2.4 分式不等式

【A 组】

1. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 2. $\{0,1\}$ 3. $(-\infty,-3)\cup[2,+\infty)$

4、$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 5、$[-1,0)$

【B 组】

1、$(\frac{2}{3},1]$ 2、[2,3] 3. $\frac{1}{2}$ 4. $x<-\frac{1}{b}$或$x>\frac{1}{a}$ 5. $[-3,5]$

6. D 7. B 8. A 9. B

10. (1) $\left[\frac{3}{4},2\right)$

(2) 当$a<0$时，解为$(-\infty,1)$

当$a=0$时，解为$\left(\frac{a-1}{a},1\right)$

当$a>0$时，解为$\left[\frac{a}{2},+\infty\right)$

11. 当$a<0$时，解为$(-\infty,0)\cup(-a,+\infty)$

当$a=0$时，解为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

当$a>0$时，解为$(-\infty,-a)\cup(0,+\infty)$

12. $(1,3)$ 13. $a=\frac{5}{2},b=\frac{3}{2}$

14 解：$(-6,-5)\cup\left(-\frac{9}{2},-4\right)\cup[2,+\infty)$ 15、解：$(-\infty,\frac{2}{5}]\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

【C 组】

1、$$\frac{kx}{ax-1}+\frac{bx-1}{cx-1}<0\Rightarrow\frac{k}{(-\frac{1}{x})+a}+\frac{(-\frac{1}{x})+b}{(-\frac{1}{x})+c}<0$$

$$\Rightarrow(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{2},1)$$

2、【分析】先分析B中有 1 个或者 3 个元素，即方程$\left(3x^2+ax\right)\left(x^2+ax+2\right)=0$有一个根或者三个根，分析方程$\left(3x^2+ax\right)\left(x^2+ax+2\right)=0$的根的情况，可得到$a$可取的值，即可得答案.

【详解】集合$A=\left\{x\mid x^2+x=0\right\}=\{0,-1\}$，$A*B=1$，

根据集合的新定义知：B中有 1 个或者 3 个元素，

当B中有 1 个元素时，$\left(3x^2+ax\right)\left(x^2+ax+2\right)=0$有一个解，可得$a=0$；

当B中有 3 个元素时，易知$a\neq 0$，$\left(3x^2+ax\right)\left(x^2+ax+2\right)=0$有三个解，

其中的两个为：$x_1=0,x_2=-\dfrac{a}{3}$，

当$x^2+ax+2=0$有一个解时，令$\Delta=0$，可得$a=\pm 2\sqrt{2}$；

当$x^2+ax+2=0$有两个解且其中一个和 0 或者$-\dfrac{a}{3}$相等时，也满足条件，

此时$x_3=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-8}}{2},x_4=\dfrac{-a-\sqrt{a^2-8}}{2}$，显然$x_3,x_4$不等于 0，

所以$\dfrac{-a+\sqrt{a^2-8}}{2}=-\dfrac{a}{3}$或$\dfrac{-a-\sqrt{a^2-8}}{2}=-\dfrac{a}{3}$，解得$a=3$或$a=-3$，

综上所述，设实数 a 的所有可能取值为$0,2\sqrt{2},-2\sqrt{2},-3,3$，

所以构成集合 S 元素个数为 5，即$C(S)=5$.

故选：C

2.5 含绝对值不等式的求解

【A 组】

1、$\{x|x<0\}$

2、$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

3、$[-2,2]$ 4、B 5、$\{0,1,2,3,4\}$

【B组】

1. $a<-5$　2. $(-2,\frac{4}{3})$　3、$[0,+\infty)$

4. $(2,3)$　5. $(-\infty,-4)\cup(-3,2)\cup(3,+\infty)$　6. $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$

7. $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$

8. D　9. C　10. B　11. $\left(-\infty,-1\right]\cup\left[4,+\infty\right)$

12. (1) $[-2,-\frac{1}{2})\cup(\frac{7}{2},5]$　(2) $(\frac{1}{2},+\infty)$　(3) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

13. $A=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，为满足 $A\cap B=\varnothing$， $A\cup B=\mathbf{R}$，必须有 $B=[0,1]$。另一方面我们又能求出 $B=[\frac{a-1}{2},\frac{a+1}{2}]$，因此必有 $a=1$。

14. (1) 在 B 站的运行误差 $\left|7-\frac{300}{v}\right|$ 分钟，在 C 站的运行误差 $\left|11-\frac{480}{v}\right|$ 分钟。

(2) $\left|11-\frac{480}{v}\right|+\left|7-\frac{300}{v}\right|\le 2$，解得 $39\le v\le 48.75$。

15. $A=\{x\,|\,2a\le x\le a^2+1\}$， $B=\begin{cases}\varnothing, a<0\\ \{x\,|\,1\le x\le 2a+1\}, a\ge 0\end{cases}$，为满足 $A\subseteq B$，只需 $1\le 2a\le a^2+1\le 2a+1$，解得 $a\in[\frac{1}{2},2]$。

16、$(\frac{\sqrt{7}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2})$

提示：令 $f(m)=m(x^2-1)-2x+1<0$ 对 $\forall m\in[-2,2]$ 恒成立。

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(2)=2(x^2-1)-2x+1=2x^2-2x-1<0\\ f(-2)=-2(x^2-1)-2x+1=-2x^2-2x+3<0\end{cases},$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ x<-\frac{1+\sqrt{7}}{2}\ \text{或}\ x>\frac{\sqrt{7}-1}{2}\end{cases}$$

17、(1) a的取值范围是$[-1,0]$。

(2) 当$a\ge 1$时，函数$f(x)=|x-1|,\ g(x)=ax$的图像只有一个交点$(\frac{1}{a+1},\frac{a}{a+1})$，不等式$f(x)<g(x)$的解集是$(\frac{1}{a+1},+\infty)$。

当$a<-1$时，函数$f(x)=|x-1|,\ g(x)=ax$的图像只有一个交点$(\frac{1}{a+1},\frac{a}{a+1})$，不等式$f(x)<g(x)$

的解集是$(-\infty,\frac{1}{a+1})$。

当 $0<a<1$ 时， 函 数 $f(x)=|x-1|,\ g(x)=ax$ 的 图 像 有 两 个 交 点 $(\frac{1}{a+1},\frac{a}{a+1}),(\frac{1}{1-a},\frac{a}{1-a})$，不等式$f(x)<g(x)$的解集是$(\frac{1}{1+a},\frac{1}{1-a})$。

$\because$ $1\in(\frac{1}{1+a},\frac{1}{1-a})$， $\therefore$ $2<\frac{1}{1-a}\le 3$，即$\frac{1}{2}<a\le\frac{2}{3}$。

$\therefore$ a的取值范围是$(\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$。

【C组】

【答案】(1)$[3,4)$，$\left[-\frac{3}{2},-1\right)$；(2) $k\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{4}{5},\frac{5}{6}\right]$；(3) $x=\frac{\sqrt{29}}{2}$；$x=\frac{3\sqrt{21}}{2}$；$x=\frac{\sqrt{229}}{2}$；$x=\frac{\sqrt{269}}{2}$.

【分析】(1)根据对符号$[x]$的定义理解可得答案;

(2)将$[|x|+|x-1|]=3$化为$3\le|x|+|x-1|<4$,再分三种情况去绝对值解不等式可得集合A,然后对k分类讨论解得集合B,再根据$A\cup B=\mathbf{R}$,列式可求得k的范围;

(3)先判断出$[x]\ge 0$,再将$[x]\le x<[x]+1$平方得$([x])^2\le x^2<([x]+1)^2$,再结合方程

$4x^2-40[x]+51=0$可得不等式$4([x])^2\le 40[x]-51<4([x]+1)^2$,解不等式可得$[x]=2$或$[x]=6$或$[x]=7$或$[x]=8$,分别代入方程$4x^2-40[x]+51=0$可解得答案.

【解析】(1) $\because[x]=3,\therefore x\in[3,4)$

$\because[2x]=-3,\therefore 2x\in[-3,-2),\therefore x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right)$,

(2) $[|x|+|x-1|]=3$， $3\le|x|+|x-1|<4$，

当$x\ge 1$时，有$3\le x+x-1<4$,解得 $2\le x<\frac{5}{2}$,

当$0<x<1$时，有$3\le x+1-x<4$,$[|x|+|x-1|]=3$无解,

当$x\le 0$时，有$3\le -x-x+1<4$,解得：$-\frac{3}{2}<x\le -1$

综上所述:$A=\left(-\frac{3}{2},-1\right]\cup\left[2,\frac{5}{2}\right)$.

因为$B=\{x\mid(2x-5k)(x-3k)\ge 0\}$

当$k>0$时， $B=\left(-\infty,\frac{5k}{2}\right]\cup[3k,+\infty)$

因为$A\cup B=\mathbf{R}$，所以$2\le\frac{5k}{2}<3k\le\frac{5}{2}$，解得$\frac{4}{5}\le k\le\frac{5}{6}$；

当$k<0$时， $B=(-\infty,3k]\cup\left[\frac{5k}{2},+\infty\right)$,

因为$A\cup B=\mathbf{R}$,所以$-\frac{3}{2}\le 3k<\frac{5k}{2}\le -1$，解得：$-\frac{1}{2}\le k\le -\frac{2}{5}$,

当$k=0$时， $B=R$, $A\cup B=\mathbf{R}$成立,

综上：实数k的取值范围$\left[-\frac{1}{2},-\frac{2}{5}\right]\cup\{0\}\cup\left[\frac{4}{5},\frac{5}{6}\right]$.

(3)因$[x]\le x<[x]+1$， 又$[x]<0$时,方程$4x^2-40[x]+51=0$不成立,

所以$[x]\ge 0$,所以$([x])^2\le x^2<([x]+1)^2$,

所以$4([x])^2\le 40[x]-51<4([x]+1)^2$,

$$\therefore\begin{cases}4([x]+1)^2-40[x]+51>0\\4[x]^2-40[x]+51\le 0\end{cases},$$

所以$\begin{cases}4[x]^2-32[x]+55>0\\4[x]^2-40[x]+51\le 0\end{cases}$

所以$\begin{cases}(2[x]-5)(2[x]-11)>0\\(2[x]-3)(2[x]-17)\le 0\end{cases}$,

所以$[x]>\frac{11}{2}$或$[x]<\frac{5}{2}$且$\frac{3}{2}\le[x]\le\frac{17}{2}$,

所以$\frac{3}{2}\le[x]<\frac{5}{2}$ 或$\frac{11}{2}<[x]\le\frac{17}{2}$,

所以$[x]=2$或$[x]=6$或$[x]=7$或$[x]=8$,

当$[x]=2$时,原方程化为$4x^2-29=0$,所以$x=\frac{\sqrt{29}}{2}$,

当$[x]=6$时,原方程化为$4x^2-189=0$,所以$x=\frac{\sqrt{189}}{2}=\frac{3\sqrt{21}}{2}$,

当$[x]=7$时,原方程化为$4x^2-229=0, x=\frac{\sqrt{229}}{2}$,

当$[x]=8$时,原方程化为$4x^2-269=0, x=\frac{\sqrt{269}}{2}$,

经检验知，这四个值都是原方程的解.

故方程$4x^2-40[x]+51=0$的实数解为:$x=\frac{\sqrt{29}}{2}$或$x=\frac{3\sqrt{21}}{2}$或$x=\frac{\sqrt{229}}{2}$或$x=\frac{\sqrt{269}}{2}$.

2.6 高次不等式&无理不等式

【A 组】

1. $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

2. $-2<x<1$或$x>3$

3. $\{x/x<-4$或$-1<x<1$或$1<x<2\}$

4. $\{x|0\le x\le 4\}$

5. $\{x|x\geqslant 2$ 或$x=-1\}$

【B 组】

1. $(-3,-2]\cup(0,+\infty)$ 2. $(-3,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ 3. $(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$

4. $\{-1\}\cup[0,2]\cup(3,5)$ 5. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ 6. $[3,+\infty)$ 7. $\{-1\}\cup[3,+\infty)$

8. $(0,1]\cup[2,10)$ 9. $\left[-\frac{1}{3},+\infty\right)$ 10. $[-3,1)\cup(1,+\infty)$

11. $\sqrt{6}$ 12、$\frac{59}{72}$ 13. C 14. C

15. (1) $(-\infty,-3)\cup(-2,-1)$ (2) $\left[-\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{4}{3}\right]$

(3) $\left(\frac{6}{5},2\right]$ (4) $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

16. (1) $f(x)=2x^2-10x$

(2) 当$a<-1$时，解为$(-\infty,0)\cup\left(-\frac{5}{a},5\right)$；

当 $a=-1$ 时，解为 $(-\infty,0)$

当 $-1<a<0$ 时，解为 $(-\infty,0)\cup\left(5,-\frac{5}{a}\right)$

【C 组】

1、当 $m\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2}+1)$ 时，$x\in(m-1,1+\frac{1}{m})$

当 $m\in(1-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2}+1,+\infty)$ 时，$x\in(1+\frac{1}{m},m-1)$

当 $m=1-\sqrt{2},\sqrt{2}+1$ 时，$x\in\varnothing$

2、(1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (2) 当 $0<a<1$ 时，解为 $\left[0,\frac{2a}{1-a^2}\right]$；当 $a\geq1$ 时，解为 $[0,+\infty)$

2.7 平均值不等式及其应用（1）

【A 组】

1. 5　2. $2\sqrt{3}-1$　3. $a\leq0$　4. $2+\sqrt{3}$　5. 2

【B 组】

1. ≥；<　2. $(-\infty,-2]$　3. -1　4. 大；-6；-3

5. $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$　6、(1) 小　5　4　(2)大　-2.5　-0.5

7、$(-\infty,2\sqrt{2}]$　8. B　9. D　10.D　11. A

12. $Q\geq A\geq G\geq H$

13. (1)提示：$xy=2x+8y\geq8\sqrt{xy}$，得 $xy\geq64$，取等当且仅当 $x=16,y=4$

(2)提示：$(x-8)(y-2)=16$，先说明 $x-8>0,y-2>0$，然后

$x-8+y-2\geq2\sqrt{(x-8)(y-2)}=8$ 得 $x+y\geq18$，取等当且仅当 $x=12,y=6$

14. 设矩形温室长 x 米，则宽 $\frac{800}{x}$ 米，菜地面积为

$$\left(\frac{800}{x}-2\right)(x-4)=800+8-2x-\frac{3200}{x}\le 808-2\times 80=648$$

因此蔬菜种植面积最大为 $648m^2$，当且仅当长 $40m$ 宽 $20m$

15、方法很多，比较简单的一种是给左边每个式子配上各自的分母，然后用均值不等式

$\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c+\frac{c^2}{a}+a\ge 2a+2b+2c$，然后两边同时减掉一个 $a+b+c$ 即得

清洗两次后，残留的农药量为 $f_2=\left[\frac{1}{1+\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]^2=\frac{16}{(4+a^2)^2}$，

则 $f_1-f_2=\frac{1}{1+a^2}-\frac{16}{(4+a^2)^2}=\frac{a^2(a^2-8)}{(1+a^2)(4+a^2)^2}$.

于是，当 $a>2\sqrt{2}$ 时，$f_1>f_2$;

当 $a=2\sqrt{2}$ 时，$f_1=f_2$;

当 $0<a<2\sqrt{2}$ 时，$f_1<f_2$;

当 $a>2\sqrt{2}$ 时，清洗两次后残留的农药量较少；

当 $a=2\sqrt{2}$ 时，两种清洗方法具有相同的效果；

当 $0<a<2\sqrt{2}$ 时，一次清洗残留的农药量较少.

2.7 平均值不等式及其应用（2）

【A 组】

1. $[-4,2]$　2. $[6,+\infty)$　3. $2+2\sqrt{2}$　4. 49　5. $2\sqrt{2}$

【B 组】

1. $3+2\sqrt{2}$　2. ①③⑤　3.16　4. $2\sqrt{3}$；$-2\sqrt{3}$

5. $\sqrt{2}$　6. 8

7. C　8. B　9. A　10. D　11.B

12. (1)最小值 3，当且仅当 x=1　(2)最小值 $3\sqrt[3]{6}$，当且仅当 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$

(3)最大值$\frac{32}{243}$，当且仅当$x=\frac{4}{9}$　　(4)最小值$3\sqrt[3]{4}$，当且仅当$a=2b=\sqrt[3]{4}$

13. (1)最小值$\frac{1}{3}$，当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$

(2)最小值$2\sqrt{3}$，当且仅当$a+2b=a+2c=2\sqrt{3}$

(3)最小值 18，当且仅当$a=\frac{2}{3},b=1,c=\frac{4}{3}$

14. (1)最小值 9，当且仅当$x=1$

(2)最小值 3，当且仅当$x=0$

(3)最大值$\sqrt{3}$，当且仅当$x=\pm\sqrt{2}$

15. (1) $\sqrt{m}+\sqrt{n}>\sqrt{p}$ (或写成$\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2>p$)

(2) 类似讨论可得$\sqrt{1}+\sqrt{1}+\sqrt{1}\geq\sqrt{p}$，因此最大为 9

2.8 三角不等式

【A 组】

1. 4　2. $[1,+\infty)$　3. $(-\infty, 5]$　4. $(2,+\infty)$　5. $[-3,1]$

【B 组】

1、C　2、$(-\infty,-1]$

3.$[1,3]$　4. $(-\infty,-5]$　5. $[7,+\infty)$　6.-4045　4045

7. $|a|+|b|=\left|\frac{a+b+(a-b)}{2}\right|+\left|\frac{a+b-(a-b)}{2}\right|\leq|a+b|+|a-b|$

8. (1) $|a-b|=|a-c-(b-c)|\leq|a-c|+|b-c|$，取等当且仅当 c 介于 a、b 之间

(2) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cup[5,+\infty)$

9. $|a+b+c|\leq|a+b|+|c|\leq|a|+|b|+|c|$

10.证明：$|x-y|=|x-a+a-y|\leq|x-a|+|y-a|<h$

11. 证明

$d(A,B)=\left|x_2-x_1\right|+\left|y_2-y_1\right|=\left|x_2-x_3+x_3-x_1\right|+\left|y_2-y_3+y_3-y_1\right|$
$\leq\left|x_3-x_2\right|+\left|y_3-y_2\right|+\left|x_1-x_3\right|+\left|y_1-y_3\right|=d(B,C)+d(C,A)$

12.解集：$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

证明：$f(x)\geq\left|x+\frac{1}{a}-(x-a)\right|=\left|\frac{1}{a}+a\right|=\frac{1}{|a|}+|a|\geq 2$，当且仅当$a=\pm 1, x\in[-1,1]$