张恒多

142

期末练习（5）

1. 已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|x^2<1\}$，则 $A\cap B=$ $(0,1)$ ________.

2. 不等式 $\frac{1}{x}>1$ 的解集为 $(0,1)$ ________.

3. 若 $\log_{27}5\cdot\log_5 x=\frac{1}{3}$，则 $x=$ 3 ________.

4. 函数 $y=\frac{3}{x}-x^2+1$ 的零点 $x_0\in(1,2)$，对区间 $(1,2)$ 利用一次"二分法"，可确定 x_0 所在的区间为 $(\frac{3}{2},2)$ ________.

5. 函数 $y=a^{x+1}+3$ （$a>0$ 且 $a\neq1$）的图像过定点 $(-1,4)$ ________.

6. 某林区的木材蓄积量每年平均比上一年增长 10%，若要求林区的木材蓄积量高于当前蓄积量的 3 倍，则至少需要经过 12 ________年（结果精确到整数）.

7. 用函数的观点解不等式 $2^x+\log_2 x>2$，该不等式的解集为 $(1,+\infty)$ ________.

8. 若 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时 $f(x)=\log_2(2+x)$，则 $f(-2)=$ -2 ________.

9. 设 $f(x)=x\left(\frac{1}{2^x-a}+\frac{1}{2}\right)$.若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，则关于 x 的不等式 $a^x\geq f(a)$ 的解集为 $[1,+\infty)$ ________.

10. 已知函数 $f(x)=x^2+2x+3$，$x\in[m,0]$ 的最大值为 3，最小值为 2，则实数 m 的取值范围是 $[-2,-1]$ ________

11. 已知问题："$|x+3|+|x-a|\geq5$ 恒成立，求实数 a 的取值范围".两位同学对此问题展开讨论：小明说可以分类讨论，将不等式左边的两个绝对值打开；小新说可以利用三角不等式解决问题.请你选择一个适合自己的方法求解此题，并写出实数 a 的取值范围 $(-\infty,-8]\cup[2,+\infty)$ ________.

12. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}a-|\ln x|,x>0\\x^2+2x+a,x\leq0\end{cases}(a\in R)$.若关于 x 的方程 $f(x)=2024$ 恰有四个不同的实数根，则该方程所有实数根之和的取值范围是 $(0,+\infty)$ ________.

二、选择题

C

13. 下列四组函数中，同组的两个函数是相同函数的是（C）

A. $y=|x|$ 与 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$

B. $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$

C. $y=-x$ 与 $y=\left(\sqrt[3]{-x}\right)^3$

D. $y=x$ 与 $y=\left(x^{-1}\right)^{-1}$

B

14. 若 $0<b<1$，则“$a>b^3$”是“$a>b$”的（B）

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充要条件

D. 既非充分也非必要条件

B

15. 若 $\log_{18}9=a, 18^b=5$，则 $\log_{36}45$ 等于 B

A. $\dfrac{a+b}{2+a}$

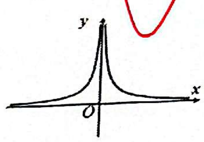
B. $\dfrac{a+b}{2-a}$

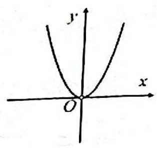
C. $\dfrac{a+b}{2a}$

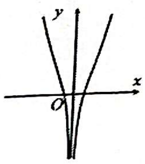
D. $\dfrac{a+b}{a^2}$

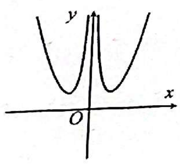
A

16. 我国著名数学家华罗庚先生曾说：“数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休.”在数学的学习和研究中，常用函数的图像来研究函数的性质，也常用函数的解析式来琢磨函数图像的特征，如函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{|x|}$（$a\in R$）的图像不可能是（A）

A. 

B. 

C. 

D. 

三、解答题

17. 已知集合 $A=\{x|x^2-8x+m=0,m\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|ax-1=0,a\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cup B=A$.

(1) 若 $m=12$，求实数 a 组成的集合. (2) 若全集为 A，$\overline{B}=\{3\}$，求 m，a 的值.

解: (1) $A=\{2,6\}$

$\therefore B=\{2\},\{6\},\{2,6\}$ 或 $\varnothing$

得 $a\in\boxed{\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{6}\}}$

(2) $3\in A$

$\therefore m=15$

$\therefore A=\{3,5\}$

$\therefore B=\{5\}$

$\therefore \boxed{a=\frac{1}{5},m=15}$

18. 已知函数 $f(x)=2^x-4$. (1) 求方程 $f(x)=3$ 的解; (2) 若关于 x 的方程

$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+\lambda$ 在 $x\in[2,4]$ 上有实数解,求实数 λ 的取值范围.

解: (1) $2^x-4=3$

$\boxed{x=\log_2 7}$

(2) $2^x-4=\log_{\frac{1}{2}}x+\lambda$

$\lambda=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$

其中 2^x 递增, $\log_{\frac{1}{2}}x$ 递减

$\therefore$ RHS递增，即 $x=2$ 与 4 时分别取最小与大值

$\therefore \boxed{\lambda\in[1,14]}$

19. 已知 a 是实数，定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 是奇函数，其中 $f(x)=a-\dfrac{1}{2^x+1}$.

(1) 求 a 的值; (2) 判断函数 $y=f(x)$ 的单调性，并证明你的结论.

解: (1) $f(0)=0$

$\therefore \boxed{a=\frac{1}{2}}$

(2) $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$

对 $\forall\ x_1>x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{2^{x_2}+1}-\dfrac{1}{2^{x_1}+1}$

$=\dfrac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}+2^{x_1}+2^{x_2}+1}$

>0

$\therefore \boxed{f(x)\text{ 严格单调增}}$

20、某中学筹办100年校庆，需为参加校庆的校友、嘉宾每人准备一份纪念品，共需要准备5000份纪念品，每份纪念品包含一支钢笔和一个保温杯，现需要将钢笔和保温杯装入精品礼盒.校庆筹备小组共有7人，现将其分成两组，一组完成钢笔的装盒工作，另一组完成保温杯的装盒工作，据测算，6人一天可完成1000支钢笔的装盒工作，5人一天可完成1000个保温杯的装盒工作.

(1) 若安排3人完成钢笔的装盒工作，则完成纪念品装盒工作的工期为多久？

(2) 如何安排两组的人数，才能使工期更短？

解：(1) 1人1天 $\frac{500}{3}$ 支笔

1人1天 200个杯

$5000\div(3\times\frac{500}{3})=10$

$5000\div(4\times200)=6.25$

故 $\boxed{10天}$

(2) 设 x 人装笔

$t_{笔}=5000\div(x\cdot\frac{500}{3})=\frac{30}{x}$

$t_{杯}=5000\div[200(7-x)]=\frac{25}{7-x}$

分别计算 $x=1,2\cdots7$ 可知 $x=4$ 时工期最短

答：$\boxed{4人装笔，3人装杯}$

21、对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，若存在区间 $[m,n]\in D$(其中 $m<n$，使得函数 $y=f(x)$ 同时满足：①函数 $y=f(x)$ 在 $[m,n]$ 上是严格增函数或严格减函数；②当定义域是 $[m,n]$ 时，函数 $y=f(x)$ 的值域也是 $[m,n]$,则称 $[m,n]$ 是函数 $y=f(x)$ 的“等域区间”

(1)若区间 $[1,2]$ 是函数 $y=a\cdot2^x+b(a>0)$ 的“等域区间”，求实数 a,b 的值；

(2)判断函数 $y=3-\frac{4}{x}$ 是否存在“等域区间”，并说明理由；

(3)若区间 $[m,n]$ 是函数 $y=\dfrac{(a+1)x-\frac{1}{a}}{ax}(a\neq0)$ 的一个“等域区间”，求 $n-m$ 的最大值.

解：(1) 显然 y 严格单调增

$\therefore\begin{cases}a\cdot2^1+b=1\\a\cdot2^2+b=2\end{cases}$

$\therefore\boxed{a=\frac{1}{2},b=0}$

(2) 不妨设其等域区间为 $[m,n]$

易知 m,n 同号且 $mn\neq0$

且 y 在 $[m,n]$ 上单调严格增

$\therefore\begin{cases}3-\frac{4}{m}=m\\3-\frac{4}{n}=n\end{cases}$

无解

$\therefore\boxed{不存在}$

(3) $y=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$

y 严格单调增

$\therefore\begin{cases}m=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2m}\\n=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2n}\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m+n=\frac{a+1}{a}\\mn=\frac{1}{a^2}\end{cases}$

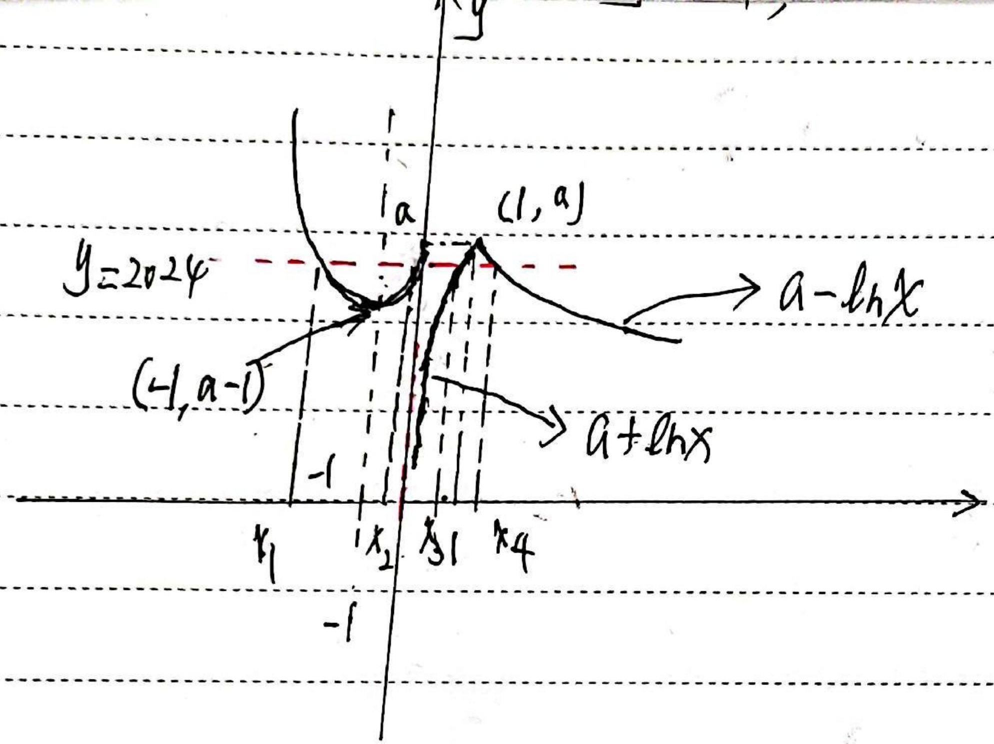
$\therefore(n-m)^2=\frac{a^2+2a-3}{a^2}\leq\frac{4}{3}$

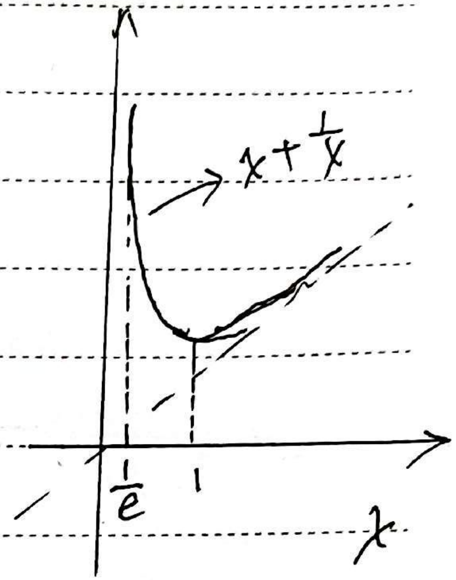
$\therefore n-m\leq\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$，此时 $a=3$，$m=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$，$n=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

m,n为同号不等根、$\Delta>0$

漏

-3





解.如图. $f(x)=2024$ 恰有4个不同实根. 则 $a-1<2024<a$

$\therefore$ $a\in(2024,2025)$ ， $x_1+x_2=-2$ ， $a+\ln x_3=a-\ln x_4=2024$ $\Rightarrow$ $x_3x_4=1$， $x_4=\frac{1}{x_3}$

$x_3+x_4=x_3+\frac{1}{x_3}$， 又 $a+\ln x_3=2024$. $x_3=e^{2024-a}\in(e^{-1},1)$. 由对勾函数性质知. $x_3+\frac{1}{x_3}\in(2,e+\frac{1}{e})$

$\therefore$ $x_1+x_2+x_3+x_4\in(0,e+\frac{1}{e}-2)$

期末练习（5）

1. 已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$， $B=\{x|x^2<1\}$，则 $A\cap B=$______________.

【答案】 $\{x|0<x<1\}$

【解析】

【分析】求解出一元二次不等式的解集为集合 B，然后根据交集运算求解出结果.

【详解】因为 $x^2<1$，所以 $-1<x<1$，所以 $B=\{x|-1<x<1\}$，

因为 $A=\{x|0<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x<1\}$，

故答案为：$\{x|0<x<1\}$.

2. 不等式 $\frac{1}{x}>1$ 的解集为________.

【答案】$(0,1)$

【解析】

【分析】由题设可得 $\frac{x-1}{x}<0$，利用分式不等式的解法求解即可.

【详解】由题设，$1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}<0$，

$\therefore x(x-1)<0$，解得 $0<x<1$，

$\therefore$解集为$(0,1)$.

故答案为：$(0,1)$

3. 若 $\log_{27}5\cdot\log_5 x=\frac{1}{3}$，则 $x=$______________.

【答案】 3

【解析】

【分析】根据对数的运算法则和对数的换底公式，准确运算，即可求解.

【详解】由对数的运算性质，可得 $\log_{27}5\cdot\log_5 x=\frac{\log_3 5}{\log_3 27}\cdot\frac{\log_3 x}{\log_3 5}=\frac{1}{3}\log_3 x=\frac{1}{3}$，

可得 $\log_3 x=1$，所以 $x=3$.

故答案为： 3.

4. 函数 $y=\frac{3}{x}-x^2+1$ 的零点 $x_0\in(1,2)$，对区间 $(1,2)$ 利用一次“二分法”，可确定 x_0 所在的区间为______.

【答案】$\left(\frac{3}{2},2\right)$

【解析】

【分析】根据二分法的定义求解.

【详解】设 $f(x)=\frac{3}{x}-x^2+1$，则 $f(1)=3-1+1=3>0, f(2)=\frac{3}{2}-4+1=-\frac{3}{2}<0$，

取区间 $(1,2)$ 的中点为 $\frac{3}{2}$，$f(\frac{3}{2})=2-\frac{9}{4}+1=\frac{3}{4}>0$，

所以可确定 x_0 所在的区间为 $\left(\frac{3}{2},2\right)$，

故答案为: $\left(\frac{3}{2},2\right)$.

5. 函数 $y=a^{x+1}+3$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）的图像过定点______________.

【答案】$(-1,4)$

【解析】

【分析】由指数函数的性质可得.

【详解】当 $x+1=0\Rightarrow x=-1$ 时，$y=a^0+3=4$，

故图像过定点 $(-1,4)$，

故答案为：$(-1,4)$.

6. 某林区的木材蓄积量每年平均比上一年增长 10%，若要求林区的木材蓄积量高于当前蓄积量的 3 倍，则至少需要经过__________年（结果精确到整数）.

【答案】12

【解析】

【分析】由于林区的木材蓄积量每年平均比上一年增长 10%，那么假设该林区当前的木材蓄积量为 1，则经过 x 年的木材蓄积量为 $\left(\frac{11}{10}\right)^x$，依题意：可令 $\left(\frac{11}{10}\right)^x>3$，解不等式，再

计算取精确值即可.

【详解】假设该林区当前的木材蓄积量为 1，则经过 x 年的木材蓄积量为 $\left(1+10\%\right)^{x}$.

由于要求林区的木材蓄积量高于当前蓄积量的 3 倍则可得 $\left(1+10\%\right)^{x}>3$，得 $x>\log_{\frac{11}{10}}3$.

因为 $\log_{\frac{11}{10}}3=\dfrac{\lg3}{\lg11-1}\approx11.7$，所以 $x>11.7$，故至少需要经过 12 年.

故答案为：12.

7. 用函数的观点解不等式 $2^{x}+\log_{2}x>2$，该不等式的解集为____________.

【答案】$\left(1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】由不等式 $2^{x}+\log_{2}x>2$ 可得 $2^{x}+\log_{2}x-2>0$，令函数 $f\left(x\right)=2^{x}+\log_{2}x-2$ 再根据函数单调性即可求解.

【详解】由不等式 $2^{x}+\log_{2}x>2$，得 $2^{x}+\log_{2}x-2>0$，

令函数 $f\left(x\right)=2^{x}+\log_{2}x-2$，定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，

因为 $y=2^{x}$，$y=\log_{2}x$ 均为定义域内的增函数，

所以 $f\left(x\right)$ 在定义域 $\left(0,+\infty\right)$ 内单调递增，且 $f\left(1\right)=0$，

对应不等式即为 $f\left(x\right)>f\left(1\right)$，从而得 $x>1$，

所以不等式 $2^{x}+\log_{2}x>2$ 的解集为 $\left(1,+\infty\right)$.

故答案为：$\left(1,+\infty\right)$.

8. 若 $y=f\left(x\right)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时 $f\left(x\right)=\log_{2}\left(2+x\right)$，则 $f\left(-2\right)=$_________.

【答案】-2

【解析】

【分析】根据题设条件，利用 $f\left(-2\right)=-f\left(2\right)$，即可求解.

【详解】由题意，函数 $y=f\left(x\right)$ 是奇函数，当 $x>0$ 时 $f\left(x\right)=\log_{2}\left(2+x\right)$，

所以 $f\left(-2\right)=-f\left(2\right)=-\log_{2}(2+2)=-2$.

故答案为：-2.

9. 设$f\left(x\right)=x\left(\dfrac{1}{2^{x}-a}+\dfrac{1}{2}\right)$.若函数$y=f\left(x\right)$的定义域为$\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，则关于$x$的不等式$a^{x}\geq f\left(a\right)$的解集为__________.

【答案】$\left[1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】由函数$f\left(x\right)$的定义域可求得实数a的值，可得出函数$f\left(x\right)$的解析式，求出$f\left(a\right)$的值，然后利用指数函数的单调性可解不等式$a^{x}\geq f\left(a\right)$，即可得其解集.

【详解】若$a\leq 0$，对任意的$x\in \mathbf{R}$，$2^{x}-a>0$，则函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，不合乎题意，

所以，$a>0$，由$2^{x}-a\neq 0$可得$x\neq \log_{2}a$，

因为函数$y=f\left(x\right)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq 1\right\}$，所以，$log_{2}a=1$，解得$a=2$，

所以，$f\left(x\right)=x\left(\dfrac{1}{2^{x}-2}+\dfrac{1}{2}\right)$，则$f\left(a\right)=f\left(2\right)=2\left(\dfrac{1}{2^{2}-2}+\dfrac{1}{2}\right)=2$，

由$a^{x}\geq f\left(a\right)$可得$2^{x}\geq 2$，解得$x\geq 1$.

因此，不等式$a^{x}\geq f\left(a\right)$的解集为$\left[1,+\infty\right)$.

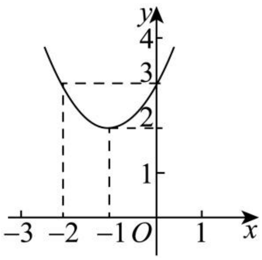
故答案为：$\left[1,+\infty\right)$.

10. 已知函数$f(x)=x^{2}+2x+3$，$x\in[m,0]$的最大值为3，最小值为2，则实数m的取值范围是________.

【答案】$[-2,-1]$

【解析】

【分析】画出函数的图像，对称轴为$x=-1$，函数在对称轴的位置取得最小值2，令$f(x)=x^{2}+2x+3=3$，可求得$x=0$，或$x=-2$，进而得到参数范围.

【详解】

函数 $f(x)=x^2+2x+3$ 的图象是开口朝上，且以直线 $x=-1$ 为对称的抛物线，

当 $x=-1$ 时，函数取最小值 2，

令 $f(x)=x^2+2x+3=3$，则 $x=0$，或 $x=-2$，

若函数 $f(x)=x^2+2x+3$ 在 $[m,0]$ 上的最大值为 3，最小值为 2，

则 $m\in[-2,-1]$，

故答案为：$[-2,-1]$.

11. 已知问题："$|x+3|+|x-a|\geq 5$ 恒成立，求实数 a 的取值范围".两位同学对此问题展开讨论：小明说可以分类讨论，将不等式左边的两个绝对值打开；小新说可以利用三角不等式解决问题.请你选择一个适合自己的方法求解此题，并写出实数 a 的取值范围__________.

【答案】$(-\infty,-8]\cup[2,+\infty)$

【解析】

【分析】根据三角不等式求出最小值即可得解.

【详解】根据三角不等式 $|x+3|+|x-a|\geq|3+a|$，

所以 $|x+3|+|x-a|\geq 5$ 恒成立，只需 $|3+a|\geq 5$，

所以 $a+3\leq -5$ 或 $a+3\geq 5$

解得 $a\in(-\infty,-8]\cup[2,+\infty)$.

故答案为：$(-\infty,-8]\cup[2,+\infty)$

12. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases} a-|\ln x|, x>0 \\ x^2+2x+a, x\leq 0 \end{cases}(a\in R)$.若关于 x 的方程 $f(x)=2024$ 恰有四个不同的实数根，则该方程所有实数根之和的取值范围是

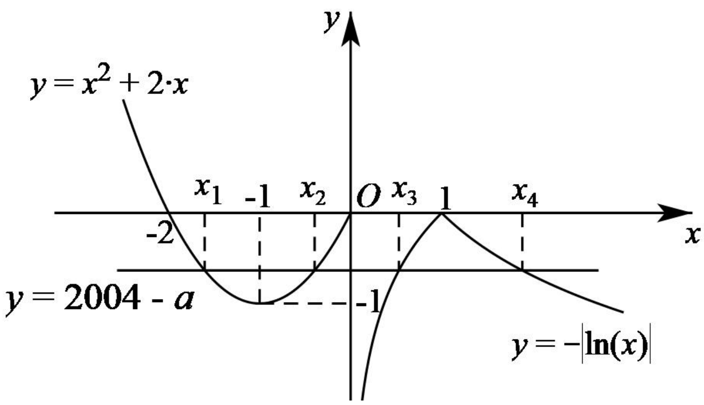
______________.

【答案】$(0,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2)$

【解析】

【分析】令 $g(x)=f\left(x\right)-a=\begin{cases}-\left|\ln x\right|,x>0\\x^{2}+2x,x\leq 0\end{cases}$，画出图像如图所示，利用数形结合思想，结合二次函数的对称性，对数函数的运算和性质，对勾函数的单调性求解.

【详解】$g(x)=f\left(x\right)-a=\begin{cases}-\left|\ln x\right|,x>0\\x^{2}+2x,x\leq 0\end{cases}$，画出图像如图所示.



方程 $f(x)=2024$ 等价于 $g\left(x\right)=2004-a$，方程有 4 个不同的实数根，即函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象与水平直线 $y=2004-a$ 有 4 个不同的交点，故 $2004-a\in\left(-1,0\right)$.

设四个交点的横坐标从左到右依次为 x_1,x_2,x_3,x_4，如图所示，可知

$x_1<0,x_2<0,x_1+x_2=-2$，$0<x_3<1<x_4$，

结合 $2004-a=g\left(x_3\right)=g\left(x_4\right)=-\left|\ln x_3\right|=-\left|\ln x_4\right|$，得 $\ln x_3=-\ln x_4$，所以 $x_3x_4=1$.

又因为 $2004-a\in\left(-1,0\right)$，所以 $\ln x_3\in\left(-1,0\right)$，所以 $x_3\in\left(\mathrm{e}^{-1},1\right)$，所以 $x_3+x_4=x_3+\dfrac{1}{x_3}$，

由于函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,1\right]$ 上单调递减，所以 $x_3+x_4\in\left(2,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\right)$，

$x_1+x_2+x_3+x_4=-2+x_3+x_4\in(0,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2)$，

所以题设方程所有实数根之和的取值范围是 $(0,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2)$.

故答案为：$(0,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}-2)$

二、选择题（本大题共有 4 题，每题 4 分，满分 16 分）每题有且只有一个正确

选项，考生应在答题卷的相应编号上，将代表正确选项的小方格涂黑，选对得 4 分，否则一律得零分.

13. 下列四组函数中，同组的两个函数是相同函数的是（　）

A. $y=|x|$ 与 $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　B. $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$

C. $y=-x$ 与 $y=\left(\sqrt[3]{-x}\right)^3$　　D. $y=x$ 与 $y=\left(x^{-1}\right)^{-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据相同函数的知识确定正确答案.

【详解】A 选项，$y=|x|$的定义域为$\mathbf{R}$，$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$的定义域为$\left[0,+\infty\right)$，所以不是相同函数.

B 选项，$y=x$的定义域为$\mathbf{R}$，$y=2^{\log_2 x}$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，所以不是相同函数.

C 选项，$y=\left(\sqrt[3]{-x}\right)^3=-x$，两个函数定义域、值域、对应关系相同，是相同函数.

D 选项，$y=x$的定义域为$\mathbf{R}$，$y=\left(x^{-1}\right)^{-1}$的定义域为$\{x\,|\,x\neq 0\}$，所以不是相同函数.

故选：C

14. 若$0<b<1$，则“$a>b^3$”是“$a>b$”的（　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用充分条件与必要条件直接判断即可.

【详解】当$a=\frac{1}{3},b=\frac{1}{2}$，则$a>b^3$成立，但$a>b$不成立，

所以充分性不成立；

因为$0<b<1$，所以$b>b^3$，

又因为$a>b$，所以$a>b>b^3$，即$a>b^3$，

所以必要性成立；

所以“$a>b^3$”是“$a>b$”的必要不充分条件，

故选：B.

15. 若$\log_{18}9=a,18^{b}=5$，则$\log_{36}45$等于

A. $\dfrac{a+b}{2+a}$　　B. $\dfrac{a+b}{2-a}$

C. $\dfrac{a+b}{2a}$　　D. $\dfrac{a+b}{a^{2}}$

【答案】B

【解析】

【分析】先化$18^{b}=5$为$b=\log_{18}^{5}=\dfrac{\log_{3}^{5}}{2+\log_{3}^{2}}$，化再利用换底公式化简$a=\dfrac{\log_{3}^{9}}{\log_{3}^{18}}=\dfrac{2}{2+\log_{3}^{2}}$，

解得$\begin{cases}\log_{3}2=\dfrac{2-2a}{a}\\ \log_{3}5=\dfrac{2b}{a}\end{cases}$，最后利用换底公式求结果.

【详解】$\because 18^{b}=5$，$\therefore b=\log_{18}^{5}=\dfrac{\log_{3}^{5}}{2+\log_{3}^{2}}$，又$a=\dfrac{\log_{3}^{9}}{\log_{3}^{18}}=\dfrac{2}{2+\log_{3}^{2}}$，联立解得

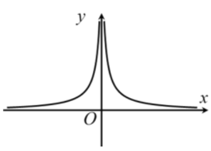
$\begin{cases}\log_{3}2=\dfrac{2-2a}{a}\\ \log_{3}5=\dfrac{2b}{a}\end{cases}$.

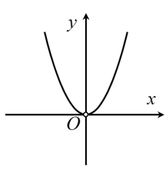
$\therefore \log_{36}^{45}=\dfrac{\log_{3}^{9\times5}}{\log_{3}^{4\times9}}=\dfrac{2+\log_{3}^{5}}{2+2\log_{3}^{2}}=\dfrac{2+\dfrac{2b}{a}}{2+2\times\dfrac{2-2a}{a}}=\dfrac{a+b}{2-a}$. 故选B.

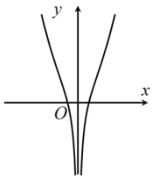
【点睛】本题考查换底公式，考查基本化简求解能力.

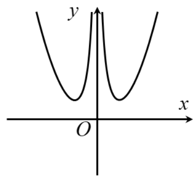
16. 我国著名数学家华罗庚先生曾说："数缺形时少直观，形缺数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休."在数学的学习和研究中，常用函数的图像来研究函数的性质，也常用函数的解析式来琢磨函数图像的特征，如函数$f(x)=x^{2}+\dfrac{a}{|x|}$（$a\in R$）的图像不可能是

（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性，分类 $a=0$， $a<0$ 和 $a>0$ 三种情况分类讨论，结合选项，即可求解.

【详解】由题意，函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{|x|}(a\in R)$ 的定义域为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 关于原点对称，

且 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，图象关于原点对称，

当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=x^2$ 且 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，图象如选项 B 中的图象；

当 $a<0$ 时，若 $x>0$ 时，函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$，可得 $f'(x)=\dfrac{2x^3-a}{x^2}>0$，

函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，此时选项 C 符合题意；

当 $a>0$ 时，若 $x>0$ 时，可得 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$，则 $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{2x^3-a}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}}$，

当 $x\in(0,\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}})$ 时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in(\sqrt[3]{\dfrac{a}{2}},+\infty)$ 时，$f'\left(x\right)>0$，$f\left(x\right)$ 单调递增，

所以选项 D 符合题意.

故选：A.

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 56 分）解答下列各题必须在答题卷的相应编号规定区域内写出必要的步骤.

17. 已知集合 $A=\left\{x\left|x^2-8x+m=0,m\in\mathbf{R}\right.\right\},B=\left\{x\left|ax-1=0,a\in\mathbf{R}\right.\right\}$，且 $A\cup B=A$.

（1）若 $m=12$，求实数 a 组成的集合.

（2）若全集为 A，$\overline{B}=\{3\}$，求 m，a 的值.

【答案】（1）$\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right\}$；

（2）$m=15$，$a=\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】（1）$m=12$，可得 $A=\{2,6\}$，由 $A\cup B=A$ 得 $B\subseteq A$，对 B 分类讨论即可求；

（2）由全集为 A，$\overline{B}=\{3\}$，即 $\complement_A B=\{3\}$ 得 $3\in A$，$3\notin B$，代入 $x^2-8x+m=0$ 可得 m，

$A=\{3,5\}$，即 $5\in B$，代入 $ax-1=0$ 可得 a

【小问 1 详解】

$m=12$，$A=\left\{x\middle|x^2-8x+12=0\right\}=\{2,6\}$，由 $A\cup B=A$ 得 $B\subseteq A$，

当 $B=\varnothing$，则 $a=0$；

当 $B=\{2\}$，则 $a=\frac{1}{2}$；

当 $B=\{6\}$，则 $a=\frac{1}{6}$.

综上可得实数 a 组成的集合为 $\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right\}$；

【小问 2 详解】

由全集为 A，$\overline{B}=\{3\}$，即 $\complement_A B=\{3\}$ 得 $3\in A$，$3\notin B$，

$\therefore 3^2-8\times3+m=0\Rightarrow m=15$，$\therefore A=\left\{x\middle|x^2-8x+15=0\right\}=\{3,5\}$，

$\therefore 5\in B\Rightarrow 5a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{5}$.

综上，$m=15$，$a=\frac{1}{5}$

18. 已知函数 $f(x)=2^x-4$.

（1）求方程 $f(x)=3$ 的解；

（2）若关于 x 的方程 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+\lambda$ 在 $x\in[2,4]$ 上有实数解,求实数 λ 的取值范围.

【答案】（1） $x=\log_2 7$

（2） $\lambda\in[1,14]$

【解析】

【分析】（1）解方程 $2^x-4=3$, 即可求解.

（2）将问题转化为 $\lambda=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in[2,4]$ 上有实数解,求函数 $y=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in[2,4]$ 上的值域即可.

【小问 1 详解】

由题得 $2^x-4=3$, 即 $2^x=7$, $\therefore x=\log_2 7$,

故方程 $f(x)=3$ 的解为 $x=\log_2 7$.

【小问 2 详解】

由 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x+\lambda$,得 $\lambda=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$,

易知 $y=2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4$ 在 $x\in[2,4]$ 上是严格增函数,

且当 $x=2$ 时, $y=1$; 当 $x=4$ 时, $y=14$, $\therefore 2^x-\log_{\frac{1}{2}}x-4\in[1,14]$,

故 $\lambda\in[1,14]$.

19. 已知 a 是实数，定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 是奇函数，其中 $f(x)=a-\dfrac{1}{2^x+1}$.

（1）求 a 的值；

（2）判断函数 $y=f(x)$ 的单调性，并证明你的结论.

【答案】（1） $a=\dfrac{1}{2}$

（2）函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用 $f(0)=0$，可求出 a 的值；

（2）先判断出函数为增函数，再根据增函数的定义可证明结论.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，所以 $f(0)=a-\dfrac{1}{2^0+1}=a-\dfrac{1}{2}=0$，解得 $a=\dfrac{1}{2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，

则 $f(-x)+f\left(x\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{-x}+1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}=\frac{1}{2}-\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}=1-\frac{2^x+1}{2^x+1}=0$，

故满足函数 $y=f(x)$ 是奇函数.

所以 $a=\frac{1}{2}$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

证明：任取 $x_1<x_2\in\mathrm{R}$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{x_1}+1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{x_2}+1}\right)=\frac{1}{2^{x_2}+1}-\frac{1}{2^{x_1}+1}=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{\left(2^{x_2}+1\right)\left(2^{x_1}+1\right)}$，

因为 $x_1<x_2$，$2^{x_1}-2^{x_2}<0$，$2^{x_2}+1>0$，$2^{x_1}+1>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

20. 某中学筹办100年校庆，需为参加校庆的校友、嘉宾每人准备一份纪念品，共需要准备5000份纪念品，每份纪念品包含一支钢笔和一个保温杯，现需要将钢笔和保温杯装入精品礼盒.校庆筹备小组共有7人，现将其分成两组，一组完成钢笔的装盒工作，另一组完成保温杯的装盒工作，据测算，6人一天可完成1000支钢笔的装盒工作，5人一天可完成1000个保温杯的装盒工作.

（1）若安排3人完成钢笔的装盒工作，则完成纪念品装盒工作的工期为多久?

（2）如何安排两组的人数，才能使工期更短?

【答案】（1）10天

（2）安排4人完成钢笔的装盒工作，3人完成保温杯的装盒工作，可以使得工期最短.

【解析】

【分析】（1）计算出3人完成钢笔的装盒工作或完成保温怀的装盒工作的天数，比较大小后可得出结论;

（2）完成纪念品装盒工作的工期 $T\left(x\right)$ 的函数解析式，利用函数的单调性求出 $T\left(x\right)$ 的最小值，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：若安排3人完成钢笔的装盒工作，则完成钢笔的装盒工作需要$\frac{5\times6}{3}=10$天，

完成保温怀的装盒工作需要$\frac{5\times5}{7-3}=\frac{25}{4}$天$<10$天.

则完成纪念品装盒工作的工期为10天.

【小问2详解】

解：设安排x人完成钢笔的装盒工作，则完成钢笔的装盒工作需要$f(x)=\frac{5\times6}{x}=\frac{30}{x}$天，

完成保温怀的装盒工作需要$g(x)=\frac{5\times5}{7-x}=\frac{25}{7-x}$天，其中$x\in\{1,2,3,4,5,6\}$.

因为函数$f(x)$在区间$(0,7)$上单调递减，函数$g(x)$在区间$(0,7)$上单调递增，

所以完成纪念品装盒工作的工期为$T(x)=\begin{cases}f(x),f(x)>g(x)\\g(x),f(x)\le g(x)\end{cases}$，

由$f(x_0)=g(x_0)$，即$\frac{30}{x_0}=\frac{25}{7-x_0}$，得$x_0=\frac{42}{11}$.

从而$T(x)=\begin{cases}\frac{30}{x},x\in\{1,2,3\}\\\frac{25}{7-x},x\in\{4,5,6,7\}\end{cases}$，

因为函数$T(x)$在区间$\{1,2,3\}$上单调递减，在$\{4,5,6,7\}$上单调递增，

计算可得$T(3)=10$，$T(4)=\frac{25}{3}$，且$T(4)<T(3)$，

所以安排4人完成钢笔的装盒工作，3人完成保温杯的装盒工作，可以使得工期最短.

21. 对于定义域为D的函数$y=f(x)$，若存在区间$[m,n]\in D$(其中$m<n$，使得函数$y=f(x)$同时满足：①函数$y=f(x)$在$[m,n]$上是严格增函数或严格减函数；②当定义域是$[m,n]$时，函数$y=f(x)$的值域也是$[m,n]$,则称$[m,n]$是函数$y=f(x)$的“等域区间”

(1)若区间$[1,2]$是函数$y=a\cdot2^x+b(a>0)$的“等域区间”，求实数a,b的值：

(2)判断函数$y=3-\frac{4}{x}$是否存在“等域区间”，并说明理由；

(3)若区间$[m,n]$是函数$y=\frac{(a+1)x-\frac{1}{a}}{ax}(a\ne0)$的一个“等域区间”，求$n-m$的最大值.

【答案】(1)$a=\frac{1}{2},b=0$；

(2)不存在，理由见解析;

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【分析】(1) 利用给定函数单调性，结合“等域区间”的定义，列式计算即得.

(2) 假定函数存在“等域区间”，结合函数单调性，构造方程，再判断方程解的情况即得.

(3) 借助 $f(x)$ 的单调性及“等域区间”的定义，将问题转化为 $m,n(m<n)$ 是方程 $\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}=x$ 的两个同号的实数根，再结合二次函数与韦达定理求解问题.

【解析】(1) 函数 $f(x)=a\cdot 2^x+b(a>0)$ 是 **R** 上的增函数,

由区间 $[1,2]$ 是函数 $f(x)$ 的“等域区间”，得 $\begin{cases} a\cdot 2^1+b=1 \\ a\cdot 2^2+b=2 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$,

所以 $a=\frac{1}{2},b=0$.

(2) 函数 $y=3-\frac{4}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上都单调递增,

假设 $[m,n]$ 是函数 $y=3-\frac{4}{x}$ 的“等域区间”，则 $y=3-\frac{4}{x}$ 在 $[m,n]$ 上单调,

于是 $[m,n]\subseteq(-\infty,0)$ 或 $[m,n]\subseteq(0,+\infty)$，因此 $y=3-\frac{4}{x}$ 在 $[m,n]$ 上为增函数,

则 $f(m)=m,f(n)=n$，即方程 $3-\frac{4}{x}=x$ 有两个不等实根 m，n,

而方程 $3-\frac{4}{x}=x$ 化为：$x^2-3x+4=0$，$\Delta=(-3)^2-4\times4<0$，即 $x^2-3x+4=0$ 无实根,

所以函数 $y=3-\frac{4}{x}$ 不存在“等域区间”.

(3) 函数 $f(x)=\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上均为增函数,

而 $[m,n]$ 是函数 $f(x)$ 的“等域区间”，则 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上单调,

于是 $[m,n]\subseteq(-\infty,0)$ 或 $[m,n]\subseteq(0,+\infty)$，因此 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上为增函数,

则 $f(m)=m,f(n)=n$，即 $m,n(m<n)$ 是方程 $f(x)=x$ 的两个同号且不等的实根,

$m,n(m<n)$ 是方程 $\frac{a+1}{a}-\frac{1}{a^2x}=x$，即 $a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$ 的两个同号的不等实根,

于是 $\Delta'=(a^2+a)^2-4a^2=a^2(a^2+2a-3)>0$，解得 $a>1$ 或 $a<-3$,

此时 $n+m=1+\frac{1}{a},mn=\frac{1}{a^2}$，且 $1+\frac{1}{a}>0,\frac{1}{a^2}>0$,

因此 $n-m=\sqrt{(n+m)^2-4mn}=\sqrt{(\frac{a+1}{a})^2-\frac{4}{a^2}}=\sqrt{-\frac{3}{a^2}+\frac{2}{a}+1}=\sqrt{-3(\frac{1}{a}-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}}$,

所以当$a=3$时，$n-m$取得最大值$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【点睛】思路点睛：涉及函数新定义问题，理解新定义，找出数量关系，联想与题意有关的数学知识和方法，再转化、抽象为相应的数学问题作答.