2020 年中国科学技术大学创新班初试数学试题

1．若 $z+\overline{z}=1$，则 $|z+1|-|z-\mathrm{i}|\leqslant 1$ 的取值范围是________________.

2．若 $|5x+6y|+|9x+11y|<1$，则其围成图形的面积 $S=$________________.

3． $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x}$ 的离心率是________________.

4．若 $a_1=1$， $a_2=3$， $a_n=\dfrac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}+a_{n-1}$，则 $a_n=$________________.

5．若 $x^2-y^2=4p^2$， x， y 为正整数， p 为素数，则 $x^3-y^3=$________________.

6．若 $a=2020^{2020}$， $b=\sqrt{2019^{2021}\cdot 2021^{2019}}$， $c=\dfrac{1}{2}\left(2019^{2021}+2021^{2019}\right)$，则 a， b， c 的大小顺序是________________.

7．若$f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2+k^2$，且$a$，$b$，$c\in\left[0,1\right]$，$f\left(a\right)$，$f\left(b\right)$，$f\left(c\right)$为三角形的三边，则$k$的取值范围是________________.

8．已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$为$1,2,\cdots,n$的排列，若$i<j$且$a_i<a_j$，则$\left(a_i,a_j\right)$为顺序对，设X为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的顺序对的个数，则$E\left(x\right)=$________________.

9．已知$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，求$y=3\sin^2x-2\sin2x+2\sin x-\cos x$的取值范围.

10．已知$f\left(x\right)=x^3+ax^2-x+1-a$，求所有$a\in\mathbf{R}$，使得对$\forall x\in\left[-1,1\right]$，$\left|f\left(x\right)\right|\geqslant|x|$恒成立.

11．已知$1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<C\left(n+1\right)^{\frac{3}{2}}$，证明：当$C=\dfrac{2}{3}$时，不等式成立，且当$C<\dfrac{2}{3}$时，该不等式不成立.

中国科学技术大学2020年创新班初试数学试题解析

1. 若$z+\bar{z}=1$，则$|z+1|-|z-\mathrm{i}|\leqslant 1$的取值范围是________________.

参考答案：$\left(-1,\sqrt{2}\right]$.

解析：由题可设$z=\dfrac{1}{2}+b\mathrm{i}\left(b\in\mathbf{R}\right)$，则$|z+1|-|z-i|=\sqrt{\dfrac{9}{4}+b^2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(b-1\right)^2}$.

设$P\left(0,b\right)$，$A\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，$B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$，则$|z+1|-|z-\mathrm{i}|=PA-PB$.

可得$PA-PB\leqslant AB=\sqrt{2}$，

（1）当P，A，B三点共线，如图 1-1，即点P与点C重合时，等号成立.

（2）当点P落在点C上方时，$PA-PB\in\left(1,\sqrt{2}\right)$.

（3）当点P落在点C下方时，如图 1-2，设点D，E在y轴上，点E比D更远离C点，DA与EB交于点M，由于

$\left(EA-EB\right)-\left(DA-DB\right)=\left(EA-EM-MB\right)-\left(DM+MA-DB\right)=\left(EA-EM-MA\right)+$
$\left(DB-DM-MB\right)<0$，因而点P从点C越往下移，$PA-PB$越小.

由于$\lim\limits_{b\to-\infty}\left(\sqrt{\dfrac{9}{4}+b^2}-\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(b-1\right)^2}\right)=\lim\limits_{b\to-\infty}\dfrac{2b+1}{\sqrt{\dfrac{9}{4}+b^2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\left(b-1\right)^2}}=\lim\limits_{b\to-\infty}\dfrac{-2-\dfrac{1}{b}}{\sqrt{\dfrac{9}{4b^2}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{4b^2}+\left(1-\dfrac{1}{b}\right)^2}}=-$，

可得$PA-PB\in\left(-1,\sqrt{2}\right)$. 综上，取值范围为$\left(-1,\sqrt{2}\right]$.

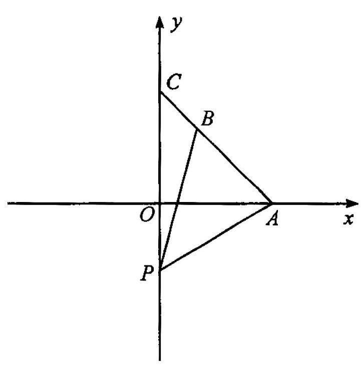

图 1-1

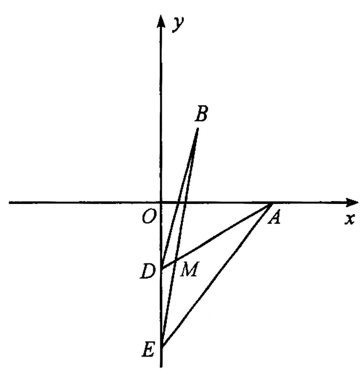

图 1-2

2. 若$|5x+6y|+|9x+11y|<1$，则其围成图形的面积$S=$________________.

参考答案：2.

解析：分类讨论，数形结合.

当$5x+6y\geqslant 0$，且$9x+11y\geqslant 0$时，代入可得$14x+17y\leqslant 1$，联立方程组$\begin{cases}5x+6y=0,\\14x+17y=1,\end{cases}$求得$A(-6,5)$. 以及$\begin{cases}9x+11y=0,\\14x+17y=1,\end{cases}$求得$B(11,-9)$.

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{14^2+17^2}}\times\sqrt{17^2+14^2}=\frac{1}{2}$（如图2所示）.

围成的图形关于原点中心对称，是以AB为边的平行四边形，则$S=4\times\frac{1}{2}=2$.

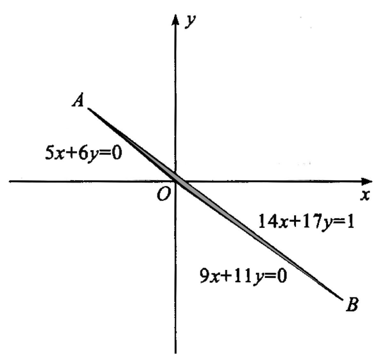

图 2

3. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}$的离心率是________________.

参考答案：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

解析：由于$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，

因而两条渐近线分别为$y=0$和$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$，两条渐近线的夹角为$\frac{\pi}{3}$，因而

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 若$a_1=1$，$a_2=3$，当$n\geqslant 3$时，有 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}+a_{n-1}$，则$a_n=$________________.

参考答案： $\prod\limits_{i=1}^{n}\left(2^i-1\right)$.

解析： 由题可得$a_n\neq 0$，构造$b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}(n\geqslant 2)$，可得$b_n=2b_{n-1}+1(n\geqslant 3)$，

进一步可得$b_n+1=2\left(b_{n-1}+1\right)$.

因而$b_n+1=\left(b_2+1\right)\times 2^{n-2}=2^n$.

进一步可得，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^n-1(n\geqslant 2)$，累乘法求得$a_n=\prod\limits_{i=1}^{n}\left(2^i-1\right)$.

5. 若$x^2-y^2=4p^2$，其中x，y为正整数，p为素数，则$x^3-y^3=$________________.

参考答案： $3\left(2p^4+1\right)$.

解析： 由题意可得$(x+y)(x-y)=4p^2$，由于p为素数，$x+y$，$x-y$同奇偶性，$x+y>x-y$，

因而$\begin{cases}x+y=2p^2,\\x-y=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=p^2+1,\\y=p^2-1,\end{cases}$ 整理得$x^3-y^3=(x-y)\left((x+y)^2-xy\right)=3\left(2p^4+1\right)$.

6. 若$a=2020^{2020}$，$b=\sqrt{2019^{2021}\cdot 2021^{2019}}$，$c=\dfrac{1}{2}\left(2019^{2021}+2021^{2019}\right)$，则$a$，$b$，$c$的大小顺序是________________.

参考答案： $b<a<c$.

解析： 利用二元均值不等式，显然$c>b$.

$b=\sqrt{(2020-1)^{2021}\cdot(2020+1)^{2019}}=\sqrt{\left(2020^2-1\right)^{2019}\cdot\left(2020-1\right)^2}<\sqrt{2020^{4038}\cdot 2020^2}=2020^{2020}=a$.

因为$\left(\dfrac{2020}{2019}\right)^{2019}=\left(1+\dfrac{1}{2019}\right)^{2019}=1+\mathrm{C}_{2019}^{1}\cdot\dfrac{1}{2019}+\mathrm{C}_{2019}^{2}\cdot\dfrac{1}{2019^2}+\mathrm{C}_{2019}^{3}\cdot\dfrac{1}{2019^3}+\cdots+\mathrm{C}_{2019}^{2019}\cdot\dfrac{1}{2019^{2019}}=$

由于$2020<\sqrt[2020]{1009}\times 2020$，可得$a=2020\times 2020^{2019}<1009\times 2019^{2020}<\dfrac{1}{2}\times 2019^{2021}<c$.

综上可得，$b<a<c$.

7. 若 $f(x)=(x-1)^2+k^2$，且 a，b，$c\in[0,1]$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为三角形的三边，则 k 的取值范围是________.

参考答案： $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

解析： 由于是三角形的三边，因而 $2f(x)_{\min}>f(x)_{\max}$.

由于 $f(x)_{\min}=f(1)=k^2$，$f(x)_{\max}=f(0)=k^2+1$，因而 $2k^2>k^2+1$，解得 $k\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

8. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的排列，若 $i<j$ 且 $a_i<a_j$，则 (a_i,a_j) 为顺序对，设 X 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的顺序对的个数，则 $E(x)=$________________.

参考答案： $\dfrac{\mathrm{C}_n^2}{2}$.

解析： 由于 (a_i,a_j) 与 (a_j,a_i) 对称，其个数相同.因而 $E(x)=\dfrac{\mathrm{C}_n^2}{2}$.

9．已知 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，求 $y=3\sin^2x-2\sin2x+2\sin x-\cos x$ 的取值范围.

参考答案： $\left[-\dfrac{5}{4},5\right]$

解析： 换元法.

$y=3\sin^2x-2\sin2x+2\sin x-\cos x=(2\sin x-\cos x)^2+2\sin x-\cos x-1$.

换元令 $t=2\sin x-\cos x$，其中 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则 $-1\leqslant t\leqslant2$，因而 $y=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}\in\left[-\dfrac{5}{4},5\right]$.

10．已知 $f(x)=x^3+ax^2-x+1-a$，求所有 $a\in\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in[-1,1]$，都有 $|f(x)|\geqslant|x|$ 恒成立.

参考答案： $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$.

解析： 由题可得，$f^2(x)\geq x^2$，代入整理可得，

$(x+1)(x-1)\left[x^2+(a-1)x+1-a\right]\left[x^2+(a+1)x+a-1\right]\geqslant0$.

当 $x=\pm1$ 时，$a\in\mathbf{R}$，

当 $x\in(-1,1)$ 时，可得 $\left[x^2+(a-1)x+1-a\right]\left[x^2+(a+1)x+a-1\right]\leqslant 0$.

$$\left(a+x+\frac{1}{x-1}\right)\left(a+x-\frac{1}{x+1}\right)\geqslant 0.$$

分类讨论，参变量分离法，转化成求解函数最值.

（1）$a\ge -\left(x+\frac{1}{x-1}\right), a\ge -\left(x-\frac{1}{x+1}\right)$

（2）$a\le -\left(x+\frac{1}{x-1}\right), a\le -\left(x-\frac{1}{x+1}\right)$

综上可求得 $a\leqslant -\frac{1}{2}$.

11．已知 $1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<C(n+1)^{\frac{3}{2}}$，证明：当 $C=\frac{2}{3}$ 时，条件中的不等式成立，当 $C<\frac{2}{3}$ 时，该不等式不成立.

参考答案：不等式放缩.

解析：考虑积分不等式放缩，由于 $\int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x<1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\int_1^{n+1}\sqrt{x}\mathrm{d}x$，

因而 $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$.

$$C>\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}>\frac{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

函数 $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}$ 单调递增，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$，因而 $C\geqslant\frac{2}{3}$.

当 $C<\frac{2}{3}$ 时，不等式不成立.

综上即证之.

解：$|f(x)|\geqslant|x| \iff f(x)^2\geqslant x^2 \iff (f(x)+x)(f(x)-x)\geqslant 0$

$\iff (x^3+ax^2-x+1-a+x)(x^3+ax^2-x+1-a-x)\geqslant 0$

$\iff [(x+1)(x^2-x+1)+a(x+1)(x-1)][(x^3-2x+1)+a(x^2-1)]\geqslant 0$

$\iff (x+1)[x^2-x+1+ax-a][(x-1)(x^2+x-1)+a(x+1)(x-1)]\geqslant 0$

$\iff (x+1)(x-1)[x^2+(a-1)x-(a-1)][x^2+(a+1)x+a-1]\geqslant 0$

$x=\pm1$时，$a\in R$；

$-1<x<1$时，$[a(x-1)+x^2-x+1][a(x+1)+x^2+x-1]\leqslant 0$

$[a+\frac{x^2-x+1}{x-1}][a+\frac{x^2+x-1}{x+1}]\geqslant 0$

$\therefore$ ① $\begin{cases} a+x+\frac{1}{x-1}\geqslant 0 \\ a+x-\frac{1}{x+1}\geqslant 0 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} a+x+\frac{1}{x-1}\leqslant 0 \\ a+x-\frac{1}{x+1}\leqslant 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} a\geqslant -(x+\frac{1}{x-1}) \\ a\geqslant -(x-\frac{1}{x+1}) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a\leqslant -(x+\frac{1}{x-1}) \\ a\leqslant -(x-\frac{1}{x+1}) \end{cases}$

对$\forall x\in(-1,1)$恒成立.

注意到$x\to 1^-$时，$-(x+\frac{1}{x-1})\to+\infty$，

$\therefore$ 只能：$\begin{cases} a\leqslant -(x+\frac{1}{x-1}) \\ a\leqslant -(x-\frac{1}{x+1}) \end{cases}$

又 $(-(x+\frac{1}{x-1}))_{min}=1$ （$x=0$时等号成立），

$-x+\frac{1}{x+1}>-\frac{1}{2}$，且$x\to1$时，$-x+\frac{1}{x+1}\to-\frac{1}{2}$，

$\therefore a\leqslant-\frac{1}{2}$.

综上，$a\leqslant-\frac{1}{2}$.