135

对数函数与反函数阶段练习

1、函数 $y=2^{1-x}+3$ 的反函数的解析式为 $y=1-\log_2(x-3)$.

2、若 $\log_m\frac{2}{5}<1$,则实数 m 的取值范围是 $m\in(0,\frac{2}{5})\cup(1,+\infty)$.

3、设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x},x\le 1\\ \log_{81}x,x>1\end{cases}$,则满足 $f(x)=\frac{1}{4}$ 的 x 的值为 3.

4、函数 $y=\sqrt{\log_{0.5}(4x^2-3x)}$ 的定义域为 $x\in[-\frac{1}{4},0)\cup(\frac{3}{4},1]$.

5、函数 $f(x)=\log_2\left(x-\frac{a}{x}\right)(a>0)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数,则 a 的取值范围是 ~~$a<4$~~ $a\in(0,4)$.

误：$(0,4]$

6、函数 $y=|x^2-1|+1$ 的图象与函数 $y=\lg(x+10)$ 的图象交点个数为 2.

7、已知函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)$ 在区间 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上严格增,则 a 的取值范围是 $a\ge 2-2\sqrt{3}$ 且 $a\le 2$.

开闭

8、设 $f(x)$ 是奇函数,当 $x>0$ 时, $f(x)=\log_2 x$,则当 $x<0$ 时, $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=-\log_2(-x)$.

9、当 $x\in(1,2)$ 时,不等式 $(x-1)^2<\log_a x$ 恒成立,则 a 的取值范围是 $0<a\le 2$ 且 $a\ne 1$.

$(1,2]$

10、若函数 $f(x)=\left(\log_2\frac{x}{2}\right)\left(\log_2\frac{x}{4}\right)$ 的定义域是不等式 $2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+7\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)+3\le 0$ 的解集,

则函数 $f(x)$ 的最大值为 2 ,最小值为 $-\frac{1}{4}$.

11、如果 $\log_a 2>\log_b 2$,那么 a,b 间的关系是(D)

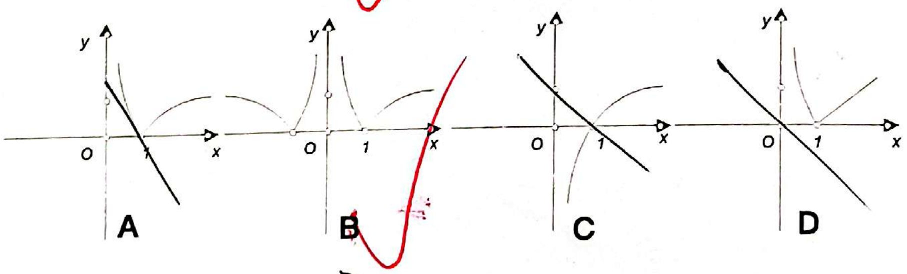
(A) $b>a>1$

(B) $1>b>a>0$

(C) $a>1$ 且 $0<b<1$

(D) 以上三种答案均有可能

12、 函数 $y=|\lg|x||$ 的图象是(B)



13、与函数 $y=x$ 为同一函数的是(D)

(A) $y=x\log_a x$ (B) $y=\sqrt{x^2}$ (C) $y=a^{\log_a x}(a>0,a\ne 1)$ (D) $y=\log_a a^x(a>0,a\ne 1)$

2. $\log_m \frac{2}{5} < 1 = \log_m m$

① $m>1$时，$\frac{2}{5}<m$ 成立 $\therefore m>1$；

② $0<m<1$时，$\frac{2}{5}>m$ $\therefore 0<m<\frac{2}{5}$；

4. $\log_{0.5}(4x^2-3x) \geq 0 = \log_{0.5}1$

$\therefore \quad 0<4x^2-3x\leq 1$

$x\in[-\frac{1}{4},0)\cup(\frac{3}{4},1]$；

5. 令 $g(x)=x-\frac{a}{x}$，$(a>0)$，$g(x)$在$[2,+\infty)$上↑，

且 $g(x)>0$ 恒成立 $\Longleftrightarrow$ $g(2)>0$，$2-\frac{a}{2}>0$，

$\therefore \quad 0<a<4$；

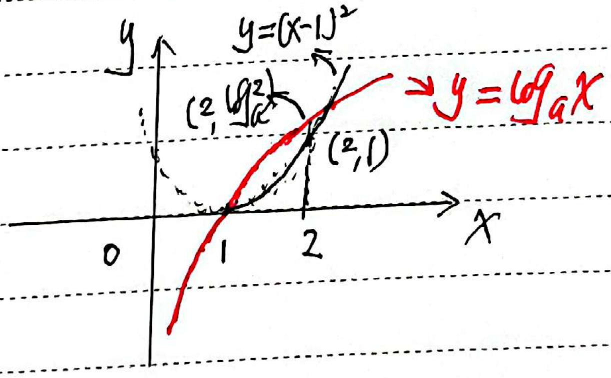
7. 令 $g(x)=x^2-ax-a$，则 $g(x)$在$(-\infty,1-\sqrt{3})$上↓，

且 $g(x)>0$，$\therefore$ $1-\sqrt{3}\leq\frac{a}{2}$，$g(1-\sqrt{3})\geq 0$，

$$\begin{cases} a\geq 2(1-\sqrt{3}) \\ (1-\sqrt{3})^2-a(1-\sqrt{3})-a\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a\geq 2-2\sqrt{3} \\ a\leq 2 \end{matrix}$$

$\therefore \quad a\in[2-2\sqrt{3},2]$；

9.



显然 $a>1$，

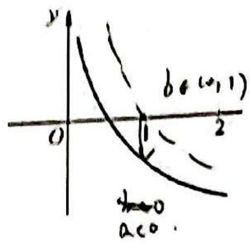
$\log_a 2\geq 1=\log_a a$

$\therefore \quad 1<a\leq 2$

14、已知函数 $f(x)=\log_a(x-k)$ 的图象过点 $(4,0)$ 而且其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象过点 $(1,7)$，则 $f(x)$ 是(A)

(A) 增函数　　(B) 减函数　　(C) 奇函数　　(D) 偶函数

15、右图是函数 $y=a+\log_b x$ 的图象，其中 a,b 为常数，则下列结论正确的是(D)



(A) $a<0,b>1$　　(B) $a>0,b>1$

(C) $a>0,0<b<1$　　(D) $a<0,0<b<1$

16、对于函数 $y=\lg\dfrac{x}{100}$ 的图象给出三个命题：

(1) 存在直线 l_1，函数 $y=\lg\dfrac{x}{100}$ 的图象与函数 $y=100\cdot 10^x$ 的图象关于直线 l_1 对称；

(2) 存在直线 l_2，函数 $y=\lg\dfrac{x}{100}$ 的图象与函数 $y=\log_{0.1}\dfrac{x}{100}$ 的图象关于直线 l_2 对称；

(3) 存在直线 l_3，函数 $y=\lg\dfrac{x}{100}$ 的图象与函数 $y=\lg(-x)+\log_{0.1}100$ 的图象关于直线 l_3 对称.

上述命题中正确命题的个数是(A).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

17、设函数 $f(x)=\log_a\left(1-\dfrac{a}{x}\right)$，其中 $0<a<1$.

(1) 证明 $f(x)$ 是 $(a,+\infty)$ 上的减函数；(2) 解不等式 $f(x)>1$.

(1) $\because 0<a<1$

$\therefore 1-\frac{a}{x}$ 在 $(a,+\infty)$ 上为增函数 ~~时~~，

$f(x)$ 为减函数

又∵ $0<a<1$　∴ $(a,+\infty)$ 上 $1-\frac{a}{x}>0$，且在递增减

∴ $f(x)$ 为减函数

(2) $f(x)>1$

$\Leftrightarrow 0<1-\frac{a}{x}<a$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>a \\ x<\frac{a}{1-a} \end{cases}$

$\therefore a<x<\frac{a}{1-a}$

不等式解集为 $\left(a,\frac{a}{1-a}\right)$

18、已知函数 $f(x)=\lg\left(1+2^x+3^x+4^x+a\cdot 5^x\right)$ 对一切 $x\le 2$ 有意义，求实数 a 的取值范围.

条件 $\Leftrightarrow$ $x\le 2$ 时，$1+2^x+3^x+4^x+a\cdot 5^x$ 恒 >0

~~1. $a\ge 0$，易知 $1+\cdots+a\cdot 5^x>0$~~

2. $a<0$，则 $x=2$ 时 $1+\cdots+a\cdot 5^x>0$

$\Rightarrow 1+4+9+16+25a>0$

$\therefore a>-\frac{6}{5}$

$\therefore a>-\frac{6}{5}$

综上，$a>-\frac{6}{5}$

$\because 1+\cdots+a\cdot 5^x>0$

$\Leftrightarrow 5^x\cdot\left(\frac{1}{5^x}+\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x+a\right)>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5^x}+\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>-a$

lhs 单调减，rhs 为常数

19、已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}\left(x-\frac{1}{x}\right)(a>0,a\neq1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式,并判定奇偶性及单调性;

(2) 当 $x\in(-\infty,2)$ 时, $f(x)-4$ 的值恰好为负数,求 a 的取值范围.

(1) ~~f(x)~~ $\because f(\log_a x)=\frac{a}{a^2-1}\cdot\left(\cancel{\log} a^{\log_a x}-\frac{1}{a^{\log_a x}}\right)$

$\therefore f(x)=\frac{a}{a^2-1}\cdot(a^x-a^{-x})$, 单调增

又 $f(x)=-\frac{a}{a^2-1}\cdot(a^{-x}-a^x)=-f(-x)$,

故为奇函数

① $0<a<1$,

则 $a^2-1<0$, a^x-a^{-x} 单调减, 故 $f(x)$ 单调增

② $a>1$,

则 $a^2-1>0$, a^x-a^{-x} 单调增, 故 $f(x)$

易知 $x\to-\infty$ 时 $f(x)$ 不趋近0

(2) 条件 $\Leftrightarrow f(x)-4<0$, 在 $x\in(-\infty,2]$

且 $f(2)-4\leq0$ ($f(x)$ 单调增)

$\therefore \frac{a}{a^2-1}\cdot(a^2-a^{-2})\leq4$

$\therefore a\in$ ~~$[-1,2-\sqrt3]\cup[1,2+\sqrt3]$~~

$[2-\sqrt3,1)\cup(1,2+\sqrt3]$

20、设函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left[kx^2+(k+2)x+k+2\right](k\in R)$.

(1) 若 $f(x)$ 定义域为 R, 求 k 的取值范围; (2) 若 $f(x)$ 的值域为 R, 求 k 的取值范围;

(3) 若 $f(x)$ 有最小值, 求 k 的取值范围.

(1)

$\because f(x)$ 定义域为R

$\therefore kx^2+(k+2)x+k+2$ 恒 >0

$\therefore k>0$, ~~$k+2$~~

$\Delta=(k+2)^2-4\cdot k\cdot(k+2)<0$

~~$\therefore 0<k<$~~ $\therefore k>\frac{2}{3}$

(2) 条件 $\Leftrightarrow kx^2+(k+2)x+k+2$ 可覆盖 $(0,+\infty)$

$\Leftrightarrow \Delta\geq0, k>0$

$\Leftrightarrow 0<k\leq\frac{2}{3}$

或 $k=0$

(3)

~~条件 $\Leftrightarrow$~~

1. $k=0$

$f(x)=\log_{\frac{1}{3}}[2x+2]$, 无最小值

2. $k>0$, 易知无最小值

3. $k<0$, $f(x)$ 有最小值

$\Leftrightarrow kx^2+(k+2)x+k+2$ 有大于0的最大值

$\Leftrightarrow \Delta<0$

$\therefore -2<k<0$

-4

21、已知函数$f(x)=2^x-1$有反函数为$f^{-1}(x)$, $g(x)=\log_4(3x+1)$.

(1) 若$f^{-1}(x)\le g(x)$,求x的取值范围D;

(2) 设函数$H(x)=g(x)-\frac{1}{2}f^{-1}(x)$,当$x\in D$时,求函数$H(x)$的值域.

(1) $x=2^{f^{-1}(x)}-1$

$f^{-1}(x)=\log_2(x+1)\ (x>-1)$

$\because f^{-1}(x)\le g(x)=\log_2 \cancel{(9x^2+6x+1)}(\sqrt{3x+1})\ (x>-\frac{1}{3})$

$\therefore x+1\le\sqrt{3x+1}$

$\therefore 0\le x\le 1$, 取值范围$D=[0,1]$

(2)

$H(x)=g(x)-\frac{1}{2}f^{-1}(x)=\log_4(3x+1)-\log_4(x+1)$

$=\log_4\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$

$=\log_4\left(3-\frac{2}{x+1}\right)$

当$x\in D$, $3-\frac{2}{x+1}\in[1,2]$

$\therefore H(x)$值域为$[0,\frac{1}{2}]$