C2-F 小水獭和离散对数

题意

给定正整数 n, m, k，对于 $i = 1, 2, \ldots, 10^5$，找到最小正整数的 $x \geq k$ 使得 i 在无前导 0 的十进制表示下是 $m^x \bmod n$ 的后缀，或判断这样的 x 不存在。

$n = 4\,179\,340\,454\,199\,820\,289$，$m = 3$，$1 \leq k \leq 10^9$。

题解

m 是 n 的原根，$m^0, m^1, \ldots, m^{n-2}$ 在模 n 意义下各不相同。

令 $N = 10^7$，则 $m^k, m^{k+1}, \ldots, m^{k+N-1}$ 在模 n 意义下可以认为是在 $[0, n-1]$ 中随机取了 N 个数。

设 S 为上述 N 个数对 n 取模后的结果组成的集合。

设 $f(i)$（$1 \le i \le 10^5$）是 i 这个正整数不是 S 中任意数的后缀的概率。

设 i 在无前导 0 的十进制下是一个 $g(i)$ 位数，则它是 S 中一个数的后缀的概率为 $\dfrac{1}{10^{g(i)}}$，因此 $f(i) = \left(1 - \dfrac{1}{10^{g(i)}}\right)^N$。

$1, 2, \ldots, 10^5$ 中存在一个数不在 S 中出现的概率不超过 $\sum_{i=1}^{10^5} f(i)$。

$$\sum_{i=1}^{10^5} f(i) \leq (10^5 - 1)\left(1 - \frac{1}{10^5}\right)^N + \left(1 - \frac{1}{10^6}\right)^N \approx 4.54 \times 10^{-5}$$

因此只需枚举 $m^k, m^{k+1}, \ldots, m^{k+N-1}$ 并统计其后缀即可通过。事实上，上述概率计算时存在放缩，实际需要枚举的次数少于 10^7。

C2-G 莫卡和计算机网络

题意

给定一个 $n \times n$ 的网格图，一些位置放置了计算机，剩下位置为空位。问在每个空位上放置计算机后能和多少个其它计算机是四连通的（即可以通过上下左右移动而不经过空地所能到达的计算机）。

$1 \le n \le 200$。

题解

对于每个空地上放计算机的情况，DFS/BFS 求解所在连通块的大小，时间复杂度为 $O\left(n^4\right)$，无法通过。

预处理在不放置新计算机时的连通块情况，每个空地上放计算机时，根据其四周所在连通块的情况（相同或不同），得到自身所在连通块的大小。

预处理时可以使用 DFS/BFS 染色，时间复杂度为 $O\left(n^2\right)$，可以通过。