幂、指、对函数

§2.2 幂函数 & 指数幂的拓展（1）

§2.2.1 指数幂的拓展

1. 当 $x<0$ 时, $|x|+\sqrt[6]{x^6}+2\sqrt[3]{x^3}+3\sqrt[4]{x^4}=$ $\underline{\quad -3x \quad}$.

2. 若 $a>0$, $b>0$, 化简: $\left(a^{2-\sqrt{3}}b\right)^{2+\sqrt{3}}\cdot b^{2-\sqrt{3}}=$ $\underline{\quad ab^4 \quad}$.

   解析　$E=(a^{2-\sqrt{3}})^{2+\sqrt{3}}\cdot b^{(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})}=a^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}\cdot b^4=ab^4$.

3. 化简:

   (1) $\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{5}{8}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}\right)}\times\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}$;

   (2) $\left(x^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x}(x>0)$;

   (3) $\dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}(a>0,b>0)$.

   解析　(1) $\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{5}{8}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}\right)}\times\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}=\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{16}(x^{-\frac{2}{3}})y^{\frac{2}{3}}}\times\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{6}}}=16y^{-\frac{1}{6}}\times y^{-\frac{1}{6}}\times x^{\frac{2}{3}}=16x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}$

   (2) x^2;

   (3) $-9a$.

4. 已知 $x+y=12, xy=9$, 且 $x<y$, 求 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$.

   解析　$\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\dfrac{12+6}{x-y}=\dfrac{18}{-\sqrt{(x+y)^2-4xy}}=\dfrac{18}{-\sqrt{108}}=-\sqrt{3}$

5. 已知 $4^x=a$, 求 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$ 的值.

   解析　因为 $4^x=a$，所以 $2^x=a^{\frac{1}{2}}$，故 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}=\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}=a+\dfrac{1}{a}-1$

   注: 也可以写做 $\dfrac{a^3+1}{a^2+a}$

§2.2.2 幂函数

A 组:

1. 若 $f(x)=ax^2+b$ 是幂函数, 则实数 a,b 满足条件 $\underline{a=1,b=0}$.

2. 若幂函数的图像经过点 $(4,2)$, 则此幂函数为 $\underline{\quad y=x^{\frac{1}{2}} \quad}$.

3. 幂函数 $y=x^{-3}$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的值域为 $\underline{[-1,-\frac{1}{8}]}$.

   解析　$y=x^{-3}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 都严格单调递减.

4. 幂函数 $y=x^a$ 的图像不经过原点, 那么 a 的取值范围 $\underline{\quad a\leqslant 0 \quad}$.

5. 如果幂函数 $y = x^a$ 的图像, 当 $0 < x < 1$ 时, 在直线 $y = x$ 的上方, 那么 a 的取值范围是__$a < 1$__.

6. 若一个幂函数的图像经过点 $(3, \frac{1}{9})$, 则它的单调减区间是__$(0, +\infty)$__.

   解析　该幂函数为 $y = x^{-2}$

7. 设 $a \in \{-2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\}$, 已知函数 $y = x^a$ 为偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上递减, 则 a 可取的值为__-2__.

B 组:

1. 若幂函数 $y = x^k$ 的图像经过点 $(8, 4)$, 则函数 $y = x^k$ 的值域是__$[0, +\infty)$__.

   解析　$8^k = 4 \iff 2^{3k} = 2^2 \iff k = \frac{2}{3}$.
   于是 $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ 的值域为 $[0, +\infty)$.

2. 函数 $f(x) = \begin{cases} -x^{-1}, & x < 0 \\ x^{\frac{1}{2}}, & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) = \frac{1}{3}$, 则 $x =$__-3 或 $\frac{1}{9}$__.

   解析　$-x^{-1} = \frac{1}{3} \wedge x < 0$ 或 $x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \wedge x > 0$, 故 $x = -3$ 或 $\frac{1}{9}$.

3. 若幂函数 $f(x) = (m^2 + m - 5)\, x^{m^2 - 2m - 3}$ 的图象不经过原点, 则 m 的值为__2__.

   解析　因为 $f(x)$ 是幂函数，所以 $m^2 + m - 5 = 1$，即 $m = 2$或 -3
   $m = 2$ 时，$m^2 - 2m - 3 = -3$ 满足题意；$m = -3$ 时，$m^2 - 2m - 3 = 12$ 不满足题意.

4. 幂函数 $y = x^k$ 的图像当 $0 < x < 1$ 时, 在直线 $y = x$ 的上方, 当 $x > 1$ 时, 在直线 $y = x$ 的下方, 且 $k > 0$, 试写出一个符合上述条件的幂函数__$y = x^{\frac{1}{2}}$__.

5. 函数 $y = x^{\frac{3}{5}}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是 ······························ (A)

   (A) 增函数且是奇函数　　(B) 增函数且是偶函数
   (C) 减函数且是奇函数　　(D) 减函数且是偶函数

6. 下列四个命题中, 正确的是__①④__:

   ① $y = x^{-4}$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数;
   ② $y = x^{\frac{3}{2}}$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是增函数;
   ③ $y = x^{-\frac{1}{2}}$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数;
   ④ $y = x^{-\frac{4}{5}}$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

   解析　$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, 其中 $m, n \in \mathbb{Z}$, 且 $(m, n) = 1$, $n \neq 0$.

7. 设 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 是两个不同的幂函数, 集合 $M = \{x \mid f(x) = g(x)\}$, 则集合 M 中的元素个数是 ······························ (B)

   (A) 1 或 2 或 0　　(B) 1 或 2 或 3　　(C) 1 或 2 或 3 或 4　　(D) 0 或 1 或 2 或 3

   解析　都过 $(1, 1)$, 故 A/D 皆不选.
   对于 $x^m = x^n (m, n \in \mathbb{Q})$,
   (1) 若 $x = 0$ 有意义, 则 $x = 0$ 是根;
   (2) 当 $x \neq 0$ 时, 可得 $x^{\frac{m}{n}} = 1$, 故 x 只有 ± 1 的可能.
   又 $y = x$ 与 $y = x^3$ 恰有三个交点, 故选 B.

8. 下列命题中, 真命题的是 $\cdots\cdots$ (C)

(A) 幂函数中不存在既不是奇函数, 又不是偶函数的函数;

(B) 如果一个幂函数不是偶函数, 那么它一定是奇函数;

(C) 图像不经过 $(-1,1)$ 的幂函数, 一定不是偶函数;

(D) 如果两个幂函数有三个公共点, 那么这两个函数一定相同.

9. 若幂函数 $y=x^{m^2-2m-3}(m\in\mathbb{Z})$ 的图像与坐标轴没有交点, 且图像关于 y 轴对称, 求 m 的值.

解析 $m^2-2m-3<0 \iff m\in[-1,3]$, 又 $m\in\mathbb{Z}$, 故 $m=-1,0,1,2,3$.
当 $m=0$ 或 2 时, $m^2-2m-3=-3$, 不符合条件;
当 $m=1$ 时, $m^2-2m-3=-4$, 符号条件;
当 $m=-1$ 或 3 时, $m^2-2m-3=0$, 符号条件;
综上, $m=-1,1,3$.

10. 已知幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2+7m+11}$, 问: 当实数 m 取什么值时,

(1) 函数 $f(x)$ 是正比例函数;

(2) 函数 $f(x)$ 是反比例函数;

(3) 函数 $f(x)$ 是幂函数.

解析

(1) $m^2+7m+11=1 \iff m=-5$ 或 -2, 此时 $m^2-m-1\neq 0$. 故 $m=-5$ 或 -2.

(2) $m^2+7m+11=-1 \iff m=-4$ 或 -3, 此时 $m^2-m-1\neq 0$. 故 $m=-4$ 或 -3.

(3) $m^2-m-1=1 \iff m=-1$ 或 2.

11. 已知 $(a+1)^{-\frac{3}{5}}<(3-2a)^{-\frac{3}{5}}$, 求实数 a 的取值范围.

解析

(1) 方法 1
构建函数 $f(x)=x^{-\frac{3}{5}}$，原不等式转化为 $f(a+1)<f(3-2a)$
易知函数 $f(x)=x^{-\frac{3}{5}}$ 有两个单调减区间, 奇函数, 在 $x>0$ 时 $f(x)>0$, 在 $x<0$ 时 $f(x)<0$
   i. 若 $(a+1)(3-2a)>0$，即 $a\in(-1,\frac{3}{2})$，则 $a+1$ 和 $3-2a$ 位于同一个单调区间，此时根据单调性，$f(a+1)<f(3-2a)$ 被转化为 $a+1>3-2a$。故 $a\in(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$
   ii. 若 $a+1<0<3-2a$，即 $a\in(-\infty,-1)$，则 $a+1$ 和 $3-2a$ 位于不同单调区间，并且函数的性质可知满足 $f(a+1)<f(3-2a)$
综上，$a\in(-\infty,-1)\cup(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$

(2) 方法 2
构建函数 $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$，原不等式转化为 $f(\frac{1}{a+1})<f(\frac{1}{3-2a})$
易知函数 $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$ 为 R 上单调递增的奇函数, 因此 $f(\frac{1}{a+1})<f(\frac{1}{3-2a})$ 即 $\frac{1}{a+1}<\frac{1}{3-2a}$
移项通分有 $\frac{2-3a}{(a+1)(3-2a)}<0$，解集为 $a\in(-\infty,-1)\cup(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$

12. 画出下列函数的图象:

(1) $y=x^{\frac{1}{4}}$

(2) $y=x^{\frac{3}{5}}$

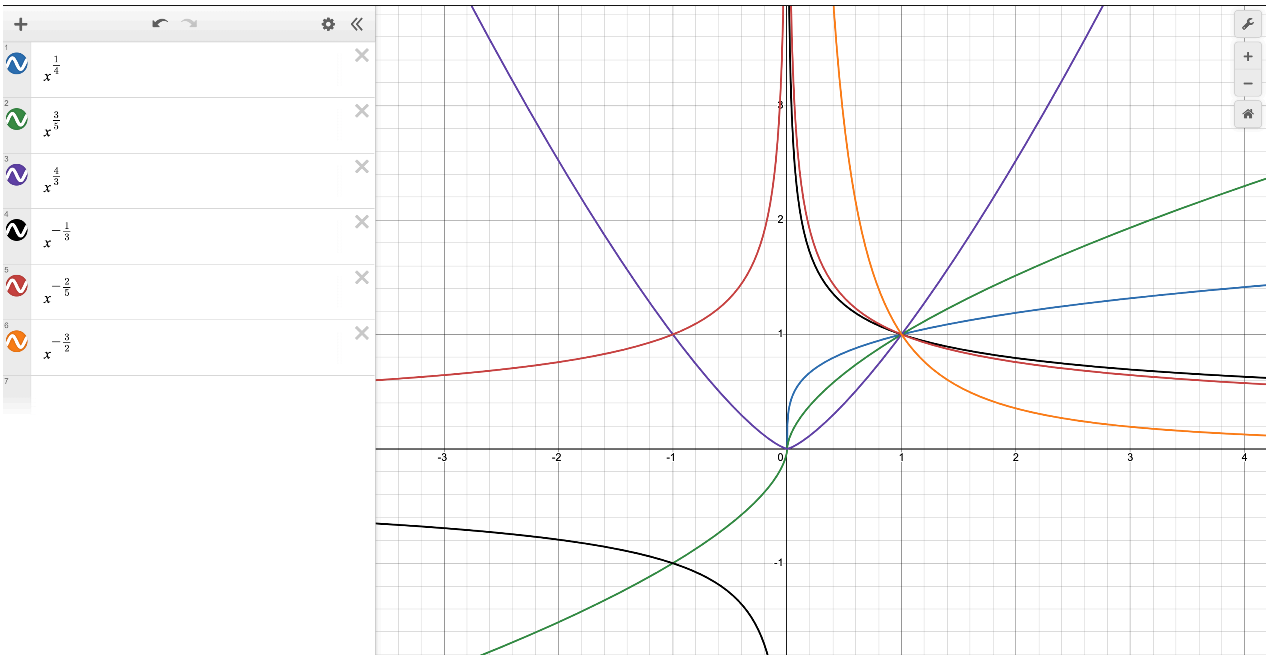
(3) $y=x^{\frac{4}{3}}$

(4) $y=x^{-\frac{1}{3}}$

(5) $y=x^{-\frac{2}{5}}$

(6) $y=x^{-\frac{3}{2}}$

解析



13. 讨论函数 $y=(k^2+k)x^{k^2-2k-1}$ 在 $x>0$ 时随着 x 的增大其函数值的变化情况.

解析　当 k^2+k 与 k^2-2k-1 同号的时候，函数严格单调递增，一者为零的时候函数值恒定，异号的时候函数严格单调递减，即

(1) $k\in\{0,-1,1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\}$ 时函数值恒定

(2) $k\in(-\infty,-1)\cup(1-\sqrt{2},0)\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$ 函数值随自变量增大而增大

(3) $k\in(1,1-\sqrt{2})\cup(0,1+\sqrt{2})$ 函数值随自变量增大而减小

14. 已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}}(p\in\mathbb{Z})$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数, 且在定义域上是偶函数.

(1) 求 p 的值, 并写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 对于 (1) 中求得的函数 $f(x)$, 设函数 $g(x)=-q\cdot f(f(x))+(2q-1)\cdot f(x)+1$, 问是否存在实数 $q(q<0)$, 使得 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,-4]$ 上是严格减函数, 且在 $(-4,0)$ 上是严格增函数? 若存在, 请求出 q; 若不存在, 请说明理由.

解析

(1) $-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}>0\iff p\in(-1,3)$, 又 $p\in\mathbb{Z}$, 故 $p=0,1,2$.
当 $p=0$ 或 2 时, $-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$, 不符合条件;
当 $p=1$ 时, $-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}=2$, 符号条件.
综上, $p=1$, 此时 $f(x)=x^2$.

(2) $g(x)=-qx^4+(2q-1)x^2+1$, 显然 $g(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偶函数,
故只要看 $[0,+\infty)$ 上的单调性即可.
考虑到 $y=g(x)$ 的图像是连续的, 故 "$g(x)$ 在区间 $(-\infty,-4]$ 上是严格减函数, 且在 $(-4,0)$ 上是严格增函数" 等价于 "$g(x)$ 在 $[0,4]$ 上是严格减函数, 且在区间 $[4,+\infty)$ 上是严格增函数".
对函数 $h(x)=-qx^2+(2q-1)x+1$ 而言, 图像开口向上, 对称轴为 $x=1-\frac{1}{2q}>0$, 零点都是正的.
于是求 $g(x)=h(x^2)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调区间的过程如下:
因为当 $x\in[0,+\infty)$ 时, $x^2\in[0,+\infty)$,
于是单调递增区间是 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 1-\frac{1}{2q}\end{cases}$ 的解区间, 单调递减区间是 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\leqslant 1-\frac{1}{2q}\end{cases}$ 的解区间.
结合条件可得 $1-\dfrac{1}{2q}=16$, 即 $q=-\dfrac{1}{30}$.

C 组:

1. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=1+\sqrt{2f(x)-f^2(x)}(x\in\boldsymbol{R})$, 求 $f(1)+f(2020)$ 的最大值.

解析　易知应分析函数的周期性
首先分析 $f(x)$ 取值范围, 因为 $f(x+1)=1+\sqrt{2f(x)-f^2(x)}$, 所以有 $2f(x)-f^2(x)\geqslant 0$, 故 $f(x)\in[0,2]$,$f(x+1)\in[1,2]$, 因此 $f(x)\in[1,2]$
两侧平方有 $f^2(x+1)-2f(x+1)+1=2f(x)-f^2(x)$, 若设 $g(x)=2f(x)-f^2(x)$, 则 $g(x)+g(x+1)=1$。(利用结论, 可以判断 $g(x)$ 周期为 2)
进一步迭代有 $g(x+1)+g(x+2)=1$, 两式相减有 $g(x)=g(x+2)$, 故 $g(x)$ 周期为 2, 即 $2f(x)-f^2(x)=2f(x+2)-f^2(x+2)$
移项有 $2(f(x)-f(x+2))=(f(x)+f(x+2))(f(x)-f(x+2))$
由 $f(x)\in[1,2]$ 知 $f(x)+f(x+2)\geqslant 2$, 故 $f(x)=1$ 或 $f(x)=f(x+2)$
故 $f(1)+f(2020)=f(1)+f(0)=f(0)+1+\sqrt{2f(0)-f^2(0)}$
设 $t=f(0)(t\in[1,2]), f(1)+f(2020)=h(t)=t+1+\sqrt{2t-t^2}=2+(t-1)+\sqrt{1-(t-1)^2}$

(1) 方法 1
由柯西不等式知 $2+(t-1)+\sqrt{1-(t-1)^2}\leqslant 2+2\sqrt{(t-1)^2+2t-t^2}=2+\sqrt{2}$, 当 $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等.

(2) 方法 2
设 $k=(t-1)^2(k\in[0,1])$, $2+(t-1)+\sqrt{1-(t-1)^2}=2+\sqrt{k}+\sqrt{1-k}$, 设 $y=\sqrt{k}+\sqrt{1-k}$, 故 $y^2=1+2\sqrt{k(1-k)}\leqslant 2$, 故 $2+\sqrt{k}+\sqrt{1-k}\leqslant 2+\sqrt{2}$, 当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时取等.

综上, $f(1)+f(2020)\leqslant 2+2\sqrt{2}$, 当 $f(0)=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等.

§2.3 幂函数 & 指数幂的拓展（2）

A 组:

1. 将 $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^{-2}}}\right)^{-\frac{8}{5}}$ 化成分数指数幂为__$x^{\frac{4}{15}}$__.

2. 化简 $\left(\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}}\right)^4\cdot\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}}\right)^4$ 的结果为__a^4__.

   解析　a 的指数: $9\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot4+9\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot4=4$

3. $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)\times\sqrt[3]{a}$.

   解析　a.

4. 已知幂函数 $y=f(x)$ 的图像经过点 $(3,\sqrt{3})$, 则 $f(4)=$__2__.

5. 已知幂函数 $y=(m^2-m-1)\,x^{\frac{m}{3}}$ 的图像关于 y 轴对称, 则 $m=$__2__.

B 组:

1. 若幂函数 $y=x^{\frac{m}{3}}(m\in\mathbb{N}^*)$ 是奇函数, 则 m 的最小值为__1__.

2. 若幂函数 $y=(m^2-m-1)x^{-5m-3}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数, 则 m 的值为__2__.

   解析　$m^2-m-1=1\iff m=-1,2$. 分别代入检验即得.

3. 若幂函数 $y=x^{\frac{q}{p}}(|p|,|q|$ 是互质的自然数) 的图像关于 y 轴对称, 则 p,q 满足的条件是__q 为偶数, p 为奇数__.

4. 有关幂函数的下列叙述中, 正确的序号是__⑤__:

   ① 幂函数的图像可能经过第四象限;

   ② 两个幂函数的图像至多有两个交点;

   ③ 若幂函数有增区间, 则该幂函数的指数必是正数;

   ④ 两个不同的幂函数 $f(x)$、$g(x)$, 则函数 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 还是幂函数;

   ⑤ 若幂函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足 $f^2(x)=g^2(x)$, 则 $f(x)=g(x)$.

   解析

   ① 当 $x>0$ 时, $y=x^k>0$. 故假.

   ② $y=x$ 与 $y=x^3$ 有三个交点. 假.

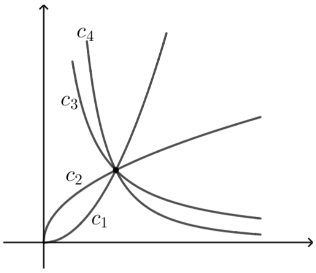
   ③ $y=x^{-2}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增. 假.

   ④ 幂函数的定义域是由 "表达式" 决定的, 那么 $x^3\cdot\dfrac{1}{x}=x^2$.
   对于 $y=x^3\cdot\dfrac{1}{x}$ 而言, $x\neq0$; 对于 $y=x^2$ 而言, $x\in\mathbb{R}$.
   那么, 从定义的角度来说, 是假命题. 实际上, 个别点去掉并不影响大局, 故看成真命题未尝不可.

   ⑤ 设 $f(x)=x^p$, $g(x)=x^q$, 则 $f^2(x)=x^{2p}$, $g^2(x)=x^{2q}$.
   对于 $x=0$ 而言, $f(x),g(x),f^2(x),g^2(x)$ 保持一致 (要么都为零, 要么都不存在).
   当 $x>0$ 时, 可得 $x^{2p-2q}=1$. 故 $2p-2q=0$, 即 $p=q$.
   此时, 若 $x<0$ 有意义, 也是满足条件的. 故真.

5. 如图曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限内的图像, 已知 n 取 $\pm 2, \pm\frac{1}{2}$ 四个值, 则曲线 c_1, c_2, c_3, c_4 对应的值依次为$\cdots\cdots$(B)

(A) $-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2$　　(B) $2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2$　　(C) $-\frac{1}{2},-2,2,\frac{1}{2}$　　(D) $2,\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}$

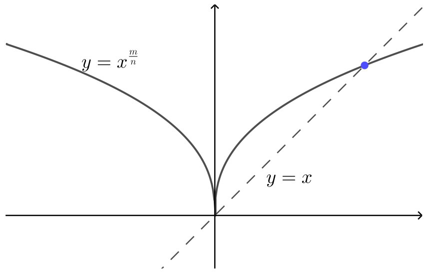


* 第 5 题图

6. 如图是函数 $y=x^{\frac{m}{n}}(m,n\in\mathbb{N}^*$ 且互质) 的图像, 则$\cdots\cdots$(C)

(A) m,n 是奇数, 且 $\dfrac{m}{n}<1$　　(B) m 是偶数, n 是奇数, 且 $\dfrac{m}{n}>1$

(C) m 是偶数, n 是奇数, 且 $\dfrac{m}{n}<1$　　(D) m 是奇数, n 是偶数, 且 $\dfrac{m}{n}>1$



* 第 6 题图

7. 函数 $g(x)=-\dfrac{x}{x+1}$ 的图像可以由函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 的图像经过下列变换得到$\cdots\cdots$(B)

(A) 向左平移 2 个单位, 向上平移 2 个单位;　　(B) 向左平移 2 个单位, 向下平移 2 个单位;

(C) 向右平移 2 个单位, 向上平移 2 个单位;　　(D) 向右平移 2 个单位, 向下平移 2 个单位.

解析　$g(x)=-1+\dfrac{1}{x+1}$, $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$, 故 $g(x)=f(x+2)-2$.

8. 记 $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$, 设 $f_n(x)=x^{\frac{n}{3}}, g_n(x)=x^{\frac{n}{5}}, h_n(x)=x^{\frac{n}{2}}$, 下列论断中, 正确论断的序号为__①__.

① 使函数 $F(x)=\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 是偶函数的最小正整数 n 的值等于 3;

② 使函数 $G(x)=\prod\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ 是偶函数的最小正整数 n 的值等于 4;

③ 使函数 $H(x)=\prod\limits_{k=1}^{n} h_k(x)$ 是奇函数的最小正整数 n 的值等于 3.

解析　积函数的奇偶性.

① $f_n(x)$ 为奇函数 $\iff$ n 为奇数, $f_n(x)$ 为偶函数 $\iff$ n 为偶数, 故真.

② $g_n(x)$ 为奇函数 $\iff$ n 为奇数, $g_n(x)$ 为偶函数 $\iff$ n 为偶数, 故假. $n_{\min}=3$.

③ $h_1(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$, 故非奇非偶. 故假.

9. 已知幂函数 $f(x)=x^{m^2-2m-3}(m\in Z)$ 为偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设 $F(x)=\sqrt[4]{f(x)}+\frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}$, 试判断函数 $F(x)$ 的奇偶性及单调性.

解析

(1) 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数知 $m^2-2m-3<0$，由 $f(x)$ 为偶函数知 m^2-2m-3 为偶数. 故 $m=1$，$f(x)=x^{-4}$

(2) $F(x)=\dfrac{1}{|x|}+|x|$，为偶函数，在 $(-1,0),(1,+\infty)$ 单调增，在 $(-\infty,-1),(0,1)$ 单调减.

10. 已知 $f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$, $g(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1) 证明 $f(x)$ 是奇函数, 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 分别计算 $f(4)-5f(2)g(2)$ 和 $f(9)-5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

解析

(1) 奇函数易得, $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 单调递增. (注意定义域)

(2) $5f(x)g(x)=f(x^2)$. (原式显然是个平方差公式的形式)

11. 研究函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+4}$ 的单调性, 比较 $f(-\pi)$ 与 $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 的大小.

解析 $f(x)=1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$.
于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上严格单调递增, 在 $(-2,+\infty)$ 上严格单调递减,
且 $f(x)$ 的图像关于 $x=-2$ 对称.
故 $f(x_1)<f(x_2) \iff |-2-x_1|>|-2-x_2|>0$, 故 $f(-\pi)>f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

12. 已知幂函数 $f(x)=x^{-m^2+2m+3}(m\in\mathbb{Z})$ 为偶函数, 且在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设函数 $g(x)=2\sqrt{f(x)}-8x+q-1$, 若不等式 $g(x)>0$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 恒成立, 求实数 q 的取值范围.

解析

(1) $-m^2+2m+3>0 \iff m\in(-1,3)$. 又 $m\in\mathbb{Z}$, 故 $m=0,1,2$.
对应的 $-m^2+2m+3$ 依次为 $3,4,3$, 故 $m=1$, $f(x)=x^4$.

(2) $g(x)=2x^2-8x+q-1>0 \iff q>-2x^2+8x+1=-2(x-2)^2+9\in[-9,7]$.
故 $q>7$.

13. 已知函数 $f(x)=x^3+x$.

(1) 指出函数 $f(x)$ 在定义域 $\mathbb{R}$ 上的奇偶性与单调性 (无需证明);

(2) 若 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 且 $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$, 求证: $f(a)+f(b)+f(c)>0$;

(3) 是否存在自然数 n, 使 $f(n)=1000$? 若存在, 求出 n; 若不存在, 请说明理由.

解析

(1) 奇函数, 严格单调递增.

(2) $x_1+x_2>0 \iff f(x_1)+f(x_2)>0$. 然后 $\sum$ 即可.

(3) $f(9)<1000<f(10)$, 故不存在.

C 组：

1. 已知 a 是 128 的七次方根，求 $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{a}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{4}{1+a}$ 的值.

   解析 $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{a}}+\dfrac{1}{1-\sqrt[4]{a}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{4}{1+a}$
   $=\dfrac{(1-\sqrt[4]{a})+(1+\sqrt[4]{a})}{(1+\sqrt[4]{a})(1-\sqrt[4]{a})}+\dfrac{2}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{4}{1+a}$
   $=\dfrac{2}{1-\sqrt{a}}+\dfrac{2}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{4}{1+a}$
   $=\dfrac{2(1+\sqrt{a})+2(1-\sqrt{a})}{(1-\sqrt{a})(1+\sqrt{a})}+\dfrac{4}{1+a}$
   $=\dfrac{4}{1-a}+\dfrac{4}{1+a}$
   $=\dfrac{4(1+a)+4(1-a)}{(1-a)(1+a)}$
   $=\dfrac{8}{1-a^2}$
   $=-\dfrac{8}{3}$

2. 已知 m 是正整数，幂函数 $f(x)=x^{1+m-m^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上时严格增函数.

   (1) 求幂函数 $f(x)$ 的解析式

   (2) 设 $\varphi(x)=\dfrac{a[f(x)]^2+1}{bf(x)+c}$（$a,b,c$ 为整数），若 $\varphi(x)$ 是奇函数，又 $\varphi(1)=2,\varphi(2)<3$，求 a,b,c 的值.

   解析

   (1) 根据 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上时严格增函数知 $1+m-m^2>0$，又因为 m 是正整数，所以 $m=1$，故 $f(x)=x$

   (2) $\varphi(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$. 因为 $\varphi(x)$ 是奇函数，故 0 不在定义域内，否则 $\dfrac{1}{c}$ 必不为 0，因此 $c=0$，经检验，此时 $\varphi(x)$ 为奇函数.
   $\varphi(1)=\dfrac{a+1}{b}=2$，即 $b=\dfrac{a+1}{2}$
   $\varphi(2)=\dfrac{4a+1}{2b}=\dfrac{4a+1}{a+1}=4-\dfrac{3}{a+1}<3$，故 $a\in\{0,1\}$
   又因为 b 是整数，故 $a=1$
   综上，$a=1,b=1,c=0$

90+20

4.1 幂函数&指数幂的拓展（2）

【A组】

1. 将$\left(\sqrt{x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^{-2}}}\right)^{-\frac{8}{5}}$化成分数指数幂为 $x^{\frac{4}{15}}$.

2. 化简$(\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^9}})^4\cdot(\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}})^4$的结果等于 a^4.

3. 化简$\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)\times\sqrt[3]{a}=$ ~~1~~ a.

4. 有关幂函数的下列叙述中，正确的序号是 ~~①~~④⑤ ⑤.

①幂函数的图像可能经过第四象限；

②两个幂函数的图像至多有两个交点；

③若幂函数有增区间，则该幂函数的指数必是正数；

④两个不同的幂函数$f(x)$、$g(x)$，则函数$h(x)=f(x)\cdot g(x)$还是幂函数；

⑤若幂函数$f(x)$、$g(x)$满足$f^2(x)=g^2(x)$，则$f(x)=g(x)$.

5. 已知幂函数$y=f(x)$的图像经过点$(3,\sqrt{3})$，则$f(4)=$ 2.

6. 已知幂函数$y=(m^2-m-1)x^{\frac{m}{3}}$的图像关于$y$轴对称，则$m=$ 2.

【B组】

1. 若幂函数$y=x^{\frac{m}{3}}$ $(m\in\mathbf{N}^*)$是奇函数，则m的最小值为 1.

2. 若幂函数$y=(m^2-m-1)x^{-5m-3}$在$(0,+\infty)$上为减函数，则m的值为 2.

3. 若幂函数$y=x^{\frac{q}{p}}$（$|p|$，$|q|$是互质的自然数）的图象关于y轴对称，则p，q满足的条件是 $\frac{q}{2}\in Z$.

4. 有关幂函数的下列叙述中，正确的序号是 ~~③~~④⑤.

①幂函数的图像可能经过第四象限；

②两个幂函数的图像至多有两个交点；

③若幂函数有增区间，则该幂函数的指数必是正数；

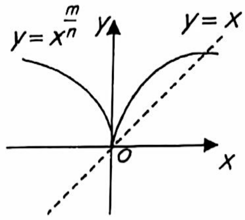
④两个不同的幂函数$f(x)$、$g(x)$，则函数$h(x)=f(x)\cdot g(x)$还是幂函数；

⑤若幂函数$f(x)$、$g(x)$满足$f^2(x)=g^2(x)$，则$f(x)=g(x)$.

5. 如图曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限内的图像，已知 n 取 $\pm 2,\pm\frac{1}{2}$ 四个值，则曲线 c_1,c_2,c_3,c_4 对应的 n 值依次为（B）

(A) $-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2$ (B) $2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2$ (C) $-\frac{1}{2},-2,2,\frac{1}{2}$ (D) $2,\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}$

6. 如图是函数 $y=x^{\frac{m}{n}}$ （$m,n\in\mathbf{N}^*$ 且互质）的图像，则（C）



(A) m,n 是奇数，且 $\frac{m}{n}<1$

(B) m 是偶数，n 是奇数，且 $\frac{m}{n}>1$

(C) m 是偶数，n 是奇数，且 $\frac{m}{n}<1$

(D) m 是奇数，n 是偶数，且 $\frac{m}{n}>1$

7. 函数 $g(x)=-\frac{x}{x+1}$ 的图像可以由函数 $f(x)=\frac{x}{x-1}$ 的图像经过下列变换得到（B）

(A) 向左平移 2 个单位，向上平移 2 个单位；

(B) 向左平移 2 个单位，向下平移 2 个单位；

(C) 向右平移 2 个单位，向上平移 2 个单位；

(D) 向右平移 2 个单位，向下平移 2 个单位.

$g(x)=-1+\frac{1}{x+1}$

$f(x)=1+\frac{1}{x-1}$

8. 记 $\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$，设 $f_n(x)=x^{\frac{n}{3}}$，$g_n(x)=x^{\frac{n}{5}}$，$h_n(x)=x^{\frac{n}{2}}$，n、k 为正整数，给出下列三个论断：

① 使函数 $F(x)=\prod_{k=1}^{n}f_k(x)$ 是偶函数的最小正整数 n 的值等于 3；

② 使函数 $G(x)=\prod_{k=1}^{n}g_k(x)$ 是偶函数的最小正整数的值等于 4；

③ 使函数 $H(x)=\prod_{k=1}^{n}h_k(x)$ 是奇函数的最小正整数的值等于 3；

看函数的定义域.

其中正确的论断是（C） X、A

(A) ① (B) ① ② (C) ① ③ (D) ① ② ③

-5

9.已知幂函数$f(x)=x^{m^2-2m-3}(m\in Z)$为偶函数，且在$(0,+\infty)$上是严格减函数.

(1) 求函数$f(x)$的解析式；

(2) 设$F(x)=\sqrt[4]{f(x)}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}$，试判断函数$F(x)$的奇偶性及单调性.

5

解：(1) $\begin{cases} m\in Z \\ m^2-2m-3\in Z^- \\ \dfrac{m^2-2m-3}{2}\in Z \end{cases}$

$\therefore m=1$

$f(x)=\dfrac{1}{x^4}$

(2) $F(x)=|\frac{1}{x}|+|x|=|x|+\frac{1}{|x|}$

为偶函数，在$(-\infty,-1)$与$(0,1)\downarrow$

在$(-1,0)$与$(1,+\infty)\uparrow$

10. 已知函数$f(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}}{5}$，$g(x)=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1) 证明$f(x)$是奇函数，并求$f(x)$的单调区间；

(2) 分别计算$f(4)-5f(2)g(2)$和$f(9)-5f(3)g(3)$的值，由此概括出涉及$f(x)$和$g(x)$的对所有不等于零的实数x都成立的一个等式，并加以证明.

解：(1) $f(-x)=\dfrac{(-x)^{\frac{1}{3}}-(-x)^{-\frac{1}{3}}}{5}=\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{5}$

$f(-x)+f(x)=0$

$\therefore f(x)$为奇函数

f在R^-与R^+单调递减

(2) $f(4)-5f(2)g(2)=0$

$f(9)-5f(3)g(3)=0$

$5f(x)g(x)=\dfrac{(x^{\frac{1}{3}})^2-(x^{-\frac{1}{3}})^2}{5}=\dfrac{(x^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2)^{-\frac{1}{3}}}{5}=f(x^2)$

11.研究函数$f(x)=\dfrac{x^2+4x+5}{x^2+4x+4}$的单调性，比较$f(-\pi)$与$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$的大小.

解：$f(x)=1+\dfrac{1}{(x+2)^2}$，其定义域为$\{x|x\neq-2\}$

$(x+2)^2$在$(-\infty,-2)$递减，在$(-2,+\infty)$递增且$(x+2)^2>0$在定义域内恒成立

故$f(x)$在$(-\infty,-2)$严格增，在$(-2,+\infty)$严格减

$f(x)$关于直线$x=-2$对称. $\therefore f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=f(\frac{-8+\sqrt{2}}{2})$

而$\dfrac{-8+\sqrt{2}}{2}<\dfrac{-8}{2}=-4<-\pi$

$\therefore f(-\frac{\sqrt{2}}{2})=f(\frac{-8+\sqrt{2}}{2})<f(-\pi)$

即$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})<f(-\pi)$

12、已知幂函数$f(x)=x^{-m^2+2m+3}(m\in Z)$为偶函数，且在区间$(0,+\infty)$上是严格增函数.

(1) 求函数$f(x)$的解析式；(2) 设函数$g(x)=2\sqrt{f(x)}-8x+q-1$，若不等式$g(x)>0$对任意$x\in[-1,1]$恒成立，求实数q的取值范围.

解：(1) $m\in Z$

故$-m^2+2m+3\in Z$

且$-m^2+2m+3$为2的整数倍

$f(x)$在R^+严格增

$\therefore -m^2+2m+3>0$

即$m\in(-1,3)$

故$m\in\{0,1,2\}$

分别代入$-m^2+2m+3$检验，

取$m=1$

$f(x)=x^4$

(2) $g(x)=2\sqrt{x^4}-8x+q-1=2x^2-8x+q-1$

$=2(x-2)^2+(q-9)$

在$[-1,1]$递减

故满足$g(1)>0$即可

$g(1)=q-7>0$

$\therefore q\in(7,+\infty)$

13. 已知函数 $f(x)=x^3+x$.

(1) 指出函数 $f(x)$ 在定义域 R 上的奇偶性与单调性（无需证明）；

(2) 若 a、b、$c\in R$，且 $a+b>0$，$b+c>0$，$c+a>0$，求证：$f(a)+f(b)+f(c)>0$；

(3) 是否存在自然数 n，使 $f(n)=1000$，若存在，求出 n；若不存在，请说明理由.

解：(1) 奇函数，严格单调递增

(2) 由于 $a+b>0$
$\therefore a>-b$
故 $f(a)>f(-b)$.
即 $f(a)+f(b)>0$
同理，$f(b)+f(c)>0$
$f(a)+f(c)>0$

相加得 $f(a)+f(b)+f(c)>0$
故得证

(3) 假设 $\exists n\in N$ 使 $f(n)=1000$
注意到 $f(9)=738$，$f(10)=1010$，
故 $f(9)<f(n)<f(10)$
$\therefore 9<n<10$ $\therefore n\notin N$，矛盾
故不存在

【C组】

1. 已知 a 是 128 的七次方根，求 $\frac{1}{1+\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{1-\sqrt[4]{a}}+\frac{2}{1+\sqrt{a}}+\frac{4}{1+a}$ 的值.

C1 解：原式 $=\frac{(1-\sqrt[4]{a})+(1+\sqrt[4]{a})}{(1-\sqrt[4]{a})(1+\sqrt[4]{a})}+\frac{2}{1+\sqrt{a}}+\frac{4}{1+a}$
$=\frac{2}{1-\sqrt{a}}+\frac{2}{1+\sqrt{a}}+\frac{4}{1+a}$
$=\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1+a}$
$=\frac{8}{1-a^2}$
而 $a=\sqrt[7]{128}=2$
原式 $=\frac{8}{1-2^2}=-\frac{8}{3}$

2. 记 $\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$，设 $f_n(x)=x^{\frac{n}{3}}$，$g_n(x)=x^{\frac{n}{5}}$，$h_n(x)=x^{\frac{n}{2}}$，n、k 为正整数，给出下列三个论断：

$n\in N^*$

① 使函数 $F(x)=\prod_{k=1}^{n}f_k(x)$ 是偶函数的最小正整数 n 的值等于 3；

② 使函数 $G(x)=\prod_{k=1}^{n}g_k(x)$ 是偶函数的最小正整数的值等于 4；

③ 使函数 $H(x)=\prod_{k=1}^{n}h_k(x)$ 是奇函数的最小正整数的值等于 3；

其中正确的论断是（ C ）

(A) ①　　(B) ① ②　　(C) ① ③　　(D) ① ② ③

C2. 解：① $F(x)=x^{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3}}=x^{\frac{n(n+1)}{6}}$
$n(n+1)$ 为 4 的倍数
$n_{min}=3$
正确

② $F(x)=x^{\frac{n(n+1)}{10}}$
$n=3$ 时，$F(x)=x^{\frac{6}{5}}$ 为偶
错误

③ $F(x)=x^{\frac{n(n+1)}{4}}$
$n(n+1)$ 是 4 的倍数但不是 8 的倍数
$n_{min}=3$
正确

3. 已知 m 是正整数，幂函数 $f(x)=x^{1+m-m^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数.

(1) 求幂函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 设 $\varphi(x)=\frac{a[f(x)]^2+1}{bf(x)+c}$（$a$、$b$、$c$ 为整数），若 $\varphi(x)$ 是奇函数，又 $\varphi(1)=2$，$\varphi(2)<3$，求 a、b、c 的值.

解：(1) $1+m-m^2>0$
$m\in(\frac{1-\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2})$
而 $m\in N^*$
$\therefore m=1$
$f(x)=x$

(2) $\varphi(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$，记定义域为 D
$\varphi(-x)=\frac{ax^2+1}{-bx+c}$
$\varphi(x)+\varphi(-x)=0$
$\frac{ax^2+1}{bx+c}+\frac{ax^2+1}{-bx+c}=0$
$(ax^2+1)(\frac{1}{bx+c}-\frac{1}{bx-c})=0$，$\forall x\in D$
[illegible]

$\therefore \varphi(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$
代入 $\varphi(1)=2$ 得 $a+1=2b$
代入 $\varphi(2)<3$ 得 $\frac{4a+1}{2b}<3$
即 $\frac{8b-3}{2b}<3$
解得 $b\in(0,\frac{3}{2})$
而 $b\in Z$
$\therefore b=1$　$\therefore a=1$

$\therefore \begin{cases}a=1\\ b=1\\ c=0\end{cases}$