

Акимов Сергей 211-2

Ссылка на коды: <https://github.com/Q0un/linal>

#1

Используя прогу, берем хар многочлен у всех матриц. Он у всех получается одинаковым: $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256 = (x-4)(x^3 - 12x^2 + 48x - 64) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 16) = (x-4)^4$.

Теперь, опять же используя прогу, найдем ЖНФ матриц:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ЖНФ матриц A, B совпадают, а у C отличается. Значит A и B задают один и тот же линейный оператор.

#2

Сначала ищем прогой хар многочлен матрицы оператора: $x^6 - 20x^5 + 166x^4 - 732x^3 + 1809x^2 - 2376x + 1296 = (x-3)^4(x-4)^2$.

Далее так же прогой получаем ЖНФ матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Теперь осталось найти жорданов базис. Назовем $\mathbb{C}^6 = V$. Тогда $V = V^3 \oplus V^4$.

Посмотрим на $\ker(A - 4E)^2$. Прогой приводим $(A - 4E)^2$ к улучшенному ступенчатому виду, получаем, что $(2, -1, 1, -2, 1, 0)$ лежит в ядре. Теперь применим к нему $(A - 4E)$ и получим прогой вектор $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Теперь смотрим на $\ker(A - 3E)^4$. Приводим $(A - 3E)^4$ к улучшенному ступенчатому

виду, получаем, что линейно независимые векторы $(4, -1, 2, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ лежат в этом ядре. Теперь применим к ним $(A - 3E)$. Получим два вектора $(1, 0, 0, 8, 20, -19)$ и $(0, 0, 0, 2, 4, -4)$. Видно, что они тоже линейно независимые. Значит подходят. Таким образом получили жорданов базис: $(0, 0, 0, 0, 0, 1), (2, -1, 1, -2, 1, 0), (1, 0, 0, 8, 20, -19), (4, -1, 2, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 2, 4, -4), (0, 0, 0, 1, 0, 0)$.

#3

а)

Просто приводим обе матрицы к стандартному базису и перемножаем их. Все действия выполняются прогой. Получаем:

$$\begin{bmatrix} -7 & 4 & -11 \\ -7 & 4 & -11 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

б)

Считаем ядра операторов. Прогой приводим к верхнетреугольному виду. Фср обоих получается одинаковым: $(-1, 1, 1)$. Значит и сумма ядер $(-1, 1, 1)$.

в)

Матрицы в стандартном базисе имеют следующий вид: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Замечаем, что образы равны соответственно $\langle (2, 2, -1), (-1, -1, 2) \rangle = \langle (0, 0, 3), (-1, -1, 2) \rangle = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$ и $\langle (1, 1, -1), (-3, -3, 2) \rangle = \langle (1, 1, -1), (0, 0, -1) \rangle = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$.

То есть они совпадают, значит их пересечение: $\langle (0, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle$.

#4

Хочу найти ЖНФ матрицы. Для начала найдем хар многочлен. Заметим, что когда будем считать $\det(A - xE)$, будем на самом деле брать произведение чисел на главной диагонали. Потому что в первой строке не нулевой может быть только a_{11} , в последней только a_{55} , и так далее получим что берем только главную диагональ. Значит можем взять любое t и считать хар многочлен: получаем $-x^5 + 8x^4 - 4x^3 - 80x^2 + 64x + 256 = -(x - 4)^3(x + 2)^2$.

Посчитаем $A - 4E$ в разных степенях:

$$A - 4E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-1 \\ t & 1+t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{- ее ранг 4 при } t \neq 0, \text{ иначе 3.}$$

$$(A - 4E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 & -12 \\ t & 1+t & 0 & 0 & 6(1-t) \\ 0 & -6(1+t) & 0 & 0 & 1+t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} \quad \text{- ее ранг 3 при } t \neq 0, \text{ иначе 2.}$$

$$(A - 4E)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -216 & 0 & 0 & 108 \\ 0 & -6(1+t) & 0 & 0 & 37t-35 \\ 0 & 36(1+t) & 0 & 0 & -12(1+t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -216 \end{bmatrix} \quad \text{- ее ранг всегда 2.}$$

Теперь считаем $A + 2E$ в разных степенях:

$$A + 2E = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & t-1 \\ t & t+1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{- ее ранг всегда 4.}$$

$$(A + 2E)^2 = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & t+1 & 36 & 12 & 6(t-1) \\ 12t & 6(t+1) & 0 & 36 & t+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{- ее ранг всегда 3.}$$

Значит при $t = 0$ ЖНФ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

А при $t \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим теперь $A'X' = X'A'$ в обоих случаях, только вместо A будем брать ЖНФ A' :

$t \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
4x_{11} + x_{21} = 4x_{11} \\
4x_{12} + x_{22} = x_{11} + 4x_{12} \\
4x_{13} + x_{23} = x_{12} + 4x_{13} \\
4x_{14} + x_{24} = -2x_{14} \\
4x_{15} + x_{25} = x_{14} - 2x_{15} \\
4x_{21} + x_{31} = 4x_{21} \\
4x_{22} + x_{32} = x_{21} + 4x_{22} \\
4x_{23} + x_{33} = x_{22} + 4x_{23} \\
4x_{24} + x_{34} = -2x_{24} \\
4x_{25} + x_{35} = x_{24} - 2x_{25} \\
4x_{31} = 4x_{31} \\
4x_{32} = x_{31} + 4x_{32} \\
4x_{33} = x_{32} + 4x_{33} \\
4x_{34} = -2x_{34} \\
4x_{35} = x_{34} - 2x_{35} \\
-2x_{41} + x_{51} = 4x_{41} \\
-2x_{42} + x_{52} = x_{41} + 4x_{42} \\
-2x_{43} + x_{53} = x_{42} + 4x_{43} \\
-2x_{44} + x_{54} = -2x_{44} \\
-2x_{45} + x_{55} = x_{44} - 2x_{45} \\
-2x_{51} = 4x_{51} \\
-2x_{52} = x_{51} + 4x_{52} \\
-2x_{53} = x_{52} + 4x_{53} \\
-2x_{54} = -2x_{54} \\
-2x_{55} = x_{54} - 2x_{55}
\end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
x_{21} = 0 \\
x_{31} = 0 \\
x_{32} = 0 \\
x_{34} = 0 \\
x_{35} = 0 \\
x_{54} = 0 \\
x_{51} = 0 \\
x_{52} = 0 \\
x_{53} = 0 \\
x_{11} = x_{22} \\
x_{12} = x_{23} \\
x_{33} = x_{22} \\
x_{24} = 0 \\
x_{14} = 0 \\
x_{25} = 0 \\
x_{15} = 0 \\
x_{41} = 0 \\
x_{42} = 0 \\
x_{43} = 0 \\
x_{55} = x_{44}
\end{array} \right.$$

Получаем $X' = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

Ну чтобы матрица диагонализовалась, надо, чтобы $\text{rk}(X' - aE) = \text{rk}(X' - aE)^2$ и $\text{rk}(X' - dE) = \text{rk}(X' - dE)^2$. Ну посмотрим на матрицу $X' - aE$ при возведении в квадрат ранг уменьшится хотя бы на один, если $b \neq 0$ или $c \neq 0$. Аналогично с матрицей $X' - dE$ - при $e \neq 0$ ранг уменьшится. Значит мы берем только X' уже

имеющие диагональный вид: $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$, то есть $\dim L_{t \neq 0} = 2$

$t = 0 :$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x_{11} = 4x_{11} \\ 4x_{12} = 4x_{12} \\ 4x_{13} = x_{12} + 4x_{13} \\ 4x_{14} = -2x_{14} \\ 4x_{15} = x_{14} - 2x_{15} \\ 4x_{21} + x_{31} = 4x_{21} \\ 4x_{22} + x_{32} = 4x_{22} \\ 4x_{23} + x_{33} = x_{22} + 4x_{23} \\ 4x_{24} + x_{34} = -2x_{24} \\ 4x_{25} + x_{35} = x_{24} - 2x_{25} \\ 4x_{31} = 4x_{31} \\ 4x_{32} = 4x_{32} \\ 4x_{33} = x_{32} + 4x_{33} \\ 4x_{34} = -2x_{34} \\ 4x_{35} = x_{34} - 2x_{35} \\ -2x_{41} + x_{51} = 4x_{41} \\ -2x_{42} + x_{52} = 4x_{42} \\ -2x_{43} + x_{53} = x_{42} + 4x_{43} \\ -2x_{44} + x_{54} = -2x_{44} \\ -2x_{45} + x_{55} = x_{44} - 2x_{45} \\ -2x_{51} = 4x_{51} \\ -2x_{52} = 4x_{52} \\ -2x_{53} = x_{52} + 4x_{53} \\ -2x_{54} = -2x_{54} \\ -2x_{55} = x_{54} - 2x_{55} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_{12} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{15} = 0 \\ x_{31} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{34} = 0 \\ x_{35} = 0 \\ x_{24} = 0 \\ x_{25} = 0 \\ x_{51} = 0 \\ x_{52} = 0 \\ x_{53} = 0 \\ x_{54} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{42} = 0 \\ x_{43} = 0 \\ x_{33} = x_{22} \\ x_{55} = x_{44} \end{array} \right.$$

$$\text{Получаем } X' = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Тут $\dim L_{t=0} \geq 3 > 2 \Rightarrow$ при $t = 0$ $\dim L_t - \max$.

#5

Дополним v до базиса: (v, e_2, e_3, e_4) . Посмотрим на B' в этом новом базисе:

$$\text{Матрица перехода } C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B' = C^T \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & -8 \\ 1 & 2 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

Теперь применим метод Якоби. Первый базисный вектор не меняется, значит v остается в базисе.

$$B'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/20 \end{bmatrix}$$

Ну и нужный для такого вида базис:

$$e'_1 = v$$

$$e'_2 = e_2 - \frac{\beta(e_2, e'_1)}{\beta(e'_1, e'_1)} e'_1 = e_2 - \frac{-1}{1} v = e_2 + v = (-3, 4, 1, -2)$$

$$e'_3 = e_3 - \frac{\beta(e_3, e'_1)}{\beta(e'_1, e'_1)} e'_1 - \frac{\beta(e_3, e'_2)}{\beta(e'_2, e'_2)} e'_2 = e_3 - \frac{3}{1} v - \frac{6}{-1} (e_2 + v) = e_3 - 3v + 6e_2 + 6v = 3v + 6e_2 + e_3$$

$$e'_4 = e_4 - v + 3(e_2 + v) - \frac{7}{20} (3v + 6e_2 + e_3) = \frac{19}{20} v + \frac{18}{20} e_2 - \frac{7}{20} e_3 + e_4$$