Prova Bimestral

G183011
1.a Série
Matemática – Álgebra
Denis/Fábio Cáceres/Fátima Regina/Lucas
17/9/2018

Parte I: Testes (valor: 4,0)

1. As medidas dos lados de um triângulo são expressas, em metros, por $x + 1$, $2x$ e $x^2–5$, e nesta ordem, formam uma progressão aritmética. O perímetro desse triângulo é igual a:

a. 10 m
b. 12 m
c. 15 m
d. 24 m
e. 25 m

Como $(x + 1, 2x, x^2 – 5)$ é uma P.A., temos:

$2x – (x + 1) = x^2 – 5 – 2x \Rightarrow x^2 – 3x – 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x – 4) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow x = 4\text{m}$ ou $x = – 1$ m (não convém, pois $x > 0$)

Portanto, o perímetro do triângulo é 24 m.

2. (UNESP-2017) A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo h a altura da pilha em relação ao chão. A altura, em relação ao chão, de uma pilha de n cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m se n for igual a:

a. 14
b. 17
c. 13
d. 15
e. 18

(1) Note que a altura, em relação ao chão, da pilha de cadeiras segue os termos de uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = 48 + 44$ e razão $r = 3$, ou seja, P.A. = (92, 95, 98, ...).

(2) Para calcular a quantidade n de cadeiras na pilha de 1,4 m (140 cm) de altura, aplicamos a fórmula do termo geral da P.A.:

$a_n = a_1 + (n – 1) \cdot r \Rightarrow 140 = 92 + (n – 1) \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot (n – 1) = 48 \Rightarrow n – 1 = 16 \Rightarrow \mathbf{n = 17}$

Portanto, há 17 cadeiras na pilha.

3. (IFRS-2017) Uma progressão aritmética crescente é composta por 5 termos. Sabendo que o produto dos extremos é igual a 57 e que a soma dos outros 3 termos é igual a 33, determine o último termo dessa P.A.

O valor encontrado é:

a. 1
b. 3
c. 19
d. 11
e. 57

Podemos escrever uma P.A. de cinco termos da seguinte maneira:

$(x – 2r, x – r, x, x + r, x + 2r)$ onde x é o termo central e r a razão.

(1) $x – r + x + x + r = 33 \Rightarrow x = 11$

(2) $(x – 2r)(x + 2r) = 57 \Rightarrow (11 – 2r)(11 + 2r) = 57 \Rightarrow 121 – 4r^2 = 57 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4r^2 = 64 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ ou $r = – 4$ (não convém, pois a sequência é crescente, isto é, $r > 0$)

Logo, o último termo $x + 2r$ é igual a $11 + 2 \cdot (4)$, ou seja, 19.

4. (CESGRANRIO) Em uma progressão aritmética de 41 termos e de razão 9, a soma do termo do meio com o seu antecessor é igual ao último termo. Então, o termo do meio é:

a. 369
b. 189
c. 201
d. 171
e. 180

Do enunciado, temos: P.A. $= (a_1, ..., a_{20}, a_{21}, ..., a_{41})$ onde $a_{21} + a_{20} = a_{41}$ e $r = 9$.

Assim, $a_{21} + a_{21} - r = a_{21} + 20 \cdot r \Rightarrow a_{21} = 21 \cdot r \Rightarrow a_{21} = 21 \cdot 9 \Rightarrow \boldsymbol{a_{21} = 189}$

5. (CESGRANRIO) O primeiro termo de um progressão aritmética de razão 13 satisfaz $0 \le a_1 \le 10$. Se um dos termos da progressão é 35, o valor de a_1 é:

a. 7
b. 8
c. 9
d. 10
e. 3

Do enunciado: $r = 13$ e $0 \le a_1 \le 10$. Assim,

$0 + 13 \le a_2 = a_1 + r \le 10 + 13 \Rightarrow 13 \le a_2 \le 23$,

$13 + 13 \le a_3 = a_2 + r \le 23 + 13 \Rightarrow 26 \le a_3 \le 36$, como um dos termos da P.A. é 35, então $a_3 = 35$. Logo, $a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 = 35 - 26 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 9}$

6. (IFAL-2018) Em um grupo de 10 crianças, certo número de bombons foi distribuído para cada uma, em uma progressão aritmética crescente, da criança de menor estatura para a de maior estatura. Se colocarmos as crianças nessa ordem, perceberemos que a terceira criança ganhou 7 bombons e a oitava ganhou 17.

Quantos bombons foram distribuídos?

a. 100.
b. 110.
c. 120.
d. 130.
e. 140.

1.o modo:

(1) $a_8 = a_3 + (8 - 3) \cdot r \Rightarrow 17 = 7 + 5 \cdot r \Rightarrow \boldsymbol{r = 2}$

(2) $a_3 = a_1 + 2 \cdot r \Rightarrow 7 = a_1 + 4 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 3}$

(3) $a_{10} = a_8 + 2 \cdot r \Rightarrow a_{10} = 17 + 4 \Rightarrow \boldsymbol{a_{10} = 21}$

(4) $S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot \dfrac{10}{2} \Rightarrow S_{10} = (3 + 21) \cdot 5 \Rightarrow \boldsymbol{S_{10} = 120}$

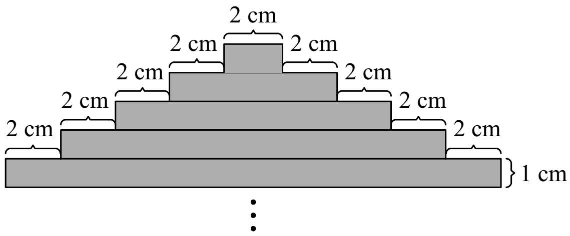
2.o modo:

$S_{10} = (a_1 + a_{10}) \cdot \dfrac{10}{2}$, como $a_1 + a_{10} = a_3 + a_8$,

segue que $S_{10} = (7 + 17) \cdot 5 \Rightarrow \boldsymbol{S_{10} = 120}$

Portanto, foram distribuídos 120 bombons.

7. (UNESP-2018) A figura mostra cinco retângulos justapostos de uma sequência. Todos os retângulos possuem mesma altura, igual a 1 cm. Sabendo que $1\ m^2$ equivale a $10.000\ cm^2$ e que a sequência é constituída por 100 retângulos, a figura formada tem área igual a:



a. $2{,}5\ m^2$.
b. $4\ m^2$.
c. $5\ m^2$.
d. $2\ m^2$.
e. $4{,}5\ m^2$.

(1) Note que a área, em cm^2, de cada retângulo da figura, do menor para o maior, segue os termos da progressão aritmética $(2, 6, 10, ...)$ de primeiro termo $a_1 = 2$, razão $r = 4$ e último termo a_{100}, já que a figura é constituída por 100 retângulos.

(2) Para calcular a área, em cm^2, do último retângulo da figura, aplicamos a fórmula do geral da P.A.:

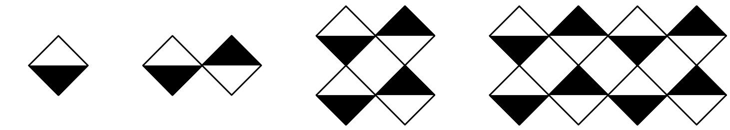
$$a_{100} = a_1 + 99 \cdot r \Rightarrow a_{100} = 2 + 99 \cdot 4 \Rightarrow a_{100} = 398$$

(3) Para calcular a área total da figura, aplicamos a fórmula da soma dos termos da P.A.:

$$S_{100} = (a_1 + a_{100}) \cdot \frac{100}{2} \Rightarrow S_{100} = (2 + 398) \cdot 50 \Rightarrow S_{100} = 20000\ cm^2$$

Portanto, a figura formada tem área igual a $2\ m^2$.

8. (IFPE-2017) Lopes é aluno do curso de Artes Visuais do campus Olinda e, entre uma aula e outra, gosta de desenhar ladrilhos triangulares conforme a figura. Seguindo o padrão, quantos triângulos pretos Lopes desenhará no ladrilho de número 10?



a. 2.048
b. 256
c. 1.024
d. 512
e. 100

(1) Note que a quantidade de triângulos pretos em cada ladrilho segue os termos da progressão geométrica $(1, 2, 4, 8, ...)$ de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = 2$.

(2) Para calcular quantos triângulos pretos haverá no décimo ladrilho, aplicamos a fórmula do termo geral da P.G.:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 1 \cdot 2^9 \Rightarrow \boldsymbol{a_{10} = 512}$$

9. (PUC-SP) Em uma progressão geométrica de termos positivos, o primeiro termo é igual a razão e o segundo termo é 3. Qual é o oitavo termo da progressão?

a. 81
b. 3^7
c. $27\sqrt{3}$
d. $\sqrt{273}$
e. 333

De acordo com o enunciado, temos a P.G. $= (q, 3, ...)$

(1) $a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow 3 = q \cdot q \Rightarrow q^2 = 3 \Rightarrow q = \sqrt{3}$ ou $q = -\sqrt{3}$ (não convém, pois é uma P.G. de termos positivos).

(2) $a_8 = a_1 \cdot q^{8-1} \Rightarrow a_8 = q \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = \left(\sqrt{3}\right)^8 \Rightarrow \boldsymbol{a_8 = 81}$

10. (ESPM-2013) Para que a sequência $(-9, -5, 3)$ se transforme numa progressão geométrica, devemos somar a cada um dos seus termos um certo número. Esse número é:

a. par.
b. quadrado perfeito.
c. primo.
d maior que 15.
e. não inteiro.

(1) De acordo com o enunciado, segue que $(x - 9, x - 5, x + 3)$ é uma P.G.

(2) Aplicando a propriedade do termo central, temos:

$(x - 5)^2 = (x - 9) \cdot (x + 3) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = x^2 - 6x - 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 52 \Rightarrow \boldsymbol{x = 13}$

Portanto, devemos somar a cada um dos seus termos um número **primo**.

11. A sequência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ é uma progressão geométrica. Então, o valor de x é igual a:

a. 1
b. 2
c. 3
d. 4
e. 5

(1) Do enunciado, segue que $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ é uma P.G.

(2) Aplicando a propriedade do termo central, temos:

$(3^{4-x})^2 = 3^{x+1} \cdot 3^{3x+1} \Rightarrow 3^{8-2x} = 3^{4x+2} \Leftrightarrow 8 - 2x = 4x + 2 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow \boldsymbol{x = 1}$

12. (FAMEMA-2017) Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, 4, a_4, a_5, a_6, 16, \ldots)$ de razão r e a progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, 4, \ldots)$ de razão q. Sabendo que $\frac{r}{q} = 6$, o valor de $a_9 - b_3$ é igual a:

a. 12.
b. 6.
c. 3.
d. 15.
e. 9.

De acordo com o enunciado, temos:

(1) $a_7 = a_3 + (7 - 3) \cdot r \Rightarrow 16 = 4 + 4 \cdot r \Rightarrow 4 \cdot r = 12 \Rightarrow \boldsymbol{r = 3}$

(2) $a_9 = a_7 + (9 - 7) \cdot r \Rightarrow a_9 = 16 + 2 \cdot 3 \Rightarrow \boldsymbol{a_9 = 22}$

(3) $\frac{r}{q} = 6 \Rightarrow q = \frac{3}{6} \Rightarrow \boldsymbol{q = \frac{1}{2}}$

(4) $b_5 = b_3 \cdot q^{5-3} \Rightarrow 4 = b_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 4 = b_3 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \boldsymbol{b_3 = 16}$

Portanto, $a_9 - b_3 = 22 - 16$, ou seja, $a_9 - b_3 = 6$

13. (PUC-RJ/2017) Os termos da soma $S = 4 + 8 + 16 + \cdots + 2.048$ estão em progressão geométrica. Assinale o valor de S.

a. 4.092
b. 4.100
c. 8.192
d. 65.536
e. 196.883

Note que os termos da soma S estão em progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_1 = 4$, a razão é $q = 2$ e último termo é $a_n = 2048$

Assim, $S = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{4 - 2048 \cdot 2}{1 - 2} \Rightarrow \boldsymbol{S = 4092}$

14. (Santa Casa) Seja uma P.A. de 7 termos e razão 6. Retirando-se o 2.o, o 3.o, o 5.o e o 6.o termos dessa P.A., a sequência restante:

a. será uma P.A. de razão – 18.
b. será uma P.G. de razão $\frac{1}{3}$.
c. será uma P.A. de razão 18.
d. será uma P.G. de razão 6.
e. não será nem P.A. e nem P.G.

Do enunciado, temos a
P.A. $= (x - 18, x - 12, x - 6, x, x + 6, x + 12, x + 18)$

Retirando-se o 2.o, o 3.o, o 5.o e o 6.o termos dessa P.A., note que a sequência restante $(x - 18, x, x + 18)$ é uma P.A. de razão 18.

15. (UNICAMP-2015) Uma compra no valor de 1.000 reais será paga com uma entrada de 600 reais e uma mensalidade de 420 reais. A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a:

a. 2%.
b. 5%.
c. 8%.
d. 10%.
e. 12%.

Após a entrada de 600 reais, o saldo devedor em relação ao preço inicial é de $1000 - 600 = 400$ reais.

Como a mensalidade é de 420 reais, então a taxa de juros aplicada foi de $\frac{420 - 400}{400} = 0{,}05 = 5\%$ ao mês.

16. (PUC-SP) A sequência $(1, a, b)$ é uma progressão aritmética e a sequência $(1, b, a)$ é uma progressão geométrica não constante. O valor de a é:

a. $-\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{4}$
c. 1
d. 2
e. 4

(1) Do enunciado, temos a P.A. = $(1, a, b)$ e a P.G. = $(1, b, a)$, com $b \neq a \neq 1$.

(2) Termo central da P.A.: $a = \frac{1+b}{2} \Rightarrow b = 2a - 1$ (I)

(3) Termo central da P.G.: $b^2 = 1 \cdot a \Rightarrow b^2 = a$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$(2a-1)^2 = a \Rightarrow 4a^2 - 4a + 1 = a \Rightarrow 4a^2 - 5a + 1 = 0 \Rightarrow (4a-1)\cdot(a-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$ ou $a = 1$ (não convém)

Logo, $a = \frac{1}{4}$

Parte II: Questões (valor: 6,0)

1. (valor: 1,0) Determine a razão e vigésimo termo de cada uma das sequências abaixo:

a. $(2, 2\sqrt{2}, 4, \dots)$

(1) Note que $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ e $\frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, então a sequência $(2, 2\sqrt{2}, 4, \dots)$ é uma progressão geométrica de razão $\boldsymbol{q = \sqrt{2}}$

(2) Para calcular o vigésimo termo dessa sequência, aplicamos a fórmula do termo geral da P.G.:

$a_{20} = a_1 \cdot q^{19} \Rightarrow a_{20} = 2 \cdot (\sqrt{2})^{19} \Rightarrow a_{20} = 2 \cdot (\sqrt{2})^{18} \cdot (\sqrt{2}) \Rightarrow a_{20} = 2 \cdot 2^9 \cdot (\sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{20} = 2^{10} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{a_{20} = 1024 \cdot \sqrt{2}}$

Resposta: $q = \sqrt{2}$ e $a_{20} = 1024 \cdot \sqrt{2}$

---

b. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \dots\right)$

(1) Note que $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}$ e $\frac{3}{2} - \frac{7}{6} = \frac{1}{3}$, então a sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \dots\right)$ é uma progressão aritmética de razão $\boldsymbol{r = \frac{1}{3}}$

(2) Para calcular o vigésimo termo dessa sequência, aplicamos a fórmula do termo geral da P.A.:

$a_{20} = a_1 + 19 \cdot r \Rightarrow a_{20} = \frac{1}{2} + 19 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{20} = \frac{3+38}{6} \Rightarrow \boldsymbol{a_{20} = \frac{41}{6}}$

Resposta: $r = \frac{1}{3}$ e $a_{20} = \frac{41}{6}$

2. (valor: 1,0) Escreva os 3 primeiros termos de cada uma das sequências abaixo:

a. progressão aritmética $\begin{cases} a_{12} + a_{21} = 302 \\ a_{23} + a_{46} = 446 \end{cases}$

Reescrevendo as equações acima em função do primeiro termo a_1 e da razão r da P.A., temos:

$$\begin{cases} a_1 + 11 \cdot r + a_1 + 20 \cdot r = 302 \\ a_1 + 22 \cdot r + a_1 + 45 \cdot r = 446 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 31 \cdot r = 302 & \text{(I)} \\ 2a_1 + 67 \cdot r = 446 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$67 \cdot r - 31 \cdot r = 446 - 302 \Rightarrow 36 \cdot r = 144 \Rightarrow \boldsymbol{r = 4}$

Substituindo $r = 4$ em (I), obtemos:

$2a_1 + 31 \cdot (4) = 302 \Rightarrow 2a_1 = 178 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 89}$

Logo, P.A. = $(89, 93, 97, ...)$

---

b. progressão geométrica $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 7 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 56 \end{cases}$

Reescrevendo as equações acima em função do primeiro termo a_1 e da razão q da P.G., temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 7 \\ a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 56 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot (1 + q + q^2) = 7 & \text{(I)} \\ a_1 q^3 \cdot (1 + q + q^2) = 56 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo (II) por (I), obtemos: $q^3 = \dfrac{56}{7} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow \boldsymbol{q = 2}$

Substituindo $q = 2$ em (I), segue que: $a_1 \cdot (1 + 2 + 4) = 7 \Rightarrow a_1 \cdot (7) = 7 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 1}$

Logo, P.G. = $(1, 2, 4, ...)$

---

3. (valor: 1,0) Um incêndio no Parque Nacional da Chapada Diamantina, que durou exatamente 6 dias, devastou 60 hectares nos três primeiros dias. Suponha que, a partir do segundo dia, o fogo tenha destruído sempre 8 hectares a mais do que no dia anterior. A partir desses dados, calcule, em hectares, a área que foi destruída pelo incêndio:

a. (valor: 0,5) no primeiro dia

b. (valor: 0,5) nos seis dias.

Note que a área destruída pelo fogo a cada dia segue os termos de uma progressão aritmética de razão 8 é cuja soma dos três primeiros termos é 60, ou seja, $r = 8$ e $a_1 + a_2 + a_3 = 60$. Sendo assim, temos:

(1) $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 60 \Rightarrow 3a_1 + 3r = 60 \Rightarrow a_1 = 20 - r \Rightarrow a_1 = 20 - 8 \Rightarrow \boldsymbol{a_1 = 12}$

(2) $a_6 = a_1 + 5 \cdot r \Rightarrow a_6 = 12 + 5 \cdot 8 \Rightarrow a_6 = 12 + 40 \Rightarrow \boldsymbol{a_6 = 52}$

(3) $S_6 = (a_1 + a_6) \cdot \dfrac{6}{2} \Rightarrow S_6 = (12 + 52) \cdot 3 \Rightarrow \boldsymbol{S_6 = 192}$

Portanto, foram destruídos 12 hectares no primeiro dia e 192 hectares ao longo dos seis dias.

4. (valor: 1,0) Certa população de bactérias dobra a cada hora. Num certo dia, às 8 horas da manhã a população era de 1000 bactérias. Nessas condições, responda:

a. (valor: 0,5) qual será a população de bactérias às 11 horas da manhã desse mesmo dia?

(1) Note que a população de bactérias, a cada hora, segue os termos da progressão geométrica (1000, 2000, 4000, ...) de primeiro termo $a_1 = 1000$ e razão $q = 2$.

(2) Para calcular a população de bactérias às 11 h, quarto termo dessa sequência, aplicamos a fórmula do termo geral da P.G.:

$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = 1000 \cdot (2)^3 \Rightarrow \boldsymbol{a_4 = 8000}$

Portanto, às 11 h a população será de 8000 bactérias.

---

b. (valor: 0,5) a que horas a população será de 512.000?

Para calcular qual a posição do termo 512.000 na sequência, aplicamos novamente a fórmula do termo geral da P.G.:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 512000 = 1000 \cdot (2)^{n-1} \Rightarrow 2^9 = 2^{n-1} \Leftrightarrow 9 = n - 1 \Rightarrow \boldsymbol{n = 10}$

Logo, às 17 h, desse mesmo dia, a população será de 512000 bactérias.

---

5. (valor: 1,0) (IME-RJ) A soma de três números que formam uma progressão aritmética crescente é 36. Determine esses números sabendo que se somarmos 6 unidades ao último eles passam a constituir uma progressão geométrica.

Sabendo que se três números são termos consecutivos de uma P.A. de razão r e cujo termo central é x, podemos afirmar que o antecessor de x é $x - r$ e o sucessor é $x + r$, ou seja, P.A. = $(x - r, x, x + r)$

Do enunciado, temos:

(1) $x - r + x + x - r = 36 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$

(2) A sequência $(12 - r, 12, 18 + r)$ é um P.G., então:

$\dfrac{12}{12 - r} = \dfrac{18 + r}{12} \Rightarrow 144 = -r^2 - 6r + 216 \Rightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Rightarrow (r + 12) \cdot (r - 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 6$ ou $r = -12$ (não convém, pois a P.A. é crescente, isto é, $r > 0$)

Portanto, os números a serem determinados são 6, 12 e 18.

---

6. (valor: 0,5) Uma forte chuva começa a cair sobre uma casa formando uma goteira no teto da sala. Uma primeira gota cai e 30 segundos depois cai uma segunda gota. A chuva se intensifica de tal forma que uma terceira gota cai 15 segundos após a queda da segunda gota. Assim, o intervalo de tempo entre as quedas de duas gotas consecutivas reduz-se à metade na medida em que a chuva piora. Se a situação assim se mantiver, em quanto tempo, aproximadamente, desde a queda da primeira gota, a goteira se transformará em um fio contínuo de água?

(1) Note que o intervalo de tempo entre as quedas de duas gotas consecutivas segue os termos da progressão geométrica (30, 15, ...) de primeiro termo $a_1 = 30$ e razão $q = \dfrac{1}{2}$

(2) Para calcular em quanto tempo a goteira se transformará em um fio contínuo de água, aplicamos a fórmula da soma da P.G. infinita. Assim:

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S_\infty = \dfrac{30}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = \dfrac{30}{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_\infty = 60$

Portanto, em aproximadamente 60 s após a queda da primeira gota teremos um fio contínuo de água.

7. (valor: 0,5) (UERJ-2012/Adaptada) Um atleta fez n séries de flexões de braço. No entanto, como consequência das alterações da contração muscular devidas ao acúmulo de ácido lático, o tempo de duração de cada série, a partir da segunda, foi sempre 28% maior do que o tempo gasto para fazer a série imediatamente anterior. A primeira série foi realizada em 25 segundos e a última em 1 minuto e 40 segundos (100 segundos). Nessas condições, responda o que se pede:

a. (valor: 0,25) escreva os três primeiros termos da sequência que caracteriza o tempo de duração de cada série.

b. (valor: 0,25) determine n. (considere $\log 2 = 0{,}3$)

(1) Note que o tempo de duração de cada série segue os termos da progressão geométrica $(25, \ldots, 100)$ de primeiro termo $a_1 = 25$, último termo $a_n = 100$ e razão $q = 1{,}28$

(2) Para calcular quantas n séries o atleta fez, aplicamos a fórmula do termo geral da P.G.:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 100 = 25 \cdot (1{,}28)^{n-1} \Rightarrow (1{,}28)^{n-1} = 4$, aplicando o logarítimo decimal (base 10) nos dois membros da equação $(1{,}28)^{n-1} = 4$, temos:

$\log (1{,}28)^{n-1} = \log 4 \Rightarrow (n-1) \cdot \log \left(\frac{128}{100}\right) = \log 4 \Rightarrow (n-1) \cdot (\log 2^7 - \log 10^2) = \log 2^2 \Rightarrow$

$(n-1) \cdot (7 \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 10) = 2 \cdot \log 2$, como $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 10 = 1$, segue que

$(n-1) \cdot (7 \cdot 0{,}30 - 2 \cdot 1) = 2 \cdot 0{,}30 \Rightarrow (n-1) \cdot (0{,}1) = 0{,}6 \Rightarrow n - 1 = 6 \Rightarrow \boldsymbol{n = 7}$

Resposta: a. $(25; 32; 40{,}96; \ldots)$ b. 7 séries.