14、定义域分别是 D_f 、 D_g 的函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ ，规定：

$$h(x)=\begin{cases}f(x)\cdot g(x) & 当x\in D_f,且x\in D_g\\ f(x) & 当x\in D_f,且x\notin D_g\\ g(x) & 当x\in D_g,且x\notin D_f\end{cases},$$

①若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$， $g(x)=x^2$，求函数 $h(x)$ 的解析式；②求①中函数 $h(x)$ 的值域.

解：① $D_f=\{x|x\neq1,x\in R\}$，$D_g=R$

$h(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x-1}, & x\neq1\\ 1, & x=1\end{cases}$

② $x\neq1$时，$\frac{x^2}{x-1}=(x-1+\frac{1}{x-1})+2$

而 $x-1+\frac{1}{x-1}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

即$x\neq1$时，$h(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$

而$h(1)=1$，故$h(x)$的值域为$(-\infty,0]\cup\{1\}\cup[4,+\infty)$

15、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\le x\le 1\\ 1 & x<-1或x>1\end{cases}$， $g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & x<-1或x>1\end{cases}$.

①求函数 $y=f[g(x)]$ 的解析式；②求函数 $y=g[f(x)]$ 的解析式.

解：$g: R\to[0,1]$

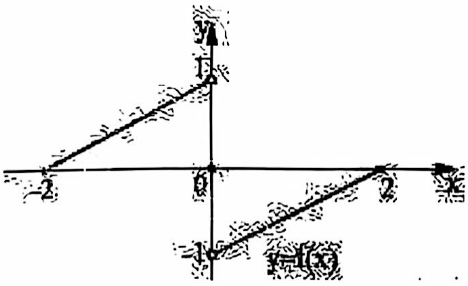
$f: R\to[0,1]$

① $y=(g(x))^2$

即 $y=\begin{cases}1-x^2, & -1\le x\le1\\ 0, & x<-1或x>1\end{cases}$

② $y=\sqrt{1-(f(x))^2}$

即 $y=\begin{cases}\sqrt{1-x^4}, & -1\le x\le1\\ 0, & x<-1或x>1\end{cases}$



16、根据函数 $y=f(x)$ 的图象：

（1）求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

（2）若 $g(x)=f(\dfrac{1}{x})$，求 $g(x)$ 的解析式，并作出 $g(x)$ 的图象.

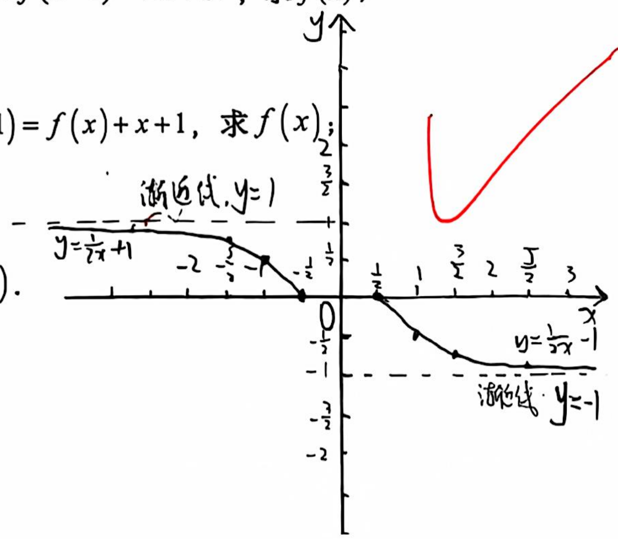
解：(1) $y=\begin{cases}\frac12x+1, & x\in[-2,0)\\ 0, & x=0\\ \frac12x-1, & x\in(0,2]\end{cases}$

(2) $g(x)=f(\frac1x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}+1, & x\in(-\infty,-\frac12]\\ \frac{1}{2x}-1, & x\in[\frac12,+\infty)\end{cases}$

图象见下

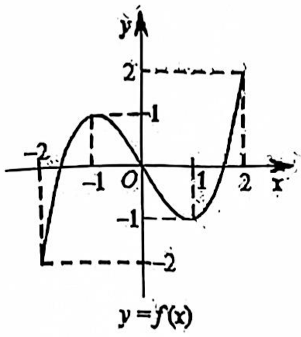
~~17~~、(1) 已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$，求 $f(x)$；

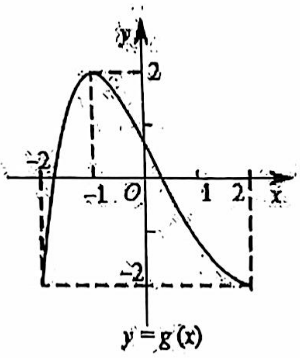
(2) 已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(0)=0$， $f(x+1)=f(x)+x+1$，求 $f(x)$；



(3) 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(\dfrac{1}{x})=3x$，求 $f(x)$.

解：





18、已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在 $[-2,2]$ 的图象如图所示．分别请写出 $f(g(x))=0$ 和 $g(f(x))=0$ 的根的个数.

解:(18.1) 令 $g(x)=t$

$f(t)=0$

$t_1\in(-2,-1)$, $t_2\in(1,2)$, $t_3=0$

而 $g(x)=t$

1° $g(x)\in(-2,-1)$

∃2个x满足

2° $g(x)\in(1,2)$

∃2个x满足

3° $g(x)=0$

∃2个x满足

故 $f(g(x))=0$ 有6个根

(2) 令 $f(x)=t$

$g(t)=0$

$t_1\in(-2,-1)$, $t_2\in(0,1)$

1° $f(x)\in(-2,-1)$

∃1个x满足

2° $f(x)\in(0,1)$

∃3个x满足

故 $g(f(x))=0$ 有6个根

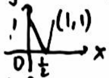
4.

【C组】 f：$\frac{1}{2}$ …… 0.7 0.1 0 / 0.6 0.7 …… 1，f 的形象化映射关系

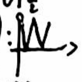
0 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1

1、已知 $f(x)=|1-2x|, x\in[0,1]$，求方程 $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{1}{2}x$ 的解的个数.

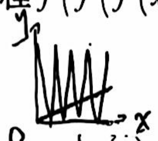
解：$y=f(x)$：



$y=f(f(x))$：



$y=f(f(f(x)))$，与 $y=\frac{1}{2}x$



故8个解

注：$y=g(x)$ 至 $y=f(g(x))$ 图象变换方法

$g:[0,1]\to[0,1]$

① 以直线 $y=1$ 为基准拉长1倍

② 将x轴以下部分延x轴作轴对称翻折操作

2、设函数 $g(x)=x^2-2(x\in\mathrm{R})$，$f(x)=\begin{cases} g(x)+x+4, & x<g(x) \\ g(x)-x, & x\geqslant g(x)\end{cases}$，则 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,0]\cup(2,+\infty)$

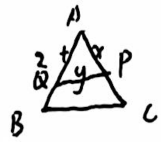
$f(x)=\begin{cases} x^2+x+2, & x<-1\text{或}x>2，\text{此时}f(x)\in(2,+\infty) \\ x^2-x-2, & -1\leq x\leq 2，\text{此时}f(x)\in(-\infty,0]\end{cases}$

3、已知△ ABC 为等边三角形，$AB=2$，P，Q 依次为 AC，AB 上的点，且线段 PQ 将△ ABC 分为面积相等的两部分，设 $AP=x$，$AQ=t$，$PQ=y$.

(1) 用解析式将 t 表示成 x 的函数；

(2) 用解析式将 y 表示成 x 的函数；

(3) 求 y 的最大值与最小值.



解：(1) $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\sin A\cdot xt$

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sin A\cdot 2^2$

故 $\frac{xt}{4}=\frac{S_{\triangle APQ}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$

即 $xt=2$

$t=\frac{2}{x}$，$x\in[1,2]$

(2) 在△APQ中，$x^2+t^2-y^2-2xt\cos A=0$

而 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{1}{2}$

$t=\frac{2}{x}$

故 $y^2=x^2+\frac{4}{x^2}-2$

即 $y=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}-2}$，$x\in[1,2]$

(3) $x\in[1,2]$

$x^2+\frac{4}{x^2}\geq 4$，在 $x=\sqrt{2}$ 时取等

$y=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}-2}\geq\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$

又由对勾函数的性质，

$x^2+\frac{4}{x^2}\leq\max\{1+\frac{4}{1},2^2+\frac{4}{2^2}\}=5$

$y\leq\sqrt{5-2}=\sqrt{3}$

故 $y_{max}=\sqrt{3}$，$y_{min}=\sqrt{2}$

又由于 $1422<\sqrt{1006\times 2011}<1423$，所以 $f(x)$ 的最小值一定在 $f\left(\frac{1}{1422}\right)$ 与 $f\left(\frac{1}{1423}\right)$ 两者中取得，而 $f\left(\frac{1}{1422}\right)=\frac{602\,043}{711}<f\left(\frac{1}{1423}\right)=\frac{1\,012\,399}{1423}$，

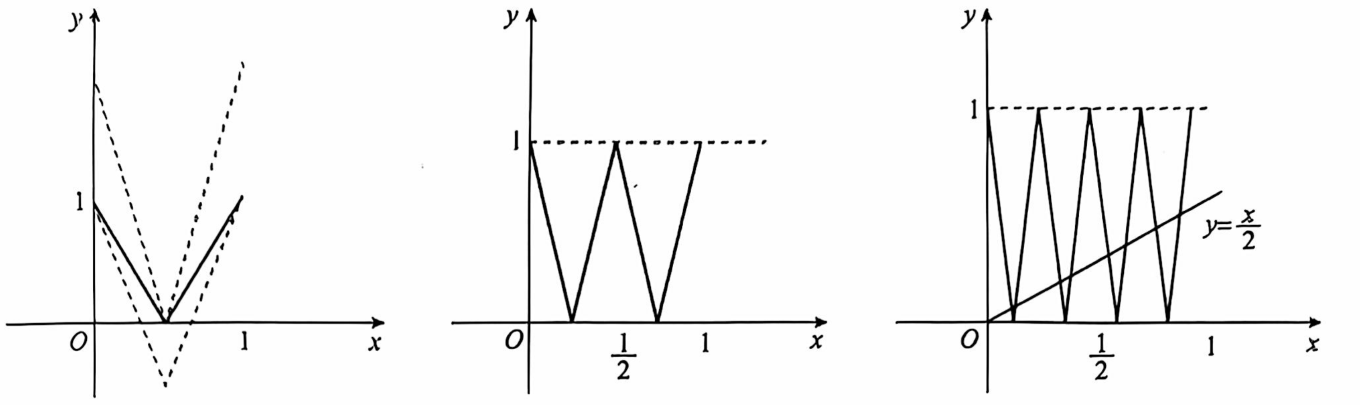
所以，当 $x=\frac{1}{1422}$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{1422}\right)=\frac{602\,043}{711}$.

评注 例 6-3 解法 1 从绝对值的几何意义出发求最值，解法 2 从函数图像的角度分析求最值.

【例 6-4】 已知 $f(x)=|1-2x|$，$x\in[0,1]$，试问：方程 $f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$ 有多少个实根？

解：先作出 $f(x)=|1-2x|$ 的图像（图 6-2(a) 中实线部分），然后将 $f(x)$ 图像上所有点的纵坐标扩大 2 倍而横坐标不变，再将所得图像向下平移 1 个单位，并保留 x 轴上方的部分，将 x 轴下方的部分对称地翻折到 x 轴上方，便得 $f(f(x))=|2f(x)-1|$ 的图像，如图 6-2(b).

同样的方法可作函数 $f(f(f(x)))=|2f(f(x))-1|$ 的图像，如图 6-2(c)，它与直线 $y=\frac{x}{2}$ 在$[0,1]$上有 8 个交点. 因此，原方程有 8 个实数解.



(a) (b) (c)

图 6-2

评注 例 6-4 涉及到含绝对值符号的一次函数，根据题设，有