6.2 任意角的正弦、余弦、正切、余切（1）

知识点：任意角的正弦、余弦、正切、余切及其符号. 同角三角比关系（求值）

【A 组】

1. 已知角 α 的终边经过下列各点，求角 α 的正弦、余弦、正切、余切.

(1) $(-8,-6)$，$\sin\alpha=$ $-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=$ $-\frac{4}{5}$，$\tan\alpha=$ $\frac{3}{4}$，$\cot\alpha=$ $\frac{4}{3}$；

(2) $(\sqrt{3},-1)$，$\sin\alpha=$ $-\frac{1}{2}$，$\cos\alpha=$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\alpha=$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cot\alpha=$ $-\sqrt{3}$.

2. 下列各式为正号的是(C)

A. $\cos 2-\sin 2$　　B. $\cos 2\cdot\sin 2$　　C. $\tan 2\cdot\sec 2$　　D. $\sin 2\cdot\tan 2$

3. 填表：

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 填表：

α	点 P 的坐标	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\alpha=2k\pi(k\in\mathbb{Z})$	$(1,0)$	0	1	0	不存在
$\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$	$(0,1)$	1	0	不存在	0
$\alpha=\pi+2k\pi(k\in Z)$	$(-1,0)$	0	1 -1	0	不存在
$\alpha=\frac{3}{2}\pi+2k\pi(k\in Z)$	$(0,-1)$	1 -1	0	不存在	0

5. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\tan\alpha$ 等于 $\pm\frac{4}{3}$.

6. 已知角 θ 满足 $\sin\theta<0$ 且 $\cos\theta>0$，则角 θ 是第 四 象限的角.

7. 已知角 α 的终边过点 $P(2a,3a)(a<0)$，则角 α 的余弦值为 $\cancel{-\frac{2\sqrt{13}}{13}}$ $-\frac{2}{13}\sqrt{13}$

8. 已知角 θ 满足 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$，则角 θ 是第 一、三 象限的角.

9. 设 $x\in\mathrm{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，则 $\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}$ 的取值集合为 $\{3,-1\}$.

【B组】

1. 计算：$\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\frac{7\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}+\sin\frac{3\pi}{2}=$ __-1__.

2. 若$\sin\theta=\frac{m-3}{m+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2m}{m+5}$都有意义，则$m=$__7或8__.

3. 已知α为第二象限的角，其终边上有一点$P(x,\sqrt{5})$，且$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，求

$\tan\alpha=$ __$-\frac{\sqrt{15}}{3}$__.

4. 已知角θ的终边上有一点$P(4,y)$，且$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则$y=$ __-8__.

5. 已知角 α 的终边与射线5x+12y=0($x\le 0$)的图象重合，$\cos\alpha+\cot\alpha-\tan\alpha$ 的值 $\frac{12}{13}+\frac{12}{5}+\frac{5}{12}$

为__$-\frac{2267}{780}$__.

6. 已知集合A={y|y=$\frac{|\sin x|}{\sin x}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{|\tan x|}{\tan x}$},用列举法表示集合A是__{3,-1}__.

{3,-1}.

7. 若角 α 是第三象限角，则①$\sin\alpha+\cos\alpha<0$；②$\tan\alpha-\sin\alpha>0$；③$\cot\alpha\cdot\csc\alpha<0$；④$\sin\alpha\cdot\sec\alpha>0$．其中正确的是__①②③④__.

8. 已知角α的终边过点(3a-9，a+2)，且$\cos\alpha\le 0,\sin\alpha>0$，则$\alpha$的取值范围是__(-2,3]__.

9. 在△ABC中，若都有cosA·tanB·cotC<0，则这三角形是__钝角__三角形.

10. 设$y=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha$且$\alpha$是象限角，则$y$的符号为(A)

(A) 恒正　　(B) 恒负　　(C) 可能为0　　(D) 不确定

11. 若角α的终边落在直线 $x+y=0$上，则$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$的值等于__0__

12. 已知实数α,β满足$|\cos\alpha-\cos\beta|=|\cos\alpha|+|\cos\beta|$，且$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则化简$\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$的结果是（ C ）

(A) $\cos\alpha-\cos\beta$　　(B) $-\cos\alpha-\cos\beta$　　(C) $\cos\beta-\cos\alpha$　　(D) $\cos\alpha+\cos\beta$

13. 已知角 α 的终边上一点 P 与点 $A(-3,\ 2)$ 关于 y 轴对称，角 β 的终边上一点 Q 与点 A 关于原点对称，求 $2\sin\alpha+3\sin\beta$ 的值.

解：$P(3,2)$. $\sin\alpha=\frac{2}{13}\sqrt{13}$

$Q(3,-2)$. $\sin\beta=-\frac{2}{13}\sqrt{13}$

原式 $=-\frac{2}{13}\sqrt{13}$

14. 已知角θ终边上一点 $P(-\sqrt{3},m)$ 且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$，求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$ 的值.

解：$\sin\theta=\frac{m}{\sqrt{3+m^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}m$.

$\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+m^2}=1$

$\sqrt{m^2+3}=2\sqrt{2}$

$m^2+3=8$

$m=\pm\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+m^2}}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$.

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{m}{\sqrt{3}}$

1° $m=\sqrt{5}$. $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ $\tan\theta=-\frac{\sqrt{15}}{3}$

2° $m=-\sqrt{5}$ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ $\tan\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$

3°. $m=0$.

$\cos\theta=-1$,

$\tan\theta=0$;

15. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$，求:

(1) $\sin\alpha-\cos\alpha$； (2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$； (3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

解：(1). $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$

$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{48}{25}}=\frac{7}{5}$

(2). 原式 $=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\frac{1}{5}(1+\frac{12}{25})$

$=\frac{37}{125}$

(3). 原式 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{337}{625}$

很为人 $f(x)_{max}=5$.

$(3,-1)$与$(-1,2)$距离.

【滚动练习】

1. 函数 $y=\lg\dfrac{x^2+1}{|x|}(x\neq 0, x\in \mathbb{R})$ 的最小值是 $\lg 2$.

2. 函数 $y=\ln(1+x)+\dfrac{1}{4}x^2(0\le x\le 2)$ 的最大值和最小值的和是 $1+\ln 3$.

3. 函数 $y=2(9^x+9^{-x})-12(3^x+3^{-x})+4$ 的最小值为 -18.

4. 已知 $y=-4x^2+4ax-4a-a^2$ 在区间 $[0,1]$ 上有最大值 -5，则 a 的值为 -5或$\frac{5}{4}$.

5. 已知函数 $y=a\cdot b^x+c\ (b>0, b\neq 1)\ (x\in[0,+\infty))$ 的值域为 $[-1,2)$，则该函数的一个解析式可以为 $y=$ $-3\times(0.5)^x+2$

6. 设 $f(x)=\log_2 x+\log_2(1-x)$．(1) 求函数 $y=f(x)$ 的定义域和值域;

(2) 解不等式 $f(x)<\log_2 x-1$．

解: (1). $0<x<1$.

$\cancel{[-2}$, $(-\infty,-2]$

(2).

$\log_2(1-x)<-1$.

$\log_2(1-x)<\log_2\frac{1}{2}$

$1-x<\frac{1}{2}$

$x>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{1}{2}<x<1$.

【C组】

求函数 $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2-6x+10}-\sqrt{x^4-3x^2+2x+5}$ 的最大值.

函数 $y=2x+\sqrt{4x^2-8x+3}$ 的最小值. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ x^2 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$

已知实数 $a>b>0$，求函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{b-x^2}}$ 的最大值. $x^2+\frac{3}{4}x$ $4x^2+3x-5=0$ $x=\frac{-3}{8}$

(1). $f(x)=\sqrt{(x^2+1)^2+(x-3)^2}-\sqrt{(x^2-2)^2+(x+1)^2}$.

$C(x,x^2)$点至$(3,-1)_A$与$(-1,2)_B$的距离差.

$||AC|-|BC||\le|AB|=5$ ∴ $f(x)_{max}=5$. 在$x=\frac{\sqrt{89}-3}{8}$时取得.

(2) $y=2x+\sqrt{(2x-2)^2-1}$ 设$2x-2=\sec\theta$ $\theta\in[0,2\pi]$ $y=\sec\theta+2+\tan\theta$ $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3\pi}{2}]$

$y=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}+2$ $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$代表$(\cos\theta,\sin\theta)$与$(0,-1)$两点之间连成的斜率.

∴ $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$的最小值为$-1$ ∴ $y_{min}=1$ 在$x=\frac{1}{2}$时取得

(3), $f(x)=\frac{x\cdot(\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2})}{a-b}$ $a-b>0$.

显然$f(x)$取max时 $x>0$. 且 $x^2<b<a$.
(最大性)

只考虑 $0<x<\sqrt{b}$时的$f(x)$

$f(x)=\frac{1}{a-b}\sqrt{x^2(a+b-2x^2+2\sqrt{a-x^2}\sqrt{b-x^2})}$

$=\frac{1}{a-b}\sqrt{(a+b)x^2-2x^4+2x^2\sqrt{a-x^2}\sqrt{b-x^2}}$

$=\frac{1}{a-b}\sqrt{ab-(x^2-\sqrt{a-x^2}\sqrt{b-x^2})^2}$

$\le\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$

等号在$x=\sqrt{\frac{ab}{a+b}}$时取得.

∴ $f(x)$最大值为$\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$

【滚动练习】

1. 函数$y=\lg\frac{x^2+1}{|x|}(x\ne 0, x\in\mathrm{R})$的最小值是________.

2. 函数$y=\ln(1+x)+\frac{1}{4}x^2(0\le x\le 2)$的最大值和最小值的和是________.

3. 函数$y=2(9^x+9^{-x})-12(3^x+3^{-x})+4$的最小值为____________.

4. 已知$y=-4x^2+4ax-4a-a^2$在区间$[0,1]$上有最大值-5，则a的值为________.

5. 已知函数$y=a\cdot b^x+c\ (b>0, b\ne 1)\ (x\in[0,+\infty))$的值域为$[-1,2)$，则该函数的一个解析式可以为$y=$________.

6. 设$f(x)=\log_2 x+\log_2(1-x)$. (1) 求函数$y=f(x)$的定义域和值域;

   (2) 解不等式$f(x)<\log_2 x-1$.

26. 解析 当 $x<0$ 时, $f(x)<0$; 当 $x>0$ 时, $f(x)>0$. 故只需考虑 $x>0$.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{b-x^2}}=\frac{x\left(\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2}\right)}{a-b}$$

$$=\frac{1}{a-b}\sqrt{x^2(a+b)-2x^4+2x^2\sqrt{(a-x^2)(b-x^2)}}$$

$$=\frac{1}{a-b}\sqrt{ab-\left[x^2-\sqrt{(a-x^2)(b-x^2)}\right]^2}\le\frac{\sqrt{ab}}{a-b},$$

当 $x^2=\sqrt{(a-x^2)(b-x^2)}$,即 $x=\sqrt{\frac{ab}{a+b}}$ 时,等号成立.

7. 解析 (方法 1) 单调性法.

记 $f(x)=2x+\sqrt{4x^2-8x+3}$,从形式上看,函数 $y=f(x)$ 由一个正比例函数和一个无理函数的和构成.

解不等式 $4x^2-8x+3\geq 0$,得 $x\leq\frac{1}{2}$ 或 $x\geq\frac{3}{2}$,所以函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

由于正比例函数 $y_1=2x$ 与二次函数 $y_2=4x^2-8x+3$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上都为增函数,则函数 $y=f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上为增函数.

所以,当 $x\in\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 时, $f(x)\geq f\left(\frac{3}{2}\right)=3$.

当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 时,函数 $y=f(x)$ 可以转化为

$$f(x)=(2x-2)+\sqrt{(2x-2)^2-1}+2=\frac{1}{(2x-2)-\sqrt{(2x-2)^2-1}}+2,$$

易知它在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上为减函数,所以 $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

综上所述,函数 $y=2x+\sqrt{4x^2-8x+3}$ 的最小值为 1 .

(方法 3) 导数法.

记 $f(x)=2x+\sqrt{4x^2-8x+3}$,解不等式 $4x^2-8x+3\geq 0$,得 $x\leq\frac{1}{2}$ 或 $x\geq\frac{3}{2}$. 所以函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$, $f'(x)=2+\frac{4x-4}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$.

当 $x>\frac{3}{2}$ 时, $f'(x)>0$,函数 $y=f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)\geq f\left(\frac{3}{2}\right)=3$.

当 $x<\frac{1}{2}$ 时,

$$f'(x)=2+\frac{4x-4}{\sqrt{4x^2-8x+3}}=2-\frac{4(1-x)}{\sqrt{4(1-x)^2-1}}<2-\frac{4(1-x)}{2(1-x)}=0.$$

函数 $y=f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减,所以 $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

综上所述,函数 $y=2x+\sqrt{4x^2-8x+3}$ 的最小值为 1 .

$a>b>0$ $\quad f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{b-x^2}}$ 的最大值

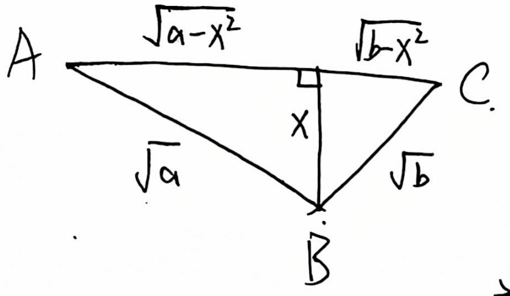
$$f(x)=\frac{x\cdot\left(\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2}\right)}{a-b}$$

法一：$\left(x\cdot\sqrt{a-x^2}+x\cdot\sqrt{b-x^2}\right)^2$

$$=\left(x\cdot\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2}\cdot x\right)^2\le\left(x^2+b-x^2\right)\left(a-x^2+x^2\right)=ab$$

当且仅当 $\dfrac{\sqrt{a-x^2}}{x}=\dfrac{x}{\sqrt{b-x^2}}$ 时取等 $\quad\therefore f(x)_{max}=\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$

法二：



$$S=\frac{1}{2}x\cdot\left(\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2}\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

当 $AB\perp BC$ 时取等

$$\therefore x\left(\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2}\right)\le\sqrt{ab}$$

$$\therefore f(x)_{max}=\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$$