

## C6-D 题

题目：

Bellalabella 今天学习了回文串的内容，一个字符串是回文串当且仅当将其翻转后和原串相同。

Bellalabella 想知道对于一个字符串  $S$ ，它的最长回文子串长度是多少。

最快的算法是 Manacher 算法，时间复杂度为  $O(n)$ 。

由于不知道  $s$  的长度的奇偶性，寻找最长回文子串时会比较麻烦，所以首先来解决这个问题，对  $s$  进行一些改动。方法是在各个字符之间以及头尾添加一标记（不妨为 '#'），再在字符串首添加一标记（不妨为 '\$'），再字符串末尾添加一标记（不妨为 '^'）。假设输入的字符串  $s$  为：

abcbaade

则经过改动后得到的字符串  $s_{\text{new}}$  为：

\$#a#b#c#b#a#a#d#e#^

注意作为标记的字符一定要是字符串  $s$  中不可能出现的字符，且开头和末尾的标记不能一样，如此可使得中心扩展判断字符是否相等时，扩展到字符串两端时字符一定不相等。改造后的字符串长度一定为奇数，不再需要担心奇偶性的问题。而字符串的末尾一定为 '\0'，故可以直接以 '\0' 作为末尾的标记。

该部分的关键代码如下：

```
int len = strlen(s);
s_new[0] = '$'; // 开头标记
s_new[1] = '#';
int j = 2;
for (int i = 0; i < len; i++)
{
    s_new[j++] = s[i];
    s_new[j++] = '#';
}
s_new[j] = '\0'; // 末尾标记
```

接下来，开始寻找回文子串。需要一数组  $p$ ， $p[i]$  表示从  $i$  位置的字符出发能向左右各扩展  $P[i]$  个字符得到回文字符。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$s_{\text{new}}$	\$	#	a	#	b	#	c	#	b	#	a	#	a	#	d	#	e	#	\0
$p$	0	0	1	0	3	0	5	0	3	0	1	2	1	0	1	0	1	0	0

易知  $p[i]$  即为以  $i$  位置为中心可得到的回文串长度。如在  $s_{\text{new}}[6]$  左右各扩展 5 位可得到回文串  $\#a\#b\#c\#b\#a\#$ ，去掉 '#' 可得  $abcba$ ，正好是 5 位。（同时还可以得到该回文子串开始的位置  $\text{int}((i-p[i])/2)$ ，如  $\text{int}((6-5)/2)$  为 0，即以  $s_{\text{new}}[6]$  为中心的回文子串在  $s$  的起始位

置为 s[0]，但是在题目中没有要求所以就算了)。

而求 p[i]的关键就在于充分利用回文字符串的对称性。

用 id 表示之前已经找到的某回文子串的中心位置，该回文串终点为  $mx=id+p[id]$ 。该回文子串是先前找到的所有回文子串里右端最靠右的，即 mx 尽量大。在求 p[i]的过程中，可以找到 i 关于 id 的对称点  $im=2*id-i$ 。因为该回文子串是对称的，i 和 im 又关于该回文子串的中心对称，故  $p[i]=p[im]$ 。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
s_new	\$	#	a	#	b	#	c	#	b	#	a	#	a	#	d	#	e	#	\0
p	0	0	1	0	3	0	5	0	3										
					im		id		i				mx						

但是在三种情况下，这样直接赋值时不正确的：

- 1、超出 mx。如果  $i+p[im]>mx$ ，则不可直接利用对称性。但是以 i 为中心，至少可以向右扩展到 mx，向左也可以扩展  $mx-i$  位，保证是一个回文子串，即  $p[i]\geq mx-i$ 。至于 p[i]究竟是否比  $mx-i$  大，则需要继续向左、向右扩展，直至无法扩展为止，记录下 p[i]。
- 2、im 遇到了 s\_new 的边界。如果 im 为 2，则不可直接利用对称性。此时虽然 p[im]为 1，但是这是由于 s\_new[im]的左边是 '#'，再左边是表示左端边界的 '\$'，而不能保证 s\_new[i]左右两端只能扩展到其左右相邻的两个 '#'。故也需要继续向两边扩展，直至无法扩展为止，记录 p[i]。
- 3、i 与 mx 相等。此时无法再利用对称性，只能一步步向两边扩展。

为了确定 id 和 mx 以求 p[i]，需要及时更新 id 和 mx。当求出的 p[i]的右边界大于 mx 时，更新 id 为 i，mx 为  $i+p[i]$  即可。

该部分的关键代码如下：

```
int id;
int mx = 0;
for (int i = 1; i < len; i++)
{
    int im=2*id-i;//求i关于id的对称点
    if (i < mx)
        p[i] = min(p[im], mx - i);
    else
        p[i] = 1;
    while (s_new[i - p[i]] == s_new[i + p[i]])//需要扩展的话，扩展：由于添加了标记，不用判断是否到达边界
        p[i]++;
    if (mx < i + p[i])//及时更新id和mx
    {
        id = i;
        mx = i + p[i];
    }
    max_len = max(max_len, p[i] - 1);
}
```

接着找出 p 数组的最大值，即可找到最大回文子串长度。