Contest 2 - Solution
Problem E & H & I & J

韩一

212114

2022 年 9 月 24 日

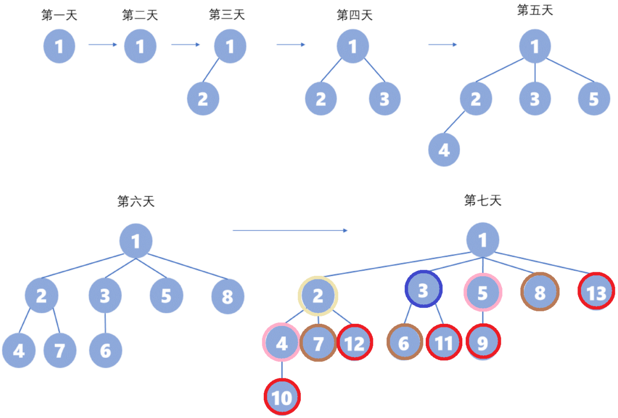
Problem E - XIAO7 和兔子

题目描述

若一对兔子在第 x 天出生，那么它们会从第 $x+2$ 天开始，每天生育 1 对兔子。
我们在第一天有一对刚生的兔子，由此开始无限繁殖。我们将每对兔子按出生日期的先后从 1 开始编号。对于同一天出生的兔子，父母编号越小的兔子编号越大。现在给定 t 个询问，每次询问两对兔子 a, b 的最近公共祖先的编号。
$t \le 10^5, a, b \le 2^{61}$

Problem E - XIAO7 和兔子

图示



Problem E - XIAO7 和兔子

分析

记 f_i 为斐波那契数列的第 i 项，$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2$。
我们观察每天的繁殖信息：

天数-i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
当日新增-d_i	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21
总数-sum_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

我们发现 $sum_i = f_i$，$d_i = f_{i-2}$（由于兔子出生两天后才能繁殖，故两天前有多少兔子，当天就会出生多少兔子）

Problem E - XIAO7 和兔子

分析

对于第 i 天，现存有 f_i 对兔子，有 f_{i-2} 对兔子是新增的，这新增的 f_{i-2} 对兔子编号为 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$，它们分别接在编号 $1, 2, \ldots, f_{i-2}$ 的兔子上。而题目规定父母编号越小的兔子编号越大，故编号 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$ 对应的父亲编号是 $f_{i-2}, f_{i-2}-1, \ldots, 2, 1$。

Problem E - XIAO7 和兔子

分析

对于第 i 天，现存有 f_i 对兔子，有 f_{i-2} 对兔子是新增的，这新增的 f_{i-2} 对兔子编号为 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$，它们分别接在编号 $1, 2, \ldots, f_{i-2}$ 的兔子上。而题目规定父母编号越小的兔子编号越大，故编号 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$ 对应的父亲编号是 $f_{i-2}, f_{i-2}-1, \ldots, 2, 1$。

举个例子：第七天过后一共有 13 对兔子，有 5 对（编号 9,10,11,12,13）是当日新增，它们对应的父亲编号是 5,4,3,2,1。

Problem E - XIAO7 和兔子

分析

对于第 i 天，现存有 f_i 对兔子，有 f_{i-2} 对兔子是新增的，这新增的 f_{i-2} 对兔子编号为 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$，它们分别接在编号 $1, 2, \ldots, f_{i-2}$ 的兔子上。而题目规定父母编号越小的兔子编号越大，故编号 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$ 对应的父亲编号是 $f_{i-2}, f_{i-2}-1, \ldots, 2, 1$。
举个例子：第七天过后一共有 13 对兔子，有 5 对（编号 9,10,11,12,13）是当日新增，它们对应的父亲编号是 5,4,3,2,1。
由此我们可以知道如何找到一个点 x 的父亲节点：在斐波那契数列中找到不小于该编号的最小的数 f_i，则其父亲节点为 $f_i - x + 1$。

Problem E - XIAO7 和兔子

分析

对于第 i 天，现存有 f_i 对兔子，有 f_{i-2} 对兔子是新增的，这新增的 f_{i-2} 对兔子编号为 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$，它们分别接在编号 $1, 2, \ldots, f_{i-2}$ 的兔子上。而题目规定父母编号越小的兔子编号越大，故编号 $f_{i-1}+1, f_{i-1}+2, \ldots, f_i$ 对应的父亲编号是 $f_{i-2}, f_{i-2}-1, \ldots, 2, 1$。
举个例子：第七天过后一共有 13 对兔子，有 5 对（编号 9,10,11,12,13）是当日新增，它们对应的父亲编号是 5,4,3,2,1。
由此我们可以知道如何找到一个点 x 的父亲节点：在斐波那契数列中找到不小于该编号的最小的数 f_i，则其父亲节点为 $f_i - x + 1$。
树只有 $\log n$ 层，暴力求解最近公共祖先即可。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

题目描述

有 n 根木棍，每个木棍有长度 l_i 和颜色 c_i，请问是否可以拼出一个三边颜色各不相同的非退化三角形。
$n \le 2 \times 10^5$， $1 \le c_i, l_i \le 10^9$

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法一

如果没有颜色限制，那么我们可以对木棍按长度进行排序，枚举每一组相邻的 3 根木棍进行判断即可。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法一

如果没有颜色限制，那么我们可以对木棍按长度进行排序，枚举每一组相邻的 3 根木棍进行判断即可。

加上颜色限制之后，我们考虑对于每一根木棍 b，将其作为中间值，找到比它短、颜色跟它不同的木棍里，最长的一根 a；找到比它长、颜色跟它不同的木棍里，最短的一根 c；将三根木棍放在一起判断是否有 $a+b>c$。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法一

如果没有颜色限制，那么我们可以对木棍按长度进行排序，枚举每一组相邻的 3 根木棍进行判断即可。

加上颜色限制之后，我们考虑对于每一根木棍 b，将其作为中间值，找到比它短、颜色跟它不同的木棍里，最长的一根 a；找到比它长、颜色跟它不同的木棍里，最短的一根 c；将三根木棍放在一起判断是否有 a+b>c。

但是这样还不行，因为有可能 a 和 c 的颜色相同。那么我们在比 a 短的木棍中再找到一根颜色和 a,b 都不同的木棍 a'，在比 c 长的木棍中再找到一根和 b,c 都不同的木棍 c'，检查所有配对：abc,abc',a'bc,a'bc' 即可。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法一

如果没有颜色限制，那么我们可以对木棍按长度进行排序，枚举每一组相邻的 3 根木棍进行判断即可。

加上颜色限制之后，我们考虑对于每一根木棍 b，将其作为中间值，找到比它短、颜色跟它不同的木棍里，最长的一根 a；找到比它长、颜色跟它不同的木棍里，最短的一根 c；将三根木棍放在一起判断是否有 $a+b>c$。

但是这样还不行，因为有可能 a 和 c 的颜色相同。那么我们在比 a 短的木棍中再找到一根颜色和 a,b 都不同的木棍 a'，在比 c 长的木棍中再找到一根和 b,c 都不同的木棍 c'，检查所有配对：abc,abc',a'bc,a'bc' 即可。

找到“比某根木棍短且颜色不同的最长的木棍”的过程可以通过从前往后扫一遍、预处理出来。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法二（From ZYJ）

首先将木棍按长度进行排序，我们枚举第 m 根木棍作为三根中最长的那根木棍。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法二（From ZYJ）

首先将木棍按长度进行排序，我们枚举第 m 根木棍作为三根中最长的那根木棍。

检查第 $m-1$ 根木棍，如果第 $m-1$ 根木棍的颜色和第 m 根相同，那么它们不可能出现在同一个三角形，而且作为第三条边，第 $m-1$ 根木棍是优于第 m 根的，那么我们可以跳过第 m 根，将 $m-1$ 根作为最长木棍。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法二（From ZYJ）

首先将木棍按长度进行排序，我们枚举第 m 根木棍作为三根中最长的那根木棍。
检查第 $m-1$ 根木棍，如果第 $m-1$ 根木棍的颜色和第 m 根相同，那么它们不可能出现在同一个三角形，而且作为第三条边，第 $m-1$ 根木棍是优于第 m 根的，那么我们可以跳过第 m 根，将 $m-1$ 根作为最长木棍。
如果第 $m-1$ 根木棍的颜色跟第 m 根不同，那么我们将这两根木棍都加入三角形，在剩下木棍中寻找最短的那条边 i。那条边应该满足 $l_i + l_{m-1} > l_m$，由此我们可以二分出 i 的最小值 k，看 $k \dots m$ 中是否存在三种不同的颜色。

Problem H - XIAO7 和逗猫棒

解法二（From ZYJ）

我们从枚举 $m = n, n-1, \ldots, 3$，同时维护 j 表示满足 $j \ldots m$ 中包含三种不同颜色的最右边的位置，我们维护一个区间 $[j, m]$ 中颜色出现次数的数组，当 m 减一同时某种颜色出现次数减一的时候，如果这种颜色的出现次数从 1 变成了 0，我们就需要将 j 减小以满足区间 $[j, m]$ 内有三种不同的颜色。每次判断时检查是否满足 $j \leq k$，满足即表示区间 $[k, m]$ 中至少有三种不同颜色。

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

题目描述

给定长度为 n 的数列 $\{a_i\}$ 和 q 次询问，每次询问给出 l, r, k，你需要输出值 v，满足 $a_l \dots a_r$ 中等于 v 的数的数量 $\geq \lceil \frac{r-l+1}{k} \rceil$（若存在多个则输出任意一个），若不存在，输出 -1。
$n \leq 10^6, a_i \leq n, q \leq 10^4, 1 \leq k \leq 4$

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 1-随机

对于每一个 $v = 1 \ldots n$，将所有满足 $a_i = v$ 的 i 保存在序列中，那么可以在序列中二分、在 $O(\log n)$ 的时间内对于 l, r, v 求出区间 $a_l \ldots a_r$ 内满足 $a_i = v$ 的数量。

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 1-随机

对于每一个 $v = 1 \dots n$，将所有满足 $a_i = v$ 的 i 保存在序列中，那么可以在序列中二分、在 $O(\log n)$ 的时间内对于 l, r, v 求出区间 $a_l \dots a_r$ 内满足 $a_i = v$ 的数量。
对于询问 l, r, k，我们在区间 $[l, r]$ 内随机一个整数 i，取出该位置的值 a_i，查询 $a_l \dots a_r$ 内有多少位置满足 $a_j = a_i$，并检查该数量是否达到 $\lceil \frac{r-l+1}{k} \rceil$，如果达到，则找到答案。
将这个随机过程重复 T 次，若仍未找到答案，那么认为无解、输出 -1。

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 1-随机

最坏情况下，我们每次询问都成功得到答案的概率是 $(1-0.75^T)^q$，q 取最大值 10^4：

- 当 $T=30$ 时，正确率为 16.8%
- 当 $T=35$ 时，正确率为 65.5%
- 当 $T=40$ 时，正确率为 90.4%
- 当 $T=50$ 时，正确率为 99.4%

当 $T=50$ 时基本可以保证答案正确。（实测 T 取 35 可过）
时间复杂度 $O(qT\log n)$。

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 2-根号分类

设 $B = \sqrt{n}$，对于询问 l, r, k:

- 若 $r - l + 1 \leq B$，我们直接暴力计数，单次时间复杂度 $O(B)$

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 2-根号分类

设 $B=\sqrt{n}$，对于询问 l,r,k:

- 若 $r-l+1\leq B$，我们直接暴力计数，单次时间复杂度 $O(B)$
- 若 $r-l+1>B$，若答案存在，则答案满足其出现次数 $\geq\lceil\frac{r-l+1}{k}\rceil\geq\frac{B}{k}$，由于总数只有 n，那么出现次数达到 $\frac{B}{k}$ 的值的数量不超过 $\frac{n}{\frac{B}{k}}=\frac{kn}{B}\leq 4\sqrt{n}$。我们可以将次数达到 $\frac{B}{k}$ 的每种值都检查一遍，每次用 $O(\log n)$ 的时间查询出现次数是否达到 $\lceil\frac{r-l+1}{k}\rceil$，单次时间复杂度 $O(\frac{kn}{B}\log n)$。

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 2-根号分类

设 $B=\sqrt{n}$，对于询问 l,r,k:

- 若 $r-l+1\le B$，我们直接暴力计数，单次时间复杂度 $O(B)$
- 若 $r-l+1>B$，若答案存在，则答案满足其出现次数 $\ge \lceil\frac{r-l+1}{k}\rceil\ge\frac{B}{k}$，由于总数只有 n，那么出现次数达到 $\frac{B}{k}$ 的值的数量不超过 $\frac{n}{\frac{B}{k}}=\frac{kn}{B}\le 4\sqrt{n}$。我们可以将次数达到 $\frac{B}{k}$ 的每种值都检查一遍，每次用 $O(\log n)$ 的时间查询出现次数是否达到 $\lceil\frac{r-l+1}{k}\rceil$，单次时间复杂度 $O(\frac{kn}{B}\log n)$。

总时间复杂度为 $O(q(B+\frac{kn}{B}\log n))=O(q(B+\frac{n\log n}{B}))$，当 $B=\sqrt{n}$ 时，时间复杂度为 $O(q\sqrt{n}\log n)$。

Problem I - Bellalabella 和生日礼物

解法 2-根号分类

设 $B=\sqrt{n}$，对于询问 l,r,k:

- 若 $r-l+1\le B$，我们直接暴力计数，单次时间复杂度 $O(B)$
- 若 $r-l+1>B$，若答案存在，则答案满足其出现次数 $\ge\lceil\frac{r-l+1}{k}\rceil\ge\frac{B}{k}$，由于总数只有 n，那么出现次数达到 $\frac{B}{k}$ 的值的数量不超过 $\frac{n}{\frac{B}{k}}=\frac{kn}{B}\le 4\sqrt{n}$。我们可以将次数达到 $\frac{B}{k}$ 的每种值都检查一遍，每次用 $O(\log n)$ 的时间查询出现次数是否达到 $\lceil\frac{r-l+1}{k}\rceil$，单次时间复杂度 $O(\frac{kn}{B}\log n)$。

总时间复杂度为 $O(q(B+\frac{kn}{B}\log n))=O(q(B+\frac{n\log n}{B}))$，当 $B=\sqrt{n}$ 时，时间复杂度为 $O(q\sqrt{n}\log n)$。
令 $B=\frac{n\log n}{B}$，得到 $B=\sqrt{n\log n}$，此时时间复杂度为 $O(q\sqrt{n\log n})$。

Problem J - 小水獭和神秘动物

题目描述

设 R 是集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上的关系，满足以下条件：

- 给定 m 个限制 $x_i, y_i, z_i (x_i \neq y_i)$， $z_i = 0$ 表示 $< x_i, y_i > \notin R$，$z_i = 1$ 表示 $< x_i, y_i > \in R$
- R 是自反的
- R 是传递的

求满足条件的 R 的个数。

$n \leq 7, m \leq n(n-1)$，且答案之和不超过 3×10^7。

Problem J - 小水獭和神秘动物

题解

由于 n 很小且题目对答案之和进行了限制，我们考虑搜索。

Problem J - 小水獭和神秘动物

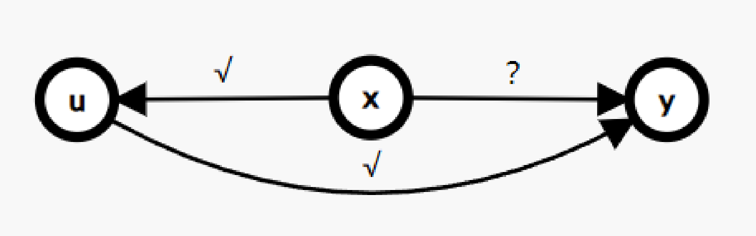
题解

由于 n 很小且题目对答案之和进行了限制，我们考虑搜索。
进行 DFS，依次考虑每一对关系 $< x, y >$，并根据当前情况判断这对关系是应该加入/不能加入/可加可不加。
(设当前已经确定加入的关系集合为 S，已经确定不加入的关系集合为 T)

Problem J - 小水獭和神秘动物

题解

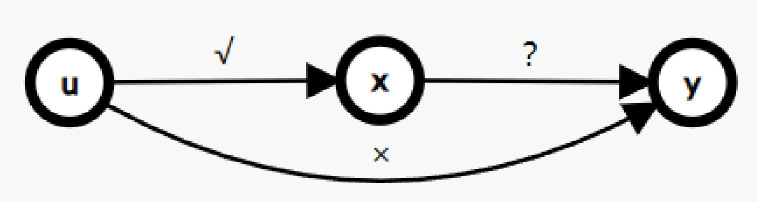
若 $\exists u, \text{s.t.} <x, u> \in S, <u, y> \in S$，则 $<x, y>$ 是必须加入的。



Problem J - 小水獭和神秘动物

题解

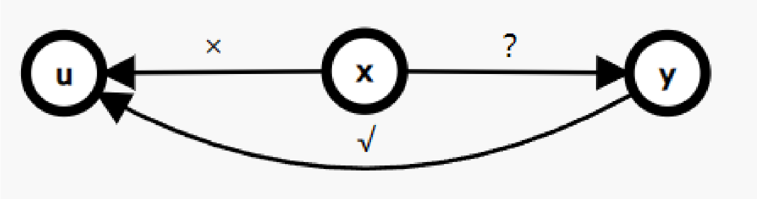
若 $\exists u, s.t. < u, x >\in S, < u, y >\in T$，则 $< x, y >$ 是不能加入的。



Problem J - 小水獭和神秘动物

题解

若 $\exists u, s.t. <x, u> \in T, <y, u> \in S$，则 $<x, y>$ 是不能加入的。



Problem J - 小水獭和神秘动物

题解

根据上述限制进行 DFS 即可。

Problem J - 小水獭和神秘动物

题解

根据上述限制进行 DFS 即可。
时间复杂度 O(可过)。

The End

THANKS!