100+20

2.7 平均值不等式及其应用（1）

【A组】

1. 已知正实数 a，b 满足 $\frac{a}{4}+\frac{b}{5}=1$ 则 ab 的最大值为 5 .

2. 若 $x>-1$，则 $x+\frac{3}{x+1}$ 的最小值是 $2\sqrt{3}-1$.

3. 若对任意的 $x>-1$，不等式 $x+\frac{1}{x+1}-1\geq a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

4. 设正实数 m,n 满足 $m+n=2$，则 $\frac{1}{m}+\frac{3}{n}$ 的最小值为 $2+\sqrt{3}$.

5. 已知 $1<a<4$，则 $\frac{a}{4-a}+\frac{1}{a-1}$ 的最小值是 2 .

$a=2$

【B组】

1. 若 $x>0$，则 $x+\frac{1}{x}$ $\geqslant$ 2；若 $x<0$，则 $x+\frac{1}{x}$ $<$ 2.

2. 若 $a\cdot b<0$，则 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的取值范围是 $(-\infty,-2]$

3. 若 $x>0$，则 $3-x-\frac{4}{x}$ 的最大值是 -1 .

4. 当 $x<0$ 时，$\frac{x^2+9}{x}$ 有最 大 值，最值为 -6 ，此时 $x=$ -3 .

5. 若 a、$b\in R^+$，可得：$a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}}=2\sqrt{2}$，则等号成立的条件为 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. (1)若 $a>3$，则 $a+\frac{1}{a-3}$ 有最 小 值，最值为 5 ，此时 $a=$ 4 .

(2)若 $x<\frac{3}{2}$，则 $x+\frac{8}{2x-3}$ 有最 大 值，最值为 ~~[illegible]~~ $-\frac{5}{2}$ ，此时 $a=$ ~~[illegible]~~ . $-\frac{1}{2}$

$x-\frac{3}{2}+\frac{4}{x-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}$

7. 已知不等式 $a\leq\frac{x^2+2}{|x|}$ 对 x 取一切非零实数恒成立，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2\sqrt{2}]$

8. 下列各式中，最小值为 4 的是（ ~~D~~ ）B

A. $x+2\sqrt{x}+5$　　B. $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$　　C. $x^2+3+\frac{4}{x^2+3}$　　D. $x+\frac{4}{x}$

9. 若$a,b\in\mathbf{R}$，且$ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是（ D ）

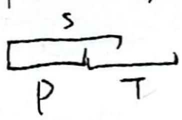
A. $a^2+b^2>2ab$　　B. $a+b\ge2\sqrt{ab}$　　C. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　D. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge2$

10. $a>0,b>0$且$a+b=1$，则下列四个不等式中不成立的是（ D ）

A. $ab\le\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge4$　　C. $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$　　D. $a\ge1$

11. 设$a>b>0$，全集$U=R$，集合$S=\left\{x\middle|b<x<\frac{a+b}{2}\right\}$，$T=\left\{x\middle|\sqrt{ab}<x<a\right\}$，

$P=\left\{x\middle|b<x\le\sqrt{ab}\right\}$，则集合$P$与$S$、$T$的关系是（ A ）



A. $P=S\cap C_RT$　　B. $P=C_RS\cap T$　　C. $P=S\cup T$　　D. $P=S\cap T$

12. 已知$a>0$，$b>0$，设$A=\frac{a+b}{2}$，$G=\sqrt{ab}$，$H=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$，$Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，

试比较A、G、H、Q的大小并给出证明.

解：$Q\ge A\ge G\ge H$，仅 $a=b$ 时取等

显然 $A,G,H,Q>0$

1° 证 $Q\ge A$

注意到 $Q-A=\frac{Q^2-A^2}{Q+A}=\frac{(a-b)^2}{4(Q+A)}\ge0$，仅 $a=b$ 时取等

故 $Q\ge A$，仅 $a=b$ 时取等

2° 证 $A\ge G$

注意到，$A-G=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\ge0$，仅 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ 即 $a=b$ 时取等

故 $A\ge G$，仅 $a=b$ 时取等

3° 证 $G\ge H$

注意到，$G-H=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge0$，仅 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ 即 $a=b$ 时取等

故 $G\ge H$，仅 $a=b$ 时取等

$G\ge H$另证，由$A\ge G$得，

$\frac{G}{H}=\frac{\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}}{2}\ge\frac{2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}}{2}=1$

$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}\iff a=b$

故 $G\ge H$，仅 $a=b$ 时取等

13. (1) 已知$x>0,y>0$，且$2x+8y-xy=0$，求xy和$x+y$的最小值；

(2) 已知$x>0,y>0$，且$x+y=2$，求x^2+y^2的最小值.

解：(1) $\frac{2}{y}+\frac{8}{x}-1=0$

$\frac{8}{x}+\frac{2}{y}=1$

$\left(\frac{8}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+y)\ge(2\sqrt{2}+\sqrt{2})^2$

即 $x+y\ge18$，当 $(x,y)=(12,6)$ 时取等

$xy=16\cdot\frac{xy}{16}=16\left(\sqrt{\frac{xy}{16}}\right)^2=16\left(\sqrt{\frac{x}{8}\cdot\frac{y}{2}}\right)^2\ge16\left(\frac{2}{\frac{8}{x}+\frac{2}{y}}\right)^2=16\left(\frac{2}{1}\right)^2=64$

即 $xy\ge64$，当 $(x,y)=(16,4)$ 时取等

解 (2) $\cancel{(x^2+y^2)(1+1)\ge(x+y)^2}$

$x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}=2$

当 $(x,y)=(1,1)$ 时取等

14. 某村计划建造一个室内面积为 $800\,m^2$ 的矩形蔬菜温室．在温室内，沿左、右两侧与后侧内墙各保留 $1\,m$ 宽的通道，沿前侧内墙保留 $3\,m$ 宽的空地．当矩形温室的边长各为多少时？蔬菜的种植面积最大，最大种植面积是多少？

解：设左右长x米，前后长y米

$xy=800$

种植面积：$(x-2)(y-4)$

$(x-2)(y-4)=(xy+8)-(4x+2y)$

$\le (xy+8)-2\sqrt{4x\cdot 2y}$

$=(800+8)-2\sqrt{8\cdot 800}$

$=648m^2$

当且仅当 $(x,y)=(20,40)$ 时取等

故边长为20与40。

最大种植面积是 $648m^2$

15、已知 a、b、$c\in R^+$，求证：$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$．

解：$(a^2-b)^2\ge 0$

$a^2-2ab+b^2\ge 0$

$a^2\ge 2ab-b^2$

$\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$ ~~[illegible]~~

同理，$\frac{b^2}{c}\ge 2b-c$，$\frac{c^2}{a}\ge 2c-a$

即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

是轮换，

但不对称

$f(a,b,c)=f(b,a,c)$

对称（定义）

$f(a,b,c)=f(c,b,a)$

$=f(a,c,b)$

a 到 c

$f(a,b,c)=f(b,c,a)$

$=f(c,a,b)$

轮换

更好的方法

由柯西，$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)(b+c+a)\ge(a+b+c)^2$

即 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

若为轮换式，可设其一为最大或最小，一般不能设 $a\ge b\ge c$．

若为对称式，可以设 $a\ge b\ge c$、轮对称一定是轮换式．

（定义）

【C组】

1、已知$x, y \in R^+$，则$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2、设$x > -\frac{1}{2}$，则$y = x^2 + x + \frac{4}{2x+1}$的最小值为 $\frac{11}{4}$.

解 1. $(x-\frac{y}{\sqrt{5}})^2 \geq 0$

$x^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}xy + \frac{y^2}{5} \geq 0$，当且仅当$\frac{y}{x}=\sqrt{5}$时取等

$x^2 + \frac{y^2}{5} \geq \frac{2}{\sqrt{5}}xy$

同理，$\frac{4}{5}y^2 + z^2 \geq \frac{4}{\sqrt{5}}yz$，当且仅当$\frac{y}{z}=\frac{\sqrt{5}}{2}$时取等

注意到：原式$= \frac{xy+2yz}{(x^2+\frac{1}{5}y^2)+(\frac{4}{5}y^2+z^2)} \leq \frac{xy+2yz}{\frac{2}{\sqrt{5}}xy+\frac{4}{\sqrt{5}}yz} = \frac{xy+2yz}{\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

在$\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{5}t \\ z=2t \end{cases}$，$\forall t \in R^+$时取等

故原式的最大值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$

解 2. 注意到，$y = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{2}{x+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}$

令$x+\frac{1}{2}=t$，$t \in R^+$

$y = t^2 + \frac{2}{t} - \frac{1}{4} = (t^2+\frac{1}{t}+\frac{1}{t}) - \frac{1}{4} \geq 3\sqrt[3]{t^2\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}} - \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

当且仅当$t=1$即$x=\frac{1}{2}$时取等

即$y_{min} = \frac{11}{4}$

, c)
…定义)
(c, b, a)
(a, c, b)

…, a)
…, b)

…$a \geq b \geq c$.
…是轮换式.