1.1

(a)

卷积的三个主要组成部分如下:

1. **输入**: 卷积的输入通常是一个二维或多维的数据数组，比如图像或者其他类型的数据。这个输入数据称为输入矩阵或输入张量。
2. **变换（卷积过程）**: 在卷积过程中，会使用一个叫做卷积核（或滤波器）的小矩阵对输入数据进行滑动计算。具体来说，卷积核在输入数据上以一定的步幅滑动，对应位置上的元素进行乘积并求和，然后将结果放到输出矩阵的对应位置。这个过程可以理解为在输入数据上进行局部的加权求和，以提取特征或实现其他的数据变换。
3. **输出**: 卷积的输出是一个新的二维或多维数据数组，称为输出矩阵或输出张量。输出的大小通常会根据输入数据的大小、卷积核的大小以及步幅等参数来确定。输出矩阵中的每个元素都是通过卷积核与输入数据对应位置进行操作得到的结果。

(b)

covolution 具有线性平移不变性，证明如下。

首先定义两个信号 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$，以及对应的卷积核 $h(n)$。

线性证明

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= x_1(n) * h(n) \\
y_2(n) &= (ax_1(n) + bx_2(n)) * h(n)
\end{aligned}
$$

根据 covolution 的定义，$y_1(n)$ 和 $y_2(n)$ 可以表示为:

$$
\begin{aligned}
y_1(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \cdot h(n-k) \\
y_2(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ax_1(k) + bx_2(k)) \cdot h(n-k)
\end{aligned}
$$

根据线性性质，我们可以将 $y_2(n)$ 展开:

$$y_2(n) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \cdot h(n-k) + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) \cdot h(n-k)$$

这与 $y_1(n)$ 的形式完全相同，因此 covolution 是线性的。

平移不变性证明

设 $y(n) = x(n) * h(n)$ 为信号 $x(n)$ 和卷积核 $h(n)$ 的卷积，我们考虑将信号 $x(n)$ 平移 m 个单位后的卷积结果 $y(n-m)$。

$$y(n-m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h((n-m)-k)$$

利用变量替换 $k' = k - m$，则 $k = k' + m$，上式可变为：

$$y(n-m) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x(k'+m) \cdot h(n-(k'+m))$$

$$y(n-m) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x(k') \cdot h(n-k'-m)$$

$$y(n-m) = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} x(k') \cdot h((n-m)-k')$$

以上变换表明，平移信号 $x(n)$ 后的卷积结果 $y(n-m)$ 与原始信号 $x(n)$ 的卷积 $y(n)$ 的形式是一致的，因此 covolution 是平移不变的。

而 correlation 只具有线性性质，不具有平移不变性。

(c)

使用下面的卷积核:

- **Kernel**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

对下面图片做操作:

图 1: 图片 (灰度)

使用 convolution 得到的结果:

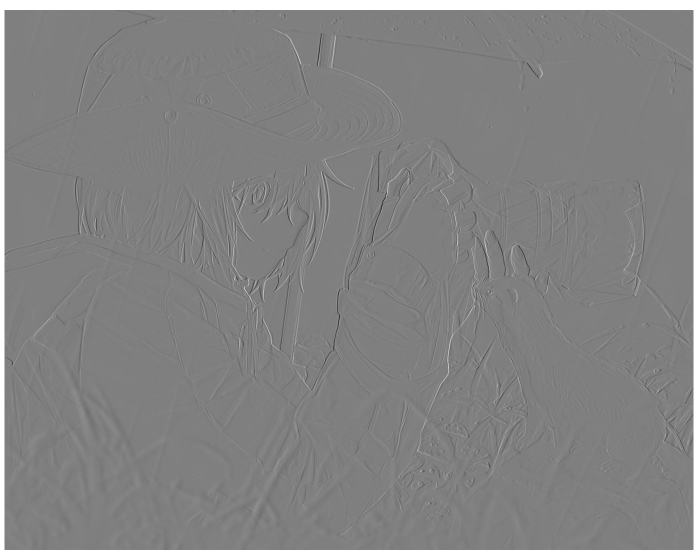

图 2: convolution 结果

使用 correlation 得到的结果:

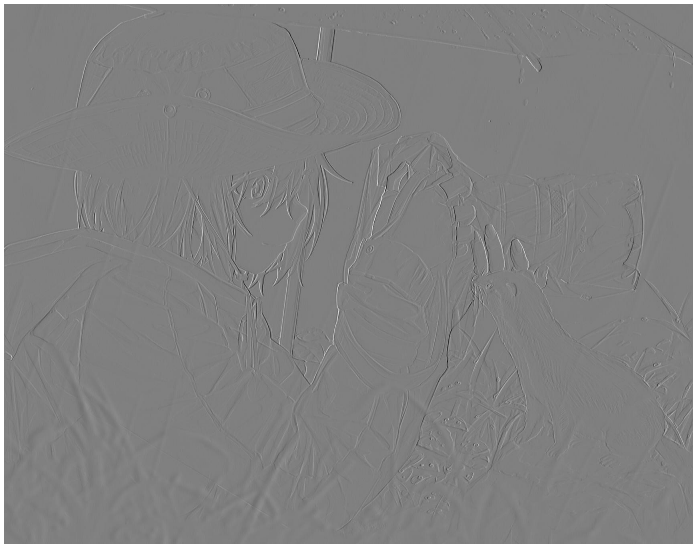

图 3: correlation 结果

将两个结果叠加在一起，得到结果为:

图 4: 叠加结果

说明 convolution 和 correlation 得到的结果在每一个像素的值是相反的。我设计的卷积核旋转之后值相反，所以可以说明 convolution 是将卷积

核旋转 180 度后的 correlation。

1.2

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow (C) Neither$$

(b)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \rightarrow (B) Low \quad pass$$

(c)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix} \rightarrow (A) High \quad pass$$

(d)

(B) Low pass

(e)

(A) High pass