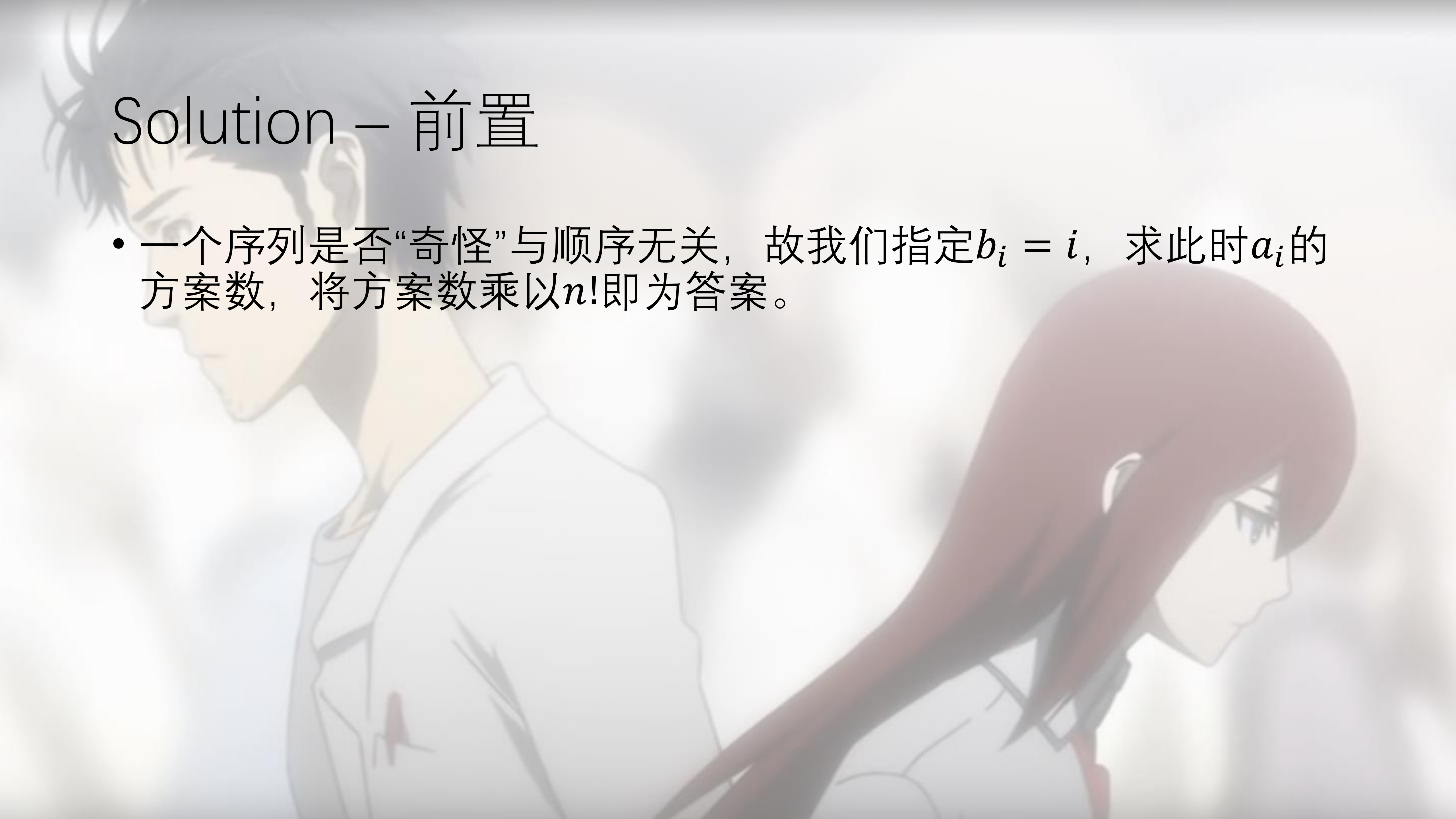
C4-L XIAO7和奇怪的排列

20376290-韩一

Description

- 对于排列$\{a_i\},\{b_i\}$，定义：$MAX(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\max\{a_i,b_i\}$
- 对于给定非负整数K，若满足$MAX(a,b)\le K$，则认为是(a,b)是一对奇怪的排列。
- 给定n和K，求有多少对长度为n的、奇怪的排列。
- 答案对998244253取模。

- $n\le 50, K\le 2500$



Solution – 前置

- 一个序列是否“奇怪”与顺序无关，故我们指定$b_i = i$，求此时a_i的方案数，将方案数乘以$n!$即为答案。

Solution – DP状态表示

- 我们只考虑前i个位置里前i个数的填写情况

- 设f[i][j][k]表示[前i个数]、[有j个位置待填充(同时有j个数未填)]、[已经确定的位置的$max\{a_i, i\}$的和为k]的方案数

- 答案即为$\sum_{i \le K} f[n][0][i]$

Solution – DP状态转移

- 对于f[i][j][k]，我们考虑它能转移到哪些状态：
- （考虑**第(i+1)个位置填什么**+**第(i+1)个数放在哪儿**）
- 1. 第(i+1)个位置空着，第(i+1)个数留到之后再填：**~**->f[i+1][j**+1**][k]
- 2. 第(i+1)个数填到第(i+1)个位置：**~**->f[i+1][j][k**+(i+1)**]
- 3. 第(i+1)个数填到前面j个空位中的一个，第(i+1)个位置留到之后填：
- **j*~**->f[i+1][j][k**+(i+1)**]
- 4. 前面j个没填的数中选一个填到第(i+1)个位置，第(i+1)个数留到之后填：
- **j*~**->f[i+1][j][k**+(i+1)**]
- 5. j个没填的数中选一个填到第(i+1)个位置，第(i+1)个数填到填到j个空位中的一个：
- **j*j*~**->f[i+1][j**-1**][k**+2(i+1)**]
- 初始状态为f[0][0][0]=1，直接转移即可，时间复杂度$O(n^2K)$

Example

- 前面四个位置的情况是2,( ),3,( )，即位置2,4待填，数字1,4待填，属于f[4][2][5]
- 考虑第五个位置和第五个数的填写情况
- 1. 2,( ),3,( ),( )，即f[5][3][5]
- 2. 2,( ),3,( ),5，即f[5][2][10]
- 3. 2,5,3,( ),( )，即f[5][2][10]
- 4. 2,( ),3,( ),4，即f[5][2][10]
- 5. 2,5,3,( ),1，即f[5][1][15]

Code

```
n = read<int>(), K = read<int>();

//f[i][j][k]: for the first i elements, the number of blank space is j, and the sum of definite positions is k
for (int i = 0; i <= K; ++ i) f[0][0][i] = 1;
for (int i = 0; i < n; ++ i) for (int j = 0; j <= i; ++ j) for (int k = 0; k <= K; ++ k) {
    (f[i + 1][j + 1][k] += f[i][j][k]) %= MOD;
    if (k + i + 1 <= K) f[i + 1][j][k + (i + 1)] = (f[i + 1][j][k + (i + 1)] + (LL)f[i][j][k] * (j * 2 + 1)) % MOD;
    if (j && k + 2 * (i + 1) <= K) f[i + 1][j - 1][k + 2 * (i + 1)] = (f[i + 1][j - 1][k + 2 * (i + 1)] + (LL)f[i][j][k] * j * j) % MOD;
}
int ans = f[n][0][K];
for (int i = 2; i <= n; ++ i)
    ans = (LL)ans * i % MOD;
printf("%d\n", ans);
```

THANKS