

专题练习 3

填空题:

1. 若函数 $y = f(x)$ 的值域是 $[\frac{1}{2}, 3]$, 则函数 $F(x) = f(2x+1) + \frac{1}{f(2x+1)}$ 的值域是 $[2, \frac{10}{3}]$

解析 换元即可.

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+3} (-2 < x < 0)$ 的值域为 $[2\sqrt{2}-3, \frac{2}{3})$

解析 设 $t = x+3 (t \in (1, 3))$, 则 $y = \frac{t^2-3t+2}{t} = t + \frac{2}{t} - 3$, 根据对勾函数性质可知其值域为 $[2\sqrt{2}-3, \frac{2}{3})$

3. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$ 的值域是 $[0, \frac{\sqrt{6}}{6}]$

解析 首先换元, 令 $t = x+1$, $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}} = \sqrt{\frac{t}{t^2+2t+4}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{t+\frac{4}{t}+2}}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$, 根据对勾函数的性质可知原函数的值域为 $[0, \frac{\sqrt{6}}{6}]$.

4. 函数 $y = \frac{1}{x^2+2x-4}$ 的严格增区间是 $(-\infty, -1-\sqrt{5})$ 和 $(-1-\sqrt{5}, -1]$.

解析 定义域先行: $x \in \{x | x \neq -1 \pm \sqrt{5}\}$

外层函数为反比例函数, 有两个严格减区间, 故要寻找整体的严格增区间, 应寻找内层函数的严格减区间即 $(-\infty, -1]$

综合两者, 因此是两个单调区间: $(-\infty, -1-\sqrt{5})$ 和 $(-1-\sqrt{5}, -1]$

注: 单调区间之间不能用并集符号连接!

5. 函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^{\sqrt{x^2-3x-4}}$ 的递增区间是 $(-\infty, -1]$.

解析 定义域先行: $x \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

外层函数为单调减的指数函数, 故要寻找整体的严格增区间, 应寻找内层函数的严格减区间即 $(-\infty, -1]$

6. 函数 $f(x) = \log_2(x - \frac{a}{x}) (a > 0)$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是 $(0, 4)$.

解析 当 $a > 0$ 时, $y = x - \frac{a}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

考虑到定义域, 于是 $2 - \frac{a}{2} > 0$, 故 $a \in (0, 4)$.

7. 已知函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上严格增, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{4}{3}]$.

解析 外层函数严格增, 故内层函数 $y = x^2 - ax - a$ 满足在区间 $(2, +\infty)$ 上严格增且函数值大于 0. 故应有 $\frac{a}{2} \leq 2$ 且 $4 - 3a \geq 0$, 故 $a \leq \frac{4}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2021-ax}}{a-1}$ 在 $[0, 1]$ 上严格减, 那么实数 a 的取值的范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 2021]$.

解析 首先判断“定义域”, $2021 - ax \geq 0$ 在 $x \in [0, 1]$ 恒成立, 设 $g(x) = 2021 - ax$, 这是一条斜率不确定的线段, 只需两个端点满足即可恒成立, 即 $g(0) \geq 0, g(1) \geq 0$, 因此 $a \leq 2021$, 又因为 $a \neq 1$, 因此 $a \in (-\infty, 1) \cup (1, 2021]$ 时 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有定义.

当 $a < 0$ 时, $y = \sqrt{2021-ax}$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调增, 且 $a-1 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调减, 符合题意, 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -\sqrt{2021}$ 并非严格增或严格减, 不符合题意, 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \sqrt{2021-ax}$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调减, 且 $a-1 < 0$, 不符合题意, 当 $2021 \geq a > 1$ 时, $y = \sqrt{2021-ax}$ 在 $[0, 1]$ 上严格单调减, $a-1 > 0$, 符合题意.

综上实数 a 的取值的范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 2021]$.

注: $y = a \cdot f(x)$, 即一个函数乘常数, 类型的函数的单调性在 $a > 0$ 时与 $f(x)$ 保持一致, 在 $a < 0$ 时与 $f(x)$ 完全相反.

9. 若函数 $y = \frac{a^x}{2a^2 - 5a + 2}$ 在 \mathbb{R} 上为严格减函数, 则 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2)$.

解析 $\begin{cases} a \in (0, 1) \\ 2a^2 - 5a + 2 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > 1 \\ 2a^2 - 5a + 2 < 0 \end{cases}$, 解得 $a \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2)$.

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, x \geq -1 \\ (2-a)x + 2a - 5, x < -1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是严格增函数, 则实数 a 的取值范围是 $1 \leq a \leq \frac{8}{5}$.

解析 由函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, x \geq -1 \\ (2-a)x + 2a - 5, x < -1 \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上是严格增函数,

得 $\begin{cases} -a \leq -1 \\ 2-a > 0 \\ 1-2a \geq -(2-a) + 2a - 5 \end{cases}$, 解得 $1 \leq a \leq \frac{8}{5}$, 所以实数 a 的取值范围是 $1 \leq a \leq \frac{8}{5}$. 故答案为: $1 \leq a \leq \frac{8}{5}$

注: 分段函数严格单调增等价于各段都严格增, 且在端点处相连或者满足“更上一层楼型”

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-5a)^x & x < 1 \\ \frac{a}{x} + 5 & x \geq 1 \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上严格递增, 则实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 0)$.

解析 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上严格递增的充要条件为 $\begin{cases} 2-5a > 1 \\ a < 0 \\ a+5 \geq 2-5a \end{cases}$, 解得 $a \in [-\frac{1}{2}, 0)$

12. 对于实数 a, b 定义运算 “ $*$ ”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$. 设 $f(x) = (2x-1) * (x-1)$, 且关于 x 的方程 $f(x) = m (m \in \mathbf{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是 $(-\frac{\sqrt{3}-1}{16}, 0)$

解析 根据运算定义规则, 首先求 $2x-1$ 和 $x-1$ 的交点, 为 $(0, -1)$,

故 $f(x) = \begin{cases} (2x-1)^2 - (2x-1)(x-1), & x \leq 0, \\ (x-1)^2 - (2x-1)(x-1), & x > 0. \end{cases}$

即 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x, & x \leq 0, \\ x - x^2, & x > 0. \end{cases}$

观察函数图像可知, 在满足题意的情况下, $y = m (0 < m < \frac{1}{4})$ 与 $f(x)$ 在 y 轴左侧有一个交点, 在 y 轴右侧有两个交点. 故由韦达定理有 $x_2 x_3 = m$, $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+8m}}{4}$. 故 $x_1 x_2 x_3 = m \cdot \frac{1-\sqrt{1+8m}}{4} = -\frac{1}{4}(m \cdot (\sqrt{1+8m} - 1))$. 因为 $-\frac{1}{4}(m \cdot (\sqrt{1+8m} - 1))$ 在 $m \in (0, \frac{1}{4})$ 单调递减, 故其取值范围是 $(-\frac{\sqrt{3}-1}{16}, 0)$

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x| (k \in \mathbf{R})$ 恰有 4 零点, k 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$.

解析 容易判断, $g(x)$ 有一零点为 0. 设 $F(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$, $H(x) = |kx - 2|$, 故其余三个零点是函数 $G(x) = F(x) - H(x)$ 的零点. 易知 $k = 0$ 时 $G(x)$ 没有三个零点.

(1) 当 $k < 0$ 时, $G(x)$ 在 $(-\infty, \frac{2}{k})$ 单调增, 在 $(\frac{2}{k}, 0)$ 单调减, 在 $(0, -\frac{k}{2})$ 单调减, 在 $(-\frac{k}{2}, +\infty)$ 单调增. $G(\frac{3}{k}) = 0, G(\frac{1}{k}) = 0, G(0) = -2, G(2-k) = 2-2k$, 故 $G(x)$ 有三个零点, 分别是 $\frac{3}{k}, \frac{1}{k}$, 以及一个位于 $(0, 2-k)$ 的零点.

(2) 当 $k > 0$ 时, 当 $x < 0$, $G(x) = kx - 1$, 无零点.

当 $x \in (0, \frac{2}{k})$, $G(x)$ 单调增, $G(\frac{1}{k}) = 0$.

当 $x \geq \frac{2}{k}$, $G(x) = x^2 - kx + 2$, 要使得 $G(x)$ 在 $[\frac{2}{k}, +\infty)$ 有两个零点, 必有 $\Delta > 0$, 即 $k > 2\sqrt{2}$.

抛物线的对称轴为 $x = \frac{k}{2}$, 因为当 $k > 2\sqrt{2}$ 时 $\frac{k}{2} > \frac{2}{k}$, 又因为 $G(\frac{2}{k}) > 0$, 所以当 $k > 2\sqrt{2}$ 时, $G(x)$ 在 $[\frac{2}{k}, +\infty)$ 有两个零点.

综上, $k \in (-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

注: 从数形结合角度平移 $H(x)$ 来看会更直观.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1, \\ x + \frac{4}{x} + a, & x > 1. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$, 则实数 a 的取值范围是 $[2, +\infty)$

解析 首先看到函数在 $x \leq 1$ 时是开口向上的二次函数, 函数在 $x > 1$ 时是对勾函数. 由于 $f(1)$ 是最小值, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 应该单调递减, 故其对称轴应该位于 $x = 1$ 及其右侧, 即 $a \geq 1$. 这样我们有 $f(1) = 10 - 2a < f(x), x < 1$. 又因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 为对勾函数, 在 $(1, 2]$ 单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 的最小值在 $x = 2$ 取得, $f(2) = 4 + a$, 故 $4 + a \geq 10 - 2a$, 故 $a \geq 2$

注: 分段函数的最小值要比每一段内所有的函数值都要小.

15. “ $a + b = 0$ ” 是 “函数 $f(x) = x|x + a| + b$ 是奇函数” 的 必要不充分 条件

解析 奇函数若在 $x = 0$ 处有定义, 则此处的函数值为零, 即 $f(0) = 0$, 于是 $b = 0$.

故 $f(x) = x|x + a|$. 于是由 $f(x)$ 为奇函数, 不难得到 $a = 0$, 比如 $f(-a) + f(a) = 0$.

16. 若函数 $f(x) = \frac{a-e^x}{1+a \cdot e^x}$ (a 为常数) 在定义域上为奇函数, 则 a 的值为 ± 1 .

解析 首选解法: $f(0) = 0$ 或无意义, 即 $\frac{a-1}{1+a} = 0$ 或 $\frac{a-1}{1+a}$ 无意义, 故 $a = \pm 1$

也可以采用就极限思想: 让函数在 $\pm\infty$ 时的极限互为相反数求解: $x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow -\frac{1}{a}, x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow a$, 由 $a = \frac{1}{a}$ 得 $a = \pm 1$.

把握定义求解有: $f(x) = \frac{a-e^x}{1+a \cdot e^x}, f(-x) = \frac{a-e^{-x}}{1+a \cdot e^{-x}} = \frac{ae^x-1}{a+e^x}$

由 $f(x) = -f(-x)$ 知 $\frac{a-e^x}{1+a \cdot e^x} = \frac{1-ae^x}{a+e^x}$, 交叉相乘得到 $a^2 - e^{2x} = 1 - a^2 e^{2x}$, 移项整理得 $(a^2 - 1) = (1 - a^2) \cdot (e^{2x})$, 因为此式恒成立, 所以必有 $a = \pm 1$

17. 已知 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x) - g(x) = 2^x$, 若对于 $\forall x \in (0, 2], mf(x) - g(2x) \geq 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 $[-2\sqrt{2}, +\infty)$

解析 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}, g(x) = -\frac{2^x + 2^{-x}}{2}$

故 $m(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}) + \frac{4^x + 4^{-x}}{2} \geq 0$ 在 $(0, 2]$ 上恒成立.

换元 $t = 2^x - 2^{-x}, t \in (0, \frac{15}{4}]$, 则 $4^x + 4^{-x} = t^2 + 2$, 故有 $mt + t^2 + 2 \geq 0$ 在 $(0, \frac{15}{4}]$ 上恒成立.

参变分离有 $m \geq -(t + \frac{2}{t})$ 在 $(0, \frac{15}{4}]$ 上恒成立. 由对勾函数性质可知 $-(t + \frac{2}{t})$ 在 $(0, \frac{15}{4}]$ 上最大值为 $-\sqrt{2}$, 因此有 $m \geq [-2\sqrt{2}, +\infty)$

注: 一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 一定能够拆成一个奇函数和一个偶函数之和: $f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} + \frac{f(x) + f(-x)}{2}$

18. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 0 \\ ax^2 + bx & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数, 则 $a + b =$ 0

解析 代入特值有 $f(1) = a + b, f(-1) = 0$, 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以有 $a + b = 0$

注: 根据奇偶性求参数可以考虑代入特值 (必要条件), 但最后需要检验是否充要 (本题只问 $a + b$ 并不涉及).

解答题:

1. 求下列函数的值域:

$$(1) y = \frac{3+x}{4-x}; (2) y = \frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}; (3) y = \frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}.$$

解析

$$(1) y = -1 + \frac{7}{4-x} \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).$$

$$(2) y = 2 + \frac{x}{x^2+x+4}.$$

当 $x = 0$ 时, $y = 2$; 当 $x \neq 0$ 时, $y = 2 + \frac{1}{x + \frac{4}{x} + 1}$.
 $x + \frac{4}{x} + 1 \in (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$, 故 $y \in [\frac{5}{3}, \frac{11}{5}]$

$$(3) y = \frac{(x^2+1)^2 - (x^2+1) + 5}{(x^2+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x^2+1)} + \frac{5}{(x^2+1)^2}.$$

令 $t = \frac{1}{(x^2+1)}$, $t \in (0, 1]$, 故 $y = 5t^2 - t + 1 \in [\frac{19}{20}, 5]$

2. 求下列函数的值域:

$$(1) y = x + 4\sqrt{1-x}; (2) y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}. (3) y = \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}. (4) y = \sqrt{1+x} + \sqrt{2-x}.$$

解析

$$(1) \text{ 令 } t = \sqrt{1-x} \in [0, +\infty), \text{ 则 } x = 1 - t^2, \text{ 故 } y = 1 - t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 5 \in (-\infty, 5].$$

注: 可化为二次的.

$$(2) \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}} = \sqrt{1 + \frac{2x}{x^2-2x+1}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x + \frac{1}{x} - 2}} \in (1, +\infty).$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } y = -\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}} = -\sqrt{1 + \frac{2x}{x^2-2x+1}}.$$

再分为 $(-\infty, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1)$ 讨论可得 $y \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$.

综上, $y \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup (1, +\infty)$.

$$(3) y = \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x} = \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{2+x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{2+x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{2+x})} = \frac{-1}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{2+x})}$$

易知函数在定义域 $[-1, +\infty)$ 内单调递增, 最小值在左端点 $x = -1$ 取 $y = -1$, 当 x 趋于无穷时, 函数值趋于 0. 因此值域为 $[-1, 0)$

$$(4) y = \sqrt{1+x} + \sqrt{2-x}, \text{ 故 } y^2 = (1+x) + (2-x) + 2\sqrt{(1+x)(2-x)} = 3 + 2\sqrt{(1+x)(2-x)} \in [3, 6], \text{ 故 } y \in [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$$

3. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = 2x^2 + (x-a)|x-a|$.

1. 若 $f(0) \geq 1$, 求 a 的取值范围; 2. 求 $f(x)$ 的最小值.

解析

$$1. f(0) = -a|a|, \text{ 因为 } g(x) = -x|x| \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上严格单调递, 且 } g(-1) = 1.$$

$$\text{于是 } f(0) = -a|a| \geq 1 = g(-1) \iff a \leq -1.$$

注: 想象一下 $g(x) = -x|x|$ 的图象.

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax - a^2, & x \leq a \\ 3x^2 - 2ax + a^2, & x \geq a \end{cases}.$$

函数图象由两个二次函数图象的部分拼接而成, 且拼接处连续, 分析两个开口向上的二次函数的对称轴可知, 一个为 $x = -a$, 一个为 $\frac{a}{3}$

讨论拼接点 $x = a$ 与两个对称轴不同的位置关系下函数的单调性, 即可得到函数的最小值, 在不同的拼接点条件下寻找全局的最小值即为所求.

① $a = 0$ 时, 三者重合, 此时最小值为 0

② $a > 0$ 时, $-a < \frac{a}{3} < a$, 故函数 $f(x)$ 在第一段上先减后增, 在第二段上单调增, 因此最小值在第一段的顶点处取得 ($x = -a$), 最小值为 $-2a^2$

③ $a < 0$ 时, $a < \frac{a}{3} < -a$, 故函数 $f(x)$ 在第一段上单调递减, 在第二段上先减后增, 因此最小值在第二段顶点取得 ($x = \frac{a}{3}$), 最小值为 $\frac{2a^2}{3}$

综上, $a < 0$ 时为 $\frac{2a^2}{3}$, $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-2a^2$.

注: 最值需要通过单调性来说明, 分段函数分段求, 分析各段上函数的单调性. 另外, 本题的另一个麻烦之处在于函数中的分段点与参数 a 有关, 各段中的“对称轴”(单调区间的端点) 亦与参数 a 有关.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 + (x-1)|x-a|$, 是否存在实数 a , 使得不等式 $f(x) \geq 2x-3$ 对一切实数 x 恒成立, 若存在, 求出 a 的范围, 若不存在, 说明理由.

解析 不等式 $f(x) \geq 2x-3$ 对一切实数 x 恒成立即 $f(x) - 2x + 3 \geq 0$ 恒成立. 设 $g(x) = f(x) - 2x + 3$, $g(x) = \begin{cases} (a-1)x + (3-a) & x < a \\ 2x^2 - (a+3)x + (a+3) & x \geq a \end{cases}$, 故应有 $g(x) \geq 0$ 恒成立.

① $a > 1$, 此时 $g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 为单调递增的一次函数, 不满足要求.

② $a = 1$, 此时 $g(x) = 2(x < a)$, 当 $x \geq a$ 时 $g(x)$ 单调递增, 故满足要求.

③ $a < 1$, 此时 $g(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 为单调递减的一次函数, 在 $[a, \frac{a+3}{4})$ 单调减, 在 $[\frac{a+3}{4}, +\infty)$ 单调增, 故 $g(x) \geq g(\frac{a+3}{4}) = (a+3) - \frac{(a+3)^2}{8}$, 当 $(a+3) - \frac{(a+3)^2}{8} \geq 0$ 时满足题意, 解得 $a \in [-3, 1]$

综上, $a \in [-3, 1]$

注: 函数解析式内有部分绝对值的情况通常要写成分段函数来分析

5. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a}$ ($a, c \in \mathbf{R}$)

(1) 当 $a = 0$ 时, 是否存在实数 c 使得 $f(x)$ 是奇函数

(2) 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1, 3)$, 且 $f(x)$ 的图像和 x 轴负半轴有两个交点, 求实数 a 的取值范围

解析

(1) 当 $a = 0$, $f(x) = \frac{x^2 + x + c}{x} = x + 1 + \frac{c}{x}$ ($x \neq 0$), $f(1) + f(-1) = 2 \neq 0$, 故不存在 c 使得 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(1) = \frac{2+3a+c}{1+a} = 3$, 故 $c = 1$, $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + 1}{x+a}$. 函数的零点是函数的分子部分的零点子集, 故 $g(x) = x^2 + (3a+1)x + 1$ ($x \neq -a$) 与 x 轴负半轴有两个交点 x_1, x_2 .

$$\begin{cases} \Delta = (3a+1)^2 - 4 > 0, \\ x_1 + x_2 = -(3a+1) < 0, \\ a^2 - (3a+1)a + 1 \neq 0. \end{cases}$$

解得 $a > \frac{1}{3}$ 且 $a \neq \frac{1}{2}$

注: 否定一个函数是奇函数可以通过举反例.

6. 设函数 $f(x) = \log_a(x-2a) + \log_a(x-3a)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 若在区间 $[a+3, a+4]$ 上 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解析 由定义域的要求可知 $a+3 > 3a$, 即 $a < \frac{3}{2}$. $f(x)$ 的单调性由 a 决定, 下面进行分类讨论.

(1) $\frac{3}{2} > a > 1$

此时 $f(x)$ 单调递增, 故 $f(a+4) \leq 1$, 即 $\log_a((4-a)(4-2a)) \leq 1$,

即 $(4-a)(4-2a) \leq a$, 解得 $a \in (\frac{13-\sqrt{41}}{4}, \frac{13+\sqrt{41}}{4})$ (舍弃)

(2) $1 > a > 0$

此时 $f(x)$ 单调递减, 故 $f(a+3) \leq 1$, 即 $\log_a((3-a)(3-2a)) \leq 1$,

即 $(3-a)(3-2a) \geq a$, 解得 $a \in (-\infty, \frac{5-\sqrt{7}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{7}}{2}, +\infty)$, 结合 $1 > a > 0$, 得到 $a \in (0, 1)$

综上, $a \in (0, 1)$

注: 也可以在分类讨论的时候不解一元二次不等式

(1) $\frac{3}{2} > a > 1$

由于 $y = (4-a)(4-2a) - a = 2a^2 - 13a + 16$ 在 $(1, \frac{3}{2})$ 内单调递减, 而 $a = \frac{3}{2}$ 时不等式不成立, 因此这种情况无解。

(2) $1 > a > 0$

由于 $y = (3-a)(3-2a) - a = 2a^2 - 10a + 9$ 在 $(0, 1)$ 内单调递减, 而 $a = 1$ 时不等式成立, 因此这种情况解集为 $(0, 1)$ 。

【答案】 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$

【解析】注意到 $g(0)=0$ ，所以要使 $g(x)$ 恰有 4 个零点，只需方程 $|kx-2| = \frac{f(x)}{|x|}$ 恰有 3 个实根即可，

$h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ ，即 $y = |kx-2|$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 的图象有 3 个不同交点.

$$\text{因为 } h(x) = \frac{f(x)}{|x|} = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases},$$

当 $k=0$ 时，此时 $y=2$ ，如图 1， $y=2$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 有 2 个不同交点，不满足题意；

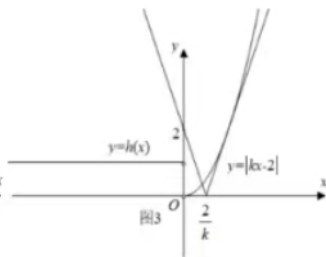
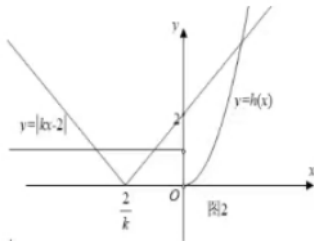
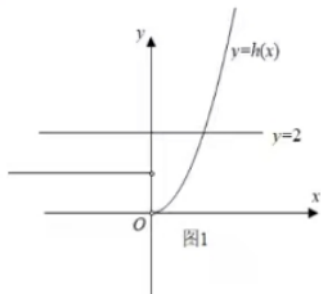
当 $k < 0$ 时，如图 2，此时 $y = |kx-2|$ 与 $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$ 恒有 3 个不同交点，满足题意；

当 $k > 0$ 时，如图 3，当 $y = kx-2$ 与 $y = x^2$ 相切时，联立方程得 $x^2 - kx + 2 = 0$ ，

令 $\Delta = 0$ 得 $k^2 - 8 = 0$ ，解得 $k = 2\sqrt{2}$ （负值舍去），所以 $k > 2\sqrt{2}$ 。

综上， k 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ 。

故答案为： $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ 。



专题练习 3: 函数值域与函数的性质

填空题:

1. 若函数 $y = f(x)$ 的值域是 $[\frac{1}{2}, 3]$, 则函数 $F(x) = f(2x+1) + \frac{1}{f(2x+1)}$ 的值域是 $[2, \frac{10}{3}]$
2. 函数 $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+3} (-2 < x < 0)$ 的值域为 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$
3. 函数 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$ 的值域是 $[\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}]$
4. 函数 $y = \frac{1}{x^2+2x-4}$ 的严格增区间是 $(-\infty, -1-\sqrt{5})$ 和 $(-1+\sqrt{5}, +\infty)$
5. 函数 $f(x) = (\frac{1}{2})^{\sqrt{x^2-3x-4}}$ 的递增区间是 $(-\infty, -1]$
6. 函数 $f(x) = \log_2(x - \frac{a}{x})$ ($a > 0$) 在区间 $[2, +\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{4}{3}]$
7. 已知函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 在区间 $(2, +\infty)$ 上严格增, 则 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 2021]$
8. 已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{2021-ax}}{a-1}$ 在 $[0, 1]$ 上严格减, 那么实数 a 的取值的范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, 2021]$
9. 若函数 $y = \frac{a^x}{2a^2-5a+2}$ 在 \mathbb{R} 上为严格减函数, 则 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{2}) \cup (1, 2)$
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax, & x \geq -1 \\ (2-a)x + 2a - 5, & x < -1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是严格增函数, 则实数 a 的取值范围是 $[1, \frac{8}{5}]$
11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-5a)^x & x < 1 \\ \frac{a}{x} + 5 & x \geq 1 \end{cases}$ 在 \mathbb{R} 上严格递增, 则实数 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{5}, 0)$
12. (选) 实数 a, b 定义运算 “ $*$ ”: $a * b = \begin{cases} a^2 - ab, & a \leq b \\ b^2 - ab, & a > b \end{cases}$ 设 $f(x) = (2x-1) * (x-1)$, 且关于 x 的方程 $f(x) = m$ ($m \in \mathbb{R}$) 恰有三个互不相等的实数根 x_1, x_2, x_3 , 则 $x_1 x_2 x_3$ 的取值范围是 $(\frac{1-\sqrt{5}}{16}, 0)$
13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - |kx^2 - 2x|$ ($k \in \mathbb{R}$) 恰有 4 零点, k 的取值范围是 $(0, +\infty)$
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 9, & x \leq 1 \\ x + \frac{4}{x} + a, & x > 1 \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$, 则实数 a 的取值范围是 $[-2, +\infty)$
- “ $a+b=0$ ” 是 “函数 $f(x) = x|x+a|+b$ 是奇函数” 的 必要 条件
15. 若函数 $f(x) = \frac{a-e^x}{1+e^x}$ (a 为常数) 在定义域上为奇函数, 则 a 的值为 1
16. 已知 \mathbb{R} 上的奇函数与偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x) - g(x) = 2^x$, 若对于 $\forall x \in (0, 2]$, $mf(x) - g(2x) \geq 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围是 $[-\sqrt{2}, +\infty)$
17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 0 \\ ax^2 + bx & x > 0 \end{cases}$ 为奇函数, 则 $a+b = 0$

解答题:

1. 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{x+1}{x-1}$; (2) $y = \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x+4}$; (3) $y = \frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$

解: (1) $y = \frac{x+1}{x-1}$
 $= -1 + \frac{2}{x-1}$

值域: $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

(2) $y = \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x+4}$
 若 $x=0$, $y = \frac{1}{4}$
 若 $x \neq 0$, $y = 2 + \frac{1}{x + \frac{4}{x} + 1}$
 $x + \frac{4}{x} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
 $y \in [-1, 2) \cup (2, \frac{7}{5}]$

2. 求下列函数的值域:

(1) $y = x + 4\sqrt{1-x}$; (2) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$; (3) $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}$; (4) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{2-x}$

解: (1) 设 $t = \sqrt{1-x} \in [0, +\infty)$
 $x = 1-t^2$
 $y = 1-t^2+4t$
 $= -(t-2)^2 + 5$
 $\therefore t \in [0, +\infty)$
 $\therefore y \in (-\infty, 5]$

(2) 设 $t = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$
 $y = \frac{t}{t^2-1}$
 $1^\circ t > 0$
 $y = \frac{1}{t - \frac{1}{t}} \in (\frac{1}{2}, +\infty)$
 $2^\circ t < 0$
 $y = -\frac{1}{t + \frac{1}{t}} \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$
 值域: $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

(3) $x \geq -2, y < 0$
 $y = -(\sqrt{1+x} - \sqrt{2+x})$
 $= -\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{2+x}}$
 $\therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{2+x} \in [1, +\infty)$
 $\therefore y \in (-1, 0)$

(4) $y > 0, x \in [-1, 2]$
 $y^2 = 3 + 2\sqrt{(1+x)(2-x)}$
 $y^2 \in [3, 6]$
 $\therefore y \in [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$

3 (选) 设 a 为实数, 函数 $f(x) = 2x^2 + (x-a)|x-a|$.

1. 若 $f(0) \geq 1$, 求 a 的取值范围; 2. 求 $f(x)$ 的最小值.

解: 1. $f(0) = -a|-a| \geq 1$
 $[a \geq 0]$
 $\text{则 } -a^2 \geq 1$
 $\therefore a^2 \leq -1, a \in \emptyset$
 $2^\circ a < 0$
 $-a(-a) \geq 1$
 $\therefore a^2 \geq 1$
 $\therefore a \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

$2^\circ x \leq a$
 $f(x) = 2x^2 - (x-a)^2$
 $= 3x^2 - 2ax + a^2$
 $= (x-a)^2 - 2a^2$
 对称轴 $x = \frac{a}{3}$
 $1^\circ a \geq 0$
 $f(x)_{\min} = -2a^2$
 $2^\circ a < 0$
 $f(x)_{\min} = f(a) = 2a^2$

12. $a \geq 0$ 时 $f(x)_{\min} = \min(2a^2, -2a^2) = -2a^2$
 $a < 0$ 时 $f(x)_{\min} = \frac{2}{3}a^2$

2. $1^\circ x \geq a$
 $f(x) = 2x^2 + (x-a)^2$
 $= 3x^2 - 2ax + a^2$
 对称轴 $x = \frac{a}{3}$
 $1^\circ a \geq 0$
 $f(x)_{\min} = f(a) = 2a^2$
 $2^\circ a < 0$
 $f(x)_{\min} = \frac{2}{3}a^2$

4. 已知函数 $f(x) = x^2 + (x-1)|x-a|$, 是否存在实数 a , 使得不等式 $f(x) \geq 2x-3$ 对一切实数 x 恒成立, 若存在, 求出 a 的范围, 若不存在, 说明理由.

解 $x^2 + (x-1)|x-a| \geq 2x-3$
 $(x-1)|x-a| \geq -x^2 + 2x - 3$
 $1^\circ x \geq a$
 $x^2 - (a+1)x + a \geq -x^2 + 2x - 3$
 $2x^2 - (a+3)x + a+3 \geq 0$
 $\Delta = (a+3)^2 - 8(a+3)$
 $= (a+3)(a-5)$
 $\begin{cases} \Delta \leq 0 & \text{或} \Delta \leq 0 \\ x_2 \leq a \end{cases}$
 $\therefore a \in [-3, +\infty)$

$2^\circ x < a$
 $-x^2 + (a+1)x - a \geq -x^2 + 2x - 3$
 $(a-1)x \geq a-3$
 $2.1^\circ a = 1$
 $\Delta \leq 0$
 $2.2^\circ a > 1$
 $x \geq \frac{a-3}{a-1} = 1 - \frac{2}{a-1}$
 $a \geq 4$
 $2.3^\circ a < 1$
 $x \leq \frac{a-3}{a-1}$
 $a < \frac{a-3}{a-1}$ 成立.

5. 函数 $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a}$ ($a, c \in \mathbb{R}$)

(1) 当 $a = 0$ 时, 是否存在实数 c 使得 $f(x)$ 是奇函数

(2) 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1, 3)$, 且 $f(x)$ 的图像和 x 轴负半轴有两个交点, 求实数 a 的取值范围

解 (1) $f(x) = \frac{x^2 + x + c}{x} = x + \frac{c}{x} + 1$
 $f(-x) = -x - \frac{c}{x} + 1$
 $f(x) + f(-x) = 2$
 故不存在 c 使 $f(x)$ 为奇函数

$f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a} = 0$
 $= \frac{x^2 + 3ax + (a+1)x + c - x^2 - ax - c}{x+a} = 0$
 $= \frac{2ax + (a+1)x + c - x^2 - ax - c}{x+a} = 0$
 $= \frac{-x^2 + (a+1)x + c}{x+a} = 0$

综上 $a \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

(2) $f(1) = 3$
 $\frac{1 + (3a+1) + c}{1+a} = 3$
 $\therefore c = 2a$

且 $x \neq -a$
 $x^2 + (3a+1)x + 1 = 0$
 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(3a+1) < 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$
 $\Delta = (3a+1)^2 - 4 > 0$
 $a \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$
 $\therefore 3a+1 > 0 \therefore a > -\frac{1}{3}$
 $\therefore a \in (-\frac{1}{3}, +\infty)$
 $f(x) = \frac{x^2 - a(3a+1) + 1}{x+a}$
 $f(x) = \frac{x^2 - 3a^2 - a + 1}{x+a}$
 $f(x) = \frac{(x-a)(x+a) - 3a^2 - a + 1}{x+a}$
 $f(x) = x - a - \frac{3a^2 + a - 1}{x+a}$
 $f(x) = x - a - \frac{(3a+1)(a-1)}{x+a}$
 $f(x) = x - a - \frac{(3a+1)(a-1)}{x+a}$
 $f(x) = x - a - \frac{(3a+1)(a-1)}{x+a}$

6. 设函数 $f(x) = \log_a(x-2a) + \log_a(x-3a)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 若在区间 $[a+3, a+4]$ 上 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

解 $1^\circ a < 1$
 $2^\circ f(x)$ 为减函数
 $x > 3a, a+3 > 3a \therefore a < \frac{3}{2}$
 $\therefore f(a+3) \leq 1$
 $\log_a(3-a) + \log_a(3-2a) \leq 1$
 $(3-a)(3-2a) \geq a$
 $\Delta \leq 0$
 $\therefore a \in (0, 1)$

$2^\circ a > 1$
 $f(x)$ 为增函数
 $a+3 > 3a \therefore a < \frac{3}{2}$
 $\therefore 1 < a < \frac{3}{2}$

$f(a+4) \leq 1$
 $\log_a(4-a) + \log_a(4-2a) \leq 1$
 $(4-a)(4-2a) \leq a$
 $a \in [\frac{13-\sqrt{41}}{4}, \frac{13+\sqrt{41}}{4}]$
 $(\text{舍}) \frac{13-\sqrt{41}}{4} > \frac{3}{2}$

解答题:

1. 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{3+x}{4-x}$; (2) $y = \frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$; (3) $y = \frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$.

(1) $y = \frac{-k+1}{k} = -1 + \frac{1}{k} \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(2) $y = 2 + \frac{x}{x^2+x+4} = 2 + \frac{1}{x+1+\frac{4}{x}}$ 有 $x+\frac{4}{x} \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

$\therefore x+\frac{4}{x}+1 \in (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$.

$\therefore y \in [\frac{5}{3}, \frac{11}{3}]$

(3) 令 $x^2 = t \in [0, +\infty)$.

$y = \frac{t^2+t+5}{t^2+2t+1} = 1 - \frac{t-4}{t^2+2t+1} = 1 - \frac{1}{t+\frac{25}{t}+10}, t \in [-4, +\infty)$.

$y = 1 - \frac{1}{t+\frac{25}{t}+10}$
 $t \in [-4, +\infty)$

$\therefore t+\frac{25}{t} \in (-\infty, -4] \cup [10, +\infty)$

$\therefore y \in$

2. 求下列函数的值域:

(1) $y = x + 4\sqrt{1-x}$; (2) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$; (3) $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}$; (4) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{2-x}$.

(1) $x \in (-\infty, 1]$

令 $\sqrt{1-x} = k, k \in [0, +\infty)$.

$y = -k^2 + 4k + 1$

$\therefore y \in (-\infty, 5]$

(2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$

$= 1 + \frac{2x}{x^2-2x+1}$

$= 1 - \frac{2}{x+\frac{1}{x}-2}$

$\therefore y^2 \in [0, \frac{3}{2}]$

$\therefore y \in [-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}]$

(3) 令 $\sqrt{1+x} = a > 0$
 $\sqrt{2+x} = b > 0$

有 $b^2 - a^2 = 1$

求 $a-b$ 值域.

$(a+b)(a-b) = -1$.

$(a-b) = -\frac{1}{a+b}$

$a+b$ 值域: $[\sqrt{2}+1, +\infty)$

(4) $a^2+b^2=3$

$a+b = \sqrt{a^2+b^2+2ab}$

$ab = \sqrt{2+x-x^2} \in [0, \frac{3}{2}]$

$\therefore a+b \in [\sqrt{3}, \sqrt{6}]$

解答题:

1. 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{3+x}{4-x}$; (2) $y = \frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$; (3) $y = \frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$.

(1) $t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (2) $y = 2 + \frac{x}{x^2+x+4}$
 $= 2 + \frac{1}{x + \frac{4}{x} + 1}$

$x + \frac{4}{x} + 1 \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$
 $\therefore \frac{1}{x + \frac{4}{x} + 1} \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (0, \frac{1}{5})$

$\therefore y \in (\frac{5}{3}, 2) \cup (2, \frac{11}{5})$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + 1$
 $y = \frac{t^2 - 1}{t^2}$

$= 1 - \frac{1}{t^2}$

$\therefore y =$

2. 求下列函数的值域:

(1) $y = x + 4\sqrt{1-x}$; (2) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$; (3) $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}$; (4) $y =$

$\sqrt{1-x}$ at $t \in (0, +\infty)$ (1) $(y^2-1)x^2 - 2yx^2 + y^2 - 1 = 0$

$= -t^2 + 1 + 4t$

$u \in (-\infty, 5]$

$(2) (y^2-1)x^2 - 4(y^2-1)x + 4(y^2-1) \geq 0$
 $5y^2 - 4$
 $\Delta = 16 - 20 < 0$

(3) $x \in (-\infty, -1)$

(4) $y = \frac{-1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{2+x}}$

解答题:

1. 求下列函数的值域:

(1) $y = \frac{3+x}{4-x}$; (2) $y = \frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$; (3) $y = \frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$.

解: (1) $y = \frac{-(4-x)+1}{4-x}$
 $= -1 + \frac{1}{4-x}$

$\therefore y \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

(2) $(y-2)x^2 + (y-3)x + 4y-8 = 0$

$\Delta = (y-3)^2 - 4(y-2)(4y-8)$

$= y^2 - 6y + 9 - 16(y^2 - 4y + 4)$

$y = 2$
 $y \neq 2$

$= -15y^2 + 58y - 55 \geq 0$

2. 求下列函数的值域:

(1) $y = x + 4\sqrt{1-x}$; (2) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$; (3) $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{2+x}$; (4) $y = \sqrt{1+x}$

解: (1) 设 $t = \sqrt{1-x}$ $t \in [0, +\infty)$
 $x = 1-t^2$
 $y = 1-t^2 + 4t$

$y \in (-\infty, 5]$

$t < 0$ $y = -\sqrt{1+t^2} - 1$ $y \in (-\infty, -1)$

$y \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$y \in [-1, +\infty)$

(2) 设 $t = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ $x = t+1$

$y = \frac{\sqrt{t^2+2t+2}}{t}$

$t > 0$ $y = \sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}} \in (1, +\infty)$

(4) $y^2 = 1+x$

函数 $f(x) = x^2 + (x-1)|x-a|$, 是否存在实数 a , 使得不等式 $f(x) \geq 2x-3$ 对一切实数 x 成立, 若存在, 求出 a 的范围, 若不存在, 说明理由.

~~$(a+1)x+a \geq a$~~ ① $|x-a| \geq \frac{-x^2+2x-3}{x-1} (x>1)$

~~$x-a \leq a$~~ 设 $x-1=t$, 右也恒 <0

~~$x-a \geq 2x-3$~~

~~$x-a \leq 2x-3$~~

② $|x-a| \leq \frac{-x^2+2x-3}{x-1} (x<1)$

$\therefore a \geq x - \frac{-x^2+2x-3}{x-1}$ $\Rightarrow a \leq x + \frac{-x^2+2x-3}{x-1}$

$a \geq -3$ $a \leq 1$

$\therefore a \in [-3, 1]$

$f(x) = \frac{x^2+(3a+1)x+c}{x+a} (a, c \in \mathbb{R})$

$a=0$ 时, 是否存在实数 c 使得 $f(x)$ 是奇函数

若 $f(x)$ 的图像过点 $(1, 3)$, 且 $f(x)$ 的图像和 x 轴负半轴有两个交点, 求实数 a 的取值范围

(2) 代入 $(1, 3)$ 得 $c=1$

$f(x) = \frac{x^2+(3a+1)x+1}{x+a}$

即 $x^2+(3a+1)x+1$ 有两实根

$\Delta = 9a^2+6a+1-4 > 0$

$9a^2+6a-3 > 0$

$3a^2+2a-1 > 0$

$(3a-1)(a+1) > 0$

$f(x) = \log_a(x-2a) + \log_a(x-3a)$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 若在区间 $[a+3, a+4]$ 上 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

$(x^2-5ax+6a^2)$

-10

$x_2 \cdot \frac{x}{x_1} \in \mathbb{R}$

$|x_1-a| \geq \frac{a}{2}$

$a < 2: \frac{3}{2}a \leq x_1$

$a \leq \frac{4}{3}$

$a \geq 2: a-x_1 \geq \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} \geq x_1$

$2(n-1) + \frac{2}{k-1} + 1$

↓

$a \geq (x - \frac{x^2+2x-3}{x-1})_{\max} = -3 (x=0)$

$a \leq (x + \frac{x^2+2x-3}{x-1})_{\min}$

$= 1 - \frac{2}{x-1}$

$(\rightarrow 1 (x \rightarrow -\infty))$

