第三讲 二次函数

知识方法概要

1.定义

函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 称为关于 x 的二次函数. 配方后形式为 $f(x)=a(x-x_0)^2+f(x_0)(a\neq 0)$ (顶点式), 其中 $x_0=-\frac{b}{2a}$.

2. $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的性质

(1) 对称性.

$f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{b}{2a}$ 对称.

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)$$

（2）当 $a>0$ 时 (当 $a<0$ 时类似),方程

$$ax^2+bx+c=0,\quad（1）$$

和不等式

$$ax^2+bx+c>0\qquad（2）$$
$$ax^2+bx+c<0\qquad（3）$$

与函数 $f(x)$ 的关系如下 (记 $\Delta=b^2-4ac$):

当 $\Delta>0$ 时,方程 (1) 有两个不相等的实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ ，不等式 (2) 和不等式 (3) 的解集分别是 $\{x|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$ 和 $\{x|x_1<x<x_2\}$, 二次函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴有两个不同的交点. $f(x)$ 可写成 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$ (零点式), 这个形式可以导出韦达定理, 还可以推广到一元 n 次方程.

当 $\Delta=0$ 时,方程 (1) 有两个相等的实根 $x_1=x_2=x_0=-\frac{b}{2a}$ ，不等式 (2) 和不等式 (3) 的解集分别是 $\left\{x \,\middle|\, x\neq -\frac{b}{2a}\right\}$ 和空集 $\emptyset, f(x)$ 的图像与 x 轴相切, 只有一个交点.

当 $\Delta<0$ 时,方程 (1) 无解，不等式 (2) 和不等式 (3) 的解集分别是 $\mathbf{R}$ 和 $\emptyset. f(x)$ 的图像与x 轴无交点.

当 $\Delta<0$ 时, 若 $a>0, f(x)>0, x\in\mathbf{R}$; 若 $a<0, f(x)<0, x\in\mathbf{R}$.

(3) 单调性.

若 $a>0,\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 为单调递减区间, $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 为单调递增区间.若 $a<0,\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 为单调递增区间, $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 为单调递减区间.

(4) 二次函数的最值.

定义在 $\mathbf{R}$ 上的二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 当 $a>0$ 时, 有最小值 $f(x)_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$;当 $a<0$ 时, 有最大值 $f(x)_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

3. 二次函数恒成立问题: 转化为最值问题或者参变分离.

类型 1

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,

(1) $f(x)>0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a>0$ 且 $\Delta<0$;

(2) $f(x)<0$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a<0$ 且 $\Delta<0$.

类型 2

$f(x)>a$ 对一切 $x\in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}>a$,

$f(x)<a$ 对一切 $x\in I$ 恒成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\max}<a$.

【例 3-3】 已知实系数二次函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若方程 $f(x)=g(x)$ 和 $3f(x)+g(x)=0$ 都只有一对重根,方程 $f(x)=0$ 有两个不等的实根。求证:方程 $g(x)=0$ 没有实根。

【例 3-4】设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 满足:

(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $f(x-4)=f(2-x)$, 且 $f(x)\geqslant x$;

(2) 当 $x\in(0,2)$ 时, $f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大值 $m(m>1)$, 使得存在 $t\in\mathbf{R}$, 只要 $x\in[1,m]$, 就有 $f(x+t)\leqslant x$.

【例 3-5】 $f(x)=x^2+px+q$. 若 $f(f(x))=0$ 只有一个实数根, 求证: $p,q\geqslant 0$.

分析 设 x_0 是方程 $f(x)=0$ 的根, 则使得 $f(x)=x_0$ 成立的 x 的取值即为方程 $f(f(x))=0$ 的根.

【例 3-6】设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$，对于给定的负数 a，有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0,l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|\leqslant 5$ 都成立. 问：a 为何值时，$l(a)$ 最大?求这个最大的 $l(a)$，证明你的结论.

【例 3-7】已知函数 $f(x)=\left|x^2-a\right|$，其中 $a>0$. 若恰好有两组解 (m,n) 使得 $f(x)$ 在定义域 $[m,n]$ 上的值域也为 $[m,n]$，求实数 a 的取值范围.

【例 3-8】将 25 个首项系数为正的二次三项式放置在 5×5 的正方形表格中. 它们的 75 个系数都是取自从 -37 到 37 的整数 (每个数只用一次). 证明：至少有一列中的所有二次三项式的和有实根。

.

第四讲 函数的概念、图像与性质

知识方法述要

1.映射与函数

对于任意两个集合 A,B，依对应法则 f，若对 A 中的任意一个元素 x，在 B 中都有唯一一个元素与之对应，则称 $f:A\to B$ 为一个映射．若 $f:A\to B$ 是一个映射，且对任意 $x,y\in A$，$x\neq y$ 都有 $f(x)\neq f(y)$，则称之为单射．若 $f:A\to B$ 是映射，且对任意 $y\in B$，都有一个 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$，则称 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的满射．若 $f:A\to B$ 既是单射又是满射，则叫作一一映射．一一映射存在逆映射，即从 B 到 A 由相反的对应法则 f^{-1} 构成的映射，记作 $f^{-1}:B\to A$.

从非空数集 A 到非空数集 B 的一个映射 $f:A\to B$ 叫作 A 到 B 的函数,记作:

$$y=f(x),\text{其中 }x\in A,y\in B.$$

这里的数集 A 称为函数 f 的定义域．对于 A 中的每个元素 x，根据对应法则 f 所对应的 B 中的元素 y,称为 f 点在 x 的函数值，记为 $f(x)$．全体函数值的集合

$$f(A)=\{y|y=f(x),x\in A\}\subseteq B$$

称为函数 f 的值域.

2. 函数的图像

点集 $\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像，其中 D 为 $f(x)$ 的定义域.函数图像形象地显示函数性质，为研究数量关系问题提供了 "形" 的直观性，它是探求解题途径、获得问题结果的重要工具．应当重视数形结合解题的思想方法.

函数图像变换主要有平移、对称、伸缩三种基本变换.

(1) 平移变换.

水平平移：$y=f(x\pm a)(a>0)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像向左 $(+)$ 或向右 $(-)$ 平移 a 个单位而得到;

坚直平移：$y=f(x)\pm b(b>0)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像向上 $(+)$ 或向下 $(-)$ 平移 b 个单位而得到.

(2) 对称变换.

$y=f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称；

$y=-f(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于 x 轴对称；

$y=-f(-x)$ 与 $y=f(x)$ 关于原点对称；

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称.

(3) 伸缩变换.

$y=Af(x)(A>0)$ 的图像, 可将 $y=f(x)$ 图像上每一点的纵坐标伸 $(A>1)$ 缩 $(0<A<1)$ 到原来的 A 倍,横坐标不变而得到;

$y=f(ax)(a>0)$ 的图像, 可将 $y=f(x)$ 的图像上每一点的横坐标(伸) ($0<a<1$) 缩 $(a>1)$ 到原来的 $\frac{1}{a}$, 纵坐标不变而得到.

3. 函数的性质

(1) 单调性: 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足对任意的 $x_1,x_2\in I$, 并且 $x_1<x_2$, 总有 $f(x_1)<f(x_2)\big(f(x_1)>f(x_2)\big)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是增(减) 函数, 区间 I 称为单调增(减) 区间.

设 $f(x)$ 在区间 I_1 和 I_2 上都分别是单调递增(或递减), 且 $I_1\cap I_2\neq\emptyset$, 则 $f(x)$ 在 $I_1\cup I_2$ 上也是单调递增（或递减）的（若 $I_1\cap I_2=\emptyset$, 则不一定成立, 如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0)$ 上均为单调递减, 但在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不是单调递减的).

（2）奇偶性：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 且 D 是关于原点对称的数集, 若对于任意的 $x\in D$, 都有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数; 若对任意 $x\in D$, 都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是偶函数. 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

（3）周期性：对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个不为零的常数 T ，使得当 x 取定义域内每一个数时, $f(x+T)=f(x)$ 总成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为这个函数的周期, 如果周期中存在最小的正数 T_0, 则这个正数叫作函数 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数具有无穷多个周期，并不是任何周期函数都有最小正周期，一个十分著名的例子是狄里赫勒函数.

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\{\text{有理数}\},\\ 0, x\in\{\text{无理数}\}.\end{cases}$$

常量函数 $f(x)=a(x\in\mathbf{R})$, 同样是无最小正周期的周期函数.

4. 连续函数的性质

若 $a<b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 上至少有一个实根.

处理函数问题时要注意数形结合思想的应用，经常要将函数与方程相联系.

【例 4-1】求函数 $f(x)=x^2+x\sqrt{x^2-1}$ 的值域.

【例 4-2】 已知 $\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+4}-2\right)\geqslant y>0$, 求 $x+y$ 的最小值.

【例 4-6】设 a,b,c,d 是实数, 且满足 $(a+b+c)^2\geqslant 2(a^2+b^2+c^2)+4d$, 求证：

$$ab+bc+cd\geqslant 3d$$

第五讲 幂函数、指数函数、对数函数

知识方法概要

1.幂函数

形如 $y=x^a(a\in\mathbf{R})$ 的函数叫作幂函数.

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的函数叫作指数函数，其定义域是 $\mathbf{R}$ ，值域为 $(0,+\infty)$ 。当 $a>1$ 时, $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增; 当 $0<a<1$ 时, $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减.它的图像恒过定点 (0,1).

分数指数幂:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a},a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},a^{-n}=\frac{1}{a^n},a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

有理指数幂 $(a>0,b>0,p\in\mathbf{Q},r\in\mathbf{Q})$:

$$a^p\cdot a^r=a^{p+r},(a^p)^r=a^{pr},(ab)^p=a^pb^p.$$

3.对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ 的函数叫作对数函数。其定义域是 $(0,+\infty)$ ，值域是 $(-\infty$ ， $+\infty)$ 。 它是指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的反函数，所有性质均可由指数函数的性质导出。当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $0<a<1$ 时， $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。它的图像过定点 $(1,0)$.

对数的运算性质 $(M>0,N>0,a>0,a\neq 1,n\in\mathbf{R})$：

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$
$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$
$$\log_a M^n=n\log_a M$$

对数恒等式： $a^{\log_a N}=N$.

对数换底公式： $\log_a M=\frac{\log_c M}{\log_c a}(a>0,a\neq 1;M>0;c>0,c\neq 1)$.

由以上性质容易得到以下推论:

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b.$$

指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数.

【例 5-5】 已知 $a>0,a\neq 1$，试求使方程

$$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$$

有解的 k 的取值范围.

【例 5-6】 已知方程 $2^{333x-2}+2^{111x+2}=2^{222x+1}+1$ 有三个实数根，求这三个实数根的和.

【例 5-7】求满足等式

$$\left|\lg (xx_1)\right| + \left|\lg (xx_2)\right| + \cdots + \left|\lg (xx_n)\right| + \left|\lg \frac{x}{x_1}\right| + \left|\lg \frac{x}{x_2}\right| + \cdots + \left|\lg \frac{x}{x_n}\right|$$
$$= \left|\lg x_1 + \lg x_2 + \cdots + \lg x_n\right|$$

的所有正实数 $x, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的值.

【例 5-9】已知 x 是正数, 求 $2^x - 4^x + 6^x - 8^x - 9^x + 12^x$ 的最小值.

同步练习

1、 已知 $a>0, b>0, \log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$, 求 $\frac{b}{a}$ 的值.

2、已知 x_1 是方程 $x + \lg x = 10$ 的根, x_2 是方程 $x + 10^x = 10$ 的根, 求 $x_1 + x_2$ 的值.

3、若 $a > a^2 > b > 0, m = \log_b \frac{b}{a}, n = \log_a \frac{a}{b}, p = \log_b a, q = \log_a b$. 求 m, n, p, q 从小到大的排列顺序.

4、求函数 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x}$ 的最小值

5. 定义：若函数 $f(x)$ 图像上的点到定点 A 的最短距离小于 3，则称函数 $f(x)$ 是点 A 的近点函数，已知函数 $f(x) = \dfrac{-2x+a}{x-2}$ 在 $(2,+\infty)$ 上是严格增函数，且是点 $A(0,-4)$ 的近点函数，求实数 a 的取值范围.

6. 已知函数 $f(x)=x^2+(a-4)x+3-a$，若对于任意的 $a\in(0,4)$，存在 $x\in[0,2]$，使得 $|f(x)|\geq t$，则实数 t 的取值范围是__________

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+(4a-3)x+3a, x<0\\ \log_a(x+1)+1, x\geq 0\end{cases}$, $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在 R 上单调递减，且关于 x 的方程 $|f(x)|=2-x$ 恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是__________.

8. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f\left(\frac{1}{x+1}\right)$，定义域为 $D=[0,+\infty)$，值域为 A，若集合 $\{y|\ y=f(x), x\in[0,a]\}$ 可取得 A 中所有值，则实数 a 的取值范围为______.

9. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\left|\frac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1-a\right|$，存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$ 成立，若正整数 n 的最大值为 8，则实数 a 的取值范围是__________.

10. 若关于 x 的方程 $1+\frac{\log_2(2\lg a-x)}{\log_2 x}=2\log_x 2$ 有两解，求实数 a 的取值范围.

11、已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，满足 $abc(a+b+c)=1$，

(1) 求 $S=(a+c)(b+c)$ 的最小值；

(2) 当 S 取最小值时，求 c 的最大值.

12.设 n 为奇数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是互不相同的实数，求满足

$$|f(x_1) - x_1| = |f(x_2) - x_2| = \cdots = |f(x_n) - x_n|$$

的一一映射 $f: \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \to \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.