蒋沁彤　　　　　　　　　　　　　　　　95+20

3.5 函数的单调性（1）

知识点：单调性定义、单调区间、抽象函数的单调性

【A 组】

1. 函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的单调递减区间是 R^- 与 R^+.

2. 函数 $y=-x^2-2x+3$ 的单调递增区间是 $(-\infty,-1]$；单调递减区间是 $[-1,+\infty)$ 写成 $(-1,+\infty)$ 也可

3. 函数 $f(x)=|x+1|+|x-2|$ 的严格单调递减区间是 $(-\infty,-1]$.

4. 在区间 $(-\infty,0)$ 上为严格增函数的是（ B ）

(A) $y=1$　(B) $y=\frac{x}{1-x}+2$　$1+\frac{1}{1-x}$　(C) $y=-x^2-2x-1$　(D) $y=1+x^2$

5. 函数 $y=-\sqrt{x^2}$ 在 R 上（ B ）

(A)是严格增函数　(B)不是单调函数　(C) 是严格减函数　(D)是常值函数

6. 若函数 $f(x)=(2a-1)x+b$ 在 R 上是减函数，则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{2}]$

a是否可取到½？常值函数不为减函数

7.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4ax+2, & x<1\\ \frac{a}{x}, & x\geq 1\end{cases}$. 若 $f(x)$ 在 R 上严格减，则实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2},\frac{3}{5}]$.

【B 组】

1. 函数 $y=kx+b$ 的单调递减区间是 $(-\infty,+\infty)$，则实数 k 的范围是 $(-\infty,0)$.

2. 函数 $f(x)=x+\frac{9}{x}$ 的严格增区间是 $[3,+\infty)$ 与 $(-\infty,-3]$.　→写成∪也可，

~~写成 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 也可~~

3. 函数 $f(x)=x-\frac{9}{x}$ 的严格增区间是 R^- 与 R^+.

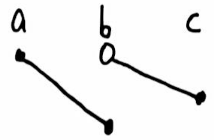
4. 函数 $y=-(x-3)|x|$ 的严格增区间是 $[0,\frac{3}{2}]$.

5. 若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在 $(-\infty,4)$ 上严格递减，则 a 的取值范围是 ~~$[3,+\infty)$~~ ~~$(-\infty,-3]$~~ $(-\infty,-3]$

6. 若函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$ 在 $(-\infty,-2)$ 上是严格增函数，则 a 的取值范围是 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

7. 若函数 $f(x)=|x+1|+|x-a|$ 在 $[2,+\infty)$ 上是严格增函数，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

8. 若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上是严格增函数,则实数 a,b 的取值范围是 ~~a≥~~ $a\in R^+$，~~$b\in[0,+\infty)$~~ ~~$b\in[0,-\infty)$~~ $b\in(-\infty,0]$



9. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 和 $(b, c]$ 上是严格减函数，则函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c]$ 上（ D ）

(A) 是严格增函数　　　(B) 是严格增函数，或严格减函数

(C) 是严格减函数　　　(D)未必具有单调性的函数

巴日

10. 已知函数 $f(x)=|2x-a|$ 在 $(-\infty,3)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是 $[6,+\infty)$.

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax, x\ge -1\\(2-a)x+2a-5, x<-1\end{cases}$，若 $f(x)$ 在 R 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 $[1,\frac{8}{3}]$.

12. 已知 $x>0, y>0$，若 $\sqrt{4x^2+3xy+y^2}+m\sqrt{xy}>2x+y$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $(2\sqrt{2}-\sqrt{7},+\infty)$

13. 求证：函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$，$x\in(-1,1)$ 是严格减函数.

总结
按定义

证明：$\forall x_1<x_2$, $x_1,x_2\in(-1,1)$：$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2-1}-\dfrac{x_2}{x_2^2-1}=\dfrac{(x_1 x_2+1)(x_2-x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$

$x_1^2=|x_1|^2<1^2=1$，$x_1^2-1<0$

$x_2^2=|x_2|^2<1^2=1$，$x_2^2-1<0$

$x_1\cdot x_2>-|x_1\cdot x_2|=-|x_1|\cdot|x_2|>-1\cdot1=-1$，$x_1 x_2+1>0$

故 $\dfrac{(x_1x_2+1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}>0$，而 $x_2-x_1>0$

故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，得证

即 $f(x_1)>f(x_2)$
而 $x_1<x_2$

14. 求证：函数 $f(x)=x+\dfrac{16}{x}$ 在区间 $(0, 4]$ 上是严格减函数，在区间 $[4,+\infty)$ 上是严格增函数.

证明：$\forall x_1<x_2$：~~$x_1,x_2\in(0,4]$~~

$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\dfrac{16}{x_1}-x_2-\dfrac{16}{x_2}=\dfrac{(16-x_1x_2)(x_2-x_1)}{x_1x_2}$

若 $x_1,x_2\in(0,4]$，$16-x_1x_2\ge0$，$x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，故 $f(x_1)-f(x_2)>0$，$f(x_1)>f(x_2)$，即在 $(0,4]$ 上严格减

若 $x_1,x_2\in[4,+\infty)$，$16-x_1x_2<0$，$x_2-x_1>0$，$x_1x_2>0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$，即在 $[4,+\infty)$ 上严格增

15. 求证：函数 $f(x)=x^3+x$ 在 R 上是严格增函数.

求导算错.

证明：$\forall x_1<x_2$，$x_1,x_2\in R$：

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3+x_1-x_2^3-x_2$

$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)$

而 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2+1\ge1>0$

$x_1-x_2<0$

故 $f(x_1)-f(x_2)<0$

即 $f(x_1)<f(x_2)$

故 $f(x)$ 在 R 上严格增

16. 若函数 $y=ax^2-2x-1$ 在 $(-\infty,1)$ 是严格减函数.，求 a 的取值范围.

解：$a=0$ 时，成立

$a<0$ 时，显然不成立（开口向下）

$a>0$ 时，$\frac{1}{a}\geq 1$，$a\in(0,1]$

综上所述，$a\in[0,1]$

17. 已知函数 $f(x)=2x-\frac{a}{x}, x\in(0,1], a\in R$ 是严格减函数，求 a 的取值范围.

解：$a\geq 0$ 时，不成立

$a<0$ 时，$\sqrt{-\frac{a}{2}}\geq 1$，$a\leq -2$

故 $a\in(-\infty,-2]$

18. 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax\ (a>0)$.　$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a$

(1) 当 $a=2$ 时，判断函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的单调性，并证明你的结论.

(2) 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，证明函数 $f(x)$ 不是单调函数；

(3) 求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

严格

$a\in[1,+\infty)$

(3) 若改为严格…，则令 $x_1=0$，$x_2=\frac{2a}{1-a^2}$，$f(x_1)=f(x_2)=1$ 即可

解：(1) $\forall\ 0\leq x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-2x_1-\sqrt{x_2^2+1}+2x_2=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+2(x_2-x_1)>\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}+2(x_2-x_1)$

$=x_2-x_1>0$

故 $f(x_1)>f(x_2)$，故严格单调递减

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}x$　　$f(2)=\sqrt{5}-1>\sqrt{4}-1=1$

$f(0)=1$

$f(1)=\frac{2\sqrt{2}-1}{2}<\frac{2\sqrt{2.25}-1}{2}=\frac{2\times1.5-1}{2}=1$

$\therefore f(1)<f(0)<f(2)$

$\therefore$ 不单调

(3) $a\geq 1$ 时，$\forall\ 0\leq x_1<x_2$，$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}+a(x_2-x_1)$

$>\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}+a(x_2-x_1)=(a-1)(x_2-x_1)\geq 0$

单调递减

~~$a=0$ 时，$f(x)=\sqrt{x^2+1}$，单调递增~~

$0<a<1$ 时，$f(0)=1$，$f\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\sqrt{1-a^2}<1$

$f\left(\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\frac{\sqrt{3a^2+1}-2a^2}{\sqrt{1-a^2}}$

$f\left(\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\right)>f\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3a^2+1}-2a^2>1-a^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{3a^2+1}>a^2+1\Leftrightarrow 3a^2+1>(a^2+1)^2$

$\Leftrightarrow a^4-a^2<0\Leftrightarrow a^2<1$ 恒成立

故 $\begin{cases}0<\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\\ f(0)>f\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)\\ \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}<\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\\ f\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)<f\left(\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\right)\end{cases}$

故 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 不单调

故 $a\in[1,+\infty)$

19. 已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的减函数，且 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(2)=\frac{1}{9}$

① 求 $f(1)$、$f(3)$ 的值；② 解不等式：$f(x)\cdot f(3x^2-1)<\frac{1}{27}$

解：① 令 $x=y=1$

$f(2)=f^2(1)$

$f(1)=\pm\frac{1}{3}$

而 $f(x)$ 为减函数

故 $f(1)>f(2)=\frac{1}{9}$

故 $f(1)=\frac{1}{3}$

令 $x=1, y=2$

$f(3)=f(1)\cdot f(2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$

② $f(x)\cdot f(3x^2-1)=f(3x^2+x-1)$

$\frac{1}{27}=f(3)$

即原不等式等价于 $f(3x^2+x-1)<f(3)$

而 $f(x)$ 为减函数

故 $3x^2+x-1>3$

故 $x\in(-\infty,-\frac{4}{3})\cup(1,+\infty)$

20. 定义在R上的奇函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上是严格增函数，是否存在实数m，使$f(4m-2mx)>f(4-2x^2)$对所有$x\in(0,1)$都成立.若存在，求出所有适合条件的实数m；若不存在，说明理由.

f为R上的严格增函数

解：$f(4m-2mx)>f(4-2x^2)$

$\Leftrightarrow 4m-2mx>4-2x^2$

故原命题为$\forall x\in(0,1)$，$x^2-mx+2m-2>0$

$(2-x)m>2-x^2$

$m>\frac{2-x^2}{2-x}$

令$2-x=t$，$t\in(1,2)$

$\frac{2-x^2}{2-x}=\frac{-t^2+4t-2}{t}=-t-\frac{2}{t}+4\in(1,4-2\sqrt{2}]$

$m\in(4-2\sqrt{2},+\infty)$

21. 定义在$[-1,1]$上的奇函数$f(x)$满足$f(1)=2$，且当$a,b\in[-1,1]$，$a+b\neq0$时，有$\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$.

(1) 判定函数$f(x)$在$[-1,1]$的单调性并加以证明；

(2) 若$\frac{1}{2}f(x)\leq m^2+2am+1$对所有$x\in[-1,1]$，$a\in[-1,1]$恒成立，求$m$的取值范围.

解：(1) $\forall x_0<x_1$，$x_0,x_1\in[-1,1]$

$\frac{f(-x_0)+f(x_1)}{-x_0+x_1}>0$

即$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}>0$

而$x_1-x_0>0$

故$f(x_1)-f(x_0)>0$

故为严格增函数

(2) 由于f严格增

故$\max\{f(x)\}=f(1)=2$

即$m^2+2am+1\geq1$ 对$\forall a\in[-1,1]$成立

即$\forall a\in[-1,1]$，$m^2+2am\geq0$

记$g(a)=m^2+2am$

g单调

则$\begin{cases}g(-1)\geq0\\g(1)\geq0\end{cases}$

解得$m\in(-\infty,-2]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$

【C组】

1、定义在区间$(-1,1)$上的函数$f(x)$满足：$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$，$x\in(-1,0)$时$f(x)<0$，若$a=f\left(\frac{3}{7}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$，$b=f\left(\frac{5}{7}\right)$，$c=f(0)$，则三个实数$a$，$b$，$c$从小到大排列的顺序为$c<a<b$.

2、已知函数$f(x)=x+\frac{m}{x}(m>0)$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，在函数$f(x)$的值域上任取三个数，都存在以这三个数为边长的三角形，求实数m的取值范围为R^+.

1. $xy<1$，$1-xy>0$

任取$x<y$，$\frac{x-y}{1-xy}<0$，即$\frac{x-y}{1-xy}\in(-1,0)$

故$f(\frac{x-y}{1-xy})<0$ 即$f(x)-f(y)<0$

故$f(x)$在$(-1,1)$上严格增

注意到 $f(\frac{5}{7})-f(\frac{3}{7})=f\left(\frac{\frac{5}{7}-\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}\times\frac{5}{7}}\right)=f(\frac{1}{3})$

故$f(\frac{5}{7})=f(\frac{3}{7})+f(\frac{1}{3})=a$

$\begin{cases}c=f(0)\\a=f(\frac{3}{7})\\b=f(\frac{5}{7})\end{cases}$

而$0<\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$

故$c<a<b$

2. 任取y_1,y_2,y_3

$y_1+y_2-y_3>0$恒成立

即$2\min\{f(x)\}-\max\{f(x)\}>0$

(1) $\sqrt{m}\in(0,\frac{1}{2}]$

即$m\in(0,\frac{1}{4}]$

此时$\min\{f(x)\}=f(\frac{1}{2})=2m+\frac{1}{2}$

$\max\{f(x)\}=f(1)=m+1$

$2(2m+\frac{1}{2})>m+1$

$m>0$

$m\in(0,\frac{1}{4}]$

(2) $\sqrt{m}\in[1,+\infty)$

即$m\in[1,+\infty)$

此时$\min\{f(x)\}=f(1)=m+1$

$\max\{f(x)\}=f(\frac{1}{2})=2m+\frac{1}{2}$

$2(m+1)>2m+\frac{1}{2}$

恒成立

故$m\in[1,+\infty)$

(3) $\sqrt{m}\in(\frac{1}{2},1)$

即$m\in(\frac{1}{4},1)$

$\min\{f(x)\}=f(\sqrt{m})=2\sqrt{m}$

$\max\{f(x)\}=\max\{f(\frac{1}{2}),f(1)\}$

$=\max\{m+1,2m+\frac{1}{2}\}$

$\begin{cases}4\sqrt{m}>m+1\\4\sqrt{m}>2m+\frac{1}{2}\end{cases}$ $m\in(\frac{1}{4},1)$

$m\in(7-4\sqrt{3},\frac{7+4\sqrt{3}}{4})$

综上所述，$m\in R^+$

12. $m > \left(\frac{2x+y-\sqrt{4x^2+3xy+y^2}}{\sqrt{xy}}\right)_{max}$， 令 $f(x)=\frac{2x+y-\sqrt{4x^2+3xy+y^2}}{\sqrt{xy}}=\frac{(2x+y)^2-(4x^2+3xy+y^2)}{\sqrt{xy}\left(2x+y+\sqrt{4x^2+3xy+y^2}\right)}$

$= \frac{\sqrt{xy}}{2x+y+\sqrt{4x^2+3xy+y^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{4\frac{x}{y}+3+\frac{y}{x}}}$.

由于 $2\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\geq 2\sqrt{2}$，$4\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 4$. 等号成立条件均为 $y=2x$

∴ $f(x)_{max}=\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}=2\sqrt{2}-\sqrt{7}$. 故 $m>2\sqrt{2}-\sqrt{7}$；

C组

1. 令 $y=x$，有 $f(0)=0$；

先证 $f(x)$ 为奇函数. 由 $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$，交换 x,y 有

$$f(y)-f(x)=f\left(\frac{y-x}{1-xy}\right)$$

∴ $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)=-f\left(\frac{y-x}{1-xy}\right)$. 此即说明 $f(x)$ 为奇函数；

再证：$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上↑， $\forall\ -1<x<y<0$，则 $(x+1)(y-1)<0$.

∴ $xy-x+y-1<0$. $xy-1<x-y<0$，∴ $-1<\frac{x-y}{1-xy}<0$，

依题意：$f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)<0$. ∴ $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)<0$.

$\Rightarrow f(x)<f(y)$. //

从而 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上↑. $\cancel{f(x)-f(y)=f(x)+f(-y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)}$.

$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$ (∵ $f(x)$ 为奇函数). 令 $x=\frac{3}{7}$，$y=\frac{1}{3}$，则

$a=f(\frac{3}{7})+f(\frac{1}{3})=f\left(\frac{\frac{3}{7}+\frac{1}{3}}{1+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{3}}\right)=f(\frac{2}{3})$，由 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上↑知.

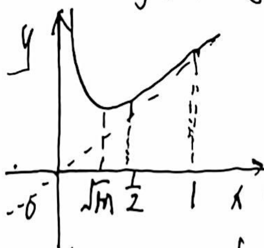
$c<a<b$.

2. $f(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上既有最小值，也有最大值，由对勾函数性质，

令$\sqrt{m}=\frac{1}{2}, 1 \Rightarrow m=\frac{1}{4}, 1$，原问题$\Leftrightarrow 2f(x)_{min}>f(x)_{max}$。

(1) $0<m<\frac{1}{4}$时，如图1所示，$f(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上↑，$f(x)_{min}=f(\frac{1}{2})$，$f(x)_{max}=f(1)$。

∴ $2f(\frac{1}{2})>f(1)$，$2(\frac{1}{2}+2m)>1+m \Rightarrow m>0$，∴ $m\in(0,\frac{1}{4})$；



(图1)

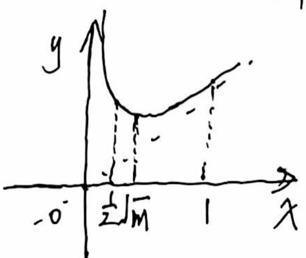
(2) $\frac{1}{4}\le m<1$时，$f(\frac{1}{2})=f(1)\Rightarrow m=\frac{1}{2}$，进一步分情况如下：

$\frac{1}{4}\le m\le\frac{1}{2}$时，$f(\frac{1}{2})<f(1)$，$f(x)_{min}=2\sqrt{m}$，$f(x)_{max}=f(1)=1+m$，

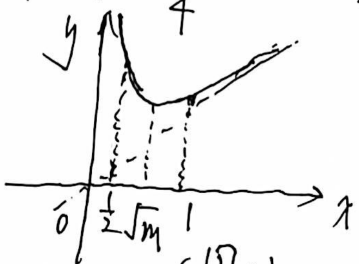
$4\sqrt{m}>1+m$，$(2-\sqrt{3})^2<m<(2+\sqrt{3})^2$，∴ $\frac{1}{4}\le m\le\frac{1}{2}$ (图2)

$\frac{1}{2}<m<1$时，$f(\frac{1}{2})>f(1)$，$f(x)_{max}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2m$，$f(x)_{min}=2\sqrt{m}$。

∴ $4\sqrt{m}>\frac{1}{2}+2m \Rightarrow \frac{7-4\sqrt{3}}{4}<m<\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$，∴ $\frac{1}{2}<m<1$ (图3)



(图2)



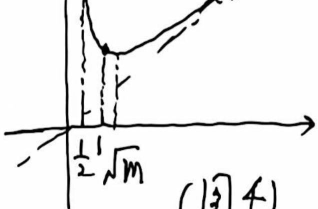
(图3)

(3) $m\ge1$时，$f(x)$在$[\frac{1}{2},1]$上↓，图4，$f(x)_{min}=f(1)=1+m$，

$f(x)_{max}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+2m$　$2(1+m)>\frac{1}{2}+2m\Rightarrow 2>\frac{1}{2}$，恒成立。

∴ $m\ge1$

综上，m的取值范围为$(0,+\infty)$。



(图4)