钱俐洋 高一(1)班 37

131

4.6 指对方程（1）

1、方程$2^{2+x}-2^{2-x}=15$的解集是 $\{2\}$.

2、方程$9^x+6^x=2^{2x+1}$的解集是 $\{0\}$.

3、方程$2^{|x+1|}=3$的解集是 $\{\log_2 3-1, -\log_2 3-1\}$.

4、方程$\log_2(9-2^x)=3-x$的解集是 $\{0,3\}$.

5、满足方程$3^{2x+2}-3^{x+3}-3^x+3=0$的实数解有 2 个.

6、已知$f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$，则$f^{-1}(\frac{3}{5})$的值是 -2.

7、方程：$9^x+4^x=\frac{5}{2}\cdot 6^x$的解集是 $\{\log_{\frac{3}{2}}2, \log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\}$

8、方程$4^x+4^{-x}-5\left(2^x+2^{-x}\right)+6=0$的解集是 $\{\log_2(2+\sqrt{3}), \log_2(2-\sqrt{3})\}$

9、关于x的方程$5^{-x}=\frac{a+3}{5-a}$的根为正数，则实数a的取值范围是 $(-3,1)$.

10、函数$y=3^{-|x-1|}-m$的图像与x轴有交点时，m的取值范围是 $(0,1]$.

11、关于x的方程$4^x+(m+1)2^x+m=0$只有一个根，则m的取值范围是 $(-\infty,0)$.

12、设非零实常数a,b,c满足a,b同号，b,c异号，则关于x的方程$a\cdot 4^x+b\cdot 2^x+c=0$（ B ）

(A)无实根

(B) 仅有一个实根

(C)有两个异号的实根

(D) 有两个同号的实根

13、若α,β是方程$\lg^2 x-\lg x^2-2=0$的两个根,那么$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$的值为 -4.

14、(1) 方程$\log_2(x+2)=x$的实数根的个数为 2.

(2)已知α,β分别是方程$\log_2 x+x-3=0$和$2^x+x-3=0$的根,则$\alpha+\beta$的值为 3.

15、函数$f(x)=\log_2\left(1+3^x+9^x\cdot a\right)$当$x\le 1$时总有意义,则实数$a$的取值范围是 $(-\frac{4}{9},+\infty)$

16、记号$[x]$表示不大于实数x的最大整数,则方程$\lg^2 x-[\lg x]-2=0$的解集为

( )．

(A) $\left\{x\middle|\frac{1}{10}\le x\le 100\right\}$　　(B) $\left\{\frac{1}{10},10^{\sqrt{2}},10^{-\sqrt{2}},10^{\sqrt{3}}\right\}$

(C) $\left\{\frac{1}{10},10^{\sqrt{3}},100\right\}$　　(D) $\left\{\frac{1}{10},10^{\sqrt{2}},10^{-\sqrt{2}},10^{\sqrt{3}},100\right\}$

17、解方程:

(1) $\log_4(13-3x)\cdot\log_{(x-1)}2=1$;

解：设$\log_4(13-3x)=y$，
则 $3x=13-4^y$
$\log_{(x-1)}2=\frac{1}{y}$
$x=2^y+1$
$3\cdot 2^y+3=13-4^y$
$4^y+3\cdot2^y-10=0$
$2^y=t$
$t^2+3t-10=0$
$(t-2)(t+5)=0$
$t=2$或$t=-5$
$\because t>0$ $\therefore t=2$
$\therefore y=1$ $\therefore 3x=9$
$\therefore x=3$

(2) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$.

(2) $\log_2(4^x+4)=\log_2(2^x)+\log_2(2^{x+1}-3)$
$4^x+4=2^x\cdot(2^{x+1}-3)$
$4^x+4=2^x\cdot2^{x+1}-3\cdot2^x$
$4^x+4=4^x\cdot2-3\cdot2^x$
$4^x-3\cdot2^x-4=0$
$2^x=a$ $(a>0)$
$a^2-3a-4=0$
$(a+1)(a-4)=0$
$a=-1$(舍)或$a=4$
$\therefore x=2$.

(3) $x^{\lg x}=\frac{x^3}{100}$;

解设$\lg x=t$ $x=10^t$
$10^{t^2}=10^{3t-2}$
$\therefore t^2=3t-2$
$t^2-3t+2=0$
$(t-1)(t-2)=0$
$t=1$或2
$\therefore x=10$或100

(4) $10^{\lg^2 x}+x^{\lg x}=20$.

解设$\lg x=t$ 则$x=10^t$
$10^{t^2}+10^{t^2}=20$ $\therefore 10^{t^2}=10$
$\therefore t^2=1$ $t=\pm1$ $\therefore x=10$或$\frac{1}{10}$

18、已知函数$f(x)=3^x$，且$f(a+2)=18$，函数$g(x)=3^{ax}-4^x$的定义域为$[-1,1]$.

(1) 求函数$g(x)$的解析式;

(2) 若方程$g(x)=m$有解，求实数m的取值范围.

解：(1) $3^{a+2}=18$. $a=\log_3 18-2=\log_3 2$.
$g(x)=3^{\log_3 2\cdot x}-4^x=2^x-4^x$　$g(x)=2^x-4^x$ $(x\in[-1,1])$
(2) $2^x-4^x=-(2^x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$　$2^x\in[\frac{1}{2},2]$
$\therefore -(2^x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\in[-2,\frac{1}{4}]$　$\therefore m\in[-2,\frac{1}{4}]$

19、若方程$\lg(2x)\lg(3x)+a^2=0$有两个不相等的实数根，求实数a的取值范围，并求方程的两根的和

解：$(\lg x+\lg 2)(\lg x+\lg 3)+a^2=0$. 设$\lg x=t$ $t^2+\lg 6\cdot t+\lg 2\lg 3+a^2=0$

$\because \Delta>0$ $\lg^2 6-4\lg 2\lg 3-4a^2>0$. $(\lg 2-\lg 3)^2-4a^2>0$ $a^2<\left(\frac{\lg 3-\lg 2}{2}\right)^2$. $\frac{\lg\frac{2}{3}}{2}<a<\frac{\lg\frac{3}{2}}{2}$,

$\therefore$ 两根x_1, x_2 则$\lg x_1+\lg x_2=-\lg 6$ $\lg(x_1x_2)=-\lg 6$ $\therefore x_1x_2=\frac{1}{6}$

20、关于x的方程$\log_2(x+\sqrt{x^2-1})-a=0$有实数解，求实数$a$的取值范围，并求出方程的解.

解：设$f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ $\therefore x\geq 1$或$x\leq -1$ $x\geq 1$时 $f(x)$单调递增 $f(x)\geq 1$

$x\leq -1$时 $x\to-\infty$时$f(x)\to 0^-$ $x=-1$时取 $x\leq -1$时的最小值-1

$\therefore f(x)\in[-1,0)\cup[1,+\infty)$ $\therefore \log_2(x+\sqrt{x^2-1})\in[0,+\infty)$.

$\therefore a\in[0,+\infty)$

$x=2^{a-1}+\frac{1}{2^{a+1}}$

-6

21、已知函数$f(x)=\lg(10^x-1)$，如果方程$f^{-1}(2x)=\lambda+f(x)$有实根，求实数λ的取值范围.

解 $f^{-1}(2x)=\log_{10}(10^{2x}+1)$

$\log_{10}(10^{2x}+1)=\lambda+\log_{10}(10^x-1)$

$\lambda=\log_{10}\left(\frac{10^{2x}+1}{10^x-1}\right)=\log_{10}\left(10^x+1+\frac{2}{10^x-1}\right)=\log_{10}\left(10^x-1+\frac{2}{10^x-1}+2\right)$

$\geq\lg\left(2\sqrt{(10^x-1)\cdot\frac{2}{10^x-1}}+2\right)=\lg(2\sqrt{2}+2)$ $\therefore \lambda\geq\lg(2\sqrt{2}+2)$

等号在$x=\lg(\sqrt{2}+1)$时取得.

22、关于x的方程$k\cdot 9^x-k\cdot 3^{x+1}+6(k-5)=0$在$[0,2]$上有唯一解,求实数$k$的取值范围.

解设$3^x=t$ $kt^2-3kt+6(k-5)=0$. $x\in[0,2]$ $t\in[1,9]$

$k=\frac{30}{t^2-3t+6}$ t^2-3t+6关于$t=\frac{3}{2}$对称 $\therefore t\in\{\frac{3}{2}\}\cup[2,9]$.

$\therefore k\in[\frac{1}{2},\frac{15}{2})\cup\{8\}$

23、如果方程$\log_a \frac{x-5}{x+5}=1+\log_a(x-3)$有实根,求实数$a$的范围.

解 $\log_a \frac{x-5}{(x+5)(x-3)}=1$ $\frac{x-5}{(x+5)(x-3)}=a$. 判断定义域 $\frac{x-5}{x+5}>0$ $x<-5$或$x>5$ $x-3>0$ $x>3$ ∴$x>5$.

$ax^2+2ax-15a=x-5$. $ax^2+(2a-1)x+5-15a=0$. $a=0$时 ~~5=0~~ $x=5$ ×

$a\neq0$ $\Delta=64a^2-24a+1\geq0$ ∴$a>0$ ∴$a\in(0,\frac{3-\sqrt5}{16}]$

24、实数a取何值时,方程$\lg(x-1)+\lg(3-x)=\lg(1-ax)$有一解,两解,无解?

$x-1>0$ $3-x>0$ $1-ax>0$ $1<x<3$ $x<\frac{1}{a}$ $a>0$ $x>\frac{1}{a}$ $a<0$.

$(x-1)(3-x)=1-ax$ $x^2-(4+a)x+4=0$ $\Delta=a^2+8a$

$a=-8$或0时 1解
$a<-8$或$a>0$ 2解
$-8<a<0$ 无解

−10

25、若关于x的方程$\lg(ax)\cdot\lg(ax^2)=4$有两个小于1的正根α,β，且满足$|\lg\alpha-\lg\beta|\leq2\sqrt3$，则实数$a$的取值范围

$(\lg a+\lg x)(\lg a+2\lg x)=4$ $|\lg\alpha-\lg\beta|^2\leq12$

设$\lg x=t$. $(\lg\alpha+\lg\beta)^2-4\lg\alpha\lg\beta\leq12$

$t_1+t_2=-\frac{3}{2}\lg a$ $t_1t_2=\frac{(\lg a)^2-4}{2}>0$ $(\lg a)^2\leq16$

$\lg a>2$ $a>100$ ∴$a\in(100,10000]$

26、已知关于x的方程$x^2-5x\log_2 a+6(\log_2 a)^2=0$有实根，其中仅有一个较小的根在区间$(1,2)$内，求$a$的取值范围.

$\Delta=(\log_2 a)^2\geq0$ $3\log_2 a\notin(1,2)$

$x_1=2\log_2 a$ $x_2=3\log_2 a$ $\log_2 a\geq\frac{2}{3}$ 或 $\log_2 a\leq\frac{1}{3}$

$1<2\log_2 a<2$ ∴ $a\in[2^{\frac{2}{3}},2)$

$\frac{1}{2}<\log_2 a<1$

$\sqrt2<a<2$

−3

27、已知关于x的方程$3^{2x+1}+(m-1)(3^{x+1}-1)-(m-3)3^x=0$有两个不同的实数根,求实数$m$的取值范围.

$3^x=t$ $y=3t^2+2mt-m+1$ $\Delta=4m^2+12m-12>0$ $-m+1>0$ $-\frac{2m}{6}>0$

∴$m<\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$

22

1)令 $t=3^x(1\leqslant t\leqslant 9)$,

所以原方程化为 $k\cdot t^2-3kt+6(k-5)=0$

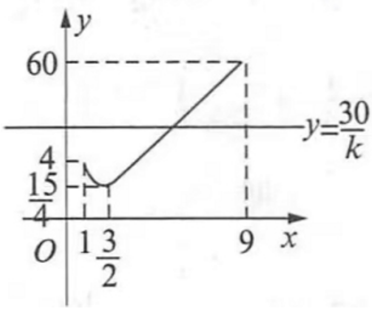
即:$k(t^2-3t+6)=30$.

显然 $k\neq 0$,$t^2-3t+6=\frac{30}{k}$,

再令 $y_1=t^2-3t+6$,$y_2=\frac{30}{k}$,$1\leqslant t\leqslant 9$,

在同一直角坐标系中作出它们的图像,所以原方程有唯一解,两曲线有唯一公共点,

$\frac{30}{k}=\frac{15}{4}$ 或 $4<\frac{30}{k}\leqslant 60$,所以 $k=8$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant k<\frac{15}{2}$.



23. 要使方程有意义，须 $a>0,\ x-3>0,\ \frac{x-5}{x+5}>0$

$\Rightarrow\ a>0,\ x>5.$

$\log_a \frac{x-5}{x+5} = 1+\log_a (x-3)$

$\Leftrightarrow \log_a \frac{x-5}{x+5} = \log_a [a(x-3)]$

$\Leftrightarrow \frac{x-5}{x+5} = a(x-3)$

$\Leftrightarrow a = \frac{x-5}{(x+5)(x-3)}$

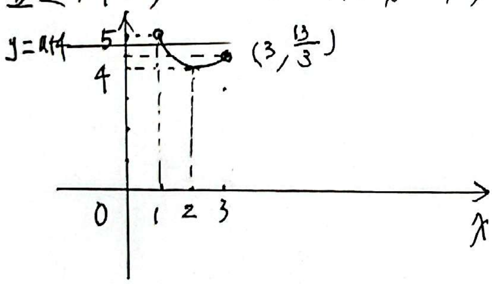
令 $t=x-5 \in (0,+\infty)$

则 $a = \frac{t}{(t+10)(t+2)} = \frac{1}{t+\frac{20}{t}+12} \leq \frac{1}{2\sqrt{20}+12} = \frac{3-\sqrt{5}}{16}$

故 a 的范围是 $(0, \frac{3-\sqrt{5}}{16}]$

24. 原方程 $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-ax=(x-1)(3-x) \\ 1<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax = 1-(x-1)(3-x) = x^2-4x+4 \\ 1<x<3 \end{cases}$,

显见 $x\neq 0$, $a = x+\frac{4}{x}-4$, $a+4 = x+\frac{4}{x}$



$a+4=4$ 或 $a+4\in[\frac{13}{3},5)$ 时一解，

$a+4\in(4,\frac{13}{3})$ 时两解，

综上，$a=0$ 或 $a\in[\frac{1}{3},1)$ 时一解，

$a\in(0,\frac{1}{3})$ 两解，

$a\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$ 无解.

25

. 因为 $(\lg a+\lg x)(\lg a+2\lg x)=4$，则有 $2\lg^2 x+3\lg a\lg x+\lg^2 a-4=0$.

设 $\lg x=t$，则有 $2t^2+3\lg a t+\lg^2 a-4=0$. 在此要注意，由于变量的代换，其定义域也会随之改变，有

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ t_1+t_2<0,\\ t_1\cdot t_2>0,\\ \sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1\cdot t_2}\leqslant 2\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lg^2 a+32\geqslant 0,\\ \lg a>0,\\ \lg a>2 \text{ 或 } \lg a<-2,\\ -4\leqslant \lg a\leqslant 4,\end{cases}$$

即 $2<\lg a\leqslant 4$，所以 $10^2<a\leqslant 10^4$.

26

方程$x^2-5x\log_2 a+6(\log_2 a)^2=0$的根为

$2\log_2 a$，$3\log_2 a$，

若$1<2\log_2 a<2$，则$\sqrt{2}<a<2$，满足

$2\log_2 a<3\log_2 a$；

若$1<3\log_2 a<2$，则$2^{\frac{1}{3}}<a<2^{\frac{2}{3}}$，不满

足$3\log_2 a<2\log_2 a$，

所以a的取值范围是$\sqrt{2}<a<2$.

27

解 设 $3^x=t(t>0)$，原方程化为：$3t^2+(m-1)(3t-1)-(m-3)t=0$，即

$$3t^2+2mt-m+1=0 \quad ①$$

原问题等价于关于 t 的方程①有两个不同的正根，则

$$\begin{cases}\Delta=4m^2-4\times 3(-m+1)>0,\\ t_1+t_2=-\dfrac{2}{3}m>0,\\ t_1\cdot t_2=\dfrac{1-m}{3}>0,\end{cases}$$

得 $m<\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$.