国庆作业（1）

1. {1，2，3，4，6}

2. -1, -6

3. 必要不充分

4. （-∞，3]

5. 510

6. $\{(-1,1),(2,2)\}$

7. （-∞，-1）∪[1,+∞）

8. ±$\sqrt{2}$

9. $(1,4)$

10. $\left\{-\frac{5}{4},-1,1\right\}$

11. ①

12. $\frac{1}{12}$

13. （1）$|3x-1|>5$，$3x-1<-5$ 或 $3x-1>5$，解得 $x<-\frac{4}{3}$ 或 $x>2$；

$\frac{x+3}{x-1}-2=\frac{5-x}{x-1}\geq 0,\begin{cases}(5-x)(x-1)\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得 $1<x\leq 5$，

所以，不等式组 $\begin{cases}|3x-1|>5\\ \frac{x+3}{x-1}\geq 2\end{cases}$ 的解集为 $(2,5]$.

（2）$|x-2|+|3x-5|=|4x-7|$，

当 $x<\frac{5}{3}$ 时，$2-x+5-3x=7-4x$，恒成立.

当 $\frac{5}{3}\leq x<\frac{7}{4}$ 时，$2-x+3x-5=7-4x, x=\frac{5}{3}$.

当 $\frac{7}{4}\leq x<2$ 时，$2-x+3x-5=4x-7$，无解.

当 $x\geq 2$ 时，$x-2+3x-5=4x-7$，恒成立.

综上所述，方程 $|x-2|+|3x-5|=|4x-7|$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]\cup[2,+\infty)$.

14. （1）对于 $p:(x+1)(x-5)\leq 0$，解可得 $-1\leq x\leq 5$，

若$m=5$，则$q:-4\le x\le 6$，

若$m=5$，p,q有且只有一个为真命题，则p真q假或p假q真,

若p真q假，即$\begin{cases}-1\le x\le 5\\ x\langle -4或x\rangle 6\end{cases}$，无解,

若p假q真，即$\begin{cases}x\langle -1或x\rangle 5\\ -4\le x\le 6\end{cases}$，解可得$-4\le x<-1$或$5<x\le 6$，

综合可得：$-4\le x<-1$或$5<x\le 6$，

即x的取值范围为$[-4,-1)\cup(5,6]$；

(2) 若p是q的充分不必要条件，则有$\begin{cases}1-m\le -1\\ 5\le 1+m\end{cases}$，解可得$m\ge 4$，

即m的取值范围为$[4,+\infty)$.

15. (1) 根据题意，$|1-2x|<1$，即$-1<2x-1<1$，解得$0<x<1$，即不等式的解集为$(0,1)$，即$M=(0,1)$；

(2) 因为$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}-(a+b)=\frac{a^2}{b}-b+\frac{b^2}{a}-a=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-a^2}{a}=\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$

$=\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}$，且$a,b\in M$，即$a,b\in(0,1)$，$a>b$，则$\frac{(a+b)(a-b)^2}{ab}>0$，

即$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}>a+b$.

16. (1) $\Delta=4(3k-1)^2-4k(9k-1)=4(-5k+1)\ge 0$，解得$k\le\frac{1}{5}$，

由题意得$x_1x_2>0$，$x_1+x_2>0$，即$\begin{cases}\frac{9k-1}{k}>0\\ \frac{2(3k-1)}{k}>0\end{cases}$，解得$k<0$或$\frac{1}{3}<k\le\frac{1}{5}$.

(2) $\Delta=4(3k-1)^2-4k(9k-1)=4(-5k+1)>0$，解得$k<\frac{1}{5}$，

两根恰有一个是正整数,由题意得$x_1>0,x_2<0,x_1x_2<0$或$x_1>0,x_2=0,x_1x_2=0$，即

$\frac{9k-1}{k}\le 0$，解得$0<k\le\frac{1}{9}$.

$\therefore 0 < k \le \frac{1}{9}$,且 k 为整数,符合条件的 k 不存在.

17. $(\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{9}},\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{16}}]$

18. (1) 由于3×4与$\frac{4}{3}$均不属于数集$\{1$, 3, $4\}$,

所以数集$\{1$, 3, $4\}$不具有性质P.

由于1×2, 1×3, 1×6, 2×3, $\frac{6}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{6}$都属于数集$\{1$, 2, 3, $6\}$,

所以数集$\{1$, 2, 3, $6\}$具有性质P.

(2) 由于$1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 所以$a_n a_n > a_n$, 所以$a_n a_n \notin A$

从而$\frac{a_n}{a_n} \in A$, 即$1 \in A$, 即$a_1=1$

$\because 1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_n, n \ge 2$

$\therefore a_k a_n > a_n\left(k = 2,3,4,\ldots,n\right)$, 所以$a_k a_n \notin A$

由数集A具有性质P, 得$\frac{a_n}{a_k} \in A\left(k = 2,3,4,\ldots,n\right)$

又$\because \frac{a_n}{a_n} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < \cdots < \frac{a_n}{a_2} < \frac{a_n}{a_1}, \therefore \frac{a_n}{a_n} = a_1, \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_2, \ldots \frac{a_n}{a_2} = a_{n-1}, \frac{a_n}{a_1} = a_n$

从而$\frac{a_n}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \cdots + \frac{a_n}{a_2} + \frac{a_n}{a_1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad \therefore \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}} = a_n$

(3) 由 (2) 知, 当$n = 5$时,

有$\frac{a_5}{a_4} = a_2$, $\frac{a_5}{a_3} = a_3$, 即$a_5 = a_2 \bullet a_4 = a_3^2$,

$\because 1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_5$, $\therefore a_3 a_4 > a_2 a_4 = a_5$, $\therefore a_3 a_4 \notin A$,

由A具有性质P可知$\frac{a_4}{a_3} \in A$.

由$a_2 \bullet a_4 = a_3^2$, 得$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \in A$,

且$1 < \frac{a_3}{a_2} = a_2$, $\therefore \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = a_2$,

$\therefore \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = a_2$

即a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 是首项为 1, 公比为a_2等比数列,

即有集合$A = \{1$, 2, 4, 8, $16\}$.

国庆作业（2）

1. 0 或-1.

2. $a \geq 1$

3. 0 或 4

4. $\left[0,2\right]$

5. a=-1

6. 1

7. (1)(3)

8. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$

9. $\left(-\infty,-8\right)\cup\left(-6,-4\right)\cup\left(-4,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

10. $\left(-1,2\right)$

11. $\boldsymbol{(-\frac{1}{2},0]\cup(1,\frac{3}{2})}$

12. 令 $2n+2\ \ 100$，可得 $n\ \ 49$，故 A 是 $\{1$，2，…，$49\}$ 的一个非空子集，

再由 $A\bigcap B=\varnothing$，先从 A 中去掉形如 $2n+2$ 的数，$n\in N_{+}$.

由 $2n+2\ \ 49$，可得 $n\ \ 23$，$49-23=26$，此时，A 中有 26 个元素.

由于 A 中已经去掉了 4，6，8，12，16，20，22 这 7 个数，

而它们对应的形如 $2n+2$ 的数分别为 10，14，18，26，34，42，46，

并且 10，14，18，26，34，42，46 对应的形如 $2n+2$ 的数都在集合 B 中.

故 A 中还可有以下 7 个特殊元素：10，14，18，26，34，42，46，

故 A 中元素最多时，A 中共有 33 个元素，对应地 B 中也有 33 个元素.

13. (1) p 为假命题，$\Delta_1=m^2-4<0$，得 $m\in\left(-2,2\right)$

(2) p：$m\leq-2$ 或 $m\geq2$；　q：$\begin{cases}\Delta_2=4^2-4m\geq0\\ x_1+x_2=2>0\\ x_1x_2=m>0\end{cases}\Rightarrow 0<m\leq4$

若 p 真 q 假，则 $\begin{cases}m\leq-2\text{ 或 }m\geq2\\ m\leq0\text{ 或 }m>4\end{cases}\Rightarrow m\leq-2$ 或 $m>4$；

若 p 假 q 真，则 $\begin{cases}-2<m<2\\ 0<m\le 4\end{cases} \Rightarrow 0<m<2$ ，

综上所得，$m\in(-\infty,-2]\cup(0,2)\cup(4,+\infty)$.

14.（1）$B=\{x\,|\,x^2-5x+6=0\}$ ，$C=\{x\,|\,2x^2-5x+2=0\}$ ，

$\therefore B=\{2，3\}$ ，$C=\{2，\frac{1}{2}\}$ ，$\because A\cap B=A\cup B$ ，$\therefore A=B$ ，

$\because A=\{x\,|\,x^2+(4-a^2)x+a+3=0\}$ ，

$\therefore 4-a^2=-(2+3)$ ，$a+3=2\times 3$ ，解得 $a=3$ ，

（2）$\because A\cap B=A\cap C\ne\varnothing$ ，$\therefore A\cap B=A\cap C=\{2\}$ ，$\therefore 2\in A$ ，

$\therefore 2^2+2(4-a^2)+a+3=0$ 即 $2a^2-a-15=0$ 解得 $a=3$ 或 $a=-\frac{5}{2}$ ，

当 $a=3$ 时，$A=\{2，3\}$ 此时 $A\cap B\ne A\cap C$ 舍去；

当 $a=-\frac{5}{2}$ 时，$A=\{2，\frac{1}{4}\}$ 此时满足题意．综上，$a=-\frac{5}{2}$.

15.（1）$\left[-1,\frac{1}{3}\right)\cup(2,4]$ （2）$a=-\frac{7}{3},b=\frac{2}{3}$

16.

（1）$A=(-1,1)$

（2）$\begin{array}{l}a<0,A=(a,1)\\ a=0,A=\phi\\ 0<a<1,A=(-\infty,a)\cup(1,+\infty)\\ a=1,A=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ a>1,A=(-\infty,1)\cup(a,+\infty)\end{array}$

（3）$\left(-\infty,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

17.

（1）设定价为 x $(x\ge 15)$ 元，则销售量为 $10-0.2(x-15)$ 万件，

由已知可得，$x[10-0.2(x-15)]\ge 15\times 10$，

整理可得，$x^2-65x+750\le 0$ ，解得 $15\le x\le 50$ ，

所以，该商品每件定价最多为 50 元.

（2）由已知可得，$ax \ge 150+\frac{1}{4}\left(x^2-400\right)+50+\frac{x}{4}=\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}+100$，$x \ge 15$.

因为$x \ge 15$，所以$a \ge \frac{x}{4}+\frac{100}{x}+\frac{1}{4} \ge 2\sqrt{\frac{x}{4}\times\frac{100}{x}}+\frac{1}{4}=10.25$，

当且仅当$\frac{x}{4}=\frac{100}{x}$，即$x=20$时，等号成立，

所以，$a \ge 10.25$.

所以，当该商品改革后的销售量a至少应达到10.25万件时，才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和，商品的每件定价为 20 元.

18.（1）$\because A=\{2$，3，$5\}$，$\therefore B=\{6$，10，$15\}$；

（2）设$A=\{a_1$，a_2，a_3，a_4，$a_5\}$，不妨设$0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，

因为$a_1a_2<a_1a_3<a_1a_4<a_1a_5<a_2a_5<a_3a_5<a_4a_5$，所以$B$中元素个数大于等于 7 个，

又$A=\{2^1$，2^2，2^3，2^4，$2^5\}$，$B=\{2^3$，2^4，2^5，2^6，2^7，2^8，$2^9\}$，此时B中元素个数大于等于 7 个，

所以生成集B中元素个数的最小值为 7；

（3）不存在，理由如下：

假设存在 4 个正实数构成的集合$A=\{a$，b，c，$d\}$，使其生成集$B=\{2$，3，5，6，10，$16\}$，

不妨设$0<a<b<c<d$，则集合A的生成集$B=\{ab$，ac，ad，bc，bd，$cd\}$；

则必有$ab=2$，$cd=16$，其 4 个正实数的乘积$abcd=32$；

也有$ac=3$，$bd=10$，其 4 个正实数的乘积$abcd=30$，矛盾；

国庆作业（3）

1. -2

2. 3

3. 64

4. $(-\infty,1]$

5. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

6. $a\le 9$

7. （3）

8. （1）（2）

9. 2024

10. （4）

13.（1）因为 $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$，

所以 $3x^2+2x+1\le x^2+x+2$，

所以 $2x^2+x-1\le 0,(x+1)(2x-1)\le 0$，

所以 $-1\le x\le \frac{1}{2}$，

所以不等式的解集为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

（2）因为 $x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0$

所以 $\frac{x-1}{x^2-4x+4}\ge 0$ 与 $\begin{cases}x-1\ge 0\\ x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty)\end{cases}$ 同解,

所以不等式的解集为 $[1,2)\cup(2,+\infty)$

14、【解析】（1）因为 $A=\{x||x-a|<2\}=\{x|a-2<x<a+2\}$，

$B=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}<0\right.\right\}=\{x|-1<x<2\}$，

当 $a=2$ 时，则 $A=\{x|0<x<4\}$，所以 $A\cap B=\{x|0<x<2\}$.

（2）因为“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分非必要条件，所以B是A的真子集，

又$A=\{x|a-2<x<a+2\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，

所以$\begin{cases}a-2\le -1\\a+2\ge 2\end{cases}$，解得$0\le a\le 1$，即实数$a$的取值范围为$0\le a\le 1$.

15、（1）m<$\frac{1-2\sqrt{7}}{3}$

(2) m<-1 时，$[1,\frac{m-1}{m+1}]$；m=-1 时，$x\le \frac{m-1}{m+1}$或 $x\ge 1$

(3) m≥ **1**

16 （1）已知非空实数集S满足：任意$x\in S$，均有$\frac{x-1}{x}\in S$，且$x=\frac{x-1}{x}$在实数范围内无解，所以$x\ne\frac{x-1}{x}$，

所以$\frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}}=\frac{1}{1-x}\in S$，又$\frac{\frac{1}{1-x}-1}{\frac{1}{1-x}}=x\in S$，

则集合S中的元素是以$\left\{x,\frac{x-1}{x},\frac{1}{1-x}\right\}$的形式，三个数为一组出现，组和组不相交，且$0,1\notin S$，

又$x\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}=-1$，则$S$中所有元素之积的所有可能值为$-1$或$1$；

（2）已知非空实数集T满足：任意$y\in T$，均有$\frac{y-1}{y+1}\in T$，且$\frac{y-1}{y+1}\ne y$

所以$\frac{\frac{y-1}{y+1}-1}{\frac{y-1}{y+1}+1}=-\frac{1}{y}\in T$，且$\frac{-\frac{1}{y}-1}{-\frac{1}{y}+1}=\frac{1+y}{1-y}\in T$，又$\frac{\frac{1+y}{1-y}-1}{\frac{1+y}{1-y}+1}=y\in T$，

则集合T中的元素是以$\left\{y,\frac{y-1}{y+1},-\frac{1}{y},\frac{1+y}{1-y}\right\}$的形式，四个数为一组出现，组和组不相交，且$-1,0,1\notin T$，

若T由四个元素组成，则$T=\left\{y,\frac{y-1}{y+1},-\frac{1}{y},\frac{1+y}{1-y}\right\}$，且所有元素之和为3，

所以$y+\frac{y-1}{y+1}+\left(-\frac{1}{y}\right)+\frac{1+y}{1-y}=3$，整理得$\left(y^2-4y-1\right)\left(y^2+y-1\right)=0$，

解得$y=2\pm\sqrt{5}$或$y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

当$y=2+\sqrt{5}$或$y=2-\sqrt{5}$或$y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$或$y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$时，

$T=\left\{2+\sqrt{5},2-\sqrt{5},\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$，

综上，$T=\left\{2+\sqrt{5},2-\sqrt{5},\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$；

（3）由（1）（2）集合S,T的元素个数分别是以3和4为最小正周期循环，

且当$x=y$时，同一周期内其余元素不相等，

因而3和4互素，所以S和T中的各组最多只能有一个公共元素，

因为$S\cap T$有五个元素，若要使$S\cup T$的元素个数最小，要使相同的元素尽量在同一个周期内，

若$\left\{x_0,\frac{x_0-1}{x_0},\frac{1}{1-x_0},x_1,\frac{x_1-1}{x_1},\frac{1}{1-x_1}\right\}=S$，此时从S中选出5个元素属于$T$，此时$T$包含12个元素，$S\cup T$中包含$6+12-5=13$个元素，

若$T=\left\{y_0,\frac{y_0-1}{y_0+1},-\frac{1}{y_0},\frac{1+y_0}{1-y_0},y_1,\frac{y_1-1}{y_1+1},-\frac{1}{y_1},\frac{1+y_1}{1-y_1}\right\}$，此时从$T$中选出5个元素属于S，

此时S包含15个元素，$S\cup T$中包含$8+15-5=18$，

所以$S\cup T$的元素个数最小值为13.

17 （1）解：对于$\{1,2,3,4\}$，去掉3后，$\{1,2,4\}$不满足题中条件，故$\{1,2,3,4\}$不是“可分集合”，

对于$\{1,3,5,7,9,11,13\}$，集合$\{1,3,5,7,9,11,13\}$所有元素之和为49.

当去掉元素1时，剩下的元素之和为48，剩下元素可以组合$\{3,5,7,9\}$、$\{11,13\}$这两个集合，显然符合题意；

当去掉元素3时，剩下的元素之和为46，剩下元素可以组合$\{1,9,13\}$、$\{5,7,11\}$这两个集合，显然符合题意；

当去掉元素5时，剩下的元素之和为44，剩下元素可以组合$\{1,3,7,11\}$、$\{9,13\}$这两个集合，显然符合题意；

当去掉元素7时，剩下的元素之和为42，剩下元素可以组合$\{1,9,11\}$、$\{3,5,13\}$这两个集合，显然符合题意；

当去掉元素9时，剩下的元素之和为40，剩下元素可以组合$\{1,3,5,11\}$、$\{7,13\}$这两个集合，显然符合题意；

当去掉元素11时，剩下的元素之和为38，剩下元素可以组合$\{3,7,9\}$、$\{1,5,13\}$这两个集合，显然符合题意；

当去掉元素13时，剩下的元素之和为36，剩下元素可以组合$\{1,3,5,9\}$、$\{7,11\}$这两个集合，显然符合题意.

综上所述，集合$\{1,3,5,7,9,11,13\}$是“可分集合”.

（2）证明：不妨设$0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，

若去掉元素a_2，将集合$\{a_1,a_3,a_4,a_5\}$分成两个交集为空集的子集，

且两个子集元素之和相等，则有$a_1+a_5=a_3+a_4$①，或者$a_5=a_1+a_3+a_4$②，

若去掉元素a_1，将集合$\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$分成两个交集为空集的子集，

且两个子集元素之和相等，则有$a_2+a_5=a_3+a_4$③，或者$a_5=a_2+a_3+a_4$④，

由①③得$a_1=a_2$，矛盾，由①④得$a_1=-a_2$，矛盾，

由②③得$a_1=-a_2$矛盾，由②④得$a_1=a_2$矛盾，

故当$n=5$时，集合A一定不是“可分集合”.

（3）设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中所有元素之和为M，由题意得$M-a_i$均为偶数，

故$a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$的奇偶性相同，

①若a_i为奇数，则M为奇数，易得n为奇数，

②若a_i为偶数，此时取$b_i=\frac{a_i}{2}$，可得$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$仍满足题中条件，集合B也是“可分集合”，

若b_i仍是偶数，则重复以上操作，最终可得各项均为奇数的“可分集合”，由①知n为奇数

综上，集合A中元素个数为奇数.