1. $\exists x_0$ 使 $f(x_0)+f(-x_0)=0 \Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$ 有解

$h(x)=f(x)+f(-x)=-a\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)-2$.

$a=0$ 时 $h(x)=-2$. 显然无解

$a\neq 0$ 时 $h(x)=0 \Leftrightarrow -2=a\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)$，显然 $a<0$ 才有解

$\because e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2$，当仅当 $e^x=1$，即 $x=0$ 取等

$\therefore a\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)\leq 2a$，当 $x=0$ 取到最大值

$\therefore -2\leq 2a \quad \therefore a\geq -1$

$\because a<0 \quad \therefore a\in[-1,0)$