第三讲 二次函数

知识方法概要

1.定义

函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 称为关于 x 的二次函数. 配方后形式为 $f(x)=a(x-x_0)^2+f(x_0)(a\neq 0)$ (顶点式), 其中 $x_0=-\frac{b}{2a}$.

2. $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质

(1) 对称性.

$f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称.

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)$$

（2）当 $a>0$ 时 (当 $a<0$ 时类似),方程

$$ax^2+bx+c=0, \quad （1）$$

和不等式

$$ax^2+bx+c>0 \quad （2）$$
$$ax^2+bx+c<0 \quad （3）$$

与函数 $f(x)$ 的关系如下 (记 $\Delta=b^2-4ac$):

当 $\Delta>0$ 时,方程 (1) 有两个不相等的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ ，不等式 (2) 和不等式 (3) 的解集分别是 $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$ 和 $\{x|x_1<x<x_2\}$, 二次函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个不同的交点. $f(x)$ 可写成 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$ (零点式), 这个形式可以导出韦达定理, 还可以推广到一元 n 次方程.

当 $\Delta=0$ 时,方程 (1) 有两个相等的实根 $x_1=x_2=x_0=-\frac{b}{2a}$ ，不等式 (2) 和不等式 (3) 的解集分别是 $\left\{x\,\middle|\,x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$ 和空集 $\emptyset, f(x)$ 的图像与 x 轴相切, 只有一个交点.

当 $\Delta<0$ 时,方程 (1) 无解，不等式 (2) 和不等式 (3) 的解集分别是 $\mathbf{R}$ 和 $\emptyset. f(x)$ 的图像与x 轴无交点.

当 $\Delta<0$ 时, 若 $a>0, f(x)>0, x\in\mathbf{R}$; 若 $a<0, f(x)<0, x\in\mathbf{R}$.

(3) 单调性.

若 $a>0,\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 为单调递减区间, $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 为单调递增区间.若 $a<0,\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 为单调递增区间, $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 为单调递减区间.

(4) 二次函数的最值.

定义在 $\mathbf{R}$ 上的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 当 $a>0$ 时, 有最小值 $f(x)_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$;当 $a<0$ 时, 有最大值 $f(x)_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

3. 二次函数恒成立问题: 转化为最值问题或者参变分离.

类型 1

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,

(1) $f(x)>0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $\Delta<0$;

(2) $f(x)<0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a<0$ 且 $\Delta<0$.

类型 2

$f(x)>a$ 对一切 $x\in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}>a$,

$f(x)<a$ 对一切 $x\in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}<a$.

【例 3-3】 已知实系数二次函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若方程 $f(x)=g(x)$ 和 $3f(x)+g(x)=0$ 都只有一对重根，方程 $f(x)=0$ 有两个不等的实根。求证：方程 $g(x)=0$ 没有实根。

分析 二次方程 $f(x)=g(x)$ 有重根, 从解析式出发, 有 $f(x)-g(x)=a_1(x-b_1)^2$;从判别式出发, 有 $\Delta=0$. 可得本题有两种解法.

证法 1：由题意，不妨设 $f(x)-g(x)=a_1(x-b_1)^2, 3f(x)+g(x)=a_2(x-b_2)^2$ ，解得 $f(x)=\frac{1}{4}[a_1(x-b_1)^2+a_2(x-b_2)^2], g(x)=\frac{1}{4}[a_2(x-b_2)^2-3a_1(x-b_1)^2]$.

因为方程 $f(x)=0$ 有两个不等的实根, 则 a_1,a_2 异号且 $a_1\neq -a_2, b_1\neq b_2$, 于是 $a_2,-3a_1$同号, $b_1\neq b_2$, 所以 $g(x)=\frac{1}{4}[a_2(x-b_2)^2-3a_1(x-b_1)^2]$ 恒为正或恒为负, 所以方程 $g(x)=0$ 没有实根。

证法 2: 设 $f(x)=ax^2+bx+c, g(x)=dx^2+ex+f, ad\neq 0$, 则

$$f(x)-g(x)=(a-d)x^2+(b-e)x+c-f \quad (1)$$
$$3f(x)+g(x)=(3a+d)x^2+(3b+e)x+3c+f \quad (2)$$

所以 $(b-e)^2=4(a-d)(c-f), (3b+e)^2=4(3a+d)(3c+f)$. 即

$$b^2-2be+e^2=4ac-4af-4dc+4df$$
$$9b^2+6be+e^2=36ac+12af+12cd+4df$$

$(1)\times 3+(2)$ 整理得 $3b^2+e^2=12ac+4df$.

又 $b^2-4ac>0$，得 $\Delta_{g(x)}=e^2-4df=-4(b^2-4ac)<0$，所以方程 $g(x)=0$ 没有实根.

评注 例 3-3 直接用判别式解答，中间代数运算的过程有点麻烦.

【例 3-4】设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 满足：

(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$，且 $f(x)\geqslant x$;

(2) 当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大值 $m(m>1)$，使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$.

分析 首先要根据已知条件建立关于 a,b,c 的关系式，求出 $f(x)$ 的解析式，然后再解决二次函数的恒成立问题.

解：由 (1) 知，$x=-1$ 是 $f(x)$ 的对称轴，所以 $-\frac{b}{2a}=-1,b=2a$，且 $f(1)\geqslant 1$. 又由 (2)知，$f(1)\leqslant 1$，所以 $f(1)=1,a+b+c=1$. 由 $f(-1)=0,a-b+c=0$，从而 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4},f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

若存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$，就有 $f(x+t)\leqslant x$.

令 $x=1$，有 $f(t+1)\leqslant 1$，即 $\frac{1}{4}(t+2)^2\leqslant 1$，解得 $-4\leqslant t\leqslant 0$.

对固定的 $t\in[-4,0]$，令 $x=m$，有 $f(t+m)\leqslant m$.

化简后，得 $m^2-2(1-t)m+(t^2+2t+1)\leqslant 0$ 。

解得 $1-t-\sqrt{-4t}\leqslant m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}$.

于是 $m\leqslant 1-t+\sqrt{-4t}\leqslant 1-(-4)+\sqrt{(-4)\times(-4)}=9$.

另一方面，当 $t=-4$ 时，对任意的 $x\in[1,9]$，恒有

$$f(x-4)-x=\frac{1}{4}(x^2-10x+9)=\frac{1}{4}(x-1)(x-9)\leqslant 0$$

综上所述，m 的最大值为 9.

【例 3-5】 $f(x)=x^2+px+q$. 若 $f(f(x))=0$ 只有一个实数根，求证：$p,q\geqslant 0$.

分析 设 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的根，则使得 $f(x)=x_0$ 成立的 x 的取值即为方程 $f(f(x))=0$ 的根.

证明： 证法一：$f(f(x))=0$，即 $f^2(x)+pf(x)+q=0$，由题意知 $\Delta=p^2-4q\geqslant 0$.

(1) 若 $\Delta=p^2-4q>0$，

设 $f(f(x))=0$ 的两个根为 $f(x)=x_1$，$f(x)=x_2(x_1\neq x_2)$，

即 $x^2+px+q-x_1=0$ 或 $x^2+px+q-x_2=0$.

依题意，两方程中仅有一解，不妨设

$$\Delta_1=p^2-4(q-x_1)<0,\Delta_2=p^2-4(q-x_2)=0.$$

故 $x_1<q-\frac{p^2}{4}<0$，$x_2=q-\frac{p^2}{4}<0$.

再由韦达定理知 $q=x_1\cdot x_2>0$，$p=-(x_1+x_2)>0$.

(2) 若 $\Delta=p^2-4q=0$，

设 $f(f(x))=0$ 的根为 $f(x)=x_0$，

即 $x^2+px+q-x_0=0$. 依题意 $\Delta_3=p^2-4(q-x_0)=0$，

所以 $x_0=0$.

所以 $q=x_0\cdot x_0=0$，$p=-(x_0+x_0)=0$.

综上，$p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$.

证法二：$f(f(x))=0$，即 $f^2(x)+pf(x)+q=0$，显然其判别式 $p^2-4q\geqslant 0$.

由求根公式知

$$f(x)=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

而 $f(f(x))=0$ 有且仅有一个实数解，且 $f(x)\in\left[q-\frac{p^2}{4},+\infty\right)$，

所以 $f(x)=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\left(f(x)=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\text{舍去}\right)$.

且 $f(x)=x^2+px+q=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ 有且仅有一解，即 $x^2+px+q-\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}=0$ 有且仅有一解，即

$$\Delta=p^2-4\left(q-\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)=0.$$

所以

$$p^2-4q-2p+2\sqrt{p^2-4q}=0,$$

可得

法三：证明: 由题意, $f(f(x))=0$ 有解, 从而 $f(x)=0$ 一定有解.

(1) 若 $f(x)=0$ 有且仅有一个解 x_0, 则 $\Delta=0, f(x)=0$ 的值域为 $[0,+\infty)$. 由 $f(f(x))=0$ 有且只有一个解, 则 $f(x)=x_0$ 有且只有一个解, 所以 $x_0=0$, 此时, $p=q=0$.

(2) 若 $f(x)=0$ 有两个不等的解 $x_1,x_2(x_1<x_2)$, 即 $\Delta>0$ 。由于 $f(f(x))=$

0 有且只有一个解，即两个方程 $f(x)=x_1, f(x)=x_2$ 总共只有一个解，所以 $f(x)$ 的值域为 $[x_2,+\infty)$. 由 $f(x)=0$ 的判别式 $\Delta>0$ 得，$x_2<0$，则 $x_1<x_2=[f(x)]_{\min}<0$，则对称轴 $x=-\frac{p}{2}<0, f(0)=q>0$，即 $p>0, q>0$.

综上所述，$p, q \geqslant 0$.

评注 从方程 $f(x)=0$ 的根的个数进行分类讨论是例 3-5 很好的一个切入点，可以化难为易。

【例 3-6】设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$，对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0, l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)| \leqslant 5$ 都成立. 问：a 为何值时，$l(a)$ 最大?求这个最大的 $l(a)$，证明你的结论.

解：因为 $f(x)=a\left(x+\frac{4}{a}\right)^2+3-\frac{16}{a}(a<0)$，所以 $f(x)_{\max}=3-\frac{16}{a}$.

当 $3-\frac{16}{a}>5$，即 $-8<a<0$ 时，$l(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=5$，即 $ax^2+8x-2=0$ 的较小的根. 所以 $l(a)=\frac{-8+\sqrt{64+8a}}{2a}$.

$$\begin{aligned} l(a) &= \frac{1}{2a}(-8+\sqrt{64+8a})=\frac{1}{a}(\sqrt{16+2a}-4) \\ &= \frac{16+2a-16}{a(\sqrt{16+2a}+4)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{16+2a}+4}<\frac{2}{4}=\frac{1}{2}(\text{见图 } 3-1). \end{aligned}$$

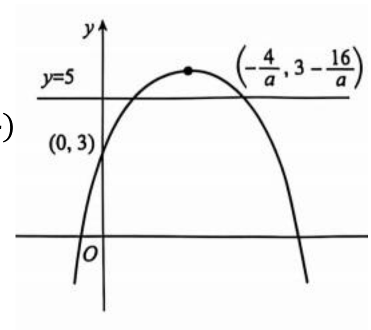


图 3-1

当 $3-\frac{16}{a} \leqslant 5$，即 $a \leqslant -8$ 时，$l(a)$ 是方程 $ax^2+8x+3=-5$ 的较大的根.

$$\begin{aligned} l(a) &= \frac{1}{2a}(-8-\sqrt{64-32a})=\frac{1}{a}(-4-2\sqrt{4-2a}) \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{(-4+2\sqrt{4-2a})(-4-2\sqrt{4-2a})}{-4+2\sqrt{4-2a}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4-2a}-2} \leqslant \frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

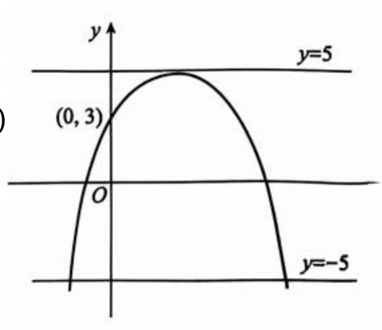


图 3-2

【例 3-7】已知函数 $f(x)=\left|x^2-a\right|$, 其中 $a>0$. 若恰好有两组解 (m,n) 使得 $f(x)$ 在定义域 $[m,n]$ 上的值域也为 $[m,n]$, 求实数 a 的取值范围.

分析 所给函数 $f(x)=\left|x^2-a\right|$ 是二次函数的形式，但含有绝对值，所以需要考虑 m ， n 的变化范围,设法去掉绝对值符号,再利用一元二次方程根的分布解决.

解：由于 $f(x)\geqslant 0$ ，于是 $m\geqslant 0$ 且 $m\neq\sqrt{a}$ ，按 $\sqrt{a}$ 所在的位置分三种情况讨论。

（1）当 $m<n\leqslant\sqrt{a}$ 时， $f(x)=\left|x^2-a\right|=-x^2+a$ 在 $[m,n]$ 上单调递减，于是 $\begin{cases}f(m)=-m^2+a=n,\\ f(n)=-n^2+a=m,\end{cases}$ 两式相减得 $m+n=1$, 于是 m,n 是关于 t 的方程 $-t^2+a=1-t$ 的.两个根, 即关于 t 的方程 $g(t)=t^2-t+1-a=0$ 在 $[0,\sqrt{a}]$ 上有两个不等实根, 则由根的分布

（2）当 $\sqrt{a}<m<n$ 时， $f(x)=\left|x^2-a\right|=x^2-a$ 在 $[m,n]$ 上单调递增，于是 $\left|\begin{matrix}f(m)=m^2-a=m\\ f(n)=n^2-a=n\end{matrix}\right.$ ，即关于 t 的方程 $g(t)=t^2-t-a=0$ 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 上有两个不等实根，则由根的分布可得 $\begin{cases}\Delta>0,\\ g(\sqrt{a})\geqslant 0,\\ \frac{1}{2}>\sqrt{a},\end{cases}$ 此时 a 无解.

(3) 当 $m<\sqrt{a}<n$ 时, 因为 $f(\sqrt{a})=0\in[m,n]$, 且 $m\geqslant 0$, 所以 $m=0$, 于是 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最大值为 $f(0)$ 或 $f(n)$ 。

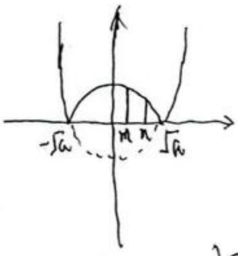
若 $f(0)$ 为最大值, 则 $\begin{cases}n=f(0),\\ f(n)\leqslant n,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n=a,\\ \left|n^2-a\right|\leqslant n,\end{cases}$ 结合 $\sqrt{a}<n$, 则 $\begin{cases}\left|a^2-a\right|\leqslant a,\\ \sqrt{a}<a,\end{cases}$

即

若 $f(n)$ 为最大值, 则 $\begin{cases}n=f(n),\\ f(0)\leqslant n,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}n=n^2-a,\\ a\leqslant n,\end{cases}$ 由第一个方程解得 $n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ (负舍), 结合 $\sqrt{a}<n$, 则 $\begin{cases}a\leqslant\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\\ \sqrt{a}<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 2$.

而当 $a=2$ 时, 以上两种情况对应的区间均为 $[0,2]$ ，不符合要求。

综上所述, a 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4},2\right)$.

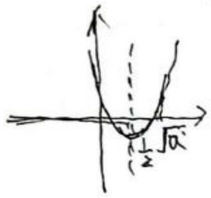


① $0\le m<n\le\sqrt{a}$ 时.

$\begin{cases} f(m)=n, \\ f(n)=m, \end{cases}$ $\begin{cases} a-m^2=n \\ a-n^2=m \end{cases}$ $n^2-m^2=n-m$ $\therefore n+m=1.$

$a-m^2=n=1-m$, $m^2-m+1-a=0$ 的根.

即 m、n 为方程 $\underbrace{t^2-t+1-a=0}_{[0,\sqrt{a})}$ 的两根 不同的. 令 $g(x)=x^2-x+1-a$



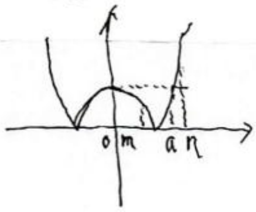
$\begin{cases} g(0)\ge 0 & 1-a\ge 0 & a\le 1. \\ g(\sqrt{a})\ge 0 & a-\sqrt{a}+1-a>0, & a\le 1 \\ \frac{1}{2}<\sqrt{a} & a>\frac{1}{4} & a>\frac{1}{4} \\ \Delta>0 & 1-4(1-a)>0; & a>\frac{3}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow \underline{\frac{3}{4}<a\le 1}$, (I)

注: 对 (m,n) 一组解

(2) 当 $\sqrt{a}<m<n$ 时; ……. X

(3) 当 $m<\sqrt{a}<n$ 时. 由于 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最小值为 0. $\therefore m=0$.

此时, 最大值为 $f(0)=a$ 或 $f(n)=n^2-a$



$\therefore$ (I) $\begin{cases} f(0)=a=n \\ f(n)=n^2-a\le n=a, \end{cases}$ 或 (II) $\begin{cases} n^2-a=n. \\ f(n)=n^2-a\ge a. \end{cases}$

$\therefore$ (I) $a^2-a\le a$, $a^2-2a\le 0$, $0\le a\le 2$; 且 $\sqrt{a}<n=a$, $a<a^2$. $a>1$ $\Big\}\Rightarrow 1<a\le 2$ → 对 (m,n) 而言有一组解 (II),

(II) $\begin{cases} n^2-a=n, & n^2-n-a=0, \quad n=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \text{ 舍"-"} \\ n\ge a & , \boxed{\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\ge a} \end{cases}$ $=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ $\therefore 1+\sqrt{1+4a}\ge 2a.$

$\sqrt{1+4a}\ge 2a-1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 4a+1\ge 0 \\ 2a-1<0. \end{cases}$ $\vee (a>0)$, $\begin{cases} 4a+1\ge 0 \\ 2a-1\ge 0, & a\ge\frac{1}{2}. \\ 1+4a\ge(2a-1)^2=4a^2-4a+1. \\ \Leftrightarrow 4a^2-8a\le 0, & a\le 2 \end{cases}$

$\therefore 0<a<\frac{1}{2}$; or $\frac{1}{2}\le a\le 2$

$\therefore 0<a\le 2$ (II) → 对 (m,n) 而言有一组解.

综, $a\in(0,\frac{3}{4}]$ 一组解 (m,n); $\underbrace{a\in(\frac{3}{4},1] \text{ 两组}, [1,2) \text{ 两组}}_{\text{合并 } a\in(\frac{3}{4},2)}$; $a=2$ 一组; $a>2$ 零组;

【例 3-8】将 25 个首项系数为正的二次三项式放置在 5×5 的正方形表格中. 它们的 75 个系数都是取自从 -37 到 37 的整数 (每个数只用一次). 证明: 至少有一列中的所有二次三项式的和有实根。

证明: 用反证法. 假设表格的每一列中所有二次三项式的和都没有实根. 令 $S_j(x)$ 为第 j 列中所有二次三项式的和, 其中 $1\leqslant j\leqslant 5$. 由于每个二次三项式的首项系数都是正的, $S_j(x)$的首项系数也是正的. 因为 $S_j(x), 1\leqslant j\leqslant 5$ 是没有实根的二次三项式, 所以对于所有 x, $S_j(x)>0, 1\leqslant j\leqslant 5$.

现在考虑表格中所有二次三项式的和 $S(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. 由于对于所有 $x, S_j(x)>0$,所以, 对于所有 $x, S(x)=\sum_{j=1}^{5} S_j(x)>0$.

但是观察到 $\alpha+\beta+\gamma=\sum_{k=-37}^{37} k=0$. 这推出 $S(1)=0$, 与对于所有 $x, S_j(x)>0$ 矛盾. 因此至少有一列中的所有二次三项式的和 $S_j(x)$ 有实根.

.

第四讲 函数的概念、图像与性质

知识方法述要

1.映射与函数

对于任意两个集合 A,B, 依对应法则 f, 若对 A 中的任意一个元素 x, 在 B 中都有唯一一个元素与之对应, 则称 $f:A\to B$ 为一个映射. 若 $f:A\to B$ 是一个映射, 且对任意 $x,y\in A$, $x\neq y$ 都有 $f(x)\neq f(y)$, 则称之为单射. 若 $f:A\to B$ 是映射, 且对任意 $y\in B$, 都有一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的满射. 若 $f:A\to B$ 既是单射又是满射, 则叫作一一映射. 一一映射存在逆映射, 即从 B 到 A 由相反的对应法则 f^{-1} 构成的映射, 记作 $f^{-1}:B\to A$.

从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f:A\to B$ 叫作 A 到 B 的函数,记作:

$$y=f(x), \text{其中 } x\in A, y\in B.$$

这里的数集 A 称为函数 f 的定义域. 对于 A 中的每个元素 x, 根据对应法则 f 所对应的 B 中的元素 y,称为 f 点在 x 的函数值, 记为 $f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}\subseteq B$$

称为函数 f 的值域.

2. 函数的图像

点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像, 其中 D 为 $f(x)$ 的定义域.函数图像形象地显示函数性质, 为研究数量关系问题提供了 "形" 的直观性, 它是探求解题途径、获得问题结果的重要工具. 应当重视数形结合解题的思想方法.

函数图像变换主要有平移、对称、伸缩三种基本变换.

(1) 平移变换.

水平平移: $y=f(x\pm a)(a>0)$ 的图像, 可由 $y=f(x)$ 的图像向左 $(+)$ 或向右 $(-)$ 平移 a 个单位而得到;

坚直平移: $y=f(x)\pm b(b>0)$ 的图像, 可由 $y=f(x)$ 的图像向上 $(+)$ 或向下 $(-)$ 平移 b 个单位而得到.

(2) 对称变换.

$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称;

$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 x 轴对称;

$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 关于原点对称;

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 伸缩变换.

$y=Af(x)(A>0)$ 的图像，可将 $y=f(x)$ 图像上每一点的纵坐标伸 $(A>1)$ 缩 $(0<A<1)$ 到原来的 A 倍,横坐标不变而得到;

$y=f(ax)(a>0)$ 的图像，可将 $y=f(x)$ 的图像上每一点的横坐标(伸) $(0<a<1)$ 缩 $(a>1)$ 到原来的 $\frac{1}{a}$, 纵坐标不变而得到.

3. 函数的性质

(1) 单调性: 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足对任意的 $x_1,x_2\in I$, 并且 $x_1<x_2$, 总有 $f(x_1)<f(x_2)\big(f(x_1)>f(x_2)\big)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是增(减) 函数，区间 I 称为单调增(减) 区间.

设 $f(x)$ 在区间 I_1 和 I_2 上都分别是单调递增(或递减)，且 $I_1\cap I_2\neq\emptyset$, 则 $f(x)$ 在 $I_1\cup I_2$ 上也是单调递增（或递减）的（若 $I_1\cap I_2=\emptyset$, 则不一定成立，如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上均为单调递减，但在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不是单调递减的).

（2）奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 且 D 是关于原点对称的数集，若对于任意的 $x\in D$, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数；若对任意 $x\in D$, 都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数. 奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

（3）周期性：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个不为零的常数 T ，使得当 x 取定义域内每一个数时，$f(x+T)=f(x)$ 总成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为这个函数的周期，如果周期中存在最小的正数 T_0, 则这个正数叫作函数 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数具有无穷多个周期，并不是任何周期函数都有最小正周期，一个十分著名的例子是狄里赫勒函数.

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\{\text{有理数}\},\\0, x\in\{\text{无理数}\}.\end{cases}$$

常量函数 $f(x)=a(x\in\mathbf{R})$, 同样是无最小正周期的周期函数.

4. 连续函数的性质

若 $a<b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根.

处理函数问题时要注意数形结合思想的应用，经常要将函数与方程相联系.

【例 4-1】求函数 $f(x)=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域.

分析 要求函数的最值或值域，首先考虑函数在定义域内的单调性.

解法 1：函数的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

（1）当 $x\geqslant 1$ 时,易知 $x^2\geqslant 1, x\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$，于是 $f(x)=x^2+x\sqrt{x^2-1}\geqslant 1$,当 $x=1$ 时取等号。

(2) 当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=x^2+x\sqrt{x^2-1}=\frac{x}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$. 因为 $x\leqslant -1$,则 $0\leqslant 1-\frac{1}{x^2}<1, 1\leqslant 1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}<2$，所以 $\frac{1}{2}<f(x)\leqslant 1$.所以，原函数的值域为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

解法 2: 由 $f(x)=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 得,

$$2f(x)=x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)+1=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+1$$

(1) 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，易知函数 $t(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ 是增函数，所以 $t(x)\geqslant t(1)=1$，从而 $f(x)\geqslant 1$.

（2）当 $x\in(-\infty,-1]$ 时，易知函数 $t(x)=x+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 是减函数,所以 $1=t(-1)\leqslant t(x)<0$，从而 $1<2f(x)\leqslant 2$，即 $\frac{1}{2}<f(x)\leqslant 1$.

所以，$f(x)$ 的值域为 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

【例 4-2】 已知 $\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+4}-2\right)\geqslant y>0$，求 $x+y$ 的最小值.

分析 本题结构较为复杂，颇难处理，但若将条件变形为

$$2x+\sqrt{4x^2+1}\geqslant\frac{2}{y}+\sqrt{\frac{4}{y^2}+1}$$

并自然联想起函数的单调性,则问题迎刃而解.

解：已知条件可以变形为

$$2x+\sqrt{4x^2+1}\geqslant\frac{y}{\sqrt{y^2+4}-2}=\frac{y\left(\sqrt{y^2+4}+2\right)}{y^2}=\frac{2}{y}+\sqrt{\frac{4}{y^2}+1},$$

构造函数 $f(t)=2t+\sqrt{4t^2+1}$，则以上不等式即为 $f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{y}\right)$.

由于 $f(t)=2t+\sqrt{4t^2+1}=\frac{1}{\sqrt{4t^2+1}-2t}$，易知 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 与 $(-\infty,0]$ 上均单调递增，于是 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 所以由 $f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{y}\right)$ 知，$x\geqslant\frac{1}{y}$，又因为 $y>0$，所以 $xy\geqslant1$，所以 $x+y\geqslant2\sqrt{xy}=2$，当且仅当 $x=y=1$ 时,等号成立.

【例 4-6】设 a,b,c,d 是实数，且满足 $(a+b+c)^2\geqslant2(a^2+b^2+c^2)+4d$，求证：

$$ab+bc+cd\geqslant3d$$

证明：题设不等式可以变形为

$$c^2-2(a+b)c+\left[(a^2+b^2)-2ab+4d\right]\leqslant0$$

于是可构造二次函数 $f(x)=x^2-2(a+b)x+(a^2+b^2)-2ab+4d,f(x)$ 是开口向上的抛物线,且 $f(c)\leqslant0$，从而抛物线与 x 一定有交点，于是

$$\Delta=4(a+b)^2-4(a^2+b^2-2ab+4d)\geqslant0$$

所以 $ab\geqslant d$. 同理可证 $bc\geqslant d,ac\geqslant d$，所以 $ab+bc+cd\geqslant3d$.

第五讲 幂函数、指数函数、对数函数

知识方法概要

1.幂函数

形如 $y=x^a(a\in\mathbf{R})$ 的函数叫作幂函数.

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0,a\neq1)$ 的函数叫作指数函数，其定义域是 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$。当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减.它的图像恒过定点 $(0,1)$.

分数指数幂:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},a^{-n}=\frac{1}{a^n},a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

有理指数幂 $(a>0,b>0,p\in\mathbf{Q},r\in\mathbf{Q})$：

$$a^p\cdot a^r=a^{p+r},(a^p)^r=a^{pr},(ab)^p=a^pb^p.$$

3.对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的函数叫作对数函数。其定义域是 $(0,+\infty)$ ，值域是（$-\infty$ ， $+\infty$）。 它是指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的反函数，所有性质均可由指数函数的性质导出。当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $0<a<1$ 时， $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。它的图像过定点 (1,0).

对数的运算性质 $(M>0,N>0,a>0,a\neq 1,n\in\mathbf{R})$：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$
$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$
$$\log_a M^n=n\log_a M$$

对数恒等式： $a^{\log_a N}=N.$

对数换底公式： $\log_a M=\frac{\log_c M}{\log_c a}(a>0,a\neq 1;M>0;c>0,c\neq 1).$

由以上性质容易得到以下推论:

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\log_{a^n}b^m=\frac{m}{n}\log_a b.$$

指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数.

【例 5-5】 已知 $a>0,a\neq 1$，试求使方程

$$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$$

有解的 k 的取值范围.

解：方程等价于

$$\begin{cases}x-ak>0\\x^2-a^2>0\\(x-ak)^2=x^2-a^2\end{cases}$$

即等价于

$$\begin{cases} x - ak > 0 \\ 2kx = a(1+k^2) \end{cases}$$

注意到 $a > 0$ ，所以

当 $k = 0$ 时,方程 (3) 无解.

当 $k \neq 0$ 时,方程 (3) 的解为

$$x = \frac{a(1+k^2)}{2k}$$

因为式 (3) 满足式 (1), 所以

$$\frac{a(1+k^2)}{2k} - ak = \frac{a(1-k^2)}{2k} > 0$$

即

$$k(k^2 - 1) < 0$$

所以, k 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (0,1)$.

评注 例 5-5 还可以用数形结合、函数的思想求解:

设 $y_1 = (x-ak)^2, y_2 = x^2 - a^2$, 分别作出其图像, 交点的横坐标 x 即为方程 $(x-ak)^2 = x^2 - a^2$ 的解。这里 $y_1 = (x-ak)^2$ 的顶点横坐标 ak 只有两种情况才能保证交点的横坐标 $x > ak$,分别是 $ak < -a$ 和 $0 < ak < a$, 如图 5-1. 所以 k 的取值范围是 $k < -1$ 或 $0 < k < 1 (a > 0)$.

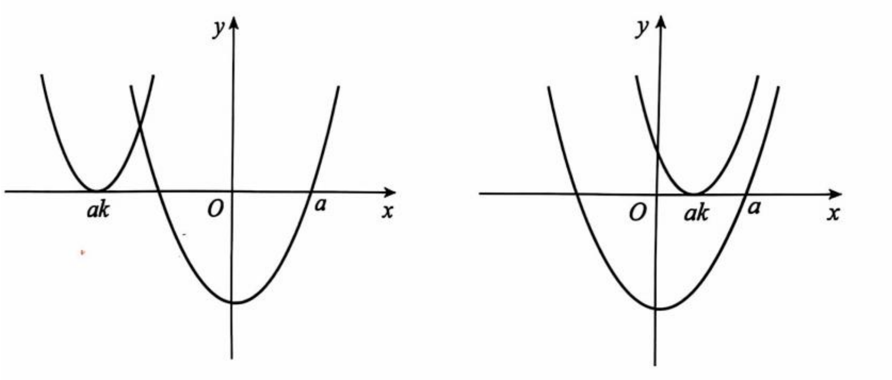


图 5-1

【例 5-6】 已知方程 $2^{333x-2} + 2^{111x+2} = 2^{222x+1} + 1$ 有三个实数根, 求这三个实数根的和.

解: 设 $y = 2^{111x}$, 则原方程等价于

$$\frac{1}{4}y^3+4y=2y^2+1,$$

化简后即为

$$y^3-8y^2+16y-4=0$$

因为原方程的根为实数，所以以上关于 y 的方程三个根都是正数。设原方程的三个根分别为 x_1,x_2,x_3，关于 y 的方程三个根分别为 y_1,y_2,y_3，则

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{111}\left(\log_2 y_1+\log_2 y_2+\log_2 y_3\right)=\frac{\log_2 y_1y_2y_3}{111}=\frac{\log_2 4}{111}=\frac{2}{111}$$

评注 最后用到一元三次方程的韦达定理：若 x_1,x_2,x_3 是一元三次方程 $ax^3+bx^2+\ cx+d=0$ 的三个实根，则

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a}\\x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

【例 5-7】求满足等式

$$\left|\lg(xx_1)\right|+\left|\lg(xx_2)\right|+\cdots+\left|\lg(xx_n)\right|+\left|\lg\frac{x}{x_1}\right|+\left|\lg\frac{x}{x_2}\right|+\cdots+\left|\lg\frac{x}{x_n}\right|$$
$$=\left|\lg x_1+\lg x_2+\cdots+\lg x_n\right|$$

的所有正实数 $x,x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值.

解：利用绝对值性质，

$$\left|\lg(xx_1)\right|+\left|\lg\frac{x}{x_1}\right|\geqslant\left|\lg(xx_1)-\lg\frac{x}{x_1}\right|=\left|\lg x_1^2\right|=2\left|\lg x_1\right|$$

等式 (1) 左边 $\geqslant 2\left(\left|\lg x_1\right|+\left|\lg x_2\right|+\cdots+\left|\lg x_n\right|\right)$，

然而，等式 (1) 右边 $\leqslant\left|\lg x_1\right|+\left|\lg x_2\right|+\cdots+\left|\lg x_n\right|$ 。

所以等式 (1) 不成立,除非 $\left|\lg x_1\right|=\left|\lg x_2\right|=\cdots=\left|\lg x_n\right|=0$，因此 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$,也不难证明 $x=1$.

【例 5-9】已知 x 是正数，求 $2^x-4^x+6^x-8^x-9^x+12^x$ 的最小值.

解：注意到 $1+2^x-4^x+6^x-8^x-9^x+12^x=(3^x-2^x-1)(4^x-3^x-1)$，因为函

数 $1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ 和 $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ 都是 x 的增函数，且当 $x=1$ 时，函数值为零，所以，当 $x>1$ 时,这两个函数都为正；当 $x<1$ 时，这两个函数都为负．于是

$$1+2^{x}-4^{x}+6^{x}-8^{x}-9^{x}+12^{x}=12^{x}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\right]\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\right]\geqslant 0$$

当且仅当 $x=1$ 时，等号成立．所以，当 $x=1$ 时，所求的最小值为 -1．

同步练习

1、 已知 $a>0,b>0,\log_{9}a=\log_{12}b=\log_{16}(a+b)$，求 $\frac{b}{a}$ 的值.

解法 1：设 $\log_{9}a=\log_{12}b=\log_{16}(a+b)=k$ ，则 $a=9^{k},b=12^{k},a+b=16^{k}$ 。由于 $9^{k}\times 16^{k}=\left(12^{k}\right)^{2}$，所以 $(a+b)a=b^{2}$，解得 $\frac{b}{a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (负根舍去).

评注 ：连等式中，我们常设其都等于一个变量来解决问题。而例 5-1 的解法直入结论求 $\frac{b}{a}$，值得借鉴。

解法 2：设 $\log_{9}a=\log_{12}b=\log_{16}(a+b)=k$ ，则 $a=9^{k}$，$b=12^{k},a+b=16^{k}$ 。

$\frac{b}{a}=\frac{12^{k}}{9^{k}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{k}$，而 $9^{k}+12^{k}=16^{k}$，所以 $1+\frac{12^{k}}{9^{k}}=\frac{16^{k}}{9^{k}}$，即 $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{k}\right]^{2}-\left(\frac{4}{3}\right)^{k}-1=0$，则 $\frac{b}{a}=\left(\frac{4}{3}\right)^{k}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (负根舍去).

2、已知 x_{1} 是方程 $x+\lg x=10$ 的根，x_{2} 是方程 $x+10^{x}=10$ 的根，求 $x_{1}+x_{2}$ 的值.

解法 1: 由题意得 $\begin{cases}\lg x_{1}=10-x_{1},\\ 10^{x_{2}}=10-x_{2},\end{cases}$ 表明 x_{1} 是函数 $y=\lg x$ 与 $y=10-x$ 的交点的横坐标，x_{2} 是函数 $y=10^{x}$ 与 $y=10-x$ 的交点的横坐标．因为 $y=\lg x$ 与 $y=10^{x}$ 互为反函数，其图像关于 $y=x$ 对称，由 $\begin{cases}y=10-x,\\ y=x\end{cases}$ 得， $\begin{cases}x=5,\\ y=5,\end{cases}$ 所以 $\frac{x_{1}+x_{2}}{2}=5,x_{1}+x_{2}=10$.

解法 2：构造函数 $f(x)=x+\lg x$，由 $x_{1}+\lg x_{1}=10$ 知 $f(x_{1})=10,x_{2}+10^{x_{2}}=10$，即 $10^{x_{2}}+\lg 10^{x_{2}}=10$，则 $f(10^{x_{2}})=10$，于是 $f(x_{1})=f(10^{x_{2}})$，又 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的增

函数, 所以 $x_1=10^{x_2}, x_1+x_2=10^{x_2}+x_2=10$.

解法 3: 由题意得 $\begin{cases}x_1=10^{10-x_1},\\10-x_2=10^{x_2},\end{cases}$ 两式相减有 $x_1+x_2-10=10^{10-x_1}-10^{x_2}\cdot$ 若 $x_1+x_2-10>0$, 则 $10^{10-x_1}-10^{x_2}>0$, 得 $10-x_1>x_2$, 矛盾; 若 $x_1+x_2-10<0$, 则 $10^{10-x_1}-10^{x_2}<0$,得 $10-x_1<x_2$, 矛盾; 而当 $x_1+x_2=10$ 时, 满足题意.

3、若 $a>a^2>b>0, m=\log_b \frac{b}{a}, n=\log_a \frac{a}{b}, p=\log_b a, q=\log_a b$. 求 m,n,p,q 从小到大的排列顺序.

分析 先简单得到一些大小关系，再用比较法。

解：由 $a>a^2$ 得 $a\in(0,1), \frac{a}{b}>1, n=\log_a \frac{b}{a}<0$ ；又 $\frac{b}{a}<a, b\in(0,1), \log_b \frac{b}{a}>\log_b a$.得 $m>p$; 又 $b<a, a\in(0,1)$ 得 $\log_a b>\log_a a=1$, 即 $q>1, p=\frac{1}{q}\in(0,1), p<q$ ；下面比较 m,q 的大小.

$$m-q=\log_b \frac{b}{a}-\log_a b=1-\log_b a-\log_a b=1-(\log_b a+\log_a b)$$

由平均值不等式知 $\log_a b+\log_b a>2$, 从而 $m-q<0, m<q$.

综上所述， $n<p<m<q$ 。

评注： 要掌握对数的上底或下底变动时对数值的变化情况。可以使用换底公式来判断（都换成自然对数）。

4、求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+4}+\sqrt{x^2-2x}$ 的最小值

【解析】先考虑 $f(x)$ 的定义域, 由 $2x^2-3x+4\geqslant 0, x^2-2x\geqslant 0$ 得 $x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ 。易见 $y=2x^2-3x+4$ 及 $y=x^2-2x$ 都在 $(-\infty,0]$ 上递减, 在 $[2,+\infty)$ 上递增. 于是 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上递减,在 $[2,+\infty)$ 上递增.

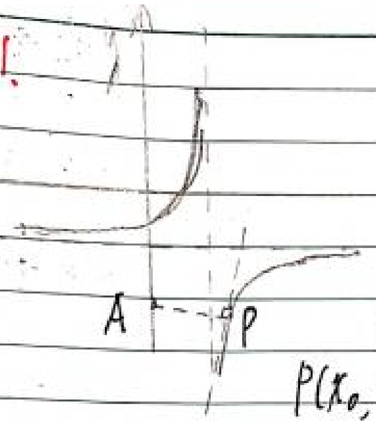
所以 $f(x)_{\min}=\min\{f(0),f(2)\}=\min\{2,\sqrt{6}\}=2$, 即 $f(x)$ 的最小值为 2 .

5. 定义：若函数 $f(x)$ 图像上的点到定点 A 的最短距离小于 3，则称函数 $f(x)$ 是点 A 的近

点函数，已知函数 $f(x)=\dfrac{-2x+a}{x-2}$ 在 $(2,+\infty)$ 上是严格增函数，且是点 $A(0,-4)$ 的近点函数，求实数 a 的取值范围.

12.【解析】

11.



$f(x)=-2+\dfrac{a-4}{x-2}$，∵ $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上↑ ∴ $a<4$，

设 P 为 $f(x)$ 图像上离 A 最近的点，则令 $P\left(x_0,-2+\dfrac{a-4}{x_0-2}\right)$，$f'(x)=\dfrac{4-a}{(x-2)^2}$

由过 P 的切线与 AP 垂直有，

$\therefore \dfrac{\left(-2+\frac{a-4}{x_0-2}\right)-(-4)}{x_0-0}\cdot\dfrac{4-a}{(x_0-2)^2}=-1$，

$\Rightarrow \dfrac{\frac{a-4}{x_0-2}+2}{x_0}\cdot\dfrac{a-4}{(x_0-2)^2}=1$，令 $t=\dfrac{a-4}{x_0-2}$，则

$\dfrac{t+2}{x_0}\cdot\dfrac{t}{x_0-2}=1 \Rightarrow (t+x_0)(t-x_0+2)=0$

$\therefore \dfrac{a-4}{x_0-2}=-x_0$ 或 $\dfrac{a-4}{x_0-2}=x_0-2$（舍，∵ $a<4$）.

又 $f(x)$ 是 $A(0,-4)$ 的近点函数 ∴ $x_0^2+\left(2+\dfrac{a-4}{x_0-2}\right)^2<9$

$\therefore x_0^2+(2-x_0)^2<9$，$2x_0^2-4x_0-5<0$

$\therefore a-4=-x_0(x_0-2)>-\dfrac{5}{2} \Rightarrow a>\dfrac{3}{2}$.

综上 $a\in\left(\dfrac{3}{2},4\right)$，

编号：课 116-1 上海立信会计用品总公司出品

6. 已知函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+3-a$，若对于任意的 $a\in(0,4)$，存在 $x\in[0,2]$，使得 $|f(x)|\geq t$，则实数 t 的取值范围是__________

6.【解析】由题意，对任意 $a\in(0,4)$，$\max\limits_{0\leq x\leq 2}|f(x)|\geq t$，故 $\min\limits_{0<a<4}\left(\max\limits_{0\leq x\leq 2}|f(x)|\right)\geq t$. 由于 $f(x)$ 的

对称轴 $x=2-\frac{a}{2}\in(0,2)$，故 $\max|f(x)|=\max\left\{|3-a|,|a-1|,\frac{1}{4}(a-2)^2\right\}=|a-2|+1$，故 $t\le 1$.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, x<0\\ \log_a(x+1)+1, x\ge 0\end{cases}$, $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 R 上单调递减, 且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰好有两个不相等的实数解, 则 a 的取值范围是________.

7.【解析】

19、由 $f(x)$ 在R上↓

$\begin{cases}0^2+(4a-3)\cdot 0+3a\ge f(0)=1\\ -\frac{4a-3}{2}\ge 0\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{4}$，

由图可知 $[0,+\infty)$ 上 $|f(x)|=2-x$ 有且仅有一解，

∴ $(-\infty,0)$ 上 $|f(x)|=2-x$ 有且仅有一解，

① 当 $1\le 3a<2$ 时，符合条件，

② $3a=2$ 时

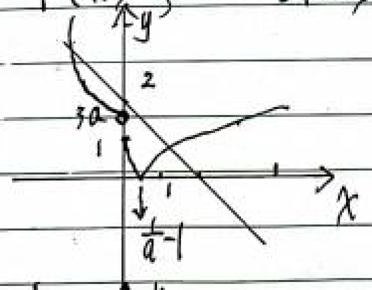
$x<0$ 时 $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x+2$ 令 $f(x)=2-x$

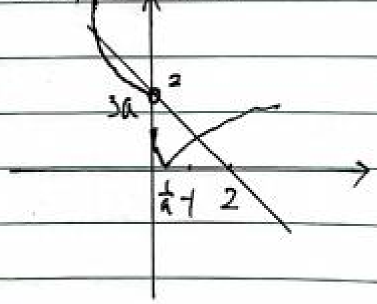
$x^2-\frac{1}{3}x+2=2-x$ $x=-\frac{2}{3}$，0(舍)，符合，

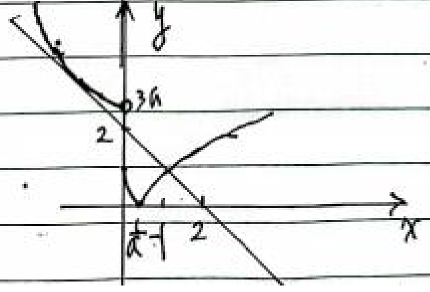
③ 当 $y=2-x$ 与 $y=x^2+(4a-3)x+3a$，$x<0$ 时，

恰好相切，$x^2+(4a-3)x+3a=2-x$，令 $\Delta=0$，$\Rightarrow a=\frac{3}{4}$，

1(舍)，　综上，$a\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup\{\frac{3}{4}\}$







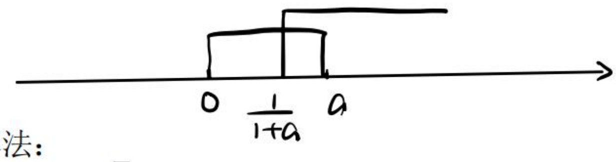
8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$，定义域为 $D=[0,+\infty)$，值域为 A，若集合 $\{y|\ y=f(x),x\in[0,a]\}$ 可取得 A 中所有值，则实数 a 的取值范围为_____.

8.【答案】$[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty)$

【解析】

倘若 $x\in[0,a]$, 那么 $y=f(x)$ 可取遍 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的取值.

对于 $x\geq a$ 的部分, 由于 $f(x)=f(\dfrac{1}{1+x})$, 此时 $0<\dfrac{1}{1+x}\leq\dfrac{1}{1+a}$. 因此想要使得通过 $f(\dfrac{1}{1+x})=f(x)$ 来得到全部的 $x\geq a$ 部分的取值, 仅需 $\dfrac{1}{1+a}\leq a$ 即可, 即 $a\geq\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



张朔解法:

当 $a\geq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 那么此时, 集合内一定能取到 $x\in[0,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}]$ 时 $f(x)$ 的值.

并且对于 $x\geq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 的部分, 由于此时 $0<\dfrac{1}{1+x}\leq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 由 $f(\dfrac{1}{1+x})=f(x)$ 便可得到全部的 $x\geq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 上的函数取值。

倘若 $a<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 构造函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq a\text{或者}x\geq\frac{1}{1+a}\\ 0, & a<x<\frac{1}{1+a}\end{cases}$$

此时函数满足 $f(x)=f(\dfrac{1}{1+x})$, 值域为 $\{0,1\}$.

集合 $\{y|y=f(x),x\in[0,a]\}=\{1\}\neq A$.

9. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\left|\frac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1-a\right|$，存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$ 成立，若正整数 n 的最大值为 8，则实数 a 的取值范围是_________.

9.【解析】

令 $t=\dfrac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1=1+\dfrac{2}{1+2^{-2x}}\in(-1,1)$, 因此原函数经换元后变为 $g(t)=|t-a|$, 其中 $t\in(-1,1)$.

倘若 $a\in(-1,1)$, 那么 $f(x)$ 的值域中包括 0 这个点,$f(x)$ 的值域是 $[0,m)$, 其中 $m=\max\{a+1,1-a\}$, 因此对于任意固定好的 n, 总能找到 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}$ 和 x_n, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_{n-1})=\frac{m}{2(n-1)}$,$f(x_n)=\frac{m}{2}$, 此时 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}f(x_k)=f(x_n)$.

若 $a\geq 1$, 那么 $f(x)$ 的值域是 $(a-1,a+1)$, 那么

$$(n-1)(a-1)<\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)=f(x_n)<a+1$$

因此 $n<\dfrac{a+1}{a-1}+1=\dfrac{2a}{a-1}$, 由于 n 最大为 8, 从而

$$8<\frac{2a}{a-1}\leq 9$$

结合 $a\geq 1$ 求得 $a\in[\dfrac{9}{7},\dfrac{4}{3})$.

若 $a\leq -1$, 那么 $f(x)$ 的值域便是 $(-1-a,1-a)$, 那么

$$(n-1)(-1-a)<\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)=f(x_n)<1-a$$

因此 $n<\dfrac{a-1}{a+1}+1=\dfrac{2a}{a+1}$, 由于 n 最大为 8, 从而

$$8<\frac{2a}{a+1}\leq 9$$

结合 $a\leq -1$ 求得 $a\in(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{9}{7}]$.

综上 $a\in(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{9}{7}]\cup[\dfrac{9}{7},\dfrac{4}{3})$.

10. 若关于 x 的方程 $1+\frac{\log_2(2\lg a-x)}{\log_2 x}=2\log_x 2$ 有两解, 求实数 a 的取值范围.

12、原方程定义域：$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x<2\lg a, \end{cases}$ * 由 $0<x<2\lg a \Rightarrow a>1$；

原方程可化为：$\log_2 x+\log_2(2\lg a-x)=2$，即 $x(2\lg a-x)=4$.

$x^2-2x\lg a+4=0$，令 $f(x)=x^2-(2\lg a)x+4$，$\begin{cases} x_1+x_2=2\lg a>0, \\ x_1\cdot x_2=4>0. \end{cases}$

$\Rightarrow$ x_1,x_2 必是正根（有根情况下）

由*式知，$\begin{cases} \Delta>0 \\ f(1)\neq 0. \\ (x_1-2\lg a)+(x_2-2\lg a)<0 \\ (x_1-2\lg a)(x_2-2\lg a)>0 \end{cases}$

$\Rightarrow a\in(100,10^{\frac{5}{2}})\cup(10^{\frac{5}{2}},+\infty)$；

11、已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，满足 $abc(a+b+c)=1$，

(1) 求 $S=(a+c)(b+c)$ 的最小值；

(2) 当 S 取最小值时，求 c 的最大值.

【解析】（1）因为 $(a+c)(b+c)=ab+ac+bc+c^2 \quad =ab+(a+b+c)c=ab+\frac{1}{ab}\geqslant 2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=2$，

等号成立的条件是 $ab=1$，当 $a=b=1,c=\sqrt{2}-1$ 时，S 可取最小值 2.

（2）当 S 取最小值时，$ab=1$，从而 $c(a+b+c)=1$，即 $c^2+(a+b)c-1=0$。

令 $t=a+b$，则 $t\geqslant 2\sqrt{ab}=2$，从而 $c=\frac{-t+\sqrt{t^2+4}}{2}$ 或者 $c=\frac{-t-\sqrt{t^2+4}}{2}<0$（舍去），所以 $c=\frac{-t+\sqrt{t^2+4}}{2}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}+t}$ 在 $t\in[2,+\infty)$ 单调递减，在 $t=2$ 时，c 有最大值 $\sqrt{2}-1$.

12.设 n 为奇数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是互不相同的实数，求满足

$$|f(x_1)-x_1|=|f(x_2)-x_2|=\cdots=|f(x_n)-x_n|$$

的一一映射 $f:\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\to\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

【解析】设 $a=|f(x_1)-x_1|=|f(x_2)-x_2|=\cdots=|f(x_n)-x_n|$. 对于每一个 $k,1\leqslant k\leqslant n$，有 $f(x_k)=x_k+\varepsilon_k a$，其中 $\varepsilon_k=1$ 或者 $\varepsilon_k=-1$. 把所有等式两边相加得

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + a\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

因 为 f 是 一 一 映 射 $f:\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \to \{x_1, x_2，\cdots, x_n\}, f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的一个排列，所以 $\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k$，从而 $a\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = 0$. 但是奇数个奇数之和不可能等于零，所以 $\sum^{n} \varepsilon_k \neq 0$，从而 $a = 0$，所以对于所有 $k, f(x_k) = X_K$