

E2-I 小水獭和随机树（困难版）

题意

给定 n 个节点固定形态的树（一条长度为 1000 的链下面拼上一棵完全二叉树），每个点的权值是**随机生成**的。求每个点所有与其距离小于 k 的祖先中（包括其本身）权值最大点的权值。

$$10^4 \leq n \leq 10^7。$$

题解

做法 1

DFS 遍历树，维护一个可删大根堆，使得遍历到一个点时使得堆中元素恰为与其距离小于 k 的祖先的权值，此时堆顶元素即为所求。

具体来说，遍历过程中用一个数组维护当前节点的所有祖先，往下走到一个新节点时，如果有距离为 k 的祖先将其从堆中删掉，并加入当前节点的权值。回溯时再将上述操作反向执行。

时间复杂度为 $O(n \log n)$ ，实现过程中需要注意常数优化。

做法 2

将做法 1 的堆改为单调队列，插入新元素时暴力弹出队尾元素，回溯时复原单调队列。

任意时刻单调队列内元素个数不超过**该点所有祖先权值序列对应的笛卡尔树**的树高，因为每个点的权值随机，所以该笛卡尔树是一棵随机的二叉搜索树，其树高期望为 $O(\log n)$ ，从而该算法时间复杂度为 $O(n \log n)$ ，该方法的常数较小。

参考资料：[笛卡尔树](#)、[随机二叉搜索树的期望树高](#)。

做法 3

对做法 2 进行优化，因为队列内元素有序，插入新元素时可以二分插入位置。时间复杂度为 $O(n \log \log n)$ 。