问题解答:解法 1(换元加二次函数)　令 $x-1=\frac{1}{t},t\neq 0$，则 $y=f(t)=t\sqrt{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+1}=t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+2}$.

(1)当 $t>0$ 时，$f(t)=\sqrt{2t^2+2t+1}$ 单调递增,所以 $f(t)>f(0)=1$.

(2)当 $t<0$ 时，$f(t)=-\sqrt{2t^2+2t+1}=-\sqrt{2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$，$f(t)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$上单调递减,所以 $f(t)\leqslant f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综上,函数的值域为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup(1,+\infty)$.

解法 2(三角换元加三角函数)　函数 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1\}$.

设 $x=\tan\theta,\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{4}$，则 $\cos\theta>0$.

所以 $y=\frac{\sqrt{\tan^2\theta+1}}{\tan\theta-1}=\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}}{\tan\theta-1}=\frac{1}{\cos\theta(\tan\theta-1)}=\frac{1}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$.

由 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 且 $\theta\neq\frac{\pi}{4}$，得 $-\frac{3\pi}{4}<\theta-\frac{\pi}{4}<0$，或 $0<\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$.

由 $y=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象知 $-1\leqslant\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<0$，或 $0<\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$.

于是 $-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<0$，或 $0<\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)<1$.

所以 $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$,或$\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}>1$.

函数的值域为 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup(1,+\infty)$.

薛渺

95+20

3.6 函数的最值（1）

知识点：最大值、最小值（二次函数、分式函数）

【A 组】

1. 函数 $y=\frac{2}{x-1}$, $x\in[2,6]$ 的最小值是 $\frac{2}{5}$.

2. 函数 $y=x+\frac{9}{x}$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 10 . 最小值为 6 .

3. 函数 $y=|x-4|+|x-6|$ 的最小值是 2 .

4. 下列函数中，值域为 $(-\infty,0)$ 的是（B）

(A) $y=-x^2$ (B) $y=3x-1\left(x<\frac{1}{3}\right)$ (C) $y=\frac{1}{x}$ (D) $y=-\sqrt{x}$

5. 已知 $f(x)=\frac{1}{-x^2+2x-5}$ $(x\in R)$，则函数 $f(x)$（B）

(A)有最大值，无最小值 (B)有最小值，无最大值

(C)有最大值，也有最小值 (D)既无最大值，也无最小值

【B 组】

1.设函数 $f(x)=ax^2+2ax+1$ 在 $[-3,2]$ 上有最大值 4, 则实数 a 的值是 -3 或 $\frac{3}{8}$.

2. 若函数 $f(x)=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $\left[-\frac{25}{4},-4\right]$，则 m 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2},3\right]$.

3. 已知 t 为常数，若函数 $y=|x^2-2x+t|$ 在 $[0,3]$ 上的最大值为 3，则实数 $t=$ -2 或 0.

4. 函数 $y=\frac{x^2+3}{x}$ $(x\in(0,3])$ 的值域为 $[2\sqrt{3},+\infty)$.

5. 函数 $y=\frac{2x^2-3}{x}$ $(x\in[-2,-1])$ 的值域为 $\left[-\frac{5}{2},1\right]$.

6. 函数 $y=\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$ 的值域是 $\left\{y\in R \mid y\neq 1, y\neq \frac{2}{5}\right\}$

7. 函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$ $-\frac{1}{5}$.

8. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的值域是 $[2,2\sqrt{2}]$.

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{4}{|x|+2}-1$ 的定义域是 $[a, b]$(a, b 为整数)，值域是 $[0,1]$，则满足条件的整数对 (a, b) 共有 5 个.

10. 已知函数 $y=\sqrt{mx^2+(m-3)x+1}$ 的值域是 $[0, +\infty)$，则实数 m 的取值范围为 $[0,1]\cup[9,+\infty)$

11. 求下列函数的值域:

(1) $y=\dfrac{3+x}{4-x}$;

解: $y=-1-\frac{7}{x-4}$

$\frac{7}{x-4}\neq 0$ $\quad$ ∴值域为 $\{y|y\neq -1\}$

∴ $y\neq -1$

(2) $y=\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}$;

解: $y=2+\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$(x-\frac{1}{2})^2\in[0,+\infty)$

$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\in[\frac{3}{4},+\infty)$

$\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\in(0,\frac{4}{3}]$

故 $y\in(2,\frac{10}{3}]$

即值域为 $(2,\frac{10}{3}]$

(3) $y=x+4\sqrt{1-x}$;

解: 令 $\sqrt{1-x}=t$, $t\in[0,+\infty)$

$x=1-t^2$

$y=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5$

故 $y\in(-\infty,5]$, 值域为 $(-\infty,5]$

(4) $y=\dfrac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$;

解: 令 $x^2+1=t$, $t\in[1,+\infty)$

$y=\dfrac{t^2-t+5}{t^2}=1+\dfrac{5-t}{t^2}$

$t\in[1,5]$ 时, $y\in[1,5]$

$t\in(5,+\infty)$ 时, 令 $t-5=p$, $p\in R^+$

$y=1-\dfrac{p}{(p+5)^2}=1-\dfrac{1}{p+\frac{25}{p}+10}$

而 $p+\frac{25}{p}+10\in[20,+\infty)$

故 $1-\dfrac{1}{p+\frac{25}{p}+10}\in[\frac{19}{20},1)$

即 $y\in[\frac{19}{20},1)$

综上所述值域为 $[\frac{19}{20},5]$

(5) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

解: 令 $x-1=t$

$y=\dfrac{\sqrt{t^2+2t+2}}{t}$

$t>0$ 时

$y=\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}\in(1,+\infty)$

$t<0$ 时, $y=-\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}\in(-\infty,-1)$

故值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}]$

12. 设 $a\in R$，当 $x\in[-1,1]$ 时，求函数 $f(x)=x^2+ax+3$ 的值域.

解: $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{a}{2})$ 单调递减,

在 $(-\frac{a}{2},+\infty)$ 单调递增

$a\in(-\infty,-2)$ 时, $\max\{f(x)\}=f(-1)=4-a$

$\min\{f(x)\}=f(1)=4+a$

故值域为 $[4+a,4-a]$

同理, $a\in(\cancel{-\infty}\ 2,+\infty)$ 时, 值域为 $[4-a,4+a]$

$a\in[-2,0]$ 时, $\max\{f(x)\}=f(-1)=4-a$

$\min\{f(x)\}=f(-\frac{a}{2})=3-\frac{a^2}{4}$

故值域为 $[3-\frac{a^2}{4},4-a]$

同理, $a\in(0,2]$ 时,

值域为 $[3-\frac{a^2}{4},4+a]$

13. 设$x\in[0,2]$，函数$y=x^2-2ax-1$（a为实常数），

（1）求函数的最小值$g(a)$的表达式 （2）求$g(a)$的最大值.

解：(1) $y=(x-a)^2-a^2-1$

$$g(a)=\begin{cases}3-4a, & a\in(2,+\infty)\\ -a^2-1, & a\in[0,2]\\ -1, & a\in(-\infty,0)\end{cases}$$

(2) $a\in(2,+\infty)$时 $g(a)\in(-\infty,-5)$

$a\in[0,2]$时，$g(a)\in[-5,-1]$

$a\in(-\infty,0)$时，$g(a)\in\{-1\}$

故$g(a)\in(-\infty,-1]$

其最大值为-1，在$a=-1$时可取到

14.设a为实数，函数$f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.

（1）若$f(0)\geq 1$，求a的取值范围； （2）求$f(x)$的最小值.

解：(1) $-a|-a|\geq 1$

$a|a|\leq -1$

1° $a\geq 0$ 2° $a<0$

$a^2\leq -1$ $-a^2\leq -1$

舍 $a^2\geq 1$

$a\leq -1$或$a\geq 1$

取$a\leq -1$

故$a\in(-\infty,-1]$

(2) $f(x)=\begin{cases}3(x-\frac{1}{3}a)^2+\frac{2}{3}a^2, & x\geq a\\ (x+a)^2-2a^2 & x\leq a\end{cases}$

$a\geq 0$时 $\min\{f(x)\}=\min\{f(-a),f(a)\}=-2a^2$

$a<0$时，$\min\{f(x)\}=\min\{f(\frac{1}{3}a),f(a)\}=\frac{2}{3}a^2$

故$f(x)$最小值为$\begin{cases}-2a^2, & a\geq 0\\ \frac{2}{3}a^2, & a<0\end{cases}$

15.提高过江大桥的车辆通行能力可改善整个城市的交通状况．在一般情况下，大桥上的车流速度v（单位：千米/小时）是车流密度x（单位：辆/千米）的函数．当桥上的车流密度达到200辆/千米时，造成堵塞，此时车流速度为0；当车流密度不超过20辆/千米时，车流速度为60千米/小时．研究表明：当$20\leq x\leq 200$时，车流速度v是车流密度x的一次函数．

（1）当$0\leq x\leq 200$时，求函数$v(x)$的表达式；

（2）当车流密度x为多大时，车流量（单位时间内通过桥上某观测点的车辆数，单位：辆/小时）$f(x)=x\cdot v(x)$可以达到最大，并求出最大值．（精确到1辆/小时）

解：(1) 设$v(x)=ax+b$，$x\in[20,200]$

$$\begin{cases}v(20)=60\\ v(200)=0\end{cases}$$

解得$v(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{200}{3}$

故$v(x)=\begin{cases}60, & x\in[0,20)\\ -\frac{1}{3}x+\frac{200}{3}, & x\in[20,200]\end{cases}$

(2) $x\in[0,20)$时

$f(x)=60x$，$\sup\{f(x)\}=20\times 60=1200$

$x\in[20,200]$时

$f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{200}{3}x$

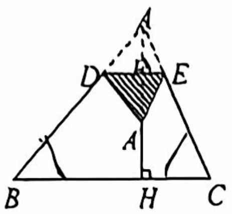
$\max\{f(x)\}=f(100)=\frac{10000}{3}\approx 3333$

故x为100，车流量最大为3333辆/小时

16. 如图，在锐角$\triangle ABC$中，$BC=9$，$AH\perp BC$于点H，且$AH=6$，点D为AB边上的任意一点．过点D作$DE\parallel BC$，交AC于点E．设$\triangle ADE$的高AF为$x(0<x<6)$，以DE为折线将$\triangle ADE$翻折，所得的$\triangle A'DE$与梯形$DBCE$重叠部分的面积记为y（点A关于DE的对称点A'落在AH所在的直线上）．

(1) 分别求出当$0<x\leqslant 3$与$3<x<6$时，y与x的函数关系式；

(2) 当x取何值时，y的值最大？最大值是多少？



解：(1) $y=\begin{cases}\frac{3}{4}x^2, & x\in(0,3]\\ -\frac{9}{4}x^2+18x-27, & x\in(3,6)\end{cases}$

(2) $y\leqslant\frac{27}{4}, x\in(0,3]$

$y\leqslant y_4=9, x\in(3,6)$

故当x取4时，y最大，为9

17. 已知二次函数$f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$满足：$f(5-x)=f(x-3)$且方程$f(x)=x$有等根．(1) 求$f(x)$的解析式；

(2) 是否存在实数$m,n(m<n)$，使得$f(x)$的定义域为$[m,n]$，值域为$[3m,3n]$．

解：(1) 由于$f(x)=x$有等根

故$\Delta(ax^2+(b-1)x)=0$

即$(b-1)^2=0$

故$b=1$

$f(x)=ax^2+x$

代入$f(5-x)=f(x-3)$

得$a=-\frac{1}{2}$

故$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$

(2) $f(x)$在$(-\infty,1]$单调递增，在$[1,+\infty)$单调递减，在1处取最大值$\frac{1}{2}$

$n\leqslant\max\{f(x)\}=f(1)=\frac{1}{2}$

故$f(x)$在$[m,n]$单调递增

$\begin{cases}f(m)=3m\\ f(n)=3n\\ m<n\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-4\\ n=0\end{cases}$

故m为-4，n为0 存在

【C组】

1. 已知a为实数，记函数$f(x)=a\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$的最大值为$g(a)$．

(1) 设$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，求t的取值范围，并把$f(x)$表示为t的函数$m(t)$；

(2) 求$g(a)$的表达式．

2. 设$F(x)=\frac{2^x}{a}-\frac{1}{2^x}+2-2^{x-2}+\frac{a}{2^{x-2}}$，已知$F(x)$的最小值是$m$，且$m>2+\sqrt{7}$，求实数$a$的取值范围．

1. 解：(1) 令$\sqrt{\frac{1+x}{2}}=\sin\theta$，$\sqrt{\frac{1-x}{2}}=\cos\theta$，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$t=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{2}\cos\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

故$t\in[\sqrt{2},2]$

$\frac{t^2-2}{2}=\sqrt{1-x^2}$

$m(t)=\frac{a}{2}t^2+t-a$

(2) $a=0$时，$m(t)=t$，$g(a)=m(2)=2$

$a\neq 0$时，$m(t)=\frac{a}{2}(t+\frac{1}{a})^2-a-\frac{1}{2a}$

$g(a)=\begin{cases}m(-\frac{1}{a}), & -\frac{1}{a}\in[\sqrt{2},2]\\ m(2), & -\frac{1}{a}\in[2,+\infty)\\ m(\sqrt{2}), & -\frac{1}{a}\in(0,\sqrt{2})\\ m(2), & -\frac{1}{a}\in R^-\end{cases}$

即$g(a)=\begin{cases}-a-\frac{1}{2a}, & a\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}]\\ a+2, & a\in(-\frac{1}{2},+\infty)\\ \sqrt{2}, & a\in(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$

2. 解：令$2^x=p$，$p\in R^+$

记$m(p)=F(x)=(\frac{1}{a}-\frac{1}{4})p+\frac{4a-1}{p}+2$

由于$m(p)$有最小值，

故$\begin{cases}\frac{1}{a}-\frac{1}{4}>0\\ 4a-1>0\end{cases}$，即$a\in(\frac{1}{4},4)$

其最小值为$2\sqrt{(\frac{1}{a}-\frac{1}{4})(4a-1)}+2>2+\sqrt{7}$，

解得$a\in(\frac{1}{2},2)$