13、判断函数 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ 的奇偶性，并证明.

(1)已知函数 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+bx+1}(-1\le x\le 1)$ 为奇函数,试求 a,b 的值.

(3)已知 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数， $f(x)+g(x)=x^2+x-2$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式.

解：(1) $f(x)$ 定义域关于原点对称.

$f(x)=ax^2+\frac{b}{x}$

$f(-x)=ax^2-\frac{b}{x}$

$f(x)+f(-x)=2ax^2$ ①

$f(x)-f(-x)=\frac{2b}{x}$ ②

由①②得：当 $a=0$ 时，$b\neq 0$，$f(x)$ 为奇函数非偶函数

当 $b=0$ 时，$a\neq 0$，$f(x)$ 为偶函数非奇函数

当 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$ 时，$f(x)$ 为非奇非偶函数

当 $a=b=0$ 时，$f(x)$ 为既是奇函数又是偶函数.

(2) $f(x)$ 为奇函数

$\therefore f(x)=-f(-x)$

$\therefore \frac{x+a}{x^2+bx+1}=-\frac{-x+a}{x^2-bx+1}$

$\therefore (x+a)(x^2-bx+1)=(x-a)(x^2+bx+1)$

整理得：$(a-b)x^2+a=0$

$\therefore \begin{cases} a-b=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$

(3) $f(x)$ 偶 $\therefore f(x)=f(-x)$

$g(x)$ 奇 $\therefore g(x)=-g(-x)$

$\because f(x)+g(x)=x^2+x-2$ ①

$\therefore f(-x)+g(-x)=x^2-x-2$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-x-2$ ②

联立①②得，$f(x)=x^2-2$

$g(x)=x$

14、已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的函数，且对于任意的 a、$b\in R$ 都满足 $f(ab)=af(b)+bf(a)$；(1) 求 $f(0)$、$f(1)$ 的值；(2) 判断 $y=f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论.

解：(1) 当 $a=b=0$ 时，$f(ab)=f(0)=0\cdot f(0)+0\cdot f(0)=0$

当 $a=b=1$ 时，$f(ab)=f(1)=1\cdot f(1)+1\cdot f(1)$

$\therefore f(1)=0$

(2) $f(x)$ 为奇函数.

证：$f(x)$ 定义域关于原点对称.

当 $a=-1$，$b=x$ 时

$f(ab)=f(-x)=-1\cdot f(x)+xf(-1)$ (*)

当 $a=b=-1$ 时.

$f(ab)=f(1)=-1\cdot f(-1)-1\cdot f(-1)=0$

$\therefore f(-1)=0$

由(*)知，$f(-x)=-f(x)$ $\therefore f(x)$ 为奇函数.

15、已知 $y=f(x)$ 对任意实数 a、b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 成立.

(1) 求 $f(0)$ 的值；(2) 判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(3) 若 $f(-3)=a$，用 a 的代数式表示 $f(12)$ 的值.

解：(1) 当 $a=b=0$ 时，

$f(a+b)=f(0)=f(0)+f(0)$

$\therefore f(0)=0$

(2) 当 $a=x$，$b=-x$ 时，

$f(a+b)=f(0)=0=f(x)+f(-x)$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

(3) 由 $f(x)$ 为奇函数

$\therefore f(-3)=-f(3)=a$ $\therefore f(3)=-a$

当 $a=b$ 时，$f(a+b)=f(2a)=2f(a)$

$f(12)=f(6+6)=2f(6)=2\cdot 2f(3)=-4a$.

16、记函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在 $x_0 \in D$，使 $f(x_0)=x_0$ 成立，则称 (x_0, y_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图象上的不动点.

（1）若函数 $f(x)=\dfrac{3x+a}{x+b}$ 图象上有两个关于原点对称的不动点，求 a，b 应满足的条件；

（2）下述命题："若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 图象上存在有限个不动点，则不动点有奇数个"是否正确？若正确，给予证明；若不正确，请举一反例.

解：(1) 设 $(x_0, f(x_0))$ 为不动点、

则 $f(x_0)=\dfrac{3x_0+a}{x_0+b}=x_0$

$\therefore x_0^2+(b-3)x_0-a=0$

由于两个不动点关于原点对称

即该方程有2个互为相反数的根

$\therefore \begin{cases} b-3=0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow b=3,\ a>0$

故 $f(x)=\dfrac{3x+a}{x+3}=3+\dfrac{a-9}{x+3}$

$\therefore a\neq 9$（当 $a=9$，$f(x)=3$，有 $f(3)=3$，但 $f(-3)=3\neq -3$）

故 $b=3$，$a>0$ 且 $a\neq 9$.

(2) 正确.

证：由 $f(x)$ 为奇函数

$\therefore f(x)=-f(-x)$

设 $(x_0, f(x_0))$ 为不动点、，$x_0\neq 0$

故 $f(x_0)=x_0=-f(-x_0)$

即 $f(-x_0)=-x_0$

故 $(-x_0, f(-x_0))$ 也为不动点、

故当 $x_0\neq 0$ 时，不动点成对出现

而 $f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(0)=0$

综上，若定义在 R 上的奇函数存在有限个不动点，则不动点有奇数个.

【C 组】

1、已知 $f(x)=\dfrac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}+1$ 在 $[-2018,0)\cup(0,2018]$ 上最大值为 M，最小值为 N，则 $M+N=$ __2__.

2、函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有相同的定义域，且都不是常数函数。若对定义域中任意 x，有 $f(x)+f(-x)=0,\ g(x)\cdot g(-x)=1$，且 $x\neq 0,\ g(x)\neq 1$，判断 $F(x)=\dfrac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)$ 并证明.

解：$F(x)$ 为偶函数、

证：由已知得 $F(x)$ 定义域关于原点对称

$F(x)=\dfrac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)$

$F(-x)=\dfrac{2f(-x)}{g(-x)-1}+f(-x)$

$=\dfrac{-2f(x)}{\frac{1}{g(x)}-1}-f(x)$（$f(x)$ 奇，$g(x)\cdot g(-x)=1$）

$=\dfrac{-2f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)}{1-g(x)}$

$=\dfrac{f(x)g(x)+f(x)}{g(x)-1}$

$=\dfrac{2f(x)+f(x)g(x)-f(x)}{g(x)-1}$

$=\dfrac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)=F(x)$

$\therefore F(x)$ 为偶函数、