薛淳彡　〈声明，为使用新版教材，本卷所有单调视为严格单调〉

3.5 函数的单调性（2）

知识点：复合函数单调性、单调性的应用

【A 组】

1. 若奇函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，则 $f(1.4)$、$-f(-\sqrt{2})$、$f(1.5)$ 的大小关系是 $f(1.4)>-f(-\sqrt{2})>f(1.5)$ 严格.

2. 当 $x<0$ 时，偶函数 $y=f(x)$ 是严格增函数，若 $x_1<0,x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，则 $f(-x_1)$ > $f(-x_2)$.

3. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足：对任意的 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$, $x_1\neq x_2$，有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$，则（A）

(A) $f(3)<f(-2)<f(1)$　(B) $f(1)<f(-2)<f(3)$

(C) $f(-2)<f(1)<f(3)$　(D) $f(3)<f(1)<f(-2)$

4. 设 $f(x)$、$g(x)$ 都是单调函数，有如下四个命题：

①若 $f(x)$ 是严格增函数，$g(x)$ 是严格增函数，则 $f(x)+g(x)$ 是严格增函数

②若 $f(x)$ 是严格增函数，$g(x)$ 是严格减函数，则 $f(x)-g(x)$ 是严格增函数

③若 $f(x)$ 是严格增函数，$g(x)$ 是严格增函数，则 $f(x)\cdot g(x)$ 是严格增函数

④若 $f(x)$ 是严格增函数，$g(x)$ 是严格减函数，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是严格减函数

其中正确的命题个数是 2.

5.已知函数 $f(x)$ 对于任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 $f(2),f(\pi),f(3)$ 的大小关系为 $f(2)>f(3)>f(\pi)$.

6.函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-8x+15}}$ 的单调递减区间是 ~~$(-\infty,3)$~~ $(5,+\infty)$.

7. 设函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域;(2)求 $f(x)$ 的单调区间;(3)求 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 的最大值和最小值.

解：(1) $-x^2+5x+6\geq 0$

$x\in[-1,6]$

(2) $f(x)=\sqrt{-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{49}{4}}$

$\therefore f(x)$ 在 $[-1,\frac{5}{2}]$ 严格递增

在 $[\frac{5}{2},6]$ 严格递减

(3) $\max\{f(x)\}=f(\frac{5}{2})=\frac{7}{2}$

$\min\{f(x)\}=\min\{f(1),f(5)\}=\min\{\sqrt{10},\sqrt{6}\}=\sqrt{6}$

B2：令 $f(x)-3x=t$

$f(t)=2$，t为常数　　$f(x)=3x+\frac{1}{2}$

$f(x)=3x+t$　　$f(\frac{3}{2})=5$

$f(t)=3t+t=4t=2$

【B 组】　$t=\frac{1}{2}$

1. 已知函数 $y=f(x)$ 在 **R** 上单调递减，则函数 $y=f(|x+2|)$ 的单调递减区间是 ___$[-2,+\infty)$___. 倾向于老教材中定义

2. 函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增，$f[f(x)-3x]=2$，则 $f\left(\frac{3}{2}\right)=$ ___5___.

3. 若 $f(x)$ 是 R 上的严格减函数，且函数 $f(x)$ 的图像经过点 $A(0,1)$ 和 $B(3,-1)$，

则不等式 $|f(x+1)|<1$ 的解集为 ___$(-1,2)$___.

4. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2+2x$，若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围为 ___$(-2,1)$___.

5. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 是严格减函数，$f(2)=0$，则不等式 $(x-1)f(x+1)>0$ 的解集为 ___$(-3,-1)$___.

$f(x+1)>0 \Leftrightarrow x+1\in(-\infty,-2)\cup(0,2) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-1,1)$

$(x-1)>0 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$

6. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，$f(2)=1$，如果 x 满足 $f(x)-f\left(\frac{1}{x-3}\right)\le 2$，则 x 的取值范围为___ $(3,4]$

$=f(4)$

$f(x(x-3))\le f(4)$

$\begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{x-3}>0 \\ x(x-3)\le 4 \end{cases}$

7. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，且 $f(3)=9$，则使 $f(x)>3x$ 成立的 x 的取值范围是 ___$(0,3)$___.

令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$　$\frac{x_1x_2g(x_1)-x_1x_2g(x_2)}{x_1-x_2}<0$

$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}<0$，$g(x)$ 严格↓

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-a, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$，则满足 $f(a)>f\left(-\frac{a}{3}+\frac{1}{6}\right)$ 的 a 的取值范围是 ___$(\frac{1}{8},\frac{1}{2}]\cup(1,+\infty)$___.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，且在 R 上是严格增函数，若 $F(x)=f(x)-f(-x)$，则 $F(x)$ 一定是（ A ）

(A) 奇函数，且在 R 上是严格增函数　(B) 奇函数，且在 R 上是严格减函数

(C) 偶函数，且在 R 上是严格增函数　(D) 偶函数，且在 R 上是严格减函数

10. 已知 $f(x)$ 是 R 上的增函数，若令 $F(x)=f(1-x)-f(1+x)$，则 $F(x)$ 是 R 上的（ B ）

A. 增函数　B. 减函数

C. 先减后增的函数　D. 先增后减的函数

11. 已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2021-ax}}{a-1}$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，那么实数 a 的取值的范围 $(-\infty,0)\cup(1,2021]$

12. 任意 $t\in R^+$ 时，$f[f(t)-\frac{1}{t}]=2$ 恒成立，且函数 $y=f(t)$ 单调，$f(\frac{1}{2019})=$ ___2020___.

$f(t)-\frac{1}{t}=c$　　$f(t)=\frac{1}{t}+1$

$f(c)=2$

$f(c)=\frac{1}{c}+c=2$

$c=1$

11. 临界值 $a=0$，$a=1$.

13. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上是奇函数、严格减函数，且 $-1<1-a<1$

$f(1-a)+f(1-a^2)<0$，则实数 a 的取值范围是 ~~$(1,\sqrt{2})$~~ $(0,1)$

$f(1-a)<f(a^2-1)$

$\begin{cases} -1<1-a<1 \\ -1<1-a^2<1 \\ 1-a>a^2-1 \end{cases}$

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax, x\le 1,\\ ax-1, \quad x>1,\end{cases}$ 若存在不相等的 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立，则实数 a 的取值范围是 $a<2$.

15. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$.

(1)判断 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性，并用定义加以证明；

(2)设函数 $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}+\dfrac{2}{x}+3$，$x\ge 1$，求 $g(x)$ 的值域.

→ 添项多做法

解：(1) 严格单调递减

证明：$\forall\, 0<x_1<x_2\le 1$

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{2}{x_1}-x_2^2-\frac{2}{x_2}=(x_1-x_2)\left(x_1+x_2-\frac{2}{x_1x_2}\right)$

$x_1-x_2<0$，$x_1+x_2<2$，$\frac{2}{x_1x_2}>\frac{2}{1}=2$

故 $x_1+x_2-\frac{2}{x_1x_2}<0$

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 即 $f(x_1)<f(x_2)$

故 $f(x)$ 严格单调递减

定义域：$\{x\mid x\ne -1, x\ne 0\}$

(2) $g(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{2(x+1)}{x}+1\ge$

$3\sqrt[3]{\frac{x^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x+1)}{x}\cdot\frac{(x+1)}{x}}+1=4$

在 $\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{x+1}{x}$ 时取等，

即 $\frac{x}{x+1}=1$，在 $x\to\infty$ 时适行

故 $g(x)>4$

$g(x)\le g(1)=\frac{21}{4}$

∴值域为 $(4,\frac{21}{4}]$

16. 定义在 R 上的函数 $y=f(x)$，$f(0)\ne 0$．当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对任意的 a、$b\in R$，有 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$.

(1) 求证：$f(0)=1$；

(2) 求证：对任意的 $x\in R$，恒有 $f(x)>0$；

(3) 证明：$f(x)$ 是 R 上是严格增函数；

(4) 若 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$，求 x 的取值范围.

(1) 证明：~~名~~ $f(0+0)=f(0)\cdot f(0)$

$f(0)=f^2(0)$

而 $f(0)\ne 0$

故 $f(0)=1$

(2) 证明：假设 $f(a)=0$，$f(a)\cdot f(-a)=0$

而 $f(0)=f(a)\cdot f(-a)$

但 $f(0)=1$

故矛盾

故 $\forall f(a)\ne 0$

$f(a)=f(\frac{1}{2}a)\cdot f(\frac{1}{2}a)=f^2(\frac{1}{2}a)\ge 0$

故 $\forall f(a)>0$

(3) 证明：$\forall\, x_1<x_2$，$x_2-x_1>0$

$f(x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)$

$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=f(x_2-x_1)>1$

$f(x_2), f(x_1)>0$

故 $f(x_2)>f(x_1)$，故严格增

(4) 解 $f(x)\cdot f(2x-x^2)=f(3x-x^2)$

$1=f(0)$

$f(3x-x^2)>f(0)$

$3x-x^2>0$

$x\in(0,3)$

【C组】

1. 对于函

部奇函数

是 $[-1$

2.若函数

$y=f(x)$ 的

数 a 的可

3.设函数

定义函数

$f(x)=x^2-$

A. $f_p(f(0$

C. $f_p(f_p(2$

【滚动复

1. 不等式

2. 不等式

3. 若不

为__

4. 已知

误，6在 ④ $\frac{b}{a}$

等式

5. 已知

则实

6. 已知

7. 设 a

8. 不等

9. 不等

$\therefore f(0)=f(0)^2$

$\because f(0)\ne 0$

$\therefore f(0)=1$

(2) ~~$f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=f$~~ 解 ||

$x=0$ 时 $f(x)=1$

(4) 若

$f(0+0)=f^2(0)$

$f(0)=f^2(0)$

(1) 求证：$f(0)=1$；

(2) 求证：对任意的 $x\in R$，恒有 $f(x)$

(3) 证明：$f(x)$ 是 R 上是严格增函数

(4) 若 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$，求 x 的

C1: $-ae^x-1=ae^{-x}+1$ $e^x+\frac{1}{e^x}=-\frac{2}{a}$ $-\frac{2}{a}\in[2,+\infty)$

$a(e^x+\frac{1}{e^x})=-2$ $e^x\in(0,+\infty)$ $a\in[-1,0)$

$a=0$时，不成立 $a\neq0$时 $e^x+\frac{1}{e^x}\in[2,+\infty)$

C2: 1°同增: $\begin{cases}(\frac{1}{2})^{2023}+a\geq0\\(\frac{1}{2})^{-2023}+a\leq0\end{cases}$ $a\in\varnothing$

2°同减 $\begin{cases}(\frac{1}{2})^{1}+a\leq0\\(\frac{1}{2})^{-1}+a\geq0\end{cases}$ $a\in[-2,-\frac{1}{2}]$

3°同下到增 $\begin{cases}(\frac{1}{2})^{2023}+a\leq0\\(\frac{1}{2})^{-2023}+a\geq0\\(\frac{1}{2})^{1}+a\geq0\\(\frac{1}{2})^{-1}+a\leq0\end{cases}$ $a\in\varnothing$

综上所述 $a\in[-2,-\frac{1}{2}]$

【C 组】

1. 对于函数$f(x)$，若在定义域内存在实数x_0，满足$f(-x_0)=-f(x_0)$，则称$f(x)$为"局部奇函数"．已知$f(x)=-ae^x-1$在 R 上为"局部奇函数"，则a的取值范围是 $[-1,0)$.

2.若函数$y=f(x)$和$y=f(-x)$在区间$[m,n]$上的单调性相同，则把区间$[m,n]$叫做$y=f(x)$的"稳定区间".已知区间$[1,2023]$为函数$y=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x+a\right|$的"稳定区间"，则实数$a$的可能取值是 $[-2,-\frac{1}{2}]$.

3.设函数 $y=f(x)$在 R 上有定义，对于任一给定的正数 p，定义函数 $f_p(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\leq p,\\ p, & f(x)>p,\end{cases}$ 则称函数 $f_p(x)$为 $f(x)$的"p 界函数"；若给定函数 $f(x)=x^2-2x-1$，$p=2$，则下列结论错误的是（ ~~B~~ ）B

A．$f_p(f(0))=f(f_p(0))$　　B．$f_p(f(1))=f(f_p(1))$

C．$f_p(f_p(2))=f(f(2))$　　D．$f_p(f_p(3))=f(f(3))$

【滚动复习】

1. 不等式$\frac{x-3}{x+a}\geq1$的解集为M，若$-2\notin M$，则实数a的取值范围为 ~~ok~~ $(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$.

2. 不等式$x^2-|x|-2<0$的解集为 $(-2,2)$.

3. 若不等式$|3x-b|<4$的解集中的整数有且仅有 1,2,3，则 b 的取值范围为 $(5,7)$.

4. 已知实数a和b，有下列不等式：①$a^2+b^2\geq2ab$；②$a^2+b^2\geq-2ab$；③$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq2$；⑤$a+\frac{1}{a}\geq2$；⑥$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geq2$；⑦$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$．其中恒成立的不等式是 ①②~~④~~⑥⑦ .

5. 已知全集$U=\mathrm{R}$, $A=\{x\mid x^2-2x-3>0\}$, $B=\{x\mid m-2\leq x\leq m+2\}$, $\bar{A}\cap B=[0,3]$，则实数$m=$ 2 .

6. 已知不等式$ax^2+bx+1\geq0$的解集是$[-5,1]$，则$5a+10b$的值是 -9 .

$-\frac{1}{5}$ $-\frac{4}{5}$

7. 设$a\in R$则"$a(a-2)<0$"是"$\frac{2}{a}>1$"成立的 充要 条件.

8. 不等式$\frac{x^2-1}{(x^2+1)(x-1)}<2$的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

9. 不等式$1<|2-x|\leq7$的解集是 $[-5,1)\cup(3,9]$

, $x>1$,

$-\infty, 2)$

______.

$\frac{}{}$。

c

调性，并用定义加以证明；

$+\frac{2}{x}+3$， $x\ge 1$，求 $g(x)$ 的值域.

(2) 解: $g(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{2x+2}{x}+1$

令 $\frac{x}{x+1}=a\in[\frac{1}{2},1)$

$\therefore g(x)=h(a)=a^2+\frac{2}{a}+1$，在 $[\frac{1}{2},1)$ 递减

$2x_2-2x_1)$

$\therefore h(a)\in(4,\frac{21}{4}]$

$\therefore g(x)\in\boxed{(4,\frac{21}{4}]}$

$2)$

数 $y=f(x)$, $f(0)\ne 0$。当 $x>0$ 时， $f(x)>1$，且对任意的

$=f(a)\cdot f(b)$.

$]x\in R$，恒有 $f(x)>0$；

R 上是严格增函数；

$x^2)>1$，求 x 的取值范围.

(3) 证：对 $\forall x_1>x_2$，由 $x_1-x_2>0$，得 $f(x_1-x_2)$ …