

## Акимов Сергей 211-2

**#1**

Из проги task1.cpp получили, что ступенчатый вид матрицы  $AB$  такой:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Тогда  $x_3, x_4$  - свободные переменные, а общий вид решения уравнения это:

$$\begin{cases} x_2 = -x_4 \\ x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3}(x_4 - x_3) \end{cases}$$

**#2**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2t \\ -4 & -1 & -8 - 5t \\ 0 & 0 & -1 + t \end{bmatrix}$$

Сначала найдем минимальный многочлен для матрицы  $B = A + E$ .

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2t \\ -4 & 0 & -8 - 5t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2t^2 \\ 0 & 0 & 8t - 8t - 5t^2 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} = t^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = t^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & -5t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} = t^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В многочлене при первой степени стоит коэффициент 0, т.к.  $b_{21}$  нельзя занулить ни 0-ой, ни 2-ой, ни 3-ей степенью, а большие степени рассматривать не будем, потому что сможем найти многочлен степени  $\leq 3$ .

При  $t = 0$  достаточной степенью многочлена является 2, можно просто взять  $f(x) = x^2$ .

При  $t \neq 0$  только 2-ой степени будет недостаточно, т.к.  $B^2$  с любым коэффициентом не будет равно 0, единичной матрицей ее занулить нельзя, а при 1-ой степени, как уже было сказано, стоит коэффициент 0. Значит придется использовать 3-ю степень матрицы, многочлен вида  $f(x) = x^3 - tx^2$  подходит.

Теперь подставим в многочлены  $x + 1$  вместо  $x$ . Получим:

$$1) \ t = 0: f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$2) \ t \neq 0: f(x + 1) = (x + 1)^3 - t(x + 1)^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - tx^2 - 2tx - t = x^3 + (3 - t)x^2 + (3 - 2t)x + (1 - t)$$

Заметим, что получившиеся многочлены будут минимальными для матрицы  $A$ , потому что если у  $A$  есть зануляющий многочлен меньшей сте-

пени, то, подставив в него  $x - 1$  вместо  $x$ , получим многочлен такой же степени, зануляющий  $B$ .

### #3

Выведем ограничения на строки матрицы  $A$  из данных векторов. Для этого нужно найти решения системы  $By = 0$ , где  $B$  имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 9 & -7 & 7 \\ 4 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

Прога task3.cpp привела ее к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{7}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{53}{26} \end{bmatrix}$$

Отсюда получаем общий вид строк матрицы  $A$ :  $a_{12} = \frac{53}{26}a_{13}$ ,  $a_{11} = \frac{7}{9}a_{13} \left( \frac{53}{26} - 1 \right) = \frac{21}{26}a_{13}$ . Аналогичный общий вид имеет 2 строчка.

Теперь посмотрим на систему  $Ax = b$ . Она должна иметь хотя бы одно решение, так что возьмем для удобства

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{26} \end{bmatrix}$$

Теперь соответственно из  $x$  и  $b$  получаем нужную нам матрицу  $A$ :  $a_{13} = -26$ ,  $a_{23} = 26 \cdot 8 = 208$ , а остальные значения восстанавливаются из полученного общего вида строк:

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -53 & -26 \\ 168 & 424 & 208 \end{bmatrix}$$

#4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Нужно найти все такие  $X$  размером 3 на 3, что  $AX = XA$ . Заметим, что это равносильно следующему:  $(A - 2E)X = X(A - 2E)$ , т.к.  $(A - 2E)X = AX - 2X$ ,  $X(A - 2E) = XA - 2X$ .

$$A - 2E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$$

Приравняем соответствующие элементы матриц  $(A - 2E)X$  и  $X(A - 2E)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -8x_7 = 5x_2 \\ -8x_8 = 0 \\ -8x_9 = -8x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 5x_1 + 2x_7 = 5x_5 \\ 5x_2 + 2x_8 = 0 \\ 5x_3 + 2x_9 = -8x_4 + 2x_5 - 4x_6 \\ -4x_7 = 5x_8 \\ -4x_8 = 0 \\ -4x_9 = -8x_7 + 2x_8 - 4x_9 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5x_2 - 8x_7 = 0 \\ -8x_8 = 0 \\ 8x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_9 = 0 \\ 5x_1 - 5x_5 + 2x_7 = 0 \\ 5x_2 + 2x_8 = 0 \\ 5x_3 + 8x_4 - 2x_5 + 4x_6 + 2x_9 = 0 \\ -4x_7 - 5x_8 = 0 \\ -4x_8 = 0 \\ 8x_7 - 2x_8 = 0 \end{array} \right.$$

Строим матрицу по этим уравнениям и приводим ее к ступенчатому виду с помощью проги task4.cpp. Получаем такую матрицу:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc|c} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Отсюда:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_8 = 0 \\ x_7 = \frac{1}{4}x_8 = 0 \\ x_4 = \frac{3}{2}x_5 - \frac{1}{2}x_6 - \frac{3}{2}x_9 = \frac{1}{2}(3x_5 - x_6 - 3x_9) \\ x_3 = -\frac{8}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 - \frac{4}{5}x_6 - \frac{2}{5}x_9 = -2x_5 + 2x_9 \\ x_2 = -\frac{8}{5}x_7 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_9 = x_5 \end{array} \right.$$

Таким образом, матрицы  $X$  имеют вид:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 2(c-a) \\ \frac{1}{2}(3a-b-3c) & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

## #5

Из проги task5.cpp получаем нужное разложение матрицы  $A$  на  $BC$  и произведение  $CB$ :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}, CB = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = tr((BC)^{2020}) = tr(C \cdot (BC)^{2019} \cdot B) = tr((CB)^{2020})$$

Посмотрим что происходит с элементами матрицы  $CB$  при возведении в степень: докажем по индукции, что  $(CB)^n$  имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (-1)^n & 9^n + (-1)^{n+1} \\ 0 & 9^n \end{bmatrix}$$

База  $n = 1$  - работает.

Переход:  $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (-1)^n & 9^n + (-1)^{n+1} \\ 0 & 9^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n \cdot 10 + 9(9^n + (-1)^{n+1}) \\ 0 & 9^n \cdot 9 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & 9^{n+1} + (-1)^{n+2}(10 - 9) \\ 0 & 9^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{n+1} & 9^{n+1} + (-1)^{n+2} \\ 0 & 9^{n+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Таким образом,  $tr((CB)^{2020}) = (-1)^{2020} + 9^{2020} = 9^{2020} + 1$ .