1. 用∈或∉填空：0 ______$\varnothing$. ∉

2．实数a，b满足$-3\le a\le 1$，$-1\le b\le 3$，则$3a-b$的取值范围是________．$[-12,4]$.

3．若全集$U=\{2,3,5\}$，$A=\{2,|a-5|\}$，$\overline{A}=\{5\}$，则a的值是______．2 或 8

4. 命题“$x>1$”是命题“$\frac{1}{x}<1$”的__________条件. 充分非必要

5．已知$x>0$，则$1-2x-\frac{8}{x}$的最大值为_____________．-7

6． 已知$y=f(2x+1)$定义域为$(1,3]$，则$y=f(x+1)$的定义域为__________．$(2,6]$

7．已知关于x的不等式$ax^2+bx+1<0$的解集为$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$，则$a+b=$______．5

8. 设x_1、x_2是关于x的方程$2x^2-4mx+2m^2+3m-2=0$的两个实数根，则$x_1^2+x_2^2$的最小值为______．$\frac{8}{9}$

9. 若函数$f(x)$满足$\forall x\in R$，$f(x+1)=f(1-x)$，且$\forall x_1$，$x_2\in[1,+\infty)$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0(x_1\ne x_2)$，若$f(m)>f(-1)$，则$m$的取值范围是______．$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

10. 设集合$A=\{x|x^2+2x-3>0\}$，集合$B=\{x|x^2-2ax-1\le 0,a>0\}$.若$A\cap B$中恰含有一个整数，则实数$a$的取值范围是___________

【解析】解：由$x^2+2x-3>0$，得：$x<-3$ 或$x>1$.

由$x^2-2ax-1\le 0$，得：$a-\sqrt{a^2+1}\le x\le a+\sqrt{a^2+1}$.

所以，$A=\{x|x^2+2x-3>0\}=\{x|x<-3$ 或$x>1\}$，$B=\{x|x^2-2ax-1\le 0,a>0\}=\{x|a-\sqrt{a^2+1}\le x\le a+\sqrt{a^2+1}\}$.

因为$a>0$，所以$a+1>\sqrt{a^2+1}$，则$a-\sqrt{a^2+1}>-1$ 且小于 0.

由$A\cap B$中恰含有一个整数，所以 $2\le a+\sqrt{a^2+1}<3$.

即$\begin{cases}a+\sqrt{a^2+1}\ge 2\\ a+\sqrt{a^2+1}<3\end{cases}$，也就是$\begin{cases}\sqrt{a^2+1}\ge 2-a①\\ \sqrt{a^2+1}<3-a②\end{cases}$.

解①得：$a\ge\frac{3}{4}$，解②得：$a<\frac{4}{3}$.

所以，满足$A\cap B$中恰含有一个整数的实数a的取值范围是$[\frac{3}{4},\frac{4}{3})$.

11. 已知函数$f(x)=(x-1)^3+1$，且$f(2a)+f(b)=2(a>-1,b>0)$，则$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}$的最小值是______．2

【解析】解：$\because y=x^3$在R为单调递增的奇函数，

$\therefore y=x^3$有且仅有一个对称中心$(0,0)$，

$\therefore f(x)=(x-1)^3+1$ 单调递增，有且仅有一个对称中心$(1,1)$，

又$\because f(2a)+f(b)=2(a>-1,b>0)$，

$\therefore 2a+b=2$，则 $2(a+1)+b=4$，

$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}=\frac{1}{4}(\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b})[2(a+1)+b]=\frac{1}{4}[4+\frac{b}{a+1}+\frac{4(a+1)}{b}]\geq\frac{1}{4}[4+2\sqrt{\frac{b}{a+1}\cdot\frac{4(a+1)}{b}}]=2$，

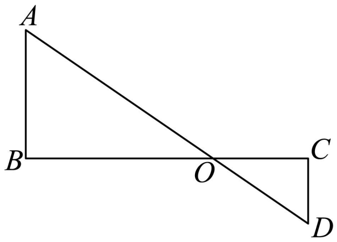
当且仅当$\frac{b}{a+1}=\frac{4(a+1)}{b}$即$a=0$，$b=2$ 时，等号成立，

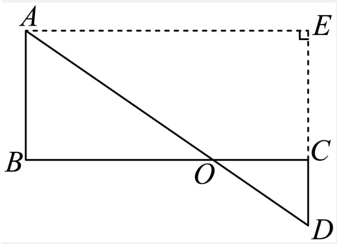
$\therefore \frac{1}{a+1}+\frac{2}{b}$的最小值是 2.

故答案为：2.

12. 如图，线段 AD,BC 相交于 O，且 AB,AD,BC,CD 长度构成集合$\{1,5,9,x\}$，

$\angle ABO=\angle DCO=90°$，则 x 的取值个数为_________.6





如图，

因为$\angle ABO=\angle DCO=90°$，且 AB,AD,BC,CD 长度构成集合$\{1,5,9,x\}$，

因为直角三角形 ADE 中，斜边 AD 一定大于直角边 AE 和 DE，

所以 $AD=9$ 或 x，

当 $AD=9$ 时，可分为

$AE=x$，此时由勾股定理可得$x^2+(1+5)^2=9^2$，解得$x=3\sqrt{5}$；

$CE=x$，此时由勾股定理可得$1^2+(x+5)^2=9^2$，解得$x=4\sqrt{5}-5$；

$CD=x$，此时由勾股定理可得$5^2+(x+1)^2=9^2$，解得$x=2\sqrt{14}-1$；

当 $AD=x$，可分为

$9^2+(1+5)^2=x^2$，解得 $x=3\sqrt{13}$；

$1^2+(9+5)^2=x^2$，解得 $x=\sqrt{197}$；

$5^2+(1+9)^2=x^2$，解得 $x=5\sqrt{5}$；

所以 x 的取值个数为 6，

故答案为：6.

13.下列各组函数中，表示同一个函数的是(　　) C

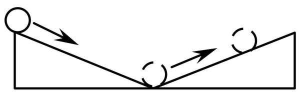
A. $f(x)=x,g(x)=\frac{x^2}{x}$　　B. $f(x)=x(x\in R),g(x)=x(x\in Z)$

C. $f(x)=|x|,g(x)=\begin{cases}x,x\ge 0\\-x,x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

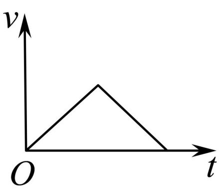
14. 设集合$A=\{x|x=\frac{1}{2^m},m\in N^*\}$，若$x_1\in A$，$x_2\in A$，则下列关系一定成立的是(　　) C

A. $(x_1+x_2)\in A$　　B. $(x_1-x_2)\in A$　　C. $(x_1x_2)\in A$　　D. $\frac{x_1}{x_2}\in A$

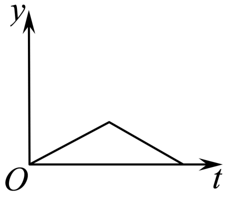
15. 如图 1，小球从左侧的斜坡滚下，到达底端后又沿着右侧斜坡向上滚在这个过程中，小球的运动速度 v（m/s）与运动时间 t（s）的函数图象如图②，则该小球的运动路程 y（m）与运动时间 t（s）之间的函数图象大致是（　　）C

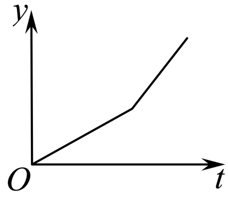


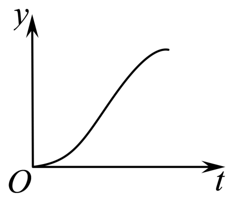
图①

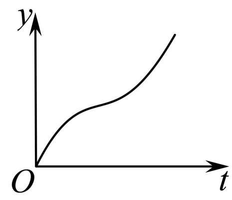


图②

A. 

B. 

C. 

D. 

16.设集合A是集合N^*的子集，对于$i\in\mathbf{N}^*$，定义$\varphi_i(A)=\begin{cases}1,i\in A\\0,i\notin A\end{cases}$，给出下列三个结论：①存在$N^*$的两个不同子集$A,B$，使得任意$i\in\mathbf{N}^*$都满足$\varphi_i(A\cap B)=0$且$\varphi_i(A\cup B)=1$；②任取$N^*$的两个不同子集$A,B$，对任意$i\in\mathbf{N}^*$都有$\varphi_i(A\cap B)=\varphi_i(A)\bullet\varphi_i(B)$；③任取$N^*$的两个不同子集$A,B$，对任意$i\in\mathbf{N}^*$都有$\varphi_i(A\cup B)=\varphi_i(A)+\varphi_i(B)$；其中，所有正确结论的序号是(　　) B

A. ①③　　B. ①②　　C.②③　　D. ①②③

【详解】∵对于$i\in\mathbf{N}^*$，定义$\varphi_i(A)=\begin{cases}1,i\in A\\0,i\notin A\end{cases}$，

∴对于①，例如集合A是正奇数集合，B是正偶数集合，$\therefore A\cap B=\varnothing,A\cup B=N^*$，

$\therefore\varphi_i\left(A\cap B\right)=0;\varphi_i\left(A\cup B\right)=1$，故①正确；

对于②，若$\varphi_i\left(A\cap B\right)=0$，则$i\notin\left(A\cap B\right)$，则$i\in A$且$i\notin B$，或$i\in B$且$i\notin A$，或$i\notin A$且$i\notin B$；

$\therefore\varphi_i\left(A\right)\cdot\varphi_i\left(B\right)=0$；

若$\varphi_i\left(A\cap B\right)=1$，则$i\in\left(A\cap B\right)$，则$i\in A$且$i\in B$；　$\therefore\varphi_i\left(A\right)\cdot\varphi_i\left(B\right)=1$；

∴任取N^*的两个不同子集A,B，对任意$i\in\mathbf{N}^*$都有$\varphi_i\left(A\cap B\right)=\varphi_i(A)\cdot\varphi i(B)$；正确，故②正确；

对于③，例如：$A=\{1,2,3\},B=\{2,3,4\},A\cup B=\{1,2,3,4\}$，当$i=2$时，$\varphi_i(A\cup B)=1$；

$\varphi_i\left(A\right)=1,\varphi_i\left(B\right)=1$；$\therefore\varphi_i\left(A\cup B\right)\neq\varphi_i\left(A\right)+\varphi_i\left(B\right)$；　故③错误；

17. 已知关于 x 的不等式 $\left|\frac{1}{2}x-a\right|\le 2$ 的解集为集合 A， $B=\left\{x\left|\frac{x-4}{x}\le 0\right.\right\}$.

(1)若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件，求 a 的取值范围.

(2)若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $[0,2]$

(2) $(-\infty,-2]\cup(4,+\infty)$

【详解】（1）由 $\left|\frac{1}{2}x-a\right|\le 2$，即 $-2\le\frac{1}{2}x-a\le 2$，解得 $2a-4\le x\le 2a+4$，

所以 $A=\{x\,|\,2a-4\le x\le 2a+4\}$，

由 $\frac{x-4}{x}\le 0$，等价于 $\begin{cases}x(x-4)\le 0\\x\ne 0\end{cases}$，解得 $0<x\le 4$，

所以 $B=\left\{x\left|\frac{x-4}{x}\le 0\right.\right\}=\{x\,|\,0<x\le 4\}$，

因为 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件，所以 B 真包含于 A，

所以 $\begin{cases}2a+4\ge 4\\2a-4\le 0\end{cases}$，解得 $0\le a\le 2$，

即 a 的取值范围为 $[0,2]$；

（2）因为 $A\cap B=\varnothing$，显然 $A\ne\varnothing$，

所以 $2a+4\le 0$ 或 $2a-4>4$，

解得 $a\le -2$ 或 $a>4$，

即 a 的取值范围为 $(-\infty,-2]\cup(4,+\infty)$.

18. 已知函数 $y=(m+1)x^2-mx+1$.

(1)当 $m=5$ 时，求不等式 $y>0$ 的解集；

(2)若不等式 $y>0$ 的解集为 R，求实数 m 的取值范围.

【答案】解：(1)当 $m=5$ 时，$y=6x^2-5x+1$，

不等式 $y>0$ 即为 $6x^2-5x+1>0$，

即$(3x-1)(2x-1)>0$，故不等式的解集为$\left\{x \middle| x<\frac{1}{3}或x>\frac{1}{2}\right\}$；

(2)由题意得$(m+1)x^2-mx+1>0$的解集为R，

当$m+1=0$时，即$m=-1$时，

不等式化为$x+1>0$，

该不等式的解集为$\{x|x>-1\}$，不符合题意，舍去；

当$m+1\neq 0$时，根据二次函数图象特征知，开口向上且$\Delta<0$，

即$\begin{cases} m+1>0 \\ m^2-4(m+1)<0 \end{cases}$，解得$2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}$.

综上所述，实数m的取值范围是$\left\{m|2-2\sqrt{2}<m<2+2\sqrt{2}\right\}$.

19. 为改善天鹅“晨晨”、“晖晖”的生活环境，华师大二附中计划向小池塘投放水质净化剂，已知每投放a个单位（$0<a\leq 4$且$a\in \mathrm{R}$）的试剂，它在水中释放的浓度y（克/升）随着时间x（天）变化的函数关系式近似为$y=af\left(x\right)$，其中$f(x)=\begin{cases} \frac{1+x}{7-x}, x\in[0,5] \\ \frac{11-x}{2}, x\in(5,11] \end{cases}$，若多次投放，则某一时刻水中的试剂浓度为每次投放的试剂在相应时刻所释放的浓度之和，根据试验，当水中净化剂的浓度不低于4（克/升）时，它才能净化有效.

(1)若只投放一次4个单位的净化剂，则有效时间最多能持续几天？

(2)若先投放2个单位的净化剂，6天后再投放m个单位的净化剂，要使接下来的5天中，净化剂能够持续有效，试求m的最小值.

【答案】(1)7天；(2)2.

【详解】（1）因为一次投放4个单位的净化剂，

所以水中释放的浓度为$y=4f\left(x\right)=\begin{cases} \frac{4+4x}{7-x}, 0\leq x\leq 5 \\ 22-2x, 5<x\leq 11 \end{cases}$，

当$0\leq x\leq 5$时，$\frac{4\left(1+x\right)}{7-x}\geq 4$，解得$3\leq x\leq 5$；

当$5\leq x\leq 11$时，$22-2x\geq 4$，解得$5\leq x\leq 9$，

综上，$3\leq x\leq 9$，所以一次投放4个单位的净化剂，则有效时间可持续7天.

（2）设从第一次投放起，经过$x\left(6\leq x\leq 11\right)$天后浓度为

$g\left(x\right)=\left(11-x\right)+m[\frac{1+x-6}{7-\left(x-6\right)}]=11-x+m\frac{x-5}{13-x}$.

因为$6\le x\le 11$，则$13-x>0$，$x-5>0$，

所以$11-x+m\cdot\frac{x-5}{13-x}\ge 4$，即$m\ge\frac{(13-x)(x-7)}{x-5}$，令$x-5=t$，$t\in[1,6]$，

所以$m\ge-\frac{(t-2)(t-8)}{t}=10-\left(t+\frac{16}{t}\right)$，

因为$t+\frac{16}{t}\ge 2\sqrt{16}=8$，所以$m\geqslant 2$，当且仅当$t=\frac{16}{t}$，$t=4$即$x=9$时等号成立，

故为使接下来的 5 天中能够持续有效 m 的最小值为 2.

20．对于函数$f(x)$，若存在$x_0\in\mathrm{R}$，使$f(x_0)=x_0$成立，则称x_0为$f(x)$的不动点.

(1)求函数$y=x^2-x-3$的不动点；

(2)若函数$y=x^2-(a+2)x+1$有两个不相等的不动点x_1、x_2，求$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$的取值范围；

(3)若函数$g(x)=mx^2-(m+1)x+m+1$在区间(0,2)上有唯一的不动点，求实数m的取值范围.

【答案】(1)-1和 3.　(2)$(2,+\infty)$　(3)$(-1,1]\cup\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

【详解】（1）由题意知$x^2-x-3=x$，即$x^2-2x-3=0$，则$(x-3)(x+1)=0$，

解得$x_1=-1$，$x_2=3$，所以不动点为-1和 3.

（2）依题意，$x^2-(a+2)x+1=x$有两个不相等的实x_1数根x_1、x_2，

即方程$x^2-(a+3)x+1=0$有两个不相等的实数根x_1、x_2，

所以$\Delta=(a+3)^2-4=a^2+6a+5>0$，解得$a<-5$，或$a>-1$，

且$x_1+x_2=a+3$，$x_1x_2=1$，

所以$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a+3)^2-2$，

因为函数$y=(x+3)^2-2$对称轴为$x=-3$

当$x<-3$时，y随x的增大而减小，若$x<-5$，则$y>2$；

当$x>-3$时，y随x的增大而增大，若$x>-1$，则$y>2$；

故$(a+3)^2-2\in(2,+\infty)$，

所以$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$的取值范围为$(2,+\infty)$.

（3）由$g(x)=mx^2-(m+1)x+m+1=x$，得$mx^2-(m+2)x+m+1=0$，

由于函数$g(x)$在$(0,2)$上有且只有一个不动点，

即$mx^2-(m+2)x+m+1=0$在$(0,2)$上有且只有一个解，

令$h(x)=mx^2-(m+2)x+m+1$，

①$h(0)\cdot h(2)<0$，则$(m+1)(m-1)<0$，解得$-1<m<1$；

②$h(0)=0$，即$m=-1$时，

方程可化为$-x^2-x=0$，另一个根为-1，不符合题意，舍去；

③$h(2)=0$，即$m=1$时，方程可化为$x^2-3x+2=0$，另一个根为1，满足；

④$\Delta=0$，即$(m+2)^2-4m(m+1)=0$，解得$m=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

（ⅰ）当$m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，方程的根为$x=-\frac{-(m+2)}{2m}=\frac{m+2}{2m}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，满足；

（ⅱ）当$m=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，方程的根为$x=-\frac{-(m+2)}{2m}=\frac{m+2}{2m}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，不符合题意，舍去；

综上，m的取值范围是$(-1,1]\cup\left\{\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

21. 对任意正整数n，记集合$A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)|a_1,a_2,\cdots,a_n$均为非负整数，且$a_1+a_2+\cdots+a_n=n\}$，集合$B_n=\{(b_1,b_2,\cdots,b_n)|b_1,b_2,\cdots,b_n$均为非负整数，且$b_1+b_2+\cdots+b_n=2n\}$. 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A_n$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in B_n$，若对任意$i\in\{1,2,\cdots,n\}$都有$a_i\le b_i$，则记$\alpha\prec\beta$.

(1)写出集合A_2和B_2；

(2)证明：对任意$\alpha\in A_n$，存在$\beta\in B_n$，使得$\alpha\prec\beta$；

(3)设集合$S_n=\{(\alpha,\beta)|\alpha\in A_n,\beta\in B_n,\alpha\prec\beta\}$求证：$S_n$中的元素个数是完全平方数.

【详解】（1）$A_2=\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$，$B_2=\{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$.

（2）对任意$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in A_n$，设$b_i=a_i+1\left(i=1,2,3,\cdots,n\right)$，

则$b_1,b_2,\cdots,b_n$均为非负整数，且$a_i\le b_i\left(i=1,2,3,\cdots,n\right)$.

令$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$，则

$b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(a_1+1\right)+\left(a_2+1\right)+\cdots+\left(a_n+1\right)=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+n=2n$，所以$\beta\in B_n$，且$\alpha\prec\beta$.

（3）对任意$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in A_n$，$\alpha'=\left(a_1',a_2',\cdots,a_n'\right)\in A_n$，

记$\alpha+\alpha'=\left(a_1+a_1',a_2+a_2',\cdots,a_n+a_n'\right)$，则$a_1+a_1'$，$a_2+a_2'$，…，$a_n+a_n'$均为非负整数，

且$\left(a_1+a_1'\right)+\left(a_2+a_2'\right)+\cdots+\left(a_n+a_n'\right)=\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)+\left(a_1'+a_2'+\cdots+a_n'\right)=n+n=2n$，

所以$\alpha+\alpha'\in B_n$，且$\alpha\prec\alpha+\alpha'$，$\alpha'\prec\alpha+\alpha'$.

设集合A_n中的元素个数为t，设$A_n=\left\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\right\}$.

设集合$T_n=\left\{\left(\alpha_i,\alpha_i+\alpha_j\right)\middle|i=1,2,\cdots,t,j=1,2,\cdots,t\right\}$.

对任意$\alpha_i\in A_n\ (i=1,2,\cdots,t)$，都有$\alpha_i+\alpha_1$，$\alpha_i+\alpha_2$，…，$\alpha_i+\alpha_t\in B_n$，

且$\alpha_i\prec\alpha_i+\alpha_j$，$j=1,2,\cdots,t$．所以$T_n\subseteq S_n$.

若$\left(\alpha,\beta\right)\in S_n$，其中$\alpha=\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)\in A_n$，$\beta=\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)\in B_n$，

设$c_i=b_i-a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，因为$a_i\le b_i$，所以$c_i=b_i-a_i\ge0$，

记$\alpha'=\left(c_1,c_2,\cdots,c_n\right)$，则

$c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(b_1-a_1\right)+\left(b_2-a_2\right)+\cdots\left(b_n-a_n\right)=\left(b_1+b_2+\cdots+b_n\right)-\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right)$

$=2n-n=n$，

所以$\alpha'\in A_n$，并且有$\beta=\alpha+\alpha'$，所以$\left(\alpha,\beta\right)\in T_n$，所以$S_n\subseteq T_n$．所以$S_n=T_n$.

因为集合T_n中的元素个数为t^2，所以S_n中的元素个数为t^2，是完全平方数.

(1) $A_2=\{(a_1,a_2)\mid a_1,a_2\in N, a_1+a_2=2\}$

$=\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$

$B_2=\{(b_1,b_2)\mid b_1,b_2\in N, b_1+b_2=4\}$

$=\{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

(2) $\forall \alpha\in A_n$，设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$， $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$

$\therefore (a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_n+1)=2n$

令 $\beta=(a_1+1,a_2+1,\cdots,a_n+1)\in B_n$ 满足 $\alpha\prec\beta$

(3) 定义 $\beta-\alpha=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3,\cdots,b_n-a_n)$

则 $(b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_n-a_n)=n$ ，$(b_k-a_k)\in N$

$\therefore \beta-\alpha\in A_n$ $\therefore (\alpha,\beta)$ 与 $(\alpha,\beta-\alpha)$ 一一对应，记 $\gamma=\beta-\alpha$

~~并~~ 记 $T_n=\{(\alpha,\gamma)\mid \alpha\in A_n,\gamma\in A_n\}$

则 T_n 与 S_n 有相同个数的元素

$\therefore |T_n|=|A_n|^2$ $\therefore |S_n|=|A_n|^2$，其中 $|\cdot|$ 表示集合中元素个数

$\therefore S_n$ 的元素个数是完全平方数

扫描全能王 创建