Colégio Bandeirantes

Caderno de Questões

Bimestre	Disciplina	Turmas	Período	Data da prova	**P 174011**
4.o	Matemática - Álgebra	1.a Série	M	21/11/2017	

Questões	Testes	Páginas	Professor(es)
10	8	2	Fábio Cáceres/Fátima Regina/Sílvia Guiti

Verifique cuidadosamente se sua prova atende aos dados acima e, em caso negativo, solicite, imediatamente, outro exemplar. Não serão aceitas reclamações posteriores.

Aluno(a)	Turma	N.o

Nota	Professor	Assinatura do Professor

Instruções:

1. A prova pode ser resolvida a lápis, mas respostas finais somente a tinta azul ou preta.
2. Únicos materiais permitidos: lápis (ou lapiseira), caneta e borracha.
3. Resposta que não vier acompanhada de resolução não será considerada.
4. Ao término da prova, entregue somente as folhas de respostas.

Note e adote:

Termo geral da P.A.	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
Soma de n termos da P.A. finita	$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$
Termo geral da P.G.	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
Soma de n termos da P.G. finita	$S_n = \dfrac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q}$ ou $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$

Parte I: Testes (valor: 2,0)

01. Em uma progressão aritmética, sabe-se que $a_{10} = 10$ e $a_{12} = 22$. O décimo terceiro termo é:

a. 34
b. 24
c. 28
d. 30
e. 44

02. Em uma progressão aritmética de quatro termos, a soma de seus termos é 42. Sabendo-se que o primeiro termo é 3. Então, a razão dessa P.A. é igual a:

a. 3
b. 5
c. 8
d. 10
e. 15

03. Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros são: $1 - a$; $-a$; $\sqrt{11 - a}$. O quarto termo dessa P.A. é:

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

04. O terceiro termo de uma progressão aritmética é 11 e a razão é 4. A soma dos 20 primeiros termos é:

a. 790
b. 800
c. 810
d. 820
e. 830

05. Na progressão geométrica $(x^2, x, \log x)$, de razão q, x é um número real e positivo. Então, $\log(q)$ vale:

a. 1
b. -1
c. -2
d. 2
e. $\frac{1}{2}$

06. O terceiro e o sétimo termos de uma progressão geométrica valem, respectivamente, 10 e 18. O quinto termo dessa progressão é:

a. 14
b. $\sqrt{30}$
c. $2\sqrt{7}$
d. $6\sqrt{5}$
e. 30

07. A sequência $(2x + 5, x + 1, \frac{x}{2}, \cdots)$, com $x \in \mathrm{IR}$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo dessa sequência é:

a. 2
b. 3^{-10}
c. 3
d. 3^{10}
e. 3^{12}

08. O número que deve ser subtraído de 1, de $\frac{11}{8}$ e de $\frac{31}{16}$ para que os resultados formem, nessa mesma ordem, uma progressão geométrica é:

a. 2
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{8}$
e. $\frac{1}{16}$

Folha de Respostas

Bimestre	Disciplina	Data da prova	**P 174011**
4.o	Matemática -Álgebra	21/11/2017	p 1

Aluno(a) / N.o / Turma

Assinatura do Aluno	Assinatura do Professor	Nota

Parte I: **Testes (valor: 2,0)**

Quadro de Respostas

Obs.: 1. Faça marcas sólidas nas bolhas sem exceder os limites.
2. Rasura = Anulação.

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
b.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
c.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
d.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
e.	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

Parte II: **Questões Dissertativas (valor: 8,0)**

01. (valor: 1,0) Resolva as inequações nos casos abaixo

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4} \geq 8^{2-x}$

b. $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

02. (valor: 1,0) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3) \geq 0$

03. (valor: 1,0) Dada a progressão aritmética (–73, –69, ...), determine:

a. a razão da P.A.

b. o termo da 30.a posição

c. a soma dos 30 termos iniciais

d. o número mínimo de termos que devemos somar para que a soma seja positiva

$r =$ ________, $a_{30} =$ ________, $S_{30} =$ ________ e $n_{min} =$ ________

04. (valor: 0,5) Sabendo-se que a sequência $(1 - 3x, x - 2, 2x + 1)$ é uma progressão aritmética, determine:

a. o valor de x

b. a razão da P.A.

$x =$ ________ e $r =$ ________

05. (valor: 0,75) Sobre o conjunto dos múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10000, determine:

a. o número de elementos desse conjunto

b. a soma desses elementos

$n =$ _______ e $S_n =$ _______

06. (valor: 0,75) Determine três números em uma progressão aritmética (termos consecutivos), crescente, sabendo que sua soma é 21 e o produto 231.

P.A. = (,   ,   )

07. (valor: 0,75) Dada a progressão geométrica $\left(\frac{27}{4}, -\frac{9}{2}, \cdots\right)$, determine:

a. a razão da P.G.

b. o termo da quinta posição.

c. a soma dos cinco termos iniciais.

$q =$ _______, $a_5 =$ _______ e $S_5 =$ _______

08. (valor: 0,75) Determine a razão de uma progressão geométrica cujos termos satisfazem as relações: $a_2 + a_4 + a_6 = 10$ e $a_1 + a_3 + a_5 = 5$.

$q =$ ___________

09. (valor: 0,75) Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são positivos e coincidentes. Sabe-se ainda que o segundo termo da P.A. excede o segundo termo da P.G. em 2. Então, qual o valor do terceiro termo dessas progressões?

Resposta: ____________________

10. (valor: 0,75) Resolva a equação $x - 1 + 2x - 3 + 3x - 5 + \cdots + 50x - 99 = 50$

$x =$ ___________

Colégio Bandeirantes

Parte I: Testes (valor: 2,0)

01. Em uma progressão aritmética, sabe-se que $a_{10} = 10$ e $a_{12} = 22$. O décimo terceiro termo é:

a. 34
b. 24
c. 28
d. 30
e. 44

Aplicando a fórmula do termo central da P.A., temos:

(1) $a_{11} = \dfrac{a_{10} + a_{12}}{2} \Rightarrow a_{11} = \dfrac{10 + 22}{2} \Rightarrow a_{11} = 16$

(2) $a_{12} = \dfrac{a_{11} + a_{13}}{2} \Rightarrow 22 = \dfrac{16 + a_{13}}{2} \Rightarrow \boldsymbol{a_{13} = 28}$

02. Em uma progressão aritmética de quatro termos, a soma de seus termos é 42. Sabendo-se que o primeiro termo é 3. Então, a razão dessa P.A. é igual a:

a. 3
b. 5
c. 8
d. 10
e. 15

Pela definição da P.A., obtemos $(3,\ 3 + r,\ 3 + 2r,\ 3 + 3r)$, onde r é a razão da P.A..
Logo, $3 + 3 + r + 3 + 2r + 3 + 3r = 42 \Rightarrow 6r = 30 \Rightarrow \boldsymbol{r = 5}$

03. Em uma progressão aritmética de termos positivos, os três primeiros são: $1 - a$; $-a$; $\sqrt{11 - a}$. O quarto termo dessa P.A. é:

a. 2
b. 3
c. 4
d. 5
e. 6

Aplicando a fórmula do termo central da P.A., temos:

(1) $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow -a = \dfrac{1 - a + \sqrt{11 - a}}{2} \Rightarrow -2a = 1 - a + \sqrt{11 - a} \Rightarrow a + 1 = -\sqrt{11 - a} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 + 2a + 1 = 11 - a \Rightarrow a^2 + 3a - 10 = 0 \Rightarrow (a + 5)\,(a - 2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -5$ ou $a = 2$ (não convém, pois é uma sequência de termos positivos).

(2) $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} \Rightarrow \sqrt{11 - (-5)} = \dfrac{-(-5) + a_4}{2} \Rightarrow \boldsymbol{a_4 = 3}$

04. O terceiro termo de uma progressão aritmética é 11 e a razão é 4. A soma dos 20 primeiros termos é:

a. 790
b. 800
c. 810
d. 820
e. 830

Aplicando a fórmula do termo geral da P.A., temos:

(1) $a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot 4 \Rightarrow 11 = a_1 + 8 \Rightarrow a_1 = 3$

(2) $a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot 4 \Rightarrow a_{20} = 3 + 19 \cdot 4 \Rightarrow a_{20} = 3 + 76 \Rightarrow a_{20} = 79$

(3) A soma pedida é $S_{20} = \dfrac{(3 + 79)}{2} \cdot 20 \Rightarrow \boldsymbol{S_{20} = 820}$

05. Na progressão geométrica $(x^2, x, \log x)$, de razão q, x é um número real e positivo. Então, $\log(q)$ vale:

a. 1
b. -1
c. -2
d. 2
e. $\dfrac{1}{2}$

(1) Aplicando a fórmula do terno central da P.G.:
$(x)^2 = x^2 \cdot \log x \Rightarrow \log x = 1$, pois $x > 0$, então $x = 10$

(2) razão $q = \dfrac{x}{x^2} \Rightarrow q = \dfrac{1}{10}$

(3) Logo, $\log\left(\dfrac{1}{10}\right) = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$

06. O terceiro e o sétimo termos de uma progressão geométrica valem, respectivamente, 10 e 18. O quinto termo dessa progressão é:

a. 14
b. $\sqrt{30}$
c. $2\sqrt{7}$
d. $6\sqrt{5}$
e. 30

Aplicando a fórmula do terno central da P.G.:

$(a_5)^2 = a_3 \cdot a_7 \Rightarrow (a_5)^2 = 10 \cdot 18 \Rightarrow a_5 = 6\sqrt{5}$ ou $a_5 = -6\sqrt{5}$

Note que, se dois termos de ordem ímpar de uma P.G. são positivos ($a_3 = 10$ e $a_7 = 18$), então todos os outros termos de ordem ímpar são também positivos.

Logo, $\boldsymbol{a_5 = 6\sqrt{5}}$

07. A sequência $\left(2x + 5, x + 1, \frac{x}{2}, \ldots\right)$, com $x \in \mathrm{IR}$, é uma progressão geométrica de termos positivos. O décimo terceiro termo dessa sequência é:

a. 2
b. 3^{-10}
c. 3
d. 3^{10}
e. 3^{12}

(1) Aplicando a fórmula do termo central da P.G.:

$(x + 1)^2 = (2x + 5) \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 2x^2 + 5x \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

(2) A razão $q = \frac{x + 1}{2x + 5} \Rightarrow q = \frac{3}{9} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

(3) Aplicando a fórmula do termo geral:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{13} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{13-1} \Rightarrow \boldsymbol{a_{13} = 3^{-10}}$

08. O número que deve ser subtraído de 1, de $\frac{11}{8}$ e de $\frac{31}{16}$ para que os resultados formem, nessa mesma ordem, uma progressão geométrica é:

a. 2
b. $\frac{1}{2}$
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{1}{8}$
e. $\frac{1}{16}$

(1) Do enunciado, segue que, $\left(1 - x, \frac{11}{8} - x, \frac{31}{16} - x\right)$ é uma P.G..

(2) Aplicando a fórmula do termo central da P.G., temos:

$\left(\frac{11}{8} - x\right)^2 = (1 - x) \cdot \left(\frac{31}{16} - x\right) \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{4}}$

Parte II: **Questões (valor: 8,0)**

01. (valor: 1,0) Resolva as inequações nos casos abaixo:

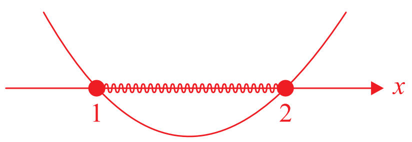
a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 4} \geq 8^{2-x}$

$(2^{-1})^{x^2-4} \geq (2^3)^{2-x}$

$2^{4-x^2} \geq 2^{6-3x} \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 6 - 3x$

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$

$(x - 1)\,(x - 2) \leq 0$



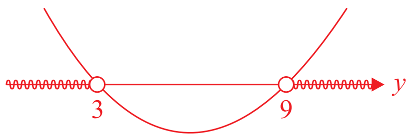
Portanto, $\mathbf{S = \{x \in IR / 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]}$

b. $9x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0$

$(3^x)^2 - 12\,(3^x) + 27 > 0$, substituindo 3^x por y e reescrevendo a inequação, temos:

$y^2 - 12y + 27 > 0$

$(y - 3)\,(y - 9) > 0$



$y < 3 \Rightarrow 3^x < 3^1 \Leftrightarrow x < 1$

ou

$y > 9 \Rightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$

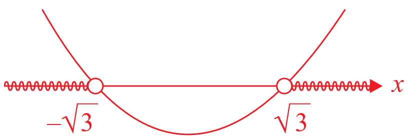
Portanto, $\mathbf{S = \{x \in IR / x < 1 \text{ ou } x > 2\} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[}$

---

02. (valor: 1,0) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) \geq 0$

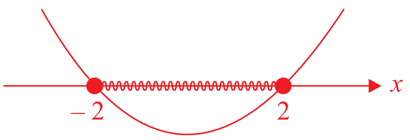
1. **Condição de existência**

   $x^2 - 3 > 0$



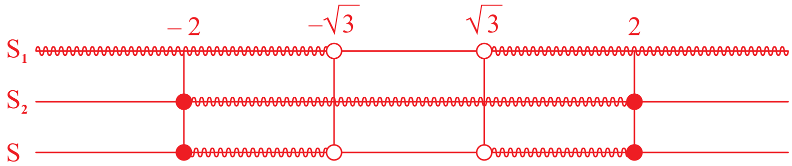
   $\mathbf{S_1 = \{x \in IR / x < -\sqrt{3} \text{ ou } x > \sqrt{3}\}}$

2. $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0$



   $\mathbf{S_2 = \{x \in IR / -2 \leq x \leq 2\}}$

3. **Quadro de intersecções** $(S_1 \cap S_2)$



   $\mathbf{S = \{x \in IR / -2 \leq x < -\sqrt{3} \text{ ou } \sqrt{3} < x \leq 2\} = [-2, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, 2]}$

---

03. (valor: 1,0) Dada a progressão aritmética (– 73, – 69, ...), determine:

a. a razão da P.A..

$r = -69 - (-73) \Rightarrow r = -69 + 73 \Rightarrow \boldsymbol{r = 4}$

b. o termo da 30.a posição.

$a_{30} = a_1 + (30 - 1) \cdot r \Rightarrow a_{30} = -73 + 29 \cdot 4 \Rightarrow a_{30} = -73 + 116 \Rightarrow \boldsymbol{a_{30} = 43}$

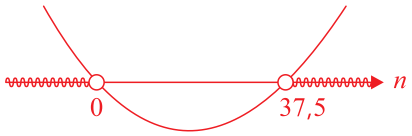
c. a soma dos 30 termos iniciais.

$S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30})}{2} \cdot 30 \Rightarrow S_{30} = (-73 + 43) \cdot 15 \Rightarrow S_{30} = (-30) \cdot 15 \Rightarrow \mathbf{S_{30} = -450}$

d. o número mínimo de termos que devemos somar para que a soma seja positiva.

$S_n > 0 \Rightarrow \dfrac{[a_1 + a_n]}{2} \cdot n > 0 \Rightarrow \dfrac{[-73 - 73 + (n-1) \cdot 4]}{2} \cdot n > 0 \Rightarrow [-75 + 2n] \cdot n > 0 \Rightarrow \mathbf{2n^2 - 75 > 0}$

$2n^2 - 75n > 0 \Rightarrow n\,(n - 37{,}5) > 0$



Logo, a menor quantidade de termos que devemos somar para obter soma positiva é 38.

---

04. (valor: 0,5) Sabendo-se que a sequência $(1 - 3x,\ x - 2,\ 2x + 1)$ é uma progressão aritmética, determine:

a. o valor de x.

Aplicando a fórmula do termo central da P.A., temos:

$a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow x - 2 = \dfrac{1 - 3x + 2x + 1}{2} \Rightarrow 2x - 4 = 2 - x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$

b. a razão da P.A..

Note que $(1 - 3x,\ x - 2,\ 2x + 1) = (-5,\ 0,\ 5)$

Logo, $r = 5 - 0 \Rightarrow \boldsymbol{r = 5}$

---

05. (valor: 0,75) Sobre o conjunto dos múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10000, determine:

a. o número de elementos desse conjunto.

Os números múltiplos de 11 compreendidos entre 100 e 10000 são 110, 121, 132, ..., 9988, 9999

Note que esses números formam uma P.A. de primeiro termo $a_1 = 110$, último termo $a_n = 9999$ e razão $r = 11$

Para calcular o número de elementos desse conjunto, aplicamos a fórmula do termo geral da P.A.:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 9999 = 110 + (n - 1) \cdot 11 \Rightarrow \boldsymbol{n = 900}$

b. a soma desses elementos.

Para calcular a soma desses números, aplicamos a fórmula da soma dos termos da P.A.:

$S_{900} = \dfrac{(110 + 9999)}{2} \cdot 900 \Rightarrow S_{900} = 10109 \cdot 450 \Rightarrow \mathbf{S_{900} = 4549050}$

---

06. (valor: 0,75) Determine três números em uma progressão aritmética (termos consecutivos), crescente, sabendo que sua soma é 21 e o produto 231.

Sabendo que se três números são termos consecutivos de uma P.A. de razão r e o termo do meio for x, podemos afirmar que o antecessor de x será $x - r$ e o sucessor será $x + r$, ou seja, P.A. $= (x - r,\ x,\ x + r)$. Então:

(1) $x - r + x + x + r = 21 \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$

(2) $(x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 231 \Rightarrow (7 - r)\,(7 + r) = 33 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ ou $r = -4$ (não convém, pois a sequência é crescente, ou seja, $r > 0$).

Logo, os três números, nesta ordem, são: 3, 7, 11

07. (valor: 0,75) Dada a progressão geométrica $\left(\frac{27}{4}, -\frac{9}{2}, \cdots\right)$, determine:

a. a razão da P.G..

$q = \left(-\frac{9}{2}\right) : \left(\frac{27}{4}\right) \Rightarrow q = \left(-\frac{9}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{27}\right) \Rightarrow \boldsymbol{q = -\frac{2}{3}}$

b. o termo da quinta posição.

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow a_5 = \frac{27}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \Rightarrow \boldsymbol{a_5 = \frac{4}{3}}$

c. a soma dos cinco termos iniciais.

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot q}{1-q} \Rightarrow S_5 = \frac{\frac{27}{4} - \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow S_5 = \frac{\frac{243+32}{36}}{\frac{5}{3}} \Rightarrow S_5 = \frac{275}{36} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \boldsymbol{S_5 = \frac{55}{12}}$$

---

08. (valor: 0,75) Determine a razão de uma progressão geométrica cujos termos satisfazem as relações: $a_2 + a_4 + a_6 = 10$ e $a_1 + a_3 + a_5 = 5$

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 10 \\ a_1 + a_3 + a_5 = 5 \end{cases}$$

Reescrevendo as relações acima em função do primeiro termo a_1 e da razão q da P.G., temos:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5 = 10 \\ a_1 + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q\,(1 + q^2 + q^4) = 10 & \text{(I)} \\ a_1 \cdot (1 + q^2 + q^4) = 5 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo (I) por (II), obtemos a razão $\boldsymbol{q = 2}$

---

09. (valor: 0,75) Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são positivos e coincidentes. Sabe-se ainda que o segundo termo da P.A. excede o segundo termo da P.G. em 2. Então, qual o valor do terceiro termo dessas progressões?

De acordo com o enunciado, temos a P.A. $= (4, y + 2, x, \ldots)$ e a P.G. $= (4, y, x, \ldots)$, com $x > 0$, então:

(1) termo central da P.A.: $y + 2 = \frac{x+4}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

(2) termo central da P.G.: $y^2 = 4x$

Substituindo (1) em (2), obtemos $x = 16$ ou $x = 0$ (não convém)

Logo, o terceiro termo dessas progressões é igua a 16.

---

10. (valor: 0,75) Resolva a equação $x - 1 + 2x - 3 + 3x - 5 + \cdots + 50x - 99 = 50$

Reescrevendo a equação, temos: $x \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 50) - (1 + 3 + 5 + \cdots + 99) = 50$

Note que $1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{(1+50)}{2} \cdot 50 = 1275$ e $1 + 3 + 5 + \cdots + 99 = \frac{(1+99)}{2} \cdot 50 = 2500$

Assim, $1275 \cdot x - 2500 = 50 \Rightarrow 1275x = 2550 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$