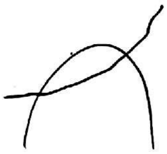
期末综合练习 3

一、填空题：本题共 12 小题，共 54 分。

1.幂函数$f(x)=x^{\frac{-5}{4}}$的定义域为 $(0,+\infty)$.

2.集合$A=\{1,2,3,a,b\}$的非空真子集有 30 个.



3.方程$2^x+x^2-2=0$的实数根的个数为 2 .

$(-2,-1)$ $(0,1)$.

4.设方程$(lgx)^2-lgx^2-3=0$，的两个实数根为a和b，则$\log_a b+\log_b a=$ $-\frac{10}{3}$.

$lgx=3$ $lgx=-1$. $x=1000$ $\frac{1}{10}$

5.不等式$27^x+7log_5(36x+1)<23$的解集为 $(-\frac{1}{36},\frac{2}{3})$.

6.规定记号"△"表示一种运算，即$a\triangle b=\sqrt{ab}+a+b$，$a$，$b\in R$，若$1\triangle k=3$，则函数$f(x)=(k\triangle x)-\frac{3x}{2}$的值域是 $(-\infty,\frac{3}{2}]$.

$k+\sqrt{k}=2$ $k=1$

$(1\triangle x)-\frac{3x}{2}$

$\sqrt{x}-\frac{x}{2}+1$.

7.燕子每年秋天都要从北方飞向南方过冬.专家发现：两岁燕子的飞行速度可以表示为$v=5log_2\frac{q}{10}$(米/秒)，若某只两岁的燕子耗氧量为q_1时的飞行速度为v_1(米/秒)，另一只两岁的燕子耗氧量为q_2时的飞行速度为v_2(米/秒)，两只燕子同时起飞，当$q_1=4q_2$时，一分钟后第一只燕子比第二只燕子多飞行的路程为 600 米.

$v_1=5log_2\frac{q_1}{10}$. $v_2=5log_2\frac{q_2}{10}$.

$v_2+10=v_1$

8.已知$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})\cdot f(x)$是偶函数，且$y=f(x)$不恒等于零，则$y=f(x)$的奇偶性是 奇函数 .

9.设$f(x)=log_2\frac{x+1}{x-1}$，函数$y=g(x)$的图象与$y=f^{-1}(x+1)$的图象关于直线$y=x$对称，则$g(3)=$ ~~$log_2\frac{5}{3}$~~，0

$g(x)=f(x)-1$

10.已知函数$y=|3x-1|+3|x+1|$，记函数值域为M，若$t\in M$，则$t+\frac{4}{t}$的最小值为 5 .

$[4,+\infty)$

11.已知函数$f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，若将函数图象绕原点逆时针旋转$\alpha(\alpha\in(0,\pi])$角后得到的函数$y=g(x)$存在反函数，则$\alpha=$ ~~$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]\cup[\pi]$~~ $[\frac{\pi}{2},\pi]$

12.已知x为实数，用$[x]$表示不大于x的最大整数.对于函数$y=f(x)$，若存在$m\in R$且$m\notin Z$，使得$f(m)=f([m])$，则称$y=f(x)$是"Ω函数".若函数$y=x+\frac{4-a^2}{x}$是"Ω函数"，则正实数a的取值范围是 $(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

二、单选题：本题共 4 小题，共 17分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

13. "$x<0$" 是 "$\ln(x+1)<0$" 的(B)

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 非充分非必要条件 D. 充要条件

14.若命题甲：$x-1=0$，命题乙：$\lg^2 x-\lg x=0$，则命题甲是命题乙的(A)

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 非充分也非必要条件

15.下列命题组真命题的个数为(A)

①存在反函数的函数一定是单调函数 tanx, arctanx.

②偶函数存在反函数

③奇函数必存在反函数

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

16.已知函数$f(x)=3^x$，函数$g(x)$是$f(x)$的反函数，若正数x_1，x_2，…，x_{2018}，x_{2019}满足$x_1\cdot x_2\cdots x_{2018}\cdot x_{2019}=243$，则$g(x_1^2)+g(x_2^2)+\cdots+g(x_{2017}^2)+g(x_{2018}^2)+g(x_{2019}^2)$的值等于(C)

A. 4 B. 8 C. 10 D. 32

三、解答题：本题共 5 小题，共 60分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.(本小题12分)

已知函数$f(x)=4^x-a\cdot 2^{x+1}+1$.

(1)若$a=1$，解方程：$f(x)=4$;

(2)若$f(x)$在$[-1,1]$上存在零点，求实数a的取值范围.

解(1) $f(x)=4^x-2^{x+1}+1=(2^x-1)^2=4 \Rightarrow 2^x-1=2$ 或 $2^x-1=-2$

$2^x=3$ 或 $2^x=-1$ (舍) $\therefore 2^x=3$ $x=\log_2 3$.

(2) $4^x-a\cdot 2^{x+1}+1=0$ $a=\dfrac{4^x+1}{2^{x+1}}=2^{x-1}+\dfrac{1}{2^{x-1}\cdot 4}$

$x\in[-1,1]$时 $2^{x-1}\in[\frac{1}{4},1]$

$\therefore a\in[1,\frac{5}{4}]$

18.(本小题12分)

已知函数$f(x)=log_2\frac{1-ax}{x-1}$的图象关于原点对称，其中$a$为常数.

(1)求a的值;

(2)设集合$A=\{x|\frac{4}{7-x}\geq 1\}$，$B=\{x|f(x)+\log_2(x-1)<m\}$，若$A\cap B\neq\varnothing$，求实数$m$的取值范围.

(1) $f(x)+f(-x)=0$ ⇒ $\frac{1-ax}{x-1}\cdot\frac{1+ax}{-x-1}=1$ ⇒ $1-a^2x^2=-x^2+1$ ⇒ $a^2=\pm1$.

$a=1$时 $f(x)=\log_2(-1)$不存在 ∴ $a=-1$

(2) A: $7-x\leq0$时显然不可以. $7-x>0$ $4\geq7-x$ $x\geq3$.

$f(x)+\log_2(x-1)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)=\log_2(x+1)$ $(x>1)$. $\log_2(x+1)<m$ $x<2^m-1$

$2^m-1>3$ $2^m>4$ $m>2$ ∴ $m\in(2,+\infty)$

19.(本小题12分)

近年来，雾霾日趋严重，我们的工作、生活受到了严重的影响，如何改善空气质量已成为当今的热点问题.某空气净化器制造厂，决定投入生产某型号的空气净化器，根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计规律：每生产该型号空气净化器x(百台)，其总成本为$P(x)$(万元)，其中固定成本为12万元，并且每生产1百台的生产成本为10万元(总成本=固定成本+生产成本).销售收入$Q(x)$(万元)满足$Q(x)=\begin{cases}-0.5x^2+22x(0\leq x\leq16)\\224(x>16)\end{cases}$，假定该产品产销平衡(即生产的产品都能卖掉)，根据以述统计规律，请完成下列问题：

(1)求利润函数$y=f(x)$的解析式(利润=销售收入-总成本);

(2)工厂生产多少百台产品时，可使利润最多?

(1) 总成本$12+10x$, $f(x)=\begin{cases}-0.5x^2+12x-12 & 0\leq x\leq16\\212-10x & x>16\end{cases}$

(2). $0\leq x\leq16$时. $f(x)=-0.5x^2+12x-12$ 对称轴$x=12$.

$f(x)_{max}=f(12)=60$.

$x>16$时 $f(x)=212-10x<212-160=52$ $60>52$ ∴ 12台时利润最多

∴ 工厂生产一千两百台产品时，可使利润最多。

20.(本小题12分)

若函数$f(x)$满足：对于其定义域D内的任何一个自变量x_0，都有函数值$f(x_0)\in D$，则称函数$f(x)$在D上封闭.

(1)若下列函数的定义域为$D=(0,1)$，试判断其中哪些在D上封闭，并说明理由．$f_1(x)=2x-1$，$f_2(x)=2^x-1$.

(2)若函数$g(x)=\frac{5x-a}{x+2}$的定义域为$(1,2)$，是否存在实数a，使得$g(x)$在其定义域$(1,2)$上封闭？若存在，求出所有a的值，并给出证明；若不存在，请说明理由.

(3)已知函数$f(x)$在其定义域D上封闭，且单调递增．若$x_0\in D$且$f(f(x_0))=x_0$，求证：$f(x_0)=x_0$.

(1) $f_1(x)$不封闭 $f_1(0)=-1\notin(0,1)$ $f_2(x)$封闭 $x\in(0,1)$时 $2^x\in(1,2)$ $2^x-1\in(0,1)$

$\therefore f_2(x)$在$(0,1)$封闭.

(2). $x\in(1,2)$时. $\frac{5x-a}{x+2}\in(1,2)$ $5-\frac{a+10}{x+2}\in(1,2)$ $\frac{a+10}{x+2}\in(3,4)$

$a\geq-10$时. $g(x)$递减 $3\leq\frac{a+10}{3}\leq4$ $3\leq\frac{a+10}{4}\leq4$ $a+10=12\Rightarrow a=2$.

$g(x)=5-\frac{12}{x+2}$ $x\in(1,2)$时 $x+2\in(3,4)$ $\frac{12}{x+2}\in(3,4)$ $g(x)=5-\frac{12}{x+2}\in(1,2)$ $a=2$时成立

$\therefore a=2$ $a\leq-10$时 $g(x)$递增 但 $\frac{5x-a}{x+2}=5+\frac{-10-a}{x+2}>5$ 不成立 $\therefore a=2$

(3). 若$f(x_0)>x_0$ $f(x)$封闭且单调递增，$x_0=f(f(x_0))>f(x_0)>x_0$ 矛盾

若$f(x_0)<x_0$ $x_0=f(f(x_0))<f(x_0)<x_0$ 矛盾

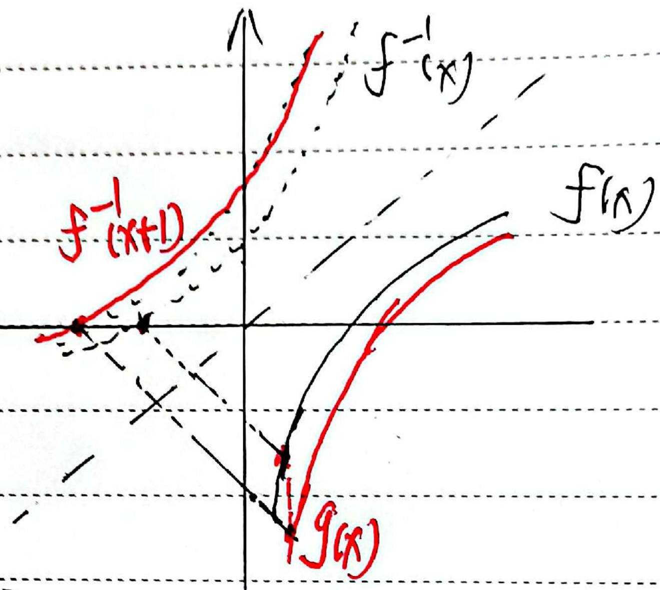
$\therefore f(x_0)=x_0$.

最多.

9. 法一、先求 $f^{-1}(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$，$f^{-1}(x+1)=\frac{2^{x+1}+1}{2^{x+1}-1}$，

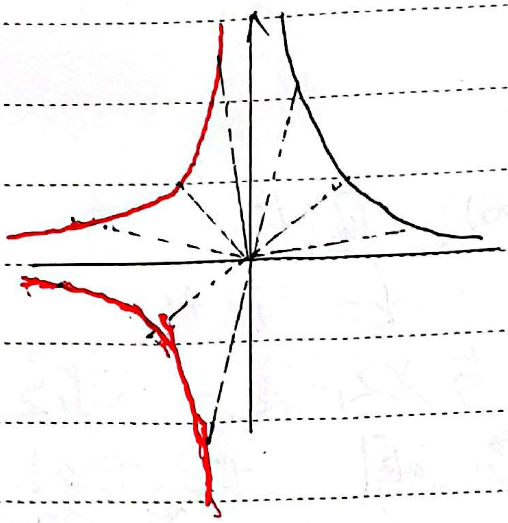
$\Rightarrow g(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}-1$ ∴ $g(3)=\log_2\frac{3+1}{3-1}-1=0$

法二.



$g(x)=f(x)-1=\log_2\frac{x+1}{x-1}-1$ $g(3)=0$.

11.



12. 设 $m=[m]+r$, $0<r<1$, 由 $f(m)=f([m])$ 有

$m+\frac{4-a^2}{m}=[m]+\frac{4-a^2}{[m]}$, ∴ $m-[m]=(4-a^2)\left(\frac{1}{[m]}-\frac{1}{m}\right)$

$=(4-a^2)\cdot\frac{m-[m]}{m[m]}$, ∵ $m-[m]\neq 0$ ∴ $4-a^2=m[m]<4$

$=[m]([m]+r)$, $0<r<1$.

显然 $[m]\neq 0$, $[m]=1$时, $4-a^2=1\cdot(1+r)=1+r\in(1,2)$,

$[m]=2$时, $4-a^2=2(2+r)=4+2r\in(4,6)$ ×,

$[m]=-1$时, $4-a^2=-(-1+r)=1-r\in(0,1)$,

$[m]=-2$时, $4-a^2=-2(-2+r)=4-2r\in(2,4)$,

$[m]=-3$时, $4-a^2=-3(-3+r)=9-3r\in(6,9)$ ×

综上, $4-a^2\in(0,1)\cup(1,2)\cup(2,4)$, $\Rightarrow$ $a\in(0,2)$, 且 $a\neq\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$

(注, 标答有误)

一、填空题：本题共 12 小题，共 54 分。

1.幂函数$f(x)=x^{\frac{-5}{4}}$的定义域为______.

【答案】$\{x|x>0\}$

【解析】解：因为$f(x)=x^{\frac{-5}{4}}$，

所以$x>0$.

故答案为：$\{x|x>0\}$.

由已知结合幂函数的性质即可求解.

本题主要考查了幂函数性质的应用，属于基础题.

2.集合$A=\{1,2,3,a,b\}$的非空真子集有______个.

【答案】30

【解析】解：根据元素互异性集合A中有 5个元素，

所以非空真子集有$2^5-2=30$.

故答案为：30.

若集合有n个元素，则非空真子集的个数为2^n-2.

本题考查了非空真子集个数的计算公式，是基础题.

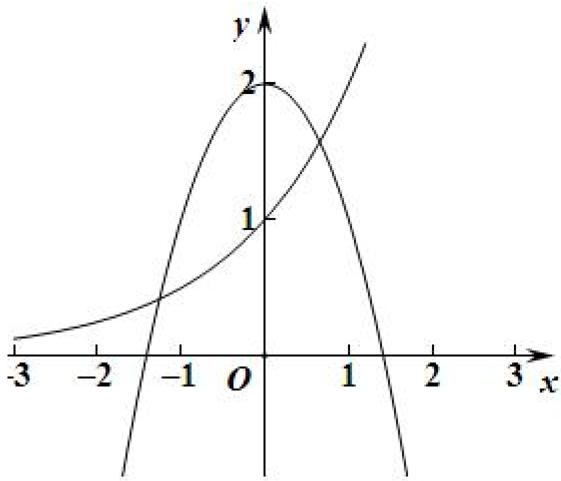
3.方程$2^x+x^2-2=0$的实数根的个数为______.

【答案】2

【解析】解：由$2^x+x^2-2=0$,

得$2^x=2-x^2$,

作出函数$y=2^x$与$y=2-x^2$的图象，如图所示：



由此可得两函数有 2 个交点，

所以方程$2^x+x^2-2=0$有 2 个实数根.

故答案为：2.

将问题转化为$y=2^x$与$y=2-x^2$的交点个数，作出图象，结合图象求解即可.

本题考查了求方程的根、转化思想及数形结合思想，属于基础题.

4.设方程$(lgx)^2-lgx^2-3=0$，的两个实数根为a和b，则$\log_a b+\log_b a=$______

【答案】$-\frac{10}{3}$

【解析】解：令$lgx=t$，则$t^2-2t-3=0$，解得$t=3$或$t=-1$，

即$lgx=3$或$lgx=-1$，解得$x=10^3$或$x=10^{-1}$，

所以$a=10^3$，$b=10^{-1}$或$a=10^{-1}$，$b=10^3$，

所以$log_a b+log_b a=log_{10^3}10^{-1}+log_{10^{-1}}10^3=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3}$.

同理可求$a=10^{-1}$，$b=10^3$时，结果也为$-\frac{10}{3}$.

故答案为：$-\frac{10}{3}$.

转化为一元二次方程求出a和b，然后由对数运算求解可得.

本题主要考查了对数运算性质的应用，属于基础题.

5.不等式$27^x+7log_5(36x+1)<23$的解集为______.

【答案】$(-\frac{1}{36},\frac{2}{3})$

【解析】解：设函数$f(x)=27^x+7log_5(36x+1)$，需满足 $36x+1>0$，解得$x>-\frac{1}{36}$，函数的定义域为$(-\frac{1}{36},+\infty)$.

又$f(\frac{2}{3}) = 27^{\frac{2}{3}} + 7log_5(36\times\frac{2}{3}+1) = 9 + 14 = 23$,

有因为 $27 > 1$, $5 > 1$, 所以函数$f(x) = 27^x + 7log_5(36x+1)$在区间$(-\frac{1}{36}, +\infty)$上递增,

且$f(x) < f(\frac{2}{3})$, 则有$x < \frac{2}{3}$,

故答案为: $(-\frac{1}{36},\frac{2}{3})$.

构造函数$f(x) = 27^x + 7log_5(36x+1)$, 利用函数的单调性解不等式即可.

本题考查函数的性质, 考查不等式的解法, 属于中档题.

6.规定记号"△"表示一种运算, 即$a\triangle b = \sqrt{ab} + a + b$, a, $b \in R$, 若 $1\triangle k = 3$, 则函数$f(x) = (k\triangle x) - \frac{3x}{2}$的值域是______.

【答案】$(-\infty,\frac{3}{2}]$

【解析】解: $\because 1\triangle k = \sqrt{k} + 1 + k = 3$, $\therefore k = 1$,

$\therefore f(x) = (k\triangle x) - \frac{3x}{2} = \sqrt{x} + 1 + x - \frac{3x}{2} = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + 1 = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 + \frac{3}{2}$,

$\therefore$当$\sqrt{x} = 1$时, $f(x)_{max} = \frac{3}{2}$,

$\therefore f(x)$的值域为: $(-\infty,\frac{3}{2}]$.

故答案为: $(-\infty,\frac{3}{2}]$.

根据 $1\triangle k = \sqrt{k} + 1 + k = 3$得到$k$的值, 然后求出$f(x) = (k\triangle x) - \frac{3x}{2} = \sqrt{x} - \frac{x}{2} + 1$, 再根据二次函数的图象与性质得到$f(x)$的值域.

本题考查了二次函数的图象与性质, 考查了转化思想和整体思想, 属基础题.

7.燕子每年秋天都要从北方飞向南方过冬.专家发现: 两岁燕子的飞行速度可以表示为$v = 5log_2\frac{q}{10}$(米/秒), 若某只两岁的燕子耗氧量为q_1时的飞行速度为v_1(米/秒), 另一只两岁的燕子耗氧量为q_2时的飞行速度为v_2(米/秒), 两只燕子同时起飞, 当$q_1 = 4q_2$时, 一分钟后第一只燕子比第二只燕子多飞行的路程为______米.

【答案】600

【解析】解: 因为$v = 5log_2\frac{q}{10}$, 所以$q = 10\cdot 2^{\frac{v}{5}}$,

所以$q_1 = 10\cdot 2^{\frac{v_1}{5}}$, $q_2 = 10\cdot 2^{\frac{v_2}{5}}$, 又$q_1 = 4q_2$,

所以 $10\cdot 2^{\frac{v_1}{5}}=40\cdot 2^{\frac{v_2}{5}}$,

所以$2^{\frac{v_1}{5}-\frac{v_2}{5}}=4$,

所以$v_1-v_2=10$,

所以一分钟后第一只燕子比第二只燕子多飞行的路程为 $60\times 10=600$(米).

故答案为：600.

由条件列出q_1，v_1及q_2，v_2的关系，结合$q_1=4q_2$，求出v_1-v_2，由此可得结论.

本题考查指数幂的应用，属于中档题.

8.已知$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})\cdot f(x)$是偶函数，且$y=f(x)$不恒等于零，则$y=f(x)$的奇偶性是______.

【答案】奇函数

【解析】解：根据题意，设$g(x)=1+\frac{2}{2^x-1}$，则$F(x)=f(x)g(x)$,

则$g(-x)=1+\frac{2}{2^{-x}-1}=1+\frac{2\cdot 2^x}{1-2^x}$,

则$g(x)+g(-x)=2+\frac{2}{2^x-1}+\frac{2\cdot 2^x}{1-2^x}=0$，则$g(-x)=-g(x)$,

$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})\cdot f(x)$是偶函数，即$f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$,

又由$g(-x)=-g(x)$，则$f(-x)=-f(x)$,

故$f(x)$为奇函数.

故答案为：奇函数.

根据题意，设$g(x)=1+\frac{2}{2^x-1}$，分析可得$g(x)$为奇函数，又由$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})\cdot f(x)$是偶函数，即$f(-x)g(-x)=f(x)g(x)$，分析可得$f(-x)=-f(x)$，即可得答案.

本题考查函数奇偶性的判断，注意函数奇偶性的定义，属于基础题.

9.设$f(x)=log_2\frac{x+1}{x-1}$，函数$y=g(x)$的图象与$y=f^{-1}(x+1)$的图象关于直线$y=x$对称，则$g(3)=$______.

【答案】0

【解析】解：由$y=\log_2\frac{x+1}{x-1}$，得：$2^y=\frac{x+1}{x-1}$,

解得：$x=\frac{2^y+1}{2^y-1}$,

故$f^{-1}(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$,

$f^{-1}(x+1)=\frac{2^{x+1}+1}{2^{x+1}-1}$,

故$g(x)=\log_2\frac{x+1}{x-1}-1$,

故$g(3)=1-1=0$,

故答案为：0.

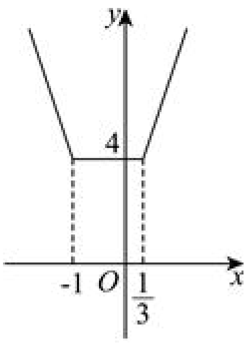
根据反函数的定义求出$f(x)$的反函数$g(x)$，求出$g(3)$的值即可.

本题考查反函数的求法，考查指数式和对数式的互化，指数函数的反函数是对数函数，对数函数的反函数是指数函数，互为反函数的两个函数的图象关于直线$y=x$对称.

10.已知函数$y=|3x-1|+3|x+1|$，记函数值域为M，若$t\in M$，则$t+\frac{4}{t}$的最小值为______

【答案】5

【解析】解：函数$y=|3x-1|+3|x+1|=\begin{cases}-6x-2, x<-1\\4, -1\le x\le\frac{1}{3}\\6x+2, x>\frac{1}{3}\end{cases}$ 的图象如下：



所以$M=[4,+\infty)$,

函数$y=t+\frac{4}{t}$在$(0,2)$上单调递减，$(2,+\infty)$上单调递增,

所以$t+\frac{4}{t}$在$t=4$时取得最小值，最小值为 5.

故答案为：5.

根据图象得到函数$y=|3x-1|+3|x+1|$的值域，然后借助对勾函数的单调性求最小值即可.

本题主要考查函数值域的求法，最值的求法，考查运算求解能力，属于中档题.

11.已知函数$f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，若将函数图象绕原点逆时针旋转$\alpha(\alpha\in(0,\pi])$角后得到的函数$y=g(x)$存在反函数，则$\alpha=$______.

【答案】$\frac{\pi}{2}$或π

【解析】解：∵函数$f(x)=\frac{1}{x}(x>0)$的图象绕原点逆时针旋转$\alpha(\alpha\in(0,\pi])$角后得到的函数$y=g(x)$存在反函数，

故函数$y=g(x)$为一一映射，

结合反比例函数的图象和性质可得：

$\alpha=\frac{\pi}{2}$或$\alpha=\pi$，

故答案为：$\frac{\pi}{2}$或π.

由已知可得函数$y=g(x)$为一一映射，进而根据反比例函数的图象和性质可得满足条件的α值.

本题考查的知识点是函数的图象与图象变化，反函数，反比例函数的图象和性质，其中分析出函数$y=g(x)$为一一映射，是解答的关键.

12.已知x为实数，用$[x]$表示不大于x的最大整数.对于函数$y=f(x)$，若存在$m\in R$且$m\notin Z$，使得$f(m)=f([m])$，则称$y=f(x)$是“Ω函数”.若函数$y=x+\frac{4-a^2}{x}$是“Ω函数”，则正实数a的取值范围是______.

【答案】$(0,1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$

【解析】解：由题设，$\exists m\in R$且$m\notin Z$，$m+\frac{4-a^2}{m}=[m]+\frac{4-a^2}{[m]}$，且$m>[m]>m-1$，$m[m]>0$，

所以$(m-[m])(1-\frac{4-a^2}{m[m]})=0$能成立，即$\frac{4-a^2}{m[m]}=1$能成立，则 $4-a^2>0$，

所以 $4-a^2=m[m]\in(0,4]$，显然 $4-a^2\in\{1,2,3,4\}$，不存在m满足题设；

若 $4-a^2\in(0,1)$，则$\exists m\in(-1,0)$满足题设；

若 $4-a^2\in(1,2)$，则$\exists m\in(1,\sqrt{2})$满足题设；

若 $4-a^2\in(2,3)$，则$\exists m\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$满足题设；

若 $4-a^2\in(3,4)$，则$\exists m\in(\sqrt{3},2)$满足题设；

故 $0<a<2$ 且$a\notin\{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$.

∴正实数a的取值范围是$(0,1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

故答案为：$(0,1)\cup(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

由函数定义得$\exists m\in R$且$m\notin Z$, $m+\frac{4-a^2}{m}=[m]+\frac{4-a^2}{[m]}$, 且$m>[m]>m-1$, $m[m]>0$, 进而有$\frac{4-a^2}{m[m]}=$

1能成立，即有 $4-a^2>0$ 结合分类讨论，求参数范围.

本题考查函数性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

二、单选题：本题共 4 小题，共 17 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

13. “$x<0$”是“$\ln(x+1)<0$”的(   )

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件　C. 非充分非必要条件　　D. 充要条件

【答案】B

【解析】解：若“$x<0$”则$x+1<1$，当 $0<x+1<1$，有“$\ln(x+1)<0$”当$x+1\leq 0$，“$\ln(x+1)$无意义，

即：“$x<0$”推不出“$\ln(x+1)<0$”；

若“$\ln(x+1)<0$”；则$(x+1)>0$，且$(x+1)<e^0=1$；

解得：$-1<x<0$，则能推出$x<0$，

由充要条件的定义判断“$x<0$”是“$\ln(x+1)<0$”的必要非充分条件.

故选：B.

根据充要条件的定义互相推断进而可得出结果.

本题主要考查充分条件与必要条件，熟记概念即可，属于常考题型.

14.若命题甲：$x-1=0$，命题乙：$\lg^2x-lgx=0$，则命题甲是命题乙的(   )

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 非充分也非必要条件

【答案】A

【解析】解：若命题甲：$x-1=0$，命题乙：$\lg^2x-lgx=0$，

①若命题甲成立，则$x=1$，因此$\lg^2x-lgx=\lg^2 1-lg1=0$，即命题乙成立，

所以充分性成立；

②若命题乙成立，则$(lgx-1)lgx=0$，解得$lgx=0$或$lgx=1$，即$x=1$或$x=10$；

因此命题甲不一定成立，所以必要性不成立.

综上所述，命题甲是命题乙的充分非必要条件；

故选：A.

根据充分条件和必要条件的定义分别进行判断即可.

本题考查了必要条件、充分条件与充要条件的判断，属于基础题.

15.下列命题组真命题的个数为(   )

①存在反函数的函数一定是单调函数

②偶函数存在反函数

③奇函数必存在反函数

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】A

【解析】解：对①，取函数$y=x$，$x\in\{1\}$，显然存在反函数，但不单调，①错误；

对②，取偶函数函数$y=x^2$，则$x=\pm\sqrt{y}$，显然函数$y=x^2$不存在反函数，②错误；

对③，取奇函数函数$y=x^3-x$，当$y=0$时有$x=0$和$x=1$与之对应，

即从y到x的映射不满足函数定义，故奇函数$y=x^3-x$没有反函数，③错误.

故选：A.

取特例结合反函数定义和性质判断即可.

本题主要考查反函数的定义，属于基础题.

16.已知函数$f(x)=3^x$，函数$g(x)$是$f(x)$的反函数，若正数x_1，x_2，…，x_{2018}，x_{2019}满足$x_1\cdot x_2\ldots x_{2018}\cdot x_{2019}=243$，则$g(x_1^2)+g(x_2^2)+\cdots+g(x_{2017}^2)+g(x_{2018}^2)+g(x_{2019}^2)$的值等于(　)

A. 4　　B. 8　　C. 10　　D. 32

【答案】C

【解析】解：由$f(x)=3^x$，可得$f(x)$的反函数为$g(x)=\log_3x$，$x>0$.

$g(x_1^2)+g(x_2^2)+\cdots+g(x_{2017}^2)+g(x_{2018}^2)+g(x_{2019}^2)$

$=\log_3(x_1^2)+\log_3(x_2^2)+\ldots+\log_3(x_{2018}^2)+\log_3(x_{2019}^2)$

$=2(\log_3x_1+\log_3x_2+\ldots+\log_3x_{2018}+\log_3x_{2019})$

$=2log_3(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{2018}\cdot x_{2019})=2log_3243=2log_33^5=10log_33=10$.

故选：C.

根据$f(x)=3^x$，利用反函数的定义求出$g(x)=\log_3x$，然后根据对数的运算法则化简$g(x_1^2)+g(x_2^2)+\cdots+g(x_{2017}^2)+g(x_{2018}^2)+g(x_{2019}^2)$，得到原式$=2log_3243$，进而可得答案.

本题主要考查反函数的定义、对数的运算法则及其应用，考查了计算能力，属于中档题.

三、解答题：本题共 5 小题，共 60 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.(本小题 12 分)

已知函数$f(x)=4^x-a\cdot2^{x+1}+1$.

(1)若$a = 1$，解方程：$f(x) = 4$；

(2)若$f(x)$在$[-1,1]$上存在零点，求实数a的取值范围.

【答案】解：(1)当$a = 1$时，$f(x) = 4^x - 2 \cdot 2^x + 1$.

$\because f(x) = 4$，$\therefore 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 4$，

$\therefore 2^x = 3$或$2^x = -1$(舍)，

$\therefore x = \log_2 3$；

(2)当$x \in [-1,1]$时，令$t = 2^x$，则$t \in [\frac{1}{2}, 2]$，

$\therefore$由$f(x) = 0$，得$t^2 - 2at + 1 = 0$，$\therefore 2a = \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}$，

$\because y = t + \frac{1}{t}$在$[\frac{1}{2}, 1]$上单调递减，在$(1,2]$上单调递增，

$\therefore$当$t = 1$时，$(t + \frac{1}{t})_{min} = 2$；

当$t = 2$或$\frac{1}{2}$时，$(t + \frac{1}{t})_{max} = \frac{5}{2}$，

$\therefore 2a \in [2, \frac{5}{2}]$，$\therefore a \in [1, \frac{5}{4}]$.

【解析】本题考查了指数方程的解法和根据函数的零点求参数的范围，属中档题.

(1)将$a = 1$代入$f(x)$中，然后根据$f(x) = 4$，求出2^x的值，再解出x即可；

(2)令$t = 2^x$，则由$f(x) = 0$可得$t^2 - 2at + 1 = 0$，再根据t的范围求出a的范围.

18.(本小题 12 分)

已知函数$f(x) = log_2 \frac{1-ax}{x-1}$的图象关于原点对称，其中$a$为常数.

(1)求a的值；

(2)设集合$A = \{x | \frac{4}{7-x} \geq 1\}$，$B = \{x | f(x) + \log_2(x-1) < m\}$，若$A \cap B \neq \varnothing$，求实数$m$的取值范围.

【答案】解：$(1)\because$函数$f(x) = log_2 \frac{1-ax}{x-1}$的图象关于原点对称，其中$a$为常数.

$\therefore f(-x) = log_2 \frac{1+ax}{-x-1} = -log_2 \frac{1-ax}{x-1} = log_2 \frac{x-1}{1-ax}$，

$\therefore \frac{1+ax}{-x-1} = \frac{x-1}{1-ax}$，

解得$a = \pm 1$.

当$a = 1$时，$\frac{1-ax}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = -1$，与条件矛盾，舍去.

$\therefore a=-1$;

(2) $\because$集合$A=\{x|\frac{4}{7-x}\geq 1\}$解不等式得$A=\{x|3\leq x<7\}$.

由(1)知，$f(x)+\log_2(x-1)=\log_2\frac{x+1}{x-1}+\log_2(x-1)<m$;

$\therefore\begin{cases}x>1\\ log_2(x+1)<m\end{cases}$，且$A\cap B\neq\varnothing$，解得 $1<x<2^m-1$;

由于$A\cap B\neq\varnothing$，所以$2^m-1>3$，解得，$m>2$.

故m的取值范围是$(2,+\infty)$.

【解析】(1)根据$f(x)$的图象关于原点对称，得$f(x)$是奇函数，由$f(-x)=-f(x)$恒成立，解得a的值即可.

(2)先解分式不等式，求得集合A；由于$A\cap B\neq\varnothing$，所以B有解，解得集合B；再根据集合的关系求得m的取值范围即可.

本题考查了奇函数的定义，分式不等式的解法，根据交集运算求参数取值范围，考查了运算求解能力，属于中档题.

19.(本小题 12分)

近年来，雾霾日趋严重，我们的工作、生活受到了严重的影响，如何改善空气质量已成为当今的热点问题.某空气净化器制造厂，决定投入生产某型号的空气净化器，根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计规律：每生产该型号空气净化器x(百台)，其总成本为$P(x)$(万元)，其中固定成本为 12万元，并且每生产 1百台的生产成本为 10万元(总成本=固定成本+生产成本).销售收入$Q(x)$(万元)满足$Q(x)=\begin{cases}-0.5x^2+22x\,(0\leq x\leq 16)\\ 224(x>16)\end{cases}$，假定该产品产销平衡(即生产的产品都能卖掉)，根据以述统计规律，请完成下列问题：

(1)求利润函数$y=f(x)$的解析式(利润=销售收入−总成本)；

(2)工厂生产多少百台产品时，可使利润最多？

【答案】解：(1)由题意得$P(x)=12+10x$,

则$f(x)=Q(x)-P(x)$

$=\begin{cases}-0.5x^2+22x-12-10x,0\leq x\leq 16\\ 224-12-10x,x>16\end{cases}$,

即$f(x)=\begin{cases}-0.5x^2+12x-12,0\leq x\leq 16\\ 212-10x,x>16\end{cases}$;

(2)当$x>16$时，函数$f(x)$递减，

即有$f(x)<212-160=52$,

当 $0\leq x\leq 16$ 时，函数$f(x)=-0.5x^2+12x-12=-0.5(x-12)^2+60$,

当$x=12$时，$f(x)$有最大值$f(12)=60$,

综上可知，当工厂生产 12 百台产品时，可使利润最大为 60 万元.

【解析】本题考查函数模型在实际问题中的应用，考查函数的最值问题，属于中档题.

(1)先求得$P(x)$，再由$f(x)=Q(x)-P(x)$可得所求；

(2)分别求出各段的最值，注意运用一次函数和二次函数的最值求法，即可得到.

20.(本小题 12 分)

若函数$f(x)$满足：对于其定义域D内的任何一个自变量x_0，都有函数值$f(x_0)\in D$，则称函数$f(x)$在D上封闭.

(1)若下列函数的定义域为$D=(0,1)$，试判断其中哪些在D上封闭，并说明理由．$f_1(x)=2x-1$，$f_2(x)=2^x-1$.

(2)若函数$g(x)=\frac{5x-a}{x+2}$的定义域为$(1,2)$，是否存在实数a，使得$g(x)$在其定义域$(1,2)$上封闭？若存在，求出所有a的值，并给出证明：若不存在，请说明理由.

(3)已知函数$f(x)$在其定义域D上封闭，且单调递增．若$x_0\in D$且$f(f(x_0))=x_0$，求证：$f(x_0)=x_0$.

【答案】解：(1)在$f_1(x)=2x-1$中，对于定义域D内的任意一个自变量x_0,

都有函数值$f_1(x_0)\in(-1,1)\notin D_1$,

故函数$f_1(x)=2x-1$在D_1上不封闭；

在$f_2(x)=2^x-1$中，$2^x-1\in(0,1)$，在D_1上封闭.

(2)$g(x)=\frac{5x-a}{x+2}$的定义域为$(1,2)$，对称中心为$(-2,5)$,

当$a+10>0$时，函数$g(x)=\frac{5x-a}{x+2}$在D_2上为增函数，

只需$\begin{cases}g(1)\geq 1\\ g(2)\leq 2\\ a>-10\end{cases}$，解得$a=2$

当$a+10<0$时，函数$g(x)=\frac{5x-a}{x+2}$在D_2上为减函数，

只需$\begin{cases}g(1)\leq 2\\ g(2)\geq 1\\ a<-10\end{cases}$，解得$a\in\varnothing$

综上，所求a的值等于 2.

证明：(3)$\because$函数$f(x)$在其定义域D上封闭，且单调递增.

$x_0 \in D$且$f(f(x_0)) = x_0$,

∴根据单调函数性质$f(x_0) \in D$，则有唯一的$x_0 \in D$,

$\therefore f(x_0) = x_0$.

【解析】(1)根据定义域，求得函数的定义域，利用新定义，即可得到结论；

(2)分类讨论，确定函数的单调性，建立不等式组，可求a的值.

(3)函数$f(x)$在其定义域D上封闭，且单调递增，根据单调函数性质$f(x_0) \in D$，则有唯一的$x_0 \in D$，由此能证明$f(x_0) = x_0$.

本题以新定义函数为载体，考查新定义，考查学生的计算能力，关键是对新定义的理解，有一定的难度.