Акимов Сергей 211-2

#1

Используя прогу, берем хар многочлен у всех матриц. Он у всех получается одинаковым: $x^4-16x^3+96x^2-256x+256=(x-4)(x^3-12x^2+48x-64)=(x-4)^2(x^2-8x+16)=(x-4)^4$.

Теперь, опять же используя прогу, найдем ЖНФ матриц:

$$\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&1&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&1&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

ЖНФ матриц A, B совпадают, а у C отличается. Значит A и B задают один и тот же линейный оператор.

#2

Сначала ищем прогой хар многочлен матрицы оператора: $x^6-20x^5+166x^4-732x^3+1809x^2-2376x+1296=(x-3)^4(x-4)^2$.

Далее так же прогой получаем ЖНФ матрицы:

$$\begin{bmatrix}3&1&0&0&0&0\\0&3&0&0&0&0\\0&0&3&1&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

Теперь осталось найти жорданов базис. Назовем $\mathbb{C}^6=V$. Тогда $V=V^3\oplus V^4$.

Посмотрим на $\ker(A-4E)^2$. Прогой приводим $(A-4E)^2$ к улучшенному ступенчатому виду, получаем, что $(2,-1,1,-2,1,0)$ лежит в ядре. Теперь применим к нему $(A-4E)$ и получим прогой вектор $(0,0,0,0,0,1)$.

Теперь смотрим на $\ker(A-3E)^4$. Приводим $(A-3E)^4$ к улучшенному ступенчатому виду, получаем, что линейно независимые векторы $(4,-1,2,0,0,0)$ и $(0,0,0,1,0,0)$ лежат в этом ядре. Теперь применим к ним $(A-3E)$. Получим два вектора $(1,0,0,8,20,-19)$

и $(0,0,0,2,4,-4)$. Видно, что они тоже линейно независимые. Значит подходят.
Таким образом получили жорданов базис: $(0,0,0,0,0,1)$, $(2,-1,1,-2,1,0)$, $(1,0,0,8,20,-19)$, $(4,-1,2,0,0,0)$, $(0,0,0,2,4,-4)$, $(0,0,0,1,0,0)$.

#3

а)

Просто приводим обе матрицы к стандартному базису и перемножаем их. Все действия выполняются прогой. Получаем:
$$\begin{bmatrix} -7 & 4 & -11 \\ -7 & 4 & -11 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

б)

Считаем ядра операторов. Прогой приводим к верхнетреугольному виду. Фср обоих получается одинаковым: $(-1,1,1)$. Значит и сумма ядер $(-1,1,1)$.

в)

Матрицы в стандартном базисе имеют следующий вид: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
Замечаем, что образы равны соответственно $\langle(2,2,-1),(-1,-1,2)\rangle = \langle(0,0,3),(-1,-1,2)\rangle = \langle(0,0,1),(1,1,0)\rangle$ и $\langle(1,1,-1),(-3,-3,2)\rangle = \langle(1,1,-1),(0,0,-1)\rangle = \langle(0,0,1),(1,1,0)\rangle$.
То есть они совпадают, значит их пересечение: $\langle(0,0,1),(1,1,0)\rangle$.

#4

Хочу найти ЖНФ матрицы. Для начала найдем хар многочлен. Заметим, что когда будем считать $\det(A-xE)$, будем на самом деле брать произведение чисел на главной диагонали. Потому что в первой строке не нулевой может быть только a_{11}, в последней только a_{55}, и так далее получим что берем только главную диагональ. Значит можем взять любое t и считать хар многочлен: получаем $-x^5+8x^4-4x^3-80x^2+64x+256 = -(x-4)^3(x+2)^2$.
Посчитаем $A-4E$ в разных степенях:

$$A-4E=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-6&0&0&1\\0&0&0&1&t-1\\t&1+t&0&0&0\\0&0&0&0&-6\end{bmatrix}$$ - ее ранг 4 при $t\neq 0$, иначе 3.

$$(A-4E)^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&36&0&0&-12\\t&1+t&0&0&6(1-t)\\0&-6(1+t)&0&0&1+t\\0&0&0&0&36\end{bmatrix}$$ - ее ранг 3 при $t\neq 0$, иначе 2.

$$(A-4E)^3=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&-216&0&0&108\\0&-6(1+t)&0&0&37t-35\\0&36(1+t)&0&0&-12(1+t)\\0&0&0&0&-216\end{bmatrix}$$ - ее ранг всегда 2.

Теперь считаем $A+2E$ в разных степенях:

$$A+2E=\begin{bmatrix}6&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&6&1&t-1\\t&t+1&0&6&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ - ее ранг всегда 4.

$$(A+2E)^2=\begin{bmatrix}36&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\t&t+1&36&12&6(t-1)\\12t&6(t+1)&0&36&t+1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$ - ее ранг всегда 3.

Значит при $t=0$ ЖНФ имеет вид: $\begin{bmatrix}4&0&0&0&0\\0&4&1&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$ А при $t\neq 0$: $\begin{bmatrix}4&1&0&0&0\\0&4&1&0&0\\0&0&4&0&0\\0&0&0&-2&1\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$

Рассмотрим теперь $A'X' = X'A'$ в обоих случаях, только вместо A будем брать ЖНФ A':

$t \neq 0:$

$$\begin{cases} 4x_{11} + x_{21} = 4x_{11} \\ 4x_{12} + x_{22} = x_{11} + 4x_{12} \\ 4x_{13} + x_{23} = x_{12} + 4x_{13} \\ 4x_{14} + x_{24} = -2x_{14} \\ 4x_{15} + x_{25} = x_{14} - 2x_{15} \\ 4x_{21} + x_{31} = 4x_{21} \\ 4x_{22} + x_{32} = x_{21} + 4x_{22} \\ 4x_{23} + x_{33} = x_{22} + 4x_{23} \\ 4x_{24} + x_{34} = -2x_{24} \\ 4x_{25} + x_{35} = x_{24} - 2x_{25} \\ 4x_{31} = 4x_{31} \\ 4x_{32} = x_{31} + 4x_{32} \\ 4x_{33} = x_{32} + 4x_{33} \\ 4x_{34} = -2x_{34} \\ 4x_{35} = x_{34} - 2x_{35} \\ -2x_{41} + x_{51} = 4x_{41} \\ -2x_{42} + x_{52} = x_{41} + 4x_{42} \\ -2x_{43} + x_{53} = x_{42} + 4x_{43} \\ -2x_{44} + x_{54} = -2x_{44} \\ -2x_{45} + x_{55} = x_{44} - 2x_{45} \\ -2x_{51} = 4x_{51} \\ -2x_{52} = x_{51} + 4x_{52} \\ -2x_{53} = x_{52} + 4x_{53} \\ -2x_{54} = -2x_{54} \\ -2x_{55} = x_{54} - 2x_{55} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{21} = 0 \\ x_{31} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{34} = 0 \\ x_{35} = 0 \\ x_{54} = 0 \\ x_{51} = 0 \\ x_{52} = 0 \\ x_{53} = 0 \\ x_{11} = x_{22} \\ x_{12} = x_{23} \\ x_{33} = x_{22} \\ x_{24} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{25} = 0 \\ x_{15} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{42} = 0 \\ x_{43} = 0 \\ x_{55} = x_{44} \end{cases}$$

Получаем $X' = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

Ну чтобы матрица диагонализовалась, надо, чтобы $\operatorname{rk}(X' - aE) = \operatorname{rk}(X' - aE)^2$ и $\operatorname{rk}(X' - dE) = \operatorname{rk}(X' - dE)^2$. Ну посмотрим на матрицу $X' - aE$ при возведении в квадрат ранг уменьшится хотя бы на один, если $b \neq 0$ или $c \neq 0$. Аналогично с матрицей $X' - dE$ - при $e \neq 0$ ранг уменьшится. Значит мы берем только X' уже имеющие диагональный вид: $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$, то есть $\dim L_{t \neq 0} = 2$

$t = 0:$

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_{11} = 4x_{11} \\ 4x_{12} = 4x_{12} \\ 4x_{13} = x_{12} + 4x_{13} \\ 4x_{14} = -2x_{14} \\ 4x_{15} = x_{14} - 2x_{15} \\ 4x_{21} + x_{31} = 4x_{21} \\ 4x_{22} + x_{32} = 4x_{22} \\ 4x_{23} + x_{33} = x_{22} + 4x_{23} \\ 4x_{24} + x_{34} = -2x_{24} \\ 4x_{25} + x_{35} = x_{24} - 2x_{25} \\ 4x_{31} = 4x_{31} \\ 4x_{32} = 4x_{32} \\ 4x_{33} = x_{32} + 4x_{33} \\ 4x_{34} = -2x_{34} \\ 4x_{35} = x_{34} - 2x_{35} \\ -2x_{41} + x_{51} = 4x_{41} \\ -2x_{42} + x_{52} = 4x_{42} \\ -2x_{43} + x_{53} = x_{42} + 4x_{43} \\ -2x_{44} + x_{54} = -2x_{44} \\ -2x_{45} + x_{55} = x_{44} - 2x_{45} \\ -2x_{51} = 4x_{51} \\ -2x_{52} = 4x_{52} \\ -2x_{53} = x_{52} + 4x_{53} \\ -2x_{54} = -2x_{54} \\ -2x_{55} = x_{54} - 2x_{55} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{12} = 0 \\ x_{14} = 0 \\ x_{15} = 0 \\ x_{31} = 0 \\ x_{32} = 0 \\ x_{34} = 0 \\ x_{35} = 0 \\ x_{24} = 0 \\ x_{25} = 0 \\ x_{51} = 0 \\ x_{52} = 0 \\ x_{53} = 0 \\ x_{54} = 0 \\ x_{41} = 0 \\ x_{42} = 0 \\ x_{43} = 0 \\ x_{33} = x_{22} \\ x_{55} = x_{44} \end{array}\right.$$

Получаем $X' = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ c & d & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

Тут $\dim L_{t=0} \geq 3 > 2 \Rightarrow$ при $t = 0$ $\dim L_t - \max$.

#5

Дополним v до базиса: (v, e_2, e_3, e_4). Посмотрим на B' в этом новом базисе:

Матрица перехода $C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B' = C^T \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & -7 & -8 \\ 1 & 2 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

Теперь применим метод Якоби. Первый базисный вектор не меняется, значит v останется в базисе.

$B'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9/20 \end{bmatrix}$

Ну и нужный для такого вида базис:

$e_1' = v$

$e_2' = e_2 - \dfrac{\beta(e_2, e_1')}{\beta(e_1', e_1')} e_1' = e_2 - \dfrac{-1}{1} v = e_2 + v = (-3, 4, 1, -2)$

$e_3' = e_3 - \dfrac{\beta(e_3, e_1')}{\beta(e_1', e_1')} e_1' - \dfrac{\beta(e_3, e_2')}{\beta(e_2', e_2')} e_2' = e_3 - \dfrac{3}{1} v - \dfrac{6}{-1}(e_2 + v) = e_3 - 3v + 6e_2 + 6v = 3v + 6e_2 + e_3$

$e_4' = e_4 - v + 3(e_2 + v) - \dfrac{7}{20}(3v + 6e_2 + e_3) = \dfrac{19}{20} v + \dfrac{18}{20} e_2 - \dfrac{7}{20} e_3 + e_4$