测试一

一、填空题

1.设集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B=\{-1,3,5,8\}$, 则集合 $A=$_____.
1.【答案】$\{-3,0,2,6\}$.

【解析】解法 1: 显然, 在 A 的所有三元子集中, 每个元素均出现了 3 次, 所以

$$3(a_1+a_2+a_3+a_4)=-1+3+5+8=15$$

即 $a_1+a_2+a_3+a_4=5$. 于是, 集合 A 的四个元素分别为 $5-(-1)=6,5-3=2,5-5=0,5-8=-3$.因此 $A=\{-3,0,2,6\}$.

解法 2: 不妨设 $a_1<a_2<a_3<a_4$, 则 $a_1+a_2+a_3<a_1+a_2+a_4<a_1+a_3+a_4<a_2+a_3+a_4$. 依题意得

$$\begin{cases}a_1+a_2+a_3=-1,\\a_1+a_2+a_4=3,\\a_1+a_3+a_4=5,\\a_2+a_3+a_4=8.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a_1=-3,\\a_2=0,\\a_3=2,\\a_4=6.\end{cases}$$

所以 $A=\{-3,0,2,6\}$.

评注：解法 1 为 2011 年全国高中数学联赛命题组提供的参考答案.

2.已知 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}_+,A=\left\{x^2+x+1,-x,-x-1\right\},B=\left\{-y,-\frac{y}{2},y+1\right\}$. 若 $A=B$, 则 $x^2+y^2=$______.

2.【答案】5 .

【解析】对集合 A,B 中元素进行排序, A 中: $x^2+x+1>-x>-x-1$, B 中: $y+1>-\frac{y}{2}>-y$,所以

$$\begin{cases}x^2+x+1&=y+1,\\-x&=-\dfrac{y}{2},\\-x-1&=-y.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}\text{所以 } x^2+y^2=5.$$

3.在集合 $A=\{1,2,3,\cdots,2011\}$ 中,末位数字为 1 的元素个数为_____.
3.【答案】202.

【解析】将集合 $A=\{0001,0002,\cdots,2011\}$ 中的每个数都截去其末位数字,会得到集合 $B=\{000,001,\cdots,199,200,201\}$ 中的数, 而 A 中形如 $\overline{abc1}$ 的数, 皆可看成在 B 中的元素 abc 后面添加数字 1 得到. 所以 A 中形如 $\overline{abc}$ 的元素个数, 等于 B 的元素个数, 即 202 个.

4.设 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为正整数, 任取其中四个数求和, 得到集合 $\{44,45,46,47\}$, 则这五个数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的值从小到大依次为___________.
4.【答案】 10,11,11,12,13.

【解析】从这五个数中任取四个数求和, 共有 5 种取法, 而 $\{44,45,46,47\}$ 仅有四个元素, 所以一定有两个和相等, 于是将五个和相加, 有

$$44+44+45+46+47\leqslant 4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\leqslant 44+45+46+47+47$$

即 $226\leqslant 4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\leqslant 229$,

由于 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为正整数, 且 226,227,228,229 这四个数中, 仅有 228 能够被 4 整除,

所以 $4(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=228$, 即 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=57$.

因为任取其中四个数求和, 得到集合 $\langle 44,45,46,47\}$, 于是这五个正整数中一定含有

$$57-44=13,57-45=12,57-46=11,57-47=10,$$

又因为 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=57$, 所以另外一个数为 11, 因此这五个数为 10,11,11,12,13 或其任意排列. 所以从小到大依次为 10,11,11,12,13.

5.如果集合 A,B 同时满足 $A\cup B=\{1,2,3,4\},A\cap B=\{1\},A\neq\{1\},B\neq\{1\}$, 就称有序集对 (A,B) 为"好集对". 这里有序集对 (A,B) 意指, 当 $A\neq B$ 时, (A,B) 和 (B,A) 是不同的集对. 那么"好集对"一共有________ 个.

5.【答案】 6.

【解析】逐个元素考虑归属的选择. 元素 1 必须同时属于 A 和 B. 元素 2 必须至少属于 A,B 中的一个,但不能同时属于 A 和 B, 有两种选择: 属于 A 但不属于 B, 属于 B 但不属于 A. 同理, 元素 3 和 4 也有两种选择.但元素 2,3,4 不能同时不属于 A, 也不能同时不属于 B. 所以四个元素满足条件的选择共有 $2\times2\times2-2=6$ 种. 换句话说，"好集对"一共有 6 个.
6.设 S 为 $\{1,2,3,\cdots,30\}$ 的一个子集, 且 S 中任意两个不同元素的和都不能被 5 整除. 请问:集合 S 中最多能有_______个元素.
6.【答案】 13 .

【解析】对于 $1\leqslant j\leqslant 5$, 有 $S_j=\{5n+j|0\leqslant n\leqslant 5\}$. 因为 S 中任意两个元素的和都不能被 5 整除. 所以集合 $S\cap S_1$ 和 $S\cap S_4$ 至少有一个必须为空. 同理, 集合 $S\cap S_2$ 和 $S\cap S_3$ 至少有一个必须为空, 最多只能含有 $S\cap S_5$ 中的一个元素. 因此 S 最多可以包含 $30-6-6-5=13$ 个元素. 例如， $S=\{1,2,6,7,11,12，16,17,21,22,26,27,30\}$, 是满足要求的一个集合.
评理 由前面解法可知, 集合 S 内有 13 个元来. 对 $\{1,2,3,\cdots,30\}$ 进行以下划分: $\{5,10,15,20,25,30\},\{1，4\},\{2,3\},\{6,9\},\{7,8\},\{11,14\},\{12,13\},\{16,19\},\{17,18\},\{21,24\},\{22,23\},$

$\{26,29\},\{27,28\}$.这一划分有 13 个集合,每个集合内的两个元素的和都是 5 的倍数. 因此, 根据抽展原理可知, 如果任意集合 S 至少含有 14 个元素, 那么至少有两个元素的和能被 5 整除. 因此 S 内最多有 13 个元素.

7.设 a_1,a_2,a_3,a_4 是四个有理数, 使得$\left\{a_ia_j|1\leqslant i<j\leqslant 4\right\}=\left\{-24,-2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{8},1,3\right\}$, 则 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的值为______.

7.【答案】 $\pm\frac{9}{4}$.

【解析】 $a_ia_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 是六个互不相同的数, 且其中没有两个互为相反数, 由此可知 a_1,a_2,a_3,a_4 的绝对值互不相等, 不妨设 $|a_1|<|a_2|<|a_3|<|a_4|$, 则 $|a_i||a_j|(1\leqslant i<j\leqslant 4)$ 中最小的与次小的两个数分别是 $|a_1||a_2|,|a_1||a_3|$, 最大的与次大的两个数分别是 $|a_3||a_4|,|a_2||a_4|$, 从而必须有 $\begin{cases}a_1a_2=-\frac{1}{8},\\a_1a_3=1,\\a_2a_4=3,\\a_3a_4=-24.\end{cases}$ 于是 $a_2=-\frac{1}{8a_1},a_3=\frac{1}{a_1},a_4=\frac{3}{a_2}=-24a_1$, 所以 $\{a_2a_3,a_1a_4\}=\left\{-\frac{1}{8{a_1}^2},-24{a_1}^2\right\}=\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\}$,结合 $a_1\in\mathbf{Q}$, 只能有 $a_1=\pm\frac{1}{4}$.

由此易知, $a_1=\frac{1}{4},a_2=-\frac{1}{2},a_3=4,a_4=-6$, 或者 $a_1=-\frac{1}{4},a_2=\frac{1}{2},a_3=-4,a_4=6$, 经检验,

这两组解均满足条件. 所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=\pm\frac{9}{4}$.

8. 已知 A 与 B 是集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的两个子集, 满足: A 与 B 的元素个数相同, 且 $A\cap B$ 为空集. 若 $n\in A$,总有 $2n+2\in B$, 则集合 $A\cup B$ 的元素个数最多为______.个

8.【答案】66.

【解析】先证 $|A\cup B|\leqslant 66$, 只需要证 $|A|\leqslant 33$, 为此只需要证若 A 是 $\{1,2,\cdots,49\}$ 的任一个 34 元子集,则必存在 $n\in A$, 使得 $2n+2\in B$. 证明如下:

将 $\{1,2,\cdots,49\}$ 分成如下 33 个集合: $\{1,4\},\{3,8\},\{5,12\},\cdots,\{23,48\}$ 共 12 个; $\{2,6\},\{10,22\},\{14,30\}$, $\{18,38\}$ 共 4 个; $\{25\},\{27\},\{29\},\cdots,\langle 49\}$ 共 13 个; $\{26\},\{34\},\{42\},\{46\}$ 共 4 个.

由于 A 是 $\{1,2,\cdots,49\}$ 的 34 元子集，从而由抽屉原理可知上述 33 个集合中至少有一个二元集合中的数均属于 A, 即存在 $n\in A$, 使得 $2n+2\in B$.

如取 $A=\{1,3,5,\cdots,23,2,10,14,18,25,27,29,\cdots,49,26,34,42,46\rangle,B=\{2n+2|n\in A\rangle$, 则 A,B 满足题设且 $|A\cup B|\leqslant 66$.

二、解答题

9.判断下面命题是否正确:
设 A,B 是坐标平面上两个点集, $C_r=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant r^2\right\}$. 若对任何 $r\geqslant 0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$.

9.【解析】我们可以举出下面的反例：取 $A=\{x,y=|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}, B=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+y^2\neq 0\}$, 显然 $C_r\cup A=A$. 因为 $(0,0)\in C_r$, 所以 $C_r\cup B=A$, 则 $C_r\cup A=C_r\cup B$. 但由 $(0,0)\in$ A, $(0,0)\notin$B,则有 A$\supset$B.

10.设 $a,b,c,d>0$, 求证: $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geqslant ae+be+ce+de$.

10. 【解析】由算术 - 几何平均不等式,得

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\\&\qquad=\left(a^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(b^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(c^2+\frac{e^2}{4}\right)+\left(d^2+\frac{e^2}{4}\right)\geqslant ae+be+ce+de\end{aligned}$$

11.设 a,b 是正数, 求证: $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3\geqslant 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2$.

11.【解析】设 $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, 则本题中只有 $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ 起作用. 由算术 - 几何平均不等式得 $x\geqslant 2$. 因此,只要证明当 $x\geqslant 2$ 时, $x^3\geqslant 3x+2$ 即可. 即证 $x^3-3x-2\geqslant 0$. 事实上, $x^3-3x-2=x^3-4x+x-2=x(x^2-4)+x-2=(x-2)[x(x+2)+1]=(x-2)(x+1)^2\geqslant 0$.

12.已知正数 a,b,c 满足 $a^2+ab+ac+bc=6+2\sqrt{5}$, 求 $3a+b+2c$ 的最小值.

12.【解析】由题意知 $(a+b)(a+c)=6+2\sqrt{5}$, 则

$$\begin{aligned}3a+b+2c\quad&=(a+b)+2(a+c)\geqslant 2\sqrt{2(a+b)(a+c)}\\&=2\sqrt{2}\times(\sqrt{5}+1)=2\sqrt{10}+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

当 $a+b=2(a+c)$ 时取等号. 即所求的最小值为 $2\sqrt{10}+2\sqrt{2}$.

13.设 $x,y,z>0$, 求证: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geqslant\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$.

.

13.【解析】简单变形后可以看出所给不等式等价于

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2\geqslant 0$$

该不等式显然成立. 当且仅当 $x=y=z$ 时,等号成立.

14. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$, 且 $a+b+c=1$, 求证:

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

14.【解析】利用已知不等式 $a+b+c=1$ 和算术 - 几何平均不等式 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,

可得 $1+a=(1-b)+(1-c)\geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. 同理 $1+b\geqslant 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$, $1+c\geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$.

将以上三式相乘, 即得所证.

评注：我们知道，在 $\triangle ABC$ 中， $\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1$ 。此题可等价变为：在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\left(1+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\right)\left(1+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\right)$

$$\geqslant 8\left(1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\right)\left(1-\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\right)\left(1-\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\right)$$

15. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是正数且$a_1a_2\cdots a_n=1$, 求证: $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.

15.【解析】因 a_1 是正数,根据三个正数的算术 - 几何平均不等式,有 $2+a_1=1+1+a_1\geqslant 3\sqrt[3]{a_1}$.

同理 $2+a_j\geqslant 3\sqrt[3]{a_j}(j=2,3,\cdots,n)$.

将上述各不等式两边分别相乘即得

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant(3\sqrt[3]{a_1})(3\sqrt[3]{a_2})\cdots(3\sqrt[3]{a_n})=3^n\cdot\sqrt[3]{a_1a_2\cdots a_n}$$

因为 $a_1a_2\cdots a_n=1$, 所以 $(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geqslant 3^n$.

16.正数 x,y,z 满足 $9xyz+xy+yz+zx=4$, 求证:
(1) $xy+yz+zx\geqslant\frac{4}{3}$
(2) $x+y+z\geqslant 2$.

16.【解析】(1) 记 $t=\sqrt{\frac{xy+yz+zx}{3}}$, 由算术 - 几何平均不等式得 $xyz=(\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)})^{\frac{3}{2}}\leqslant\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.
所以 $4=9xyz+xy+yz+zx\leqslant 9t^3+3t^2$, 因此 $(3t-2)\left(3t^2+3t+2\right)\geqslant 0$.

而 $3t^2+3t+2>0$, 所以 $3t-2\geqslant 0$, 即 $t\geqslant\frac{2}{3}$, 从而 $xy+yz+zx\geqslant\frac{4}{3}$.

(2) 因为 $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)=4$, 且 $x,y,z>0$, 因此 $x+y+z\geqslant 2$.

17.设 u,v,w 为正实数, 满足条件 $u\sqrt{vw}+v\sqrt{wu}+w\sqrt{uv}\geqslant 1$, 试求 $u+v+w$ 的最小值

17.【解析】由于 $\frac{u+v}{2}\geqslant\sqrt{uv}$, 所以由已知条件可得 $uv+vw+wu\geqslant 1$, 又 $(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+\ 2uv+2vw+2wu\geqslant uv+vw+wu+2uv+2vw+2wu=3(uv+vw+wu)\geqslant 3$,

因此 $u+v+w \geqslant \sqrt{3}$.另一方面, 显然 $u=v=w=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时满足题中条件, 所以 $u+v+w$ 的最小值为 $\sqrt{3}$.

18.设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 且 $x+y+z=0$, 求证: $6\left(x^3+y^3+z^3\right)^2 \leqslant\left(x^2+y^2+z^2\right)^3$.

18.【解析】由 $x+y+z=0$ 得 $z=-(x+y)$. 利用算术 - 几何平均不等式得

$$\begin{aligned}\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 & =\left[\left(x^2+y^2\right)+x(x+y)+y(x+y)\right]^3 \geqslant[2 x y+x(x+y)+y(x+y)]^3 \\ & \geqslant 54 \cdot x y \cdot x(x+y) \cdot y(x+y)=54 \cdot x y \cdot x(-z) \cdot y \cdot(-z) \\ & =54(x y z)^2=6\left(x^3+y^3+z^3\right)^2\end{aligned}$$

最后一步应用了等式 $x^3+y^3+z^3=3 x y z$, 命题得证.

19.(本题 20 分, 第 1 小题 5 分, 第 2 小题 5 分, 第 3 小题 5 分, 第 4 小题 5 分)
对于非空实数集 A ， 定义 $A^*=\{z \mid$ 对任意 $x \in A, z \geq x\}$ 。设非空实数集 $C \subseteq D \subset(-\infty, 1]$ 。判断如下命题的真假, 并证明.

(1) 对于任意给定符合题设条件的集合 C, D ， 必有 $D^* \subseteq C^*$ ；

(2)对于任意给定符合题设条件的集合 C, D, 必有 $C^* \cap D \neq \emptyset$;

(3)对于任意给定符合题设条件的集合 C, D ， 必有 $C \cap D^*=\emptyset$;

(4)对于任意给定符合题设条件的集合 C, D, 必存在常数 a, 使得对任意的 $b \in C^*$, 恒有$a+b \in D^*$ 。以上命题正确的是 (1) (4)

【解答】解：由 $A^*=\{z \mid \forall x \in A, z \geq x\}$. 可知：数集$A^*$ 是数集 A 的所有上界组成的集合。

(1) 分别用 $A_{\max }$、$A_{\min }$ 表示集合 A 的所有元素(数)的最大值、最小值 .

由 $C \subseteq D$ 及 A^* 的定义可知： $C_{\max } \leq C_{\min }, D_{\max } \leq D^*{ }_{\min }, C^*{ }_{\min } \leq D_{\max }$,

$\therefore C^*{ }_{\min } \leq D^*{ }_{\min }, \therefore$ 必有 $D^* \subseteq C^*$. 故(1)正确.

(2) 若设 $C=(-\infty, 1)=D$, 满足 $C \subseteq D$, 而 $C^*=\{1\}$, 此时 $C^* \cap D=\emptyset$ ， 故(2)不正确。
(3)若设 $C=(-\infty, 0), D=(-\infty, 1)$, 满足 $C \subseteq D$, 而 $D^*=(0,1)$, 此时 $C \cap D^*=(0,1) \neq \emptyset$, 故(3)不正确 .

(4)由(1)可知：对于 $C \subseteq D$ ， 必有 $D^* \subseteq C^*$ ；取 $a=D^*{ }_{\min }-C^*{ }_{\min }$, 则对于任意的 $b \in C^*$, 必恒有 $a+b \in D^*$. 故(4)正确,

故答案为: (1)(4) 。

20. M 是一个有限集, 若 M 的子集 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足:

(1) $X_i \cap X_j = \emptyset$, 对任意的 $1 \le i, j \le n, i \ne j$;

(2) $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n = M$, 则称 $X_1, X_2, ..., X_n$ 是 M 的一个划分, 用 $|M|$ 表示集合 M 中的元素个数.设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$: $B_1, B_2, \cdots, B_n$: $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 M 的三个划分, 并且对任意的整数 i, j, k 当 $i, j, k \le n$ 时, 下式成立: $\left|A_i \cap B_j\right| + \left|A_i \cap C_k\right| + \left|B_j \cap C_k\right| \ge n$, 求证: $|M| \ge \frac{n^3}{3}$.

20.证明：对任意的 i, j, k, 有 $\left|A_i \cap B_j\right| + \left|A_i \cap C_k\right| + \left|B_j \cap C_k\right| \geqslant n$. 令 i, j 不动, 对 k 从 1 到 n 求和, 有 $n\left|A_i \cap B_j\right| + |A_i| + \left|B_j\right| \geqslant n^2$; 令 i 不动, 对 j 从 1 到 n 求和, 有 $n|A_i| + n|A_i| + |M| \geqslant n^3$.现对 i 从 1 到 n 求和, 有 $n|M| + n|M| + n|M| \geqslant n^4$. 所以 $|M| \geqslant \frac{n^3}{3}$.

（注：这里用到：对 M 的一个划分 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ，有 $|M| = |X_1| + |X_2| + \cdots + |X_n|$ ）

21.已知 a, b, c 为正实数, 记 $S = \frac{(a^2+2c^2)(b^2+4c^2)}{(a+b)c^3}$, 求 S 的最小值

题目出处：2024 年 9 月 14 日微信公众号《数学趣题推荐官》推文（十一月）

解: 令 $\frac{a}{c} = x, \frac{b}{c} = y$, 由基本不等式可知

$$S = \frac{(x^2+2)(y^2+4)}{x+y} = (y^2+4)\left(x + y + \frac{y^2+2}{x+y} - 2y\right) \geqslant 2(y^2+4)\left(\sqrt{y^2+2} - y\right)$$

令 $f(y) = (y^2+4)\left(\sqrt{y^2+2} - y\right)$, 则

$$f^{'}(y) = \frac{\left(\sqrt{y^2+2} - y\right)\left(2y\sqrt{y^2+2} - y^2 - 4\right)}{\sqrt{y^2+2}}$$

此时

$$y \in \left(0, \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right), f^{'}(y) < 0, f(y) \text{ 单调递增}$$
$$y \in \left(\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}, +\infty\right), f^{'}(y) > 0; f(y) \text{ 单调递减}$$

于是

$$f(y)_{\min} = f\left(\frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right) = \frac{16 \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{3}$$

22. 已知 $x, y > 0$, $(x+y+xy)(x+y-xy) = xy$, 求 $x+y+xy$ 和 $x+y-xy$ 的最小值

解: 由题意可知

$$(x+y)^2 = x^2y^2 + xy \Rightarrow x + y = \sqrt{x^2y^2 + xy}$$

由基本不等式可知

$$x+y=\sqrt{x^2y^2+xy}\geq 2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\geq 3$$

此时

$$x+y+xy=\sqrt{x^2y^2+xy}+xy\geq 2\sqrt{3}+3$$

而

$$x+y-xy=\sqrt{x^2y^2+xy}-xy$$
$$=\frac{\left(\sqrt{x^2y^2+xy}-xy\right)\left(\sqrt{x^2y^2+xy}+xy\right)}{\sqrt{x^2y^2+xy}+xy}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{xy}}+1}\geq\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}+1}=2\sqrt{3}-3$$

当且仅当 $x=y=\sqrt{3}$ 时,等号成立

23.设 S 是一些互不相同的四元数组 (a_1,a_2,a_3,a_4) 的集合, 其中 $a_i=0$ 或 $1,i=1,2,3$, 已知 S 的元素个数不超过 15 , 且满足: 若 $(a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4)\in S$, 则

$$(\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\},\max\{a_3,b_3\},\max\{a_4,b_4\})\in S$$

且

$$(\min\{a_1,b_1\},\min\{a_2,b_2\},\min\{a_3,b_3\},\min\{a_4,b_4\})\in S$$

求 S 的元素个数的最大值.

23.【解析】显然所有可能的四元数组有 16 种. 因为至少有一个四元数组不在 S 中, 所以 $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$ 和 $(0,0,0,1)$ 中至少有一个不在 S 中,否则由题中条件可推出所有这样的四元数组都在 S中, 不妨设 $(1,0,0,0)\notin S$. 此时由题中条件又知 $(1,1,0,0),(1,0,1,0)$ 和 $(1,0,0,1)$ 中至少有两个不能在 S 中, 不妨设 $(1,1,0,0)$ 和 $(1,0,1,0)$ 不在 S 中. 此时又可知 $(1,1,1,0)$ 和 $(1,0,0,1)$ 不能同时在 S 中,不妨设 $(1,1,1,0)$ 不在 S 中. 于是 S 的元素个数不超过 $16-4=12$ 个.

现在设 S 是所有可能的 16 个四元数组中去掉 $(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,0,1,0)$ 和 $(1,1,1,0)$ 后所成的集合，我们要证 S 满足题中条件，从而 S 的元素个数的最大值为 12 。任取 $(a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4)\in S$.

(1) 若 $a_1=b_1=0$ 或 $a_4=1$ 或 $b_4=1$, 则显然

（$\max\{a_1,b_1\},\max\{a_2,b_2\},\max\{a_3,b_3\},\max\{a_4,b_4\}$) 不等于上述去掉的 4 个四元数组中任何一个, 从而属于 S. 同理 $(\min\{a_1,b_1\},\min\{a_2,b_2\},\min\{a_3,b_3\},\min\{a_4,b_4\})$ 属于 S.
(2) 若 $a_1=1$ 或 $b_1=1$ 且 $a_4=b_4=0$,则

$(\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}, \max\{a_4, b_4\}) = (1, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}, 0)$,
由此推出 (a_1, a_2, a_3, a_4) 或 (b_1, b_2, b_3, b_4) 不属于 S, 这种情况不会出现.

(3) 若 $a_1 = 0$ 或 $b_1 = 0$ 或 $a_4 = b_4 = 1$, 则显然

$(\min\langle a_1, b_1\rangle, \min\langle a_2, b_2\}, \min\langle a_3, b_3\rangle, \min\langle a_4, b_4\rangle)$ 不等于上述去掉的 4 个四元数组中任何一个，从而属于 S 。

(4) 若 $a_1 = b_1 = 1$ 且 $a_4 = 0$ 或 $b_4 = 0$, 则

$$(\min\langle a_1, b_1\rangle, \min\langle a_2, b_2\rangle, \min\langle a_3, b_3\rangle, \min\langle a_4, b_4\rangle) = (1, \min\{a_2, b_2\rangle, \min\langle a_3, b_3\rangle, 0),$$

由此推出 (a_1, a_2, a_3, a_4) 或 (b_1, b_2, b_3, b_4) 不用于 S, 这种情况也不会出现. 综上所述, S 是满足题目要求的, 所以 S 的元素个数的最大值就是 12 .

另解：

解: $|S|_{max} = 12$: 令 $S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i = 0$ 或 1, $i = 1,2,3,4$ 且 $(a_3, a_4) \neq (0,1)\}$

于是 $|S| = 12$ 且显然满足条件. 下面证 $|S| \le 12$:

因 a_i 取 0 或 1 共有 16 种情况，而 $|S| \le 15$ ， ∴必有 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \notin S$, 记为 A
$a_i = 0$ 或 1 , $i = 1,2,3,4$. 由对称性，只需考虑 A 中有 0,1,2 个"0"的情况.

① 0个"0" : 于是 $\forall (b_1, b_2, b_3, b_4)$ 与 $(1-b_1, 1-b_2, 1-b_3, 1-b_4)$ 至多只能有 1 个在 S 中
从而 $|S| \le 8$;

②. 1个"0" : 不妨设 $a_j = 0$, $j = 1,2,3,4$. 令 $T = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \mid b_j = 0$,其余为 0 或 $1\}$.
∴ $|T| = 2^3 = 8$, 由①的讨论可知 $|S| \le 16 - \frac{8}{2} = 12$;

③. 2个"0" : 将 A 中这两个 $(0,0)$ 分别改为 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ ，这两个之中也至多只有
1个在 S 之中. 这表明有一个只含一个"0"的四元数组不在 S 中，问题转化为了②.

#.

∴ 综上: $|S| \le 12$, 即 $|S|_{max} = 12$.