2020年中科大创新班初试数学试卷（还原版）解析

福建省厦门市 叶超杰

1. 若$z+\bar{z}=1$，则$|z+1|-|z-i|$的取值范围是________

解： 设$z=\dfrac{1}{2}+bi$，则

$$|z+1|-|z-i|=\sqrt{\frac{9}{4}+b^2}-\sqrt{\frac{1}{4}+(b-1)^2}$$

上式的几何意义为直角坐标系上一动点$A(0,b)$到两定点$B\left(\dfrac{3}{2},0\right)$，$C\left(\dfrac{1}{2},1\right)$距离之差，由图像可知，三点共线时，距离之差最大，当$b\to-\infty$时，距离最小，则

$$0-1=-1<|z+1|-|z-i|\leqslant\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+1}=\sqrt{2}$$

所以$|z+1|-|z-i|$的取值范围为$\left(-1,\sqrt{2}\right]$

2. 若$|5x+6y|+|9x+11y|\leqslant1$，则包围图形的面积$S=$______

解： 当$\begin{cases}5x+6y\geqslant0\\9x+11y\geqslant0\end{cases}$时，则

$$\begin{cases}5x+6y\geqslant0\\9x+11y\geqslant0\\14x+17y\leqslant1\end{cases}$$

此时面积

$$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{14^2+17^2}}\times\sqrt{14^2+17^2}=\frac{1}{2}$$

同理可得

$$S_2=S_3=S_4=\frac{1}{2}$$

则

$$S=2$$

3. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{x}$的离心率是________

解： 易知双曲线$f(x)$的两条渐近线分别为$y=0$和$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$，此时这两条渐近线之间的夹角为

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

则

$$\mathrm{e}=\sqrt{1+\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4. $a_1=1$，$a_2=3$，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}+a_{n-1}$，则$a_n=$________

解： 由题意可知

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}+1=2\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1\right)$$

则

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}+1=\left(\frac{a_2}{a_1}+1\right)\times 2^{n-2}=2^n$$

解得

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^n-1$$

累乘可得

$$a_n=\prod_{k=1}^{n}(2^k-1)$$

5. $x^2-y^2=4p^2$，x,y 为正整数，p 为素数，则 $x^3-y^3=$ ________

解： 由题意可知

$$(x+y)(x-y)=4p^2$$

因为 p 为素数，则

$$\begin{cases}x+y=4p\\x-y=p\end{cases} 或 \begin{cases}x+y=4p^2\\x-y=1\end{cases} 或 \begin{cases}x+y=2p^2\\x-y=2\end{cases} 或 \begin{cases}x+y=2p\\x-y=2p\end{cases}$$

情形一：当 $\begin{cases}x+y=4p\\x-y=p\end{cases}$ 时，解得

$$x=\frac{5p}{2} （舍）$$

情形二：当 $\begin{cases}x+y=4p^2\\x-y=1\end{cases}$ 时，解得

$$x=2p^2+\frac{1}{2} （舍）$$

情形三：当 $\begin{cases}x+y=2p\\x-y=2p\end{cases}$ 时，此时

$$y=0 （舍）$$

情形三：当 $\begin{cases}x+y=2p^2\\x-y=2\end{cases}$ 时，解得

$$\begin{cases}x=p^2+1\\y=p^2-1\end{cases}$$

则

$$x^3-y^3=(p^2+1)^3-(p^2-1)^3=6p^4+2$$

6. $a=2020^{2020}$，$b=\sqrt{2019^{2021}\cdot 2021^{2019}}$，$c=\dfrac{1}{2}(2019^{2021}+2021^{2019})$，则$a$，$b$，$c$大小顺序是________

解： 由题意可知

$$b=\sqrt{(2020-1)^{2021}\cdot(2020+1)^{2019}}=\sqrt{(2020^2-1)^{2019}\cdot(2020-1)^{2}}$$
$$<\sqrt{2020^{4038}\cdot 2020^2}=2020^{2020}=a$$

而

$$2020\ln\frac{2019}{2020}>2020\left(1-\frac{2020}{2019}\right)=-\frac{2020}{2019}$$

则

$$\left(\frac{2019}{2020}\right)^{2020}>\mathrm{e}^{-\frac{2020}{2019}}$$

此时

$$2019\cdot\left(\frac{2019}{2020}\right)^{2020}>\frac{2020}{\mathrm{e}^{\frac{2020}{2019}}}>\frac{2020}{\mathrm{e}^2}>2$$

则

$$\frac{2019^{2021}}{2}>2020^{2020}$$

有

$$c>a$$

综上所述：$c>a>b$

7. $f(x)=(x-1)^2+k^2$，且a，b，$c\in[0,1]$，$f(a)$、$f(b)$、$f(c)$为三角形的三边，则k的取值范围是______

解： 由题意可知

$$2f(x)_{\min}>f(x)_{\max}$$

即

$$2k^2>k^2+1$$

解得

$$k\in(1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$$

8. a_1， a_2, $\cdots$, a_n 为1，2，$\cdots$, n 的排列，若 $i<j$ 且 $a_i<a_j$ 则 (a_i,a_j) 为顺序对，设 x 为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 的顺序对的个数，则 $E(X)=$ ________

解： 对于排列 A：a_1, a_2, $\cdots$, a_n，构造一个排列 A_1：a_n, $\cdots$, a_2, a_1，此时

$$x_A+x_{A_1}=C_n^2$$

则 x_A 与 x_{A_1} 的平均值为

$$\frac{x_A+x_{A_1}}{2}=\frac{C_n^2}{2}$$

而对于任意一个排列 A 都可以构造一个排列 A_1，所以

$$E(X)=\frac{C_n^2}{2}=\frac{n(n-1)}{4}$$

9. 已知 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $y=3\sin^2x-2\sin2x+2\sin x-\cos x$ 的取值范围

解： 由题意可知

$$y=(2\sin x-\cos x)^2+2\sin x-\cos x-1$$

令 $t=2\sin x-\cos x$，易知函数 t 单调递增，则

$$-1\leqslant t\leqslant 2$$

由二次函数的单调性可知

$$y\in\left[-\frac{5}{4},5\right]$$

10. 已知$f(x)=x^3+ax^2-x+1-a$，求所有$a\in R$，使得$\forall x\in[-1,1]$，$|f(x)|\geqslant|x|$恒成立

解：情形一：当$x=0$时，易知$a\in R$

情形二：当$x\neq 0$时，此时

$$|f(x)|>|x|$$

等价于

$$\left|x^2+\frac{1}{x}+a\left(x-\frac{1}{x}\right)-1\right|>1$$

令$\varphi(x)=x^2+\dfrac{1}{x}+a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-1$，$x\in[-1,0)\cup(0,1]$，则

$$\varphi'(x)=\frac{x^2+1}{x^2}\left(\frac{2x^3-1}{x^2+1}+a\right)$$

令$h(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2+1}+a$，则

$$h'(x)=\frac{2x(x^3+3x+1)}{(x^2+1)^2}$$

令$u(x)=x^3+3x+1$，易知$u(x)$单调递增，且

$$u(0)=1,\ u(-1)=-3<0$$

由零点存在性定理可知：必有一个$x_0\in(-1,0)$，使得$u(x_0)=0$，此时

$$x\in(-1,x_0),\ h'(x)>0,\ h(x)\text{单调递增}$$

$$x\in(x_0,0),\ h'(x)<0,\ h(x)\text{单调递减}$$

$$x\in(0,1),\ h'(x)>0,\ h(x)\text{单调递增}$$

①当$a\geqslant 1$时，此时

$$h(0)=a-1>0$$

则

$$x\in(0,1),\ \varphi'(x)>0,\ \varphi(x)\text{单调递增}$$

11. 已知$1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<C(n+1)^{\frac{3}{2}}$，证明：当$C=\dfrac{2}{3}$，不等式成立，且$C<\dfrac{2}{3}$该不等式不成立

证明：方法一：分析通项项法操作

要证

$$1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(1+n)^{\frac{2}{3}}$$

只需证

$$1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$

只需证

$$\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$$

等价于证

$$\frac{9n}{4}+1>0$$

显然成立，证毕！

方法二：积分放缩操作

易知

$$\int_0^{\sqrt{n}}\sqrt{x}\,dx<1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\int_1^{\sqrt{n+1}}\sqrt{x}\,dx$$

则

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}<\frac{2}{3}\left(\sqrt{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}$$

而

$$\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$$

证毕！

又

$$\frac{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}<\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{2}{3}$$

则$C=\dfrac{2}{3}$时，不满足题意

解：$|f(x)|\geqslant|x| \iff f(x)^2\geqslant x^2 \iff (f(x)+x)(f(x)-x)\geqslant 0$

$\iff (x^3+ax^2-x+1-a+x)(x^3+ax^2-x+1-a-x)\geqslant 0$

$\iff [(x+1)(x^2-x+1)+a(x+1)(x-1)][(x^3-2x+1)+a(x^2-1)]\geqslant 0$

$\iff (x+1)[x^2-x+1+ax-a][(x-1)(x^2+x-1)+a(x+1)(x-1)]\geqslant 0$

$\iff (x+1)(x-1)[x^2+(a-1)x-(a-1)][x^2+(a+1)x+a-1]\geqslant 0$

$x=\pm1$时，$a\in R$；

$-1<x<1$时，$[a(x-1)+x^2-x+1][a(x+1)+x^2+x-1]\leqslant 0$

$\left[a+\frac{x^2-x+1}{x-1}\right]\left[a+\frac{x^2+x-1}{x+1}\right]\geqslant 0$

∴ ① $\begin{cases} a+x+\frac{1}{x-1}\geqslant 0 \\ a+x-\frac{1}{x+1}\geqslant 0 \end{cases}$ 或 ② $\begin{cases} a+x+\frac{1}{x-1}\leqslant 0 \\ a+x-\frac{1}{x+1}\leqslant 0 \end{cases}$

∴ $\begin{cases} a\geqslant -(x+\frac{1}{x-1}) \\ a\geqslant -(x-\frac{1}{x+1}) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a\leqslant -(x+\frac{1}{x-1}) \\ a\leqslant -(x-\frac{1}{x+1}) \end{cases}$

对$\forall x\in(-1,1)$恒成立.

注意到$x\to1^-$时，$-(x+\frac{1}{x-1})\to+\infty$，

∴只能：$\begin{cases} a\leqslant -(x+\frac{1}{x-1}) \\ a\leqslant -(x-\frac{1}{x+1}) \end{cases}$

又 $\left(-(x+\frac{1}{x-1})\right)_{min}=1$ （$x=0$时等号成立）；

$-x+\frac{1}{x+1}>-\frac{1}{2}$，且$x\to1$时，$-x+\frac{1}{x+1}\to-\frac{1}{2}$，

∴ $a\leqslant-\frac{1}{2}$.

综上，$a\leqslant-\frac{1}{2}$.