# Акимов Сергей 211-2

Ссылка на коды: https://github.com/Q0un/linal

## #1

Из проги task1.cpp получили, что ступенчатый вид матрицы $AB$ такой:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Тогда $x_3, x_4$ - свободные переменные, а общий вид решения уравнения это:

$$\begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3}(x_4 - x_3) \end{cases}$$

## #2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2t \\ -4 & -1 & -8-5t \\ 0 & 0 & -1+t \end{bmatrix}$$

Сначала найдем минимальный многочлен для матрицы $B = A + E$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2t \\ -4 & 0 & -8-5t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2t^2 \\ 0 & 0 & 8t-8t-5t^2 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = t^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & -5t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = t^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В многочлене при первой степени стоит коэффициент 0, т.к. $b_{21}$ нельзя занулить ни 0-ой, ни 2-ой, ни 3-ей степенью, а большие степени рассматривать не будем, потому что сможем найти многочлен степени $\leq 3$.

При $t = 0$ достаточной стпенью многочлена является 2, можно просто взять $f(x) = x^2$.

При $t \neq 0$ только 2-ой степени будет недостаточно, т.к. $B^2$ с любым коэффициентом не будет равно 0, единичной матрицей ее занулить нельзя, а при 1-ой степени, как уже было сказано, стоит коэффициент 0. Значит придется использовать 3-ю степень матрицы, многочлен вида $f(x) = x^3 - tx^2$ подходит.

Теперь подставим в многочлены $x + 1$ вместо $x$. Получим:

1) $t = 0$: $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

2) $t \neq 0$: $f(x+1) = (x+1)^3 - t(x+1)^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - tx^2 - 2tx - t = x^3 + (3-t)x^2 + (3-2t)x + (1-t)$

Заметим, что получившиеся многочлены будут минимальными для матрицы $A$, потому что если у $A$ есть зануляющий многочлен меньшей степени, то, подставив в него $x-1$ вместо $x$, получим многочлен такой же степени, зануляющий $B$.

## #3

Выведем ограничения на строки матрицы $A$ из данных векторов. Для этого нужно найти решения системы $By = 0$, где $B$ имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 9 & -7 & 7 \\ 4 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Прога task3.cpp привела ее к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{53}{26} \end{bmatrix}$$

Отсюда получаем общий вид строк матрицы $A$: $a_{12} = \dfrac{53}{26}a_{13}$, $a_{11} = \dfrac{7}{9}a_{13}\left(\dfrac{53}{26} - 1\right) = \dfrac{21}{26}a_{13}$. Аналогичный общий вид имеет 2 строчка.

Теперь посмотрим на систему $Ax = b$. Она должна иметь хотя бы одно решение, так что возьмем для удобства

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{26} \end{bmatrix}$$

Теперь соответственно из $x$ и $b$ получаем нужную нам матрицу $A$: $a_{13} = -26$, $a_{23} = 26 \cdot 8 = 208$, а остальные значения восстанавливаются из полученного общего вида строк:

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -53 & -26 \\ 168 & 424 & 208 \end{bmatrix}$$

# #4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Нужно найти все такие $X$ размером 3 на 3, что $AX = XA$. Заметим, что это равносильно следующему: $(A-2E)X = X(A-2E)$, т.к. $(A-2E)X = AX - 2X$, $X(A-2E) = XA - 2X$.

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \; X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$$

Приравняем соответствующие элементы матриц $(A-2E)X$ и $X(A-2E)$:

$$\begin{cases} -8x_7 = 5x_2 \\ -8x_8 = 0 \\ -8x_9 = -8x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 5x_1 + 2x_7 = 5x_5 \\ 5x_2 + 2x_8 = 0 \\ 5x_3 + 2x_9 = -8x_4 + 2x_5 - 4x_6 \\ -4x_7 = 5x_8 \\ -4x_8 = 0 \\ -4x_9 = -8x_7 + 2x_8 - 4x_9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x_2 - 8x_7 = 0 \\ -8x_8 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_9 = 0 \\ 5x_1 - 5x_5 + 2x_7 = 0 \\ 5x_2 + 2x_8 = 0 \\ 5x_3 + 8x_4 - 2x_5 + 4x_6 + 2x_9 = 0 \\ -4x_7 - 5x_8 = 0 \\ -4x_8 = 0 \\ 8x_7 - 2x_8 = 0 \end{cases}$$

Строим матрицу по этим уравнениям и приводим ее к ступенчатому виду с помощью проги task4.cpp. Получаем такую матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Отсюда:

$$\begin{cases}
x_8 = 0 \\
x_7 = \dfrac{1}{4}x_8 = 0 \\
x_4 = \dfrac{3}{2}x_5 - \dfrac{1}{2}x_6 - \dfrac{3}{2}x_9 = \dfrac{1}{2}(3x_5 - x_6 - 3x_9) \\
x_3 = -\dfrac{8}{5}x_4 + \dfrac{2}{5}x_5 - \dfrac{4}{5}x_6 - \dfrac{2}{5}x_9 = -2x_5 + 2x_9 \\
x_2 = -\dfrac{8}{5}x_7 = 0 \\
x_1 = \dfrac{1}{4}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 + x_9 = x_5
\end{cases}$$

Таким образом, матрицы $X$ имеют вид:

$$\begin{bmatrix}
a & 0 & 2(c-a) \\
\frac{1}{2}(3a - b - 3c) & a & b \\
0 & 0 & c
\end{bmatrix}$$

# #5

Из проги task5.cpp получаем нужное разложение матрицы $A$ на $BC$ и произведение $CB$:

$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$, $CB = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$tr(A) = tr((BC)^{2020}) = tr(C \cdot (BC)^{2019} \cdot B) = tr((CB)^{2020})$

Посмотрим что происходит с элементами матрицы $CB$ при возведении в степень: докажем по индукции, что $(CB)^n$ имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (-1)^n & 9^n + (-1)^{n+1} \\ 0 & 9^n \end{bmatrix}$$

База $n = 1$ - работает.

Переход: $n \to n + 1$

$$\begin{bmatrix} (-1)^n & 9^n + (-1)^{n+1} \\ 0 & 9^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n \cdot 10 + 9(9^n + (-1)^{n+1}) \\ 0 & 9^n \cdot 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & 9^{n+1} + (-1)^{n+2}(10 - 9) \\ 0 & 9^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & 9^{n+1} + (-1)^{n+2} \\ 0 & 9^{n+1} \end{bmatrix}$$

Таким образом, $tr((CB)^{2020}) = (-1)^{2020} + 9^{2020} = 9^{2020} + 1$.