浴谷八连测 R8 题目解析

ddd

2017 年 11 月 5 日

T1

一共 n 个同学，选 k 个班干部。初始时每个同学一张选票，放到选举箱内。现在你想提高被选中的概率，所以往箱子里多放了 x 张自己的选票，求 x 取什么时，你被选中且不会露馅的概率最大。不会露馅指的是不会选出大于一张你的选票，如果有多个 x 满足要求，输出最小的那个。

T1

一共 n 个同学，选 k 个班干部。初始时每个同学一张选票，放到选举箱内。现在你想提高被选中的概率，所以往箱子里多放了 x 张自己的选票，求 x 取什么时，你被选中且不会露馅的概率最大。不会露馅指的是不会选出大于一张你的选票，如果有多个 x 满足要求，输出最小的那个。

- 对于 30% 的数据，$2 \leq n \leq 10$。

T1

一共 n 个同学，选 k 个班干部。初始时每个同学一张选票，放到选举箱内。现在你想提高被选中的概率，所以往箱子里多放了 x 张自己的选票，求 x 取什么时，你被选中且不会露馅的概率最大。不会露馅指的是不会选出大于一张你的选票，如果有多个 x 满足要求，输出最小的那个。

- 对于 30% 的数据，$2 \le n \le 10$。
- 对于 60% 的数据，$2 \le n \le 10^5$。

T1

一共 n 个同学，选 k 个班干部。初始时每个同学一张选票，放到选举箱内。现在你想提高被选中的概率，所以往箱子里多放了 x 张自己的选票，求 x 取什么时，你被选中且不会露馅的概率最大。不会露馅指的是不会选出大于一张你的选票，如果有多个 x 满足要求，输出最小的那个。

- 对于 30% 的数据，$2 \le n \le 10$。
- 对于 60% 的数据，$2 \le n \le 10^5$。
- 对于 100% 的数据，$2 \le n \le 10^9, 2 \le k < \frac{n+1}{2}$。

Solution: 30 分

- 枚举 x，对于每一个 x，暴力模拟选举情况。

Solution: 30 分

- 枚举 x，对于每一个 x，暴力模拟选举情况。
- 总复杂度 $O(???)$。

Solution: 60 分

- 假设往箱子里多放了 x 张自己的选票，一共可能的选出的情况有 $\binom{n+x}{k}$ 种，其中符合题意的有 $\binom{n-1}{k-1} \times \binom{x+1}{1}$ 种，故被选中且不会露馅的概率为 $\frac{\binom{n-1}{k-1} \times \binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。观察到这个式子是先增后减的，枚举 x 直到这个式子开始下降为止。

Solution: 60 分

- 假设往箱子里多放了 x 张自己的选票，一共可能的选出的情况有 $\binom{n+x}{k}$ 种，其中符合题意的有 $\binom{n-1}{k-1} \times \binom{x+1}{1}$ 种，故被选中且不会露馅的概率为 $\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。观察到这个式子是先增后减的，枚举 x 直到这个式子开始下降为止。
- 总复杂度 $O(n)$。

Solution: 100 分

- 设 $f(x) = \frac{\binom{n-1}{k-1} \times \binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。

Solution: 100 分

- 设 $f(x)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$

Solution: 100 分

- 设 $f(x)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$
- 两式作比可得：$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x+2)(n+x+1-k)}{(x+1)(n+x+1)}$

Solution: 100 分

- 设 $f(x)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$
- 两式作比可得：$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x+2)(n+x+1-k)}{(x+1)(n+x+1)}$
- 设 $g(x)=(x+2)(n+x+1-k)-(x+1)(n+x+1)$。

Solution: 100 分

- 设 $f(x) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$
- 两式作比可得：$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{(x+2)(n+x+1-k)}{(x+1)(n+x+1)}$
- 设 $g(x) = (x+2)(n+x+1-k) - (x+1)(n+x+1)$。
- 化简可得 $g(x) = (1-k)x + n + 1 - 2k$。

Solution: 100 分

- 设 $f(x)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$
- 两式作比可得：$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x+2)(n+x+1-k)}{(x+1)(n+x+1)}$
- 设 $g(x)=(x+2)(n+x+1-k)-(x+1)(n+x+1)$。
- 化简可得 $g(x)=(1-k)x+n+1-2k$。
- 所以 $g(x)$ 的零点为 $x_0=\frac{n+1-2k}{k-1}$。

Solution: 100 分

- 设 $f(x)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$
- 两式作比可得：$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x+2)(n+x+1-k)}{(x+1)(n+x+1)}$
- 设 $g(x)=(x+2)(n+x+1-k)-(x+1)(n+x+1)$。
- 化简可得 $g(x)=(1-k)x+n+1-2k$。
- 所以 $g(x)$ 的零点为 $x_0=\frac{n+1-2k}{k-1}$。
- 对比一下 x_0 附近的两个整点的大小即可。

Solution: 100 分

- 设 $f(x)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+1}{1}}{\binom{n+x}{k}}$。
- 则 $f(x+1)=\frac{\binom{n-1}{k-1}\times\binom{x+2}{1}}{\binom{n+x+1}{k}}$
- 两式作比可得：$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{(x+2)(n+x+1-k)}{(x+1)(n+x+1)}$
- 设 $g(x)=(x+2)(n+x+1-k)-(x+1)(n+x+1)$。
- 化简可得 $g(x)=(1-k)x+n+1-2k$。
- 所以 $g(x)$ 的零点为 $x_0=\frac{n+1-2k}{k-1}$。
- 对比一下 x_0 附近的两个整点的大小即可。
- 总复杂度 $O(1)$。

T2

班里有 n 个人，k 门考试，你偷听到了 m 个关系，形如：第 x 个人比第 y 个人的第 z 门课的成绩高。保证所有关系是合法的。你的编号为 1，现在你想知道自己最好和最坏情况下排名多少。一个人一定比另一个人高，当他的 k 门课都比另一个人高，否则他们的排名是不确定的。

T2

班里有 n 个人，k 门考试，你偷听到了 m 个关系，形如：第 x 个人比第 y 个人的第 z 门课的成绩高。保证所有关系是合法的。你的编号为 1，现在你想知道自己最好和最坏情况下排名多少。一个人一定比另一个人高，当他的 k 门课都比另一个人高，否则他们的排名是不确定的。

- 对于 30% 的数据，$2 \le n \le 1000, 2 \le m \le 10000$。

T2

班里有 n 个人，k 门考试，你偷听到了 m 个关系，形如：第 x 个人比第 y 个人的第 z 门课的成绩高。保证所有关系是合法的。你的编号为 1，现在你想知道自己最好和最坏情况下排名多少。一个人一定比另一个人高，当他的 k 门课都比另一个人高，否则他们的排名是不确定的。

- 对于 30% 的数据，$2 \le n \le 1000, 2 \le m \le 10000$。
- 对于另外 30% 的数据，$k = 1$。

T2

班里有 n 个人，k 门考试，你偷听到了 m 个关系，形如：第 x 个人比第 y 个人的第 z 门课的成绩高。保证所有关系是合法的。你的编号为 1，现在你想知道自己最好和最坏情况下排名多少。一个人一定比另一个人高，当他的 k 门课都比另一个人高，否则他们的排名是不确定的。

- 对于 30% 的数据，$2 \le n \le 1000, 2 \le m \le 10000$。
- 对于另外 30% 的数据，$k = 1$。
- 对于 100% 的数据，$2 \le n \le 50000, 2 \le m \le 10^6, 1 \le k \le 3$。

Solution: 30 分

- $k=1$，建立两个有向图，给出的所有关系中，第一个图中 x 向 y 连边，第二个图中 y 向 x 连边。那么，排名一定比你靠后的人数，即为第一个图中，从 1 号点开始遍历，可以到达的点的个数；排名一定比你考前的人数，即为第二个图中，从 1 号点开始遍历，可以到达的点的个数。答案也随之可以获得。

Solution: 30 分

- $k = 1$，建立两个有向图，给出的所有关系中，第一个图中 x 向 y 连边，第二个图中 y 向 x 连边。那么，排名一定比你靠后的人数，即为第一个图中，从 1 号点开始遍历，可以到达的点的个数；排名一定比你考前的人数，即为第二个图中，从 1 号点开始遍历，可以到达的点的个数。答案也随之可以获得。
- 总复杂度 $O(n + m)$。

Solution: 100 分

- 对于 $k > 1$ 的情况，对于每个 k 都得出比你排名高/低的人，求交集即可。

Solution: 100 分

- 对于 $k > 1$ 的情况，对于每个 k 都得出比你排名高/低的人，求交集即可。
- 总复杂度 $O(k(n+m))$。

T3

有 n 个老鼠，第 i 个老鼠的出现时间是 $[l_i, r_i]$。现在你可以在任意时间打老鼠，可以打任意次，每次打老鼠都会捕获当前所有正在出现的老鼠，假设你抓到了 x 个老鼠，你将获得 $f(x)$ 的收益。最后的总收益是每次收益之和，如何打老鼠可以使收益最大？

$$f(x) = \begin{cases} 2x - c & x \leq a \\ x + a - c & a < x < b \\ a + b - c & x \geq b \end{cases}$$

T3

有 n 个老鼠，第 i 个老鼠的出现时间是 $[l_i, r_i]$。现在你可以在任意时间打老鼠，可以打任意次，每次打老鼠都会捕获当前所有正在出现的老鼠，假设你抓到了 x 个老鼠，你将获得 $f(x)$ 的收益。最后的总收益是每次收益之和，如何打老鼠可以使收益最大？

$$f(x) = \begin{cases} 2x - c & x \le a \\ x + a - c & a < x < b \\ a + b - c & x \ge b \end{cases}$$

- 对于 100% 的数据，$2 \le n \le 10^5, 1 \le a < b \le 20, 1 \le c \le 20, 1 \le l_i \le r_i \le 10^9$。

Solution: 30 分

- 爆搜。枚举 $1-10$ 每个时间打或不打，之后计算收益。

Solution: 30 分

- 爆搜。枚举 $1-10$ 每个时间打或不打，之后计算收益。
- 总复杂度 $O(2^n n)$。

Solution: 60 分

- 将时间离散化。

Solution: 60 分

- 将时间离散化。
- 设 dp_i 表示：最后打老鼠发生在时间 i，可以得到的最大价值。

Solution: 60 分

- 将时间离散化。
- 设 dp_i 表示：最后打老鼠发生在时间 i，可以得到的最大价值。
- 则 $dp_i = \max(dp_j + f(cnt_{i,j})), 0 \le j < i$，其中 $cnt_{i,j}$ 表示：在 i 时间可以被打到，但是在 j 时间不会被打到的老鼠的数量。

Solution: 60 分

- 将时间离散化。
- 设 dp_i 表示：最后打老鼠发生在时间 i，可以得到的最大价值。
- 则 $dp_i = \max(dp_j + f(cnt_{i,j})), 0 \leq j < i$，其中 $cnt_{i,j}$ 表示：在 i 时间可以被打到，但是在 j 时间不会被打到的老鼠的数量。
- 总复杂度 $O(n^2)$。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。
- i 加一时，先把右端点位于 i 的区间的贡献减掉，再加上左端点位于 $i+1$ 的区间的贡献。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。
- i 加一时，先把右端点位于 i 的区间的贡献减掉，再加上左端点位于 $i+1$ 的区间的贡献。
- 这是一个区间加的操作，可以使用线段树维护。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。
- i 加一时，先把右端点位于 i 的区间的贡献减掉，再加上左端点位于 $i+1$ 的区间的贡献。
- 这是一个区间加的操作，可以使用线段树维护。
- 同时再用线段树维护 $dp_j + cnt_j$ 和 $dp_j + 2cnt_j$ 的最大值。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。
- i 加一时，先把右端点位于 i 的区间的贡献减掉，再加上左端点位于 $i+1$ 的区间的贡献。
- 这是一个区间加的操作，可以使用线段树维护。
- 同时再用线段树维护 dp_j+cnt_j 和 dp_j+2cnt_j 的最大值。
- 显然 cnt 是单调的，所以可以先二分出 $cnt_j=a$ 和 $cnt_j=b$ 的分界点。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。
- i 加一时，先把右端点位于 i 的区间的贡献减掉，再加上左端点位于 $i+1$ 的区间的贡献。
- 这是一个区间加的操作，可以使用线段树维护。
- 同时再用线段树维护 $dp_j + cnt_j$ 和 $dp_j + 2cnt_j$ 的最大值。
- 显然 cnt 是单调的，所以可以先二分出 $cnt_j = a$ 和 $cnt_j = b$ 的分界点。
- 再通过三段区间的 RMQ 快速转移。

Solution: 100 分

- 设 cnt_j 表示，当前正在求 dp_i，倒数第二次打在 j 处，第 i 次可以获得的老鼠数量。
- i 加一时，先把右端点位于 i 的区间的贡献减掉，再加上左端点位于 $i+1$ 的区间的贡献。
- 这是一个区间加的操作，可以使用线段树维护。
- 同时再用线段树维护 $dp_j + cnt_j$ 和 $dp_j + 2cnt_j$ 的最大值。
- 显然 cnt 是单调的，所以可以先二分出 $cnt_j = a$ 和 $cnt_j = b$ 的分界点。
- 再通过三段区间的 RMQ 快速转移。
- 总复杂度 $O(n \log^2 n)$。

Thank you!