Band

Prova Bimestral

G182011
1.a Série
Matemática – Álgebra
Denis/Fábio Cáceres/Fátima Regina/Lucas
18/6/2018

Parte I: Testes (valor: 3,5)

1. **Qual o conjunto solução da seguinte equação?**

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x+2} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^{6x}$$

a. $S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

b. $S = \left\{-\frac{6}{7}\right\}$

c. $S = \left\{+\frac{6}{5}\right\}$

d. $S = \left\{+\frac{6}{7}\right\}$

e. $S = \left\{-\frac{7}{5}\right\}$

$(2^{-3})^{x+2} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{6x}$

$2^{-3x-6} = 2^{4x}$

$-3x - 6 = 4x$

$-7x = +6$

$x = -\frac{6}{7}$

$S = \left\{-\frac{6}{7}\right\}$

---

2. **Qual o conjunto solução da seguinte equação?**

$$5 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^{x+3} = 48$$

a. $S = \{+8\}$

b. $S = \{+1\}$

c. $S = \left\{+\frac{1}{3}\right\}$

d. $S = \left\{+\frac{16}{5}\right\}$

e. $S = \{+3\}$

$5 \cdot 2^1 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x = 48$

$10 \cdot 2^x - 12 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x = 48$

$6 \cdot 2^x = 48$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

$S = \{3\}$

---

3. **Qual o conjunto solução da seguinte equação?**

$$(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

a. $S = \{-1, +9\}$

b. $S = \{+9\}$

c. $S = \{+2\}$

d. $S = \left\{+2, -\frac{1}{3}\right\}$

e. $S = \{+2, +9\}$

$3^x = a$

$a^2 - 8a - 9 = 0$

$(a - 9)(a + 1) = 0$

$$\begin{cases} a = 9 \Longrightarrow 3^x = 9 \Longrightarrow 3^x = 3^2 \Longleftrightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ a = -1 \Longrightarrow 3^x = -1, \nexists\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$S = \{2\}$

4. **A raiz da equação da equação** $\left(3^{x-1}+5\sqrt{2}\right)\left(3^{x-1}-5\sqrt{2}\right)=31$ **é:**

a. 1
b. 3
c. 81
d. 83
e. $\frac{82}{2}$

Lembrando: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(3^{x-1})^2-\left(5\sqrt{2}\right)^2=31$

$3^{2x-2}-50=31$

$3^{2x-2}=81$

$3^{2x-2}=3^4$

$2x-2=4$

$2x=6$

$x=3$

---

5. **Qual o valor de** x **na seguinte equação?**

$3^{\log_5(x+4)}=27$

a. 3
b. -1
c. 1
d. 11
e. 121

$3^{\log_5(x+4)}=3^3$

$\log_5(x+4)=3$

$x+4=5^3$

$x+4=125$

$x=121$

---

6. **Se** $\log 2=a$, $\log 3=b$ **e** $\log 7=c$, **qual alternativa mostra** $\log_5 21$ **em função de** a, b **e** c**?**

a. $\frac{2b+c}{a-1}$
b. $\frac{2b+c}{a}$
c. $\frac{b+c}{a}$
d. $\frac{b+c}{a-1}$
e. $\frac{b+c}{1-a}$

$$\log_5 21=\frac{\log 21}{\log 5}=\frac{\log 3\cdot 7}{\log\left(\frac{10}{2}\right)}=\frac{\log 3+\log 7}{\log 10-\log 2}=\frac{b+c}{1-a}$$

---

7. **Qual o conjunto solução da seguinte equação?**

$\log_2[\log_{(x-1)}(21-x)]=1$

a. $S=\{+4\}$
b. $S=\{-4\}$
c. $S=\{-4,+5\}$
d. $S=\{+5\}$
e. $S=\{+4,+5\}$

$\log_2[\log_{(x-1)}(21-x)]=1$

$\log_{(x-1)}(21-x)=2^1$

$\log_{(x-1)}(21-x)=2$

$(x-1)^2=21-x$

$x^2-2x+1=21-x$

$x^2-x-20=0$

$(x-5)(x+4)=0$

$x-5=0$ ou $x+4=0$

$x=5$ ou $\boldsymbol{x=-4}$ (não convém)

$S=\{5\}$

8. Qual o conjunto solução da seguinte equação?

$\log x^2 = \log_{10} 7 \cdot \log_7 9$

a. $S = \{+3\}$
b. $S = \{-9\}$
c. $S = \{+3, -3\}$
d. $S = \{+9\}$
e. $S = \{+9, -9\}$

$\log x^2 = \frac{\cancel{\log 7}}{\log 10} \cdot \frac{\log 9}{\cancel{\log 7}}$

$\log x^2 = \log_{10} 9$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$S = \{-3, 3\}$

---

9. Qual o conjunto solução da seguinte equação?

$(\log_2 x)^2 - 3 \cdot \log_2 x = 10$

a. $S = \{+5\}$
b. $S = \{-2, +5\}$
c. $S = \{+32\}$
d. $S = \{+10\}$
e. $S = \left\{+\frac{1}{4}, +32\right\}$

$\log_2 x = a$

$a^2 - 3a - 10 = 0$

$(a - 5)(a + 2) = 0$

$a = 5$ ou $a = -2$

$\log_2 x = 5$ ou $\log_2 x = -2$

$x = 32$ ou $x = \frac{1}{4}$

$S = \left\{+\frac{1}{4}, +32\right\}$

---

10. Qual o conjunto solução da seguinte equação?

$\log_4 (\sqrt[3]{2})^x = \frac{5}{2}$

a. $S = \{+3\}$
b. $S = \{+5\}$
c. $S = \{+15\}$
d. $S = \left\{+\frac{5}{3}\right\}$
e. $S = \left\{+\frac{3}{5}\right\}$

Pela definição de logarítimo, temos:

$(4)^{\frac{5}{2}} = (\sqrt[3]{2})^x$

$(2^2)^{\frac{5}{2}} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x$

$2^5 = 2^{\frac{x}{3}}$

$5 = \frac{x}{3}$

$x = 15$

$S = \{15\}$

Parte II: Questões (valor: 6,5)

1. (valor: 1,5) Resolva as equações abaixo:

a. (valor: 0,75) $25^x + 5^x - 2 = 0$

$(5^2)^x + 5^x - 2 = 0$

$(5^x)^2 + 5^x - 2 = 0$

$5^x = a$

$a^2 + a - 2 = 0$

$(a + 2)(a - 1) = 0$

$a + 2 = 0$ ou $a - 1 = 0$

$5^x = -2$ ou $5^x = 1$

ò $x \in$ IR $\qquad x = 0$

$S = \{0\}$

---

b. (valor: 0,75) $\log_2 (2 - x) - \log_4 (17 - x) = 1$

$\log_2 (2 - x) - \log_{2^2} (17 - x) = 1$

$\log_2 (2 - x) - \frac{1}{2} \cdot \log_2 (17 - x) = 1$

$\log_2 (2 - x) - \log_2 (17 - x)^{\frac{1}{2}} = 1$

$\log_2 \frac{2 - x}{\sqrt{17 - x}} = 1$

$\frac{2 - x}{\sqrt{17 - x}} = 2$

$\left(\frac{2 - x}{\sqrt{17 - x}}\right)^2 = 2^2$

$\frac{4 - 4x + x^2}{17 - x} = 4$

$4 - 4x + x^2 = 4(17 - x)$

$x^2 = 64$

$x = 8$ ou $x = -8$

Pela condição de existência do logarítimo, $x = 8$, não convém.

$S = \{-8\}$

---

2. (valor: 0,75) Resolva a equação $2 \cdot \log_{\sqrt{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} x = 15$

$2 \cdot \log_{3^{\frac{1}{2}}} x - \log_{3^{-1}} x = 15$

$2 \cdot 2 \cdot \log_3 x - (-1) \log_3 x = 15$

$4 \cdot \log_3 x + \log_3 x = 15$

$5 \cdot \log_3 x = 15$

$\log_3 x = 3$

$x = 27$

$S = \{27\}$

3. (valor: 0,5) O gráfico mostra, em função do tempo, a evolução do número de bactérias em certa cultura. Utilizando as informações contidas no gráfico, determine:

a. os valores de a e b.

(1) $N(t) = a \cdot b^t$

$t = 0 \Rightarrow N = 200$

$200 = a \cdot b^0$

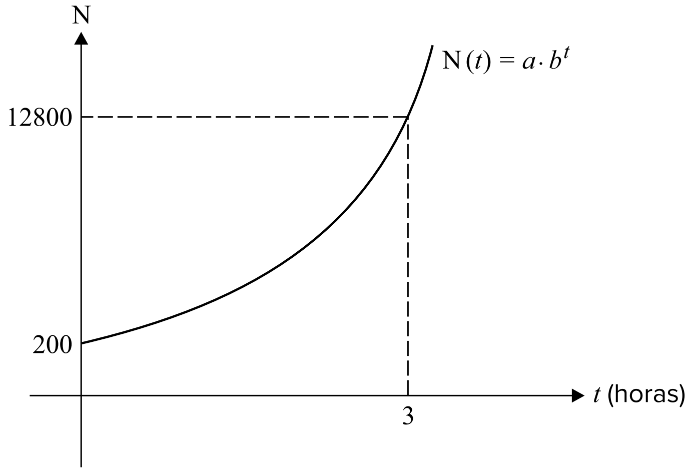
$\boldsymbol{a = 200}$

(2) $t = 3 \Rightarrow N = 12800$

$12800 = 200 \cdot b^3$

$64 = b^3$

$\boldsymbol{b = 4}$



desenho ilustrativo fora de escala

b. o número de bactérias após 90 minutos do início das observações.

$t = 1{,}5 \Rightarrow N = ?$

$N(1{,}5) = 200 \cdot 4^{1{,}5}$

$N(1{,}5) = 200 \cdot (2^2)^{\frac{3}{2}}$

$N(1{,}5) = 200 \cdot 2^3$

$N(1{,}5) = 200 \cdot 8 = 1600$

$a = 200$, $b = 4$ e $N = 1600$

4. (valor: 0,75) Com base na figura determine:

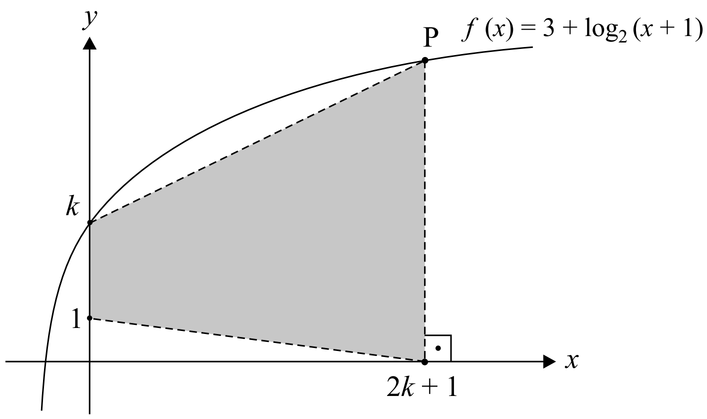
a. o valor de k.

$(0; k) \in f$

$k = 3 + \log_2(0 + 1)$

$k = 3 + 0$

$\boldsymbol{k = 3}$



b. as coordenadas do ponto P.

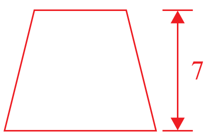
$P = (2k + 1; y_p) \in f$

$y_p = 3 + \log_2(7 + 1)$

$y_p = 3 + \log_2 8 = 6$

$\mathbf{P = (7; 6)}$

c. a área sombreada.



$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(6+2)\cdot 7}{2} = 4\cdot 7 = 28$$

$k = 3$, $P = (7; 6)$ e área $= 28$

---

5. (valor: 1,0) (ENEM-2013/Adaptado) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot e^{-k\cdot t}$ onde A é a massa inicial, e é o número de Euler e k é uma constante. Considere $0{,}69$ como aproximação para $\ln 2$ e $2{,}30$ como aproximação para $\ln 10$. Nessas condições, determine:

a. (valor: 0,5) o valor da constante k.

Do enunciado, a meia vida do césio-137 é 30 anos, ou seja, $M(30) = \frac{A}{2}$

Assim, $M(30) = A\cdot e^{-k\cdot(30)} \Rightarrow \frac{A}{2} = A\cdot e^{-30\cdot k} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-30\cdot k} \Rightarrow 2^{-1} = e^{-30\cdot k}$

Aplicando o logarítimo com base e (neperiano) nos dois membros da equação $e^{-30\cdot k} = 2^{-1}$, temos:

$lne^{-30\cdot k} = ln2^{-1} \Rightarrow -30\cdot k\cdot lne = -ln2$, como $lne = 1$ e $ln2 = 0{,}69$, segue que

$30\cdot k = 0{,}69 \Rightarrow k = \frac{0{,}69}{30} \Rightarrow \mathbf{k = 0{,}023}$

---

b. (valor: 0,5) o tempo t necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial.

Seja t_1 o tempo necessário para que a massa de césio-137 seja reduzida a 10% da massa inicial, ou seja, $M(t_1) = \frac{10}{100}\cdot A = \frac{A}{10}$

Assim,

$M(t_1) = A\cdot e^{-k\cdot t_1} \Rightarrow \frac{A}{10} = A\cdot e^{-k\cdot t_1} \Rightarrow 10^{-1} = e^{-k\cdot t_1}$

Aplicando o logaritmo com base e (neperiano) nos dois membros da equação $e^{-k\cdot t_1} = 10^{-1}$, temos:

$lne^{-k\cdot t_1} = ln\cdot 10^{-1} \Rightarrow -k\cdot t_1\cdot lne = -ln10$, como $lne = 1$, $ln10 = 2{,}30$ e $k = 0{,}023$, segue que

$0{,}023\cdot t_1 = 2{,}30 \Rightarrow t_1 = \frac{2{,}30}{0{,}023} \Rightarrow \mathbf{t_1 = 100\ anos}$

---

6. (valor: 1,0) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde o plantio, segundo o seguinte modelo matemático:

$h(t) = 1{,}5 + \log_2(t+1)$

com $h(t)$ em metros e t em anos. Essas árvores devem ser cortadas quando seus troncos atingem $4{,}5$ m de altura. Nessas condições, determine:

a. (valor: 0,5) a altura, em metros, da muda dessa espécie de árvore no momento do plantio.

A altura da muda dessa árvore no momento do plantio é o valor numérico de $h\ (0)$, então

$h\ (0) = 1{,}5 + \log_2 (0 + 1) \Rightarrow h\ (0) = 1{,}5 + \log_2 1$, como $\log_2 1 = 0$, segue que $\boldsymbol{h\ (0) = 1{,}5\ \mathrm{m}}$

---

b. (valor: 0,5) o tempo, em anos, transcorrido do momento do plantio até o do corte.

Seja t_1 o tempo necessário para que os troncos dessas árvores atinjam $4{,}5\ \mathrm{m}$, ou seja, $h\ (t_1) = 4{,}5$

Portanto, $h\ (t_1) = 1{,}5 + \log_2 (t_1 + 1) \Rightarrow 4{,}5 = 1{,}5 + \log_2 (t_1 + 1) \Rightarrow 3 = \log_2 (t_1 + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t_1 + 1 = 2^3 \Rightarrow t_1 = 8 - 1 \Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 7}$ **anos**

---

7. (valor: 1,0) (UERJ-2008/Adaptada) Admita que, em um determinado lago, a cada $40\ \mathrm{cm}$ **de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em** 20% **de acordo com a equação** $I = I_0 \cdot (0,8)^{\frac{h}{40}}$ **na qual** I **é a intensidade da luz em uma profundidade** h**, em centímetros, e** I_0 **é a intensidade na superfície. Ao nadar nesse lago, um mergulhador verificou a intensidade da luz, nos pontos** P **e** Q **desse lago. Nessas condições, determine:**

Considere $0{,}30$ e $2{,}2$ **como aproximação, respectivamente, para** $\log 2$ **e** $\sqrt{5}$

a. (valor: 0,5) a profundidade h do ponto P, em centímetros, sabendo que nesse ponto a intensidade da luz observada é de 32% daquela observada na superfície.

Do enunciado, a intensidade da luz no ponto P é 32% daquela observada na superfície, ou seja, $I = \frac{32}{100} \cdot I_0$

Assim,

$I = I_0 \cdot (0,8)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow \frac{32}{100} \cdot I_0 = I_0 \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow \frac{32}{100} = \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}}$

Aplicando o logaritmo decimal nos dois membros da equação $\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}} = \frac{32}{100}$, temos:

$\log \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}} = \log \left(\frac{32}{100}\right) \Rightarrow \frac{h}{40} \cdot [\log 8 - \log 10] = \log 32 - \log 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h}{40} \cdot [\log 2^3 - \log 10] = \log 2^5 - \log 10^2 \Rightarrow \frac{h}{40} \cdot [3 \log 2 - \log 10] = 5 \cdot \log 2 - 2 \log 10,$

como $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 10 = 1$, segue que $\frac{h}{40} \cdot [3 \cdot 0{,}3 - 1] = 5 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{h}{40} \cdot (-0{,}1) = -0{,}5 \Rightarrow \frac{h}{40} = 5 \Rightarrow \boldsymbol{h = 200\ \mathrm{cm}}$

---

b. (valor: 0,5) a porcentagem da intensidade da luz observada no ponto Q em relação a intensidade da luz observada na superfície, sabendo que a profundidade do ponto Q é $20\ \mathrm{cm}$ (deixe a sua resposta com uma casa decimal).

Seja I_Q a intensidade da luz observda no ponto Q, cuja profundidade é $h = 20\ \mathrm{cm}$.

Então,

$I_Q = I_O \cdot (0,8)^{\frac{20}{40}} \Rightarrow I_Q = I_O \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{I_Q}{I_O} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{I_Q}{I_O} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}$, como $\sqrt{5} = 2{,}2$ segue que $\frac{I_Q}{I_O} = \frac{2}{2{,}2} \cdot 100\% \Rightarrow \boldsymbol{\frac{I_Q}{I_O} \bullet 90{,}9\%}$