Bigbugs

Gavin的博客

首页 归档 关于

扩散方程最简显格式

Sep 28, 2018 | 576 字 | 2 分钟 | 偏微分方程 / 偏微分方程数值解

本文作者： Gavin <meetgavinyu@gmail.com>

本文链接： www.bigbugs.cn/偏微分方程/偏微分方程数值解/扩散方程最简显格式.html

扩散方程是抛物型方程的最简单模型方程，这里只讨论常系数的扩散方程，给出其最简差分格式。

文章目录

扩散方程的形式

扩散方程的形式基本为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u$$

其中，Δ为拉普拉斯算子，即$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$，对于一维的情形，该方程即为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

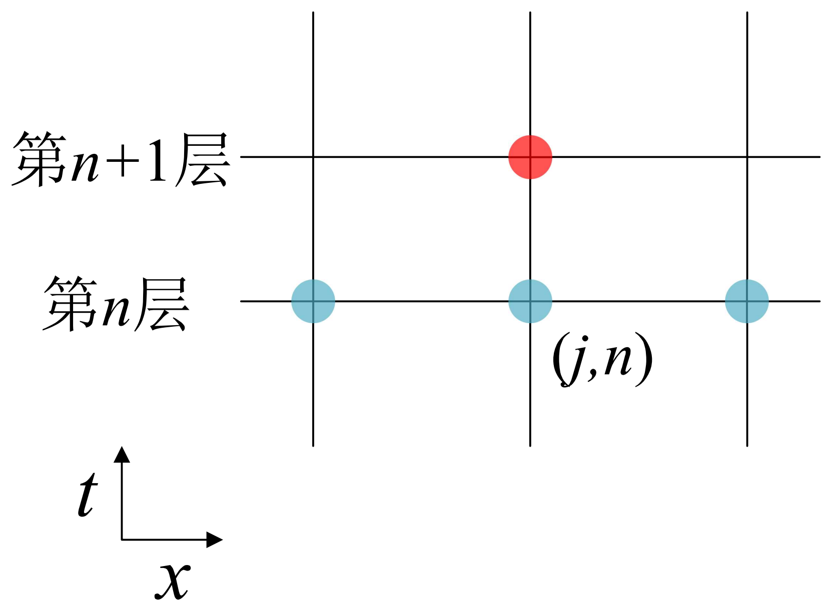
扩散方程差分格式

其最简显格式为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}=0$$

其中n为时间层网格点变量，j为空间层网格点变量，τ为时间层步长，h为空间层步长。也就是说$u_j^n=u(jh,n\tau)$。

实际上从上面的差分格式可以看出来，只要知道第n层的数值，就可以算出第n+1层的数值。也就是说知道了上一个时刻所有的温度分布，就可以算出来下一个时刻的所有温度分布。如下图所示，从三个蓝色的点的值可以算出来红色点的值。



这样的话，就不需要再写出差分方程组，而对这个方程组直接求解了，也就是说使用最简显格式求解数值解只需要迭代一遍就可以。如下式所示。

$$u_j^{n+1}=u_j^n+a\frac{\tau}{h^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

其中我们令$r=a\frac{\tau}{h^2}$，称其为**网格比**，对于显格式，只有满足$r\leq\frac{1}{2}$才可以得到正确的数值解，这是差分格式的稳定性条件。

热传导方程的情况

热传导方程与扩散方程形式相同，只是系数不同

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中ρ为材料密度，c为比热容，k为热传导系数。

仿照上面的差分格式，稍微改变系数就可以得到热传导方程的差分格式。

$$\rho c\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-k\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}=0$$

同样的，其网格比为$r=\frac{k\tau}{\rho c h^2}$，同样要小于$\frac{1}{2}$才可以的正常的结果。

FDE

差分格式的性质

有限差分法简介