

Rapport – Projet Planètes

BONIN Alexandre

[alexandre.bonin@u-psud.fr](mailto:alexandre.bonin@u-psud.fr)

(Groupe : L’HERITIER Alexandre)

Math-Info

Licence MPI L1 S2 groupe A2

2016



Modèle à 2 planètes

Les coordonnées des planètes sont régies par les formules suivantes :

où,

(

Pour notre modélisation, les trajectoires des planètes sont parfaitement circulaires, ce qui implique un rayon constant au cours du temps, on peut donc noter :

Les planètes sont également soumises à la seconde loi de Kepler, en raison du rayon constant, la vitesse angulaire ne peut qu’être également constante (Car le rayon-vecteur des planètes balaie des aires égales dans des temps égaux). On note donc :

Pour la suite, on définit :

On souhaite se concentrer sur le cas du système solaire, et prendre l’exemple Terre-Soleil. On veut connaître la vitesse linéaire de la Terre pendant son mouvement de révolution. On a comme donnée sa distance (qui sera constante en raison de sa trajectoire circulaire) au Soleil qui vaut :

Dans le modèle à deux planètes, on considère que la Terre ne subit que l’attraction gravitationnelle du Soleil, elle est donc soumise à une force conservatrice : l’énergie mécanique du système se conserve. On en vient donc à l’égalité suivante :

L’énergie mise en équation est intégrale de la force gravitationnelle. L’énergie potentielle gravitationnelle est définit par :

(où désigne la constante de gravitation universelle, la masse de l’astre en mouvement de révolution autour de l’astre de masse )

On pose ainsi :

On fait désormais face à un problème, la valeur de n’est pas connue ici, la seule donnée étant .

Il faut donc utiliser une autre donnée bien connue, celle du temps de révolution de la Terre autour du soleil qui est de jours, soit . Puisque la vitesse angulaire est constante, et la trajectoire parfaitement circulaire, la vitesse linéaire est constante (car on considère les masses et le rayon constants au cours du mouvement), il suffit de déterminer la vitesse moyenne de révolution de la Terre.

La distance parcourue par la Terre lors de sa révolution autour du Soleil est de :

Maintenant, on utilise la formule de la vitesse linéaire :

On s’intéresse dorénavant aux alignements des planètes et du point de vue d’un observateur situé à un point .

Dire que et sont alignées, vues depuis , c’est dire que les vecteurs et sont colinéaires. On le note donc :

où

Dans le cas où , on obtient le système suivant :

Ce qui conduit à l’équation :

Qui correspond donc à l’ensemble des temps t où les planètes et sont alignées du point de vue du centre de l’étoile. Les planètes sont alignées au temps t = 0 (k = 0). Pour un cas où les planètes ont un déphasage à l’origine, on notera :

On veut obtenir un ensemble similaire qui fonctionnerait pour un observateur situé sur un point quelconque du repère. Il faut raisonner en conservant l’origine de l’observateur.

Pour simplifier la factorisation de ces équations, on peut utiliser la propriété d’un vecteur normal. Si et sont colinéaires, cela revient à dire qu’un vecteur normal à est également normal à .

On définit donc un vecteur normal à dont les coordonnées les plus simples sont par définition :

On peut donc établir un système de conditions :

Il ne reste donc qu’une seule condition à vérifier :

(

On note et

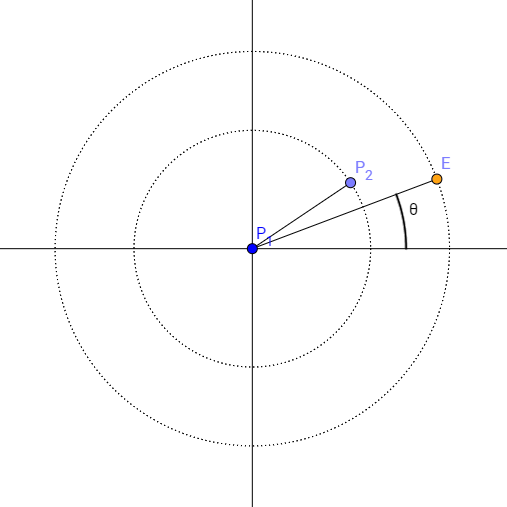
On trouve donc l’équation suivante comme condition d’alignement d’un point

Pour généraliser au cas d’un observateur mobile, on notera simplement :

On s’intéresse au mouvement de l’étoile E du point de vue de l’observateur situé sur . Si on tente d’exprimer le vecteur position, on trouve tout simplement :

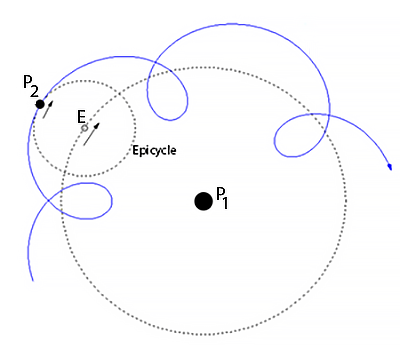
En revanche, le mouvement de vu depuis est plus complexe. On peut distinguer deux cas : Le cas où les vitesses angulaires sont les mêmes et le cas où ces valeurs sont différentes.

Si  :

C’est la situation la plus simple, la trajectoire est circulaire :

Si  :

Alors la trajectoire de vue depuis n’a plus rien de circulaire, elle semble effectuer des retours en arrière de façon périodique, elle effectue un épicycle :



\*

* \* Illustration originale : http://study.com/cimages/multimages/16/epicycle-300.gif

On souhaite introduire un nouveau satellite dans le système. Soit donc un satellite en orbite autour de .

Les coordonnées du mouvement de vu depuis suivent la même loi que les planètes autour de E, soit :

Vu depuis , on effectue le changement de référentiel :

Dire que et sont alignées, vues depuis , c’est dire que l’angle entre les vecteurs et est nul. On peut l’écrire :

On a donc pour condition d’alignement des planètes vues de la satisfaction de l’équation E.

On souhaite connaître l’ensemble des t tels que E est satisfaite. On développe donc l’égalité précédente :

D’après (E) on tire l’égalité suivante :

On prend le cas où  :