145+20

3.8 函数的周期性与对称性（2）

【A组】

1.函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(1-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 的图像关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称.

$f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

2.设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，且满足 $f(x+1)=f(1-x)$，则 $y=f(x+1)$ 的图像关于 y轴 对称. $y=f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称.

3. 函数 $f(x)=\frac{x+a+1}{x+a}$ 图象的对称中心横坐标为 3，则 $a=$ -3.

$f'(x)=3x^2+4x+3$

4. 判断函数 $f(x)=x^3+2x^2+3x+4$ 的对称中心 $\left(-\frac{2}{3},\frac{70}{27}\right)$.

$f''(x)=6x+4$

$f''(x)=0$

5. 函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数，且满足 $f(x)=f(2-x)$，则 $f(x)$ 的周期为 $4k, \forall k\in N^*$

6. 已知定义在 N 上的函数 $f(n)$ 满足：$f(n+2)=f(n+1)-f(n)$． $f(n)$ 周期为 $6k, \forall k\in N^*$

$f(n+1)=f(n)-f(n-1)$

相加，得 $f(n+2)=-f(n-1)$

即 $f(n)=-f(n+3)=f(n+6)$

【B组】

1.定义在 R 上的非常数函数满足：$f(10+x)$ 为偶函数，且 $f(5-x)=f(5+x)$，则 $f(x)$ 一定是（A）

$x=10$ 对称. $x=5$ 对称.

A. 是偶函数，也是周期函数　　B. 是偶函数，但不是周期函数

C. 是奇函数，也是周期函数　　D. 是奇函数，但不是周期函数

2. $f(x)$ 是周期为 2 的奇函数，当 $0<x<1$ 时，$f(x)=-\frac{1}{x}$． $a=f\left(\frac{6}{5}\right)$，$b=f\left(\frac{3}{2}\right)$，$c=f\left(\frac{5}{2}\right)$.则（D）

$a=-f(-\frac{6}{5})=-f(\frac{4}{5})=\frac{5}{4}$

$b=-f(-\frac{3}{2})=-f(\frac{1}{2})=2$

$c=f(\frac{1}{2})=-2$

A. $a<b<c$　B. $b<a<c$　C. $c<b<a$　D. $c<a<b$

-5

3. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是奇函数又是以 2 为周期的周期函数,则 $f(1)+f(4)+f(7)$ 等于 0.

对称中心 $(k,0)$ $\forall k\in Z$

4. 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\le 0\\ f(x-1)-f(x-2), x>0\end{cases}$，则 $f(2024)$ 的值为 ~~4~~ -1.

$x>0 \Rightarrow x+1>0$

$f(x)+f(x-2)=f(x-1)$

$f(x+1)+f(x-1)=f(x)$

相加得 $f(x+1)+f(x-2)=0$，$\forall x>0 \Leftrightarrow x-2>-2$

$\forall x>-2$,

$f(x)=-f(x+3)=f(x+6)=f(x+6k)$, $\forall k\in N^*$

$f(2024)=f(2)=f(1)-f(0)=f(1)$

$=f(0)-f(-1)=-f(-1)=$ ~~-4~~ -1

5. 定义在 R 上的以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,6)$ 内解的个数的最小值是 $\underline{\quad 7 \quad}$

零点：$-1\ 0\ 1\ \frac{3}{2}\ 2\ 3\ 4\ \frac{9}{2}\ 5\ 6$

$f(\frac{3}{2})=-f(-\frac{3}{2})$
$f(\frac{3}{2})=f(-\frac{3}{2})$
$\Rightarrow f(\frac{3}{2})=0$

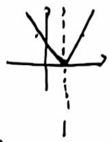
6. 已知函数 $y=f(x)$ 满足：① $y=f(x+1)$ 是偶函数；② 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数．若 $x_1<0, x_2>0$，且 $x_1+x_2<-2$，则 $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 的大小关系是（ A ）

关于 $x=1$ 对称

$(-x_1)+(-x_2)>2$

A. $f(-x_1)>f(-x_2)$　　B. $f(-x_1)<f(-x_2)$

C. $f(-x_1)=f(-x_2)$　　D. $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 的大小关系不能确定



7. (1) 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，且 $f(x+2)\cdot f(x)=3$，当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)=x$，则 $f(9.5)=\underline{\quad 2.5 \quad}$．

以4为周期

$=f(-2.5)=f(2.5)$

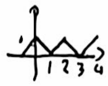
题目有误！

$f(-1)\cdot f(1)=3$
$|f(-1)|=\sqrt{3}$
$|f(3)|=|f(-1)|=\sqrt{3}$　而 $f(3)=3\neq 3$
矛盾

(2) 设定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)\cdot f(x)=12$，若 $f(1)=2$，则 $f(99)=\underline{\quad 6 \quad}$

8. 已知 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=1-x$，那么在区间 $x\in[-1,4]$ 内，关于 x 的方程 $kx+k+1=f(x)$ 有 5 个不同的根，则实数 k 的取值范围是 $\underline{(-\frac{1}{4},0)}$．

过 $(-1,1)$



9. 已知函数 $y=f(x)$，对任意 $x\in R$，都有 $f(x+2)\cdot f(x)=k$（k 为常数），且当 $x\in[0,\ 2]$ 时，$f(x)=x^2+1$，则 $f(2021)=\underline{\quad 2 \quad}$．

$f(0)=1,\ f(2)=5 \Rightarrow k=5$

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(1-x)=f(-x-3)$，当 $0\le x\le 2$ 时，$f(x)=\frac{x}{2}$，那使 $f(x)=\frac{1}{2}$ 成立的 x 的集合为（ B ）

$f(1+x)=f(x-3)$
$f(x)=f(x+4)$

A. $\{x\mid x=2n,n\in \mathbf{Z}\}$　　B. $\{x\mid x=2n-1,n\in \mathbf{Z}\}$

$f(1)=f(-1)=\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}$ 对 $x=4k-1$ 与 $x=4k+1$ 成立，$\forall k\in Z$

即所有奇数

C. $\{x\mid x=4n-1,n\in \mathbf{Z}\}$　　D. $\{x\mid x=4n+1,n\in \mathbf{Z}\}$

11. 已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，$f(x-2)$ 在 $[0,2]$ 递减，则（ A ）

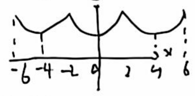
A. $f(0)<f(-1)<f(2)$　　B. $f(-1)<f(0)<f(2)$

C. $f(-1)<f(2)<f(0)$　　D. $f(2)<f(-1)<f(0)$

$f(x)$ 在 $[-2,0]\downarrow$

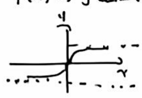
14. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 都是关于 x 的奇函数，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,100]$ 上至少有___50___个根. $1,3,\cdots 99$

15. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，其图像关于直线 $x=2$ 对称，当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)=x^2+1$，则 $x\in(-6,-2)$ 时，$f(x)=$___$(x+4)^2+1$___



16. 在一次研究性学习中，老师给出函数 $f(x)=\frac{x}{1+|x|}(x\in R)$，三位同学甲、乙、丙在研究此函数时给出命题：甲：函数 $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$；

$f(x)$ 为奇函数，单调递增 2✓



渐近线：$y=1$
$y=-1$

乙：若 $x_1\neq x_2$，则一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

值域：$(-1,1)$ 甲×

丙：若规定 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，则 $f_n(x)=\frac{x}{1+n|x|}$ 对任意 $n\in N^*$ 恒成立. 上述三个命题中不正确的个数有___1___个.

17. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，则下列命题中，①若 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $y=f(x+2)$ 图像关于 y 轴对称；②若 $y=f(x+2)$ 是偶函数，则 $y=f(x)$ 图像关于直线 $x=2$ 对称；③若 $f(x-2)=f(2-x)$，则函数 $y=f(x)$ 图像关于直线 $x=2$ 对称；④ $y=f(x-2)$ 与 $y=f(2-x)$ 图像关于直线 $x=2$ 对称，其中正确命题序号为___②④___.

18. 用 $\min\{a,b\}$ 表示 a,b 两数中的最小值. 若函数 $f(x)=\min\{|x|,|x+t|\}$ 的图像关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，则 t 的值为___1___

$f(0)=f(-t)=0$ $f(x)$ 有且仅有2个零点

$\frac{0+(-t)}{2}=-\frac{1}{2}$，故 $t=1$

19. 已知函数 $f(x)=\frac{a^x}{a^x+\sqrt{a}}$，$x\in R$ (1) 求证：函数 $f(x)$ 的图像关于点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 对称；(2) 计算：$\sum_{i=1}^{99}f\left(\frac{i}{100}\right)$ 的值.

(1)证明：$f(\frac{1}{2}+t)+f(\frac{1}{2}-t)=\frac{a^{\frac12}\cdot a^t}{a^{\frac12}\cdot a^t+a^{\frac12}}+\frac{a^{\frac12}\cdot a^{-t}}{a^{\frac12}\cdot a^{-t}+a^{\frac12}}=\frac{a^t}{a^t+1}+\frac{a^{-t}}{a^{-t}+1}$

$=\frac{a^t}{a^t+1}+\frac{1}{a^t+1}=1$

而 $1=\frac{1}{2}\times 2$

故得证

(2)解：$\sum_{i=1}^{99}f(\frac{i}{100})=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{99}f(\frac{i}{100})+\sum_{i=1}^{99}f(\frac{100-i}{100})\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{99}\left(f(\frac{i}{100})+f(\frac{100-i}{100})\right)$

$\forall x\in R$，$f(x)+f(1-x)=1$

$\therefore \sum_{i=1}^{99}f(\frac{i}{100})=\frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{99}1=\frac{99}{2}$

20. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 N，且对任意正整数 x，都有 $f(x)=f(x-1)+f(x+1)$，若 $f(0)=2024$，求 $f(2022)$。

解、$\forall x\in N^*$, $x-1\in N$

$f(x+1)=f(x)+f(x+2)$

$f(x)=f(x-1)+f(x+1)$

相加=得 $f(x-1)=-f(x+2)$

$\forall x\in N$, $f(x)=-f(x+3)=f(x+6)$

$f(2022)=f(0)=2024$

21. 已知对于任意 $a,b\in R$，有 $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$，~~且 $f(x)\neq 0$ 不恒为0~~ 且 $\exists x$，$f(x)\neq 0$

(1) 求证：$f(x)$ 是偶函数；

(2) 若存在正整数 m 使得 $f(m)=0$，求满足 $f(x+T)=f(x)$ 的一个 T 值 $(T\neq 0)$

解：(1) $\forall x\in R$, $f(x)=0$ 或 $f(x)\neq 0$

1° $f(x)=0$

令 $a=0, b=x$

$f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$

$0+f(-x)=0$

$f(-x)=0=f(x)$

2° $f(x)\neq 0$

令 $a=x, b=-x$

$f(0)+f(2x)=2f(x)f(-x)$

令 $a=b=x$

$f(2x)+f(0)=2f(x)^2$

故 $2f(x)f(-x)=2f(x)^2$

而 $f(x)\neq 0$，故 $f(-x)=f(x)$

综上所述，$f(x)=f(-x)$

$f(x)$ 是偶函数

(2) $T=4m$

令 $a=x+m$, $b=m$

$f(x+2m)+f(x)=2f(x+m)f(m)=0$

$f(x)=-f(x+2m)=f(x+4m)$

【C组】

1. 定义在 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f(x)+f(1-x)=2$，$f(\frac{x}{5})=\frac{1}{2}f(x)$，且当 $0\le x_1<x_2\le 1$ 时，$f(x_1)\le f(x_2)$，则 $f(\frac{1}{2010})=$ $\frac{1}{16}$ ______.

2. 给出定义：若 $m-\frac{1}{2}<x\le m+\frac{1}{2}$（其中 m 为整数），则 m 叫做离实数 x 最近的整数，记作 $\{x\}=m$．在此基础上给出下列关于函数 $f(x)=|x-\{x\}|$ 的四个命题： $m=1\to(\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

①函数 $y=f(x)$ 的定义域为 R，值域为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$；

②函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{k}{2}\ (k\in Z)$ 对称；

③函数 $y=f(x)$ 是周期函数，最小正周期为 1； ④函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上是增函数．其中正确的命题的序号为 ①②③.

解：1. $f(0)+f(1)=2$, $f(0)=0$

故 $f(1)=2$

$f(\frac{1}{5})=1$，则 $f(\frac{4}{5})=1$

故 $f(\frac{1}{25})=\frac{1}{2}$, $f(\frac{4}{25})=\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{125})=\frac{1}{4}$, $f(\frac{4}{125})=\frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{625})=\frac{1}{8}$, $f(\frac{4}{625})=\frac{1}{8}$

$f(\frac{1}{3125})=\frac{1}{16}$, $f(\frac{4}{3125})=\frac{1}{16}$

注意到 $\frac{1}{3125}<\frac{1}{2010}<\frac{4}{3125}$

故 $f(\frac{1}{3125})\le f(\frac{1}{2010})\le f(\frac{4}{3125})$，故 $f(\frac{1}{2010})=\frac{1}{16}$

2、① $m-\frac{1}{2}<x\le m+\frac{1}{2}$

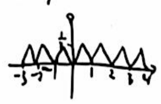
$-\frac{1}{2}<x-m\le\frac{1}{2}$

$x-\{x\}\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$\therefore |x-\{x\}|\in[0,\frac{1}{2}]$

正确

②



正确

③ 正确

④ $f(0)=0$

$f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

不正确.