函数阶段练习 1【答案】

1、函数 $y=\dfrac{x^0}{2x+\sqrt{5-x}}$ 的定义域为__________ 【$\left(-\infty,-\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{5}{4},0\right)\cup(0,5]$】

2、设函数 $f(x)=\sqrt{6-x-x^2}$，$g(x)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的定义域为__________

【$[-3,-1)\cup(-1,0)\cup(0,2]$】

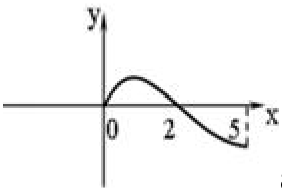
3、若函数 $y=\dfrac{kx+2}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则实数 k 的取值范围是__________ 【$0\le k<\dfrac{3}{4}$】

4、若两个函数的对应关系相同，值域也相同，但定义域不同，则称这两个函数为"孪生函数"．则与函数 $y=x^2$（$x\in\{-1,0,1,2\}$）为孪生函数的函数个数为__________ 【9】

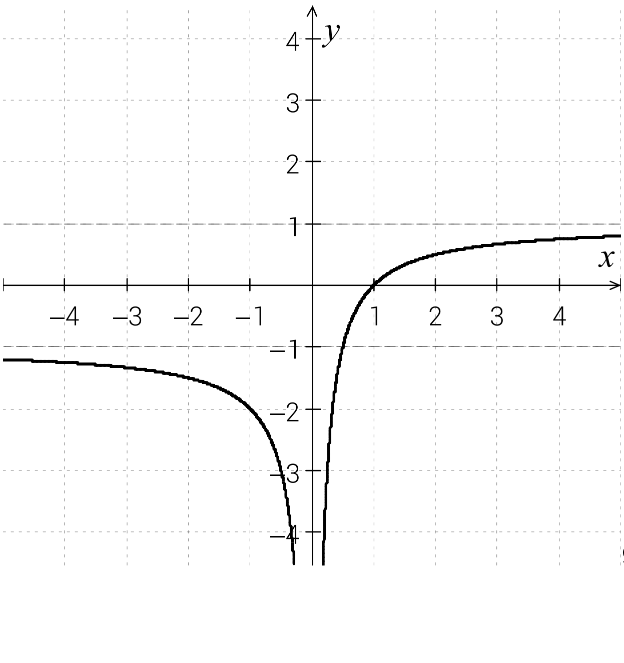
5、已知 $f(x)=\dfrac{\sqrt{10-x^2}+2x}{2x-5+|x-5|}$，若 $f(a)=-5$，则 $f(-a)=$__________ 【9】

6、已知 $y=f(x)-x^2$ 为奇函数，且 $f(24)=6$，则 $f(-24)=$__________ 【1146】

7、已知 $f(x)=ax^2-bx+1$ 是定义域为 $[a,a+1]$ 的偶函数，则 $a^b-a^2=$__________ 【$\dfrac{3}{4}$】



8、已知奇函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$，若 $x\in[0,5]$ 时 $y=f(x)$ 的图像如图所示，则不等式 $xf(x)<0$ 的解集为__________ 【$[-5,-2)\cup(2,5]$】



9、已知 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 1-x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在如图所示

的坐标平面内作函数 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的图像.

10、设函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 的定义域分别为 D_f、D_g，规定

$$(f\star g)(x)=\begin{cases} f(x)+g(x),x\in D_f\cap D_g, \\ f(x),x\in D_f,x\notin D_g, \\ g(x),x\in D_g,x\notin D_f \end{cases}$$

若 $f(x)=\dfrac{x}{4}$，$g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，则 $y=(f\star g)(x)$ 的值域为__________【$\left\{\dfrac{1}{4}\right\}\cup[1,+\infty)$】

11、已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，则 $f(1)+f(2)+\ldots+f(11)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{2}{2}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{11}{2}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{1}{11}\right)+f\left(\dfrac{2}{11}\right)+\ldots+f\left(\dfrac{11}{11}\right)=$ __________【$\dfrac{121}{2}$】

12、设 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=9x+\dfrac{a^2}{x}+7$. 若 $f(x)\ge a+1$ 对一切 $x\ge 0$ 成立，则实数 a 的取值范围是__________【$a\le -\dfrac{8}{7}$】

13、函数 $y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$ （ D ）

A. 是奇函数，不是偶函数　　B. 是偶函数，不是奇函数

C. 是非奇非偶函数　　D. 既是奇函数又是偶函数

14、已知非常值函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)f(-x)=1$（$x\in\mathbf{R}$），则下列函数中，不是奇函数的为（ D ）

A. $\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$　　B. $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}$　　C. $f(x)-\dfrac{1}{f(x)}$　　D. $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$

15、若定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上奇函数 $y=f(x)$ 同时满足对任意正实数 $x_1\ne x_2$，都有 $\dfrac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则不等式 $2f(x)<xf(2)$ 的解集为（ C ）

A. $(2,+\infty)$　　B. $(0,2)$　　C. $(-2,0)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

16、已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$. 若 $y=f\left(\dfrac{3}{2}-2x\right)$ 和

$y=g(2+x)$均为偶函数，则下列各式中必定成立的为（ B ）

A. $f(0)=0$　　B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　C. $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)$　　D. $g(-1)=g(2)$

17、解：$f(x-a)=x-\frac{2a^2}{x}+a+1$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称

令$g(x)=x-\frac{2a^2}{x}+a+1$，则对任意$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(-x)=-x+\frac{2a^2}{x}+a+1$

故当$a=-1$时，$g(-x)=-g(x)=-x+\frac{2}{x}$，$y=f(x-a)$为奇函数

而当$a\neq-1$时，$g(-x)\neq-g(x)$且$g(x)-g(-x)=2x-\frac{4a^2}{x}\neq0$，$y=f(x-a)$为非奇非偶函数

18、解：由题意，$f(x)=\begin{cases}-x^2+x, x<0,\\ x^2+x, x\geq0\end{cases}$，令$g(a)=f(1+a)+f(2a)$

当$a<-1$时，$g(a)=-(1+a)^2+(1+a)-(2a)^2+2a=a-5a^2<0$；

当$-1\leq a<0$时，$g(a)=(1+a)^2+(1+a)-(2a)^2+2a=2+5a-3a^2$，解得$-\frac{1}{3}<a<0$；

当$a\geq0$时，$g(a)=(1+a)^2+(1+a)+(2a)^2+2a=5a^2+5a+2>0$；

综上，$a>-\frac{1}{3}$

【也可先证明$y=f(x)$严格增，再得到$f(1+a)>f(-2a)\Rightarrow1+a>-2a$】

19、解：由题意，$\begin{cases}\Delta=4(m-1)^2-4(m+1)>0,\\ -2<m-1<4,\\ 4+4(m-1)+(m+1)>0,\\ 16-8(m-1)+(m+1)>0\end{cases}$

解得$m\in\left(-\frac{1}{5},0\right)\cup\left(3,\frac{25}{7}\right)$

又由韦达定理，$x_1^2+x_2^2=4m^2-10m+2$，故$x_1^2+x_2^2\in\left(2,\frac{104}{25}\right)\cup\left(8,\frac{848}{49}\right)$

20、证：(1) 由题意，对任意$x\in D$，$-x\in D$，且$f(1)=f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)-f(x)=0$，

而D关于原点对称，故$-1\in D$且$f(-1)=f\left(\frac{1}{-1}\right)=f(1)-f(-1)\Rightarrow f(-1)=0$，

从而$f(-x)=f\left(\frac{x}{-1}\right)=f(x)$，$y=f(x)$是偶函数

(2) 必要非充分

必要性显然，以下举例说明不充分

设 $D=\left\{\pm 2^{m+n\sqrt{2}}\middle|m,n\in\mathbf{Z}\right\}$，显然 D 关于原点对称，同时注意到 $\sqrt{2}$ 是无理数，因此对任意 $x\in D$，存在唯一的有序整数对 (m,n)，使得 $x=2^{m+n\sqrt{2}}$ 或 $-2^{m+n\sqrt{2}}$，故可以定义 D 上的函数 $y=f(x)$，使得 $f\left(-2^{m+n\sqrt{2}}\right)=f\left(2^{m+n\sqrt{2}}\right)=m$

容易验证 $y=f(x)$ 满足 $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$，且 $f(2)=1>0$，但是当 $x=2^{\sqrt{2}-1}>1$ 时，

$f\left(2^{\sqrt{2}-1}\right)=-1<0$

*21、(1) $f(1)=f(1+0)=f(1)f(0)-f(0)f(1)=0$；

$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)-f(1-x)f(1)=f(x)f(0)$，因为 $f(x)$ 不恒为 0，所以 $f(0)=1$

(2) 由(1)，$f(x+2)=f(x+1)f(1)-f(-x)f(0)=-f(-x)$，故由 $y=f(x)$ 为偶函数得

$f(x+4)=-f(-(x+2))=-f(x+2)=-(-f(x))=f(x)$

(3) $f(2-x)=f(1+(1-x))=f(1)f(1-x)-f(0)f(x)=-f(x)$，故由(1)、(2)得对一切 $k\in\mathbf{Z}$ 和 $\alpha\in[0,2]$，$f(2k+\alpha)+f(2k+2-\alpha)=(-1)^k\left[f(\alpha)+f(2-\alpha)\right]=0$

从而 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{5}{3}\right)=f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\ldots=f\left(\dfrac{2018}{3}\right)+f\left(\dfrac{2020}{3}\right)=f\left(\dfrac{2024}{3}\right)+f\left(\dfrac{2026}{3}\right)=0$，于是原式 $=f\left(\dfrac{2023}{3}\right)+f(1)+f(2)+\ldots+f(675)$

又因为对一切 $k\in\mathbf{Z}$，$f(2k+1)=0, f(2k)=(-1)^k$，所以原式 $=f\left(\dfrac{7}{3}\right)-1=-f\left(\dfrac{1}{3}\right)-1$

再由 $\begin{cases}f(2x)=f(x+x)=f(x)^2-f(1-x)^2,\\ f(0)=f(x+(-x))=f(x)^2+f(1-x)^2\end{cases}$，代入 $x=\dfrac{1}{3}$ 得 $\begin{cases}f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{1}{3}\right)^2-f\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\\ f\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+f\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=1\end{cases}$，解

得 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ （因当 $0<x<1$ 时 $f(x)>0$）

故原式 $=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$

$\forall x \in D, x \neq 0$ 有 $\frac{x}{x} \in D$ 即 $1 \in D$ $\because D$关于原点对称 $\therefore -1 \in D$

(1) $f(1) = f(1) - f(1) = 0$

$f(-1) = f(1) - f(-1)$ $\therefore f(-1) = 0$

$\forall x \in D$ $f(-x) = f(x) - f(-1) = f(x)$

$\therefore f(x)$是偶函数

(2) 先证明 若 $c(\neq 1, 0,\ c>0) \in D$ 则 $c^k \in D, (k \in Z)$

$\because 1 \in D$ $\therefore \frac{1}{c} \in D$ $\therefore \frac{\frac{1}{c}}{c} = \frac{1}{c^2} \in D, \cdots\cdots$ $\frac{1}{c^k} \in D, (k \in N^+)$

$\therefore c^k = \frac{1}{c^k} \in D$ $\therefore c^k \in D, (k \in Z)$

设 β："$f(x)>0$，对 $\forall x \in D \cap (1, +\infty)$"成立

取反例 $D = \{y \mid y = 3^k$ 或 $y = -3^k,\ k \in Z\}$

则 D关于除法封闭 即 $\forall \pm 3^{t_1}, \pm 3^{t_2} \in D$ 有 $\frac{\pm 3^{t_1}}{\pm 3^{t_2}} \in D$

取 $f(x) = \ln|x|$ 则 $f(\frac{x_1}{x_2}) = \ln|x_1| - \ln|x_2| = f(x_1) - f(x_2)$

符合 β，但 $2 \notin D$ $\therefore \alpha$ 不成立

设 α："$f(2)>0, 2 \in D$"成立

取反例 $D = \{y \mid y = \frac{\pm 2^k}{3^p},\ k \in Z, p \in Z\}$

则D关于除法封闭，即 $\forall \pm\frac{2^{k_1}}{3^{p_1}}, \pm\frac{2^{k_2}}{3^{p_2}}$ 有 $\frac{\pm\frac{2^{k_1}}{3^{p_1}}}{\pm\frac{2^{k_2}}{3^{p_2}}} = \pm\frac{2^{k_1-k_2}}{3^{p_1-p_2}} \in D$

设 $f(2) = 1$，$f(3) = -1$

~~则设多~~ 取 $f(x)$ 使 $f(\frac{2^k}{3^m}) = k+m$

$f(-\frac{2^k}{3^m}) = k+m$

$\forall x_1, x_2 \in D$，设 $x_1 = \pm\frac{2^{k_1}}{3^{m_1}}$，$x_2 = \pm\frac{2^{k_2}}{3^{m_2}}$

$f(\frac{x_1}{x_2}) = f(\pm\frac{2^{k_1-k_2}}{3^{m_1-m_2}}) = f(\frac{2^{k_1-k_2}}{3^{m_1-m_2}}) = (k_1-k_2)+(m_1-m_2) = f(x_1) - f(x_2)$

$\therefore f\left(\frac{1}{-1}\right)=f(1)-f(-1)$

$\therefore f(-1)=0$

$\therefore f\left(\frac{x_1}{-1}\right)=f(x_1)-f(-1)$

$\therefore f(-x_1)=f(x_1)$

$\therefore \boxed{f(x)\text{为偶函数}}$

21、已知定义在R上的偶函数$y=f(x)$满足：①$y=f(x)$不是常值函数；②对任意$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，总有$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)-f(1-x_1)f(1-x_2)$.

(1) 求$f(1)$和$f(0)$；(2) 证明：对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x+4)=f(x)$；

(3) 若当$0<x<1$时总有$f(x)>0$，求$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\ldots+f\left(\frac{2026}{3}\right)$的值.

解：(1) 分别代入 $(x_1,x_2)=(0,0)$ 与 $(1,0)$

有 $\begin{cases} f(0)=f(0)^2-f(1)^2 \\ f(1)=f(1)f(0)-f(1)f(0)=0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} f(1)=0 \\ f(0)=f(0)^2 \end{cases}$

① $f(0)=0$

② $f(x_1+0)=f(x_1)\underbrace{f(0)}_{=0}-f(1)f(1-x_1)$

$\therefore f(x)$为常值函数，矛盾

$\therefore \boxed{\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=0 \end{cases}}$

(2) $f(2)=f(1+1)=f(1)^2-f(0)^2=-1$

$f(4)=f(2+2)=f(2)^2-f(-1)^2=f(2)^2-f(1)^2=1$

$f(3)=f(1+2)=f(1)f(2)-f(0)f(1)=0$

$\therefore f(x+4)=f(x)f(4)-f(3)f(1-x)$

$=f(x)$

易证

(3) 易知 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　$f\left(\frac{7}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$　$f\left(\frac{8}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{3}{3}\right)=0$　$f\left(\frac{9}{3}\right)=0$

$f\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}$　$f\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$f\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{6}{3}\right)=-1$　$f\left(\frac{12}{3}\right)=1$

$\therefore \sum_{i=1}^{12} f\left(\frac{i}{3}\right)=0$

而$f(x)$以4为周期

$\therefore$原式$=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}-1}$

21.

（1）由已知，$\forall\, \mathrm{x}_1, x_2 \in \mathbf{R}$

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)-f(1-x_1)f(1-x_2).$$

令$x_1=1, x_2=0$得$f(1)=f(1)f(0)-f(0)f(1)=0$.

令$x_1=0, x_2=0$得$f(0)=\left(f(0)\right)^2-\left(f(1)\right)^2=\left(f(0)\right)^2$，解得$f(0)=0$或$1$.

若$f(0)=0$，则$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)-f(1-x)f(1)=0$. 这与条件“$f$不是常值函数”矛盾！因此$f(0)=1$.

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+1)=f(x)f(1)-f(1-x)f(0)=-f(1-x)$.

将上式中的x换成$-x-1$，得$f(-x)=-f(2+x)$.

又因为f是偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，因此$f(x)=-f(2+x)$.

将上式中的x换成$x+2$，得$f(x+2)=-f(x+4)$. 因此$f(x)=-f(x+2)=f(x+4)$.

(3)令$x_1=\frac{1}{3}, x_2=-\frac{1}{3}$，得$1=f(0)=f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(-\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right)f\left(\frac{4}{3}\right)$.

因为$f\left(-\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right), f\left(\frac{4}{3}\right)=-f(\frac{2}{3})$,所以

$$\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2+\left[f\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2=1.$$

再令$x_1=x_2=\frac{1}{3}$得

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left[f\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2-\left[f\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2.$$

解得$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$f(x)$以 4 为周期，所以

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{2026}{3}\right)=\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{2028}{3}\right)\right]-f\left(\frac{2027}{3}\right)-f\left(\frac{2026}{3}\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{12}{3}\right)\right]+\left[f\left(\frac{13}{3}\right)+f\left(\frac{14}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{24}{3}\right)\right]+\cdots$$

$$+\left[f\left(\frac{2017}{3}\right)+f\left(\frac{2018}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{2028}{3}\right)\right]-f\left(\frac{2027}{3}\right)-f\left(\frac{2026}{3}\right)$$

$$=169\times\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{12}{3}\right)\right]-f\left(-\frac{1}{3}\right)-f(0).$$

又因为$f(x)=-f(2+x)$，所以

$$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{12}{3}\right)=\left[f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{7}{3}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{8}{3}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{6}{3}\right)+f\left(\frac{12}{3}\right)\right]$$

$$=0.$$

所以$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{2026}{3}\right)=-f\left(-\frac{1}{3}\right)-f(0)=-f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)=-\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.