Акимов Сергей 211-2

Ссылка на коды: https://github.com/Q0un/linal

#1(IDZ3/task1.cpp)

Для начала прогой проверим, что данные векторы являются решениями (действительно являются). После этого приведем матрицу к треугольному виду, найдем какой-то базис, и выделим базис в линейной оболочке найденного базиса и двух данных векторов. Получим, что необходимые векторы для дополнения до базиса это $(-1, 0, -2, 0, 0, 1)$ и $(-1, 0, 2, 1, 0, 0)$.

#2(IDZ3/task2.cpp)

Ищем оба базиса по базовым алгоритмам. Сначала находим образ оператора прогой: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x = 0$ и из него базис пересечения: $(-1, -2, 3, 0)$. После находим ядро оператора прогой: $\langle(7, 11, 0, 3), (-1, -2, 3, 0)\rangle$ и из него базис суммы получается $\langle(9, 18, 5, -16), (-6, -12, -4, 11), (7, 11, 0, 3)\rangle$.

#3(IDZ3/task3.cpp)

По лемме о стабилизации $Im\ \phi^{2019} = Im\ \phi^4, ker\ \phi^{2020} = ker\ \phi^4$. Из проги IDZ3/task3.cpp: $A^4 = \begin{pmatrix} 32 & -32 & 32 & 0 \\ 16 & -16 & -16 & 16 \\ 0 & 0 & 32 & -16 \\ 0 & 0 & 32 & -16 \end{pmatrix}$. Опять же пользуясь прогой получаем, что $Im\ A^4 = \langle (2,1,0,0),(2,-1,2,2) \rangle, ker\ A^4 = \langle (-1,0,1,2),(1,1,0,0) \rangle$. Прогой проверяем, что они линейно независимы и после раскладываем по ним вектор v: $v = -16(2,1,0,0)+3(2,-1,2,2)+28(1,1,0,0)$.

#4(IDZ3/task4.cpp)

С помощью проги найдем хар многочлен матрицы: $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x+1)^2$. Получаем 2 собственных значения: $0, -1$.

Т.к. они оба входят в хар многочлен с кратностью 2, то для нахождения V^λ можем возводить $A - \lambda$ в степень 2(возводим прогой):

$V^{-1} = (A+1)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ -12 & 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to$ из проги $\to \langle (1,-2,0,2),(-1,0,2,0) \rangle =$ $\langle 1,-2,0,2),(0,-2,2,2) \rangle = \langle (1,0,-2,0),(0,1,-1,-1) \rangle$

$V^0 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & -3 \\ 2 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to$ $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Тогда берем матрицу вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ -2 & -1 & * & * \\ 0 & -1 & * & * \end{pmatrix}$ и дописываем звездочки, чтобы все сошлось: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

#5(IDZ3/task5.cpp)

Пусть B - первая данная матрица, C - вторая, X - матрица первого базиса, Y - второго. Тогда $B = X^{-1}AX \Rightarrow XB = AX, C = Y^{-1}AY \Rightarrow YC = AY$. Т.к. в B первый столбец был правильный, то в XB он тоже правильный, аналогично в YC правильные вторые 2 столбца. Теперь, зная это и результаты проги, составляем уравнения на коэффициенты матрицы A.

Из $AX = XB$:

$$\begin{cases} -a_{11} + a_{12} + a_{13} = 6 \\ -a_{21} + a_{22} + a_{23} = 2 \\ -a_{31} + a_{32} + a_{33} = -16 \end{cases}$$

Из $AY = YC$:

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} = 5 \\ a_{21} - a_{22} = 6 \\ a_{31} - a_{32} = 5 \\ a_{11} - 2a_{12} = 4 \\ a_{21} - 2a22 = -4 \\ a_{31} - 2a32 = 1 \end{cases}$$

Теперь спокойно найдем матрицу A прогой:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 11 \\ 16 & 10 & 8 \\ 9 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$