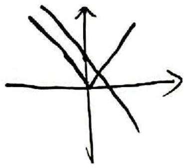
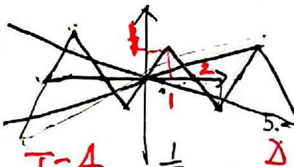
专题练习 5：函数视角下的方程问题与幂指对

填空题:



1. 已知函数 $y=\frac{1}{8-2^x}$ 的图像关于点 P 对称, 则点 P 的坐标为 $(3,\frac{1}{16})$

2. 已知方程 $|x|=ax+1$ 有一正解，且无负解，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$



3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且对于任意的 $x\in\mathbb{R}$, $f(1+x)-f(1-x)=0$ 恒成立; 当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=x$. 若方程 $f(x)=ax$ 恰好有 5 个不同的解, 则实数 a 的取值范围为 $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{7})\cup\{\frac{1}{5}\}$

$T=4$ $\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{7}$

4. 若 $\log_4 27=m$, $\log_3 25=n$, 则 $\lg 2$ 可用 m,n 表示为 $\frac{3}{mn+3}$

$\log_3 5=\frac{n}{2}$ $\frac{3}{2}\log_2 3=m$ $\log_2 3=\frac{2}{3}m$ $\lg 2=\frac{\log_3 2}{\log_3 10}=\frac{\frac{3}{2m}}{\frac{3}{2m}+\frac{n}{2}}$

5. (选) $\frac{1-2\log_{xy}(z)\cdot\log_{xz}(y)\cdot\log_{yz}(x)}{\log_{xy}(z)\cdot\log_{xz}(y)+\log_{xz}(y)\cdot\log_{yz}(x)+\log_{yz}(x)\cdot\log_{xy}(z)}=$ 1

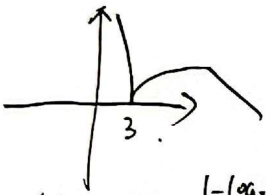
$x=1.\ y=2.\ z=3$

6. 若幂函数 $y=(m^2-3m+1)x^{-m^2+2m+3}$ 的定义域为 R, m 的值为 2 0

$m=1/2.$

7. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时, 幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{-5m-3}$ 为增函数, 则实数 $m=$ -1

$m=2/-1.$



8. 已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}|log_3x-1|, & 0<x\leqslant 9\\ 4-\sqrt{x}, & x>9\end{cases}$, 设 a,b,c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$, 求 abc 的取值范围. $(81,144)$

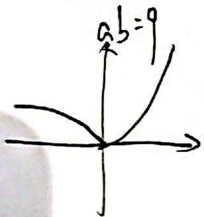
9. 关于 x 的方程 $|3^x-1|=2a$ 只有一个解，则 a 的取值范围是 $\{0\}\cup[\frac{1}{2},+\infty)$

$|\log_3 a-1|=1-\log_3 b$ $x_1+x_2>2$

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_2x| & 0<x<2\\ x^2-8x+13 & x\geqslant 2\end{cases}$, 若 $f(x)=a$ 有四个解 x_1,x_2,x_3,x_4, 则 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是 $(10,\frac{21}{2})$

$x_3+x_4=8.$ $x_1x_2=1$

选择题:

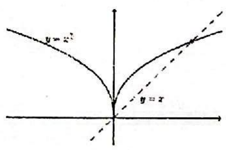


$ab=9$

1. 如图是函数 $y=x^{\frac{m}{n}}(m,n\in\mathbb{N}^*$ 且互质) 的图像, 则 ……………………………… (C)

(A) m,n 是奇数, 且 $\frac{m}{n}<1$　　(B) m 是偶数, n 是奇数, 且 $\frac{m}{n}>1$

(C) m 是偶数, n 是奇数, 且 $\frac{m}{n}<1$　　(D) m 是奇数, n 是偶数, 且 $\frac{m}{n}>1$



$2a\in\{0\}\cup[1,+\infty)$

2. 下列命题中, 真命题的是 ……………………………………………… (C)

(A) 幂函数中不存在既不是奇函数, 又不是偶函数的函数;

(B) 如果一个幂函数不是偶函数, 那么它一定是奇函数;

(C) 图像不经过 $(-1,1)$ 的幂函数, 一定不是偶函数;

(D) 如果两个幂函数有三个公共点, 那么这两个函数一定相同.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

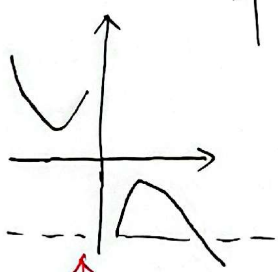
146

解答题:

1. 已知 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+k(x+\frac{1}{x})+11, x\in(0,+\infty)$，若 $f(x)=0$ 有两个解，求实数 k 的取值范围.

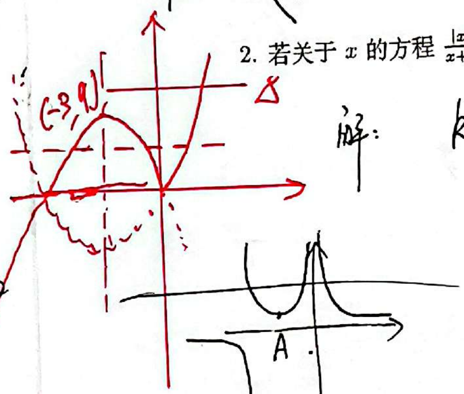
解: $x^2+\frac{1}{x^2}+k(x+\frac{1}{x})+11=0$

$k=-\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+11}{x+\frac{1}{x}}$，设 $x+\frac{1}{x}=t$. $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. 其中 $t\in[2,+\infty)$.



$\therefore k=-t-\frac{9}{t}$ $\in(-\infty,-\frac{13}{2})\cup\{-6\}$.

2. 若关于 x 的方程 $\frac{|x|}{x+6}=kx^2$ 有四个不同的实数解，求实数 k 的取值范围.



解: $k=\frac{1}{|x|(x+6)}=\begin{cases}\frac{1}{x^2+6x}, & x>0\\ \frac{1}{-x^2-6x}, & x<0\end{cases}$，当 $x=0$ 时，显然成立.

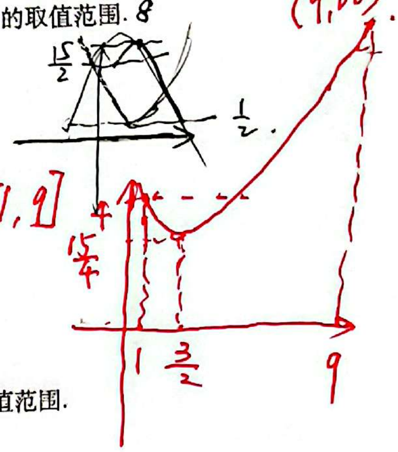
$\frac{1}{k}=\begin{cases}x^2+6x, & x>0\\ -x^2-6x, & x<0\end{cases}$

A: $(-3,\frac{1}{9})$.

$\frac{1}{k}\in(0,9)$

$\therefore k\in(\frac{1}{9},+\infty)$.

3. 关于 x 的方程 $k\cdot 9^x-k\cdot 3^{x+1}+6(k-5)=0$ 在 $[0,2]$ 上有唯一解，求实数 k 的取值范围. 8



解: 设 $3^x=t$. $t\in[1,9]$.

$kt^2-3kt+6k=30$

$k=\frac{30}{t^2-3t+6}$

$t^2-3t+6=\frac{30}{k}$，$t\in[1,9]$

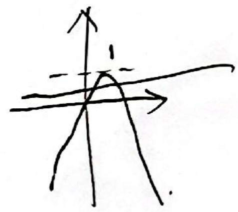
$\Rightarrow k\in\{8\}\cup[\frac{1}{2},\frac{15}{2})$

4. 已知关于 x 的方程 $(2^x-1)^2-2\cdot|2^x-1|+k=0$ 有三个根，求实数 k 的取值范围.

解: 记 $|2^x-1|=t$. 则当 $t\in\{0\}\cup[1,+\infty)$ 时 有且仅有一个根

当 $t\in(0,1)$ 时，有两个根

$k=-t^2+2t$.



$\therefore k\in(0,1)$.

5. 已知二次函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$，是否存在实数 $m,n(m<n)$，使得 $f(x)$ 的定义域为 $[m,n]$，值域为 $[km,kn](k>1)$.

m.n为 $-\frac{1}{2}t^2+t=kt$ 两根.

解: 1° $n\le 1$.

$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}m^2+m=km\\ -\frac{1}{2}n^2+n=kn\end{cases}$ $\begin{cases}m=2-2k\\ n=0\end{cases}$

2° $n>1$. $m<1$

$\therefore kn=f(1)=\frac{1}{2}$. $n=\frac{1}{2k}$ (舍).

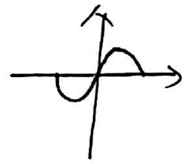
3° $m\ge 1$

$\begin{cases}-\frac{1}{2}m^2+m=kn\\ -\frac{1}{2}n^2+n=km\end{cases}$

$m+n=2k+2 \Rightarrow -\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}n^2=(k-1)(2k+2)>0$ (舍)

综上. $m=2-2k$. $n=0$

6. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域恰是 $[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$，则称区间 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的一个倒域区间. 求函数 $g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2+2x & -2\leqslant x<0\end{cases}$ 的所有倒域区间.



解: 分为 $b\le -1$, $a<-1$. $b>-1$, $b\le 1$. $a>0$ 和 $a\ge 1$

当 $b\le -1$ 时. $-a^2+2a=\frac{1}{a}$. $-b^2+2b=\frac{1}{b}$, $b=-1$, $a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

当 $a<-1$. $b\ge -1$ 时. $\frac{1}{b}=-1$. $b=-1$. $-a^2+2a=\frac{1}{a}$, $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍)

由对称性, 倒域区间为 $[-\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1]$ 和 $[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

7. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域恰是 $[m,n]$，则称区间 $[m,n]$ 是 $f(x)$ 的一个等域区间. 若区间 $[m,n]$ 是函数 $y=\frac{(a+1)x-\frac{1}{a}}{ax}(a\neq 0)$ 的一个等域区间. 求 $n-m$ 的最大值.

$\frac{m-n}{a^2mn}=n-m$

解: $y=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$, 在R上↑.

$\therefore \begin{cases}\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2m}=m\\ \frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2n}=n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m+n=\frac{a+1}{a}\\ mn=\frac{1}{a^2}>0, m,n同号\end{cases}$ (此时 $a=3$).

$\Delta>0$、$a\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

$n-m=\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{a^2}-\frac{4}{a^2}}$

$=\sqrt{-\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}+1}\le\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

8. 求函数 $y=3\cdot 4^x-20\cdot 2^x+3\cdot 4^{-x}-20\cdot 2^{-x}$ 的最小值.

解: 设 $2^x=t$. $(t>0)$ $y=3t^2-20t+\frac{3}{t^2}-\frac{20}{t}=3(t^2+\frac{1}{t^2})-20(t+\frac{1}{t})$.

设 $t+\frac{1}{t}=m$. $t^2+\frac{1}{t^2}=m^2-2$, $m\ge 2$.

$\therefore y=3m^2-20m-6\ge-\frac{118}{3}$, 此时 $m=\frac{10}{3}$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

2t x -1
t 1

9. 若 $a^{2x}+\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}\leqslant 0(a>0$ 且 $a\neq 1)$, 求函数 $y=2a^{2x}-3a^x+4$ 的值域.

解. 设 $a^x=t$. $t>0$. $t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\leq 0$.

$2t^2+t-1\leq 0 \Rightarrow t\in[-1,\frac{1}{2}] \Rightarrow t\in(0,\frac{1}{2}]$.

$y=2t^2-3t+4\in[3,4)$

10. 已知 x 满足不等式 $2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+7\log_{\frac{1}{2}}x+3\leqslant 0$, 求 $f(x)=\log_2\frac{x}{2}\log_2\frac{x}{4}$ 的最大值与最小值.

2x -1
x -3

解: 设 $\log_{\frac{1}{2}}x=t$. $2t^2+7t+3\leq 0$.

$\frac{1}{2}, 3$

$t\in[-3,-\frac{1}{2}] \Rightarrow x\in[\sqrt{2},8]$.

$f(x)=\log_2\frac{x}{2}\log_2\frac{x}{4}$.

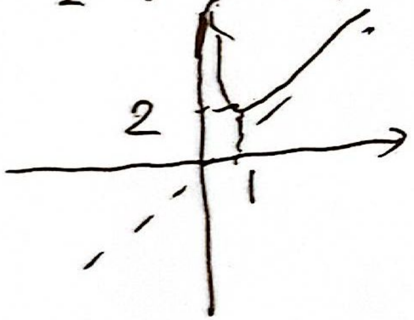
$=(\log_2 x-\log_2 2)(\log_2 x-\log_2 4)=\log_2^2 x-3\log_2 x+2$ $(\log_2 x\in[\frac{1}{2},3])$.

$\in[-\frac{1}{4},2]$.

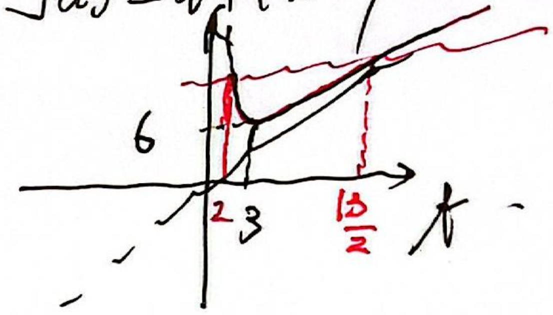
$\therefore f(x)_{max}=2$. $f(x)_{min}=-\frac{1}{4}$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

1、 令 $t = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, $t \in [2, +\infty)$.



$g(x) = t^2 + kt + 9 = 0$, $-k = t + \frac{9}{t}$.



$-k = 6$ or $-k > \frac{13}{2}$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

专题练习 5

填空题:

1. 已知函数 $y=\frac{1}{8-2^x}$ 的图像关于点 P 对称, 则点 P 的坐标为 $\underline{(3,\frac{1}{16})}$

   解析　设 $P(a,b)$, 因为 $x\neq 3$, 故 $a=3$.
   $2b=f(2)+f(4)$, 于是 $b=\frac{1}{16}$.
   注: $f(x)$ 的对称中心是 (a,b) 或对称轴是 $x=a$ 的必要条件均为 $f(x)$ 的定义域关于 a 对称.

2. 已知方程 $|x|=ax+1$ 有一正解，且无负解，则实数 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,-1]}$

   解析　将方程的根转化为 $y=|x|$ 与 $y=ax+1$ 的交点的横坐标.$y=ax+1$ 过 $(0,1)$，斜率为 a，故当 $a\in(-\infty,-1]$ 时，两函数在 $x>0$ 时无交点，而在 $x<0$ 时有一个交点，满足要求.

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 且对于任意的 $x\in\mathbb{R}$, $f(1+x)-f(1-x)=0$ 恒成立; 当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=x$. 若方程 $f(x)=ax$ 恰好有 5 个不同的解, 则实数 a 的取值范围为 $\underline{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{7})\cup\{\frac{1}{5}\}}$.

   解析　$f(x)$ 图像关于原点对称, 关于直线 $x=1$ 对称, 可知 4 时 $f(x)$ 的一个周期.
   $y=ax$ 的图像是过原点的直线，随着 a 的变化，其斜率变化．绘制草图后可以判断要分为 $a>0$ 与 $a<0$ 两种情形, 不难求得 $a=\frac{1}{5}$ 或 $a\in(-\frac{1}{3},-\frac{1}{7})$.

4. 若 $\log_4 27=m$, $\log_3 25=n$, 则 $\lg 2$ 可用 m,n 表示为 $\underline{\frac{3}{3+mn}}$.

   解析　$m=\frac{3log_2 3}{2}$，$n=\frac{2log_2 5}{log_2 3}$，$lg2=\frac{1}{1+log_2 5}$，故 $log_2 5=\frac{m\cdot n}{2}$，$lg2=\frac{3}{3+mn}$
   注: **对数运算表示类的题目，首先要统一底数，选取题干中的一个质因子作为底数，然后将所有的对数式都拆彻底（底数和真数互质），然后再凑.**

5. $\frac{1-2\log_{xy}(z)\cdot\log_{xz}(y)\cdot\log_{yz}(x)}{\log_{xy}(z)\cdot\log_{xz}(y)+\log_{xz}(y)\cdot\log_{yz}(x)+\log_{yz}(x)\cdot\log_{xy}(z)}=\underline{\quad 1\quad}$

   解析　考虑换底，$log_{xy}z=\frac{log_x z}{log_x y+1},log_{yz}x=\frac{1}{log_x y+log_x z},log_{zx}y=\frac{log_x y}{log_x z+1}$
   故设 $a=log_x y,b=log_x z$
   原式等于 $\frac{1-2\cdot\frac{b}{a+1}\cdot\frac{a}{b+1}\cdot\frac{1}{a+b}}{\frac{b}{a+1}\cdot\frac{a}{b+1}+\frac{a}{b+1}\cdot\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b}\cdot\frac{b}{a+1}}=\frac{(a+1)(b+1)(a+b)-2ab}{ab(a+b)+a(a+1)+b(b+1)}=1$

6. 若幂函数 $y=(m^2-3m+1)x^{-m^2+2m+3}$ 的定义域为 $\boldsymbol{R}$，m 的值为 $\underline{\quad 0\quad}$

   解析　$m^2-3m+1=1$ 解得 $m=0$ 或 3，$m=0$ 的时候，$y=x^3$，符合要求，当 $m=3$ 的时候，$y=x^0$，定义域不为 $\boldsymbol{R}$.

7. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{-5m-3}$ 为增函数，则实数 $m=\underline{\quad -1\quad}$

   解析　由幂函数概念可知 $m^2-m-1=1$，解得 $m=-1$或2，又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，所以有 $-5m-3>0$，因此 $m=-1$

8. 已知定义在 R^+ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}|log_3 x-1|, & 0<x\leqslant 9\\ 4-\sqrt{x}, & x>9\end{cases}$，设 a,b,c 是三个互不相同的实数，满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，求 abc 的取值范围.

   解析　不妨设 $a<b<c$，易知 $0<a<3<b<9<c$，因此有 $1-log_3 a=log_3 b-1$，即 $ab=9$. 故 $f(a)\in(0,1)$，因此 $c\in(9,16)$，因此有 $abc\in(81,144)$

9. 关于 x 的方程 $|3^x-1|=2a$ 只有一个解，则 a 的取值范围是 $\underline{[\frac{1}{2},+\infty)\cup\{0\}}$.

   解析　画图即可，$2a=1$ 时是函数的渐近线，可以取得. 不要忘记 $a=0$ 时候也是只有一个解!

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|log_2x| & 0<x<2\\ x^2-8x+13 & x\geqslant 2\end{cases}$，若 $f(x)=a$ 有四个解 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围是 $\underline{(10,\frac{21}{2})}$.

解析 $x_1\cdot x_2=1,x_3+x_4=8,x_1+x_2+x_3+x_4=8+x_2+\frac{1}{x_2},x_2\in(1,2)$, 故 $x_1+x_2+x_3+x_4\in(10,\frac{21}{2})$

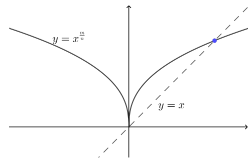
注: **对数函数翻折时，总有和常函数交点横坐标乘积为定值**.

选择题:

1. 如图是函数 $y=x^{\frac{m}{n}}(m,n\in\mathbb{N}^*$ 且互质) 的图像, 则 ································· (C)

(A) m,n 是奇数, 且 $\frac{m}{n}<1$　　(B) m 是偶数, n 是奇数, 且 $\frac{m}{n}>1$

(C) m 是偶数, n 是奇数, 且 $\frac{m}{n}<1$　　(D) m 是奇数, n 是偶数, 且 $\frac{m}{n}>1$



2. 下列命题中, 真命题的是 ·· (C)

(A) 幂函数中不存在既不是奇函数, 又不是偶函数的函数;

(B) 如果一个幂函数不是偶函数, 那么它一定是奇函数;

(C) 图像不经过 $(-1,1)$ 的幂函数, 一定不是偶函数;

(D) 如果两个幂函数有三个公共点, 那么这两个函数一定相同.

解答题:

1. 已知 $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}+k(x+\frac{1}{x})+11,x\in(0,+\infty)$，若 $f(x)=0$ 有两个解，求实数 k 的取值范围.

解析 首先考虑换元 $t=x+\frac{1}{x}$，$f(x)=g(t)=t^2+k\cdot t+9$，当 $t=2$ 时，只对应一个 x，当 $t>2$ 时, 对应着两个 x. 故若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$, 有两个零点可以转化为 $g(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 有一个零点，进一步转化为 $y=-k$ 与 $y=t+\frac{9}{t}$ 在 $(2,+\infty)$ 有一个交点. 因此 $k\in(-\infty,-\frac{13}{2})\cup\{-6\}$

注: **换元后及时判断新元的取值范围，并且分析清楚换元前后的对应关系!**

2. 若关于 x 的方程 $\frac{|x|}{x+6}=kx^2$ 有四个不同的实数解，求实数 k 的取值范围.

解析 易知必有一根为 0

参变分离有 $\frac{1}{k}=\frac{(x+6)x^2}{|x|}=\begin{cases}\frac{(x+6)x^2}{x}, & x>0\\ -\frac{(x+6)x^2}{x}, & x<0\end{cases}$ 由于原方程必有一根为 0，故可以转化为方程 $\frac{1}{k}=\begin{cases}(x+6)x, & x>0\\ -(x+6)x, & x<0\end{cases}$ 有三个不等实根. 因此 $\frac{1}{k}\in(0,9)$，即 $k\in(\frac{1}{9},+\infty)$

3. 关于 x 的方程 $k\cdot 9^x-k\cdot 3^{x+1}+6(k-5)=0$ 在 $[0,2]$ 上有唯一解, 求实数 k 的取值范围.

解析 令 $t=3^x\in[1,9]$, t 与 x 一一对应. 于是关于 t 的方程 $kt^2-3kt+6(k-5)=0$ 在 $[1,9]$ 上有唯一解.

于是 $\frac{30}{k}=t^2-3t+6$. 结合图像可得 $\frac{30}{k}\in(4,60]\cup\{\frac{15}{4}\}$, 即 $k\in[\frac{1}{2},\frac{15}{2})\cup\{8\}$.

注: 此处参变分离的方式值得注意!

4. 已知关于 x 的方程 $(2^x-1)^2-2\cdot|2^x-1|+k=0$ 有三个根, 求实数 k 的取值范围.

解析 换元 $t=2^x-1$，$t\in(-1,+\infty)$，t 与 x 一一对应. 故原方程有三个解即 $t^2-2|t|+k=0$ 有三个根，即 $y=k$ 与 $y=2|t|-t^2$ 有三个交点. 函数 $y=2|t|-t^2$ 在 $(-1,0)$ 单调递减，值域为 $(0,1)$，在 $(0,1)$ 单调递增，值域为 $(0,1)$，在 $[1,+\infty)$ 单调递减，值域为 $(-\infty,1]$，故 $k\in(0,1)$ 时两函数有三个交点.

5. 已知二次函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$，是否存在实数 $m,n(m<n)$, 使得 $f(x)$ 的定义域为 $[m,n]$, 值域为 $[km,kn](k>1)$.

解析　$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}\times(x-1)^2+\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}\ \therefore kn\leqslant\frac{1}{2},\therefore m<n<\frac{1}{2k}$ 又 $\because$ 函数的对称轴为 $x=1\ \therefore f(x)$ 在 $[m,n]$ 单调递增则有 $f(m)=km,f(n)=kn$ 故 m,n 是 $-\frac{1}{2}x^2+x=kx$ 的两根，故 $m=2(1-k),n=0$

注: 根据值域判断函数在定义域内的单调性是简化，解决问题的突破口。

常规解决方法是分析单调性，根据最值列方程组.

6. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域恰是 $[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$，则称区间 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的一个倒域区间. 求函数 $g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2+2x & -2\leqslant x<0\end{cases}$ 的所有倒域区间.

解析　$g(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，$g(x)$ 值域为 $[-1,1]$，故有 $-2\leqslant a<b\leqslant 2,-1\leqslant\frac{1}{b}<\frac{1}{a}\leqslant 1$，解得 $1\leqslant a<b\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant a<b\leqslant -1$.

① $1\leqslant a<b\leqslant 2$，此时 $g(x)$ 单调递减，有 $\begin{cases}-a^2+2a=\frac{1}{a}\\ -b^2+2b=\frac{1}{b}\end{cases}$，即 a,b 是 $-x^2+2x=\frac{1}{x}$ 的两根，即 a,b 是 $-x^3+2x^2-1=0$ 的两根，可以看出有一根为 1，即 a,b 是 $(x-1)(-x^2+x+1)=0$ 的两根，故 $a=1,b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

② $-2\leqslant a<b\leqslant -1$，此种情况和前一种对称，可得 $a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2},b=-1$

因此两个倒域区间为 $[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ 和 $[-\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1]$

7. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域恰是 $[m,n]$，则称区间 $[m,n]$ 是 $f(x)$ 的一个等域区间. 若区间 $[m,n]$ 是函数 $y=\frac{(a+1)x-\frac{1}{a}}{ax}(a\neq 0)$ 的一个等域区间. 求 $n-m$ 的最大值.

解析　$\frac{(a+1)x-\frac{1}{a}}{ax}=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$，故函数为 $y=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}(a\neq 0)$，易知函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，故必有 $m<n<0$ 或 $0<m<n$. 故易知函数在 $[m,n]$ 内严格单调递增，故 $\begin{cases}\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2m}=m\\ \frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2n}=n\end{cases}$，即 m,n 是 $a^2x^2-(a+1)ax+1=0$ 的两根. 由韦达定理有 $\begin{cases}m+n=\frac{a+1}{a}\\ m\cdot n=\frac{1}{a^2}\end{cases}$，由 $\Delta>0$ 得 $((a+1)^2-4)a^2>0$，故 $a\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

$n-m=\sqrt{(m+n)^2-4mn}=\sqrt{(\frac{a+1}{a})^2-\frac{4}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+2a-3}{a^2}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当 $a=3$ 时取等号.

8. 求函数 $y=3\cdot 4^x-20\cdot 2^x+3\cdot 4^{-x}-20\cdot 2^{-x}$ 的最小值.

解析　令 $t=2^x+2^{-x}\in[2,+\infty)$, 则 $y=3t^2-20t-6=3(t-\frac{10}{3})^2-\frac{118}{3}$

故 $y_{\min}=-\frac{118}{3}$, 当 $t=\frac{10}{3}$ 即 $2^x=\frac{1}{3}$或$3,x=log_2 3$或$-log_2 3$ 时取到.

9. 若 $a^{2x}+\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}\leqslant 0(a>0$ 且 $a\neq 1)$, 求函数 $y=2a^{2x}-3a^x+4$ 的值域.

解析　换元 $t=a^x,t>0$，原不等式化为 $t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\leqslant 0$，解得 $t\in(0,\frac{1}{2}]$.

$y=2a^{2x}-3a^x+4=2(t-\frac{3}{4})^2+\frac{23}{8}\in[3,4)$.

10. 已知 x 满足不等式 $2(\log_{\frac{1}{2}}x)^2+7\log_{\frac{1}{2}}x+3\leqslant 0$, 求 $f(x)=\log_2\frac{x}{2}\log_2\frac{x}{4}$ 的最大值与最小值.

解析　令 $t=\log_2 x$, 则 $2t^2-7t+3\leqslant 0$, 解得 $t\in[\frac{1}{2},3]$.

故 $y=(t-1)(t-2)=t^2-3t+2=(t-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}\in[-\frac{1}{4},2]$.

所以 $f(x)_{\min}=f(2^{\frac{3}{2}})=-\frac{1}{4}$, $f(x)_{\max}=f(8)=2$.