Band

Prova Bimestral

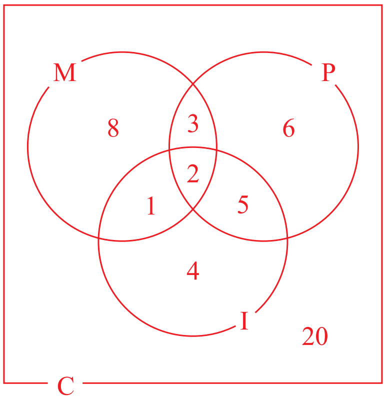
G181011
1.a Série
Matemática
Denis/Fábio Cáceres/Fátima Regina/Lucas
16/4/2018

Questões (valor: 10,0)

1. (valor: 1,0) (FUVEST-2018/Adaptada) Dentre os candidatos que fizeram provas de Matemática, Português e Inglês num concurso, 20 obtiveram nota mínima para aprovação nas três disciplinas. Além disso, sabe se que:

I. 14 não obtiveram nota mínima em Matemática;
II. 16 não obtiveram nota mínima em Português;
III. 12 não obtiveram nota mínima em Inglês;
IV. 5 não obtiveram nota mínima em Matemática e em Português;
V. 3 não obtiveram nota mínima em Matemática e em Inglês;
VI. 7 não obtiveram nota mínima em Português e em Inglês; e
VII. 2 não obtiveram nota mínima em Português, Matemática e Inglês.

Quantos candidatos participaram do concurso?



Sejam M, P e I os conjuntos dos candidatos que **não** obtiveram nota mínima para aprovação, respectivamente, em Matemática, Português e Inglês. E seja C o conjunto de todos os candidatos que prestaram essas três provas. Com os dados apresentados é possível obter o diagrama de Venn-Euler ao lado.
Deste modo, o número total de participantes do concurso foi:
$8 + 3 + 6 + 1 + 2 + 5 + 4 + 20 = 49$

2. (valor: 1,0) (Mackenzie/Adaptada) Em uma fazenda, os animais de uma certa espécie recebem diariamente a mesma quantidade de ração cada um. Para alimentar 12 animais dessa espécie, durante 8 dias, há um certo custo.
Qual é esse custo sabendo que para alimentar 18 animais dessa espécie durante 6 dias, o custo aumenta R\$ 30,00?

O problema, que consiste em uma regra de três composta, pode ser representada da seguinte forma:

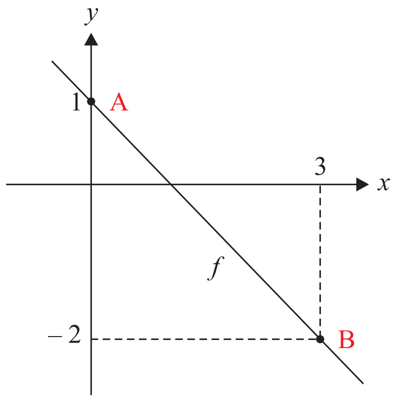
Custo (R$)	Tempo (dias)	N.o de animais
x ↑ $(x + 30)$	8 ↑ 6	12 ↑ 18

Assim, $\dfrac{x}{x+30} = \dfrac{8}{6} \cdot \dfrac{12}{18} \Rightarrow \dfrac{x}{x+30} = \dfrac{8}{9} \Rightarrow 9x = 8x + 240 \Rightarrow x = 240$

Portanto, o custo para alimentar 12 animais dessa espécie, durante 8 dias, é R\$ 240,00

3. (valor: 1,0) Determine a expressão algébrica das funções f e g mostradas abaixo, sabendo que f é função afim (1.o grau) e g é função quadrática (2.o grau).

a.



Como f é uma função afim, a expressão que a define é do tipo: $f(x) = ax + b$

Pelo gráfico, temos que os pontos A $(0, 1)$ e B $(3, -2)$ pertencem à f, logo

$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1$ (I)

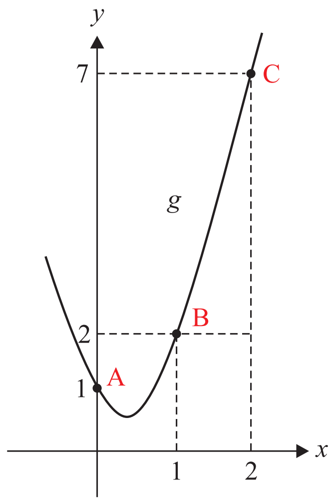
$f(3) = -2 \Rightarrow -2 = a \cdot 3 + b \Rightarrow 3a = -b - 2$ (II)

Substituindo (I) em (II) segue que

$3a = -1 - 2 \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$

Logo, a função f é dada por: $\boldsymbol{f(x) = -x + 1}$

b.



Como g é uma função quadrática, a expressão que a define é do tipo: $g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$

Pelo gráfico, temos que os pontos A $(0, 1)$, B $(1, 2)$ e C $(2, 7)$ pertencem à g, logo

$g(0) = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$

$g(1) = 2 \Rightarrow 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b = 1$ (I)

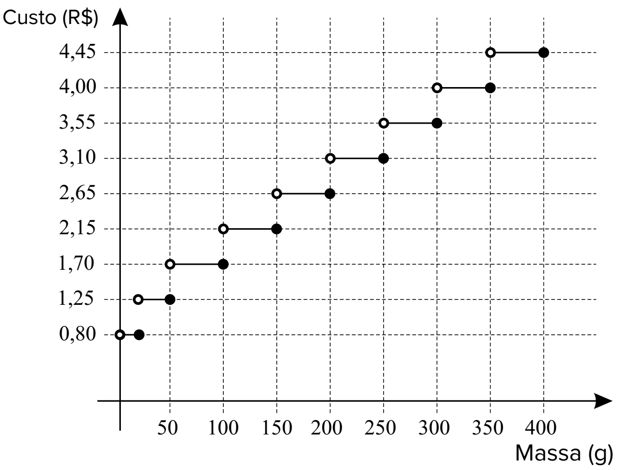
$g(2) = 7 \Rightarrow 7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \Rightarrow 4a + 2b = 6$ (II)

Resolvendo o sistema formado po (I) e (II) obtemos:

$a = 2$ e $b = -1$

Logo, a função g é dada por: $\boldsymbol{g(x) = 2x^2 - x + 1}$

4. (valor: 0,5) (ENEM-2013/Adaptada) Deseja-se postar cartas não comerciais. O gráfico abaixo mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios. Responda:



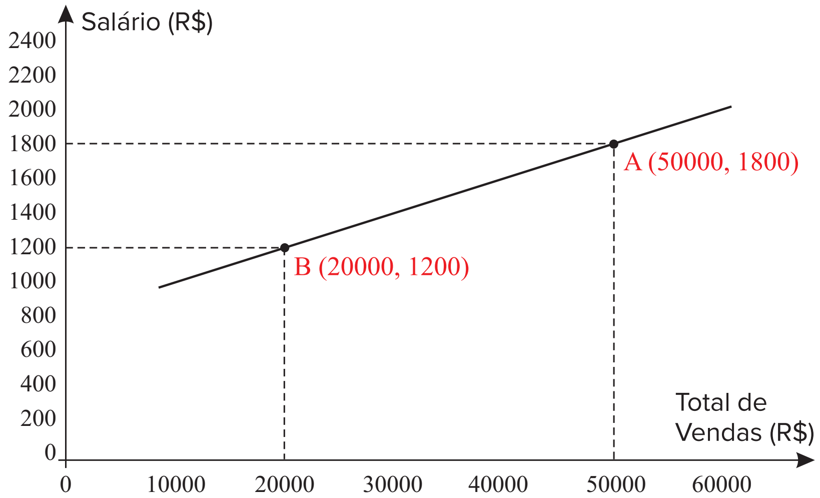
a. (valor: 0,25) Calcule o valor gasto, em reais, para postar duas cartas, sendo uma de 200 g e a outra de 325 g.

Do gráfico, temos que o custo para postar a carta de 200 g é R$ 2,65 e a de 325 g é R$ 4,00. Então, o valor gasto para postar as duas cartas é R$ 6,65

b. (valor: 0,25) Qual o conjunto imagem da função representada no gráfico?

Im = {0,80; 1,25; 1,70;...}

5. (valor: 1,0) (ENEM PPL-2015/Adaptada) No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário S, em reais, em função do total de vendas realizadas V, também em reais.



Nessas condições, determine:

a. **(valor: 0,5) a expressão algébrica que permite calcular o salário (S), em reais, do funcionário em um determinado mês em função do total de vendas (V), também em reais, realizadas.**

O gráfico que representa a função é uma reta, logo a expressão que a define é do tipo: $S(V) = aV + b$. Do gráfico, temos os pontos A (50000, 1800) e B (20000, 1200), então:

$$\begin{cases} f(50000) = 1800 \Rightarrow 50000 \cdot a + b = 1800 & \text{(I)} \\ f(20000) = 1200 \Rightarrow 20000 \cdot a + b = 1200 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $a = \frac{1}{50} \Rightarrow \boldsymbol{a = 0{,}02}$

Substituindo $a = 0{,}02$ em (I), temos:

$50000 \cdot (0{,}02) + b = 1800 \Rightarrow 1000 + b = 1800 \Rightarrow \boldsymbol{b = 800}$

Portanto, a função S é dada por: $\mathbf{S(V) = 0{,}02 \cdot V + 800}$

b. **(valor: 0,25) o salário fixo, que independe das vendas realizadas, desse funcionário.**

O salário fixo a ser determinado é o valor numérico de S (0), logo:

$S(0) = 0{,}02 \cdot (0) + 800 \Rightarrow \mathbf{S(0) = 800}$

Portanto, 800 reais.

c. **(valor: 0,25) o valor percentual da comissão desse funcionário.**

O valor percentual da comissão a ser determinado é a taxa de variação (coeficiente angular), ou seja, $a = 0{,}02 \cdot 100\% \Rightarrow \boldsymbol{a = 2\%}$

6. (valor: 1,0) (UNICAMP-2005/Adaptada) O custo de uma corrida de táxi é calculado através de um certo aplicativo para smartphone. Esse custo é constituído por um valor inicial Q_0, fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância D percorrida nessa corrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6 km, a quantia cobrada foi de R$ 8,25, e que em outra corrida, de 2,8 km, a quantia cobrada foi de R$ 7,25.

a. (valor: 0,25) Calcule o valor inicial Q_0.

Sejam x e $C(x)$, respectivamente, a distância percorrida e o custo dessa corrida, pelo enunciado, temos:

$C(x) = Q_0 + x \cdot D$

Como uma corrida de 3,6 km, o custo é R$ 8,25 e uma corrida de 2,8 km custa R$ 7,25, então:

$$\begin{cases} 8,25 = Q_0 + 3,6 \cdot D & (I) \\ 7,25 = Q_0 + 2,8 \cdot D & (II) \end{cases}$$

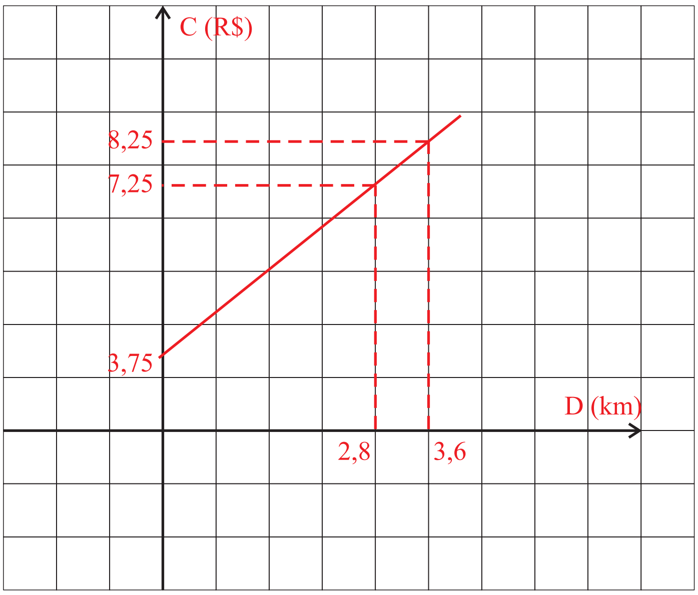
Resolvendo o sistema formado por (I) e (II), obtemos: $D = 1,25$ R$/km

Substituindo $D = 1,25$ em (I), temos:

$8,25 = Q_0 + 3,6 \cdot (1,25) \Rightarrow \mathbf{Q_0 = 3,75}$

Portanto, o valor cobrado inicialmente é R$ 3,75

b. (valor: 0,25) Esboce o gráfico que descreve a variação do custo da corrida (C), em reais, em função da distância percorrida (D), em quilômetros.



c. (valor: 0,5) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R$ 75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

Em 10 corridas o taxista irá arrecadar 10 vezes o valor inicial Q_0 mais o valor proporcional a distância percorrida, isto é

$10 \cdot 3,75 + 1,25 \cdot D = 75 \Rightarrow D = 30$

Portanto, seu carro percorreu 30 km naquele dia.

7. (valor: 1,0) (Esc. Naval-2014/Adaptada) Uma bolinha de aço é lançada a partir da origem do sistema de eixos cartesianos e segue uma trajetória retilínea até atingir o vértice de um anteparo parabólico representado pela função real de variável real $f(x) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x^2 + 2\sqrt{3}\,x$. Ao incidir no vértice do anteparo parabólico é refletida e a nova trajetória retilínea é simétrica à inicial, em relação ao eixo de simetria da parábola. Responda o que se pede:

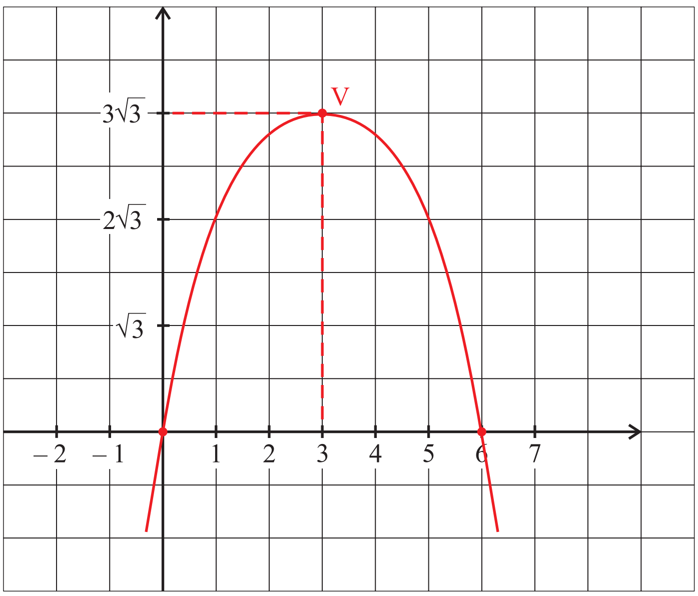
a. **(valor: 0,25) determine as raízes da função f.**
Cálculo das raízes de f:
$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 2\sqrt{3}\,x = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\,x \cdot \left(-\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6$$
Portanto, as raízes de f são 0 e 6.

b. **(valor: 0,25) determine as coordenadas do vértice do anteparo parabólico representado pela função f.**
Cálculo das coordenadas do vértice:
(I) $x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \Rightarrow \boldsymbol{x_V = 3}$

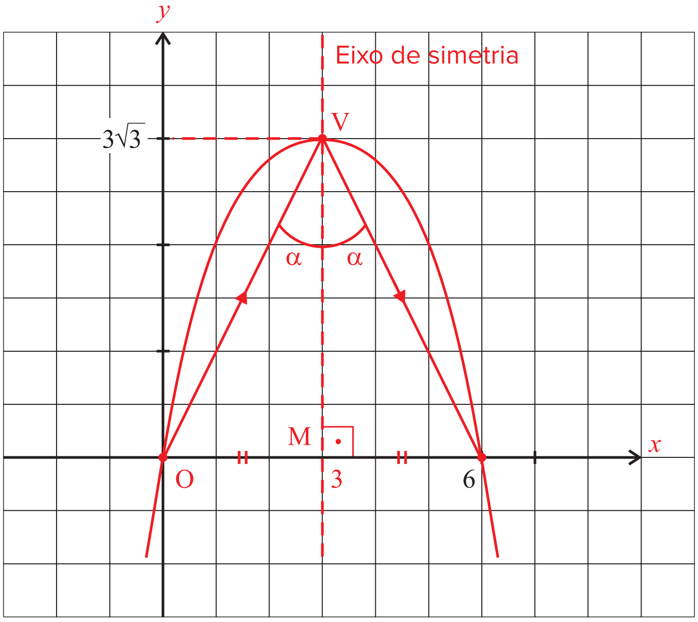
(II) $y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\left[(2\sqrt{3})^2 - 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(0)\right]}{4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \Rightarrow y_V = \frac{12}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \boldsymbol{y_V = 3\sqrt{3}}$

Portanto, $V\ (3, 3\sqrt{3})$

c. **(valor: 0,25) na malha quadriculada abaixo esboce o gráfico da função f.**



d. (valor: 0,25) determine a medida do ângulo agudo entre a trajetória da bolinha e o eixo de simetria da parábola (ângulo de incidência).



Seja α o ângulo a ser determinado. No triângulo retângulo OVM, temos:

$$\text{tg}\alpha = \frac{OM}{VM} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \mathbf{30°}$$

8. (valor: 1,0) (Enem (Libras) 2017/Adaptada) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R\$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês. <u>Sugestão</u>: completar a tabela abaixo pode te ajudar a responder os próximos itens.

Valor do acréscimo (x) (em reais)	Valor cobrado por serviço (em reais)	Número de clientes	Renda mensal (R) (em reais)
0	$10 + (0) = 10$	$200 - 10 \cdot (0) = 200$	$10 \cdot 200 = 2000$
1	$10 + (1) = 11$	$200 - 10 \cdot (1) = 190$	$11 \cdot 190 = 2090$
2	$10 + (2) = 12$	$200 - 10 \cdot (2) = 180$	$12 \cdot 180 = 2160$
3	$10 + (3) = 13$	$200 - 10 \cdot (3) = 170$	$13 \cdot 170 = 2210$
x	$(10 + x)$	$(200 - 10 \cdot x)$	$(10 + x) \cdot (200 - 10x)$

a. (valor: 0,5) Determine a expressão algébrica que permite calcular a renda mensal (R), em reais, do cabeleireiro em função do valor do acréscimo (x), também em reais, cobrado pelo serviço.

De acordo com as informações da tabela, podemos concluir que a função pedida é dada por:

$R(x) = (10 + x) \cdot (200 - 10x)$ ou $R(x) = -10x^2 + 100x + 2000$

b. (valor: 0,25) Determine o valor, em reais, que o cabeleireiro deve cobrar por serviço para que sua renda mensal, também em reais, seja a maior possível.

Como $R(x)$ é uma função quadrática, sua representação gráfica é uma parábola (neste caso com concavivdade voltada para baixo, pois o coeficiente do termo quadrático é negativo). A função $R(x)$ assume seu valor máximo, quando x é abscissa do vértice, isto é, para $x = x_V \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-100}{2 \cdot (-10)} \Rightarrow x = 5$

Portanto, o preço cobrado por serviço para que a renda seja máxima é R\$ 10,00 + R\$ 5,00, isto é, R\$ 15,00

c. **(valor: 0,25) Determine o valor, em reais, da renda mensal máxima que esse cabeleireiro pode obter.**

A renda máxima a ser determinada é o valor numérico de $R(x_V)$, ou seja, o valor da função calculado para $x = x_V$, isto é, para $x = 5$

Logo, $R(5) = (10 + 5) \cdot (200 - 10 \cdot 5) \Rightarrow R(5) = 15 \cdot 150 \Rightarrow R(5) = 2250$

Portanto, nessas condições a maior renda mensal obtida pelo cabeleireiro é R$ 2250,00.

9. (valor: 1,0) (Enem-2017/Adaptado) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

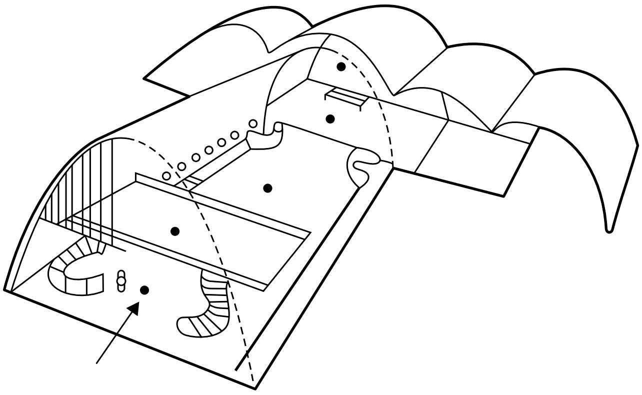


Figura 1

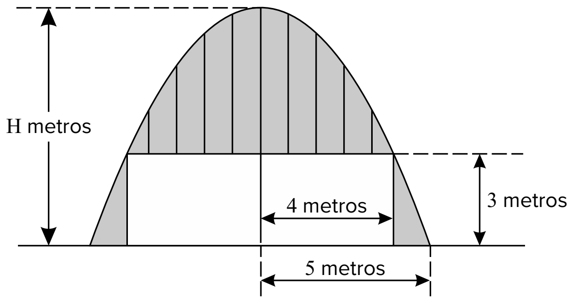
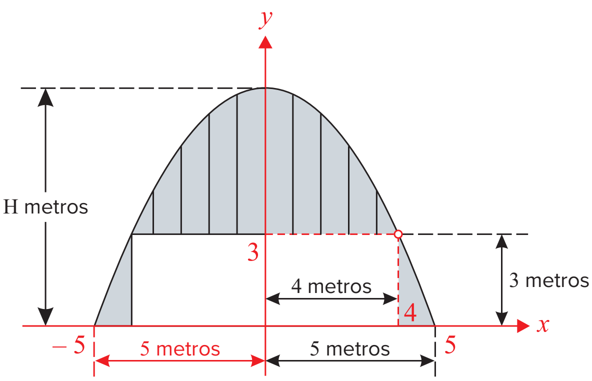


Figura 2

Nessas condições:

a. **(valor: 0,5) ajuste uma função que descreva o comportamento da abóboda parabólica da Figura 2 em função das medidas indicadas. (Deixe indicado na figura abaixo a sua escolha para a posição dos eixos coordenados)**



1.o modo:

Adotando a posição dos eixos coordenados (x e y), de tal maneira que representem, respectivamente, o solo e o eixo de simetria da parábola, temos a entrada principal da capela ajustada por uma função quadrática cujas raízes são – 5 e 5. Utilizando a forma fatorada dada por: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ tal que, x_1 e x_2 são as raízes de $f(x)$ e $a \neq 0$, temos:

$$f(x) = a \cdot (x + 5) \cdot (x - 5) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x^2 - 25)$$

Pelo gráfico $f(4) = 3$, logo

$$f(4) = a \cdot (4^2 - 25) \Rightarrow 3 = a \cdot (-9) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Portanto, nessa configuração dos eixos coordenados, a função ajustada é:

$$\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{25}{3}}$$

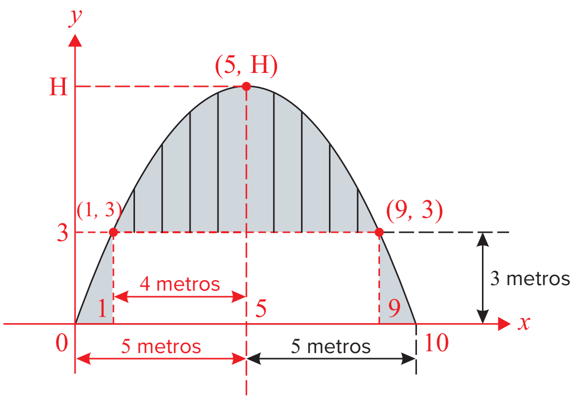
b. **(valor: 0,5) a medida da altura H, em metros, indicada na figura 2. (Deixe a sua resposta em forma de fração irredutível)**

1.o modo:

Note no gráfico que a altura H a ser determinada é o valor numérico de $f(0)$, logo

$$f(0) = -\frac{1}{3} \cdot (0)^2 + \frac{25}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{25}{3}$$

Portanto, a altura H indicada na figura 2 mede $\frac{25}{3}$ metros.



2.o modo (a):
Adotando a posição dos eixos coordenados (x e y), de tal maneira que o eixo x represente solo e o eixo y como mostra a figura ao lado, temos a entrada principal da capela ajustada por uma função quadrática cujas raízes são 0 e 10. Utilizando a forma fatorada dada por: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, tal que, x_1 e x_2 são as raízes de $f(x)$ e $a \neq 0$, temos:

$f(x) = a \cdot (x - 0)(x - 10) \Rightarrow f(x) = ax^2 - 10ax$

Pelo gráfico $f(1) = 3$, logo
$f(1) = a \cdot (1)^2 - 10a(1) \Rightarrow 3 = a - 10a \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = a(-9) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

Portanto, nessa configuração dos eixos coordenados, a função ajustada é:

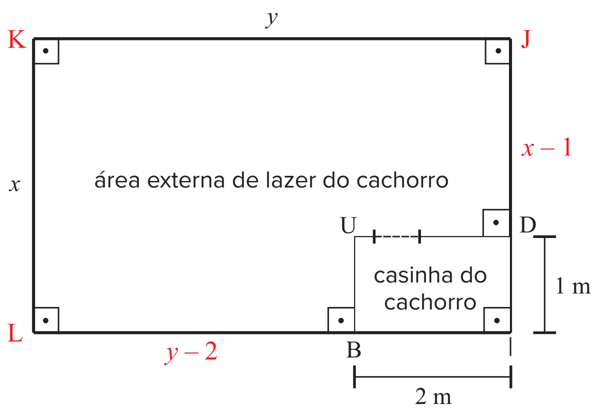
$\boldsymbol{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x}$

2.o modo (b):
Note no gráfico que a altura H a ser determinada é o valor numérico de $f(5)$, logo
$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot (5)^2 + \frac{10}{3} \cdot (5) \Rightarrow f(5) = \frac{25}{3}$
Portanto, a altura H indicada na figura 2 mede $\frac{25}{3}$ metros.

10. (valor: 1,0) (Unesp 2017/Adaptada) A figura representa, em vista superior, a casinha de um cachorro (retângulo BIDU) e a área externa de lazer do cachorro, cercada com 35 metros de tela, linha grossa, totalmente esticada.

Determine:

a. (valor: 0,5) a expressão algébrica que permite calcular a área (A), em metros quadrados, externa de lazer do cachorro em função da medida (x) indicada na figura.



(1) De acordo com as medidas indicadas na figura e sendo o comprimento da tela (DJKLB) igual a 35 cm, temos:
$x - 1 + y + x + y - 2 = 35 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 2y = 38 \Rightarrow y = 19 - x$

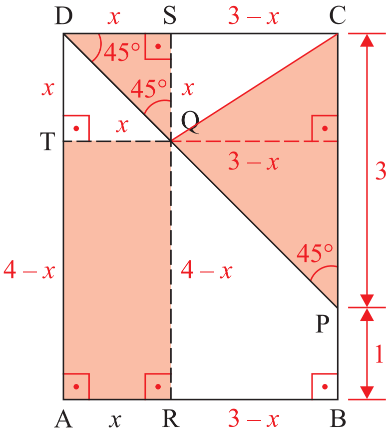
(2) Como a área externa A é a diferença entre as áreas dos retângulos IJKL e BIDU, temos:
$A = A(JKLB) - A(BIDU) \Rightarrow A = x \cdot y - 2$

Substituindo (1) em (2), obtemos, em função de x, a área A:
$A = x \cdot (19 - x) - 2 \Rightarrow \boldsymbol{A(x) = -x^2 + 19x - 2}$

b. (valor: 0,5) algebricamente, as medidas de x e y, em metros, que tornem essa área a maior possível, mantidos os ângulos retos indicados na figura e as dimensões da casinha do cachorro.
Como A (x) é uma função quadrática, seu gráfico é uma parábola. Essa função assume seu valor máximo para $x = x_V$, isto é, $x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(19)}{2(-1)} \Rightarrow x = 9{,}5$

Dessa forma, $y = 19 - x \Rightarrow y = 19 - 9{,}5 \Rightarrow 9{,}5$
Portanto, essa área é máxima quando $x = 9{,}5$ m e $y = 9{,}5$ m

11. (valor: 0,5) (Fuvest 2017/Adaptada) O retângulo ABCD **representado na figura, tem lados de comprimento** $AB = 3$ **e** $BC = 4$. **O ponto** P **pertence ao lado** $\overline{BC}$ **e** $BP = 1$.
Os pontos R, S **e** T **pertencem aos lados** $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ **e** $\overline{AD}$ **respectivamente. O segmento** $\overline{RS}$ **é paralelo a** $\overline{AD}$ **e intercepta** $\overline{DP}$ **no ponto** Q. **O segmento** $\overline{TQ}$ **é paralelo a** $\overline{AB}$. **Sendo** x **o comprimento de** $\overline{AR}$, **com** $0 < x < 3$, **determine:**



a. (valor: 0,25) em função de x **as áreas do retângulo** ARQT, **do triângulo** CQP **e do triângulo** DQS.

(1) Sendo ABCD retângulo e $\overline{RS} // \overline{AD}$, temos $AR = TQ = DS = x$

(2) Como $CP = CD$, o triângulo retângulo CPD é isosceles com $S\hat{D}Q = 45°$. Assim, DSQT é um quadrado cujo lado mede x.

(3) De acordo com as medidas indicadas na figura ao lado, temos:

$A(ARQT) = x \cdot (4 - x) \Rightarrow A(ARQT) = 4x - x^2$

$A(CQP) = \dfrac{3 \cdot (3 - x)}{2} \Rightarrow A(CQP) = \dfrac{9 - 3x}{2}$

$A(DQS) = \dfrac{x^2}{2}$

b. (valor: 0,25) o maior valor possível para a soma das áreas do retângulo ARQT, **do triângulo** CQP **e do triângulo** DQS. **(Deixe a sua resposta em forma de fração irredutível.)**

Sendo $S(x)$ a soma das áreas do retângulo ARQT, do triângulo CQP e do triângulo DQS, em função de x, temos:

$S(x) = A(ARQT) + A(CQP) + A(DQS)$

$S(x) = 4x - x^2 + \dfrac{9 - 3x}{2} + \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \mathbf{S(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x}{2} + \dfrac{9}{2}}$

Como $S(x)$ é uma função quadrática, sua representação gráfica é uma parábola (neste caso com a concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente do termo quadrático é negativo). O valor máximo de $S(x)$ ocorre na ordenada do vértice da parábola, ou seja, para

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = \frac{-\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{9}{2}\right)\right]}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y_V = \frac{61}{8}$$

Portanto, o maior valor assumido por $S(x)$ é $\dfrac{61}{8}$ m^2

Observação: note que $x_V = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \dfrac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow x_V = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$, que pertence ao intervalo $0 < x < 3$ como afirma o enunciado.