Prova Bimestral

G184011
1.a Série
Matemática – Álgebra
Denis/Fábio Cáceres/Fátima Regina/Lucas
12/11/2018

1. **(valor: 1,0) Resolva o sistema de inequações:** $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 & \text{(I)} \\ 2(x-1) - 3 < 1 + 5x & \text{(II)} \end{cases}$

Resolvendo (I):

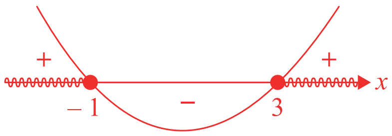
Cálculo das raízes:

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x = -1$ ou $x = 3$

Variação do sinal:



Resolvendo (II):

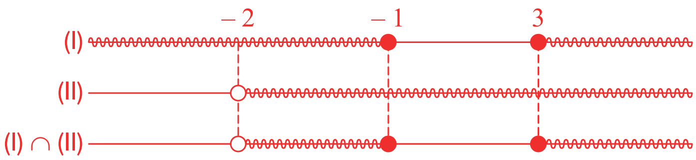
$2(x - 1) - 3 < 1 + 5x$

$2x - 2 - 3 < 1 + 5x$

$-3x < 6 \cdot (-1)$

$x > -2$

Quadro de intersecções:



$S = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\} =]-2, -1] \cup [3, +\infty[$

---

2. **(valor: 1,0) Resolva a inequação:** $\underbrace{(-x^2 + 5x - 4)}_{y_1}\underbrace{(2x^2 + 3x - 2)}_{y_2} \geq 0$

$\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}^{y_1}$

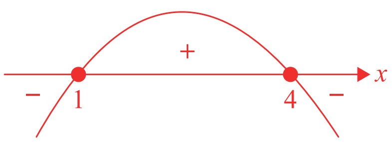
Raízes: $-x^2 + 5x - 4 = 0 \cdot (-1)$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x - 1)(x - 4) = 0$

$x = 1$ ou $x = 4$

Variação do sinal:



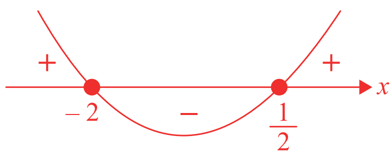
$\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}^{y_2}$

Raízes: $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = 25$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \Rightarrow (x = -2)$ ou $\left(x = \dfrac{1}{2}\right)$

Variação do sinal:



Quadro de sinais

	-2		$\frac{1}{2}$		1		4	
y_1	$-$		$-$		$-$		$+$	$-$
y_2	$+$		$-$		$+$		$+$	$+$
$y_1 \cdot y_2$	$-$		$+$		$-$		$+$	$-$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } 1 \leq x \leq 4\right\}$ ou $S = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [1, 4]$

---

3. **(valor: 1,0) Resolva a inequação:** $\dfrac{\overbrace{(-x^2+5x+24)}^{y_1}\overbrace{(x^2+1)}^{y_2}}{\underbrace{(1-x^2)}_{y_3}} \geq 0$

y_1

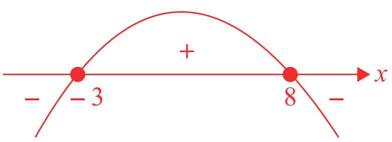
Raízes: $-x^2 + 5x + 24 = 0 \cdot (-1)$

$x^2 - 5x - 24 = 0$

$(x-8)(x+3) = 0$

$x = -3$ ou $x = 8$

Variação do sinal:

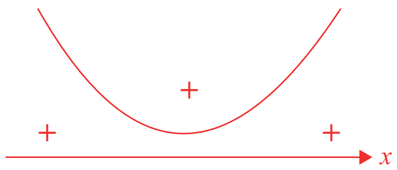


y_2

Raízes: $x^2 + 1 = 0$

$x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow$ ò $x \in \mathbb{R}$

Variação do sinal:



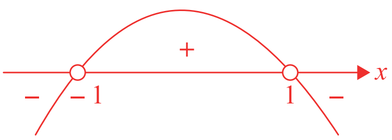
y_3

Raízes: $1 - x^2 = 0$

$(1-x)(1+x) = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$

Variação do sinal:



	-3	-1	1	8	
y_1	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
y_2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y_3	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$
$\frac{y_1 \cdot y_2}{y_3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \text{ ou } -1 < x < 1 \text{ ou } x \geq 8\}$

ou

$S =]-\infty, 3] \cup]-1, 1[\cup]8, +\infty[$

4. **(valor: 2,0) Resolva as seguintes inequações:**

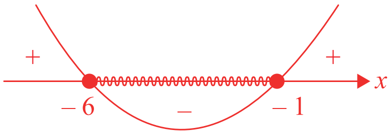
a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{3x+6}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x-6}$

$\therefore\ x^2 + 4x \leq -3x - 6$

$x^2 + 7x + 6 \leq 0$

$(x + 6) \cdot (x + 1) \leq 0$



$S = \{x \in \mathbb{R} / -6 \leq x \leq -1\} = [-6, -1]$

---

b. $3^{2x+1} + 5 \cdot 3^x - 2 > 0$

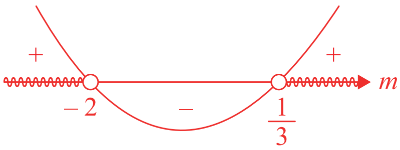
$3^{2x} \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^x - 2 > 0$

$3 \cdot (3^x)^2 + 5 \cdot 3^x - 2 > 0$

Substituindo 3^x por m é reescrevendo a inequação, temos:

$3m^2 + 5m - 2 > 0$

$(3m - 1)\ (m + 2) > 0$



Assim,

$m < -2 \Rightarrow 3^x < -2$ (não convém pois, $3^x > 0$)

$m > \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x > 3^{-1} \Leftrightarrow x > -1$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x > -1\} =]-1, +\infty[$

---

5. **(valor: 2,0) Determine o domínio (ou condição de existência) das seguintes funções reais:**

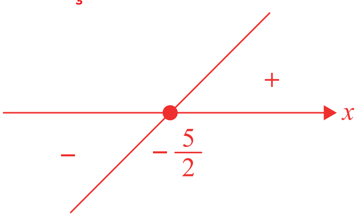
a. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x+5}{9-x^2}}$

Note que devemos ter $\dfrac{\overbrace{2x+5}^{y_1}}{\underbrace{9-x^2}_{y_2}} \geq 0$, então:

$\overbrace{\hspace{6cm}}^{y_1}$

Raízes: $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

Variação do sinal:



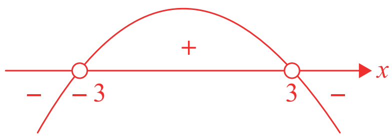
$\overbrace{\hspace{6cm}}^{y_2}$

Raízes: $9 - x^2 = 0$

$(3 - x)\ (3 + x) = 0$

$x = -3$ ou $x = 3$

Variação do sinal:



Quadro de sinais

	-3		$-\frac{5}{2}$		3	
y_1	$-$		$-$	$+$		$+$
y_2	$-$		$+$	$+$		$-$
$\frac{y_1}{y_2}$	$+$		$-$	$+$		$-$

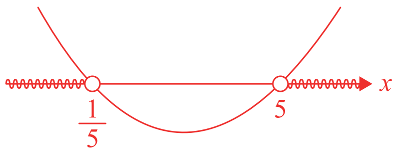
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / x < -3 \text{ ou } -\frac{5}{2} \leq x < 3\right\} = \left]-\infty, -3\right[\cup \left[-\frac{5}{2}, 3\right[$$

b. $f(x) = \log_{(x+2)} (5x^2 - 26x + 5)$

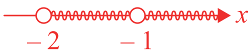
Pelas condições de existência da função logarítimica, devemos ter:

(I) $5x^2 - 26x + 5 > 0$

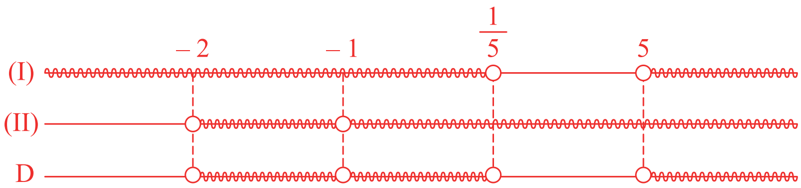
$(5x - 1)(x - 5) > 0$



(II) $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ \text{e} \\ x + 2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \text{e} \\ x \neq -1 \end{cases}$



Portanto, o domínio D é dado pela interseção das condições (I) e (II). Assim,

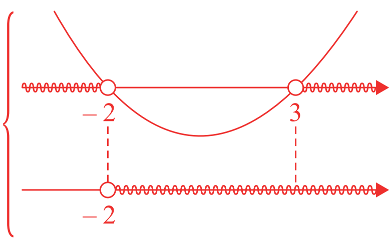


$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / -2 < x < \frac{1}{5} \text{ ou } x > 5 \text{ e } x \neq 1\right\} = \left]-2, -1\right[\cup \left]-1, \frac{1}{5}\right[\cup \left]5, +\infty\right[$$

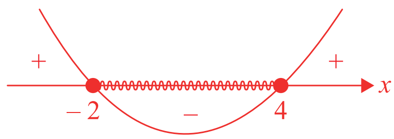
---

6. **(valor: 1,0) Resolva a inequação:** $\log_5 (x^2 - x - 6) \leq \log_5 (x + 2)$

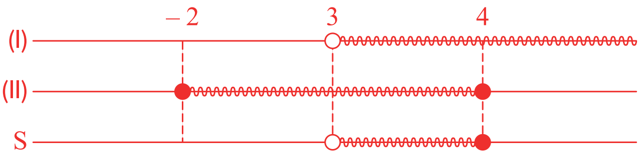
(I) Condição de existência:

$\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow$  $\Rightarrow x > 3$

(II) $\log_5 (x^2 - x - 6) \leq \log_5 (x + 2) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \leq x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0$

$\Rightarrow (x + 2)(x - 4) \leq 0 \Rightarrow$ 

Portanto, a solução S é dada pela interseção de (I) e (II), assim:



$S = \{x \in \mathbb{R}/3 < x \leq 4\} =]\,3, 4]$

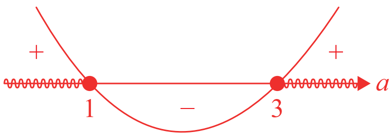
---

7. (valor: 1,0) Resolva a inequação: $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 4\log_{\frac{1}{2}} x + 3 \geq 0$

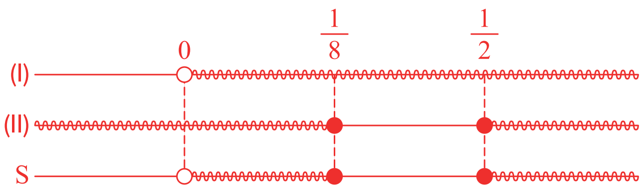
(I) Condição de existência: $x > 0$

(II) Substituindo $\log_{\frac{1}{2}} x$ por a e reescrevendo a inequação, temos:

$$a^2 - 4a + 3 \geq 0$$
$$(a-1)(a-3) \geq 0 \quad \begin{cases} a \leq 1 \Longrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1 \Longleftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ a \geq 3 \Longrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 3 \Longleftrightarrow x \leq \frac{1}{8} \end{cases}$$



(III) Portanto, a solução S é dada pela interseção das condições (I) e (II), assim:



$$S = \left\{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq \frac{1}{8} \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left]0, \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

---

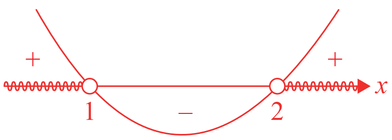
8. (valor: 1,0) Determine o domínio da função real: $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{e^x - 1}}$

Obs.: $\ln x = \log_e x$**, onde** $e \cong 2{,}7$

(I) Pela condição de existência da função logarítimica, devemos ter:

$x^2 - 3x + 2 > 0$

$(x-1)(x-2) > 0$



(II) Note que devemos ter $e^x - 1 > 0$, então:

$e^x > 1 \Rightarrow e^x > e^0$, como e • 2,7, segue que $x > 0$

Portanto, o domínio D é dado pela interseção de (I) e (II). Assim:

$D = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < 1$ ou $x > 2\} =]\,0, 1\,[\cup]\,2, +\infty\,[$