# Теория вероятностей

Seara

2021

# 1 Вероятность

## 1.1 Пространство элементарных событий

$\Omega$ - **пространство элементарных событий** (множество всевозможных исходов эксперимента). **Случайное событие** - любое подмножество множества $\Omega$

## 1.2 Классическое определение вероятности

Если исходы опыта равновозможны, то вероятностью события $A$ называется отношение числа исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех возможных исходов опыта:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n}$$

## 1.3 Условная вероятность случайного события

Условной вероятностью события $A$ при условии, что произошло событие $B$, называется число:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Из формулы условной вероятности можно получить формулу для вероятности произведения нескольких событий:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Если событий несколько, формулу можно продолжить:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid B, C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C) \cdot \mathbb{P}(C).$$

## 1.4 Независимость событий

Говорят, что два события попарно **независимы**, если верно следующее:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Говорят, что $n$ случайных событий **независимы в совокупности**, если для любого $1 \leq k \leq n$ и любого набора различных меж собой индексов $1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$ имеет место равенство:

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{i_k})$$

## 1.5 Формула полной вероятности

Пусть событие $A$ происходит вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_k$. Пусть эти события попарно несовместны (ещё говорят, что они составляют **полную группу)**. Нам известны вероятности этих событий $\mathbb{P}(H_1), \mathbb{P}(H_2), \ldots, \mathbb{P}(H_k)$, а также условные вероятности события $A$: $\mathbb{P}(A \mid H_1), \mathbb{P}(A \mid H_2), \ldots, \mathbb{P}(A \mid H_k)$. Тогда вероятность события $A$ может быть вычислена по формуле:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_i).$$

## 1.6 Формула Байеса

Пусть событие $A$ происходит вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_k$, которые составляют полную группу и попарно несовместны. Пусть известно, что в результате испытания событие $A$ произошло. Тогда условная вероятность того, что имело место событие $H_k$, можно пересчитать по формуле:

$$\mathbb{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap A)}{P(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_k) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_k)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(H_i) \cdot \mathbb{P}(A \mid H_i)}$$

# 2 Случайная величина и её распределение

## 2.1 Типы случайных величин

Случайные величины бывают:

- Дискретные(Множество значений конечно или счетно), описывается таблицей распределения
- Непрерывные(Принимают бесконечное, континуальное число значений)

## 2.2 Функция распределения случайной величины

**Функцией распределения** случайной величины $X$ называется функция $F(x)$, определённая для любого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ и выражающая собой вероятность того, что случайная величина $X$ примет значение, лежащее на числовой прямой левее точки $x$, то есть:

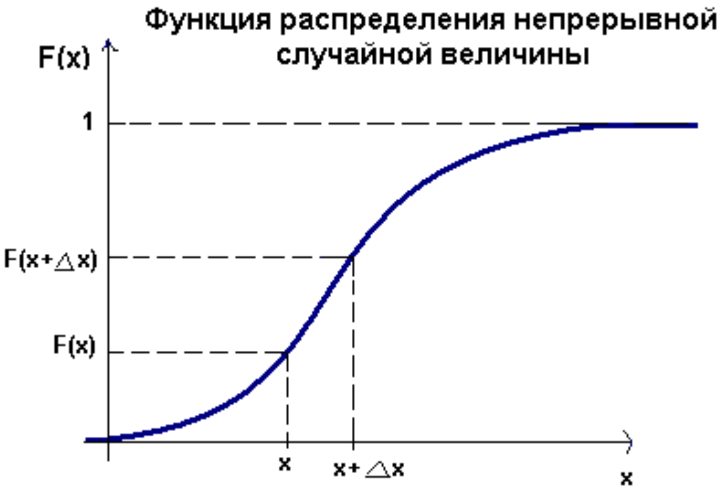
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

- Для дискретной:

$$F(X) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum \mathbb{P}(X = k) \cdot [X \leq x]$$

$$[X \leq x] = \begin{cases} 1 & [X \leq x] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- Для непрерывной




Любая функция распределения обладает следующими свойствами:

- Принимает значения в диапазоне от 0 до 1, при этом:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

- $F(x)$ не убывает: $F(x_1) \leq F(x_2) \quad \forall x_1 \leq x_2$
- $F(x)$ непрерывна справа: $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$