

E1-D 小水獭和随机数

题意

给定随机生成的序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，将其升序排序。

$$1 \leq n \leq 2 \times 10^7, \quad 0 \leq a_i < 2^{24}。$$

题解

基于比较的排序复杂度最低为 $O(n \log n)$ ，无法通过。

注意到值域仅有 $2^{24} = 16\,777\,216$ ，考虑计数排序，时间复杂度为 $O(n + w)$ ，其中 w 为值域大小，可以通过。

示例代码

```
int main(){
    scanf("%d", &t);
    while(t--){
        scanf("%d%u", &n, &seed);
        for(int i = 1; i <= n; i++) a[Rand()]++;
        int cnt = 0;
        unsigned ans = 0;
        for(int i = 0; i < (1 << 24); i++){
            for(int j = 1; j <= a[i]; j++) ans += i ^ (++cnt);
            a[i] = 0;
        }
        printf("%u\n", ans);
    }
}
```

E1-J 小水獭和战狼

题意

给定 n 个元素的序列 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, 求以每个位置结尾的上升子序列个数。

定义 $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x < x' \wedge y < y'$ 。

$1 \leq n \leq 10^5, -10^9 \leq a_i, b_i \leq 10^9$ 。

题解

本题有多种解法，这里只介绍 CDQ 分治。

考虑一个暴力的解法：

```
int n, a[maxn], b[maxn], f[maxn] = {0};
for(int i = 1; i <= n; i++){
    f[i] += 1;
    for(int j = 1; j < i; j++){
        if(a[j] < a[i] && b[j] < b[i]){
            f[i] += f[j];
        }
    }
}
```

定义一个函数 $\text{solve}(l, r)$, 它实现的效果等价于如下代码:

```
for(int i = 1; i <= r; i++){
    f[i] += 1;
    for(int j = 1; j < i; j++){
        if(a[j] < a[i] && b[j] < b[i]){
            f[i] += f[j];
        }
    }
}
```

最终调用 $\text{solve}(1, n)$ 后即得到答案。

考虑更快地实现 $\text{solve}(l, r)$ 的效果, 若 $l = r$, 仅需令 f_l 增加 1, 否则:

1. 设 $mid = \left\lfloor \frac{l+r}{2} \right\rfloor$, 首先调用 $\text{solve}(l, mid)$, 那么 $f_l, f_{l+1}, \dots, f_{mid}$ 都已计算完成。
2. 接着, 使用离散化 + 树状数组的方法可以在 $O((r-l) \log(r-l))$ 的复杂度内计算所有 f_j 对 f_i 的贡献, 其中 $l \leq j \leq mid, mid < i \leq r$ 。
3. 最后, 调用 $\text{solve}(mid+1, r)$ 。

时间复杂度为 $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n)$, 由主定理 $T(n) = O(n \log^2 n)$ 。