1. 函数 $y=x^2-2x+4$ 的图像关于直线__________成轴对称.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】利用配方法整理函数解析式，根据二次函数的性质，可得答案.

【详解】由题意可知, 函数 $y=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3$, 则该函数的图像关于直线 $x=1$ 成轴对称.

故答案为: $x=1$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, x<2\\ \lg x, x\geq 2\end{cases}$，则 $f(f(0))+f(5)=$__________.

【答案】1

【解析】

【分析】根据函数解析式求出 $f(0)$， $f(5)$，可得答案.

【详解】由题意 $f(5)=\lg 5$， $f(0)=2^0+1=2$， $f(f(0))=f(2)=\lg 2$，

所以 $f(f(0))+f(5)=\lg 2+\lg 5=\lg 10=1$.

故答案为： 1

3. 已知扇形的弧长和半径都是 4，则扇形的面积为__________.

【答案】 8

【解析】

【分析】根据扇形的面积公式，可得答案.

【详解】由题意可知，扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$.

故答案为: 8.

4. 已知点 $P(\sin\alpha, \cos\alpha)$ 在第二象限，则角 α 的终边在第______象限.

【答案】四

【解析】

【分析】由条件得到三角函数的正负号，结合三角函数在四个象限中的符号即可得到角所在的象限.

【详解】因为点 $P(\sin\alpha, \cos\alpha)$ 在第二象限，

所以$\sin\alpha<0,\cos\alpha>0$，所以角$\alpha$的终边在第四象限.

故答案为四

【点睛】本题考查三角函数在四个象限的取值符号，属于基础题.

5. 化简：$\dfrac{\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta+\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta}{1-\sin^4\theta-\cos^4\theta}=$__________.

【答案】$\dfrac{1}{2}$##0.5

【解析】

【分析】根据同角平方和关系即可求解.

【详解】

$$\frac{\sin^4\theta\cdot\cos^2\theta+\sin^2\theta\cdot\cos^4\theta}{1-\sin^4\theta-\cos^4\theta}=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)}{1-\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2+2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\frac{1}{2}$$

，

故答案为：$\dfrac{1}{2}$

6. 若函数$f(x)=|x-a+1|$在区间$[1,+\infty)$上是严格增函数，则实数a的取值范围为

__________.

【答案】$a\le 2$

【解析】

【分析】根据分段函数的性质及区间单调性列不等式求范围即可.

【详解】由题设$f(x)=\begin{cases}x-a+1,x\ge a-1\\a-1-x,x<a-1\end{cases}$，显然$f(x)$在$[a-1,+\infty)$上递增，

要使函数在区间$[1,+\infty)$上是严格增函数，则$a-1\le 1$，即$a\le 2$.

故答案为：$a\le 2$

7. 函数$y=f(2x-1)$的定义域为区间$\left(0,1\right)$，则函数$y=f(1-x)$的定义域为__________.

【答案】$\left(0,2\right)$

【解析】

【分析】利用抽象函数定义域的求解方法可得答案.

【详解】因为函数 $y=f(2x-1)$ 的定义域为区间 $(0,1)$，所以 $2x-1\in(-1,1)$，

令 $1-x\in(-1,1)$，解得 $0<x<2$，所以函数 $y=f(1-x)$ 的定义域为 $(0,2)$.

故答案为：$(0,2)$

8. 函数 $y=\dfrac{3^x-1}{3^x-2}$ 的值域是___________.

【答案】$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

【解析】

【分析】利用分离常数项整理化简函数解析式，根据指数函数的性质以及不等式性质，可得答案.

【详解】由题意可知，函数 $y=\dfrac{3^x-1}{3^x-2}=\dfrac{3^x-2+1}{3^x-2}=1+\dfrac{1}{3^x-2}$，

由 $3^x>0$，$3^x-2>-2$，$\dfrac{1}{3^x-2}<-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{3^x-2}>0$，则 $1+\dfrac{1}{3^x-2}<\dfrac{1}{2}$ 或 $1+\dfrac{1}{3^x-2}>1$，

即函数值域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

9. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且当 $x>0$ 时，其表达式为 $f(x)=x^2+2^x$，则当 $x<0$ 时，其表达式为 $f(x)=$__________.

【答案】x^2+2^{-x}

【解析】

【分析】利用偶函数性质求解析式即可.

【详解】令 $x<0$，则 $-x>0$，故 $f(-x)=(-x)^2+2^{-x}=x^2+2^{-x}$，

又 $f(x)=f(-x)=x^2+2^{-x}$，

所以当 $x<0$ 时，$f(x)=x^2+2^{-x}$.

故答案为：x^2+2^{-x}

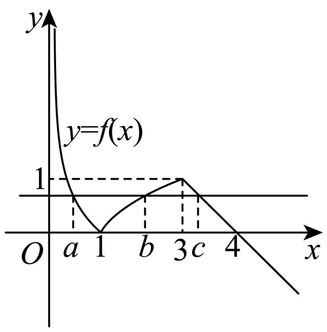
10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\log_3 x|,0<x<3\\4-x,\quad x\ge 3\end{cases}$，若存在 $0<a<b<c$ 满足 $f(a)=f(b)=f(c)$，则 $\dfrac{f(a)f(c)}{abc}$ 的取值范围为__________.

【答案】$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$

【解析】

【分析】画出函数 $f(x)$ 的图象， 根据 $f(a)=f(b)=f(c)$ 可得 $ab=1$，$0<-c+4<1$，进而将问题转为 $\dfrac{f(a)f(c)}{abc}=\dfrac{f(c)f(c)}{c}$，利用对勾函数的性质即可求解.

【详解】作出函数 $f(x)$ 的图象如图,



故 $-\log_3 a=\log_3 b=-c+4\in(0,1)$，

$\therefore ab=1$，$0<-c+4<1$，则 $3<c<4$，$\therefore abc=c$.

所以 $\dfrac{f(a)f(c)}{abc}=\dfrac{f(c)f(c)}{c}=\dfrac{(4-c)^2}{c}=\dfrac{16}{c}+c-8$，

由于函数 $y=c+\dfrac{16}{c}$ 在 $(3,4)$ 上单调递减,

所以 $\dfrac{16}{c}+c-8\in\left(\dfrac{16}{4}+4-8,\dfrac{16}{3}+3-8\right)$，故 $\dfrac{f(a)f(c)}{abc}\in\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$，

故答案为：$\left(0,\dfrac{1}{3}\right)$.

11. 已知函数 $f(x),g(x),h(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$. 给出以下 3 个命题:

① $f(x)$ 一定可以写成一个奇函数和一个偶函数之差;

②若 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 是严格减函数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数;

③若 $f(x)+g(x),g(x)+h(x),h(x)+f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上均是严格增函数，则 $f(x),g(x),h(x)$ 中

至少有一个在 **R** 上是严格增函数.

其中，假命题的序号为__________.

【答案】②③

【解析】

【分析】对于①，可构造 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2},G(x)=\dfrac{-f(x)-f(-x)}{2}$，得到①正确；

对于②③可举出反例.

【详解】对于①，令 $F(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2},G(x)=\dfrac{-f(x)-f(-x)}{2}$，两函数定义域均

为 R,

又 $F(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-F(x),G(-x)=\dfrac{-f(-x)-f(x)}{2}=G(x)$,

故 $F(x)$ 为奇函数，$G(x)$ 为偶函数，且 $f(x)=F(x)-G(x)$，①正确；

对于②，不妨令 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\\ 0,x=0\end{cases}$，满足是奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 是严格减

函数,

但 $f(x)$ 在 R 上不是严格减函数，②错误；

对于③，不妨设 $f(x)=\begin{cases}0,x\le 0\\ x+1,x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x-1,x\le 0\\ 0,x>0\end{cases}$，$h(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\ x-1,x>0\end{cases}$,

满足 $f(x)+g(x),g(x)+h(x),h(x)+f(x)$ 在 R 上均是严格增函数,

但 $f(x),g(x),h(x)$ 均不是 R 上的严格增函数，③错误.

故答案为：②③

12. 已知函数 $f(x)$ 满足：$f^2(x+1)-f(x+1)+f^2(x)-f(x)=4$．则下列三个结论：

（1）$f^2(2024)-f(2024)+f^2(1865)-f(1865)=4$；

（2）$f(2023)=f(2024)$；

（3）$f(2024)+f(1865)\le 4$.

其中正确的结论是__________.

【答案】（1）（3）

【解析】

【分析】构造函数 $g(x)=f^2(x)-f(x)$ 得 $g(x+1)+g(x)=4$，进而得 $g(x+2)=g(x)$，从而可判断（1）；举反例排除断（2）；利用（1）结论，结合基本不等式求 $f(2024)+f(1865)$ 范围判断（3）．

【详解】令 $g(x)=f^2(x)-f(x)$，则 $g(x+1)+g(x)=4$，则 $g(x+2)+g(x+1)=4$，

两式相减，整理得 $g(x+2)=g(x)$，

所以 $g(2024)+g(1865)=g(1866)+g(1865)=4$，故（1）对；

当 $f(2023)=-1, f(2024)=2$ 时，$f^2(2023)-f(2023)=2, f^2(2024)-f(2024)=2$，

满足 $g(2024)+g(2023)=4$，但 $f(2023)\neq f(2024)$，故（2）错；

由 $f(2024)+f(1865)=f^2(2024)+f^2(1865)-4\geq\dfrac{[f(2024)+f(1865)]^2}{2}-4$，

当且仅当 $f\left(2024\right)=f\left(1865\right)=-1$ 或 2 时取等号，

所以 $[f(2024)+f(1865)]^2-2[f(2024)+f(1865)]-8\leq 0$，

可得 $-2\leq f(2024)+f(1865)\leq 4$，故（3）对.

故答案为：（1）（3）

【点睛】关键点睛：本题结论（1）的解决关键是通过构造函数得到 $g(x+1)+g(x)=4$，进而得到 $g(x+2)=g(x)$，从而得解.

二、选择题（每题 4 分）

13. 若幂函数 $f\left(x\right)=\left(m^2+m-5\right)x^{m^2-2m-3}$ 的图像不经过原点，则 m 的值为（　　）

A. 2　　B. -3　　C. 3　　D. -3 或 2

【答案】A

【解析】

【分析】先根据幂函数的定义求出 m 的值，再根据函数不过原点，确定 m 的值.

【详解】由幂函数的定义得 $m^2+m-5=1$，

所以 $m=2$ 或 $m=-3$．

当 $m=2$ 时，$f\left(x\right)=x^{-3}=\frac{1}{x^{3}}$，函数的图象不过原点；

当 $m=-3$ 时，$f\left(x\right)=x^{12}$，函数的图象过原点，与已知不相符.所以舍去.

故选 A

【点睛】本题主要考查幂函数的定义及图象性质，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

14. 存在函数 $f(x)$ 满足：$\forall x\in\mathbf{R}$ 都有（　　）

A. $f(|x+1|)=x^{3}$

B. $f\left(\frac{1}{x^{2}}\right)=x-1$

C. $f\left(x^{2}+1\right)=|x+1|$

D. $f\left(x^{2}+2x\right)=|x+1|$

【答案】D

【解析】

【分析】应用换元法求原函数解析式，结合函数定义：对于任意自变量取值有且仅有唯一对应函数值判断是否正确即可.

【详解】A：令 $t=|x+1|\geq 0$，则 $x=-1\pm t$，故 $f(t)=(-1\pm t)^{3}$，显然不满足函数定义；

B：令 $t=\frac{1}{x^{2}}>0$，则 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{t}}$，故 $f\left(t\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{t}}-1$，显然不满足函数定义；

C：令 $t=x^{2}+1\geq 1$，则 $x=\pm\sqrt{t-1}$，故 $f\left(t\right)=|\pm\sqrt{t-1}+1|$，显然不满足函数定义；

D：令 $t=x^{2}+2x=(x+1)^{2}-1\geq -1$，则 $x+1=\pm\sqrt{t+1}$，故 $f\left(t\right)=|\pm\sqrt{t+1}|=\sqrt{t+1}$，满足函数定义.

故选：D

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x<0\\x\left(x-2\right),x>0\end{cases}$，若 $f(1-x)$ 在区间 I 上恒负，且是严格减函数，则区间 I 可以是（　　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $\left(0,1\right)$　　D. $(1,2)$

【答案】B

【解析】

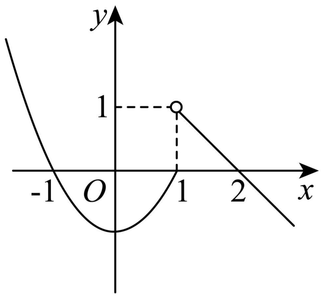
【分析】由函数 $f(x)$ 的解析式得出 $f(1-x)$ 的解析式，再根据图象得答案.

【详解】函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x<0\\x\left(x-2\right),x>0\end{cases}$，

则 $f(1-x)=\begin{cases}1-x+1,1-x<0\\\left(1-x\right)\left(1-x-2\right),1-x\geq 0\end{cases}$，

即 $f(1-x)=\begin{cases}2-x,x>1\\x^{2}-1,x\leq 1\end{cases}$，

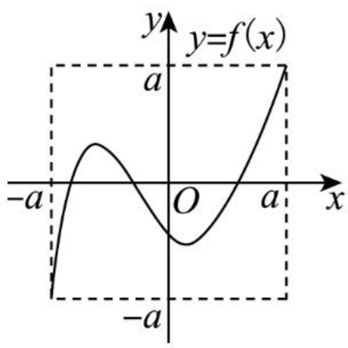
如图所示：

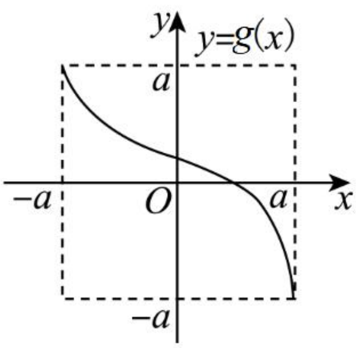


所以 $f(1-x)$ 在区间 I 上恒负，且是严格减函数，区间 I 可以是 $(-1,0)$，$\left(2,+\infty\right)$.

故选：B.

16. 定义域和值域均为 $[-a,a]$（常数 $a>0$）的函数 $y=f(x)$ 和 y=g(x)的图像如图所示，给出下列四个命题：





（1）方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有三个解；

（2）方程 $g[f(x)]=0$ 有且仅有三个解；

（3）方程 $f[f(x)]=0$ 有且仅有九个解；

（4）方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有一个解；

那么，其中正确命题的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】依题意，依次判断：

(1) 由于 $g(x)\in[-a,a]$，可得方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有三个解；

(2) 由于 $f(x))\in[-a,a]$，可得方程 $g[f(x)]=0$ 最多三个解；

(3) 方程 $f[f(x)]=0$ 的解最多有九个解；

(4) 由于 $g(x)\in[-a,a]$，可得方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有一个解.

最后可求得结果.

【详解】(1) 方程 $f[g(x)]=0$ 有且仅有三个解；$g(x)$ 有三个不同值，由于 $y=g(x)$ 是减函数，所以有三个解，正确；

(2) 方程 $g[f(x)]=0$ 有且仅有三个解；从图中可知，$f(x)\in(0,a)$ 可能有 1，2，3 个解，不正确；

(3) 方程 $f[f(x)]=0$ 有且仅有九个解；类似 (2) 不正确；

(4) 方程 $g[g(x)]=0$ 有且仅有一个解. 结合图象，$y=g(x)$ 是减函数，故正确.

故答案为①④.

故选 B.

【点睛】本题考查了函数的图象及其性质、复合函数的图象与性质、方程的解与函数的零点之间的关系，考查了推理能力，考查了数形结合的思想方法，属于中档题.

解下列关于 x 的方程:

(1) $2\log_{16}x+\log_x 16=3$；

(2) $4^x-(a+1)\cdot 6^x-2\left(a^2-a\right)\cdot 9^x=0$.

【答案】(1) $x=4$ 或 $x=16$；

(2) 答案见解析.

【解析】

【分析】(1) 由对数运算性质有 $2(\log_{16}x)^2-3\log_{16}x+1=0$，应用因式分解及对数函数性质求解即可；

（2）由题设可得 $(\frac{2}{3})^x = 2a$ 或 $(\frac{2}{3})^x = 1-a$，讨论 $a \le 0$、$0 < a < 1$、$a \ge 1$，结合指对数函数性质求解.

【小问 1 详解】

由题设 $x > 0$ 且 $x \ne 1$，又 $2\log_{16} x + \frac{1}{\log_{16} x} = 3$，即 $2(\log_{16} x)^2 - 3\log_{16} x + 1 = 0$，

所以 $(2\log_{16} x - 1)(\log_{16} x - 1) = 0$，可得 $\log_{16} x = \frac{1}{2}$ 或 $\log_{16} x = 1$，

所以 $x = 4$ 或 $x = 16$.

【小问 2 详解】

由 $2^{2x} - (a+1)\cdot 2^x \cdot 3^x - 2a\left(a-1\right)\cdot 3^{2x} = (2^x - 2a\cdot 3^x)[2^x + (a-1)\cdot 3^x] = 0$

所以 $(\frac{2}{3})^x = 2a$ 或 $(\frac{2}{3})^x = 1-a$，

当 $a \le 0$，则 $(\frac{2}{3})^x = 2a$ 无解，此时 $x = \log_{\frac{2}{3}}(1-a)$；

当 $0 < a < 1$，则 $x = \log_{\frac{2}{3}}(2a)$ 或 $x = \log_{\frac{2}{3}}(1-a)$；

当 $a \ge 1$，则 $(\frac{2}{3})^x = 1-a$ 无解，此时 $x = \log_{\frac{2}{3}}(2a)$；

综上，$a \le 0$ 时 $x = \log_{\frac{2}{3}}(1-a)$，

$0 < a < 1$ 时 $x = \log_{\frac{2}{3}}(2a)$ 或 $x = \log_{\frac{2}{3}}(1-a)$，

$a \ge 1$ 时 $x = \log_{\frac{2}{3}}(2a)$.

20. 某地中学生社会实践小组为研究学校附近某路段交通拥堵情况，经实地调查、数学建模，得该路段上平均行车速度 v（单位：$\mathrm{km/h}$）与该路段上的行车数量 n（单位：辆）的关系为：$v = \begin{cases} \frac{600}{n+10}, n \le 9 \\ \frac{33000}{n^2+k}, n \ge 10 \end{cases}$，其中常数 $k \in \mathrm{R}$．该路段上每日 t 时的行车数量 $n = -2(|t-12|-5)^2 + 100, t \in [0,24), t \in \mathrm{Z}$．已知某日 17 时测得的平均行车速度为 $3\mathrm{km/h}$．

（1）求实数 k 的值；

（2）定义 $q = nv$，求一天内 q 的最大值（结果四舍五入到整数）.

【答案】（1）$k = 1000$

（2）522.

【解析】

【分析】（1）根据题意把 17 时测得的平均行车速度为$3\mathrm{km/h}$代入函数解析式即可求出k；

（2）根据分段函数求最值的方法，分别利用函数单调性求每段的最值，即可得出函数$q=nv$的最大值.

【小问 1 详解】

由 17 时测得的平均行车速度为$3\mathrm{km/h}$，

则$n=-2(|17-12|-5)^2+100=100$，故

代入$v=\begin{cases}\dfrac{600}{n+10},n\le 9\\ \dfrac{33000}{n^2+k},n\ge 10\end{cases},n\in\mathrm{N}^*$，可得$\dfrac{33000}{100^2+k}=3$，

解得$k=1000$.

【小问 2 详解】

①当$n\le 9$时，$q=nv=\dfrac{600n}{n+10}=\dfrac{600}{1+\dfrac{10}{n}}$为增函数，

所以$q\le\dfrac{600\times 9}{9+10}<300$；

②当$n\geqslant 10$时，$q=nv=\dfrac{33000n}{n^2+1000}=\dfrac{33000}{n+\dfrac{1000}{n}}$，

由函数$f(x)=n+\dfrac{1000}{n}$在$(0,\sqrt{1000})$上递减，在$(\sqrt{1000},+\infty)$上递增，

且$\sqrt{1000}\in(31,32)$，当$n=31$时，$q=\dfrac{33000}{31+\dfrac{1000}{31}}\approx 522$，当$n=32$时，$q=\dfrac{33000}{32+\dfrac{1000}{32}}\approx 522$，

故$q_{\max}\approx 522$.

综上可知，一天内车流量q的最大值为 522.

已知函数$f(x)=2^x-4$.

（1）求方程$f(x)=3$的解；

（2）若关于x的方程$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+\lambda$在$x\in[2,4]$上有实数解，求实数$\lambda$的取值范围；

（3）若 $x_i\left(i=0,1,2,\cdots,2021\right)$ 将区间 $\left[1,3\right]$ 划分成 2021 个小区间，且满足

$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2021}=3$，使得和式

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right|+\left|f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{2021}\right)-f\left(x_{2020}\right)\right|\le M$ 恒成立，试求出实数 M 的最小值并说明理由.

【答案】（1）$x=\log_2 7$

（2）$\lambda\in\left[1,14\right]$

（3）6，理由见解析

【解析】

【分析】（1）解方程 $2^x-4=3$ 即可；

（2）将问题转化为 $\lambda=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in\left[2,4\right]$ 上有实数解，求函数 $y=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in\left[2,4\right]$ 上的值域即可得解；

（3）根据函数单调性分析最值即可得解.

【小问 1 详解】

由 $2^x-4=3$ 得 $2^x=7$

得 $x=\log_2 7$

【小问 2 详解】

由题可得 $\lambda=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in\left[2,4\right]$ 上有实数解，

函数 $y=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in\left[2,4\right]$ 上是严格增函数

又 $2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4\in\left[1,14\right]$

$\therefore\lambda\in\left[1,14\right]$

【小问 3 详解】

由题，$f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,3\right]$ 上是严格增函数，

对任意划分 $1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k<\cdots<x_{2021}=3$，$k<2021$ 且为正整数

$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right|+\left|f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)\right|+\cdots+\left|f\left(x_{2021}\right)-f\left(x_{2020}\right)\right|$

$=f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)+f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)+f\left(x_3\right)-f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_{2021}\right)-f\left(x_{2020}\right)$

$=f\left(x_{2021}\right)-f\left(x_0\right)$

$=f\left(3\right)-f\left(1\right)=6$

$\therefore M\geq 6$

$\therefore$实数M的最小值为6