

# Experimentalphysik (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

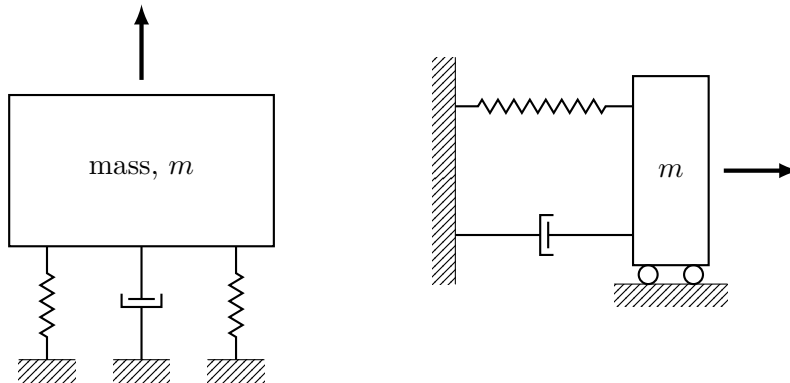
November 30, 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Eigenschaften der Physik . . . . .	3
1.1.1	Beispiel . . . . .	4
1.2	Maßeinheiten . . . . .	4
1.2.1	Basisgrößen . . . . .	4
1.2.2	Weitere Größen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Mechanik</b>	<b>4</b>
2.1	Kinematik des Massenpunktes . . . . .	5
2.1.1	Eindimensionale Bewegung . . . . .	5
2.1.2	Bewegung im Raum . . . . .	6
2.2	Newtonsche Dynamik . . . . .	10
2.2.1	Kraft und Impuls . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Verschiedene Kräfte und Kraftgesetze</b>	<b>12</b>
3.1	Gravitation (TODO Skizze) . . . . .	12
3.1.1	Anziehungskraft zweier Massen . . . . .	12
3.1.2	Erdbeschleunigung . . . . .	13
3.2	Federkraft . . . . .	13
3.3	Maxwell'sches Rad . . . . .	13
3.3.1	Ruhezustand . . . . .	13
3.3.2	Frage . . . . .	13
3.3.3	Messung: . . . . .	14
3.3.4	Auswertung . . . . .	14
3.4	Rotierende Kette . . . . .	14
3.5	Normalkraft . . . . .	14
3.6	Schiefe Ebene . . . . .	14
3.7	Reibungskräfte . . . . .	15
3.7.1	Experiment: Bewegung einer Masse . . . . .	15
3.7.2	Experiment: Tribologische Messung . . . . .	15

3.8	Tribologische Reibungslehre . . . . .	16
3.9	Mikroskopisches Modell . . . . .	16
3.10	Schiefe Ebene: Messung der Reibungskraft (Skizze) . . . . .	16
3.11	Zentripetalkraft . . . . .	16
3.11.1	Beispiel 1 Rotierendes Pendel . . . . .	17
3.11.2	Beispiel 2 Geostationärer Satellit . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Arbeit, Energie, Leistung</b>	<b>17</b>
4.1	Arbeit . . . . .	17
4.1.1	Beispiel . . . . .	18
4.1.2	Beispiel Kreisbahn ( $\Rightarrow$ Gravitation) . . . . .	18
4.2	kinetische Energie . . . . .	18
4.3	Potentielle Energie . . . . .	19
4.3.1	Ball als Feder am Auftreffpunkt . . . . .	19
4.4	Bemerkung . . . . .	19
4.5	Umwandlung von Energie . . . . .	19
4.6	Energie . . . . .	20
4.7	Leistung . . . . .	20
4.8	Konservative Kräfte . . . . .	20
4.8.1	Definition . . . . .	20
4.9	Kraftfelder und Potential . . . . .	20
4.9.1	Definition Kraftfeld . . . . .	20
4.9.2	Beispiel . . . . .	21
4.9.3	Feldlinien: . . . . .	21
4.9.4	konservative Kraftfelder . . . . .	21
4.9.5	Potential und Gravitationsfeld . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Erhaltungssätze</b>	<b>24</b>
5.1	Energieerhaltung . . . . .	24
5.1.1	Doppelbahn . . . . .	24
5.1.2	Energieerhaltungssatz der Newtonschen Mechanik . . . . .	24
5.1.3	Energiediagramme . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Systeme von Massenpunkten</b>	<b>26</b>
6.1	Beschreibung eines Systems von Massenpunkten . . . . .	26
6.1.1	Bewegung des Schwerpunkts . . . . .	27
6.1.2	Raketenantrieb . . . . .	28
<b>7</b>	<b>Stöße</b>	<b>29</b>
7.1	Kollinearer elastischer Stoß . . . . .	29
7.2	Betrachtung im Schwerpunktsystem . . . . .	31
7.2.1	Nicht-zentraler, elastischer Stoß im Schwerpunktsystem . . . . .	32
7.3	Inelastische Stöße . . . . .	32

<b>8 Mechanik des starren Körper</b>	<b>33</b>
8.1 Bewegung des starren Körpers . . . . .	34
8.2 Drehmoment und Kräftepaare . . . . .	34
8.2.1 Drehmoment und Schwerpunkt . . . . .	35
8.2.2 Kräftepaare . . . . .	35
8.3 Trägheitsmoment . . . . .	36
8.4 steinersche Satz . . . . .	36
8.5 Drehimpuls . . . . .	38



## 1 Einleitung

### 1.1 Eigenschaften der Physik

Physik ist nicht axiomatisch!

- Nicht alle Gesetze der Natur sind bekannt.
- Die bekannten Naturgesetze sind nicht unumstößlich
- unfertig
- empirisch
- quantitativ
- experimentell
- überprüfbar
- braucht Mathematik
- Gefühl für Größenordnungen und rationale Zusammenhänge

### 1.1.1 Beispiel

Fermi-Probleme:

- Anzahl der Klavierstimmer in Chicago?
- Anzahl der Autos in einem 10km Stau?
- Anzahl von Fischen im Ozean

## 1.2 Maßeinheiten

Internationales Einheitensystem (SI)

### 1.2.1 Basisgrößen

Größe	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunden	s

**Meter** Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von  $\frac{1}{299792458}$ s durchläuft.

**Sekunde** Das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der am Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung.

**Kilogramm** Das Kilogramm ist die Einheit der Masse, es ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps (ist scheiße).

### Avogadroprojekt

$$N_A = \frac{MVn}{m}$$

$N_A$ : Avogadokonstante ( $N_A = 6.022\,141\,5 \times 10^{23}$ )

### 1.2.2 Weitere Größen

Größe	Einheit	Symbol
Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candla	cd

## 2 Mechanik

Kinematik: Beschreibung der Bewegung Dynamik: Ursache der Bewegung

## 2.1 Kinematik des Massenpunktes

### 2.1.1 Eindimensionale Bewegung

**TODO Skizze 1**  $x_1, t_1 \longrightarrow x_2, t_2$  Geschwindigkeit

$$v = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [v] = \text{m s}^{-1} \text{ abgeleitete GröÙe}$$

**Momentangeschwindigkeit**

$$v := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

**Beschleunigung**

$$a := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad [a] = \text{m s}^{-2}$$

**Freier Fall**  $a = \text{const.}$  (Behauptung)

$$a = \ddot{x} = \text{const} = \dot{v}$$

→ Integration:

$$v(t) = \int_0^t a dt + v_0 = at + v_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + \int_0^t (at + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

Bei unserem Fallturm

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2x}{t^2}$$

$x[\text{m}]$	$t[\text{ms}]$	$\frac{2x}{t^2}[\text{m s}^{-2}]$
0.45	304.1	9.7321696
0.9	429.4	9.7622163
1.35	525.5	9.7772861
1.80	606.8	9.7771293

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

Die Erdbeschleunigung  $g$  ist für alle Körper gleich (Naturgesetz).

### 2.1.2 Bewegung im Raum

**TODO Skizze 2** Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t) \quad y(t) \quad z(t))^T$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \vec{v}_D$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t) \quad \dot{y}(t) \quad \dot{z}(t))^T = (v_x \quad v_y \quad v_z)^T$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z})^T = (a_x \quad a_y \quad a_z)^T$$

→ Superpositionsprinzip:

Kinematik kann für jede einzelne (Orts)komponente einzeln betrachtet werden.

$$\vec{a}_0 = \text{const}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t^2 - t_0^2) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{x,0}(t^2 - t_0^2) \\ y_0 + v_{y,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{y,0}(t^2 - t_0^2) \\ z_0 + v_{z,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{z,0}(t^2 - t_0^2) \end{pmatrix}$$

#### Horizontaler Wurf

**TODO Skizze 3**

$$t_0 = 0$$

$$\vec{a}_0 = (0 \quad 0 \quad -g)^T$$

$$\vec{v}_0 = (v_{x,0} \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\vec{x}_0 = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\vec{r}(t) = (v_{x,0}t \quad 0 \quad \frac{1}{2}gt^2)^T$$

#### Schiefer Wurf

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \\ v_{z,0} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0}t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0 \end{pmatrix}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x,0}^2} x^2 + \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} x + z_0$$

### Nachtrag

$$a = \dot{v}$$

$$\int_0^t \dot{v} dt' = \int_0^t a dt'$$

$$v \Big|_0^t = at' \Big|_0^t$$

$$v(t) - \underbrace{v(0)}_{v_0} = at$$

$$v(t) = at + v_0$$

analog:

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

### TODO Skizze Wurfparabel

$$\tan \varphi = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}$$

$$v_0^2 = v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2$$

Scheitel:

$$Z'(x_s) = 0$$

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\varphi$$

Wurfweite:

$$Z(x_w) = 0$$

$$x_w = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\varphi \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2 \sin^2 \varphi}} \right)$$

Optimaler Winkel:  $\varphi_{opt}, x_w$  max.

$$z_0 = 0 \Rightarrow \sin 2\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$z_0 \neq 0 \Rightarrow \sin \varphi_{opt} = \left( 2 + \frac{2gz_0}{v_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

### Gleichförmige Kreisbewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit  $\varphi = \varphi(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Gleichförmige Kreisbewegung:  $\dot{\varphi} = \text{const}$  Definition Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [w] = \text{rad s}^{-1} = 1/\text{s}$$

Für  $\omega = \text{const.}$ :

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{r}(t)| = r = \text{const}$$

$$\vec{v} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}(t)| = v = \text{const}$$

$$\vec{v} \perp \vec{r} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

### TODO Skizze Kreisbewegung

### Mitbewegtes Koordinatensystem

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_R \quad \vec{e}_R = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\vec{e}_t \quad \vec{e}_t = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_t \neq \text{const} \text{ das heißt } \vec{a}(t) \neq 0$$

Kreisbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \varphi \\ -R\omega^2 \sin \varphi \end{pmatrix} = -R\omega^2 \vec{e}_R \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{r}$$

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

Zentripetalbeschleunigung Zeigt in Richtung des Ursprungs.

$$\vec{a}_{zp} = -R\omega^2 \vec{e}_R$$

### Allgemein

$$\vec{\omega}$$

Räumliche Lage der Bewegungsebene

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad v = \omega r$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

1. **TODO** Skizze omega



## Allgemeine Krummlinige Bewegung

$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\vec{e}_t = \cos \rho \vec{e}_x + \sin \rho \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_n = -\sin \rho \vec{e}_x + \cos \rho \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{\rho} - \sin \rho \vec{e}_x + \cos \rho \vec{e}_y = \dot{\rho} \vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

## TODO Skizze

### Relativbewegung

- $S$ -Laborsystem
- $S'$ -Bewegtes System
- $\vec{u} = (u, 0, 0) = \text{const}$  Geschwindigkeit von  $S'$  im System  $S$
- Punkt  $P = (x, y, z)$  in  $S$
- Punkt  $P' = (x', y', z')$  in  $S'$
- Zeitpunkt  $t = 0$  :  $S = S', P = P'$

## TODO Skizze Bewegtes Bezugssystem

### Galilei-Transformation

#### 1. Eindimensional

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v' = v - u$$

$$t' = t$$

#### 2. Dreidimensional

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

## 2.2 Newtonsche Dynamik

Warum bewegen sich Körper?

Newton 1686: Ursache von Bewegungsänderungen sind Kräfte. Newtonsche Gesetze (Axiome)

1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, sofern er nicht durch Kräfte gezwungen wird diesen Bewegungszustand zu verlassen
2. Die Änderung einer Bewegung wird durch Einwirken einer Kraft verursacht. Sie geschieht in Richtung der Kraft und ist proportional zu Größe der Kraft
3. Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft  $F_{12}$ , so reagiert Körper 2 auf den Körper 1 mit der Gegenkraft  $F_{21}$  und es gilt  $F_{21} = -F_{12}$  (actio = reactio)

### 2.2.1 Kraft und Impuls

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Superpositionen von Kräften (Zusatz zu den Newtonschen Gesetzen (Korollar)):

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

### TODO Skizze Addition von Kräften

#### Grundkräfte der Natur

- Elektromagnetische Kraft
- Starke Kraft
- Schwache Kraft
- Gravitation

#### Impuls

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad [\vec{P}] = \text{kg m s}^{-1}$$

#### Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$m = \text{const.}$ :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{x}} = m\vec{a}$$

## Grundgesetz der Dynamik

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} \text{ beziehungsweise } \vec{F} = m\vec{a}$$

### Trägheitsprinzip (Impulserhaltung)

$$\vec{P} = m\vec{v} = \text{const}, \quad \vec{P} = 0 \text{ für } \vec{F} = 0$$

### Experiment

$$\vec{F}_G = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{Kraft}} = \underbrace{(m+M)\vec{a}}_{\text{Trägheit}} = m_{\text{ges}}\vec{a}$$
$$\vec{a} = \frac{m}{m+M}\vec{g} \xLeftrightarrow{d=1} a = \frac{m}{m+M}g = \frac{m}{m_{\text{textges}}}g$$

**Erwartung:**  $a \sim \frac{m}{m_{\text{ges}}}$ ,  $a = \frac{2\Delta s}{\Delta t^2}$ , weil  $\Delta s = \frac{1}{2}a\Delta t^2$

### Messung:

$m[\text{g}]$	$M[\text{g}]$	$m_{\text{ges}}[\text{g}]$	$\frac{m_{\text{ges}}}{m}$	$\Delta s[\text{mm}]$	$\Delta t[\text{s}]$	$a[\text{meter/s}]$
10	470	480	48	800	2.75	0.21157025
40	440	480	12	800	1.40	0.81632653
10	1910	1920	192	800	5.55	0.051943836
40	1880	1920	48	800	2.79	0.20554721

### TODO Skizze

**Trägheitsprinzip - "revisited" Definition:** Ein Bezugssystem in dem das Trägheitsprinzip gilt nennt man ein Inatialsystem.

In einem beschleunigten Bezugssystem gilt das Trägheitsprinzip nicht. Beschleunigte Systeme  $\neq$  Inatialsysteme. Das Trägheitsprinzip ist Galilei-invariant.

### TODO Skizze whatever

**Trägheitsprinzip: [moderne Formulierung]:** Es gibt Inatialsysteme, das heißt Koordinatensysteme in denen ein Kräftefreier Körper im Zustand der Ruhe oder der gradlinig gleichförmigen Bewegung verbleibt.

### Actio gleich Reactio

$$\underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{Kraft}} = \underbrace{-\vec{F}_{21}}_{\text{Gegenkraft}}$$

### TODO Skizze von Körpern

## TODO (Skizze) Experiment

1. Erwartung:

$$v_1 = v_2 \rightarrow a_1 = a_2 \rightarrow F_1 = F_2 \checkmark$$

Nichttrivialer Fall:

Kraftstoß:

Magnetische Kraft:  $F_{\text{mag}} \sim \frac{1}{r^2}$

$$v_{1,2} = \int_0^{t_{1,2}} a(t) dt = a_{\text{eff}} T$$

$$\rightarrow F_1(t) = F_2(t) \rightarrow v_1 = v_2$$

## Experiment 2

$$m_1 = 241.8 \text{ g} \wedge 2 = 341.8 \text{ g} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \approx 1.5$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{71}{48} \approx 1.5$$

$$a \sim v, F = ma \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

$$1 = \frac{F_1}{F_2} \Rightarrow F_1 = F_2$$

## Beispiele

- Kraft und Gegenkraft (TODO Skizze)
- Flaschenzug, Seilkräfte (TODO Skizze)

## 3 Verschiedene Kräfte und Kraftgesetze

### 3.1 Gravitation (TODO Skizze)

Experimenteller Nachweis im Labor mit Torsionsdrehungen (erstmal Cavendish)

#### 3.1.1 Anziehungskraft zweier Massen

$m_1, m_2$  Massen, Newtonsches Gravitationsgesetz:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

mit  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

### 3.1.2 Erdbeschleunigung

$$F_G = G \frac{mM_E}{(r_E + h)^2} \approx G \frac{mM_E}{r^2} = mg \Rightarrow g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

(mittleres  $g$ )

#### Abweichungen

- kompilizierte Massenverteilung, Strukturen
- Abflachung der Erde

#### Messung von $g$

- Gravimeter (Federgravimeter, Pendelgravimeter), relative Messung
- Absolutgravimeter (freier Fall, supraleitende Gravimeter)

#### Träge und schwere Masse

$$F = m_T a \rightarrow \text{träge Masse}$$

$$F = m_S G \frac{M_E}{r_E^2} \rightarrow \text{schwere Masse}$$

**Äquivalenzprinzip**  $m_S \sim T$  beziehungsweise  $m_S = m_T$

## 3.2 Federkraft

Hook'sches Gesetz

$$F_x = F_x(\Delta x) = -k_F \Delta x$$

Beliebige Auslenkungsfunktion ( $F_x(\Delta x = x - x_0)$ )

$$F_x(x) = F_x(x_0) + \frac{dF_x(x)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2}(x - x_0) + \dots$$

→ unabhängig von konkreter Zusammenhang  $f_x(x)$  gilt kleine Änderungen

## 3.3 Maxwell'sches Rad

### 3.3.1 Ruhezustand

Waage misst Gesamtmasse  $M$  austariert

### 3.3.2 Frage

Was passiert, wenn sich das Rad bewegt??

### 3.3.3 Messung:

1. Rad fixiert  $\rightarrow m = 0$
2. Rad läuft  $\rightarrow \Delta m = -0.7g < 0$

### 3.3.4 Auswertung

Anwendung 3. Newtonsches Gesetz:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}$  beziehungsweise  $F_2 = -F_1 + m\vec{a}$

1.  $\vec{a} = 0 : |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| \rightarrow |\vec{F}_2| = 0, 0m = 0$  (Waage)
2.  $\vec{a} > 0 : |\vec{F}_2| < |\vec{F}_1| \rightarrow$  Waage mit  $|\vec{F}_2| < mg \Delta m < 0$

### 3.4 Rotierende Kette

Winkelelement  $\Delta\alpha$ . Radialkraft  $\vec{F}_r$  ist resultierende Kraft der vom abgeschnittenen Teil der Kette wirkende Kräfte  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$

( $\vec{F}_G$  vernachlässigbar klein bei hoher Umdrehung und somit großen  $|F_1|, |F_2|$ )

Es gilt:

$$\vec{a}_{zp} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r \quad \vec{v} = R\omega\vec{e}_t$$

$$\vec{F}_r = \Delta m \vec{a}_{zp} = -\Delta m \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_r \approx \Delta\alpha F = F \frac{\Delta L}{R}$$

$$F = F_r \frac{R}{\Delta L} = \Delta m \frac{v^2}{R} \frac{R}{\Delta L} = \frac{m}{2\pi R} v^2$$

Die Kraft  $F = \frac{m}{2\pi R} v^2$  spannt die Kette.

### 3.5 Normalkraft

1. (Skizze) Normalkraft  $\vec{F}_N$  = Kraft senkrecht zur Kontaktfläche. Wird kompensiert durch  $\vec{F}'_N$  = Kraft mit der die Unterlage auf Körper wirkt (Zwangskräfte)

### 3.6 Schiefe Ebene

- Gewichtskraft:  $\vec{F}_G = m\vec{g}$
- Normalkraft:  $\vec{F}_N = mg \cos \alpha \vec{e}_y$
- Hangabtriebskraft:  $\vec{F}_H = mg \sin \alpha \vec{e}_x$

Bewegungsgleichung

$$F_H = m\ddot{x} \rightarrow x_x = g \sin \alpha = \text{const.}$$

### 3.7 Reibungskräfte

- im täglichen Leben über all präsent
- spielt eine wichtige Rolle Technik

→ Tribologie = Reibungslehre

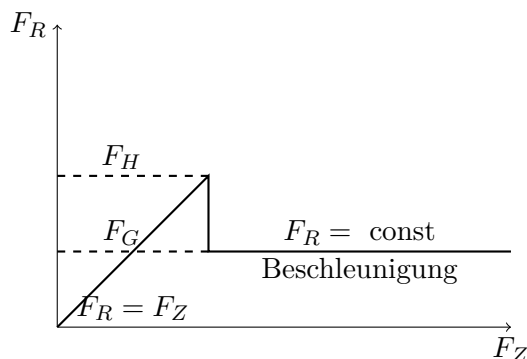
- Reibung hängt stark von der Oberfläche ab

#### 3.7.1 Experiment: Bewegung einer Masse

- Gewicht ruhte:  $\vec{F}_Z = -\vec{F}_R \rightarrow a = 0, v = 0$
- Gewicht setzt sich in Bewegung:  $|\vec{F}_Z| > |\vec{F}_R| \rightarrow a > 0, v$  steigt an
- Gewicht gleitet:  $\vec{F}_Z = -\vec{F}_R \rightarrow a = 0, v = \text{const.} \neq 0$  mit  $\vec{v} = \text{const}$

Reibungskraft nimmt ab, sobald das Gewicht bewegt wird.

- Haftreibung  $F_H$   
Schwellenwert für Zugkraft um Körper zu bewegen
- Gleitreibung  $F_G$   
Reibungskraft bei bewegtem Körper



#### 3.7.2 Experiment: Tribologische Messung

Messung der Zugkraft bei der sich der Holzblock nach kleiner Störung in Richtung Rolle bewegt:  $F_R = F_Z$

#### Beobachtung

- $F_R$  hängt nicht von der Oberfläche ab.
- $F_R$  hängt von dem Gewicht des Blocks ab
- $F_R$  ist Materialabhängig

### 3.8 Tribologische Reibungslehre

$$F_G = \mu_G F_N \quad (\mu_G = \text{Gleitreibungskraft})$$

$$F_H = \mu_H F_N \quad (\mu_H = \text{Haftreibungskraft})$$

$$\mu_H > \mu_G$$

### 3.9 Mikroskopisches Modell

Verantwortlich sind elektrische Kräfte zwischen Atomen und Molekülen der beieinanderliegenden Oberflächen: Van-der-Waals-Kräfte

- Stärke ergibt sich aus effektivem Kontakt.

Relative mikroskopische Reibungsfläche:  $\sum \frac{a_i}{A} \sim \frac{F_N}{A} \leftarrow \text{Druck}$

- $a_1$  = effektive Kontaktfläche eines Einzelatoms

Also:

$$F_R \sim \sum \frac{a_i}{A} \sim F_N$$

- Haftreibung: Verzahnung der Oberflächen mit minimalen Abstand
- Gleitreibung: Minimaler Abstand wird auf Grund der Bewegung nicht erreicht

### 3.10 Schiefe Ebene: Messung der Reibungskraft (Skizze)

Kräftegleichgewicht:  $F_H = F_R$

$$F_H = mg \sin \alpha, F_N = mg \cos \alpha$$

Grenzwinkel:  $F_R = mg \sin \alpha = \mu_R mg \cos \alpha \Rightarrow \mu_R = \tan \alpha$

$$\alpha = 15^\circ \rightarrow \tan \alpha = 0.27, \mu_G = 0.27$$

### 3.11 Zentripetalkraft

$$\vec{a}_{Zp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \vec{F}_{Zp} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_{Zp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad F_{Zp} = m\omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$



### 3.11.1 Beispiel 1 Rotierendes Pendel

$$\vec{F}_{Zp} := \vec{F}_G + \vec{F}_Z$$

$$F_G = mg = F_Z \cos \theta$$

$$F_{Zp} = F_Z \sin \theta$$

$$F_{Zp} = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = mg \tan \theta, \quad a_{Zp} = g \tan \theta$$

$$a_{Zp} = \omega^2 r \Rightarrow \omega \sqrt{\frac{g}{\tan \theta}}$$

- $\theta$  steigt mit  $\omega$  an
- $\theta(\omega)$  ist unabhängig von Masse

### 3.11.2 Beispiel 2 Geostationärer Satellit

Zentripetal = Gravitationskraft

$$m\omega^2 R = G \frac{mM_E}{R^2}$$

$$\text{Geostationär: } \omega = \frac{2\pi}{24\text{h}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\text{s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$R^3 = \frac{GM_E}{\omega^2} \rightarrow R = 42\,312 \text{ km}$$

Abstand von der Erd-Oberfläche:

$$\tilde{R} = R - R_E = 35\,930 \text{ km}$$

- $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$
- $M_E = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
- $R_E = 6373 \text{ km}$

## 4 Arbeit, Energie, Leistung

### 4.1 Arbeit

$$\Delta W = \vec{F} \vec{x} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

$$\begin{aligned} dW &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \vec{F} \Delta \vec{r} = \vec{F} d\vec{r} \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

Gesamtarbeit für Verschiebung von  $\vec{r}_1$  nach  $\vec{r}_2$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$[W] = \text{N m} = \text{kg m s}^{-2} = \text{J}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_x dx + \int_{r_1}^{r_2} F_y dy + \int_{r_1}^{r_2} F_z dz = \int_{s_1=0}^{s_2} \vec{F}(s) \frac{d\vec{r}}{ds} ds$$

$\vec{r}(s)$  parametrisierte Geschwindigkeit.

#### 4.1.1 Beispiel

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$W = \int_{(0)}^{(1)} mg dx + \int 0 dy + \int 0 dz = mg \Delta x$$

#### 4.1.2 Beispiel Kreisbahn ( $\Rightarrow$ Gravitation)

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = 0$$

### 4.2 kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = gt$$

$$v^2 = g^2t^2$$

$$v^2 = gh$$

$$W = \int_0^h F_G dx = F_G \int_0^h dx = F_G h = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

- Kinetische Energie:  $E_{kin}$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad [E_{kin} = \text{kg m s}^{-2} = \text{J}]$$

- Die Zunahme (beziehungsweise Abnahme) der kinetischen Energie eines Körpers ist gleich der ihm zugeführten (beziehungsweise der von ihm gelieferten) Arbeit (keine Reibung)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} \quad (1)$$

$$= \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \vec{v} d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (2)$$

### 4.3 Potentielle Energie

$$W = \int_h^0 F_g dx = \int_h^0 -gmdx = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

#### 4.3.1 Ball als Feder am Auftreffpunkt

$$F = k\xi$$

$$W = \int_0^\xi k\xi' d\xi' = \frac{1}{2}k\xi^2$$

### 4.4 Bemerkung

Arbeit  $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$  gilt immer, Symbol für Linienintegral meist weggelassen.

- kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
- potentielle Energie
  - $E_{pot} = \frac{1}{2}mx^2$  (Verformen)
  - $E_{pot} = mgh$  (Lage)

### 4.5 Umwandlung von Energie

$$dE_{kin} = Fdx = -dE_{pot}$$

Gilt nur für konservative Kräfte!

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{E_1}^{E_2} dE_{kin} = E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) \quad (3)$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{E_1}^{E_2} dE_{pot} = E_{pot}(\vec{r}_1) - E_{pot}(\vec{r}_2) \quad (4)$$

1. Für

- $W > 0$ :  $E_{kin}$  nimmt zu (Arbeit von System am Objekt verrichtet)
- $W < 0$ :  $E_{kin}$  nimmt ab

2. Für

- $W > 0$ :  $E_{pot}$  nimmt ab
- $W < 0$ :  $E_{pot}$  nimmt zu

## 4.6 Energie

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} \quad (5)$$

$$= E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) \quad (6)$$

$$= E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1) \quad (7)$$

Die unteren beiden Gleichungen gelten nur für konservative Kräfte

## 4.7 Leistung

$$\vec{F} = \text{const}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{c}$$

$$[P] = \text{N m s}^{-1} = \text{J s}^{-1} = \text{W} = \text{Watt}$$

## 4.8 Konservative Kräfte

$$W_1 = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \quad (8)$$

$$W_2 = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \quad (9)$$

$$(10)$$

Geschlossener Weg:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$$W = \oint_c \vec{F} d\vec{r} = W_1 - W_2 = 0$$

### 4.8.1 Definition

Kräfte, für die die Arbeit unabhängig vom Weg ist nennt man konservativ. Für konservative Kräfte gilt:

$$W = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

## 4.9 Kraftfelder und Potential

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

### 4.9.1 Definition Kraftfeld

Eindeutige Zuordnung einer Kraft zu jedem Punkt im Raum:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

### 4.9.2 Beispiel

Gravitationskraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \quad (11)$$

$$= f(r) \vec{e}_r \quad (12)$$

Kugelsymmetrisch, Zentralfeld

**TODO Skizze Vektorfeld**

**TODO Skizze Feldlinien**

### 4.9.3 Feldlinien:

- Feldlinien sind immer tangential zur Kraftrichtung
- Feldliniendichte ist proportional zum Betrag der Kraft
- Feldlinien schneiden sich nie

### 4.9.4 konservative Kraftfelder

Kraftfelder, die konservative Kräfte beschreiben nennt man konservative Kraftfelder. Für konservative Kraftfelder gilt

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2)$$

- jedem Ort im Raum kann ein Skalar, die potentielle Energie zugeordnet werden  $\Rightarrow E_{pot} = E_{pot}(x, y, z)$  Skalar!
- wird bei der Verschiebung eines Körpers von Ort 1 nach Ort 2 Arbeit gegen eine konservative Kraft geleistet, so erhöht sich die potentielle Energie, das heißt  $E_{pot}(2) > E_{pot}(1)$ .
- Der Nullpunkt  $E_{pot}(\vec{r}) = 0$  der potentiellen Energie ist frei wählbar, da allein die Differenz der Potentiellen Energie an zwei Punkten relevant ist.

### homogenes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{R}) = (0, 0, F_z)$$

- Weg 1:

$$W_1 = \int_{\text{Weg1}} \vec{F} d\vec{R} = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = F_z(z_2 - z_1)$$

- Weg 2:

$$W_2 = \int_{\text{Weg2}} \vec{F} d\vec{R} = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = F_z(z_2 - z_1)$$

## TODO Skizze

### Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$$

$$W = \oint \vec{F} d\vec{r} \quad (13)$$

$$= \int_1^2 f(r)dr + \int_2^3 \vec{F} d\vec{r} + \int_3^4 f(r)dr + \int_4^1 \vec{F} d\vec{r} \quad (14)$$

$$= 0 \quad (15)$$

### Gravitationsfeld

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{R} \quad (16)$$

$$= \int_A^B -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r d\vec{r} \quad (17)$$

$$= \int_A^B -G \frac{mM}{r^2} dr \quad (18)$$

$$= \left[ G \frac{mM}{r + \xi} \right]_{r_A}^{r_B} = E_{pot}(A) - E_{pot}(B) \quad (19)$$

$$\Rightarrow E_{pot}(A) = -G \frac{mM}{r_A} + \xi$$

$$\Rightarrow E_{pot}(B) = -G \frac{mM}{r_B} + \xi = E_{pot}(C)$$

Potentielle Energie des Gravitationsfelder:

$$E_{pot}^{grav} = -G \frac{mM}{r}$$

**d = 1** Zusammenhang zwischen konservativen Kraftfeld und potentieller Energie:

$$E_{pot} = - \int F dx$$

$$dE_{pot} = -F dx$$

$$-\frac{dE_{pot}}{dx} = F$$

**d = 3** Zusammenhang zwischen konservativen Kraftfeld und potentieller Energie:

$$E_{pot} = - \int \vec{F} d\vec{r} \rightarrow \vec{F} = - \left. \frac{dE_{pot}}{d\vec{r}} \right.$$

Gesucht: Ableitung eines Vektors nach einem Skalar. Betrachte:

$$\Delta E_{pot} = -\vec{F} \Delta \vec{r} = -(F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z)$$

$$\Delta E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \Delta z$$

$$\text{Vergleich : } \vec{F}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \Delta x, \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \Delta y, \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \Delta z\right) \quad (20)$$

$$= -\text{grad } E_{pot} \quad (21)$$

Gilt nur für konservative Kräfte

**Gradient** Der Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld, dass in jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs der skalaren Größe zeigt.

**Notation:**

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{pot}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}, \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

#### 4.9.5 Potential und Gravitationsfeld

- Gravitationskraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

- Potentielle Energie:

$$\vec{E}_{pot}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r}$$

Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{E_{pot}(\vec{r})}{m}$$

- Gravitationspotential:

$$\Phi = -G \frac{M}{r}$$

- Gravitationsfeld:

$$\vec{G} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$$

•

$$\vec{G} = -\text{grad } \Phi$$

•

$$E_{pot} = m\Phi$$

## 5 Erhaltungssätze

### 5.1 Energieerhaltung

Für konservative Kräfte gilt:

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$$

das heißt: die kinetische Energie ergibt sich allein aus der Potentialdifferenz und ist unabhängig vom durchlaufenen Weg.

$$\begin{aligned} E_{kin}(2) - E_{kin}(1) &= E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \\ E_{kin}(1) + E_{pot}(1) &= E_{kin}(2) + E_{pot}(2) = \dots = \text{const} \end{aligned}$$

#### 5.1.1 Doppelbahn

$$\begin{aligned} E_{pot}(1) &= m \cdot g \cdot h \\ E_{pot}(1) &= E_{pot}(2') = 0 \\ &\rightarrow \\ E_{kin}(2) &= E_{kin}(2') = \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Bemerkung: Berechnung von  $v$  mit Newtonschen Gesetzen deutlich komplexer

#### 5.1.2 Energieerhaltungssatz der Newtonschen Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{ges} = \text{const}$$

$E_{ges}$  = mechanische Gesamtenergie

das heißt: In einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie eines Massenpunktes zu jeder Zeit konstant

Wichtig: gilt nur für konservative Kraftfelder (Beim Auftreten nicht-konservativer, dissipativer Kräfte wird mechanische Energie in Wärme umgewandelt)

#### 5.1.3 Energiediagramme

Häufig: Potentielle Energie abhängig von Ort  $x$  oder Abstand  $r$

Hilfreich: Diskussion mittels Energiediagramm



## Kugelbahn

- Abhängig von  $E_{ges}$  kann sich die Kugel nur in bestimmten Bereichen aufhalten
- Gleichgewichtslagen: Kugel ruht, es wirken keine Kräfte, das heißt

$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = 0, \text{ bzw. } \vec{F} = -\text{grad } E_{pot} = 0$$

Drei Fälle:

1. Stabiles bzw. Metastabiles Gleichgewicht: Potentialkurve hat ein Minimum
2. labiles Gleichgewicht: Potentialkurve hat ein Maximum
3. Indifferentes Gleichgewicht: Flacher Verlauf der Potentialkurve

**Lennard-Jones-Potential** Potiential zur Beschreibung von molekularen Bindungen

$$E_{pot} = V_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-12} - 2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-6}$$

(Dipol-Dipol-Wchselwirkung, Van-der-Waals Kräfte)

## Mechanischer Verstärker

$$E'_{pot} = mgh = \rho(abc)gh$$

Volumen  
↑  
Dichte  
↓

mit  $h = \frac{1}{2}c$

Fallender Dominostein:  $E_{pot} \rightarrow E_{kin}$

Startposition: (Meta)stabiles Gleichgewicht

das heißt: Dominosteine müssen über einen Potentialberg angehoben werden. Danach ist die kinetische Energie ausreichend, um den nächsten Stein über Potentialschwelle zu heben. Verstärkungsfaktor:

Skalierung zwischen den Steinen: Alle Längen  $\times \sqrt{2}$

Potentielle Energie für Stein  $m$ :

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \rho(a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)})h^{(n)}g = (\sqrt{2})^4 E_{pot}^{(n-1)} \\ E_{pot}^{(1)} &= mgh \\ \Rightarrow E_{pot}^{(13)} &= 4^{12} E_{pot}^{(1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Verstärkungsfaktor  $\approx 1.7 \times 10^7$

## 6 Systeme von Massenpunkten

Bisher: Bewegung einzelner Massenpunkte.

Jetzt: Betrachte Systeme von Massenpunkten.

Man unterscheidet:

- Innere Kräfte: Kräfte, die zwischen den Massenpunkten eines Systems wirken.
- Äußere Kräfte: Kräfte, die von außen auf das System einwirken

### 6.1 Beschreibung eines Systems von Massenpunkten

$\vec{r}_i$ : Ortsvektor zum Massenpunkt  $i$

$m_i$ : Masse des Massenpunktes  $i$

$[i = 1, \dots, n]$

Gesamtmasse:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

**Definition 1** Schwerpunkt.

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$
$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

*Beispiel 1* System zweier Massenpunkte.

$$\begin{aligned}\vec{r}_s &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad s_1, s_2 = ? \\ \vec{r}_s &= \vec{r}_1 + \lambda_s (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= (1 - \lambda_s) \vec{r}_1 + \lambda_s \vec{r}_2 \\ &= \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{=1-\lambda_s} \vec{r}_1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}_{=\lambda_s} \vec{r}_2 \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}, S_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \wedge \frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2}{m_1}\end{aligned}$$

Das heißt: Das Verhältnis  $\frac{S_1}{S_2}$  ist umgekehrt proportional zum Massenverhältnis  $\frac{m_1}{m_2}$ .

*Beispiel 2* Schwerpunkt Erde-Sonne.

$$M_E = 6 \times 10^{21} \text{ kg}, M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$
$$X_S = \frac{M_E X_E + M_S 0}{M_E + M_S} = 4.5 \times 10^5 \text{ m}$$

Vergleich mit Sonnenradius  $7 \times 10^8 \text{ m}$  Schwerpunkt praktisch im Sonnenmittelpunkt

### 6.1.1 Bewegung des Schwerpunkts

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

$\vec{p}_i$ : Impuls des einzelnen Massenpunktes

**Definition 2** Schwerpunktimпульs.

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_s$$

das heißt: Schwerpunktimпульs ergibt sich aus der Summe der Einzelimpulse

Frage: Wie bewegt sich ein System von Massepunkten unter Einfluß von Kräften?  
Es gilt:

$$\begin{array}{c} \text{innere Kraft} \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}, \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \\ \text{äußere Kraft} \end{array}$$

$\Rightarrow$ : Änderung des Schwerpunktimpulses  $\vec{p}_s$ :

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

das heißt: die Impulsänderung des Schwerpunktes ergibt sich aus der Summe der äußeren Kräfte:

1. Newtonsches Gesetz für Systeme von Massenpunkten.

$$\dot{\vec{p}}_s = M \vec{a}_s = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Hierbei:  $\vec{a}_s = \ddot{\vec{r}}_s = \frac{1}{M} \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$

**Definition 3** Allgemeiner Impulssatz. Das Schwerpunkt eines beliebigen Systems von Massenpunkten  $I$  bewegt sich so, als sei er ein Körper mit der Gesamtmasse  $M = \sum m_i$

**Definition 4** Abgeschlossenes System. Ein abgeschlossenes System ist ein System auf das keine äußeren Kräfte einwirken, das heißt:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Der Massenschwerpunkt eines abgeschlossenen Systems hat einen zeitlich konstanten Impuls, das heißt

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}$$

( $\Rightarrow$  Impulserhaltung!!)

### 6.1.2 Raketenantrieb

das heißt: die Bewegung von Objekten mit veränderlicher Masse

Beobachtung: Abstoßen einer Masse kann zum Antreib verwendet werden (Beispiele: Rakete, Medizinball und Schlittschuhläufer)

Betrachte Rakete: Impulssatz:

$$p(t) = p(t + \Delta t)$$

Zeitpunkt  $t$

$$p(t) = (m + \Delta m)v$$

Zeitpunkt  $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} p(t + \Delta t) &= 0m(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_B) \\ \Rightarrow mv + \Delta v &= mv + m\Delta v + \Delta mv - \Delta mv_B \\ m\Delta v - \Delta mv_B &= 0 \end{aligned}$$

Änderung Blickwinkel:

$$m\Delta v + \Delta mv_b = 0$$

Wichtig: Masse  $m$  und Massenänderung  $dm$  müssen sich auf gleiche Referenz beziehen. Damit folgt:

$$dv = -v_b \frac{dm}{m}$$

Integration:

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{v_2} dv &= -v_B \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{m} dm, m_1 > m_2, v_B = \text{const} \\ v_2 - v_1 &= -v_B \cdot [\ln m]_{m_1}^{m_2} = v_B (\ln m_1 - \ln m_2) = v_B \ln \frac{m_1}{m_2} > 0 \end{aligned}$$

Wähle Anfangsbedingungen:

$$v_1 = 0, m_1 m_0 = m(t = 0), m_2 = m(t)$$

⇒ Raketengleichung für kräftefreie Rakete

$$v(t) = v_B \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

das heißt: Die Endgeschwindigkeit einer Rakete wird durch die Ausstoßgeschwindigkeit und die Brennstoffmenge bestimmt

Für die nicht kräftefreie Rakete gilt:

$$m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = - \frac{dm(t)}{dt} \vec{v}_B + \vec{F}$$

Allgemeine Raketengleichung (ohne Herleitung)

*Bemerkung 1.* Vorsicht bei der Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzen  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ . Naiver Ansatz für kräftefreie Rakete:

$$\frac{dmv}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt} = 0$$

Funktioniert nicht! Grund: Impuls des ausströmenden Gases wird bei diesem Ansatz nicht in der Impulsbilanz berücksichtigt

Korrektter Ansatz:

$$\frac{dmv}{dt} - (v - v_B) \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow m \frac{dv}{dt} + v_B \frac{dm}{dt} = 0$$

das heißt: der naive Ansatz funktioniert nur, wenn  $v - v_B = 0$ , also die Ausströmungsgeschwindigkeit verschwindet.

## 7 Stöße

Für ein abgeschlossenes System gilt: (keine äußere Kräfte)

Impulserhaltung:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}'_i$$

Energieerhaltung:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n E'_i$$

### 7.1 Kollinearer elastischer Stoß

Es gilt:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{aligned}$$

⇒ Lösung (ohne Herleitung)

$$v'_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v'_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeit nach Kollinear elastisch Stoß Tipp zur Herleitung: Betrachte Bewegung relativ zur Schwerpunktsbewegung (siehe z.B. Demtröders)

Hier Betrachtung von Spezialfällen.

Betrachtung von Spezialfällen ist immer wichtig! Hilft beim Verständnis physikalischer Zusammenhänge

1.  $m_1 = m_2 = m, v_1 > 0, v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{2mv_2}{2m} = v_2 = 0, v'_2 = \frac{2mv_1}{2m} = v_1$$

2.  $m_1 = m, m_2 = 2m, v_1 > 0, v_2 > 0$

$$v'_1 = \frac{v_1(-m)}{3m} = -\frac{1}{3}v_1$$

$$v'_2 = \frac{2mv_1}{3m} = \frac{2}{3}v_1$$

3.  $m_1 = m, m_2 = 3m, v_1 = v > 0, v_2 = -v$

$$v'_1 = \frac{v(m - 2m) - 2(3m)v}{4m} = \frac{v(-2m - 6m)}{4m} = -2v$$

$$v'_2 = \frac{-v(2m - m) + 2mv}{2m} = \frac{v(-2m + 2m)}{3m} = 0$$

4.  $m_1 = m, m_2 \rightarrow \infty, v_1 = v, v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{v(-m_2)}{m_2} = -v \quad (\text{da } m_1 \text{ vernachlässigbar})$$

$$v'_2 = \frac{2m_1v}{m_2} = 0 \quad (\text{da } m_1 \ll m_2)$$

5.  $m_1 = m, m_2 \text{ sehr groß!}, v_1 = 0, v_2 = v$

$$v'_1 = \frac{2m_2v}{m_2} = 2v, \quad v'_2 = \frac{vm_2}{m_2} = v$$

## 7.2 Betrachtung im Schwerpunktsystem

Es gilt:

$$v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem:

$$v_1^* = v_1 - v_s = \frac{m_2 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_2^* = v_2 - v_s = \frac{m_1 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

daraus folgt:

$$p_1^* = m_1 v_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$
$$p_2^* = m_2 v_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)$$

Das heißt vor dem Stoß gilt:

$$p_1^* = -p_2^* E_{kin,1}^* = \frac{1}{2} m (v_1^*)^2 = \frac{(p_1^*)^2}{2m_1} E_{kin,2}^* = \frac{(p_2^*)^2}{2m_2}$$

nach dem Stoß:

Impulserhaltung:

$$p_s^* = p_1^* + p_2^* = p_1^{*'} + p_2^{*'} = 0 \rightarrow p_1^{*'} = -p_2^{*'}$$

Energieerhaltung:

$$E_{ges}^* = E_{kin,1}^* + E_{kin,2}^* = E_{kin,1}^{*'} + E_{kin,2}^{*'}$$

Außerdem:

$$p_1^{*'} = \frac{p_1^* (m_1 - m_2) + 2m_1 p_2^*}{m_1 + m_2} = -p_1^*, p_2^{*'} = -p_2^*$$

daraus folgt:

$$E_{kin,1}^{*'} = E_{kin,1}^*$$
$$E_{kin,2}^{*'} = E_{kin,2}^*$$

Im Schwerpunktsystem findet bei elastischen Stößen keine Energieübertragung statt.  
Aber: Impulse werden ausgetauscht

### 7.2.1 Nicht-zentraler, elastischer Stoß im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned}\vec{p}_s^* &= 0, \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \\ \vec{p}_s^{*'} &= -\vec{p}_2^{*'}, |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_1^{*'}|\end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem sind für ein abgeschlossenes System zweier Massepunkte ein- und auslaufende kollinear und vom Betrag her gleich

### 7.3 Inelastische Stöße

Betrachte 2 Kugeln

- Massen:  $m_1, m_2$
- Geschwindigkeit:  $v_1 \neq 0, v_2 = 0$
- Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}m_1 v &= (m_1 + m_2) v' \\ v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v\end{aligned}$$

- Energiebilanz:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v^2, E'_{kin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 < E_{kin}$$

Beim inelastischen Stoß geht mechanische Energie verloren, sie wird beim Stoß in andere Energieformen (zum Beispiel Wärme) umgewandelt. (siehe Thermodynamik)

Interessant: Betrachtung im Schwerpunktsystem.

$$m_1 v_1^* - m_2 v_2^* = (m_1 + m_2) v^{*'}$$

da  $p_1^* = -p_2^*$

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) v^{*'} &= 0 \\ E_{kin}^{*'} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v^{*'})^2 = 0\end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem findet beim inelastischen Stoß eine vollständige Umwandlung der kinetischen Energie statt Allgemein:



falls  $\vec{F}_{aussen} = 0$

$$E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} + Q \sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}'_i = \text{const}$$

$$\sum E_{kin,i} = \sum E'_{kin,i} + Q$$

$$Q = 0 \quad \text{elastisch}$$

$$Q > 0 \quad \text{inelastisch}$$

$$Q < 0 \quad \text{superelastisch}$$

## 8 Mechanik des starren Körper

**Definition 5** Starrer Körper. System von Massenpunkten mit festen, nicht veränderlichen Abständen.

Idealisierung!

Es gilt:

Volumen:

$$V = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum \Delta V_i = \int dv$$

Masse:

$$M = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum \Delta m_i = \int dm = \int \rho(\vec{r}) dV$$

Schwerpunkt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \quad M = \int \rho dV = \int \rho d^3r$$

Beispiel 3 Quader.

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho dx dy dz \end{aligned}$$

Integration für jede einzelne Ortskomponente:

$$x_s = \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c x \rho dx dy dz = \frac{1}{M} \rho bc \int_0^a x dx = \frac{1}{M} \rho abc \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a$$

$$y_s = \dots = \frac{1}{2} b$$

$$z_s = \dots = \frac{1}{2} c$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

## 8.1 Bewegung des starren Körpers

Es gilt:

$$\vec{r}_{si} = \vec{r}_i - \vec{r}_s \rightarrow \frac{d\vec{r}_{si}}{dt} = \vec{v}_{si} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$$

Mit  $|\vec{r}_{si}| = \text{const}$  beziehungsweise  $\vec{r}_{si}^2 = \text{const}$  (starrer Körper)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{si}^2) = 2\vec{r}_{si}\vec{v}_{si} = 0 \rightarrow \vec{v}_{si} \perp \vec{r}_{si}$$

da  $\vec{v}_{si} \perp \vec{r}_{si}$  gilt: Betrachte Bewegung in der von  $\vec{v}_{si}, \vec{r}_{si}$  aufgespannten Ebene  $\rightarrow$  Kreisbewegung!, Das heißt:

$$\vec{v}_{si} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{si}$$

wobei im Allgemeinen  $\vec{\omega}$  zeitabhängig sein kann.

Mit  $\vec{v}_{si} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$  folgt:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{si})$$

Achtung:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$  muss nicht raumfest sein.

Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich in eine Translationsbewegung und eine Rotation um den Schwerpunkt zerlegen

- 3 Translationsfreiheitsgrade
- 3 Rotationsfreiheitsgrade

## 8.2 Drehmoment und Kräftepaare

Frage: Wie versetzt man einen Körper in Rotation?

*Beispiel 4* Balkenwaage. Beobachtung: Kraft mit Angriffspunkt im Abstand  $l$ , bewirkt Drehbewegung

Es gilt das Hebelgesetz:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

Hebelarm: Abstand zwischen Drehachse und Angriffspunkt der Kräfte  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

Beobachtung:

Kraft  $\vec{F}_{\parallel}$  parallel zum Hebelarm bewirkt keine Drehung, nur Kraft  $\vec{F}_{\perp}$  senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Angriffspunkt und Drehachse führt zur Rotation.

Richtung von  $\vec{F}_{\perp}$  bestimmt Drehsinn

**Definition 6** Drehmoment.

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$$

Gibt Drehsinn und Stärke der Kraftwirkung an.

$$M = rF \sin(\angle(\vec{r}, \vec{F}))$$

### 8.2.1 Drehmoment und Schwerpunkt

Betrachte starren Körper aus zwei Massenpunkten plus masselose Verbindung

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ \vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ \vec{M}_1 &= r_1 m_1 g \sin \alpha_1 \vec{l}_z \\ \vec{M}_2 &= -r_2 m_2 g \sin \alpha_2 \vec{l}_z \\ &= -r_2 m_2 g \sin \alpha_1 \vec{l}_z \\ \vec{M}_{tot} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (r_1 m_1 - r_2 m_2) g \sin \alpha_1 \vec{l}_z\end{aligned}$$

vektoriell:

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times m_2 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} = (\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2) \times \vec{g}$$

Beliebiger Körper:

$$\begin{aligned}\vec{M}_{tot} &= \sum \vec{M}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g} \\ (\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} &= m_{ges} \vec{r}_s \times \vec{g} = \vec{r}_s \times \vec{F}\end{aligned}$$

Das Gewicht eines starren Körpers greift immer im Schwerpunkt an. Bei Aufhängung eines Körpers im Schwerpunkt ist das resultierende Drehmoment auf Grund der Schwerkraft Null. Grund: Im Schwerpunkt gilt:  $\vec{r}_s = 0, \vec{M}_{tot} = \vec{r}_s \times \vec{F}_s = 0$

### 8.2.2 Kräftepaare

Frage: Wirkung einer Kraft  $\vec{F}_1$  auf einen starren Körper.

Lösungsansatz:

Einführung der sich gegenseitig aufhebenden Kräfte  $\vec{F}_2$  und  $\vec{F}_3$  im Schwerpunkt  $S$ . Ändert nichts!

Zerlegung der Bewegung:

Translation durch Kraft  $\vec{F}_2$  mit Angriffspunkt  $S$ .

Rotation durch Kräftepaar  $(\vec{F}_1, \vec{F}_3)$  mit  $F_1 = F_3, \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1$

Die Wirkung aller Kräfte auf einen starren Körper lässt sich durch

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \sum \vec{F}_i && \text{(Gesamtkraft (Gesamtkraft))} \\ \vec{M} &= \sum \vec{r}_{si} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i && \text{(Gesamtdrehmoment (Rotation))}\end{aligned}$$

beschreiben. Dabei greift  $\vec{F}$  im Schwerpunkt an

Wirkung von Kräftepaaren: Reine Rotation. Es gilt:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}$$

### 8.3 Trägheitsmoment

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \Theta$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

### 8.4 Steinersche Satz

Nochmal Stab:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L x^2 \rho A dx \\ &= \rho A \int_0^L x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \rho A L^2 \end{aligned}$$

mit  $m = \rho A L$

$$= \frac{1}{3} m L^2$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} I &= \int r_{\perp}^2 dm \\ &= \int (r_{s,\perp} + R_{\perp})^2 dm \\ &= \int \vec{r}_{s,\perp}^2 dm + \int \vec{R}_{\text{perp}}^2 dm + 2 \int r_{s,\perp} R_{\text{perp}} dm = \underbrace{\vec{r}_{s,\perp}^2 \int dm}_{=r_{s,\perp}^2 m} + I_s + 2r_{s,\perp} \underbrace{\int R_{\text{perp}} dm}_{=0} \end{aligned}$$

**Definition 7** Steinersche Satz.

$$I = I_s + r_{\perp,s}^2 m$$

*Beispiel 5* Dünner Stab.

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{12} m L^2 \\ I_B &= \frac{1}{3} m L^2 \\ I_B &= I_A + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m = \frac{1}{3} m L^2 \end{aligned}$$

Trägheitsmomente sind additiv

$$I = \int_v r_{\perp}^2 dm = \int_{v_1} r_{\perp}^2 dm + \int_{v_2} r_{\perp}^2 dm$$

Translation	Rotation
$\vec{r}$	$\vec{\phi}$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\phi}} = \dot{\vec{\omega}}$
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
$F = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$

Bei nicht ortsfester Rotationsachse:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \Theta \vec{\alpha}$$

$\vec{\Theta}$  ist ein Tensor

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp,i}, \vec{v}_i = \omega r_{\perp,i}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{\perp,i} \times \vec{F}_i$$

$$M_i = r_{\perp,i} F_{\perp,i} = r_{\perp,i} m_i \frac{dr_i}{dt}$$

$$= r_{\perp,i}^2 m_i \frac{d\omega}{dt}$$

$$M_{tot} = \sum M_i$$

$$M_{tot} = \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha} \underbrace{\sum r_{\perp,i}^2 m_i}_I$$

Bewegungsgleichung für die Rotation um eine Raumfeste Achse

$$M = I\dot{\omega} = I\alpha$$

Beispiel 6.

$$\begin{aligned}
 M &= I\alpha \\
 \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_G \\
 I &= 2mR^2 \\
 \alpha &= \frac{M}{I} = \dot{\omega} \\
 \omega &= \alpha t + \omega_0 = \alpha t \\
 \phi &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\
 2\pi &= \frac{1}{2}\alpha T^2 \\
 T^2 &= \frac{4\phi}{\alpha} = 4\pi \frac{I}{M}
 \end{aligned}$$

wir wollen berechnen

$$\begin{aligned}
 T_0^2 &= 4\pi \frac{I_0}{M} = (1.72)^2 \text{s}^2 \\
 T_1^2 &= 4\pi \frac{I_0 + 2mR^2}{M} = (5.9)^2 \text{s}^2 \\
 T_2^2 &= 4\pi \frac{I_0 + 2m\frac{R^2}{4}}{M} = (3.3)^2 \text{s}^2 \\
 T_1^2 - T_0^2 &= 32 \text{s}^2 \\
 T_2^2 - T_0^2 &= 8 \text{s}^2
 \end{aligned}$$

## 8.5 Drehimpuls

- Translation:  $\vec{F} = m\vec{a}, \vec{F} = \dot{\vec{p}}$
- Rotation:  $\vec{M} = I\vec{\alpha}, \vec{M} = \dot{\vec{L}} \rightarrow$  Drehimpuls
- Impuls:  $p = mv$
- Drehimpuls: (Guess)  $L = I\omega = mr^2 \frac{v}{r} = rmv = rp$

**Definition 8** Drehimpuls.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wichtig: Allen bewegten Massenpunkten kann man bezüglich eines Referenzpunktes 0 einen Drehimpuls zuordnen; der hängt vom Bezugspunkt ab.

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_0 + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Grundgleichung der Dynamik für Rotationsbewegungen:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Drehimpuls für System von Massenpunkten

$$\begin{aligned} \vec{p}_s &= \sum \vec{p}_i, \quad \dot{\vec{p}}_s = \sum \vec{F}_i \\ \vec{L} &= \sum \vec{L}_i = \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ \vec{L} &= \int d\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \underbrace{\sum \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_0 + \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{M}_i = \vec{M} \end{aligned}$$

Für System von Massenpunkten:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \dot{\vec{L}} \\ \vec{L} &= 0 \text{ für } \vec{M} = 0 \end{aligned}$$

Allgemeiner Zusammenhang:

mit  $\hat{I}$  als Tensor:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \hat{I} \vec{\omega} \\ \vec{L} &= \int d\vec{L} \\ d\vec{L} &= \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm \\ &= dm(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

mit  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned} &= dm(r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})) \\ \int d\vec{L} &= \vec{\omega} \int r^2 dm - \int \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) dm \end{aligned}$$