

18. 已知函数 $f(x) = |2x - 1| - |ax - 3|$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 若 $f(x) \leq 2m^2 - m - 1$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(2) 关于 x 的不等式 $f(x) \geq 3x - 3$ 在 $x \in [1, 2]$ 上有解, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) $f(x) = |2x - 1| - |2x - 3| \leq 2$

$$\therefore 2m^2 - m - 1 \geq 2$$

$$2m^2 - m - 3 \geq 0$$

$$\therefore m \in [-1, \frac{3}{2}]$$

(2) 在 $x \in [1, 2]$ 上, $f(x) = 2x - 1 - |ax - 3| \geq 3x - 3$

$$\therefore x - 2 \leq |ax - 3|$$

$$\therefore 2 - x \geq |ax - 3|$$

$$\therefore x - 2 + |ax - 3| \leq 0 \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上有解}$$

$$\text{① } x = 1 \text{ 时, } -1 + |a - 3| \leq 0 \Rightarrow |a - 3| \leq 1$$

$$\therefore 2 \leq a \leq 4$$

$$\therefore a \in [2, 4]$$

即 $\exists x \in [1, 2], |ax - 3| \leq 2 - x$

$$\exists x \in [1, 2], x - 2 \leq ax - 3 \leq 2 - x$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{x} \leq a \leq \frac{5}{x} - 1, x \in [1, 2]$$

$$\therefore a \in [\frac{3}{2}, 4]$$

过程:

19. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax - (2a + 2)$.

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) > x$.

(2) 若 $f(x) + 3 \geq 0$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) $\therefore x^2 - (2a + 1)x - (2a + 2) > 0$

$$\therefore (x + 1)(x - 2a - 2) > 0$$

$$\text{① 若 } a = -\frac{3}{2}, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

$$\text{② 若 } a > -\frac{3}{2}, x \in (-\infty, -1) \cup (2a + 2, +\infty)$$

$$\text{③ 若 } a < -\frac{3}{2}, x \in (-\infty, 2a + 2) \cup (-1, +\infty)$$

(2) $\therefore x^2 - 2ax - (2a + 1) \geq 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立

$$\text{① } \Delta = 4a^2 + 4(2a + 1) \leq 0$$

$$\therefore 4a^2 + 8a + 4 \leq 0$$

$$a^2 + 2a + 1 \leq 0$$

$$\therefore a \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$$

$$\text{② } \begin{cases} \frac{2a}{2} \leq -1 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a \leq -1 \\ 1 + 2a - 2a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore a \in (-\infty, -1]$$

$$\therefore \text{取交集得 } a \in (-\infty, -1] \cup [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$$

$$\therefore a \in (-\infty, -1]$$

$$\therefore \text{取交集得 } a \in (-\infty, -1] \cup [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$$