
Beispiel:

$\exists n \in \mathbb{N} : n > 5$ ist wahr, denn für $n = 7$ ist die Aussage $n > 5$ wahr

- Angabe eines Gegenbeispiel, um zu zeigen, dass eine Allaussage falsch ist.
Beispiel:

$\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 5$ ist falsch, denn für $n = 7$ ist die Aussage $n \leq 5$ falsch

2.4 Naive Mengenlehre

Mengenbegriff nach Cantor:

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (die Elemente genannt werden) zu einem Ganzen

2.4.1 Schreibweise

- $x \in M$, falls x ein Element von M ist
- $x \notin M$, falls x kein Element von M ist
- $M = N$, falls M und N die gleichen Elemente besitzen, $M \subseteq N \wedge N \subseteq M$

2.4.2 Angabe von Mengen

- Reihenfolge ist irrelevant ($\{1,2,3\} = \{1,3,2\}$)
- Elemente sind wohlunterschieden $\{1,2,2\} = \{1,2\}$
- Auflisten der Elemente $M = \{a, b, c, \dots\}$
- Beschreibung der Elemente durch Eigenschaften: $M = \{x \mid E(x)\}$
(Elemente x , für die $E(x)$ wahr)

– Beispiel:

$$\{2, 4, 6, 8\} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ gerade}, 1 < x < 10\}$$

2.4.3 leere Menge

Die leere Menge \emptyset enthält keine Elemente

Beispiel

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < -5\} = \emptyset$$

2.4.4 Zahlenbereiche

Menge der natürlichen Zahlen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der natürlichen Zahlen mit Null:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der Ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2\}$$

Menge der rationalen Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Menge der reellen Zahlen: \mathbb{R}

2.4.5 Teilmenge

A, B seien Mengen.

A heißt Teilmenge von B ($A \subseteq B$) $\stackrel{\text{Def.}}{\iff} \forall x \in A : x \in B$ A heißt echte Teilmenge von B ($A \subset B$) $\stackrel{\text{Def.}}{\iff} A \subseteq B \wedge A \neq B$

Anmerkung Offenbar gilt für Mengen A, B :

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

\emptyset ist Teilmenge jeder Menge

Beispiel

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

2.4.6 Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Beispiel

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 4, 6, 7\}, A \cap B = \{3, 7\}$$

2.4.7 Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Beispiel

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 4, 6, 7\}, A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

2.4.8 Differenz

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Im Fall $B \subseteq A$ nennt man $A \setminus B$ auch das Komplement von B in A und schreibt $\downarrow_A(B) = A \setminus B$

Beispiel

$$A = \{2, 3, 5, 7\}, B = \{3, 4, 6, 7\}, A \setminus B = \{2, 5\}$$

2.4.9 Bemerkung zu Vereinigung und Durchschnitt

A, B seien zwei Mengen. Dann gilt

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Beweis

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) \supseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

" \subseteq " Sei $x \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $x \in A \wedge x \in B \cup C$

- 1. Fall: $x \in A \wedge x \in B$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- 2. Fall $x \in A \wedge x \in C$

$$\Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Damit ist " \subseteq " gezeigt. " \supseteq " Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C =$$

Damit ist " \supseteq " gezeigt.

2.4.10 Bemerkung zu Äquivalenz von Mengen

Seien A, B Mengen, dann sind äquivalent:

1. $A \cup B = B$

2. $A \subseteq B$

Beweis Wir zeigen $1) \Rightarrow 2)$ und $2) \Rightarrow 1)$.

$1) \Rightarrow 2)$: Es gelte $A \cup B = B$, zu zeigen ist $A \subseteq B$. Sei $x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cup B = B$

$2) \Rightarrow 1)$: Es gelte $A \subseteq B$, zu zeigen ist $A \cup B = B$

" \subseteq ": Sei $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B$ " \supseteq ": $B \subseteq A \cup B$ klar

2.4.11 Kartesisches Produkt

Seien A, B Mengen

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

heißt das kartesische Produkt von A und B . Hierbei ist $(a, b) = (a', b') \xLeftrightarrow{\text{Def}} a = a' \wedge b = b'$
 $a = a' \wedge b = b'$

Beispiel

•

$$\{1, 2\} \times \{1, 3, 4\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$$

•

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2.4.12 Potenzmenge

A sei eine Menge

$$\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subseteq A\}$$

heißt die Potenzmenge von A

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

2.4.13 Kardinalität

M sei eine Menge. Wir setzen

$$|M| := \begin{cases} n & \text{falls } M \text{ eine endliche Menge ist und } n \text{ Elemente enthält} \\ \infty & \text{falls } M \text{ nicht endlich ist} \end{cases}$$

$|M|$ heißt Kardinalität von A

Beispiel

- $|\{7, 11, 16\}| = 3$
- $|\mathbb{N}| = \infty$

2.4.14 Bemerkung zu natürlichen Zahlen

Für die natürlichen Zahlen gilt das Induktionsaxiom Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge, für die gilt:

$$1 \in M \wedge \forall n \in M : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$$

dann ist $M = \mathbb{N}$

2.4.15 Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Die Aussagen $A(n)$ gelten für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn man folgendes zeigen kann:

- (IA) $A(1)$ ist wahr
- (IS) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

Der Schritt (IA) heißt Induktionsanfang, die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ heißt Induktionsschritt

Beweis Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\}$ Wegen (IA) ist $1 \in M$, wegen (IS) gilt: $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$

Nach Induktionsaxiom folgt $M = \mathbb{N}$, das heißt $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Beispiel Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage: $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Wir zeigen: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, und zwar durch vollständige Induktion

- (IA) $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$
- (IS) zu zeigen: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$
Es gelte $A(n)$, das heißt $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ist wahr

$$\Rightarrow 1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \square$$

2.5 Relationen

2.5.1 Definiton

Eine Relation auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ Wir schreiben $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff} (a, b) \in R$ ("a steht in Relation zu b")

- anschaulich: eine Relation auf M stellt eine "Beziehung" zwischen den Elementen von M her.
- Für $a, b \in M$ gilt entweder $a \sim b$ oder $a \not\sim b$, denn: entweder ist $(a, b) \in R$ oder $(a, b) \notin R$

Anmerkung Aufgrund der obigen Notation spricht man in der Regel von Relation "\$\sim\$" auf \$M\$ als von der Relation \$R \subseteq M \times M\$

Beispiel \$M = \{1,2,3\}\$. Durch \$R = \{(1,1), (1,2), (3,3)\} \subseteq M \times M\$ ist eine Relation auf \$M\$ gegeben. Es gilt dann: \$1 \sim 1, 1 \sim 2, 3 \sim 3\$ (aber zum Beispiel: \$1 \not\sim 3, 2 \not\sim 1, 2 \not\sim 2\$)

2.5.2 Eigenschaften von Relationen

\$M\$ Menge, \$\sim\$ Relation auf \$M\$

\$\sim\$ heißt:

- reflexiv \$\stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ für alle \$a \in M\$ gilt \$a \sim a\$
- symmetrisch \$\stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ für alle \$a, b \in M\$ gilt: \$a \sim b \Rightarrow b \sim a\$
- antisymmetrisch \$\stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ für alle \$a, b \in M\$ gilt: \$a \sim b \wedge b \sim a \Rightarrow a = b\$
- transitiv \$\stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ für alle \$a, b, c \in M\$ gilt: \$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c\$
- total \$\stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ für alle \$a, b \in M\$ gilt: \$a \sim b \vee b \sim a\$

Beispiel Sei \$M\$ die Menge der Studierenden in der LA1-Vorlesung

1. Für \$a, b \in M\$ sei \$a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ \$a\$ hat den selben Vornamen wie \$b\$
\$\sim\$ reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, transitiv, nicht total
2. Für \$a, b \in M\$ sei \$a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ Matrikelnummer von \$a\$ ist kleiner gleich als die Matrikelnummer von \$b\$
\$\sim\$ ist reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, total
3. Für \$a, b \in M\$ sei \$a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ \$a\$ sitzt auf dem Platz recht von \$b\$
\$\sim\$ ist nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht transitiv, nicht total

2.5.3 Halbordnung / Totalordnung

\$\sim\$ heißt

- Halbordnung auf \$M \stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ \$\sim\$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv
- Totalordnung auf \$M \stackrel{\text{Def}}{\iff}\$ \$\sim\$ ist eine Halbordnung und \$\sim\$ ist total

In diesen Fällen sagt man auch: Das Tupel \$(M, \sim)\$ ist eine halbgeordnete, beziehungsweise totalgeordnete Menge.

Beispiel

1. \leq auf \mathbb{N} ist eine Totalordnung
2. Sei $M = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$. \subseteq ist auf M eine Halbordnung, aber keine Totalordnung (es ist zum Beispiel weder $\{1\} \subseteq \{3\}$ noch $\{3\} \subseteq \{1\}$)

Anmerkung Wegen der Analogie zur \leq auf \mathbb{N} bezeichnen wir Halbordnungen in der Regel mit \leq

2.5.4 Größtes / kleinstes Element

(M, \leq) halbgeordnete Menge, $a \in M$
 a heißt ein

- größtes Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Für alle $x \in M$ gilt $x \leq a$
- kleinstes Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Für alle $x \in M$ gilt $a \leq x$

Bemerkung (M, \leq) halbgeordnete Menge

Dann gilt: Existiert in M ein größtes (beziehungsweise kleinstes) Element, so ist dieses eindeutig bestimmt

Beweis Es seien $a, b \in M$ größte Elemente von M
 $\Rightarrow x \leq a$ für alle $x \in M$, also auch $b \leq a$

Außerdem: $x \leq b$ für alle $x \in M$, also auch $a \leq b$

$\xrightarrow{\text{Antisymmetrie}} a = b$

Analog für kleinstes Element

Anmerkung Dies sagt nichts darüber aus, ob ein größtes (beziehungsweise kleinstes) Element in M überhaupt existiert.

Beispiel

1. In (\mathbb{N}, \leq) ist 1 das kleinste Element, ein größtes Element gibt es nicht
2. $(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \subseteq)$ ist eine halbgeordnete Menge ohne kleinstes beziehungsweise größtes Element

2.5.5 maximales / minimales Element

(M, \leq) halbgeordnete Menge, $a \in M$
 a heißt ein

- maximales Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $x \in M$ gilt: $a \leq x \Rightarrow a = x$
- minimales Element von $M \stackrel{\text{Def}}{\iff}$ für alle $x \in M$ gilt: $x \leq a \Rightarrow a = x$

Beispiel In $(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \subseteq)$ sind $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ maximale Elemente und $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ sind minimale Elemente.

Bemerkung (M, \leq) halbgeordnete Menge, $a \in M$

Dann gilt: Ist a ein größtes (beziehungsweise kleinstes) Element von M , dann ist a ein maximales (beziehungsweise minimales) Element von M .

Beweis Sei a ein größtes Element von M .

zu zeigen ist: Für alle $x \in M$ gilt $a \leq x \Rightarrow a = x$ Sei $x \in M$ mit $a \leq x$. Da a größtes Element von M ist, gilt auch $x \leq a$

$$\xleftrightarrow{\text{Antisymmetrie}} a = x$$

Analog für kleinstes Element.

2.5.6 Äquivalenzrelation

M Menge, \sim auf M

\sim heißt Äquivalenzrelation $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \sim$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. In dem Fall sagen wir für $a \sim b$ auch a ist äquivalent zu b . Für $a \in M$ heißt $[a] := \{b \in M \mid b \sim a\}$ heißt die Äquivalenzklasse von a . Elemente aus $[a]$ nennt man Vertreter oder Repräsentanten von a

Beispiel M Menge aller Bürgerinnen und Bürger Deutschlands.

Wir definieren für $a, b \in M$ $a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff} a$ und b sind im selben Jahr geboren.

\sim ist ein Äquivalenzrelation.

Jerôme Boateng wurde 1988 geboren.

$[\text{Jerôme Boateng}] = \{b \in M \mid b \text{ ist im selben Jahr geboren wie Jerôme Boateng}\} = \{b \in M \mid b \text{ wurde 1988 geboren}\}$ Weitere Vertreter von $[\text{Jerôme Boateng}]$ sind zum Beispiel Mesut Özil, Mats Hummels. Es ist $[\text{Jerôme Boateng}] = [\text{Mesut Özil}] = [\text{Mats Hummels}]$. Man sieht in diesem Beispiel: Die Menge M zerfällt komplett in verschiedene Äquivalenzklassen:

- Jeder Bürger / jede Bürgerin Deutschlands ist in genau einer Äquivalenzklasse enthalten
- Jede zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt (haben leeren Durchschnitt)

Bemerkung M Menge, \sim Äquivalenzrelation auf M

Dann gilt:

1. Jedes Element von M liegt in genau einer Äquivalenzklasse
2. Je zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt

Man sagt auch: Die Äquivalenzklassen bezüglich " \sim " bilden eine **Partition** von M .

Beweis

1. Sei $a \in M$

zu zeigen: Es gibt genau eine Äquivalenzklassen, in der a liegt

- a) Es gibt eine Äquivalenzklasse, in der a liegt, denn $a \in [a]$, denn $a \sim a$
b) Ist $a \in [b]$ und $a \in [c]$, dann ist $[b] = [c]$ (d.h. a liegt in höchstens einer Äquivalenzklasse)

denn: Seien $b, c \in M$ mit $a \in [b]$ und $a \in [c] \Rightarrow a \sim b$ und $a \sim c \xrightarrow{\text{Symmetrie}} b \sim a$ und $a \sim c \xrightarrow{\text{Transitivität}} b \sim c$ Behauptung $[b] = [c]$ denn: " \subseteq "

Sei $x \in [b] \Rightarrow x \sim b \xrightarrow{\text{Transitivität}} b \sim c \Rightarrow x \sim c \Rightarrow x \in [c]$ denn: " \supseteq " Sei

$x \in [c] \Rightarrow x \sim c \xrightarrow{\text{Transitivität}} c \sim b \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$

2. Sind $b, c \in M$ mit $[b] \cap [c] \neq \emptyset$, dann existiert ein $a \in [b] \cap [c]$, und es folgt wie in 2.:

$[b] = [c]$ Für $b, c \in M$ gilt also entweder $[b] \cap [c] = \emptyset$ oder $[b] = [c]$ □

Faktormenge M Menge, \sim Äquivalenzrelation auf M $M/\sim := \{[a] | a \in M\}$ (Menge der Äquivalenzklassen) heißt die Faktormenge (Quotientenmenge) von M nach \sim

Beispiel

$$M = \{1, 2, 3, -1, -2, -3\}$$

Für $a, b, c \in M$ setzen wir $a \sim b \xLeftrightarrow{\text{Def.}} |a| = |b|$ Das ist eine Äquivalenzrelation auf M Es ist $[1] = \{1, -1\}, [2] = \{2, -2\}, [3] = \{3, -3\}$ Somit: $M/\sim := \{[1], [2], [3]\} = \{\{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}\}$

Anmerkung Der Übergang zur Äquivalenzklassen soll (für eine jeweils gegebene Relation) irrelevante Informationen abstreifen.

2.6 Abbildungen

naive Definition:

Eine Abbildung f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $n \in M$ genau ein Element aus N zuordnet, dieses wird mit $f(n)$ bezeichnet. **Notation:**

$$f : M \rightarrow N, m \mapsto f(m)$$

Zwei Abbildungen $f, g : M \rightarrow N$ sind gleich, wenn gilt $\forall n \in M : f(n) = g(n)$ M heißt die Definitionsmenge von f , N heißt die Zielmenge von f

2.6.1 Definition

Eine Abbildung f von M nach N ist ein Tupel (M, N, G_f) , wobei G_f eine Teilmenge von $M \times N$ mit der Eigenschaft ist, dass für jedes Element $m \in M$ genau ein Element $n \in N$ mit $(m, n) \in G_f$ existiert. (für dieses Element n schreiben wir auch $f(m)$). G_f heißt der Graph von f .

2.6.2 Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x + 1)$
3. M Menge, $id_M : M \rightarrow M, m \mapsto m$ heißt Identität (identische Abbildung) auf M
4. I, M Mengen: Eine über I indizierte Familie von Elementen von M ist eine Abbildung:
 $m : I \rightarrow M, i \mapsto m(i) =: m_i$. Wir schreiben für die Familie auch kurz $(m_i)_{i \in I}$. I heißt Indexmenge der Familie.
5. Spezialfall von 4.: $I = \mathbb{N}, M = \mathbb{R} : ((m_i)_{i \in \mathbb{N}})$ nennt man auch Folge reeller Zahlen.

2.6.3 Anmerkung über den Begriff der Familie

Über den Begriff der Familie lassen sich diverse Konstruktionen aus der naiven Mengenlehre verallgemeinern. Ist $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, dann ist:

$$\cup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

$$\cap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$$

$$\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : x_i \in M_i\}$$

2.6.4 Bild

m, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung.

Sind $m \in M, n \in N$ mit $n = f(m)$ dann nennen wir n ein **Bild** von m unter f und wir nennen m ein **Urbild** von n unter f .

Anmerkung In obiger Situation ist das Bild von m unter f eindeutig bestimmt (nach der Definition einer Abbildung) Urbilder sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, und im Allgemeinen besitzt nicht jedes Element aus N ein Urbild.

Beispiel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, dann ist $4 = f(2) = f(-2)$, das heißt 2 und -2 sind Urbilder von 4, das Element -5 hat kein Urbild unter f , denn es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = -5$

Definition M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung, $A \subseteq M, B \subseteq N$
 $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq N$ heißt das Bild von A unter f .
 $f^{-1}(B) := \{m \in M \mid f(m) \in B\} \subseteq M$ heißt das Urbild von B unter f

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \\ f(\{1, 2, 3\}) &= \{1, 4, 9\} \\ f^{-1}(\{4, -5\}) &= \{2, -2\} \\ f^{-1}(\{4\}) &= \{2, -2\} \\ f^{-1}(\{-5\}) &= \emptyset \\ f(\mathbb{R}) = x^2 \mid x \in \mathbb{R} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} =: \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned}$$

2.6.5 Restriktion

M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung, $A \subseteq M$

$$f|_A : A \rightarrow N, m \mapsto f(m)$$

heißt die Restriktion von f auf A . Ist $B \subseteq N$ mit $f(A) \subseteq B$, dann setzen wir

$$f|_A^B : A \rightarrow B, m \mapsto f(m)$$

Ist $f(M) \subseteq B$ dann setzen wir:

$$f|^B := f|_M^B, M \rightarrow B, m \mapsto f(m)$$

2.6.6 Komposition

L, M, N Mengen, $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$ Abbildung

$$g \circ f : L \rightarrow N, x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

heißt die Komposition (Hintereinanderausführung) von f und g

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1 \\ \Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

Assoziativität L, M, N, P Mengen, $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N, h : N \rightarrow P$
Dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

das heißt die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ.

Beweis Für $x \in List$

$$(h \circ (g \circ f)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) \square$$

2.6.7 Eigenschaften von Abbildungen

M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Abbildung

Injektivität f heißt injektiv:

$$\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall m_1, m_2 \in M : f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 \Rightarrow f(m_1) \neq f(m_2)$$

Surjektivität f heißt surjektiv:

$$\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall n \in N : \exists m \in M : f(m) = n \Leftrightarrow f(M) = N$$

Bijektivität f heißt bijektiv: $\stackrel{\text{Def}}{\iff} f$ ist injektiv und surjektiv

Beispiel

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist:

- nicht injektiv, denn $f(2) = f(-2)$, aber $2 \neq -2$
- nicht surjektiv, denn es existiert kein $m \in \mathbb{R}$ mit $f(m) = -1$
- nicht bijektiv

2. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist:

- injektiv, denn für $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1^2 = m_2^2 \xrightarrow{m_1, m_2 \geq 0} m_1 = m_2$
- nicht surjektiv, denn es existiert kein $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(m) = -1$
- nicht bijektiv

3. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist:

- injektiv, denn für $m_1, m_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow m_1^2 = m_2^2 \xrightarrow{m_1, m_2 \geq 0} m_1 = m_2$
- surjektiv, denn für $m \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $f(\sqrt{m}) = (\sqrt{m})^2 = m$
- bijektiv

Bemerkung 4.12 M, N Mengen, $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$ Dann ist f injektiv und g surjektiv.

Beweis

1. f ist injektiv, denn:

Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow g(f(m_1)) = g(f(m_2)) \Rightarrow (g \circ f)(m_1) = (g \circ f)(m_2) \Rightarrow id_M(m_1) = id_M(m_2) \Rightarrow m_1 = m_2$

2. g ist surjektiv, denn:

Sei $m \in M$ Dann ist $m = id_M(m) = (g \circ f)(m) = g(f(m))$

Bemerkung Sei $f : M \rightarrow N$, N, M Mengen Dann sind äquivalent:

1. f ist bijektiv
2. Zu jedem $n \in N$ gibt es genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$
3. Es gibt genau eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$

In diesem Fall bezeichnen wir die Abbildung $g : N \rightarrow M$ aus 3. mit f^{-1} und nennen f^{-1} die Umkehrabbildung von f . Sie ist gegeben durch

$f^{-1} : N \rightarrow M, n \mapsto$ Das eindeutig bestimmte Element $m \in M$ mit $f(m) = n$

Beweis Statt 1. \Leftrightarrow 2. und 2. \Leftrightarrow 3. zeigen 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.

- 1. \Rightarrow 2. Sei f bijektiv

zz: Ist $n \in N$, dann existiert genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$

- Existenz folg aus Surjektivität von f
- Eindeutigkeit: Seien $m_1, m_2 \in M$ mit $f(m_1) = n, f(m_2) = n \Rightarrow f(m_1) = f(m_2) \xrightarrow{f \text{ injektiv}} m_1 = m_2$

- 2. \Rightarrow 3. Zu jedem $n \in N$ existiere genau ein $m \in M$ mit $f(m) = n$

zz: Es existiert genau eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$ und $f \circ g = id_N$

- Existenz: Wir definieren $g : N \rightarrow M, n \mapsto$ das nach 2. eindeutigbestimmte Element $m \in M$ mit $f(m) = n$
Dann gilt für $m \in M$:

$$(g \circ f)(m) = f(f(m)) = m, \text{ also } g \circ f = id_M$$

und für $n \in N$ ist $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = n$ also $f \circ g = id_N$

- Eindeutigkeit: Es seien $g_1, g_2 : N \rightarrow M$ mit $g_i \circ f = id_M, f \circ g_i = id_N$ für $i = 1, 2$

$$\Rightarrow g_1 = g_1 \circ id_N = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = id_M \circ g_2 = g_2$$

- 3. \Rightarrow 1. Wegen 3. existiert $g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = id_M, f \circ g = id_N$

$$\xrightarrow{[[\text{Bemerkung 4.12}]]} f \text{ injektiv, } f \text{ surjektiv} \Rightarrow f \text{ bijektiv} \Rightarrow 1.$$

Anmerkung

- Bitte stets aufpassen, ob mit f^{-1} die Umkehrabbildung (falls existent) oder das Bilden der Urbildmenge gemeint ist.
- Im Beweis von 3. \Rightarrow 1. haben wir die Eindeutigkeit von g garnicht verwendet, das heißt wir haben sogar gezeigt:
 f bijektiv \Leftrightarrow 3.' Es existiert eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ mit $f \circ g = id_N$ und $f \circ f = id_M$ Soch eine Abbildung g ist in diesem Fall automatisch bestimmt.

Beispiel Im Beispiel vorher haben wir gesehen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $f^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{x}$

Bemerkung M, N Mengen, $f : M \rightarrow N$ Dann gilt:

1. f injektiv \Leftrightarrow Es existiert $g : N \rightarrow M$ mit $g \circ f = id_M$

Beweis:

- " \Leftarrow " folgt aus 2.6.7
- " \Rightarrow " Sei f injektiv. Sei x ein beliebiges Element aus M Wir definieren

$$g : N \rightarrow M, n \mapsto \begin{cases} x & n \notin f(M) \\ \text{das eindeutig bestimmte Element } m \in M \text{ mit } f(m) = n & n \in f(M) \end{cases}$$

Für alle $m \in M$ ist dann $(g \circ f)(m) = g(f(m)) = m$ das geißt $g \circ f = id_M$

2. f surjektiv \Leftrightarrow Es existiert $g : N \rightarrow M$ mit $f \circ g = id_N$

Beweis:

- " \Leftarrow " folgt aus 2.6.7
- " \Rightarrow " Sei f surjektiv. Für jedes Element $n \in N$ wählen wir ein Element $\tilde{n} \in f^{-1}(\{n\}) \neq \emptyset$ und setzen $g : N \rightarrow M, n \mapsto \tilde{n}$. Dann ist $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = n$ für alle $n \in N$ und das heißt $f \circ g = id_N$ \square

Anmerkung Das wir stets einen Auswahlprozess wie im Beweis von 2. " \Rightarrow " vornehmen können ist ein Axiom der Mengenlehre (erkennen wir als gültig an, ist jedoch nicht beweisbar), das **Auswahlaxiom**:

Ist I eine Indexmenge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen, dann gibt es eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $\gamma(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ (im obigen Beweis ist $I = N, A_n = f^{-1}(\{n\})$ für $n \in N$)

Bemerkung 4.16 L, M, N Mengen, $f : L \rightarrow M, g : M \rightarrow N$

Dann gilt: g, f beide injektiv (beziehungsweise surjektiv oder bijektiv) $\Rightarrow g \circ f$ injektiv (beziehungsweise surjektiv oder bijektiv)

Definition 4.17

Bemerkung 4.19 M, N endliche Mengen mit $|M| = |N|, f : M \rightarrow N$ Dann sind äquivalent:

1. f ist injektiv
2. f ist surjektiv
3. f ist bijektiv

Beweis

- 1. \Rightarrow 2. Sei f injektiv $\Rightarrow |f(M)| = |M| = |N|$ wegen $f(M) \subseteq N$ folgt $f(M) = N \Rightarrow f$ surjektiv
- 2. \Rightarrow 3. Sei f surjektiv, das heißt $f(M) = N$
Annahme: f ist nicht bijektiv $\Rightarrow f$ nicht injektiv $\Rightarrow \exists m_1, m_2 \in M : m_1 \neq m_2 \wedge f(m_1) = f(m_2) \Rightarrow |f(M)| < |M| = |N|$ Widerspruch zu $f(M) = N$
- 3. \Rightarrow 1. trivial

3 Gruppen, Ringe, Körper

3.1 Gruppe

3.1.1 Verknüpfung

M Menge, Eine Verknüpfung (inverse Verknüpfung) auf M ist ein Abbildung

$$* : M \times M \rightarrow M$$

Anstelle von $*(a, b)$ schreiben wir $a * b$

Beispiel

- $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a + b$
- $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a \cdot b$

sind Verknüpfungen

3.1.2 Monoid

Ein Monoid ist ein Tupel $(M, *)$, bestehend aus einer Menge M und einer Verknüpfung $* : M \times M \rightarrow M$, welche folgende Bedingungen genügt:

- (M1) Die Verknüpfung ist assoziativ, das heißt

$$\forall a, b, c \in M : (a * b) * c = a * (b * c)$$

- (M2) Es existiert ein neutrales Element e in M , das heißt

$$\exists e \in M : \forall a \in M e * a = a = a * e$$

Beispiel

- $(\mathbb{N}_0, +), (\mathbb{Z}, +)$ sind Monoide (neutrales Element: 0)
- $(\mathbb{N}, +)$ ist kein Monoid (es existiert kein neutrales Element)
- $(\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{Z}, \cdot)$ sind Monoide (neutrales Element: 1)

Bemerkung $(M, *)$ Monoid. Dann gibt es in M genau ein neutrales Element.

Beweis

- Existenz: Es existiert ein neutrales Element: folgt aus Definition eines Monoids
- Eindeutigkeit: Seien $e, \tilde{e} \in M$ neutrale Element

$$\Rightarrow e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$$

3.1.3 Inverses

$(M, *)$ Monoid mit neutralem Element e , $a \in M$. Ein Element $b \in M$ heißt Inverses zu a $\stackrel{\text{Def}}{\iff} a * b = e = b * a$

Beispiel

- In $(\mathbb{Z}, +)$ ist -2 ein Inverses zu 2 denn $2 + (-2) = 0 = (-2) + 2$
- In $(\mathbb{N}_0, +)$ existiert kein Inverses zu 2 , denn es existiert kein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n + 2 = 0 = n + 2$
- In (\mathbb{Z}, \cdot) existiert kein Inverses zu 2 , denn es existiert kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $2 \cdot n = 1 = n \cdot 2$

Bemerkung $(M, *)$ Monoid, $a \in M$. Dann gilt: besitzt a ein Inverses, dann ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis Seien b, \tilde{b} Inversen zu a , sei $e \in M$ das neutrale Element

$$\Rightarrow b = e * b = (\tilde{b} * a) * b = \tilde{b} * (a * b) = \tilde{b}$$

3.1.4 Gruppe

Eine Gruppe ist ein Tupel $(G, *)$, bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $* : G \times G \rightarrow G$, sodass gilt:

- (G1) $(G, *)$ ist ein Monoid
- (G2) Jedes Element aus G besitzt ein Inverses

In diesem Fall schreiben wir a' für das nach 3.1.3 eindeutig bestimmte Inverse eines Elements $a \in G$

Beispiel

- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, denn $(\mathbb{Z}, +)$ ist ein Monoid und für $a \in \mathbb{Z}$ ist $-a$ das inverse Element: $a + (-a) = 0 = (-a) + a$
- (\mathbb{Z}, \cdot) ist keine Gruppe, denn das Element $2 \in \mathbb{Z}$ hat kein Inverses (vergleiche 3.1.3).
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe denn es ist ein Monoid mit neutralem Element 1 und für jedes Element $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ existiert ein $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $a \cdot b = 1 = b \cdot a$, nämlich $b = \frac{1}{a}$

Bemerkung 5.11 $(G, *)$ Gruppe mit neutralem Element $e, a, b, c \in G$. Dann gilt

1. (Kürzungsregel)

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c$$

$$a * c = b * c \Rightarrow a = b$$

2. $a * b = e \Rightarrow b = a'$

3. $(a')' = a$

4. (Regel von Hemd und Jacke) $(a * b)' = b' * a'$

Beweis

1. Sei $a * b = a * c \Rightarrow a' * (a * b) = a' * (a * c) \Rightarrow (a' * a) * b = (a' * a) * c \Rightarrow e * b = e * c \Rightarrow b = c$
2. aus 1. $a * b = c = a * a' \Rightarrow b = a'$
3. Es ist $a * a' = e = a' * a$, das heißt a ist Inverses zu $a' \Rightarrow (a')' = a$
4. Es ist $(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = a * a' = e \Rightarrow b' * a' \stackrel{2.}{\Rightarrow} (a * b)'$

3.1.5 Abelsche Gruppe

$(M, *)$ Monoid / Gruppe heißt kommutativ (abelsch)

$$\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall a, b \in M : a * b = b * a$$

Beispiel Alle bisher betrachteten Beispiele von Monoiden beziehungsweise Gruppen sind abelsch

Bemerkung 5.14 M Menge, Wir setzen $S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$ Dann ist $(S(M), \circ)$ eine Gruppen, die **symmetrische** Gruppe auf M

Beweis

1. " \circ " ist wohl definiert, das heißt für $f, g \in S(M)$ ist $f \circ g \in S(M)$ folgt aus 2.6.7
2. " \circ " ist assoziativ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \forall f, g \in S(M)$ nach 4.9
3. id_M ist neutral: $id_M \in S(M)$ und $id_M \circ f = f = f \circ id_M \forall f \in S(M)$
4. Existenz von Inversen: $f \in S(M) \Rightarrow f$ bijektiv \Rightarrow Es existiert Umkehrabbildung $f^{-1} \in S(M)$ zu f für diese gilt: $f \circ f^{-1} = id_M = f^{-1} \circ f$ das heißt f^{-1} ist immer zu f bezüglich " \circ "

3.1.6 Permutationen

$n \in \mathbb{N}$

$$S_n := S(\{1, \dots, n\}) = \{\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \pi \text{ ist bijektiv}\}$$

(S_n, \circ) heißt die symmetrische Gruppe auf n Ziffern, Elemente aus S_n heißen Permutationen. Wir schreiben Permutationen $\pi \in S_n$ in der Form:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Beispiel In S_3 ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

das heißt (S_3, \circ) ist nicht abelsch.

3.1.7 Restklassen

Motivation Im täglichen Leben verwendet man zur Bestimmung von Uhrzeiten das Rechnen "modulo 24", zum Beispiel 22Uhr + 7h = 5Uhr. Wir wollen dies mathematisch präzisieren und verallgemeinern

Bemerkung 5.17 $n \in \mathbb{N}$. Dann ist durch

$$a \sim b \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = qn$$

eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} gegeben. Anstelle von $a \sim b$ schreiben wir auch $a \equiv b \pmod{n}$ (" n ist kongruent b modulo n ") Die Äquivalenzklasse von $a \in \mathbb{Z}$ ist durch

$$\bar{a} := \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\} = a + n\mathbb{Z} := \{a + nq \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

gegeben und heißt die Restklasse von a modulo n . Die Menge aller Restklassen modulo n wird $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ bezeichnet ("ℤ modulo $n\mathbb{Z}$ ") Es ist:

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

und die Restklassen $\bar{0}, \dots, \overline{n-1}$ sind paarweise verschieden

Beweis

1. " \equiv " ist eine Äquivalenzrelation, denn:

- " \equiv " ist reflexiv: Für $a \in \mathbb{Z}$ ist $a \equiv a \pmod{n}$ denn $a - a = 0 = 0n$
- " \equiv " ist symmetrisch: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = qn \Rightarrow b - a = (-q)n \Rightarrow b \equiv a \pmod{n}$
- " \equiv " ist transitiv: Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \pmod{n}, b \equiv c \pmod{n}$
 - $\Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a - b = q_1n, b - c = q_2n$
 - $\Rightarrow a - c = (a - b) + (b - c) = q_1n + q_2n = (q_1 + q_2)n \Rightarrow a \equiv c \pmod{n}$

2. Die Äquivalenzklasse von $a \in \mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{n}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : b - a = qn\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : b = a + qn\} \\ &= a + n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.

$$\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

denn:

- Ist $a \in \mathbb{Z}$ beliebig, dann liefert Division mit Rest durch n :
Es gibt $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = qn + r, 0 \leq r < n$

$$\Rightarrow a - r = qn \Rightarrow q \equiv r \pmod{n} \Rightarrow \bar{a} = \bar{r}$$

Das heißt: Jede Restklasse ist von der Form \bar{r} mit $r \in \{0, \dots, n-1\}$

- Die Restklassen $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}$ sind paarweise verschieden denn:
Seien $a, b \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = qn \Rightarrow |a - b| = |q|n$.
 - Wäre $q \neq 0$, dann $|q| \geq 1$ wegen $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |a - b| \geq n$ **Widerspruch** zu $a, b \in \{0, \dots, n-1\}$
Also: $q = 0$ das heißt $a = b$

Beispiel $n = 3 : a \equiv b \pmod{3} \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = 3q$

zum Beispiel: $11 \equiv 5 \pmod{3}$, denn $11 - 5 = 6 = 2 \cdot 3$

zum Beispiel: $7 \not\equiv 2 \pmod{3}$, denn $7 - 2 = 5$ und es gibt kein $q \in \mathbb{Z}$ mit $5 = 3q$

$$\bar{0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \pmod{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a = 3q\} = 3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 1 \pmod{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a - 1 = 3q\} = 1 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 2 \pmod{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a - 2 = 3q\} = 2 + 3\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

$$\bar{3} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv 3 \pmod{3}\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a - 3 = 3q\} = \{a \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} : a = 3(q+1)\} = 3\mathbb{Z} = \bar{0}$$

$$\bar{4} = \bar{1}, \bar{5} = \bar{2}, \bar{-1} = \bar{2}$$

Bemerkung 5.18 $n \in \mathbb{N}$ wir definieren eine Verknüpfung (Addition) auf $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ wie folgt:

Für $\bar{a}, \bar{b} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ setzen wir $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ Dann gilt $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$ ist eine abelsche Gruppe

Beweis

1. Die Verknüpfung ist wohldefiniert:

Problem: Die Addition verwendet Vertreter von Restklassen. Es ist zum Beispiel in $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} : \bar{3} + \bar{4} = \overline{3 + 4} = \bar{7} = \bar{2}$, aber man könnte auch Rechnen: $\bar{3} + \bar{4} = \bar{8} + \bar{9} = \overline{8 + 9} = \bar{17} = \bar{2}$

Wir müssen nachweisen, dass die Wahl der Vertreter keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, das heißt die Verknüpfung ist "vertreter unabhängig":

Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, \bar{a}_1 = \bar{a}_2, \bar{b}_1 = \bar{b}_2$

$$\Rightarrow a_1 \equiv a_2 \pmod{n}, b_1 \equiv b_2 \pmod{n} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} : a_1 - a_2 = q_1 n, b_1 - b_2 = q_2 n \quad (5)$$

$$\Rightarrow (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = q_1 n + q_2 n = (q_1 + q_2)n \quad (6)$$

$$\Rightarrow a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{n} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2} \quad (8)$$

2. $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})$ ist eine abelsche Gruppe:

- Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ist

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \overline{a + b} + \bar{c} = \overline{(a + b) + c} = \overline{a + (b + c)} = \bar{a} + \overline{b + c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$$

- $\bar{0}$ ist neutrales Element, denn $\forall a \in \mathbb{Z} : \bar{0} + \bar{a} = \overline{0 + a} = \bar{a} = \bar{a} + \bar{0}$
- Für $a \in \mathbb{Z}$ ist $\overline{-a}$ das inverse Element zu \bar{a} , denn $\bar{a} + \overline{-a} = \overline{a + (-a)} = \bar{0} = \overline{-a} + \bar{a}$
- Kommutativgesetz: $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} = \overline{b + a} = \bar{b} + \bar{a}$

Beispiel Wir tragen die Ergebnisse der Verknüpfung "+" in einer Verknüpfungstafel zusammen: $n = 3$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$n = 4$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

3.1.8 Gruppenhomomorphismus

$(G, +), (H, \otimes), \varphi : G \rightarrow H$ Abbildung

φ heißt ein Gruppenhomomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \forall a, b, c \in G : \varphi(a * b) = \varphi(a) \otimes \varphi(b)$

φ heißt ein Gruppenisomorphismus $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \varphi$ ist bijektiver Gruppenhomomorphismus

Beispiel

1. $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto 2a$ ist Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$ denn:

$$\varphi(a + b) = 2(a + b) = 2a + 2b = \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

φ ist aber kein Gruppenisomorphismus, denn φ ist nicht surjektiv ($1 \notin \varphi = \varphi\mathbb{Z}$)

2. $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, a \mapsto \bar{a}$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$, denn

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \varphi(a + b) = \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} = \varphi(a) + \varphi(b)$$

φ ist kein Gruppenisomorphismus, denn φ ist nicht injektiv ($\varphi(0) = \bar{0} = \bar{n} = \varphi(n)$, aber $0 \neq n$)

3. $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto a + 1$ ist kein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$, denn

$$\varphi(2 + 6) = \varphi(8) = 9, \text{ aber } \varphi(2) + \varphi(6) = 3 + 7 = 10$$

4. $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \exp x = e^x$ ist ein Gruppenisomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$, denn:

•

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

- \exp ist bijektiv (vgl. Ana1 - Vorlesung)

Bemerkung 5.23 $(G, *)$, (H, \otimes) Gruppen mit neutralen Elementen e_G beziehungsweise e_H , $\varphi : G \rightarrow H$ Gruppenhomomorphismus. Dann gilt

1. $\varphi(e_G) = e_H$
2. $\forall a \in G : \varphi(a') = \varphi(a)'$ (Hierbei ist ' das Inverse)
3. Ist φ Gruppenisomorphismus, dann gilt $\varphi^{-1} : H \rightarrow G$ ebenfalls Gruppenisomorphismus

$(G, *)$, (H, \otimes) heißen isomorph $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Es existiert ein Gruppenisomorphismus $\phi : G \rightarrow H$
Wir schreiben dann $(G, *) \cong (H, \otimes)$

Beweis

1. Es $e_H \otimes \varphi(e_G) = \varphi(e_G) = \varphi(e_G * e_G) = \varphi(e_G) \otimes (e_G) \Rightarrow e_H = \varphi(e_G)$
2. Sei $a \in G$ Dann ist $e_H = \varphi(e_G) = \varphi(a * a') = \varphi(a) \otimes (a') \Rightarrow \varphi(a') = \varphi(a)'$
3. φ^{-1} ist bijektiv, noch zu zeigen: φ^{-1} ist ein Gruppemorphismus, das heißt

$$\varphi^{-1}(c \otimes d) = \varphi^{-1}(c) * \varphi^{-1}(d) \forall c, d \in H$$

Seien $c, d \in H$ Weil φ bijektiv: $\exists a, b \in G : \varphi(a) = c, \varphi(b) = d$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(c \otimes d) = \varphi^{-1}(\varphi(a) * \varphi(b)) = \varphi^{-1}(\varphi(a * b)) = a * b = \varphi^{-1}(c) * \varphi^{-1}(d) \square$$

3.2 Ring

Ein Ring ist ein Tupel $(R, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge R und 2 Verknüpfungen:

- $+: R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a + b$ genannt Addition
- $\cdot: R \times R \rightarrow R, (a, b) \mapsto a \cdot b$ genannt Multiplikation

welche den folgenden Bedingungen genügen

- (R1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- (R2) (R, \cdot) ist ein Monoid
- (R3) Es gelten die Distributivgesetze, das heißt

$$\forall a, b, c \in R : a \cdot (a + b) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ein Ring heißt **kommutativ** $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ die Multiplikation ist kommutativ, das heißt $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$

3.2.1 Anmerkung

- ohne Klammerung gilt die Konvention "•" vor "+", "•" wird häufig weggelassen
- das neutrale Element bezüglich "+" bezeichnen wir mit 0_R (Nullelement), das neutrale Element bezüglich "•" mit 1_R (Einselement). Das zu $a \in R$ bezüglich "+" inverse Element bezeichnen wir mit $-a$, für $a + (-b)$ schreiben wir $a - b$. Existiert zu $a \in R$ ein Inverses bezüglich "•", so bezeichnen wir dieses mit a^{-1}
- Wir schreiben häufig verkürzend " R Ring" statt " $(R, +, \cdot)$ Ring"
- In der Literatur wird gelegentlich die Forderung der Existenz eines neutralen Elements bezüglich "•" weggelassen, "unser" Ringbegriff entspricht dort dem Begriff "Ring mit Eins"

3.2.2 Beispiel

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring
2. Nullring $(\{0\}, +, \cdot)$ mit $0 + 0 = 0, 0 \cdot 0 = 0$ ist ein kommutativer Ring (hier ist Nullelement = Einselement = 0). Wir bezeichnen den Nullring kurz mit 0.

3.2.3 Bemerkung 6.3

R Ring. Dann gilt:

1. $0_R \cdot a = 0_R = a \cdot 0_R \forall a \in R$
2. $a \cdot (-a) = -ab = (-a) \cdot b \forall a, b \in R$
3. Ist $R \neq 0$, dann ist $1_R \neq 0_R$

Beweis

1. $0_R + 0_R \cdot a = 0_R \cdot a = (0_R + 0_R) \cdot a = 0_R \cdot a + 0_R \cdot \xrightarrow{\text{"kürzen s. [[Bemerkung 5.11]]"}} 0_R = 0_R \cdot a,$
 $a \cdot 0_R = 0_R$ analog
2. $0_R = 0_R \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b \Rightarrow [[\text{Bemerkung 5.11}]] - ab = (-a) \cdot b,$
 $a \cdot (-b) = -ab$ analog
3. Beweis durch Kontraposition: Sei $1_R = 0_R$

$$\Rightarrow \forall a \in R : a = a \cdot 1_R = a \cdot 0_R = 0_R$$

das heißt $R = 0$

□

3.2.4 Bemerkung 6.4

$n \in \mathbb{N}$ Für $\bar{a}, \bar{b} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ setzen wir $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}, \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$, dann ist $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring.

Wenn wir ab jetzt vom Ring $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ sprechen, dann meinen wir $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ mit den obigen Verknüpfungen

Beweis

1. Multiplikation ist wohldefiniert (das heißt "vertreterunabhängig", vergleiche 3.1.7)

Sei $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{a}_1 = \bar{a}_2, \bar{b}_1 = \bar{b}_2$

$$\Rightarrow a_1 \equiv a_2 \pmod{n}, b_1 \equiv b_2 \pmod{n} \quad (9)$$

$$\Rightarrow \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z} : a_1 - a_2 = q_1 n, b_1 - b_2 = q_2 n \quad (10)$$

$$\Rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_2 = a_1(b_1 - b_2) + b_2(a_1 - a_2) = a_1 q_2 n + b_2 q_1 n = (a_1 q_2 + b_2 q_1) n \quad (11)$$

$$\Rightarrow a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{n} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \overline{a_1 b_1} = \overline{a_2 b_2} \quad (13)$$

2. Multiplikation ist assoziativ, Für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ist

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{b \cdot c} = \overline{a \cdot (b \cdot c)} = \overline{(a \cdot b) \cdot c} = \overline{a \cdot b} \cdot \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

3. Existenz eines Einselements: $\forall a \in \mathbb{Z} : \bar{1} \cdot \bar{a} = \overline{1 \cdot a} = \bar{a} = \bar{a} \cdot \bar{1}$

4. Multiplikation ist kommutativ:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} = \overline{b \cdot a} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

5. $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$ ist abelsche Gruppe nach 3.1.7

6. Distributivgesetz:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \overline{b + c} \quad (14)$$

$$= \overline{a \cdot (b + c)} \quad (15)$$

$$= \overline{a \cdot b + a \cdot c} \quad (16)$$

$$= \overline{a \cdot b} + \overline{a \cdot c} = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} \quad (17)$$

$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}$ folgt wegen Kommutativität der Multiplikation

Beispiel 6.5 Verknüpfungstabeln für $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ $n = 3$:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$n = 4$:

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

In $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ist $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$, aber $\bar{2} \neq \bar{0}$.

3.2.5 Integritätsbereich

ist ein kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ mit $R \neq 0$, in dem gilt:

$$\forall a, b \in R : a \cdot b = 0_R \Rightarrow a = 0_R \vee b = 0_R$$

beziehungsweise äquivalent dazu:

$$a \neq 0_R \wedge b \neq 0_R \Rightarrow a \cdot b \neq 0_R$$

Beispiel 6.7

- $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ ist ein Integritätsbereich, $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ ist kein Integritätsbereich, denn $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$, aber $\bar{2} \neq \bar{0}$

Bemerkung 6.8 $n \in \mathbb{N}$ Dann sind äquivalent

1. $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ist ein Integritätsbereich
2. n ist eine Primzahl

Beweis $1 \Rightarrow 2$ zeigen wir durch Kontraposition, das heißt $2 \Rightarrow 1$
 Sei $n \in \mathbb{N}$ keine Primzahl. Falls $n = 1$ dann ist $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0}\}$ (Nullring), das heißt $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ist kein Integritätsbereich. Seien im Folgenden $n > 1$ und keine Primzahl.

$$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N} : 1 < a, b < n \wedge n = a \cdot b \quad (18)$$

$$\Rightarrow \bar{0} = \bar{n} = \overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (19)$$

und es ist $\bar{a} \cdot \bar{b} \neq \bar{0} \Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ kein Integrationsbereich.

$2 \Rightarrow 1$: Seien n eine Primzahl $\Rightarrow n > 1$, insbesondere $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \neq 0$. Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : ab = qn$$

Da n Primzahl, kommt n in der Primfaktorzerlegung von ab als Primfaktor vor

$\Rightarrow n$ kommt in der Primfaktorzerlegung von a oder b als Primfaktor vor

$$\Rightarrow n \mid a \vee n \mid b \Rightarrow \bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0}$$

3.3 Körper

Ein Körper ist ein kommutativer Ring $(K, +, \cdot)$, in dem gilt $K \neq 0$ und jedes Element $a \in K, a \neq 0$ besitzt ein Inverses in K bezüglich „ \cdot “, das heißt: $\exists b \in K : a \cdot b = 1_K$. Wir setzen $K^* := K \setminus \{0\}$

3.3.1 Beispiel

1. $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind Körper (mit den üblichen $+, \cdot$)
2. $\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}$ ist ein Körper (betrachte Verknüpfungstafel)
3. $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ ist ein kein Körper: Das Element $\bar{2}$ besitzt kein Inverses bezüglich „ \cdot “

3.3.2 Bemerkung 6.11

K Körper, Dann gilt:

1. $0_K \neq 1_K$
2. K ist ein Integritätsbereich
3. (K^*, \cdot) ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1_K

Beweis

1. folgt aus 3.2.3
2. $K \neq 0$ nach Definition. Seien $a, b \in K$ mit $ab = 0_K$. Falls $a \neq 0_K$ dann

$$b = 1_K \cdot b = (a^{-1}a) \cdot b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0_K = 0_K$$

Insebesondere gilt: $a = 0 \vee b = 0$

3. $K^* \times K^* \rightarrow K^*$ ist wohldefiniert nach 2 (aus $a, b \in K^*$ folgt $ab \in K^*$)
 Da (K, \cdot) abelscher Monoid mit neutralem Element 1_K ist auch (K^*, \cdot) abelscher Monoid mit neutralem Element 1_K . Nach 3.3 besitzt jedes Element $a \in K^*$ ein Inverses $b \in K$ mit $ab = 1_K$. Wegen $0_K \neq 1_K$ ist $b \neq 0_K$ (sonst $ab = a \cdot 0_K = 0_K \neq 1_K$), das heißt $b \in K^*$ \square

3.3.3 Bemerkung 6.12

R Integritätsbereich, der nur endlich viele Elemente hat. Dann ist R ein Körper.

Beweis R Integritätsbereich $\Rightarrow R \neq 0$

Noch zu zeigen: $a \in R \setminus \{0_R\} \Rightarrow \exists b \in R : ab = 1_R$ Sei $a \in R \setminus \{0_R\}$. Wir betrachten die Abbildung $\varphi_a : R \rightarrow R, x \mapsto ax$

1. Behauptung: φ_a ist injektiv, denn:

Seien $x, y \in R$ mit

$$\varphi_a(x) = \varphi_a(y) \Rightarrow ax = ay \Rightarrow ax + (-(ay)) = 0_R \quad (20)$$

Mit [[Bemerkung 6.3]] folgt:

$$\Rightarrow ax + a(-y) = -R \Rightarrow a(x - y) = 0_R \quad (21)$$

Aus R Integrationsbereich und $a \neq 0$ folgt:

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y \quad (22)$$

2. Da R endlich ist und φ_a injektiv ist, ist φ_a nach 2.6.7 surjektiv

$$\Rightarrow \exists b \in R : \varphi_a(b) = 1_R \Rightarrow ab = 1_R$$

3.3.4 Folgerung 6.13

$n \in \mathbb{N}$ Dann sind äquivalent

1. $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ ist ein Körper
2. n ist eine Primzahl

Beweis $1 \Rightarrow 2$ durch Kontraposition: $\neq 2 \Rightarrow 1$

Sei n keine Primzahl $\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ kein Integritätsbereich $\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ kein Körper

$2 \Rightarrow 1$ Sei n eine Primzahl $\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ Integritätsbereich, der nur endlich viele Elemente hat $\Rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ Körper

Notation p Primzahl. Man nennt $\mathbb{F}_p := \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ auch den endlichen Körper mit p Elemente

3.3.5 Definition 6.14

R Ring

$$\text{char}(R) := \begin{cases} 0 & \sum_{k=1}^n 1_R \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{k=1}^n 1_R = 0_R\} & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt die Charakteristik von R

Beispiel 1.

1. $\text{char}(\mathbb{Z}) = \text{char}(\mathbb{Q}) = \text{char}(\mathbb{R}) = 0$
2. $\text{char}(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}) = n$, denn $\sum_{k=1}^n \bar{1} = \bar{n} = \bar{0}$ und $\sum_{k=1}^m \bar{1} = \bar{m} \neq \bar{0}$ für $m \in \{1, \dots, n-1\}$

Bemerkung 1. R Integritätsbereich. Dann ist $\text{char}(R) = 0$ oder $\text{char}(R)$ ist eine Primzahl

Beweis. Beweis durch Widerspruch. Annahme: $\text{char}(R) \neq 0$ und $\text{char}(R)$ ist keine Primzahl.

Da R Integritätsbereich ist ist $1_R \neq 0_R$ also $\text{char}(R) \neq 1$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}, 1 < a, b < \text{char}(R) : \text{char}(R) = ab \\ &\Rightarrow 0_R = \sum_{k=1}^{\text{char}(R)} 1_R = \sum_{k=1}^a 1_R \cdot \sum_{k=1}^b 1_R \\ &\xrightarrow{R \text{ Integritätsbereich}} \sum_{k=1}^a 1_R = 0_R \vee \sum_{k=1}^b 1_R = 0_R \\ &\Rightarrow \text{char}(R) \leq a \vee \text{char}(R) \leq b \text{ zu } a, b < \text{char}(R) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 2. K Körper, dann ist $\text{char}(K) = 0$ oder $\text{char}(K)$ ist Primzahl.

Beweis. Folgt aus 1 und 3.3.2 \square

Beispiel 2. p Primzahl, dann ist $\text{char}(\mathbb{F}_p) = p$

4 Polynome

Definition 1 7.1 Polynome. K Körper, ein Polynom in der Variablen t über K ist ein Ausdruck der Form

$$f = \sum_{k=0}^n a_k t^k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ (das heißt insbesondere nur endliche Summanden), $a_0, \dots, a_n \in K$ (fehlende $a = 0$, ebenso setzen wir $a_{k>n} = 0$). Die a_k heißen die Koeffizienten von f

$$\deg(f) := \begin{cases} -\infty & f = 0 \\ \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid a_k \neq 0\} & f \neq 0 \end{cases}$$

heißt Grad von f . für $f \neq 0$ heißt $l(f) := a_{\deg(f)}$ heißt der Leitkoeffizient von f , $l(0) := 0$.
 f heißt normiert $\stackrel{\text{Def}}{\iff} l(f) = 1$ Hierbei sind zwei Polynome $f = \sum_{k=0}^n a_k t^k, g = \sum_{k=0}^m b_k t^k$
 gleich ($f = g$) $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \deg(f) = \deg(g) =: r$ und $a_r = b_r, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$

Bemerkung 3. Man kann das auch präzise machen (Algebra 1, WS15/16, Blatt 5, Aufgabe 3)

Beispiel 3 7.2.

$$1. f = \frac{3}{4}x^2 - 7x + \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow \deg(f) = 2, l(f) = \frac{3}{4}, f \text{ ist nicht normiert}$$

$$2. f = x^5 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{5} \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow \deg(f) = 5, l(f) = 1, f \text{ ist normiert}$$

Bemerkung 4 7.3. K Körper, $f, g \in K[t], f = \sum_{k=0}^n a_k t^k, g = \sum_{k=0}^m b_k t^k$. Wir setzen $r := \max\{m, n\}$ und definieren

$$\begin{aligned} f + g &= (a_r + b_r)t^r + \dots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) \\ f \cdot g &= c_{n+m}t^{n+m} + \dots + c_1t + c_0, c_k := \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ i+j=k}} a_i b_j \end{aligned}$$

Mittels der Verknüpfung $+, \cdot$ wird die Menge aller Polynome über K in der Variablen t ($=: K[t]$) zu einem kommutativen Ring, dem Polynomring über K in der Variablen t

Beweis. Man rechnet die Ringaxiome nach □

Bemerkung 5 7.4. K Körper, $f, g \in K[t]$, Dann gilt:

1. $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$
2. $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$

(Hierbei setzt man Formel für $n \in \mathbb{N}_0 : -\infty < n, n + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + n, (-\infty) + -(\infty) = -\infty$)

Beweis. Falls $f = 0$ oder $g = 0$, dann sind 1. und 2. klar. Im Folgenden seien $f, g \neq 0$, etwa $f = \sum_{k=0}^n a_k t^k, g = \sum_{k=0}^m b_k t^k$ mit $a_n, b_m \neq 0$ (insbesondere $\deg(f) = n, \deg(g) = m$)

1. Wir setzen $k := \max\{m, n\}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f + g = (a_k + b_k)t^k + \dots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) \\ &\Rightarrow \deg(f + g) \leq k \quad (\text{beachte: Es könnte } a_k + b_k = 0 \text{ sein}) \end{aligned}$$

2. Es sei $fg = a_n b_m t^{n+m} + \dots + a_0 b_0$ und es ist $a_n b_m \neq 0$ da K als Körper ein Integritätsbereich ist $\Rightarrow \deg(fg) = n + m$

□

Folgerung 1 7.5. K Körper, dann ist $K[t]$ ein Integritätsbereich

Beweis. $K[t] \neq 0$ klar (zum Beispiel $t \in \approx$) Seien $f, g \in K[t], f, g \neq 0 \Rightarrow \deg(f), \deg(g) \geq 0 \Rightarrow \deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \geq 0 \Rightarrow fg \neq 0$ \square

Bemerkung 6. $K[t]$ ist kein Körper: Das Polynom $t \in K[t]$ besitzt kein Inverses bezüglich „ \cdot “, denn:

Wäre $f \in K[t]$ invers zu t , dann wäre $ft = 1 \Rightarrow \deg(1) = 0 \deg(ft) = \deg(f) + \deg(t) = \deg(f) + 1 \Rightarrow \deg(f) = -1$ \nexists

Satz 1 7.6 Polynomdivision. K Körper, $f, g \in K[t], g \neq 0$

Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$, mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$

Beispiel 4 7.7. $f = 3t^3 + 5t + 1, g = t^2 + 1 \in \mathbb{Q}[t]$

$$(3t^3 + 5t + 1) : (t^2 + 1) = 3t$$

Also $3t^3 + 5t + 1 = 3t(t^2 + 1) + 2t + 1, q = 3t, r = 2t + 1$

Beweis. 1. Existenz:

Falls $f = 0$, setzen wir $q := 0, r := 0$ fertig.

Im Folgenden sei $f \neq 0$, das Polynom g sei fixiert. Wir zeigen die Existenz von q, r per Induktion nach $\deg(f) \in \mathbb{N}_0$

- Induktionsanfang: (etwas unkonventionell, geht aber auch): $\deg(f) \in \{0, \dots, \deg(g) - 1\}$ (das heißt $\deg(f) < \deg(g)$)
Setze $q := 0, r := f$, dann ist $f = qg + r, \deg(r) = \deg(f) < \deg(g)$.
- Induktionsschritt: Es sei $\deg(f) \geq \deg(g)$ und die Behauptung sei für alle Polynome aus $K[t]$ von Grad $< \deg(f)$ schon gezeigt.
Wir setzen $n := \deg(f), m := \deg(g)$ und schreiben:

$$f = l(f)t^n + \text{Terme kleineren Grades}$$

$$g = l(g)t^m + \text{Terme kleineren Grades}$$

$$\text{Es ist } f - \frac{l(f)}{l(g)}t^{n-m}g =$$

$$l(f)t^n + \text{Terme kleineren Grades} - \underbrace{\frac{l(f)}{l(g)}t^{n-m}l(g)t^m}_{l(f)t^n} + \text{Terme kleineren Grades}$$

$$\Rightarrow \deg(f - \frac{l(f)}{l(g)}t^{n-m}g) < n$$

Nach Induktionsannahme gilt: Es existiert $q_1, r_1 \in K[t]$ mit

$$f - \frac{l(f)}{l(g)}t^{n-m}g = q_1g + r_1, \text{ mit } \deg r_1 < \deg(g)$$

$$\rightarrow f = (q_1 + \frac{l(f)}{l(g)}t^{n-1})g + r_1$$

Setze $q := q_1 + \frac{l(f)}{l(g)}t^{n-1}$, $r := r_1$, dann ist $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$

2. Eindeutigkeit: Seien $q_1, q_2, r_1, r_2 \in K[t]$ mit $f = q_1g + r_1 + q_2g + r_2$ und $\deg(r_1) < \deg(g)$, $\deg(r_2) < \deg(g)$

$$\Rightarrow (q_1 - q_2)g = r_2 - r_1$$

$$\Rightarrow \deg(q_1 - q_2) + \deg(g) = \deg(r_2 - r_1)$$

Falls $q_1 \neq q_2$, dann sind beide Seiten der Gleichung in \mathbb{N}_0 und es wäre

$$\deg(g) \leq \deg(r_2 - r_1)$$

Nach 5 ist $\deg(r_2 - r_1) \leq \max\{\deg(r_2), \deg(-r_1)\} < \deg(g)$ Also $q_1 = q_2$, somit $r_2 - r_1 = \underbrace{q_1 - q_2}_{=0}g = 0$, also $r_1 = r_2$

□

Definition 2 7.8, Nullstelle. $\in K[t], f = a_nt^n + \dots + a_1t + a_0, \lambda \in K$

Wir setzen $f(\lambda) := a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 \in K$ λ heißt Nullstelle von $f \xLeftrightarrow{Def.} f(\lambda) = 0$

Bemerkung 7 7.9. K Körper, $f \in K[t], \lambda \in K$ Nullstelle von f . Dann gibt es in $K[t]$ ein eindeutig bestimmtes Polynom q mit $f = (t - \lambda)q$. Es ist $\deg(q) = \deg(f) - 1$

Beweis. Existenz: Nach 1 existiert $q, r \in K[t]$ mit $f = (t - \lambda)q + r$ und $\deg(r) < \deg(t - \lambda)$

$\Rightarrow r$ ist konstantes Polynom und es gilt

$$0 = f(\lambda) = \underbrace{(\lambda - \lambda)}_{=0}q + r(\lambda) = r(\lambda) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow f = (t - \lambda)q$$

Eindeutigkeit: aus Eindeutigkeit aus 1

□

Folgerung 2. K Körper, $f \in K[t], f \neq 0, n := \deg(f)$

Dann besitzt f in K höchstens n Nullstellen.

Beweis. per Induktion nach n **Induktionsanfang:** $n = 0$ Ein konstantes Polynom $\neq 0$ besitzt keine Nullstellen.

Induktionsschritt: Es sein $n > 0$ und die Aussage sei für alle Polynome von Grad $< n$ schon gezeigt. Falls f keine Nullstelle besitzt, dann fertig. Im Folgenden besitze f eine Nullstelle sei $\lambda \in K$ eine solche, daraus folgt mit ??

$$\exists q \in K[t] : f(t - \lambda)q, \deg q = n - 1$$

Ist $\varepsilon \neq \lambda$ eine weitere Nullstelle von f dann ist

$$0 = f(\varepsilon) = \underbrace{\varepsilon - \lambda}_{\neq 0} q(\varepsilon)$$

Da K als Körper ein Integritätsbereich ist folgt: $q(\varepsilon) = 0$, das heißt ε ist Nullstelle von q . Nach Induktionsvoraussetzung hat q höchstens $n - 1$ Nullstellen $\Rightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen \square

Definition 3 7.11. K Körper, $f \in K[t], f \neq 0, \lambda \in K$

$$\mu(f, \lambda) := \max\{e \in \mathbb{N}_0 \mid \exists g \in K[t] : f = (t - \lambda)^e g\}$$

heißt die Vielfachheit der Nullstelle λ von f .

Bemerkung 8. • Es ist $\mu(f, \lambda) = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) \neq 0$ keine Nullstelle von f (denn: $f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists q \in K[t] : f = (t - \lambda)q \Leftrightarrow \mu(f, \lambda) \neq 0$)

- Die Vielfachheit von λ gibt an, wie oft der Linearfaktor $t - \lambda$ in f vorkommt
- Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ sämtliche verschiedene Nullstellen von f und es ist $e_i := \mu(f, \lambda_i), i = 1, \dots, m$ dann existiert ein Polynom $g \in K[t]$ mit

$$f = (t - \lambda_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)^{e_m} g$$

und den Eigenschaften, dass g in K keine Nullstelle besitzt und, dass $\deg(g) = \deg(f) - (e_1 + \dots + e_m)$.

- "bester Fall:" $\deg(g) = 0$ (" f zerfällt in Linearfaktoren"): Dann existiert $a \in K \setminus \{0\}, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ paarweise verschieden, $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{N}$ mit

$$f = a(t - \lambda_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_m)^{e_m}, e_1 + \dots + e_m = \deg(f)$$

Alternative Darstellung:

$$f = a(t - \tilde{\lambda}_1) \cdot \dots \cdot (t - \tilde{\lambda}_n), n = \deg(f), \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n \text{ nicht notwendig verschieden}$$

Satz 2 7.12 Fundamentalsatz der Algebra. Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) \geq 1$ besitzt eine Nullstelle.

Beweis. Zum Beispiel in Vorlesung Funktionentheorie 1, Algebra 1 \square

Folgerung 3 7.13. $f \in \mathbb{C}[t], f \neq 0$ Dann zerfällt f in Linearfaktoren.

Beweis. **Induktionsanfang:** $n = 0 \Rightarrow f$ ist konstantes Polynom, fertig

Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$ und die Aussage sei für alle Polynome vom Grad $< n$ bereits bewiesen. Nach Fundamentalsatz der Algebra existiert eine Nullstelle λ von f

$$\stackrel{7}{\Rightarrow} \exists g \in \mathbb{C}[t] : f = (t - \lambda)g, \deg(g) = n - 1$$

Nach Induktionsannahme $\exists a \in \mathbb{C}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden)

$$g = a(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_{n-1})$$

Setze $\lambda_n := \lambda \Rightarrow f = g(t - \lambda_n) = a(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_{n-1})(t - \lambda_n)$ \square

Definition 4 7.14. K Körper, $f \in K[t]$ f induziert eine Abbildung $\tilde{f} : K \rightarrow K, \lambda \rightarrow f(\lambda)$, \tilde{f} heißt die Polynomfunktion zum Polynom f

Beispiel 5 7.15. Es ist wichtig zwischen dem Polynom $f \in K[t]$ und der dazugehörigen Polynomfunktion $\tilde{f} : K \rightarrow K$ zu unterscheiden Sei $f = t^2 + t \in \mathbb{F}_2[t]$. Dann ist $f(\bar{0}) = \bar{0}^2 + \bar{0} = \bar{0}$, $f(\bar{1}) = \bar{1}^2 + \bar{1} = \bar{0}$ das heißt $\tilde{f} : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ ist die Nullabbildung, aber f ist nicht das Nullpolynom

Bemerkung 9 7.16. K Körper mit unendlich vielen Elementen.

Dann ist die Abbildung $\tilde{\cdot} : K[t] \rightarrow \text{Abb}(K, K) := \{g : K \rightarrow K \text{ Abbildung}\}, f \mapsto \tilde{f}$ injektiv, das heißt: Ist K unendlich und sind $f_1, f_2 \in K[t]$, dann gilt $f_1 = f_2 \Leftrightarrow \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$

Beweis. Es seien $f_1, f_2 \in K[t]$ mit $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ wir setzen $g := f_1 - f_2$

\Rightarrow Für alle $a \in K$ ist $g(a) = (f_1 - f_2)(a) = f_1(a) - f_2(a) = \tilde{f}_1(a) - \tilde{f}_2(a) = 0 \xrightarrow{K \text{ unendlich}} g$ hat unendlich viele Nullstellen, mit 3 folgt: $g = 0 \Rightarrow f_1 = f_2$ \square

Bemerkung 10. • Lässt man 9 die Voraussetzung K hat unendlich viele Elemente weg, wird die Aussage falsch, siehe Beispiel 5

- Mit dem Wissen von 5 und 9 im Hintergrund bezeichnet man die vom Polynom f induzierte Polynomfunktion mit \tilde{f} anstelle von f

5 Vektorräume

In diesem Kapitel sei K stets ein Körper

Definition 5 8.1. Ein K -Vektorraum ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus

- einer Menge V
- einer Verknüpfung $+: V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ (Addition)
- und einer äußeren Verknüpfung $\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ (skalare Multiplikation)

Welche folgende Bedingungen genügen:

1. (V1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe
2. (V2) Die skalare Multiplikation ist in folgender Weise mit der anderen Verknüpfung (auf V und K) verträglich:

$$\forall \lambda, \mu \in K, v, w \in V$$

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$$

$$1 \cdot v = v$$

Bemerkung 11. • Es ist wichtig, zwischen Addition "+" und skalarer Multiplikation "·" auf V und Addition und Multiplikation in K zu unterscheiden: In der Gleichung $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ sind die Verknüpfungen wie folgt zu verstehen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{skalare Multiplikation} & & \text{Addition in } V & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 (\lambda & + & \mu) & \cdot & v = \lambda & \cdot & v + \mu & \cdot & v \\
 & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & \text{Addition in } K & & & \text{skal. Mult.} & & \text{skal. Mult.} & &
 \end{array}$$

- Das neutrale Element bezüglich "+" auf V bezeichnen wir mit 0_v (Nullvektor), das inverse zu $v \in V$ bezüglich "+" mit $-v$. Das Zeichen "·" für die skalare Multiplikation lassen wir ab jetzt meistens weg und schreiben λv statt $\lambda \cdot v$ ($\forall \lambda \in K, v \in V$)
- Wir schreiben meist verkürzend "V K-Vektorraum" (beziehungsweise: "V K-VR") anstelle von $(V, +, \cdot)$ K-Vektorraum.

Beispiel 6.8.2.

1.

$$K^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$$

mit

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

$$\lambda \in K, (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in K^n$$

ist ein K-Vektorraum, der sogenannte Standardvektorraum über K . Die Axiome rechnet man nach, exemplarisch: sind $\lambda, \mu \in K, (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, dann ist

$$(\lambda + \mu) \cdot (x_1, \dots, x_n) = ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n)$$

Mit dem Distributivgesetz in K folgt:

$$(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(x_1, \dots, x_n)$$

Der Nullvektor ist gegeben durch $0_{K^n} = (0, \dots, 0)$, für $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$

2. \mathbb{C} ist ein \mathbb{R} -VK bezüglich

- $+$ = übliche Addition auf \mathbb{C}
- skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \lambda(a + ib) := \lambda a + i\lambda b$

3. $K[t]$ Polynomring über K in der Variablen t wird zum K -VR durch

- $+$ = Addition von Polynomen

- skalare Multiplikation, $\cdot: K \times K[t] \rightarrow K[t]: \lambda \cdot \sum_{k=0}^n a_k t^k := \sum_{k=0}^n \lambda a_k t^k$
4. M Menge, $\text{Abb}(M, K) := \{f: M \rightarrow K \text{ Abbildung}\}$ wird zum K -Vektorraum durch die folgende Verknüpfungen:
- Addition: Zu $f, g \in \text{Abb}(M, K)$ wird $f + g: M \rightarrow K$ definiert über

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), x \in M$$

- skalare Multiplikation: Zu $\lambda \in K, f \in \text{Abb}(M, K)$ wird $\lambda f: M \rightarrow K$ definiert über

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x), x \in M$$

(„punktweise Addition und skalare Multiplikation“)

Bemerkung 12.8.3. V K -VR. Dann gilt:

1. $0_K \cdot v = 0_V \forall v \in V$
2. $\lambda \cdot 0_V = 0_V \forall \lambda \in K$
3. $\lambda v = 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K \vee v = 0_V$
4. $(-1_K) \cdot v = -v \forall v \in V$

Beweis. 1. Sei $v \in V$

$$\Rightarrow 0_V + 0_K \cdot v = 0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = 0_K \cdot v + 0_K \cdot v \Rightarrow 0_K \cdot v = 0_V$$

2. Sei $\lambda \in K$

$$\Rightarrow \lambda \cdot 0_V + 0_V = \lambda \cdot 0_V = \lambda \cdot (0_V + 0_V) = \lambda \cdot 0_V + \lambda \cdot 0_V \Rightarrow \lambda \cdot 0_V = 0_V$$

3. Seien $\lambda \in K, v \in V, \lambda \cdot v = 0$. Falls $\lambda \neq 0_K$:

$$v = 1_K \cdot v = (\lambda^{-1} \lambda) \cdot v = \lambda^{-1} \cdot \underbrace{(\lambda v)}_{=0_V} = \lambda^{-1} \cdot 0_V = 0_V$$

4. Für $v \in V$ ist

$$v + (-1_K) \cdot v = 1_K \cdot v + (-1_K) \cdot v = (1_K + (-1_K)) \cdot v = 0_K \cdot v = 0_V \Rightarrow (-1_K) \cdot v = -v$$

□

Definition 6.8.4. V K -VR, $U \subseteq V$

U heißt Untervektorraum (K -Untervektorraum), kurz UVR von $V \xLeftrightarrow{\text{Def}}$ Die folgenden Bedingungen sind erfüllt

- (U1) $U \neq \emptyset$
- (U2) $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$ (das heißt U ist abgeschlossen bezüglich Addition)
- (U3) $v \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in U$ (das heißt U ist abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation)

Bemerkung 13 8.5. V K -VR, $U \subseteq V$

Dann sind äquivalent

1. U ist ein UVR von V
2. Addition und skalare Multiplikation auf V induzieren durch Einschränkung auf U Verknüpfung $+: U \times U \rightarrow U$, $\cdot: K \times U \rightarrow U$, und bezüglich dieser Verknüpfung ist U ein K -VR

Beweis. (1.) \Rightarrow (2.): Sei U ein UVR von V

1. Die Verknüpfung $+: U \times U \rightarrow U$, $\cdot: K \times U \rightarrow U$ sind wohldefiniert wegen (U2), (U3)
2. (V1) gilt (das heißt $(U, +)$ ist eine abelsche Gruppe), denn:
 - Assoziativgesetz, Kommutativgesetz bezüglich "+" gelten, weil sie schon in V gelten.
 - 0_V ist neutral bezüglich "+" und liegt in U , denn wegen $U \neq \emptyset$ existiert ein $u \in U$, wegen (U3) ist ann auch $\underbrace{0_K \cdot u}_{=0_V} \in U$, also $0_V \in U$
 - $-u$ ist invers zu u und liegt in U , denn: Mit $u \in U$ ist nach (U3) auch $(-1_K) \cdot u$ in U

3. (V2) gilt, da es schon in V gilt

(2.) \Rightarrow (1.) Es gelte (2.)

- (U1): $U \neq \emptyset$, denn U ist abelsche Gruppe bezüglich der eingeschränkten Addition
- (U2),(U3): folgt direkt aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung $+: U \times U \rightarrow U$, $\cdot: K \times U \rightarrow U$

□

Bemerkung 14. • der Beweis von (1.) \Rightarrow (2.) hat gezeigt: Ist $U \subseteq V$ ein UVR, dann ist $0_V \in U$

- Ab jetzt lassen wir bei 0_V beziehungsweise 0_K meist die Indizes V beziehungsweise K weg und schreiben für beide kurz 0.

Beispiel 7 8.6.

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

Es sei $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$

- (U1): $(0, 0) \in U$ also $U \neq \emptyset$
- (U2): Es seien $(x_1, x_2) \in U, (y_1, y_2) \in U \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0, y_1 - 2y_2 = 0$
 $\Rightarrow (x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in U$
- (U3): Sei $(x_1, x_2) \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \lambda x_1 - 2\lambda x_2 = 0$

$$(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda(x_1, x_2) \in U$$

Also: U ist ein UVR von $V = \mathbb{R}^2$

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}$

Es sei $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 1\}$

Es ist $(0, 0) (= 0_V) \notin U \Rightarrow U$ ist kein UVR von $V = \mathbb{R}^2$

3. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^{\neq}$

Es sei $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0\}$

U ist kein UVR von V , denn: $(5, 2) \in U$, aber $(-1) \cdot (5, 2) = (-5, -2) \notin U$

4. $V = K[t]$

Es sei $U = \{f \in K[t] \mid \deg f \leq 2\} = \{f \in K[t] \mid \exists a_0, a_1, a_2 \in K : f = a_2 t^2 + a_1 t + a_0\}$

- (U1): $0 \in U$, also $U \neq \emptyset$
- (U2): Es seien $f, g \in U \Rightarrow \deg(f) \leq 2, \deg(g) \leq 2 \Rightarrow \deg(f + g) \leq 2 \Rightarrow f + g \in U$
- (U3): Es sei $f \in U, \lambda \in K \Rightarrow \deg(f) \leq 2 \Rightarrow \deg(\lambda f) \leq 2 \Rightarrow \lambda f \in U$

Also U ist ein UVR von V

5. V K-VR. Dann sind $\{0\}, V$ UVR von V ("triviale UVR"), $\{0\}$ heißt Nullvektorraum (Nullraum)

Bemerkung 15 8.7. V K-VR, I Indexmenge, $(U_i)_{i \in I}$ Familie von UVR von V (das heißt für jedes $i \in I$ ist ein UVR U_i von V gegeben) Dann gilt:

$$U := \bigcap_{i \in I} U_i$$

ist ein UVR von V . Mit anderen Worten: der Durchschnitt von UVRen von V ist wieder ein UVR von V

Beweis. 1. (U1): $U \neq \emptyset$, denn $0 \in U_i \forall i \in I$, also $0 \in U$

2. (U2): Seien $v, w \in U \Rightarrow \forall i \in I : v \in U_i, w \in U_i \Rightarrow \forall i \in I : v+w \in U_i \Rightarrow v+w \in U$
3. (U3): Sei $v \in U, \lambda \in K \Rightarrow \forall i \in I : v \in U_i \Rightarrow \forall i \in I : \lambda v \in U_i \Rightarrow \lambda v \in \bigcap_{i \in I} U_i = U$ \square

Beispiel 8 8.8. Die Vereinigung von UVR ist im Allgemeinen kein UVR, zum Beispiel $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

- $U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$
- $U_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 = x_2\}$

Aber: $U_1 \cup U_2$ ist kein UVR von \mathbb{R}^2 , denn

$$(1, 1) \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2, (2, 4) \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$$

aber: $(1, 1) + (2, 4) = (3, 5) \notin U_1 \cup U_2$

Definition 7 8.9. V K-VR, (v_1, \dots, v_r) endliche Familie von Vektoren aus V

$$\text{Lin}((v_1, \dots, v_r)) := \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \mid \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K\}$$

heißt die Lineare Hülle (das Erzeugnis) der Familie v_1, \dots, v_r

$v \in V$ heißt Linearkombination von v_1, \dots, v_r

$$\stackrel{\text{Def}}{\iff} v \in \text{Lin}((v_1, \dots, v_r)) \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K : v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$$

Bemerkung 16. Andere Notation für $\text{Lin} : \text{span}(\dots), \langle \dots \rangle$

Beispiel 9 8.10.

1. $V = \mathbb{R}^3, K = \mathbb{R}$

- $v \in V, v \neq 0 \Rightarrow \text{Lin}((v)) = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \text{Gerade durch } 0 \text{ und } v$
-

$$v, w \in V, v \neq 0 \Rightarrow \text{Lin}((v, w)) = \{\alpha_1 v + \alpha_2 w \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \begin{cases} \text{Gerade durch } 0 & w \in \text{Lin}((v)) \\ \text{Ebene durch } 0, v, w & w \notin \text{Lin}((v)) \end{cases}$$

2. $V = K^n$ als K-VR

$$\begin{array}{c} e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ \downarrow \\ \text{i-te Stelle} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Lin}((e_1, \dots, e_n)) &= \{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\} \\ &= \{(\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\} \\ &= \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\} \\ &= K^n \end{aligned}$$

Definition 8 8.11. V K-VR, $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V

$$\text{Lin}((v_i)_{i \in I}) := \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in K \forall i \in I, \alpha_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I \right\}$$

heißt die lineare Hülle (das Erzeugnis) der Familie $(v_i)_{i \in I}$. Hierbei bedeutet " $\alpha_i = 0$ für fast alle $i \in I$ ": Es gibt nur endlich viele $i \in I$ mit $\alpha_i \neq 0$, das heißt die auftretenden Summen sind endliche Summen. Falls $I = \emptyset$ setzen wir $\text{Lin}((v_i)_{i \in \emptyset}) := \{0\}$

Bemerkung 17. Ein Element $v \in V$ ist genau dann in $\text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ enthalten, wenn es eine endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq I$ und Elemente $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r} \in K$ gibt mit

$$v = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r} v_{i_r}$$

Insbesondere ist mit $\text{Lin}((v_i)_{i \in I}) = \bigcup_{J \subseteq I} \text{Lin}((v_i)_{i \in J})$

Beispiel 10 8.12. $V = K[t]$ als K-VR

Es ist

$$\text{Lin}((t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \alpha_i t^i \mid \alpha_i \in K, \alpha_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}_0 \right\} = K[t]$$

Bemerkung 18 8.13. V K-VR, $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V . Dann gilt:

1. $\text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ ist ein UVR von V
2. Ist $U \subseteq V$ ein UVR mit $v_i \in U \forall i \in I$, dann ist $\text{Lin}((v_i)_{i \in I}) \subseteq U$ das heißt $\text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ ist das bezüglich " \subseteq " kleinste Element der Menge derjenigen UVR von V die alle $v_i, i \in I$ enthalten
- 3.

$$\text{Lin}((v_i)_{i \in I}) = \bigcap_{U \text{ UVR von } V \text{ mit } v_i \in U \forall i \in I} U$$

Beweis. Falls $I = \emptyset$, dann $\text{Lin}((v_i)_{i \in I}) = \{0\}$, dann 1. klar, und jeder UVR U von V enthält alle $v_i, i \in \emptyset$, und enthält $\{0\} \Rightarrow$ 2. Außerdem

$$\bigcap_{U \text{ UVR von } V \text{ mit } v_i \in U \forall i \in I} U = \bigcap_{U \text{ UVR von } V} U = \{0\} = \text{Lin}((v_i)_{i \in \emptyset})$$

es folgt 3.

Im Folgenden sei $I \neq \emptyset$. Wir setzen $W := \text{Lin}((v_i)_{i \in I})$

1. • (U1): Sei $i \in I$ (Existenz wegen $I \neq \emptyset$). Dann ist $0 \cdot v_i = 0 \in W$, insbesondere $W \neq \emptyset$

- (U2): Es seien $v, w \in W$

$$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N}, \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq I, \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r} \in K, \text{ mit } v = \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r} v_{i_r}$$

sowie

$$\begin{aligned} s \in \mathbb{N}, \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq I, \beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_s} \in K, \text{ mit } w &= \beta_{j_1} v_{j_1} + \dots + \beta_{j_s} v_{j_s} \\ \Rightarrow v + w &= \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r} v_{i_r} + \beta_{j_1} v_{j_1} + \dots + \beta_{j_s} v_{j_s} \in W \end{aligned}$$

- (U3): Für $\lambda \in K, v \in W$ wie bei (U2) ist

$$\lambda v = \lambda \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda \alpha_{i_r} v_{i_r} \in W$$

2. Sei $U \subseteq V$ UVR mit $v_i \in U \forall i \in I$

\Rightarrow Jedes Element der Form $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in K \forall i \in I, \alpha_i = 0$ für fast alle $i \in I$, liegt in U . $\Rightarrow \text{Lin}((v_i)_{i \in I}) = W \subseteq U$.

3. zu zeigen:

$$\text{Lin}((v_i)_{i \in I}) = \bigcap_{U \text{ UVR von } V \text{ mit } v_i \in U \forall i \in I} U$$

" \subseteq " Wegen 2. liegt $\text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ in jedem UVR U von V , der alle $v_i, i \in I$ enthält

$$\Rightarrow \text{Lin}((v_i)_{i \in I}) = \bigcap_{U \text{ UVR von } V \text{ mit } v_i \in U \forall i \in I} U$$

" \supseteq " Nach 1. ist $W = \text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ ist ein UVR von V mit $v_i \in W \forall i \in I$, das heißt W ist einer der UVR, über die der obige Durchschnitt gebildet wird

$$\Rightarrow \bigcap_{U \text{ UVR von } V \text{ mit } v_i \in U \forall i \in I} U \subseteq W = \text{Lin}((v_i)_{i \in I})$$

□

Notation: Ist $M \subseteq V$, dann setzen wir $\text{Lin}(M) := \text{Lin}((m)_{m \in M})$ (= kleinster UVR von V , der alle Elemente aus M enthält) Vorteil der Definition von $\text{Lin}(\dots)$ für Familien von Vektoren: Bei Familien ist es sinnvoll zu sagen, dass ein Vektor mehrfach vorkommt (im Gegensatz zu Mengen), darüber hinaus haben die Vektoren der Familie $(v_i)_{i \in I}$ im wichtigen Spezialfall $I = \{1, \dots, n\}$, Familie (v_1, \dots, v_n) eine natürliche Reigenfolge. Diese geht verloren, wenn man die Menge $\{v_1, \dots, v_n\}$ betrachtet (zum Beispiel in \mathbb{R}^2 : $\{e_1, e_2\} = \{e_2, e_1\}$, aber $(e_1, e_2) \neq (e_2, e_1)$)

Definition 9 8.14. V K-VR, (v_1, \dots, v_r) endliche Familie von Vektoren aus V , (v_1, \dots, v_r) **linear unabhängig**

$$\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

Mit anderen Worten: Der Nullvektor lässt sich nur auf triviale Weise aus der Familie (v_1, \dots, v_r) linear kombinieren.

$(v_i)_{i \in I}$ heißt **linear abhängig** $\stackrel{\text{Def}}{\iff} (v_1, \dots, v_r)$ ist nicht linear unabhängig

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K : (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0) \wedge \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$$

$(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V

$(v_i)_{i \in I}$ heißt linear unabhängig $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$ Jede endliche Teilfamilie von $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig, das heißt für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ ist $(v_i)_{i \in J}$ linear unabhängig.

$(v_i)_{i \in I}$ heißt linear abhängig $\stackrel{\text{Def}}{\iff} (v_i)_{i \in I}$ ist nicht linear unabhängig

$\Leftrightarrow \exists$ eine endliche Teilfamilie $(v_i)_{i \in J}$ von $(v_i)_{i \in I}$, die linear abhängig ist

\Leftrightarrow Es gibt eine endliche Teilmenge $J = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq I, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r} \in K$ mit

$$(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}) \neq (0, \dots, 0) \wedge \lambda_{i_1} v_{i_1} + \dots + \lambda_{i_r} v_{i_r} = 0$$

$M \subseteq V$ heißt linear (un-)abhängig $\Leftrightarrow (m)_{m \in M}$ ist linear (un-)abhängig.

Bemerkung 19. • Man sagt häufig statt " (v_1, \dots, v_r) ist linear (un-)abhängig" auch "die Vektoren v_1, \dots, v_r sind linear (un-)abhängig."

• Konvention: $()$ ist linear unabhängig.

Beispiel 11 8.15.

1. $V = K^n$ als K-VR

Die Familie (e_1, \dots, e_n) (vgl 8.10) ist linear unabhängig, denn: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, dann ist

$$\underbrace{\lambda_1(1, 0, \dots, 0)}_{=(\lambda_1, 0, \dots, 0)} + \underbrace{\lambda_2(0, 1, 0, \dots, 0)}_{=(0, \lambda_2, 0, \dots, 0)} + \dots + \underbrace{\lambda_n(0, \dots, 0, 1)}_{=(0, \dots, 0, \lambda_n)} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

Die Familie $((1, -1), (0, 2), (1, 2))$ ist linearabhängig, denn:

$$2 \cdot (1, -1) + 3 \cdot (0, 2) - 2 \cdot (1, 2) = 0$$

es gibt also eine nichttriviale Linearkombination der Null aus den Vektoren dieser Familie.

3. $V = K[t]$ als K-VR

Die Familie $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist linear unabhängig, denn:

Sei $J = \{n_1, \dots, n_r\} \subseteq \mathbb{N}_0$ eine endliche Teilmenge von \mathbb{N}_0 , und sind $\lambda_{n_1}, \dots, \lambda_{n_r} \in K$ dann folgt aus

$$\lambda_{n_1} t^{n_1} + \dots + \lambda_{n_r} t^{n_r} = 0$$

sofort: $\lambda_{n_1} = \dots = \lambda_{n_r} = 0$ (vergleiche Definition von "=" von Polynomen) Also: Jede endliche Teilfamilie von $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist linear unabhängig, also ist $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ linear unabhängig.

Bemerkung 20 8.16. V K-VR, $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V
Dann sind äquivalent:

1. $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig
2. Jeder Vektor $v \in \text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ lässt sich in eindeutiger Weise aus Vektoren deren Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear kombinieren.

Beweis. 1. \Rightarrow 2.: Sei $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, $v \in \text{Lin}((v_i)_{i \in I}) \Rightarrow \exists$ eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Elementen aus K mit $\lambda_i = 0$ für fast alle $i \in I$, sodass

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

(\Rightarrow Existenz einer Linearkombination)

Es sei nun $(\mu_i)_{i \in I}$ eine weitere Familie von Elementen aus K mit $\mu_i = 0$ für fast alle $i \in I$ sodass

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$$

Wir setzen $J := \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\} \cup \{i \in I \mid \mu_i \neq 0\}$. Nach Konstruktion ist J endlich, und es ist

$$\underbrace{\sum_{i \in J} (\lambda_i - \mu_i) v_i}_{= \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) v_i} = 0$$

Da $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, ist die endliche Teilfamilie $(v_i)_{i \in J}$ linear unabhängig
 $\Rightarrow \lambda_i - \mu_i = 0 \forall i \in J \Rightarrow \lambda_i = \mu_i \forall i \in J$ für $i \in J \setminus J$ ist ohnehin $\lambda_i = \mu_i = 0$

$$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \forall i \in I$$

2. \Rightarrow 1.: Wir setzen voraus, dass sich jeder Vektor $v \in \text{Lin}((v_i)_{i \in I})$ eindeutig aus Vektoren der Familie $(v_i)_{i \in I}$ linear kombinieren lässt.

zu zeigen: $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig, das heißt jede endliche Teilfamilie $(v_i)_{i \in J}$ ist linear unabhängig denn: Sei $J \subseteq I$ endlich, und sei $(\lambda_i)_{i \in J}$ eine Familie von Elementen aus K mit

$$\sum_{i \in J} \lambda_i v_i = 0$$

Da auch

$$\sum_{i \in J} 0 \cdot v_i = 0$$

ist, folgt aus der vorausgesetzten Eindeutigkeit der Linearkombination, dass $\lambda_i = 0 \forall i \in J \Rightarrow (v_i)_{i \in J}$ ist linear unabhängig

□

Bemerkung 21 8.17. Sei V K-Vektorraum, Dann gilt:

1. Ist $v \in V$, dann gilt (v) linear unabhängig $\Leftrightarrow v \neq 0$
2. Gehört der Nullvektor zu einer Familie, dann ist sie linear abhängig
3. Kommt der gleiche Vektor in einer Familie mehrfach vor so ist sie linear abhängig
4. Ist $r \geq 2$, so gilt: Die Familie (v_1, \dots, v_r) von Vektoren aus V ist linear abhängig $\Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, r\} : v_i$ Linearkombination von $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r$

Beweis. 1. " \Rightarrow " (Durch Kontraposition): Sei $v = 0$. Dann ist $1v = 0$, das heißt (v) ist linear abhängig " \Leftarrow " (Durch Kontraposition) Sei (v) linear abhängig $\Rightarrow \exists \lambda \in K \setminus \{0\} : \lambda v = 0 \Rightarrow v = 0$

2. Wegen $1 \cdot 0_v = 0_v$ existiert in diesem Fall eine nicht triviale Linearkombination der Null.
3. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie, sodass $i_1, i_2 \in I$ existiert mit $i_1 \neq i_2$ und $v_{i_1} = v_{i_2} \Rightarrow 1 \cdot v_{i_1} + (-1) \cdot v_{i_2} = 0 \Rightarrow (v_i)_{i \in I}$ linear abhängig
4. Sei $r \geq 2, (v_1, \dots, v_r)$ Familie von Vektoren aus V
" \Rightarrow " Sei v_1, \dots, v_r linear abhängig $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K : (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq (0, \dots, 0) \wedge \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ Insbesondere existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$, mit $\lambda_i \neq 0$

$$\Rightarrow v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_i} v_r$$

" \Leftarrow " Sei $i \in \{1, \dots, r\}$, so dass

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_r v_r$$

mit geeigneten $\lambda_j \in K$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_r v_r &= 0 \\ \Rightarrow (v_1, \dots, v_r) &\text{ linear abhängig} \end{aligned}$$

□

6 Basis und Dimension

In diesem Abschnitt sei V stets ein K-VR. Sei $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V . $(v_i)_{i \in I}$ heißt **Erzeugendensystem** (ES) von V $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V = \text{Lin}((v_i)_{i \in I})$

V heißt **endlich erzeugt** $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V$ besitzt ein endliches Erzeugendensystem (das heißt es existiert eine endliche Familie (v_1, \dots, v_n) von Vektoren aus V mit $V = \text{Lin}((v_1, \dots, v_n))$)

$(v_i)_{i \in I}$ heißt **Basis** von V $\stackrel{\text{Def}}{\iff} (v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängiges Erzeugendensystem von V . Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine endliche Basis von V , dann heißt n die **Länge** von \mathcal{B} .

- Beispiel 12 9.2.* 1. Die Familie (e_1, \dots, e_n) ist eine Basis des $K\text{-VR } K^n$, da $\text{Lin}((e_1, \dots, e_n)) = K^n$ (vergleiche 8.10.2) und somit (e_1, \dots, e_n) Erzeugendensystem des K^n , und (e_1, \dots, e_n) linear unabhängig nach 8.15.1. Die Länge der Basis ist (e_1, \dots, e_n) ist n . (e_1, \dots, e_n) heißt die kanonische Basis oder Standardbasis der K^n .
2. Die Familie $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Basis der $K\text{-VR } K[t]$, denn: $\text{Lin}((t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = K[t]$ nach 8.12, $(t^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist linear unabhängig nach 8.15.3
3. $((1, -1), (0, 2), (1, 2))$ ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}\text{-VR } \mathbb{R}^2$, denn für jedes $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist $(x_1, x_2) = x_1(1, -1) + \frac{x_1+x_2}{e}(0, 2) \in \text{Lin}((1, -1), (0, 2), (1, 2))$, $((1, -1), (0, 2), (1, 2))$ ist jedoch keine Basis des \mathbb{R} , da linear abhängig nach 8.15.2
4. Die leere Familie $()$ ist eine Basis des Nullraums $\{0\}$: vergleiche 8.11 und Annahme nach 8.14

Anmerkung 1. Jeder Vektorraum V besitzt ein ES, denn es ist $V = \text{Lin}((v)_{v \in V})$

Spannende Frage: Besitzt jeder VR eine Basis?

Wir werden das zunächst für den Fall endlicher Vektorräume untersuchen

Satz 3 9.3. $V \neq \{0\}, \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ endliche Familie von Vektoren aus V , dann sind äquivalent:

1. \mathcal{B} ist eine Basis von V , das heißt eine linear unabhängiges ES von V
2. \mathcal{B} ist ein unverkürzbares ES von V , das heißt \mathcal{B} ist ein ES und für jedes $r \in \{1, \dots, n\}$ ist $(v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n)$ kein ES von V mehr.
3. Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

4. \mathcal{B} ist unverlängerbar linear unabhängig, das heißt \mathcal{B} ist linear unabhängig und für jedes $v \in V$ ist die Familie (v_1, \dots, v_n, v) linear abhängig

Beweis. Wir zeigen $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 1.$

1. \Rightarrow 2.: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $V \Rightarrow \mathcal{B}$ ist ES von V
Annahme: \mathcal{B} ist verkürzbar, das heißt es gibt ein $r \in \{1, \dots, n\}$, sodass $(v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n)$ immernoch ein ES von $V \Rightarrow v_r \in \text{Lin}((v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n))$, das heißt
$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n \in K : v_r = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1} + (-1) v_r + \lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

 $\Rightarrow \mathcal{B}$ linear abhängig \nrightarrow zu \mathcal{B} Basis von V

2. \Rightarrow 1.: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ein unverkürzbares ES von $V \Rightarrow$ Für jedes $v \in V$ existiert $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ Annahme: Es gibt $v \in V, \lambda_1, \dots, \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\lambda_i - \mu_i)v_i &= (\mu_1 - \lambda_1)v_1 + \dots + (\mu_{i-1} - \lambda_{i-1})v_{i-1} + (\mu_{i+1} - \lambda_{i+1})v_{i+1} + \dots + (\mu_n - \lambda_n)v_n \\ \Rightarrow v_i &= \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\lambda_i - \mu_i}v_1 + \dots + \frac{\mu_{i-1} - \lambda_{i-1}}{\lambda_i - \mu_i}v_{i-1} + \frac{\mu_{i+1} - \lambda_{i+1}}{\lambda_i - \mu_i}v_{i+1} + \dots + \frac{\mu_n - \lambda_n}{\lambda_i - \mu_i}v_n \end{aligned}$$

\Rightarrow Jeder UVR von v_i der $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ enthält, enthält auch v_i

$\Rightarrow \text{Lin}((v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)) = \text{Lin}((v_1, \dots, v_n)) = v$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist verkürzbar \nmid

3. \Rightarrow 4.: Wir setzten 3. voraus, das heißt für jedes $v \in V$ existieren eindeutig bestimmt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

zu zeigen: \mathcal{B} ist unverlängerbar linear unabhängig

denn Insbesondere existiert für jedes $v \in \text{Lin}((v_1, \dots, v_n))$ eindeutig bestimmt

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig.

Ist $v \in V$, dann existiert $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ linear abhängig. Somit: \mathcal{B} unverlängerbar linear unabhängig

4. \Rightarrow 1. Sei \mathcal{B} unverlängerbar linear unabhängig zu zeigen: \mathcal{B} ist Basis von V , das heißt es bleibt noch zu zeigen, dass \mathcal{B} ein ES von V ist

Sei $v \in V \Rightarrow (v_1, \dots, v_n, v)$ linear abhängig $\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0$ Es ist $\lambda \neq 0$, da sonst (v_1, \dots, v_n) linear abhängig

$$\Rightarrow v = -\frac{\lambda_1}{\lambda}v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda}v_n \in \text{Lin}((v_1, \dots, v_n))$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist ES von V

□

Folgerung 4 9.4 Basiswahlsatz. Besitzt V ein endliches ES (v_1, \dots, v_n) , dann kann man aus diesem eine Basis auswählen, das heißt es gibt eine Teilmenge $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, sodass $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ ein Basis von V ist. Insbesondere besitzt jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis

Beweis. Entferne aus dem ES (v_1, \dots, v_n) nacheinander solange Elemente, bis die resultierende Familie ein unverkürzbares ES und somit nach 8.3 eine Basis von V ist. □

Folgerung 5 9.5. Jeder endlich erzeugte K-VR besitzt eine Basis von endlicher Länge. Fragen:

- Ist jede Basis von V von endlicher Länge?
- Sind je zwei endliche Basen von V gleicher Länge