

C3-J 小水獭和电影院（简单版）

题意

求有多少 $n \times m$ 的矩阵满足元素均为 $\{0, 1\}$ 且任意两个相邻位置不均为 1。

$$1 \leq nm \leq 400。$$

题解

不妨设 $m \leq n$, 从而 $m \leq \sqrt{nm}$ 。

设 $f_{i,j,S}$ 为前 $i - 1$ 行已经确定、第 i 行的前 j 个位置已经确定, 第 i 行前 j 个位置和第 $i - 1$ 行后 $m - j$ 个位置的状态为二进制串 S , 此时合法的方案数。

例如 $n = 6, m = 6, i = 4, j = 3, S = 010101$ 时, $f_{i,j,S}$ 就代表了如下状态, 其中 \times 表示已经确定, $?$ 表示还未确定。所有 \times 的位置均不影响后续方案的合法性, 满足无后效性。

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

通过确定下一个位置能否合法放置 0 或 1，就可以进行转移，例如在第 4 行第 4 列放置 0 就可以转移到如下状态：

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

时间复杂度为 $O\left(nm2^{\sqrt{nm}}\right)$ 。