进才中学2023学年第一学期高一年级数学期末

2024.1

一、填空题（本大题共12题，满分36分，每题3分）

1. 若集合 $A=\{x|x>5\}$，集合 $B=\{x|x\le 7\}$，则 $A\cap B=$______.

【答案】$(5,7]$

【解析】

【分析】由集合交集的定义可直接得解.

【详解】由集合 $A=\{x|x>5\}$，集合 $B=\{x|x\le 7\}$，得 $A\cap B=(5,7]$.

故答案为 $(5,7]$.

【点睛】本题主要考查了集合交集的运算，属于基础题.

2. 设 x，$y\in \mathrm{R}$，用反证法证明命题"如果 $x^2+y^2<4$，那么 $|x|<2$ 且 $|y|<2$"时，应先假设"__________".

【答案】$|x|\ge 2$ 或 $|y|\ge 2$

【解析】

【分析】

假设结论的反面成立，即结论的否定．注意存在量词与全称量词的互换.

【详解】结论：$|x|<2$ 且 $|y|<2$ 的否定是 $|x|\ge 2$ 或 $|y|\ge 2$.

故答案为：$|x|\ge 2$ 或 $|y|\ge 2$.

3. 若扇形的圆心角为 $\frac{2\pi}{3}$，半径为2，则扇形的面积为_____.

【答案】$\frac{4}{3}\pi$

【解析】

【分析】利用扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2$ 可求出答案.

【详解】由题意,扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}\alpha R^2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 2^2=\frac{4}{3}\pi$.

故答案为:$\frac{4}{3}\pi$.

【点睛】本题考查了扇形的面积的计算,考查了学生的计算能力,属于基础题.

4. 方程 $\lg x=2024-x$ 的根 $x\in(k,k+1)$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $k=$_______.

【答案】2020

【解析】

【分析】将方程的根问题转化函数的零点所在区间求解，由 $f(2020)\cdot f(2021)<0$，利用零点存在性定理可得 k.

【详解】设 $f(x)=2024-x-\lg x$，$x\in(0,+\infty)$.

因为 $f(2020)=2024-2000-\lg 2020>4-\lg 10^{4}=0$，

且 $f(2021)=2024-2021-\lg 2021<3-\lg 10^{3}=0$，

所以 $f(2020)\cdot f(2021)<0$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，

由零点存在性定理可得，$f(x)$ 在 $(2020,2021)$ 有唯一零点.

即方程 $\lg x=2024-x$ 的根 $x\in(2020,2021)$，即 $k=2020$.

故答案为：2020.

5. 若 $a>0$，$a\neq 1$，则函数 $y=a^{x-1}+2$ 的图象一定过点____________.

【答案】$(1,3)$

【解析】

【分析】根据 $a^{0}=1$ 求得函数图像上的定点.

【详解】当 $x-1=0$ 时，$x=1$，此时 $y=1+2=3$，故函数图像过定点 $(1,3)$.

故答案为 $(1,3)$.

【点睛】本小题主要考查指数型函数图像过定点问题，属于基础题.

6. 设 $\tan\alpha=3$，则 $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】

利用诱导公式化简，再上下同除 $\cos\alpha$，代入 $\tan\alpha$ 即可.

【详解】$\dfrac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{-\tan\alpha-1}{1-\tan\alpha}=\dfrac{-4}{-2}=2$

故答案为：2

7. 若 $f\left(x\right)$ 是偶函数，且当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)=x-2$，则不等式 $f\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)>1$ 的解集是________.

【答案】$\left\{x\middle|x<-8\text{或}x>64\right\}$

【解析】

【分析】根据条件知，$f\left(3\right)=1$，不等式 $f\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)>1$ 可转化为 $f\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)>f\left(3\right)$，再由 $f\left(x\right)$ 的单调性和奇偶性可得，$\left|x^{\frac{1}{3}}-1\right|>3$，从而得到不等式的解集.

【详解】当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时，$f\left(x\right)=x-2$ 单调递增，且 $f\left(x\right)$ 是偶函数，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right]$ 上单调递减，且 $f\left(3\right)=1$

不等式 $f\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)>1$ 等价于 $f\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)>f\left(3\right)$，即 $\left|x^{\frac{1}{3}}-1\right|>3$

解得 $\left\{x\middle|x<-8\text{或}x>64\right\}$.

故答案为：$\left\{x\middle|x<-8\text{或}x>64\right\}$

8. 已知不等式 $a\cdot4^x-2^x+2>0$ 对于 $x\in\left(-\infty,0\right]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是____________.

【答案】$\left(-1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】依题意可得不等式 $a\cdot\left(2^x\right)^2-2^x+2>0$ 对于 $x\in\left(-\infty,0\right]$ 恒成立，令 $t=2^x$ 可得不等式 $at^2-t+2>0$ 对于 $t\in\left(0,1\right]$ 恒成立，参变分离可得 $a>\frac{t-2}{t^2}$ 对于 $t\in\left(0,1\right]$ 恒成立，再根据二次函数的性质求出 $\frac{t-2}{t^2}$ 的最大值，即可求出参数 a 的取值范围.

【详解】不等式 $a\cdot4^x-2^x+2>0$ 对于 $x\in\left(-\infty,0\right]$ 恒成立，

即不等式 $a\cdot\left(2^x\right)^2-2^x+2>0$ 对于 $x\in\left(-\infty,0\right]$ 恒成立，

令 $t=2^x$，则 $t\in\left(0,1\right]$，所以不等式 $at^2-t+2>0$ 对于 $t\in\left(0,1\right]$ 恒成立，

所以 $a>\frac{t-2}{t^2}=-2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}$ 对于 $t\in\left(0,1\right]$ 恒成立，

令 $m=\frac{1}{t}$，则 $m\in[1,+\infty)$，函数 $y=-2m^2+m=-2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $\left(-2m^2+m\right)_{\max}=-1$，即 $\left[-2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}\right]_{\max}=-1$，

所以 $a>-1$，即实数 a 的取值范围是 $(-1,+\infty)$.

故答案为：$(-1,+\infty)$

9. 若 $f(x)=\begin{cases}a^{8-x},x\le 7\\(2-a)x-8,x>7\end{cases}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是严格增函数，则实数 a 的取值范围是____________.

【答案】$\left(0,\frac{3}{4}\right]$

【解析】

【分析】根据题意，由函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是严格增函数，列出不等式，即可得到结果.

【详解】因为函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是严格增函数，

则 $\begin{cases}0<a<1\\2-a>0\\a^{8-7}\le(2-a)\times 7-8\end{cases}$，解得 $0<a\le\frac{3}{4}$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{3}{4}\right]$

故答案为：$\left(0,\frac{3}{4}\right]$

10. 若已知 a，b，c 均为正数，则 $M=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc}$ 的最小值为______.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】

【分析】依题意 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc}=\frac{a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2+c^2}{ab+bc}$ 再利用基本不等式计算可得；

【详解】解：因为 $a>0$、$b>0$、$c>0$，所以 $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc}=\frac{a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2+c^2}{ab+bc}\ge\frac{\sqrt{2}ab+\sqrt{2}bc}{ab+bc}=\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=c=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$ 时取等号；故 $M=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$；

故答案为：$\sqrt{2}$

11. 已知函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 与 $y=ax$ 的图像有 3 个不同公共点（其中 e 为自然对数的底数），则实数 a 的取值范围是________________．

【答案】$(0,1)$

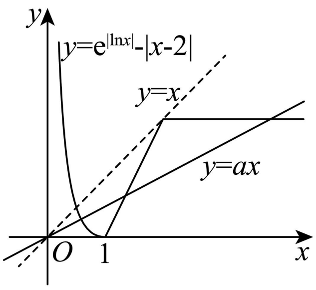
【解析】

【分析】将函数写成分段函数的形式，作出函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 与 $y=ax$ 的图象，数形结合即可得解.

【详解】由 $\ln x=0$ 得 $x=1$，由 $|x-2|=0$ 得 $x=2$.

$\therefore$ 函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 转化为 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|=\begin{cases}e^{\ln x}-x+2=2, x\ge 2\\ e^{\ln x}+x-2=2x-2, 1\le x<2\\ e^{-\ln x}+x-2=\dfrac{1}{x}+x-2, 0<x<1\end{cases}$，

在同一坐标系中作出函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 与 $y=ax$ 的图象如下图所示



由图可得：实数 a 的取值范围是 $(0,1)$.

故答案为：$(0,1)$.

12. 若直角坐标平面内两点 P、Q 满足条件：①P、Q 都在函数 $f(x)$ 的图象上；②P、Q 关于原点对称，则对称点 (P,Q) 是函数 $f(x)$ 的一个“友好点对”（点对 (P,Q) 与 (Q,P) 看作同一个“友好点对”）. 已知函数

$f(x)=\begin{cases}2x^2+4x+1, x<0\\ \dfrac{2}{e^x}, x\ge 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的“友好点对”有_____个.

【答案】2

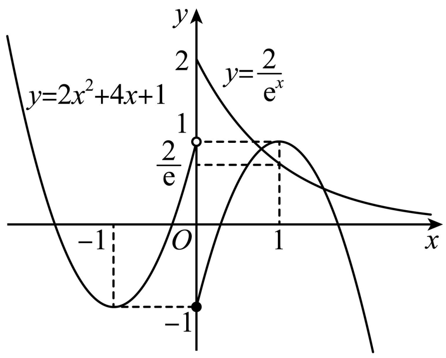
【解析】

【分析】欲求 $f\left(x\right)$ 的"友好点对"，只须作出函数 $y=2x^2+4x+1\left(x<0\right)$ 的图象关于原点对称的图象，看它与函数 $y=\frac{2}{e^x}\left(x\geq 0\right)$ 交点个数即可.

【详解】根据题意："友好点对"，可知，

只须作出函数 $y=2x^2+4x+1\left(x<0\right)$ 的图象关于原点对称的图象，与函数 $y=\frac{2}{e^x}\left(x\geq 0\right)$ 交点个数即为.

如图，



观察图象可得：它们的交点个数是：2.

即 $f\left(x\right)$ 的"友好点对"有：2 个.

故答案为：2.

二、选择题（本大题共 4 题，每题 4 分，满分 16 分）

13. 对于实数 a、b，下面哪个不等式不恒成立（　　）

A. $a^2+b^2\geq 2ab$

B. $|a-1|+|b-1|\geq|a-b|$

C. $\log_2\left(a^2+1\right)\geq 0$

D. $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

【答案】D

【解析】

【分析】A 由完全平方公式可判断是否恒成立，B 由两个数绝对值的和的几何含义可判断是否恒成立，C 根据对数函数的性质即可判断是否恒成立，D 由基本不等式等号成立的条件即可判断是否恒成立.

【详解】A：由 $(a-b)^2\geq 0$ 知：$a^2+b^2\geq 2ab$ 恒成立；

B：由绝对值的几何含义知：$|a-1|+|b-1|\geq|(a-1)-(b-1)|=|a-b|$ 恒成立；

C：由 $a^2+1\geq 1$，而 $y=\log_2 t$ 单调递增，所以 $\log_2\left(a^2+1\right)\geq 0$ 恒成立；

D：当且仅当 $a,b\geq 0$ 时，$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 才能成立.

故选：D.

14. 中国5G技术领先世界，其数学原理之一便是著名的香农公式：$C = W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$，它表示：在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率$C$取决于信道带宽$W$、信道内信号的平均功率$S$、信道内部的高斯噪声功率$N$的大小，其中$\frac{S}{N}$叫做信噪比，按照香农公式，若不改变带宽$W$，而将信噪比$\frac{S}{N}$从1000提升至5000，则$C$大约增加了（　　）.

A. 20%　　　　B. 23%　　　　C. 28%　　　　D. 50%

【答案】B

【解析】

【分析】由已知公式，将信噪比$\frac{S}{N}$看作整体，分别取$1000,5000$求出相应的C值，再利用对数运算性质与换底公式变形求解增加率即可.

【详解】由题意，将信噪比$\frac{S}{N}$从1000提升至5000，

则最大信息传递速率C从$C_1 = W\log_2(1+1000)$增加至$C_2 = W\log_2(1+5000)$，

所以$\frac{C_2-C_1}{C_1} = \frac{W\log_2 5001 - W\log_2 1001}{W\log_2 1001} = \frac{\log_2\frac{5001}{1001}}{\log_2 1001} = \log_{1001}\frac{5001}{1001} = \frac{\lg\frac{5001}{1001}}{\lg 1001} \approx 0.23 = 23\%$.

故选：B.

15. 已知图1对应的函数为$y = f(x)$，则图2对应的函数是（　　）

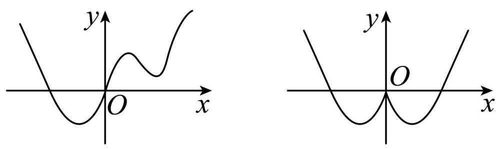


图1　　图2

A. $y = f(-|x|)$　　　　B. $y = f(-x)$　　　　C. $y = f(|x|)$　　　　D. $y = -f(-x)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据两函数图象的关系知，所求函数为偶函数且$x \le 0$时两函数解析式相同，即可得解.

【详解】根据函数图象知，当$x \le 0$时，所求函数图象与已知函数相同，

当$x > 0$时，所求函数图象与$x < 0$时图象关于y轴对称，

即所求函数为偶函数且$x \le 0$时与$y = f(x)$相同，故BD不符合要求，

当$x \le 0$时，$y = f(-|x|) = f(x)$，$y = f(|x|) = f(-x)$，故A正确，C错误.

故选：A.

16. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，有下面三个命题，命题 p：存在 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f\left(x+a\right)<f\left(x\right)+f\left(a\right)$ 恒成立，命题 q_1： $y=f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数，且 $f\left(x\right)>0$ 恒成立；命题 q_2： $y=f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，且存在 $x_0<0$ 使得 $f\left(x_0\right)=0$，则下列说法正确的是（　　）

A. q_1、q_2 都是 p 的充分条件　　B. 只有 q_1 是 p 的充分条件

C. 只有 q_2 是 p 的充分条件　　D. q_1、q_2 都不是 p 的充分条件

【答案】A

【解析】

【分析】若已知 q_1，则当 $a>0$，根据减函数的定义和已知条件，结合不等式性质，可推出 $f\left(x+a\right)<f\left(x\right)<f\left(x\right)+f\left(a\right)$ 成立；若已知 q_2，取 $a=x_0<0$，根据增函数的定义和已知条件，结合不等式性质，也可推出 $f\left(x+a\right)<f\left(x\right)<f\left(x\right)+f\left(a\right)$ 成立.

【详解】若 q_1 成立，当 $a>0$，有 $x+a>x$.

因为 $f\left(x\right)$ 单调递减，且 $f\left(x\right)>0$ 恒成立，所以 $f\left(a\right)>0$，

所以 $f\left(x+a\right)<f\left(x\right)<f\left(x\right)+f\left(a\right)$，

故存在 $a>0$（$a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$），对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f\left(x+a\right)<f\left(x\right)+f\left(a\right)$ 恒成立，

所以 q_1 是 p 的充分条件；

若 q_2 成立时，当 $a=x_0<0$ 时， $x+a=x+x_0<x$， $f\left(a\right)=f\left(x_0\right)=0$.

因为 $f\left(x\right)$ 单调递增，所以 $f\left(x+a\right)=f\left(x+x_0\right)<f\left(x\right)=f\left(x\right)+f\left(a\right)$ 恒成立，

故存在 $a=x_0<0$（$a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$），对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f\left(x+a\right)<f\left(x\right)+f\left(a\right)$ 恒成立，

所以 q_2 也是 p 的充分条件.

故选：A.

【点睛】关键点睛：本题解决的关键是找到相应的 a 满足要求，从而得解.

三、解答题（本大题共 5 题，满分 48 分）

17. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$， $0<\alpha<\pi$.

（1）求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值；

（2）求 $\tan\alpha-\cot\alpha$ 的值.

【答案】（1） $\frac{7}{5}$；（2） $-\frac{7}{12}$.

【解析】

【分析】

（1）对已知条件两边同时平方结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 可得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}<0$，结合 $0<\alpha<\pi$，可得 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，进而可得 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$，计算 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$ 即可求解；

（2）将 $\tan\alpha-\cot\alpha$ 化切为弦再通分，利用整体代入即可求解.

【详解】（1）由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 可得 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{25}$，

即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，解得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}<0$，

因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，可得 $\sin\alpha>0,\cos\alpha<0$，$\sin\alpha-\cos\alpha>0$

所以 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\times\left(-\frac{12}{25}\right)=\frac{49}{25}$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$，

（2）$\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{7}{5}}{-\frac{12}{25}}=-\frac{7}{12}$.

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键点是利用已知条件求出 $\sin\alpha\cos\alpha$，根据其符号判断 α 所在的象限，可判断 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的符号.

18. 已知函数 $h(x)=(m^2-5m+1)x^{m+1}$ 为幂函数，且为奇函数.

（1）求 m 的值；

（2）求函数 $g(x)=h(x)+\sqrt{1-2x}$ 在 $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 的值域.

【答案】（1） $m=0$；（2） $\left[\frac{1}{2},1\right]$

【解析】

【分析】

（1）首先根据幂函数的定义得到$m^2-5m+1=1$，从而得到$m=0$或$m=5$，再根据$h(x)$为奇函数，即可得到答案.

（2）首先根据题意得到$g(x)=x+\sqrt{1-2x}$，再利用换元法求值域即可.

【详解】（1）因为函数$h(x)=(m^2-5m+1)x^{m+1}$为幂函数，

所以$m^2-5m+1=1$，解得$m=0$或$m=5$.

即$h(x)=x$或$h(x)=x^6$.

又因为函数$h(x)$为奇函数，所以$h(x)=x$，$m=0$.

（2）$g(x)=h(x)+\sqrt{1-2x}=x+\sqrt{1-2x}$，

设$t=\sqrt{1-2x}$，因为$x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，所以$t\in[0,\sqrt{3}]$，$x=\frac{1-t^2}{2}$.

所以$y=\frac{1-t^2}{2}+t=-\frac{1}{2}(t-1)^2+1$，

当$t=1$时，$y_{\max}=1$，当$t=0$时，$y_{\min}=\frac{1}{2}$，故值域为$\left[\frac{1}{2},1\right]$.

19. 第19届亚运会于2023年9月23日至10月8日在我国杭州举行，本届亚运会的吉祥物是一套机器人，包括三个:“琮琮”代表世界遗产良渚古城遗址，“莲莲”代表世界遗产西湖，“宸宸”代表世界遗产京杭大运河.某公益团队计划举办杭州亚运会吉祥物的展销会，并将所获利润全部用于社区体育设施建设.已知每套吉祥物的进价为$(50+a)$元，其中a与进货量成反比，当进货1万套时，a为9元，据市场调查，当每套吉祥物的售价定为x元时$(x<100)$，销售量可达到$\left(10-\frac{x}{10}\right)$万套，若展销的其他费用为1万元，且所有进货都销售完.

（1）每套吉祥物售价定为70元时，能获得的总利润是多少万元?

（2）当x为多少时，每套吉祥物的净利润最大?

【答案】（1）50　　（2）90

【解析】

【分析】（1）先根据题目条件得到进货量与a的关系式，根据吉祥物售价定为70元时求出销售量，并求出进货单价，求出总利润；

（2）求出每套吉祥物的利润，结合基本不等式求出最值，得到答案.

【小问 1 详解】

设共进货 z 万套，则 $a=\frac{k}{z}$，

因为当 $z=1$ 时，$a=9$，故 $9=\frac{k}{1}$，解得 $k=9$，即 $a=\frac{9}{z}$.

每套吉祥物售价为 70 元时，销售量为 $z=10-7=3$（万套），

此时进货单价为 $50+\frac{9}{3}=53$（元），

故总利润为 $3\times(70-53)-1=50$（万元）；

【小问 2 详解】

根据题意得，进价为 $50+\frac{9}{10-\frac{x}{10}}=50+\frac{90}{100-x}$（元），

所以每套吉祥物的利润为

$$y=\frac{\left[x-\left(50+\frac{90}{100-x}\right)\right]\left(10-\frac{x}{10}\right)-1}{10-\frac{x}{10}}=x-\left(50+\frac{90}{100-x}\right)-\frac{1}{10-\frac{x}{10}}$$

$$=x-50-\frac{100}{100-x}=-\left[(100-x)+\frac{100}{100-x}\right]+50$$

$$\leq 50-2\sqrt{(100-x)\cdot\frac{100}{100-x}}=30,$$

当且仅当 $100-x=\frac{100}{100-x}$，即 $x=90$ 时取等号，

所以当 $x=90$ 时，每套吉祥物的净利润最大.

20. 设函数 $f(x)=a^{x}-a^{-x}$（$x\in\mathbf{R}$，$a>0$ 且 $a\neq1$）.

（1）若 $0<a<1$，判断 $y=f(x)$ 的奇偶性和单调性；

（2）若 $f(1)<0$，求使不等式 $f\left(x^{2}+tx\right)+f(4-x)<0$ 恒成立时实数 t 的取值范围；

（3）若 $f(1)=\frac{3}{2}$，$g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf(x)$ 且 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为-2，求实数 m 的值.

【答案】（1）$y=f(x)$ 是奇函数且单调递减；

（2）$-3<t<5$；

（3）$m=2$.

【解析】

【分析】（1）利用函数奇偶性和单调性的定义即可判断和证明；

（2）由 $f\left(1\right)<0$ 解得 $0<a<1$，由（1）知 $y=f\left(x\right)$ 为减函数且为奇偶函数，利用奇偶性和单调性可知原不等式等价于 $x^2+tx>x-4$，利用二次函数恒成立即可求解；

（3）由 $f(1)=\dfrac{3}{2}$ 可得 $a=2$，$g\left(x\right)=\left(2^x-2^{-x}\right)^2-2m\left(2^x-2^{-x}\right)+2$，令 $t=2^x-2^{-x}$，则根据其单调性可得 $t\geq\dfrac{3}{2}$，$g\left(t\right)=t^2-2mt+2$，对称轴为 $t=m$，分别讨论 $m\geq\dfrac{3}{2}$ 和 $m<\dfrac{3}{2}$ 时，$g\left(t\right)$ 的最小值即可求解.

【小问 1 详解】

$\because f\left(x\right)=a^x-a^{-x}$ 的定义域为 R，关于原点对称；又因为 $f\left(-x\right)=a^{-x}-a^x=-\left(a^x-a^{-x}\right)=-f\left(x\right)$，所以 $y=f\left(x\right)$ 是 R 上的奇函数；

任取 x_1，$x_2\in R$，且 $x_1<x_2$，

$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=a^{x_1}-a^{-x_1}-\left(a^{x_2}-a^{-x_2}\right)=\left(a^{x_1}-a^{x_2}\right)-\left(a^{-x_1}-a^{-x_2}\right)$，

因为 $0<a<1$，$x_1<x_2$，$-x_1>-x_2$ 所以 $a^{x_1}>a^{x_2}$，$a^{-x_1}<a^{-x_2}$，

所以 $a^{x_1}-a^{x_2}>0$，$a^{-x_1}-a^{-x_2}<0$，

所以 $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\left(a^{x_1}-a^{x_2}\right)-\left(a^{-x_1}-a^{-x_2}\right)>0$，

所以 $f\left(x\right)=a^x-a^{-x}$ 在 R 上单调递减，

【小问 2 详解】

$f\left(1\right)=a-a^{-1}=a-\dfrac{1}{a}<0$ 即 $\dfrac{a^2-1}{a}<0$，所以 $a^2-1<0$，

因为 $a>0$，所以 $0<a<1$，

由（1）知 $f\left(x\right)=a^x-a^{-x}$ 在 R 上单调递减的奇函数，

原不等式 $f\left(x^2+tx\right)+f\left(4-x\right)<0$ 等价于 $f\left(x^2+tx\right)<-f\left(4-x\right)=f\left(x-4\right)$，

所以 $x^2+tx>x-4$，即 $x^2+\left(t-1\right)x+4>0$ 恒成立，

所以 $\Delta=\left(t-1\right)^2-4\times4<0$，解得：$-3<t<5$，

所以实数 t 的取值范围是：$-3<t<5$

【小问 3 详解】

$f\left(1\right)=a-a^{-1}=a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}=\frac{3}{2}$，即 $2a^2-3a-2=0$，

解得：$a=2$ 或 $a=-\frac{1}{2}$（舍）

所以 $g\left(x\right)=2^{2x}+2^{-2x}-2m\left(2^x-2^{-x}\right)=\left(2^x-2^{-x}\right)^2-2m\left(2^x-2^{-x}\right)+2$，

令 $t=2^x-2^{-x}$，则 $t=2^x-2^{-x}$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 单调递增，

所以 $t=2^x-2^{-x}\geq 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$g\left(t\right)=t^2-2mt+2$，对称轴为 $t=m$，

当 $m\geq\frac{3}{2}$ 时，$g\left(t\right)_{\min}=g\left(m\right)=m^2-2m^2+2=-2$，解得：$m=2$ 或 $m=-2$（舍）

当 $m<\frac{3}{2}$ 时，$g\left(t\right)_{\min}=g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2m\times\frac{3}{2}+2=\frac{17}{4}-3m=-2$，

解得：$m=\frac{25}{12}>\frac{3}{2}$ 不符合题意，

综上所述：$m=2$.

【点睛】对于指数复合型函数求值域或最值，往往需要换元，转化为关于新元的二次函数，再利用二次函数的性质求最值，注意新元的取值范围.

21. 若函数 $f(x)$ 在定义域内的某区间 I 上是严格增函数，而 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在区间 I 上是严格减函数，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是“弱增函数”.

（1）判断 $f(x)=x\cdot e^x$，$g(x)=2x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是否是“弱增函数”（不需证明）？

（2）若 $h(x)=x^2+(m-\frac{1}{2})x+b$（其中常数 $m\in\mathbf{R}$，$b>0$）在区间 $(0,1]$ 上是“弱增函数”，求 m、b 应满足的条件；

（3）已知 $f(x)=|x-1|+|x-2|+k|x-3|$（k 是常数且 $k\neq 0$），若存在区间 I 使得 $y=f(x)$ 在区间 I 上是“弱增函数”，求 k 的取值范围.

【答案】（1）$f(x)$ 不是，$g(x)$ 是

（2）$m\geq\frac{1}{2}$，$b\geq 1$

（3）$(-2,-1)\cup(-\frac{1}{3},0)\cup(1,2)$

【解析】

【分析】（1）根据“弱增函数”的定义进行判断；

(2) 根据“弱增函数”的定义、二次函数和对勾函数的性质特点可知参数的取值范围;

(3) 根据绝对值函数的解法先去绝对值，在不同区间内利用“弱增函数”的定义进行求解.

【小问 1 详解】

解：由于 $\frac{f(x)}{x}=e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，所以 $f(x)=x\cdot e^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不是“弱增函数”；

$g(x)=2x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数， $\frac{g(x)}{x}=2+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格减函数，所以 $g(x)=2x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是“弱增函数”．

【小问 2 详解】

由题意可知， $h(x)=x^2+(m-\frac{1}{2})x+b$ （其中常数 $m\in\mathbf{R}$， $b>0$）满足在 $(0,1]$ 上是增函数

$\therefore$ 对称轴 $x=-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2})\ \ 0$，解得 $m\geq\frac{1}{2}$

$\frac{h(x)}{x}=x+\frac{b}{x}+(m-\frac{1}{2})$ 满足在 $(0,1]$ 上是减函数，故此必为对勾函数

$\therefore$ 对勾函数单调性分界点 $x=\sqrt{b}\geq1$， $b\geq1$

$\therefore$ 综上： $m\geq\frac{1}{2}$， $b\geq1$.

【小问 3 详解】

由题意可知：

$$f(x)=|x-1|+|x-2|+k|x-3|=\begin{cases}-(k+2)x+3k+3(x<1)\\-kx+3k+1(1\leq x<2)\\(2-k)x+3k-3(2\leq x<3)\\(k+2)x-3k-3(x\geq3)\end{cases}$$

在区间 $[3,+\infty)$ 上，若 $f(x)$ 为“弱增函数”，则必满足 $f(x)=(k+2)x-3(1+k)$ 为严格增函数，

$\frac{f(x)}{x}=(k+2)-3\frac{(1+k)}{x}$ 为严格减函数，即 $\begin{cases}k+2>0\\-3(1+k)>0\end{cases}\Rightarrow-2<k<-1$；

同理：在区间 $[2,3)$ 上，若 $f(x)$ 为“弱增函数”，则必满足 $\begin{cases}2-k>0\\3k-3>0\end{cases}\Rightarrow1<k<2$；

在区间 $[1,2)$ 上，若 $f(x)$ 为“弱增函数”，则必满足 $\begin{cases}-k>0\\3k+1>0\end{cases}\Rightarrow-\frac{1}{3}<k<0$；

在区间 $(-\infty,1)$ 上，若 $f(x)$ 为“弱增函数”，则必满足 $\begin{cases}-(k+2)>0\\3k+3>0\end{cases}\Rightarrow k$ 无解.

综上所述：k的取值范围$\left(-2,-1\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup\left(1,2\right)$

14

期末综合练习（7）

一、填空题（本大题共 12 题，满分 36 分，每题 3 分）

1. 若集合 $A=\{x|x>5\}$，集合 $B=\{x|x\le 7\}$，则 $A\cap B=$ $(5,7]$.

2. 设 $x,\ y\in\mathrm{R}$，用反证法证明命题"如果 $x^2+y^2<4$，那么 $|x|<2$ 且 $|y|<2$"时，应先假设"若$|x|\ge 2$或$|y|\ge 2$".

3. 若扇形的圆心角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，半径为 2，则扇形的面积为 $\frac{4}{3}\pi$.

4. 方程 $\lg x=2024-x$ 的根 $x\in(k,k+1)$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $k=$ 2020.

5. 若 $a>0$，$a\ne 1$，则函数 $y=a^{x-1}+2$ 的图象一定过点 $(1,3)$.

6. 设 $\tan\alpha=3$，则 $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=$ 2.

7. 若 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x-2$，则不等式 $f\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)>1$ 的解集是 $(-\infty,-8)\cup(64,+\infty)$.

8. 已知不等式 $a\cdot 4^x-2^x+2>0$ 对于 $x\in(-\infty,0]$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $(-1,+\infty)$.

9. 若 $f(x)=\begin{cases}a^{8-x},x\le 7\\(2-a)x-8,x>7\end{cases}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是严格增函数，则实数 a 的取值范围是 $(0,\frac{3}{4}]$.

误：$(0,\frac{3}{4})$

10. 若已知 a，b，c 均为正数，则 $M=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.

11. 已知函数 $y=e^{|\ln x|}-|x-2|$ 与 $y=ax$ 的图像有 3 个不同公共点（其中 e 为自然对数的底数），则实数 a 的取值范围是 $(0,1)$.

12. 若直角坐标平面内两点 P、Q 满足条件：①P、Q 都在函数 $f(x)$ 的图象上；②P、Q 关于原点对称，则对称点 (P,Q) 是函数 $f(x)$ 的一个"友好点对"（点对 (P,Q) 与 (Q,P) 看作同一个"友好点对"）. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2+4x+1,x<0\\\dfrac{2}{e^x},x\ge 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 的"友好点对"有 2 个.

二、选择题（本大题共 4 题，每题 4 分，满分 16 分）

13. 对于实数 a、b，下面哪个不等式不恒成立（ D ）

A. $a^2+b^2\ge 2ab$　　　　B. $|a-1|+|b-1|\ge|a-b|$

C. $\log_2\left(a^2+1\right)\ge 0$　　　　D. $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

14. 中国 5G 技术领先世界，其数学原理之一便是著名的香农公式：$C=W\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right)$，它表示：在受噪声干扰的信道中，最大信息传递速率 C 取决于信道带宽 W、信道内信号的平均功率 S、信道内部的高斯噪声功率 N 的大小，其中 $\dfrac{S}{N}$ 叫做信噪比，按照香农公式，若不改变带宽 W，而将信噪比 $\dfrac{S}{N}$ 从 1000 提升至 5000，则 C 大约增加了（ B ）.

A. 20%　　B. 23%　　C. 28%　　D. 50%

$,+\infty)$

15. 已知图 1 对应的函数为 $y=f(x)$，则图 2 对应的函数是（ A ）.

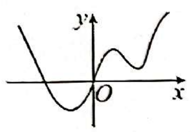


图1

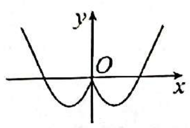


图2

A. $y=f(-|x|)$　　B. $y=f(-x)$　　C. $y=f(|x|)$　　D. $y=-f(-x)$

5 16. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，有下面三个命题，命题 p：存在 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\ne0$，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x+a)<f(x)+f(a)$ 恒成立，命题 q_1：$y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格减函数，且 $f(x)>0$ 恒成立；命题 q_2：$y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数，且存在 $x_0<0$ 使得 $f(x_0)=0$，则下列说法正确的是（ A ）

$a=1$　取 $a>0$ 任意实数

取 $a=x_0$　$a=1$

A. q_1、q_2 都是 p 的充分条件　　　　B. 只有 q_1 是 p 的充分条件

C. 只有 q_2 是 p 的充分条件　　　　D. q_1、q_2 都不是 p 的充分条件

三、解答题（本大题共 5 题，满分 48 分）

17. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，$0<\alpha<\pi$．

(1) 求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值；(2) 求 $\tan\alpha-\cot\alpha$ 的值.

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2$

$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{49}{25}$　$\sin\alpha-\cos\alpha>-1$

$\therefore\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{5}$

(2) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

$\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ $\cot\alpha=-\frac{3}{4}$

$\tan\alpha-\cot\alpha=-\frac{7}{12}$

18. 已知函数 $h(x)=(m^2-5m+1)x^{m+1}$ 为幂函数，且为奇函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 求函数 $g(x)=h(x)+\sqrt{1-2x}$ 在 $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 的值域.

$1-2x=a^2$

(1) $m^2-5m+1=1$ $m^2-5m=0$ $m=0$或5

$h(x)$奇 $m+1$奇 ∴ m偶 ∴ $m=0$.

(2) $g(x)=x+\sqrt{1-2x}$ 设 $\sqrt{1-2x}=a$ $g(x)=a+\frac{1-a^2}{2}=\frac{-a^2+2a+1}{2}=\frac{-(a-1)^2+2}{2}$

$x\in[-1,\frac{1}{2}]$ $a\in[0,\sqrt{3}]$ ∴ $g(x)\in[\frac{1}{2},1]$

19. 第 19 届亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在我国杭州举行，本届亚运会的吉祥物是一套机器人，包括三个："琮琮"代表世界遗产良渚古城遗址，"莲莲"代表世界遗产西湖，"宸宸"代表世界遗产京杭大运河.某公益团队计划举办杭州亚运会吉祥物的展销会，并将所获利润全部用于社区体育设施建设.已知每套吉祥物的进价为 $(50+a)$ 元，其中 a 与进货量成反比，当进货 1 万套时，a 为 9 元，据市场调查，当每套吉祥物的售价定为 x 元时 $(x<100)$，销售量可达到 $\left(10-\frac{x}{10}\right)$ 万套，若展销的其他费用为 1 万元，且所有进货都销售完.

(1) 每套吉祥物售价定为 70 元时，能获得的总利润是多少万元?

(2) 当 x 为多少时，每套吉祥物的净利润最大?

(1) 销售量3万套

进货单价 $50+\frac{9}{3}=53$(元) ∴ $3\times(70-53)-1=50$万元

(2) 进价为 $50+\frac{9}{10-\frac{x}{10}}=50+\frac{90}{100-x}$元.

每套吉祥物的利润为 $y=\frac{[x-(50+\frac{90}{100-x})](10-\frac{x}{10})-1}{10-\frac{x}{10}}=x-50-\frac{90}{100-x}-\frac{1}{10-\frac{x}{10}}$

$=x-50-\frac{90}{100-x}-\frac{10}{100-x}=x-50-\frac{100}{100-x}=-[(100-x)+\frac{100}{100-x}]+50\leq-2\sqrt{(100-x)\cdot\frac{100}{(100-x)}}+50=30$

等号在 $(100-x)\cdot(100-x)=100$ 即 $100-x=10$ 即 $x=90$ 时取到.

∴ x为90时，每套吉祥物的净利润最大.

20. 设函数 $f(x)=a^x-a^{-x}$（$x\in\mathbf{R}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

(1) 若 $0<a<1$，判断 $y=f(x)$ 的奇偶性和单调性;

(2) 若 $f(1)<0$，求使不等式 $f(x^2+tx)+f(4-x)<0$ 恒成立时实数 t 的取值范围;

(3) 若 $f(1)=\frac{3}{2}$，$g(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2mf(x)$ 且 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最小值为 -2，求实数 m 的值.

(1) $f(-x)=a^{-x}-a^{x}=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$ ∴ $f(x)$ 为奇函数. 取 $x_1<x_2$ $f(x_1)-f(x_2)=a^{x_1}+\frac{1}{a^{x_2}}-a^{x_2}-\frac{1}{a^{x_1}}$

$=(a^{x_1}-a^{x_2})(1+\frac{1}{a^{x_1+x_2}})$ ∵ $x_1<x_2$ ∴ $a^{x_1}-a^{x_2}>0$ $1+a^{x_1+x_2}>0$ ∴ $f(x_1)>f(x_2)$

$\boxed{∴ f(x) 单调递减}$

(2) $f(1)<0$ $a-\frac{1}{a}<0 \Rightarrow \frac{a^2-1}{a}<0$ ∵ $a>0$ ∴ $a^2-1<0 \Rightarrow 0<a<1$ $f(x^2+tx)+f(4-x)<0$ $x^2+tx>x-4$

$\Rightarrow x^2+(t-1)x+4>0$ 恒成立 $\Delta=(t-1)^2-16<0 \Rightarrow -3<t<5$ ∴ $t\in(-3,5)$

(3) $f(1)=\frac{3}{2}$ $a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$ $2a^2-2=3a$，$2a^2-3a-2=0$ $(2a+1)(a-2)=0$ $a=2$ （$a=-\frac{1}{2}$ 舍）.

$g(x)=2^{2x}+2^{-2x}-2m(2^x-2^{-x})=(2^x-2^{-x})^2-2m(2^x-2^{-x})+2$ $x\in[1,+\infty)$ 时 $2^x-2^{-x}\in[\frac{3}{2},+\infty)$.

当 $m\le\frac{3}{2}$ 时 $g(\frac{3}{2})=-2$ $m=\frac{17}{12}$ 当 $m>\frac{3}{2}$ 时 $2-m^2=-2$ $m^2=4 \Rightarrow m=2$ 或 $m=-2$（舍） ∴ $m=\frac{17}{12}$ 或 $m=2$

-3

（舍）

$g(x)_{min}=g(m)=m^2-2m^2+2$

$t=2^x-2^{-x}$

舍

21. 若函数 $f(x)$ 在定义域内的某区间 I 上是严格增函数，而 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在区间 I 上是严格减函数，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上是"弱增函数".

(1) 判断 $f(x)=x\cdot e^x$，$g(x)=2x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是否是"弱增函数"（不需证明）?

(2) 若 $h(x)=x^2+(m-\frac{1}{2})x+b$（其中常数 $m\in\mathbf{R}$，$b>0$）在区间 $(0,1]$ 上是"弱增函数"，求 m、b 应满足的条件;

(3) 已知 $f(x)=|x-1|+|x-2|+k|x-3|$（k 是常数且 $k\neq 0$），若存在区间 I 使得 $y=f(x)$ 在区间 I 上是"弱增函数"，求 k 的取值范围.

(1) $f(x)$ 不是"弱增函数" $g(x)$ 是"弱增函数".

(2) $-\frac{1}{2}(m-\frac{1}{2})\le 0$ $m-\frac{1}{2}\ge 0$ $m\ge\frac{1}{2}$ $\frac{h(x)}{x}=x+\frac{b}{x}+(m-\frac{1}{2})$ 在 $(0,1]$ 上递减

∴ $\sqrt{b}\ge 1$ ∴ $b\ge 1$ ∴ $m\in[\frac{1}{2},+\infty)$ $b\in[1,+\infty)$

(3) $f(x)=\begin{cases}(k+2)x-3(1+k), & x\ge 3\\ (2-k)x+3(k-1), & 2\le x<3\\ -kx+3k+1, & 1\le x<2\\ -(k+2)x+3(1+k), & x<1\end{cases}$

$f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 弱增 $\Rightarrow k+2>0$ $1+k<0$ $-2<k<-1$

$f(x)$ 在 $[2,3]$ 弱增 $\Rightarrow 2-k>0$ $k-1>0$ $1<k<2$

$f(x)$ 在 $[1,2]$ 弱增 $\Rightarrow -k>0$ $3k+1>0$ $-\frac{1}{3}<k<0$

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 弱增 $\Rightarrow k+2<0$ $3(1+k)>0$ $1+k>0$ 无解.

∴ $k\in(-2,-1)\cup(-\frac{1}{3},0)\cup(1,2)$