薛淳宁

90+20

第三章　函数的基本性质

§3.1 函数基本概念 (1)

知识点: 函数的概念、定义域、值域、相同的函数.

A 组:

1. $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $R^- \cup R^+$.

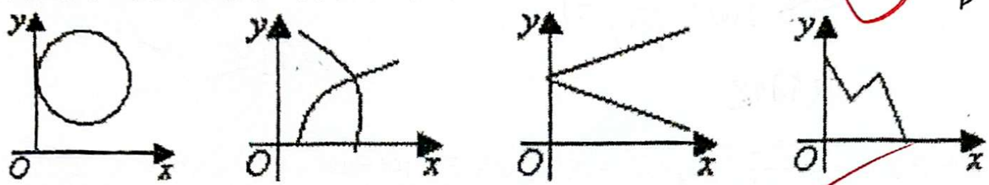
2. $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

3. $y=(2x+1)^0$ 的定义域为 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$

4. 函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $x=a$ 的公共点的数目是……………………………………(C)

(A) 1　　(B) 0　　(C) 0 或 1　　(D) 1 或 2

5. 下列图像中可以作为函数 $y=f(x)$ 的图像的是……………………………………(D)



B 组:

1. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域是 $[-2,1)\cup(1,2]$

2. 函数 $f(x)=\frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

3. 已知下列各组函数, 其中是同一函数的是 ④⑥:

① $y=\frac{(x+3)(x-5)}{x+3}, y=x-5$;

② $y=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}, y=\sqrt{(x+1)(x-1)}$;

③ $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

④ $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, F(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

⑤ $f_1(x)=(\sqrt{2x-5})^2, f_2(x)=2x-5$

⑥ $f(x)=x^0, g(x)=\frac{1}{x^0}$

4. 若函数 $y=\sqrt{(a^2-1)x^2+(a-1)x+\frac{2}{a+1}}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是 ~~$(-\infty,-1)\cup\{1\}\cup[9,+\infty)$~~ $[1,9]$.

5. 下列函数中, 表示同一函数的是……………………………………(B)

(A) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ 与 $g(x)=x+3$

(B) $y=\frac{x^2}{|x|}(x\neq 0)$ 与 $f(t)=\begin{cases} t, & t>0 \\ -t, & t<0 \end{cases}$

(C) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ 与 $g(x)=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

(D) $f(x)=\sqrt{(2x-1)^2}$ 与 $g(t)=2t-1$

6. 已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 则实数 a 的取值范围是……………(B)

(A) $a>\frac{1}{3}$　　(B) $-12<a\leqslant 0$　　(C) $-12<a<0$　　(D) $a\leqslant\frac{1}{3}$

-1是 $2x-\sqrt{3-x}=0$ 的增根

7. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}$ $[4,5)\cup(5,+\infty)$

(2) $y=\dfrac{x}{2x-\sqrt{3-x}}$ $(-\infty,-1)\cup(-1,\frac{3}{4})\cup(\frac{3}{4},3]$

(3) $y=\sqrt{x^2-5x+6}+\dfrac{(x-1)^0}{\sqrt{x+|x|}}$ $(0,1)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$

8. 设 x_1,x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2(m-1)x+m+1=0$ 的两个实根, 求 $y=x_1^2+x_2^2$ 的解析式 (用含字母 m 的式子表示).

解: $\Delta\geq 0$

即 $m\in(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

由韦达: $\begin{cases}x_1+x_2=2(m-1)\\x_1\cdot x_2=m+1\end{cases}$

$y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=4m^2-10m+2$

即 $y=4m^2-10m+2$, $m\in(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

误: m的范围漏

9. 设函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+8}$ 的定义域为 A, 函数 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-|x-a|}}$ 的定义域为 B, 且 $A\cap B=\varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

解: $A=[-2,4]$

$1-|x-a|>0$

$|x-a|<1$

$x\in(a-1,a+1)$

即 $B=(a-1,a+1)$

$A\cap B=\phi$

故 $a-1\geq 4$ 或 $a+1\leq -2$

即 $a\in(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$

恰是 $(-2,1)$.

10. 设函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{ax^2+ax+1}}$ 分别满足下列条件, 求实数 a 的取值范围:

(1) 定义域是 $(-2,1)$; 个人认为，定义域是 $(-2,1)$，仅代表 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上有定义，不代表 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$ 没定义

(2) 定义域是 $\mathbb{R}$;

(3) 值域是 $(0,+\infty)$.

解：记 $g(x)=ax^2+ax+1$，$y=g(x)$ 关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称.

(1) $\forall x\in(-2,1)$，$g(x)>0$

即 $x\in(-2,1)$，

而 $-\frac{1}{2}\in(-2,1)$

1° $a=0$

此时 $g(x)=1$，成立

2° $a<0$，$y=g(x)$ 开口向下

$|(-2)-(-\frac{1}{2})|=|1-(-\frac{1}{2})|=\frac{3}{2}$

故 $g(-2)=g(1)=\inf g(x)$

$\inf g(x)=2a+1\geq 0$

$a\in[-\frac{1}{2},+\infty)$

3° $a>0$，$y=g(x)$ 开口向上

$\min g(x)=g(-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{4}a>0$

$a\in(-\infty,4)$

故 $a\in[-\frac{1}{2},4)$

$a=-\frac{1}{2}$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$，$g(x)>0$

1° $a=0$

$g(x)=1$，成立

2° $a<0$

$g(-\frac{1}{a})=\frac{1}{a}<0$，不成立

3° $a>0$

$\Delta<0$

$a^2-4a<0$

$a\in(0,4)$

综上所述，$a\in[0,4)$

(3) $\forall x\in R^+$，$g(x)>0$

$x^2+x\in R^+$

$g(x)>0 \Leftrightarrow a>-\frac{1}{x^2+x}$

而 $-\frac{1}{x^2+x}\in R^-$，故 $a\in[0,+\infty)$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$

(1) 设 $a\neq 0$ 且 $a\neq -1$，求 $f(a)+f(\frac{1}{a})$ 的值;

(2) 求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)+f(\frac{1}{2})+f(\frac{2}{2})+\cdots+f(\frac{100}{2})+f(\frac{1}{3})+f(\frac{2}{3})+\cdots+f(\frac{100}{3})+f(\frac{1}{4})+f(\frac{2}{4})+\cdots+f(\frac{100}{4})+\cdots+f(\frac{1}{100})+f(\frac{2}{100})+\cdots+f(\frac{100}{100})$ 的值.

解：(1) $f(a)+f(\frac{1}{a})=\frac{2a}{a+1}+\frac{2\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}+1}=2$

(2) 记原式 $=S$

$\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q}f(i,j)\right)=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p}f(i,j)\right)$ 求和运算法则

$S=\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}f(\frac{j}{i})\right)$

$2S=\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}f(\frac{j}{i})\right)+\sum_{j=1}^{100}\left(\sum_{i=1}^{100}f(\frac{j}{i})\right)$

即 $2S=\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}f(\frac{j}{i})\right)+\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}f(\frac{i}{j})\right)$

注：右式加号右侧交换 i,j

即 $2S=\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}\left(f(\frac{j}{i})+f(\frac{i}{j})\right)\right)$

$2S=\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}2\right)$

$2S=100\times100\times2$

$S=10000$

故原式的值为 10000

12. 已知 $f(x)=\frac{kx+1}{k^2x^2+3kx+2}$

(1) 若 $k=2$，求函数 $y=f(x)$ 的定义域

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\boldsymbol{R}$，求实数 k 的值

解：(1) $f(x)=\frac{2x+1}{4x^2+6x+2}$

即 $4x^2+6x+2\neq 0$

即 $x\neq-\frac{1}{2}$ 且 $x\neq-1$

故定义域为 $\{x\mid x\neq-\frac{1}{2}且x\neq-1\}$

(2) 1° $k=0$

$f(x)=\frac{1}{2}$，定义域为 R，成立

2° $k\neq 0$

$\forall x\in R$，$k^2x^2+3kx+2\neq 0$

即 $\Delta<0$

$(3k)^2-4\cdot2(k^2)<0$

即 $k^2<0$

无合适的 k

综上所述，k 的值为 0

13. 已知定义域为 R 的函数 $y=f(x)$ 满足：① $f(x+y)=f(x)f(y)$ 对任何实数 x,y 都成立；② 存在实数 x_1,x_2 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求证：

(1) $f(0)=1$

(2) $f(x)>0$

证明：(1) 假设 $\forall x\in R$, $f(x)=0$

$\forall a,b\in R$, $f(a)=f(b)=0$

与题中目矛盾

故 $\exists x\in R$, $f(x)\neq 0$, 记其为 x_0

$f(x_0+0)=f(x_0)\cdot f(0)$

~~故~~ $f(0)=\dfrac{f(x_0)}{f(x_0)}=1$

故得证

(2) $\forall x\in R$, $f(x)\cdot f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=1$

故 $\forall x\in R$, $f(x)\neq 0$

$\forall x\in R$, $f(x)=f(\frac{x}{2})\cdot f(\frac{x}{2})=f^2(\frac{x}{2})\geq 0$

而 $f(x)\neq 0$

故 $\forall x\in R$, $f(x)>0$

故得证

C 组：

1. 已知集合 $A=\{n|\frac{3^n+4^n}{5}\in N^*,n\in N^*\}$，集合 $B=\{t|t=(2k-1)^2+1,k\in N^*\}$，则集合 A 与集合 B 的关系是 $B\subsetneq A$.

解：

$$3^n+4^n\equiv\begin{cases}2, & n\equiv 1,4 \pmod 4\\ 1 & n\equiv 3 \pmod 4\\ 0 & n\equiv 2 \pmod 4\end{cases}\pmod 5$$

故 $A=\{n|n=4p-2, p\in N^*\}$

而 $B=\{t|t=4(k^2-k+1)-2, k\in N^*\}$

$k^2-k+1\in N^*$

故 $\forall x\in B$, $\exists k\in N^*$, $x=4(k^2-k+1)-2$

$\exists p\in N^*$, $p=k^2-k+1$, 即 $x=4p-2$

故 $x\in A$

即 $B\subseteq A$

而 $6\in A$, $6\notin B$

故 $B\subsetneq A$

2. 已知集合 $A=\{n|a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}(n\geqslant 3,n\in N^*)$，集合 $B=\{a_i+a_j|a_i\in A,a_j\in A,1\leqslant i<j\leqslant n\}$，则集合 B 中元素个数的最小值为 $2n-3$.

解：1° 证明 $2n-3$ 为最小，假设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$

此处红与黑仅用于方便区分

$a_1+a_2<a_1+a_3<a_2+a_3<a_2+a_4<a_3+a_4<a_3+a_5<\cdots<a_{n-2}+a_{n-1}<a_{n-2}+a_n<a_{n-1}+a_n$

其中 a_i+a_{i+1} 形式的有 $n-1$ 项

a_i+a_{i+2} 形式的有 $n-2$ 项

共 $2n-3$ 项两两不等，故至少 $2n-3$ 项

2° 构造 $2n-3$

取 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$

则 $\forall x\in B$, $x\in Z$, $x\geq 1+2=3$, $x\leq (n-1)+n=2n-1$

故 $\forall x\in B$, $x\in Z\cap[3,2n-1]$

即 $B\subseteq Z\cap[3,2n-1]$

其中共 $2n-1-3+1=2n-3$ 项

故 $|B|\leq 2n-3$

而 $|B|\geq 2n-3$

故 $|B|=2n-3$

10、 (3)

令 $g(x)=ax^2+ax+1$,

$a=0$ 时，不满足；

$a<0$ 时，$g(x)$ 开口向下，有最大值，也不适合；

$a>0$ 时，应满足 $\Delta=a^2-4a\geq 0$，$\Rightarrow a\geq 4$，

综上，a 的范围：$[4,+\infty)$.

C 组:

1. 已知集合 $A=\{n|\frac{3^n+4^n}{5}\in N^*,n\in N^*\}$，集合 $B=\{t|t=(2k-1)^2+1,k\in N^*\}$，则集合 A 集合 B 的关系是 ~~A=B~~ $B\subset A$.

$3^n \bmod 5$ 以 3, 4, 2, 1 为周期 $(n\in N^*)$

$4^n \bmod 5$ 以 4, 1, 4, 1 为周期

$\therefore A=\{n|\ n\equiv 2\ (\bmod\ 4)\}$.

又 $(2k-1)^2\equiv 1\ (\bmod\ 4)$

$(2k-1)^2\equiv 2\ (\bmod\ 4)$

~~$\therefore A=B$~~ $\therefore B\subseteq A$.

而 $6\in A$ 而 $6\notin B$.

$\therefore B\subset A$.

2. 已知集合 $A=\{n|a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}(n\geqslant 3,n\in N^*)$，集合 $B=\{a_i+a_j|a_i\in A,a_j\in A,1\leqslant i<j