2022-2023学年上海市华东师大二附中高一（上）期中数学试卷

一、单选题：本题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.十六世纪中叶，英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用，后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远．若 a，b，$c\in R$，则下列命题正确的是(　)

A. 若$ab\neq 0$且$a<b$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　　　B. 若$0<a<1$，则$a^3<a$

C. 若$a>b>0$，则$\dfrac{b+1}{a+1}<\dfrac{b}{a}$　　　　D. 若$c<b<a$且$ac<0$，则$cb^2<ab^2$

【答案】B

【解析】解：A，不成立，比如$a=-2$，$b=1$，

B，成立，$0<a<1$，$a^2<1$，$a(a^2-1)<0$，即$a^3<a$，

C，不成立，$ab+a-ab-b=a-b>0$，所以$\dfrac{b+1}{a+1}>\dfrac{b}{a}$，

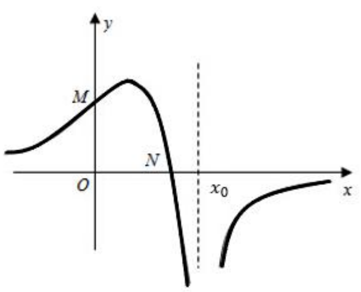
D，不成立，若$b=0$，$0<0$，不成立，

故选：B.

利用特殊值法，不等式的性质，作差法判断.

考查不等式的性质，和作差法，特殊值法在比较不等式中的应用，基础题.

2.函数$f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$的图象如图所示，则下列结论成立的是(　)



A. $a>0$，$b>0$，$c<0$　　　　B. $a<0$，$b>0$，$c>0$

C. $a<0$，$b>0$，$c<0$　　　　D. $a<0$，$b<0$，$c<0$

【答案】C

【解析】【分析】

本题主要考查函数图象的识别和判断，属于基础题.

分别根据函数的定义域，函数零点以及$f(0)$的取值范围进行判断即可.

【解答】

解：函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$，由图象可知函数在 $x=x_0$ 处无意义，

且 $x_0>0$，所以 $-c>0$，得 $c<0$，

又 $f(0)=\dfrac{b}{c^2}>0$，$\therefore b>0$，

由 $f(x)=0$ 得 $ax+b=0$，即 $x=-\dfrac{b}{a}$，

即函数的零点 $x=-\dfrac{b}{a}>0$，$\therefore a<0$，

综上 $a<0$，$b>0$，$c<0$，

故本题选 C.

3.设 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 是严格单调函数，则满足 $f(x)=f(\dfrac{x+3}{x+4})$ 的所有 x 之和为(   )

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

【答案】C

【解析】解：因为 $f(x)$ 是偶函数，

所以 $f(-x)=f(x)$，

又因为当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 是严格单调函数，

所以当 $x<0$ 时，$f(x)$ 也是严格单调函数，

因为 $f(x)=f(\dfrac{x+3}{x+4})$，

所以 $\dfrac{x+3}{x+4}=x$ 或 $\dfrac{x+3}{x+4}=-x$，

即有 $x^2+3x-3=0$ 或 $x^2+5x+3=0$，

设方程 $x^2+3x-3=0$ 的两根为 x_1，x_2，

则有 $x_1+x_2=-3$，

设方程 $x^2+5x+3=0$ 的两根为 x_3，x_4，

则有 $x_3+x_4=-5$，

所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=-8$.

故选：C.

根据题意题意可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $[0,+\infty)$ 上严格单调，由 $f(x)=f(\dfrac{x+3}{x+4})$ 可得 $\dfrac{x+3}{x+4}=x$ 或 $\dfrac{x+3}{x+4}=-x$，即有 $x^2+3x-3=0$ 或 $x^2+5x+3=0$，利用韦达定理求出这两个方程的四个根的和即可.

本题考查函数单调性以及二次函数性质，属于中档题.

4.已知函数$g(x)$的定义域为 R，对任意实数 m、n都有$g(m+n)=g(m)+g(n)+2022$，且函数$f(x)=\dfrac{x\sqrt{2022-x^2}}{x^2+2022}+g(x)$的最大值为 p，最小值为 q，则$p+q=(\quad)$

A. -2　　B. 2022　　C. -2022　　D. -4044

【答案】D

【解析】解：$\because g(x)$的定义域为 R，对任何实数 m，n，都有$g(m+n)=g(m)+g(n)+2022$，

$\therefore$令$m=n=0$，得$g(0)=g(0)+g(0)+2022$，解得$g(0)=-2022$，

$\therefore$令$m=-n$得，$g(0)=g(-n)+g(n)+2022=-2022$，$\therefore[g(-n)+2022]+[g(n)+2022]=0$，

$\therefore g(x)+2022$是 R上的奇函数，且函数$y=\dfrac{x\sqrt{2022-x^2}}{x^2+2022}$是 R上的奇函数，

$\therefore f(x)+2022$是 R上的奇函数，

根据奇函数最大值和最小值互为相反数得，$p+2022+q+2022=0$，

$\therefore p+q=-4044$.

故选：D.

根据题意，可令$m=n=0$，从而求出$g(0)=-2022$，然后令$m=-n$可得出函数$g(x)+2022$是奇函数，并且$y=\dfrac{x\sqrt{2022-x^2}}{x^2+2022}$是奇函数，从而可得出$f(x)+2022$是奇函数，从而得出$p+2022+q+2022=0$，从而可求出$p+q$的值.

本题考查了奇函数的定义及判断，奇函数最大值和最小值的关系，考查了计算和推理能力，属于中档题.

二、填空题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

5.若集合$x\in\{1,x^2\}$，则$x=$______.

【答案】0

【解析】解：$x\in\{1,x^2\}$，

当$x=1$时，不满足集合元素的互异性，

当$x=x^2$，即$x=0$或$x=1$(舍去)，故$x=0$.

故答案为：0.

根据集合中元素与集合的关系即可列式求解.

本题主要考查集合元素的互异性，属于基础题.

6.“$x=1$”是“$(x-1)(x+1)=0$”的______条件.

【答案】充分不必要

【解析】解：当$x=1$时，$(x-1)(x+1)=0$，即$x=1\Rightarrow(x-1)(x+1)=0$，

故“$x=1$”是“$(x-1)(x+1)=0$”的充分条件.

当$(x-1)(x+1)=0$时，不一定能够得到$x=1$，即“$x=1$”不是“$(x-1)(x+1)=0$”的必要条件．综上“$x=1$”是“$(x-1)(x+1)=0$”的充分不必要条件．

故答案为：充分不必要．

判断“$x=1$”能否得到“$(x-1)(x+1)=0$”，及“$(x-1)(x+1)=0$”能否得到“$x=1$”即可．

本题考查充分条件、必要条件的定义，属于基础题．

7.若集合$A=\{y|y=-x^2+1,x\in R\}$，$B=\{y|y=2x^2-2x,x\in R\}$，则$A\cap B=$______．

【答案】$[-\frac{1}{2},1]$

【解析】解：集合$A=\{y|y=-x^2+1,x\in R\}=\{y|y\leqslant 1\}$，$B=\{y|y=2x^2-2x,x\in R\}=\{y|y\geqslant -\frac{1}{2}\}$，

则$A\cap B=[-\frac{1}{2},1]$．

故答案为：$[-\frac{1}{2},1]$．

先求出集合A，B，再结合交集的定义，即可求解．

本题主要考查交集的定义，属于基础题．

8.已知集合$A=\{x|ax^2+3x-2=0\}$有且仅有两个子集，则满足条件的实数a组成的集合是______．

【答案】$\{-\frac{9}{8},0\}$

【解析】解：集合A且仅有两个子集，

$\therefore$关于x的方程恰有一个实数解，

讨论：①当$a=0$，$x=\frac{2}{3}$，满足题意；

②当$a\neq 0$，$\Delta=9+8a=0$，$\therefore a=-\frac{9}{8}$．

综上所述，$a=0$或$a=-\frac{9}{8}$．

$\therefore a$的集合为$\{-\frac{9}{8},0\}$．

故答案为：$\{-\frac{9}{8},0\}$．

若A恰有两个子集，则A为单元素集，即关于x的方程$ax^2+3x-2=0$恰有一个实数解，求出实数a的取值范围即可得答案．

本题考查实数a的取值范围的求法，解题时要认真审题，注意分析法、讨论法的合理运用，是中档题．

9.命题“$\forall x\in R$，$x^2+x+1>0$”的否定是______．

【答案】$\exists x\in R$，$x^2+x+1\leqslant 0$

【解析】解：命题“$\forall x\in R$，$x^2+x+1>0$“的否定是：

$\exists x\in R$，$x^2+x+1\leqslant 0$.

故答案为：$\exists x\in R$，$x^2+x+1\leqslant 0$.

欲写出命题的否定，必须同时改变两个地方：①：“$\forall$”；②：“>”即可，据此分析选项可得答案．

这类问题的常见错误是没有把全称量词改为存在量词，或者对于“>”的否定用“<”了．这里就有注意量词的否定形式．如“都是”的否定是“不都是”，而不是“都不是”．特称命题的否定是全称命题，“存在”对应“任意”．

10.若函数$f(x)=\dfrac{x^3}{x-a}(a\in R)$是偶函数，则$f(x)$的单调递增区间是______.

【答案】$(0,+\infty)$

【解析】解：依题意，$f(x)-f(-x)=\dfrac{x^3}{x-a}-\dfrac{(-x)^3}{-x-a}=\dfrac{x^3}{x-a}-\dfrac{x^3}{x+a}=\dfrac{x^3\cdot 2a}{x^2-a^2}=0$，则$a=0$，

则$f(x)=x^2(x\neq 0)$，

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$.

故答案为：$(0,+\infty)$.

由$f(x)-f(-x)=0$，可得$a=0$，进而得到$f(x)$，由此可得单调递增区间.

本题考查函数的单调性与奇偶性，考查运算求解能力，属于基础题.

11.已知关于 x 的不等式$\dfrac{kx^2-kx+1}{x^2+1}\leqslant 0$的解集为空集，则实数 k 的取值范围是______.

【答案】$[0,4)$

【解析】解：由于$x^2+1>0$恒成立，则$kx^2-kx+1>0$的解集为 R,

当$k=0$时，$1>0$恒成立，符合题意；

当$k\neq 0$时，则需$\left\{\begin{array}{l}k>0\\ \Delta=k^2-4k<0\end{array}\right.$，解得$0<k<4$；

综上，实数 k 的取值范围为$[0,4)$.

故答案为：$[0,4)$.

问题可转化为$kx^2-kx+1>0$的解集为 R，然后分$k=0$及$k\neq 0$即可得解.

本题考查不等式的恒成立问题，考查转化思想以及运算求解能力，属于基础题.

12.已知函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a>0)$，若$f(x)$在区间$(0,1]$上是严格减函数，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$(1,3]$

【解析】解：当$a>1$时，因为$f(x)$在区间$(0,1]$上是严格减函数，

所以$3-ax\geqslant 0$在区间$(0,1]$上恒成立，即$a\leqslant\dfrac{3}{x}$，

当$x=1$时，$y=\dfrac{3}{x}$取得最大值，为 3，

所以$1<a\leqslant 3$；

当$0<a<1$时，$a-1<0$，

因为$y=3-ax$在定义域内单调递减，所以$f(x)$在区间$(0,1]$上是严格增函数，与题意不符，舍去，

综上，实数 a的取值范围是$1<a\leqslant 3$，即$(1,3]$.

故答案为：$(1,3]$.

分$a>1$和$0<a<1$两种情况，结合一次函数的单调性进行分类讨论，即可得解.

本题考查函数单调性的应用，熟练掌握一次函数，幂函数的单调性是解题的关键，考查逻辑推理能力和运算能力，属于基础题.

13.设集合 S为实数集 R的非空子集，若对任意$x\in S$，$y\in S$，都有$(x+y)\in S$，$(x-y)\in S$，$(xy)\in S$，则称集合 S为“完美集合”．给出下列命题：

①若 S为“完美集合”，则一定有$0\in S$；

②“完美集合”一定是无限集；

③繁合$A=\{x|x=a+\sqrt{5}b,a\in Z,b\in Z\}$为“完美集合”；

④若 S为“完美集合”，则满足$S\subseteq T\subseteq R$的任意集合 T也是“完美集合”．

其中真命题是______.(写出所有正确命题的序号)

【答案】①③

【解析】解：对于①，当$x=y$时，有$x-y=0\in S$，故一定有$0\in S$，故①对；

对于②，例如$S=\{0\}$为“完美集合”，为有限集，故②错；

对于③，设$x=a+\sqrt{5}b,y=m+\sqrt{5}n$，$a$，$b$，$m$，$n\in Z$，显然$x+y$，$x-y\in A$，而

$xy=(a+\sqrt{5}b)(m+\sqrt{5}n)=am+5bn+\sqrt{5}(an+bm)\in S$，故③对；

对于④，取$S=\{0\}$，$T=\{0,1\}$，显然 T不是“完美集合”，故④错误.

故答案为：①③.

根据“完美集合”的定义逐项判断即可.

本题考查集合的性质以及命题真假的判断，属于基础题.

14.方程$x^2-px-\dfrac{1}{2p^2}=0(p\in R)$的两根$x_1$、$x_2$，满足$x_1^4+x_2^4\leqslant 2+\sqrt{2}$，则$p=$______.

【答案】$\pm 2^{-\frac{1}{8}}$

【解析】解：由题意，$\Delta=(-p)^2+\dfrac{4}{2p^2}=p^2+\dfrac{2}{p^2}>0$，

由韦达定理，$x_1+x_2=p,x_1x_2=-\dfrac{1}{2p^2}$，

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2=(p^2+\dfrac{1}{p^2})^2-\dfrac{1}{2p^4}=p^4+2+\dfrac{1}{2p^4}\leqslant 2+\sqrt{2}$，

即$2p^8-2\sqrt{2}p^4+1\leqslant 0$，即$(\sqrt{2}p^4-1)^2\leqslant 0$，

故$\sqrt{2}p^4-1=0$，即$p=\pm 2^{-\frac{1}{8}}$.

故答案为：$\pm 2^{-\frac{1}{8}}$.

由题意$x_1^4+x_2^4=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2$，结合韦达定理代入运算即可.

本题考查函数零点与方程根的关系，考查不等式的解法及其运用，考查运算求解能力，属于基础题.

三、解答题：本题共 4 小题，共 44 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题 11 分）

(1) 求不等式组$\begin{cases}|2x-1|\geqslant 7\\ \dfrac{x+3}{x-1}\geqslant 2\end{cases}$的解集；

(2) 求关于 x 的不等式$x^2-x-a^2+a<0(a\in R)$的解集.

【答案】解：(1) 由$|2x-1|\geqslant 7$，可得$2x-1\leqslant -7$或$2x-1\geqslant 7$，解得$x\leqslant -3$或$x\geqslant 4$；

由$\dfrac{x+3}{x-1}\geqslant 2$，可得$\dfrac{x-5}{x-1}\leqslant 0$，解得$1<x\leqslant 5$；

综上，不等式组的解集为$[4,5]$；

(2)$x^2-x-a^2+a<0$即为$(x-a)[x-(1-a)]<0$，

当$1-a>a$，即$a<\dfrac{1}{2}$时，解集为$(a,1-a)$；

当$1-a=a$，即$a=\dfrac{1}{2}$时，解集为$\varnothing$；

当$1-a<a$，即$a>\dfrac{1}{2}$时，解集为$(1-a,a)$.

【解析】本题考查不等式的解法，考查运算求解能力，属于基础题.

(1) 分别解不等式$|2x-1|\geqslant 7$以及$\dfrac{x+3}{x-1}\geqslant 2$，再取交集即可；

(2) 转化为$(x-a)[x-(1-a)]<0$，再分类讨论即可得解.

16.（本小题 11 分）

已知正实数 x、y 满足 $xy=2x+y$.

(1) 求 xy 的最小值，并求取最小值时 x、y 的值；

(2) 若 $x+ay(a>0)$ 的最小值为 9，求 a 的值.

【答案】解：(1) 因为正实数 x、y 满足 $xy=2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}$，当且仅当 $2x=y$ 且 $xy=2x+y$，即 $x=2$，$y=4$ 时取等号，

解得 $xy\geqslant 8$，

故 xy 的最小值为 8，此时 $x=2$，$y=4$；

(2) 由已知得 $\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x}=1$，

$x+ay=(x+ay)(\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{x})=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{ay}{x}+2a+1\geqslant 2\sqrt{2a}+2a+1$，

由题意得 $2\sqrt{2a}+2a+1=9$，

解得 $a=2$.

【解析】(1) 由已知利用基本不等式即可求解；

(2) 由已知利用乘 1 法，结合基本不等式即可求解.

本题主要考查了乘 1 法及基本不等式在最值求解中的应用，属于基础题.

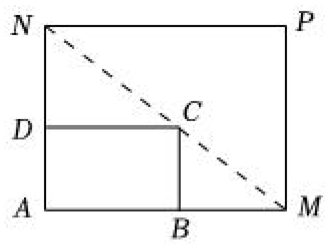
17.（本小题 11 分）

如图所示，将一个矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$，要求 M 在射线 AB 上，N 在射线 AD 上，且对角线 MN 过点 C，已知 AB 长为 4 米，AD 长为 3 米，设 $AN=x$.

(1) 要使矩形花坛 $AMPN$ 的面积大于 54 平方米，则 AN 的长应在什么范围内?

(2) 要使矩形花坛 $AMPN$ 的扩建部分铺上大理石，则 AN 的长度是多少时，用料最省?（精确到0.1 米）

(3) 当 AN 的长度是多少时，矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小，并求出最小值.



【答案】解：(1) 由题可知 $\triangle CBM\backsim\triangle NDC$，所以 $\dfrac{ND}{DC}=\dfrac{CB}{BM}$，

又 $AN=x$，所以 $DN=x-3,\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{3}{BM}$，所以 $BM=\dfrac{12}{x-3}$，$AM=4+\dfrac{12}{x-3}$，

$S_{AMPN}=x(4+\frac{12}{x-3})>54$，解得 $x<\frac{9}{2}$ 或 $x>9$，

由题意得 $x>3$，所以 AN 的长的范围为 $(3,\frac{9}{2})\cup(9,+\infty)$；

(2)$S_{扩}=S_{AMPN}-S_{ABCD}=x(4+\frac{12}{x-3})-3\times4=4x+\frac{12x}{x-3}-12=4(x-3)+12+\frac{12(x-3)+36}{x-3}-12$

$=4(x-3)+\frac{36}{x-3}+12\geqslant2\sqrt{4(x-3)\cdot\frac{36}{x-3}}+12=36$，

当且仅当 $4(x-3)=\frac{36}{x-3}$，即 $x=6$ 时等号成立，所以当 AN 为 6 米时，用料最省；

(3)$S_{AMPN}=x(4+\frac{12}{x-3})=4(x-3)+12+\frac{12(x-3)+36}{x-3}=4(x-3)+\frac{36}{x-3}+24\geqslant48$，

当且仅当 $4(x-3)=\frac{36}{x-3}$，即 $x=6$ 时等号成立，

所以当 AN 为 6 米时，矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小，最小为 48 平方米.

【解析】(1) 利用 $\triangle CBM\backsim\triangle NDC$ 得到 $AM=4+\frac{12}{x-3}$，然后得到 $S_{AMPN}=x(4+\frac{12}{x-3})>54$，解不等式即可；

(2) 结合 (1) 得到扩建部分的面积，然后利用基本不等式得到面积最小时 AN 的长度；

(3) 利用基本不等式求最值即可.

本题考查了基本不等式的应用，属于中档题.

18.（本小题 11 分）

已知函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b(a>0)$ 在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 4，最小值为 1，记 $f(x)=g(|x|)(x\in R)$.

(1) 求实数 a、b 的值；

(2) 若不等式 $f(x)+g(x)\geqslant t^2-2t-3$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，求实数 t 的范围；

(3) 对于定义在 $[p,q]$ 上的函数 $m(x)$，设 $x_0=p$，$x_n=q$，用任意的 $x_i(i=1,2,\cdots,\ n-1)$ 将 $[p,q]$ 划分为 n 个小区间，其中 $x_{i-1}<x_i<x_{i+1}$，若存在一个常数 $M>0$，使得不等式 $|m(x_0)-m(x_1)|+|m(x_1)-m(x_2)|+\cdots+|m(x_{n-1})-m(x_n)|\leqslant M$ 恒成立，则称函数 $m(x)$ 为 $[p,q]$ 上的有界变差函数，试判断函数 $f(x)$ 是否是在 $[0,3]$ 上的有界变差函数，若是，求出 M 的最小值；若不是，请说明理由.

【答案】解：(1) 函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b(a>0)$ 的对称轴为 $x=1$，

可得 $g(x)$ 在 $[2,3]$ 上递增，则 $g(x)$ 的最小值为 $g(2)=4a-4a+1+b=1$，解得 $b=0$；

$g(x)$ 的最大值为 $g(3)=9a-6a+1+b=4$，解得 $a=1$；

(2) 不等式 $f(x)+g(x)\geqslant t^2-2t-3$ 即 $2x^2-2x-2|x|+2\geqslant t^2-2t-3$ 对任意 $x\in R$ 恒成立.

当$x \geqslant 0$时，$f(x)+g(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2 \geqslant 0$，当$x=1$时，取得最小值 0；

当$x<0$时，$f(x)+g(x)=2x^2+2>2$，

则$f(x)+g(x)$的最小值为 0，则$t^2-2t-3 \leqslant 0$，解得$-1 \leqslant t \leqslant 3$，

则 t的取值范围是$[-1,3]$；

(3) 函数$f(x)$为$[0,3]$上的有界变差函数.

证明：函数$f(x)$在$[0,1]$上单调递减，在$[1,3]$上的单调递增函数，

且对任意划分 T：$0=x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=1$，

有$1=f(0)=f(x_1)>f(x_1)>\cdots>f(x_i)>\cdots>f(x_n)=f(1)=0$，

所以$f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(x_n)-f(x_{n-1})$

$=f(x_0)-f(x_n)=f(0)-f(1)=1$恒成立，①

且对任意划分 T：$1=x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=3$，

有$0=f(1)=f(x_1)<f(x_1)<\cdots<f(x_i)<\cdots<f(x_n)=f(3)=4$，

所以$f(x_1)-f(x_0)+f(x_2)-f(x_1)+\cdots+f(x_n)-f(x_{n-1})$

$=f(x_n)-f(x_0)=f(3)-f(0)=4$恒成立，②

由①②可得$M \geqslant 5$，

存在常数 M，M的最小值为5.

【解析】(1) 由$g(x)$的单调性可得 a，b的方程，解方程可得 a，b的值；

(2) 求得$f(x)+g(x)$的解析式，分别讨论 x的范围，结合恒成立思想即可得到所求范围；

(3) 依题意，$f(x)=g(|x|)=x^2-2|x|+1$在$[0,1]$递减，在$(1,3]$上单调递增，根据定义，对任意划分 T：

$0=x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=1$，

以及$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=3$，结合绝对值的意义和恒成立思想，可得所求最小值.

本题考查二次函数的最值求法，以及不等式恒成立问题解法和有界变差函数的定义的运用，考查方程思想和运算能力、推理能力，属于中档题.