薛淞

100+20

11. 令 $\frac{a}{b}=$

$\lambda b^2 \leqslant$

11.16 周末作业

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}, B=\{0,1,2\}$，则 $A\cup B=$ $\{-1,0,1,2\}$.

2. 若关于 x 的方程 $ax=a^2+x-2$ 无解，则实数 a 的值为 1.

3. 已知正实数 x,y 满足 $xy=1$，则 $x+y$ 的最小值是 2.

4. 若关于 x 的不等式 $x^2-x+b<0$ 的解集是 $(-1,t)$，则 $b=$ -2.

5. 若关于 x 的不等式 $|x-1|+|x+1|>a$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

6. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-3}$ 的定义域为 $[0,+3)\cup(3,+\infty)$.

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-x, x\leq 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，$f(a)=9$，则 $a=$ 3或-9.

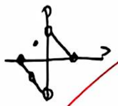
8. 函数 $y=1+2x^2+\frac{8}{x^2}$ 的最小值是 9.

9. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{x-a}{x-1+a}<0\\ x+3a>1\end{cases}$ 的整数解恰好有两个，则实数 a 的取值范围是 $(1,2]$.

10. 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$，其图象上任一点 $P(x,y)$ 满足 $|x|+|y|=1$．命题：

①函数 $y=f(x)$ 一定是偶函数；×

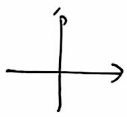
②函数 $y=f(x)$ 可能既不是偶函数，也不是奇函数；✓



③函数 $y=f(x)$ 可以是奇函数；✓

④函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则值域是 $[-1,0)$ 或 $(0,1]$；×

⑤若函数 $y=f(x)$ 值域是 $(-1,1)$，则 $y=f(x)$ 一定是奇函数．×



其中正确命题的序号是 ②③⑤.（填上所有正确的序号）

⑤ 有点 (m,n)，$-1<n<1$

其必过 $(-1,0)$ 与 $(1,0)$

若 $n=0$，$m=\pm1$

若 $n\neq0$

则有点 $(p,-n)$ 在图象上　　故 $(-m,-n)$ 在图象上

$n\neq-n$ 故 $m\neq p$.（否则不符合函数定义）

$|m|=|p|$

故 $p=-m$

11、令 $\frac{a}{b}=t$，$t\in(1,+\infty)$

$\lambda b^2 \leq \frac{a^2b+b^3}{a-b}$，$\lambda \leq \frac{\frac{a^2}{b}+b}{a-b} = \frac{\frac{a^2}{b^2}+1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{t^2+1}{t-1}$ 令 $t-1=m$，$m\in R^+$ $\lambda \leq \frac{m^2+2m+1}{m} = m+\frac{2}{m}+2$ 而 $m+\frac{2}{m}+2 \geq 2\sqrt{2}+2$，在 $m=\sqrt{2}$ 即 $t=\sqrt{2}+1$ 时取等

11. 设 $a>b>0$，若 $a^2+\lambda b^2 \leq \frac{a^3+b^3}{a-b}$，则实数 λ 的最大值为 $2\sqrt{2}+2$. $\therefore \lambda \leq 2\sqrt{2}+2$

12. 下列两组函数中，表示同--函数的是（ ~~A~~ B）

(1) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|}$ 和 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$；(2) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$ 和 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

A. 仅 (1) 是　B. 仅 (2) 是　C. (1) (2) 都是　D. (1) (2) 都不是

13. 设 $a,b\in R$，则"$ab+1\neq a+b$"的充要条件是（ D ）

A. a，b 不都为 1　　B. a，b 都不为 0

C. a，b 中至多有一个是 1　　D. a，b 都不为 1

14. 已知：奇函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递减，则下列结论正确的是

（ D ）

A. $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格递减　B. $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格递减

C. $y=f(x)$ 在 $[a,a+1](a\geq 0)$ 上严格递减 D. $y=f(x)$ 在 $[2a,a-1]$ 上严格递减

15. 已知集合 S 是由某些正整数组成的集合，且满足：若 $a\in S$，则当且仅当 $a=m+n$（其中正整数 m、$n\in S$ 且 $m\neq n$）或 $a=p+q$（其中正整数 p、$q\notin S$ 且 $p\neq q$）．现有如下两个命题：① $5\in S$；②集合 $\{x|x=3n,n\in\mathbf{N}^*\}\subseteq S$．则下列判断正确的是（ A ）

$1\notin S$，$2\notin S$，$3\in S$ $(1+2)$，$4\notin S$，$5\in S$ $(1+4)$　$6\in S$　$9=3+6$　$12=3+9$ …

A. ①对②对　B. ①对②错　C. ①错②对　D. ①错②错

16. 已知集合 $A=\{x|x^2+2x-8\leq 0\}$，集合 $B=\{x|\frac{x-1}{x-6}<0\}$，设集合 $C=\bar{A}\cap B$.

(1) 求集合 C；(2) 当 $x\in C$ 时，求函数 $f(x)=x+\frac{9}{x-2}$ 的最小值.

解：(1) $A=[-4,2]$

$B=(1,6)$

故 $\bar{A}=(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$

$C=\bar{A}\cap B=(2,6)$

即 C 为 $(2,6)$

(2) $x\in(2,6)$

$x-2>0$

$f(x)=x-2+\frac{9}{x-2}+2 \geq 2\cdot\sqrt{(x-2)\frac{9}{x-2}}+2=8$

在 $x=5$ 时取等

故 $f(x)$ 的最小值为 8

17. 某校决定投资建一个形状为长方体的体育器材室，高度为 3 米，底面面积为 36 平方米，它的后墙利用旧围墙改造（面积足够用），改造费用为每平方米 4 百元，正面用防火板建造，防火板每平方米造价为 8 百元，两侧墙用砖建造，每平方米造价为 6 百元，顶部每平方米造价为 3 百元，下底费用不计.

(1) 求器材室总造价 y （百元）关于器材室的正面长 x （米）的函数关系式；

(2) 应怎样设计才能使器材室总造价最低，并求出总造价的最小值.

解：(1) 侧面：$\frac{36}{x}$

$y=3x\cdot(4+8)+2\cdot\frac{36}{x}\cdot3\cdot6+3\cdot36$

即 $y=36x+\frac{1296}{x}+108$，$x\in R^{+}$

(2) $y\geq 2\cdot\sqrt{36\times1296}+108=540$ ~~百元~~，在 $x=6$ 时取等

故设计为底面边长为 6 的正方形，造价为最小 540 百元

18. 已知关于 x 的不等式 $(k^2-4k-5)x^2+(k+1)x+1>0(k\in\mathrm{R})$ 的解集为 M.

(1)若 $k=1$，求 x 的取值范围；(2)若 $M=\mathrm{R}$，求实数 k 的取值范围；

(3)是否存在实数 k，满足："对于任意正整数 n，都有 $n\in M$；对于任意负整数 m，都有 $m\notin M$"，若存在，求出 k 的值，若不存在，说明理由.

解：(1) $-8x^2+2x+1>0$

$x\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

(2) 1° $\begin{cases} k^2-4k-5>0 \\ (k+1)^2<4(k^2-4k-5) \end{cases}$　　2° $\begin{cases} k^2-4k-5=0 \\ k+1=0 \end{cases}$

解得 $k\in(-\infty,-1)\cup(7,+\infty)$　　解得 $k=-1$

综上所述，$k\in(-\infty,-1]\cup(7,+\infty)$

(3) 若 $k^2-4k-5\neq0$

记 $(k^2-4k-5)x^2+(k+1)x+1=0$ 的两根为 x_1, x_2，$x_1\leq x_2$

记 $p=[x_1]-1$，$q=[x_2]+1$

取 $m=\min\{p,-1\}$，$n=\max\{q,1\}$

m 与 n 同时属于 M 或不属于 M，矛盾

若 $k^2-4k-5=0$　　$k=-1$ 时，$-2\in M$，舍

即 $k=-1$ 或 $k=5$，$k=5$ 时，即 $6x+1>0$，$M=(-\frac{1}{6},+\infty)$ 符合要求，故 $k=5$

(1)法二：$\forall 1\le m<n$

恒有 $f(m)<f(n)$

即 $m+\frac{a}{m}<n+\frac{a}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{n}-\frac{a}{m}<n-m$

即 $\frac{a}{nm}(n-m)<n-m$

而 $n>m$，$nm>0$

故 $a<nm$

$nm>1$，在 $m=1$，n 趋近于1时，nm 趋近于1

$\therefore a\in(-\infty,1]$

19. 已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=x+\frac{a}{x}$. (1)判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；(2)若函数在区间 $[1,+\infty)$ 上是严格增函数，求实数 a 的取值范围.

解：(1).

奇函数

$f(-x)=-x-\frac{a}{x}=-f(x)$

且其定义域为 $R^-\cup R^+$ 关于0对称.

(2) 1° $a=0$，成立

2° $a<0$

$\forall 1\le m<n$

$f(n)-f(m)=(n-m)+\frac{a}{n}-\frac{a}{m}$

而 $n>m$ 且 $\frac{1}{n}<\frac{1}{m}$ 即 $\frac{a}{n}>\frac{a}{m}$

故 $f(n)>f(m)$

成立

3° $a>0$

$f(x)$ 在 $[\sqrt{a},+\infty)$ 严格增

故 $\sqrt{a}\le 1$

$a\le 1$

综上所述，$a\in(-\infty,1]$

更好的方法二见上

20. 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的定义域均为 D，若对任意的 $x_1,x_2\in D(x_1\ne x_2)$ 都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|$ 成立，则称函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L函数".

(1)若 $f(x)=3x+1, g(x)=x, D=\mathbf{R}$，判断函数 $y=g(x)$ 是否是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L函数"，并说明理由；

(2)若 $f(x)=x^2+2, g(x)=\sqrt{x^2+a}, D=[0,+\infty)$，函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L函数"，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $f(x)=x, D=[0,2]$，函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L函数"，且 $g(0)=g(2)$，求证：对任意的 $x_1,x_2\in D(x_1\ne x_2)$ 都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<1$.

解：(1)是，任取 $a<b$，$a,b\in R$

$f(a)<f(b)$，$g(a)<g(b)$，则 $b-a>0$

$|g(a)-g(b)|=g(b)-g(a)=b-a$

$|f(a)-f(b)|=f(b)-f(a)=3(b-a)$

$\therefore |f(a)-f(b)|>|g(a)-g(b)|$

故是

(2) 任取 $0\le m<n$

$|\sqrt{m^2+a}-\sqrt{n^2+a}|<|m^2+2-n^2-2|$

即 $\sqrt{n^2+a}-\sqrt{m^2+a}<n^2-m^2$

而 $\sqrt{n^2+a}+\sqrt{m^2+a}>0$ 恒成立

故 $(n^2+a)-(m^2+a)<(n^2-m^2)(\sqrt{n^2+a}+\sqrt{m^2+a})$

即 $\forall 0\le m<n$，$\sqrt{n^2+a}+\sqrt{m^2+a}>1$

$\sqrt{n^2+a}+\sqrt{m^2+a}>\sqrt{0+a}+\sqrt{0+a}=2\sqrt{a}$

在 $m=0$，n 趋近于0时可趋近于 $2\sqrt{a}$

故 $2\sqrt{a}\ge 1$

$a\in[\frac{1}{4},+\infty)$

证明(3) 设 $x_1<x_2$，假设 $\exists 0\le x_1<x_2\le 2$，$|g(x_1)-g(x_2)|\ge$

由三角形，$|g(x_1)-g(0)|+|g(x_2)-g(2)|$

$=|g(x_1)-g(0)|+|g(x_2)-g(0)|\ge|g(x_1)-g(x_2)|$

故 $A=\underline{|g(0)-g(x_1)|+|g(x_1)-g(x_2)|+|g(x_2)-g(2)|}\ge 2$

而 $|f(0)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(2)|$

$=|0-x_1|+|x_1-x_2|+|x_2-2|=2$

但 $\begin{cases}|g(0)-g(x_1)|<|f(0)-f(x_1)|\\|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|\\|g(x_2)-g(2)|<|f(x_2)-f(2)|\end{cases}$，相加得 $A<2$

与 $A\ge 2$ 矛盾

故 $\forall x_1,x_2\in D\ (x_1\ne x_2)$，都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<1$

得证

11.16 周末作业

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\},B=\{0,1,2\}$，则 $A\bigcup B=$________.

【答案】$\{-1,0,1,2\}$

【解析】

【分析】根据集合的并集运算求解即可.

【详解】由题意可得：$A\cup B=\{-1,0,1\}\cup\{0,1,2\}=\{-1,0,1,2\}$.

故答案为：$\{-1,0,1,2\}$.

若关于 x 的方程 $ax=a^2+x-2$ 无解，则实数 a 的值为______.

【答案】1

【解析】关于 x 的方程 $ax=a^2+x-2$ 无解，即方程 $(a-1)x=a^2-2$ 无解，

所以 $a-1=0$，所以 $a=1$.

故答案为：1

已知正实数 x,y 满足 $xy=1$，则 $x+y$ 的最小值是________.

【答案】2

【解析】

【分析】根据基本不等式直接求解即可.

【详解】解：因为正实数 x,y 满足 $xy=1$，

所以，由基本不等式可知，$x+y\geq 2\sqrt{xy}=2$，当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立，

所以，$x+y$ 的最小值是 2.

故答案为：2

若关于 x 的不等式 $x^2-x+b<0$ 的解集是 $(-1,t)$，则 $b=$________

【答案】-2

【解析】

【分析】

根据一元二次不等式与一元二次方程之间的关系求解出结果即可.

【详解】解：由题设可知：关于x的一元二次方程$x^2-x+b=0$的两根为-1与t，

由韦达定理可得：$\begin{cases}-1+t=1\\-t=b\end{cases}$，解得：$t=2$，$b=-2$，

故答案为：-2.

若关于x的不等式$|x-1|+|x+1|>a$恒成立，则实数a的取值范围是______.

【答案】$a<2$

【解析】

【分析】求出函数$y=|x-1|+|x+1|$的最小值，求解即可.

【详解】因为关于x的不等式$|x-1|+|x+1|>a$恒成立，所以$a<\left(|x-1|+|x+1|\right)_{\min}$，

记$y=|x-1|+|x+1|$，

当$x\geq 1$时，$y=|x-1|+|x+1|=2x\geq 2$，当$x=1$时，$y=|x-1|+|x+1|$有最小值为2；

当$-1<x<1$时，$y=|x-1|+|x+1|=2$，为常数函数2；

当$x\leq -1$时，$y=|x-1|+|x+1|=-2x\geq 2$，当$x=-1$时，$y=|x-1|+|x+1|$有最小值为2；

综上所述：$y=|x-1|+|x+1|$的最小值为2，所以$a<2$.

故答案为：$a<2$.

函数$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-3}$的定义域为______.

【答案】$[0,3)\cup(3,+\infty)$

已知函数$y=f(x)$的表达式为$f(x)=\begin{cases}-x,x\leq 0\\x^2,x>0\end{cases}$，$f(a)=9$，则$a=$______.

【答案】-9或3

【解析】当$a\leq 0$时，则$f(a)=-a=9$，解得$a=-9$；

当$a>0$时，$f(a)=a^2=9$，解得$a=3$，(舍负)

综上，$a=-9$或$a=3$，

故答案为：-9或3.

8. 函数 $y=1+2x^2+\dfrac{8}{x^2}$ 的最小值是________.

【答案】9

【解析】

【分析】利用基本不等式可求最小值.

【详解】$y=1+2x^2+\dfrac{8}{x^2}\geq 1+2\times 4=9$，

当且仅当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时等号成立，故所求最小值为 9，

故答案为：9.

已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-1+a}<0\\ x+3a>1\end{cases}$ 的整数解恰好有两个，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$(1,2]$

【解析】由 $\begin{cases}\dfrac{x-a}{x-1+a}<0\\ x+3a>1\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}(x-a)[x-(1-a)]<0\\ x>1-3a\end{cases}$，

当 $a\leq 0$ 时，$a<1-a\leq 1-3a$，原不等式组无解，不符合题意舍去；

当 $0<a\leq\dfrac{1}{4}$ 时，$0<a\leq 1-3a<1-a<1$，原不等式组的解集为 $\{a|1-3a<x<1-a\}$，没有两个整数解，不符合题意舍去；

当 $\dfrac{1}{4}<a\leq\dfrac{1}{2}$ 时，$-\dfrac{1}{2}\leq 1-3a<a\leq 1-a<1$，原不等式组的解集为 $\{a|a<x<1-a\}$，没有两个整数解，不符合题意舍去；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，$1-3a<1-a<a$，原不等式组的解集为 $\{a|1-a<x<a\}$，

因为原不等式组的解集中恰好有两个整数解，

所以这两个整数解为 $0,1$，所以 $\begin{cases}-1\leq 1-a<0\\ 1<a\leq 2\end{cases}$，解得 $1<a\leq 2$，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(1,2]$.

故答案为：$(1,2]$.

函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$，其图象上任一点 $P(x,y)$ 满足 $|x|+|y|=1$．命题：

①函数 $y=f(x)$ 一定是偶函数；

②函数 $y=f(x)$ 可能既不是偶函数，也不是奇函数；

③函数 $y=f(x)$ 可以是奇函数；

④函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则值域是 $[-1,0)$ 或 $(0,1]$；

⑤若函数 $y=f(x)$ 值域是 $(-1,1)$，则 $y=f(x)$ 一定是奇函数.

其中正确命题的序号是_________.（填上所有正确的序号）

【答案】③⑤

【解析】由于 $f(x)$ 的定义域是 $[-1,0)\cup(0,1]$，

则 $x\neq 0$，$|x|+|y|=1,|y|=1-|x|\neq 1, y\neq \pm 1$，所以④错误.

当 $x=\pm 1$ 时，$|x|+|y|=1,|y|=1-|x|=0, y=0$，

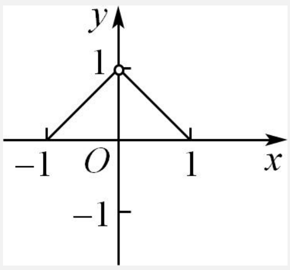
当 $\begin{cases}-1<x<0\\ y>0\end{cases}$ 时，$-x+y=1, y=x+1$，

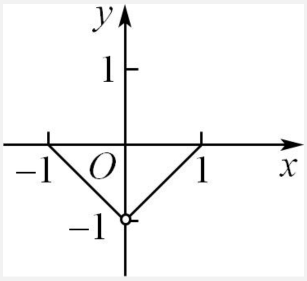
当 $\begin{cases}-1<x<0\\ y<0\end{cases}$ 时，$-x-y=1, y=-x-1$，

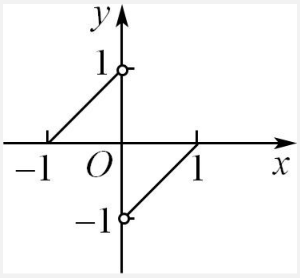
当 $\begin{cases}0<x<1\\ y>0\end{cases}$ 时，$x+y=1, y=-x+1$，

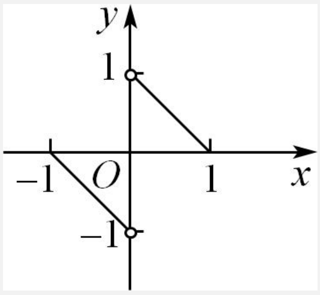
当 $\begin{cases}0<x<1\\ y<0\end{cases}$ 时，$x-y=1, y=x-1$，

所以 $f(x)$ 的图象有如下四种情况：

（1）

(2)


(3)


(4)


根据图象可知③⑤正确，①②④

故答案为：③⑤.

设 $a>b>0$，若 $a^2+\lambda b^2\le\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$，则实数 λ 的最大值为（　　）

A. $2+2\sqrt{2}$　　B. 4　　C. $2+\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】由不等式可得 $\lambda\le\dfrac{\dfrac{a^3+b^3}{a-b}-a^2}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{ab-b^2}=\dfrac{1+(\dfrac{a}{b})^2}{\dfrac{a}{b}-1}$，求出右边的最小值，进而可得 λ 的最大值.

【详解】因为 $a>b>0$，若 $a^2+\lambda b^2\le\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$，可得 $\lambda\le\dfrac{\dfrac{a^3+b^3}{a-b}-a^2}{b^2}=\dfrac{b^2+a^2}{ab-b^2}=\dfrac{1+(\dfrac{a}{b})^2}{\dfrac{a}{b}-1}$，

设$t=\dfrac{a}{b}>1$，只需要λ小于等于右边的最小值即可，

则$\dfrac{1+(\frac{a}{b})^2}{\frac{a}{b}-1}=\dfrac{1+t^2}{t-1}$，

令$s=t-1>0$，可得$t=s+1$，

所以$\dfrac{1+\left(s+1\right)^2}{s}=s+\dfrac{2}{s}+2\ge 2\sqrt{s\cdot\dfrac{2}{s}}+2=2\sqrt{2}+2$，当且仅当$s=\dfrac{2}{s}$，即$s=\sqrt{2}$时取等号，

所以$\lambda\le 2+2\sqrt{2}$，

即λ的最大值为$2+2\sqrt{2}$.

故选：A.

下列两组函数中，表示同一函数的是（　）

（1）$y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|}$和$y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$；（2）$y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$和$y=\sqrt{x^2-3x+2}$.

A. 仅（1）是　B. 仅（2）是　C. （1）（2）都是　D. （1）（2）都不是

【答案】A

设$a,b\in R$，则“$ab+1\ne a+b$”的充要条件是（　　）

A. a，b不都为1　　B. a，b都不为0

C. a，b中至多有一个是1　　D. a，b都不为1

【答案】D

【解析】

【分析】由$ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)\ne 0$，求得$a\ne 1$且$b\ne 1$，即可求解.

【详解】由$ab+1\ne a+b$，可得$ab+1-(a+b)=(a-1)(b-1)\ne 0$，所以$a\ne 1$且$b\ne 1$，

所以“$ab+1\ne a+b$”的充要条件是“a,b都不为1”.

故选：D.

已知：奇函数 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递减，则下列结论正确的是（　）

A. $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格递减　　B. $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上严格递减

C. $y=f(x)$ 在 $[a,a+1](a\geq 0)$ 上严格递减 D. $y=f(x)$ 在 $[2a,a-1]$ 上严格递减

【答案】D

【解析】根据题意可知：奇函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别严格递减，

但由于不确定 $f(0)$ 的值，故 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上和 $(-\infty,0]$ 上的单调性也不确定，A 和 B 错；

对于选项 C：当 $a=0$ 时，$y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性仍然不确定，C 错；

对于选项 D：易得 $2a<a-1$，故 $a<-1$，

$\therefore [2a,a-1]\subset(-\infty,0)$，

故 $y=f(x)$ 在 $[2a,a-1]$ 上严格递减，D 正确.

故选：D.

16. 已知集合 S 是由某些正整数组成的集合，且满足：若 $a\in S$，则当且仅当 $a=m+n$（其中正整数 m、$n\in S$ 且 $m\neq n$）或 $a=p+q$（其中正整数 p、$q\notin S$ 且 $p\neq q$）. 现有如下两个命题：①$5\in S$；②集合 $\left\{x\middle|x=3n,n\in\mathbf{N}^*\right\}\subseteq S$. 则下列判断正确的是（　）

A. ①对②对　　B. ①对②错　　C. ①错②对　　D. ①错②错

【答案】A

【解析】因为若 $a\in S$，则当且仅当 $a=m+n$(其中 $m,n\in S$ 且 $m\neq n$)，或 $a=p+q$(其中 $p,q\notin S,p,q\in Z^*$ 且 $p\neq q$)，

且集合 S 是由某些正整数组成的集合，

所以 $1\notin S$，$2\notin S$，

因为 $3=1+2$，满足 $a=p+q$(其中 $p,q\notin S,p,q\in Z^*$ 且 $p\neq q$)，所以 $3\in S$，

因为 $4=1+3$，且 $1\notin S$，$3\in S$，所以 $4\notin S$，

因为 $5=1+4$，$1\notin S$，$4\notin S$，所以 $5\in S$，故①对；

下面讨论元素 $3n(n\geq 1)$ 与集合 S 的关系，

当 $n=1$ 时，$3\in S$；

当 $n=2$ 时，$6=2+4$，$2\notin S$，$4\notin S$，所以 $6\in S$；

当 $n=3$ 时，$9=3+6$，$3\in S$，$6\in S$，所以 $9\in S$；

当 $n=4$ 时，$12=3+9$，$3\in S$，$9\in S$，所以 $12\in S$；依次类推，

当 $n\geq 3$ 时，$3n=3+3(n-1)$，$3\in S$，$3(n-1)\in S$，

所以 $3n\in S$，则 $\left\{x\middle|x=3n,n\in\mathbf{N}^*\right\}\subseteq S$，故②对.

故选：A.

已知集合 $A=\{x\mid x^2+2x-8\leq 0\}$，集合 $B=\{x\mid \dfrac{x-1}{x-6}<0\}$，设集合 $C=\overline{A}\cap B$.

（1）求集合 C；

（2）当 $x\in C$ 时，求函数 $f(x)=x+\dfrac{9}{x-2}$ 的最小值.

【答案】（1）$\overline{A}\cap B=(2,6)$

（2）$f(x)_{\min}=8$

【解析】

【分析】（1）根据补集和交集的定义可求 $\overline{A}\cap B$；

（2）根据基本不等式可求最小值.

【小问 1 详解】

$A=[-4,2]$，$B=(1,6)$，

故 $\overline{A}=(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$，故 $\overline{A}\cap B=(2,6)$.

【小问 2 详解】

$f(x)=x-2+\dfrac{9}{x-2}+2\geq 6+2=8$，当且仅当 $x=5\in(2,6)$ 时等号成立，

故 $f(x)_{\min}=8$.

19. 某校决定投资建一个形状为长方体的体育器材室，高度为 3 米，底面面积为 36 平方米，它的后墙利用旧围墙改造（面积足够用），改造费用为每平方米 4 百元，正面用防火板建造，防火板每平方米造价为 8 百元，两侧墙用砖建造，每平方米造价为 6 百元，顶部每平方米造价为 3 百元，下底费用不计.

（1）求器材室总造价 y（百元）关于器材室的正面长 x（米）的函数关系式；

（2）应怎样设计才能使器材室总造价最低，并求出总造价的最小值.

【答案】(1) $y=36x+\frac{648}{x}+108,x>0$

(2) 正面长为 6 米时，总造价最小为 540 百元

【解析】

【分析】(1) 由底面面积为 36 平方米得，底面宽为 $\frac{36}{x}$，根据面积及造假求出 y （百元）与 x （米）的函数关系式；

(2) 利用基本不等式可求得最小造价.

【小问 1 详解】

由底面面积为 36 平方米得，底面宽为 $\frac{36}{x}$，

则 $y=4\times3x+8\times3x+6\times2\times3\times\frac{36}{x}+3\times36$，

整理得 $y=36x+\frac{1296}{x}+108,x>0$

【小问 2 详解】

对于 $y=36x+\frac{1296}{x}+108,x>0$，

又 $36x+\frac{1296}{x}+108\geq2\sqrt{36x\times\frac{1296}{x}}+108=540$，

当且仅当 $36x=\frac{1296}{x}$，即 $x=6$ 时等号成立，

所以当器材室的正面长为 6 米时，总造价最小，最小为 540 百元

已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=x+\frac{a}{x}$.

(1)判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若函数在区间 $[1,+\infty)$ 上是严格增函数，求实数 a 的取值范围.

【解析】(1) 当 $a=0$ 时，函数 $f(x)=x$ 的定义域为 R，

对 $\forall x\in\mathrm{R}$，$f(-x)=-x=-f(x)$，

所以函数 $y=f(x)$ 为奇函数； (2 分)

当 $a\neq0$ 时，$f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq0\}$，

对 $\forall x\in\{x|x\neq0\}$，$f(-x)=-x+\frac{a}{-x}=-\left(x+\frac{a}{x}\right)=-f(x)$，

此时 $f(-x)=-f(x)$,

此时，函数 $y=f(x)$ 是奇函数; (6 分)

(2) 设 $x_2>x_1\geq 1$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{a}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\left(\frac{a}{x_1}-\frac{a}{x_2}\right)$,

$=x_1-x_2+\frac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-a)}{x_1x_2}$,

因为 $x_2>x_1\geq 1$，所以 $x_1x_2>1$， $x_1-x_2<0$, (10 分)

若 $y=f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上的增函数，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 成立，

则 $x_1x_2-a>0$ 成立，所以 $a<x_1x_2$ 成立，解得 $a\leq 1$,

所以实数 a 的取值范围是 $a\leq 1$.

已知关于 x 的不等式 $(k^2-4k-5)x^2+(k+1)x+1>0(k\in\mathrm{R})$ 的解集为 M.

(1)若 $k=1$，求 x 的取值范围;

(2)若 $M=\mathrm{R}$，求实数 k 的取值范围;

(3)是否存在实数 k, 满足: “对于任意正整数 n, 都有 $n\in M$；对于任意负整数 m, 都有 $m\notin M$”, 若存在，求出 k 的值，若不存在，说明理由.

【解析】(1) 当 $k=1$ 时，不等式为 $-8x^2+2x+1>0$，即 $(4x+1)(2x-1)<0$，解得 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$,

即 x 的取值范围为 $\left\{x\middle|-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\right\}$. (4 分)

(2) 当 $k^2-4k-5=0$ 时，解得 $k=5$，或 $k=-1$,

①当 $k=-1$ 时，不等式化为 $1>0$，$\therefore k=-1$ 时，解集为 R； (5 分)

②当 $k=5$ 时，不等式化为 $6x+1>0$，对任意实数 x 不等式不成立; (7 分)

③当 $\begin{cases}k^2-4k-5>0\\ \Delta=(k+1)^2-4(k^2-4k-5)<0\end{cases}$ 时，可得 $\begin{cases}k\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)\\ k\in(-\infty,-1)\cup(7,+\infty)\end{cases}$,

则 k 的取值范围为 $k\in(-\infty,-1)\cup(7,+\infty)$; (10 分)

综上所述，实数 k 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup(7,+\infty)$.

（3）根据题意，得出解集 $M=(t,+\infty)$， $t\in[-1,1)$，

当 $k^2-4k-5=0$ 时，解得 $k=5$，或 $k=-1$，

$k=5$ 时，不等式的解集为 $\left(-\frac{1}{6},+\infty\right)$，满足条件，

$k=-1$ 时，$1>0$ 恒成立，不满足条件，

当 $k^2-4k-5>0$ 时，此时对应的一元二次不等式的解集形式不是 $(t,+\infty)$ 的形式，不满足条件，

当 $k^2-4k-5<0$ 时，此时对应的一元二次不等式的解集形式不是 $(t,+\infty)$ 的形式，不满足条件，

综上，存在满足条件 k 的值为 5. （18 分）

21．已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的定义域均为 D，若对任意的 x_1、$x_2\in D(x_1\neq x_2)$ 都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|$ 成立，则称函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L 函数".

(1)若 $f(x)=3x+1, g(x)=x, D=\mathbf{R}$，判断函数 $y=g(x)$ 是否是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L 函数"，并说明理由；

(2)若 $f(x)=x^2+2, g(x)=\sqrt{x^2+a}, D=[0,+\infty)$，函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L 函数"，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $f(x)=x, D=[0,2]$，函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L 函数"，且 $g(0)=g(2)$，求证：对任意的 x_1、$x_2\in D(x_1\neq x_2)$ 都有 $|g(x_1)-g(x_2)|<1$.

【解析】（1）对任意的 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1\neq x_2$，

$|g(x_1)-g(x_2)|=|x_1-x_2|, |f(x_1)-f(x_2)|=3|x_1-x_2|$.

显然有 $|g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|$，

所以函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L 函数"； （4 分）

（2）因为函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 D 上的"L 函数"，

所以 $g(x_1)-g(x_2)|<|f(x_1)-f(x_2)|$ 对任意的 x_1、$x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 恒成立，

即 $\left|\sqrt{x_1^2+a}-\sqrt{x_2^2+a}\right|<\left|x_1^2-x_2^2\right|$ 对任意的 x_1、$x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 恒成立，

化简得 $\dfrac{\left|x_1^2-x_2^2\right|}{\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}}<\left|x_1^2-x_2^2\right|$ 对任意的 x_1、$x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 恒成立，

即 $\sqrt{x_1^2+a}+\sqrt{x_2^2+a}>1$ 对任意的 x_1、$x_2\in[0,+\infty)(x_1\neq x_2)$ 恒成立，

即 $2\sqrt{a}\geq 1$，解得 $a\geq\frac{1}{4}$； （10 分）

（3）对于 x_1、$x_2\in[0,2]$，不妨设 $x_1>x_2$，

（i）当 $0<x_1-x_2\leq 1$ 时,

因为函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的"L 函数",

所以 $\left|g(x_1)-g(x_2)\right|<|x_1-x_2|\leq 1$.

此时 $\left|g(x_1)-g(x_2)\right|<1$ 成立；

（ii）当 $x_1-x_2>1$ 时，由 x_1、$x_2\in[0,2]$ 得 $1<x_1-x_2\leq 2$，

因为 $g(0)=g(2)$，函数 $y=g(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的"L 函数,

所以 $\left|g(x_1)-g(x_2)\right|=\left|g(x_1)-g(2)+g(0)-g(x_2)\right|\leq\left|g(x_1)-g(2)\right|+\left|g(0)-g(x_2)\right|$

$<\left|x_1-2\right|+\left|0-x_2\right|=(2-x_1)+x_2=2-(x_1-x_2)<1$，

此时 $\left|g(x_1)-g(x_2)\right|<1$ 也成立,

综上，$\left|g(x_1)-g(x_2)\right|<1$ 恒成立.