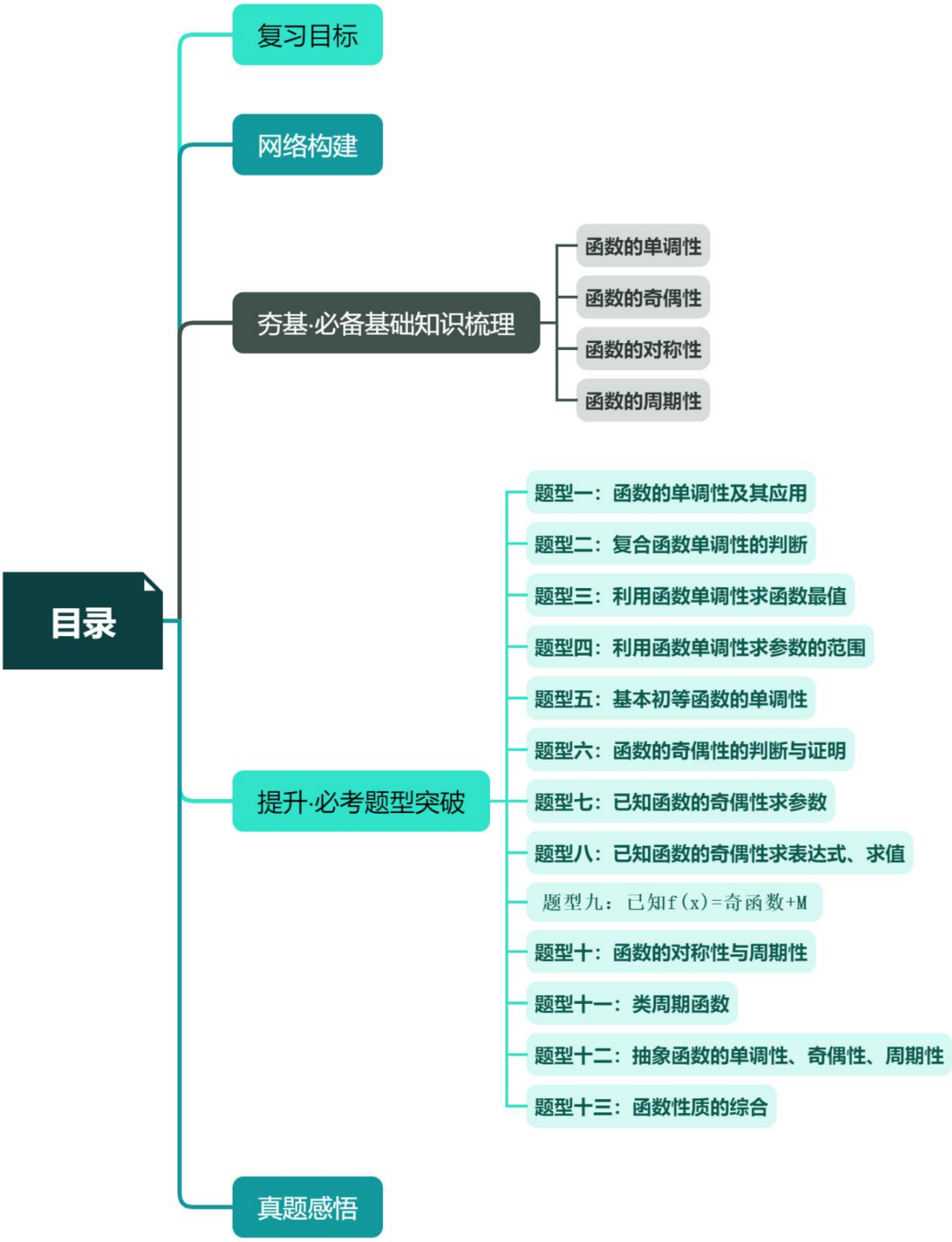
第 02 讲 函数的性质：单调性、奇偶性、周期性、对称性

目录



考情分析

考点要求	考题统计	考情分析
（1）借助函数图像，会用符号语言表达函数的单调性、最大值、最小值，理解它们的作用和实际意义． （2）结合具体函数，了解奇偶性的概念和几何意义． （3）结合三角函数，了解周期性的概念和几何意义．	2022 年 *II* 卷第 8 题，5 分 2022 年 *I* 卷第 12 题，5 分 2021 年 *II* 卷第 8 题，5 分 2021 年甲卷第 12 题，5 分	从近几年高考命题来看，本节是高考的一个重点，函数的单调性、奇偶性、对称性、周期性是高考的必考内容，重点关注周期性、对称性、奇偶性结合在一起，与函数图像、函数零点和不等式相结合进行考查．

网络构建

夯基·必备基础知识梳理

1、函数的单调性

（1）单调函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，区间 $D\subseteq A$：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1，x_2 当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

①属于定义域 A 内某个区间上；

②任意两个自变量 x_1，x_2 且 $x_1<x_2$；

③都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$；

④图象特征：在单调区间上增函数的图象从左向右是上升的，减函数的图象从左向右是下降的.

（2）单调性与单调区间

①单调区间的定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性，D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间.

②函数的单调性是函数在某个区间上的性质.

（3）复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“同增异减”，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减（增）函数，复合函数是减函数.

2、函数的奇偶性

函数奇偶性的定义及图象特点

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数	关于 y 轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数	关于原点对称

判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系时，也可以使用如下结论：如果 $f(-x)-f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq 0)$，则函数 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1\,(f(x)\neq 0)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数.

注意：由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 x，$-x$

也在定义域内(即定义域关于原点对称).

3、函数的对称性

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数，则函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称. $\Longleftrightarrow f(-x+a)=f(x+a)$,

(2)若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数，则函数 $y=f(x)$ 关于点 $(a，0)$ 对称. $\Longleftrightarrow f(-x+a)=-f(x+a)$

(3)若 $f(x)=f(2a-x)$，则函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称. $\Longleftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=0$

(4)若 $f(x)+f(2a-x)=2b$，则函数 $f(x)$ 关于点 $(a，b)$ 对称.

4、函数的周期性

（1）周期函数：

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 为这个函数的周期.

（2）最小正周期：

如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么称这个最小整数叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

【解题方法总结】

1、单调性技巧

（1）证明函数单调性的步骤

①取值：设 x_1， x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量，且 $x_1<x_2$；

②变形：作差变形(变形方法：因式分解、配方、有理化等)或作商变形；

③定号：判断差的正负或商与1的大小关系；

④得出结论.

（2）函数单调性的判断方法

①定义法：根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断.

②图象法：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

③直接法：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

（3）记住几条常用的结论：

①若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

②若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增(或减)函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增(或减)函数；

③若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数， $\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；

④若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数， $\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数.

2、奇偶性技巧

(1)函数具有奇偶性的必要条件是其定义域关于原点对称.

(2)奇偶函数的图象特征.

函数 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称.

(3)若奇函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义，则有 $f(0)=0$；

偶函数 $y=f(x)$ 必满足 $f(x)=f(|x|)$.

(4)偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相反；奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相同.

(5)若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数的和的形式.记 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$.

(6)运算函数的奇偶性规律：运算函数是指两个（或多个）函数式通过加、减、乘、除四则运算所得的函数，如 $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\times g(x), f(x)\div g(x)$.

对于运算函数有如下结论：奇 ± 奇=奇；偶 ± 偶=偶；奇 ± 偶=非奇非偶；

奇 ×(÷) 奇=偶；奇 ×(÷) 偶=奇；偶 ×(÷) 偶=偶.

(7)复合函数 $y=f[g(x)]$ 的奇偶性原来：内偶则偶，两奇为奇.

(8)常见奇偶性函数模型

奇函数：①函数 $f(x)=m(\frac{a^x+1}{a^x-1})$ $(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m(\frac{a^x-1}{a^x+1})$.

②函数 $f(x)=\pm(a^x-a^{-x})$.

③函数 $f(x)=\log_a\frac{x+m}{x-m}=\log_a(1+\frac{2m}{x-m})$ 或函数 $f(x)=\log_a\frac{x-m}{x+m}=\log_a(1-\frac{2m}{x+m})$

④函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 或函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$.

注意：关于①式，可以写成函数 $f(x)=m+\frac{2m}{a^x-1}(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m-\frac{2m}{a^x+1}(m\in R)$.

偶函数：①函数 $f(x)=\pm(a^x+a^{-x})$.

②函数 $f(x)=\log_a(a^{mx}+1)-\frac{mx}{2}$. $f(-x)=\log_a(a^{-mx}+1)+\frac{m}{2}x=\log_a(a^{mx}+1)-\frac{m}{2}x$

$\Leftrightarrow \log_a(\frac{a^{-mx}+1}{a^{mx}+1})=-mx$

$=\log_a(a^{\frac{m}{2}x}+a^{-\frac{m}{2}x})$

$\Leftrightarrow a^{-mx}=\frac{a^{-mx}+1}{a^{mx}+1}$

$\Leftrightarrow 1+a^{-mx}=a^{-mx}+1$

③函数 $f(|x|)$ 类型的一切函数.

④常数函数

3、周期性技巧

函数式满足关系（$x \in R$）	周期
$f(x+T)=f(x)$	T
$f(x+T)=-f(x)$	$2T$
$f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)};f(x+T)=-\dfrac{1}{f(x)}$	$2T$
$f(x+T)=f(x-T)$	$2T$
$f(x+T)=-f(x-T)$	$4T$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(b+x)=f(b-x)\end{cases}$	$2(b-a)$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(x)\text{为偶函数}\end{cases}$	$2a$
$\begin{cases}f(a+x)=-f(a-x)\\f(b+x)=-f(b-x)\end{cases}$	$2(b-a)$
$\begin{cases}f(a+x)=-f(a-x)\\f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$	$2a$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(b+x)=-f(b-x)\end{cases}$	$4(b-a)$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$	$4a$
$\begin{cases}f(a+x)=-f(a-x)\\f(x)\text{为偶函数}\end{cases}$	$4a$

→ 关于 $x=a$，$x=b$ 同时对称

关于 $x=a$　$x=0$　- -

$f(a+x)-f(b+x)=f(a-x)-f(b-x)$

令 $F(x)=f(a+x)-f(b+x)$，则 $F(x)=-F(x)$

∴ $F(x)$ 为奇函数

4、函数的的对称性与周期性的关系

（1）若函数 $y=f(x)$ 有两条对称轴 $x=a$，$x=b(a<b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(b-a)$；

（2）若函数 $y=f(x)$ 的图象有两个对称中心 $(a,c),(b,c)(a<b)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(b-a)$；

~~$f(a+x)+f(a-x)=2c$，$f(b+x)+f(b-x)=2c$ ∴ $f(a+x)+f(a-x)=f(b+x)+f(b-x)$~~

（3）若函数 $y=f(x)$ 有一条对称轴 $x=a$ 和一个对称中心 $(b,0)(a<b)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=4(b-a)$．

(2) $f(2a+x)+f(-x)=2c=f(2b+x)+f(-x) \Rightarrow f(2a+x)=f(2b+x)$ ∴ ——

5、对称性技巧

（1）若函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(a+x)=f(a-x)$．

（2）若函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称，则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$．

（3）函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于 y 轴对称，函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于原点对称．

同函数，　不同函数之间

提升·必考题型归纳

【典例例题】

题型一：函数的单调性及其应用

例 1． 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，若对于任意两个不相等的实数 x_1，x_2，总有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ 成立，

则函数 $f\left(x\right)$ 一定是（　）

A．奇函数　　B．偶函数　　C．增函数　　D．减函数

【答案】C

【解析】对于任意两个不相等的实数 x_1， x_2，总有 $\dfrac{f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}>0$ 成立，

等价于对于任意两个不相等的实数 $x_1<x_2$，总有 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

所以函数 $f\left(x\right)$ 一定是增函数.

故选：C

例 2．若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 对任意两个不相等的实数 a，b，总有 $\dfrac{f(a)\text{-}f(b)}{a\text{-}b}>0$ 成立，则必有（　）

A．$f(x)$ 在 R 上是增函数　　B．$f(x)$ 在 R 上是减函数

C．函数 $f(x)$ 先增后减　　D．函数 $f(x)$ 先减后增

【答案】A

【解析】由 $\dfrac{f(a)\text{-}f(b)}{a\text{-}b}>0$ 知 $f(a)\text{-}f(b)$ 与 $a\text{-}b$ 同号，即当 $a<b$ 时，$f(a)<f(b)$，或当 $a>b$ 时，$f(a)>f(b)$，所以 $f(x)$ 在 R 上是增函数.

故选：A.

例 3．下列函数中，满足“$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$”的单调递增函数是

A．$f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}}$　　B．$f\left(x\right)=x^3$

C．$f\left(x\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　D．$f\left(x\right)=3^x$

【答案】D

【解析】由于 $a^x\cdot a^r=a^{x+r}$，所以指数函数 $f(x)=a^x$ 满足 $f(x+y)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$，且当 $a>1$ 时单调递增，$0<x<1$ 时单调递减，所以 $f\left(x\right)=3^x$ 满足题意，故选 D.

考点：幂函数、指数函数的单调性.

变式 1．函数 $f\left(x\right)=\left|x^2-3x+2\right|$ 的单调递增区间是（　）

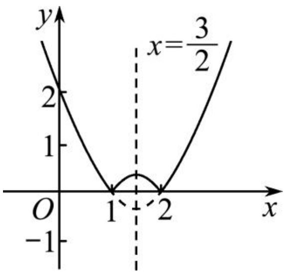
A．$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　B．$\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$ 和 $\left[2,+\infty\right)$

C．$\left(-\infty,1\right]$ 和 $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$　　D．$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)$ 和 $\left[2,+\infty\right)$

【答案】B

【解析】$y=\left|x^2-3x+2\right|=\begin{cases}x^2-3x+2, x\le 1\\ -x^2+3x-2, 1<x<2\\ x^2-3x+2, x\ge 2\end{cases}$

如图所示：



函数的单调递增区间是$\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$和$[2,+\infty)$.

故选：B.

变式 2.（江苏省泰州市海陵区 2022-2023 学年高三上学期期中数学试题）已知函数$f(x)=-\dfrac{2x}{x+1}, x\in(0,+\infty)$.

(1)判断函数$f(x)$的单调性，并利用定义证明；

(2)若$f(2m-1)>f(1-m)$，求实数m的取值范围.

【解析】（1）$f(x)$在$(0,+\infty)$上递减，理由如下：

任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，则

$f(x_2)-f(x_1)=-\dfrac{2x_2}{x_2+1}+\dfrac{2x_1}{x_1+1}$

$=\dfrac{2x_1(x_2+1)-2x_2(x_1+1)}{(x_2+1)(x_1+1)}$

$=\dfrac{2(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_1+1)}$,

因为$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

所以$x_1-x_2<0$，$(x_2+1)(x_1+1)>0$，

所以$f(x_2)-f(x_1)<0$，即$f(x_2)<f(x_1)$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上递减；

（2）由（1）可知$f(x)$在$(0,+\infty)$上递减，

所以由$f(2m-1)>f(1-m)$，得

$\begin{cases}2m-1>0\\ 1-m>0\\ 2m-1<1-m\end{cases}$，解得$\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{2}{3}$,

所以实数 m 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$.

变式 3．（2023·全国·高三专题练习）设 $a>0$， $a\neq 1$，证明：函数 $\varphi(x)=\dfrac{a^x-1}{x}$ 是 x 的增函数 $(x>0)$.

【解析】证明：当 $x_2>x_1>0$，在伯努利不等式定理 3 中取 $1+x=a^{x_2}$， $r=\dfrac{x_1}{x_2},0<r<1$,

则有 $(1+x)^r\leq 1+rx$，即 $\left(a^{x_2}\right)^{\frac{x_1}{x_2}}\leq 1+\dfrac{x_1}{x_2}\left(a^{x_2}-1\right)$,

则有 $a^{x_1}<1+\dfrac{x_1}{x_2}\left(a^{x_2}-1\right)$，从 $\dfrac{a_{x_2}-1}{x_2}>\dfrac{a_{x_1}-1}{x_1}$,

即 $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$.

所以当 $x>0$ 时， $\varphi(x)$ 是 x 的增函数.

变式 4．（2023·上海静安·高三校考期中）已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x}{a}-\dfrac{a}{2^x}(a>0)$，且 $f(0)=0$.

(1)求 a 的值，并指出函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(2)在（1）的条件下，运用函数单调性的定义，证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

【解析】（1）因为 $f(0)=\dfrac{1}{a}-a=0$，又 $a>0$，所以 $a=1$,

所以 $f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}$， $x\in(-\infty,+\infty)$,

此时 $f(-x)=\dfrac{1}{2^x}-2^x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数；

（2）任取 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=2^{x_1}-\dfrac{1}{2^{x_1}}-2^{x_2}+\dfrac{1}{2^{x_2}}$

$=(2^{x_1}-2^{x_2})+\dfrac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}}=(2^{x_1}-2^{x_2})(1+\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}})=2^{x_1}(1+\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}})(1-2^{x_2-x_1})$,

因为 $x_1<x_2$,所以 $2^{x_2-x_1}>1$,所以 $1-2^{x_2-x_1}<0$, $2^{x_1}(1+\dfrac{1}{2^{x_1+x_2}})>0$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 即 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数.

【解题总结】

函数单调性的判断方法

①定义法：根据增函数、减函数的定义，按照“取值—变形—判断符号—下结论”进行判断.

②图象法：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

③直接法：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

题型二：复合函数单调性的判断

例 4． 函数 $y=\sqrt{x^2+3x}$ 的单调递减区间为（　）

A．$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$　　B．$\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$

C．$[0,+\infty)$　　D．$(-\infty,-3]$

【答案】D

【解析】由题意，得 $x^2+3x\geq 0$，解得 $x\leq -3$ 或 $x\geq 0$，

所以函数 $y=\sqrt{x^2+3x}$ 的定义域为 $(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$，

令 $t=x^2+3x$，则 $t=x^2+3x$ 开口向上，对称轴为 $x=-\frac{3}{2}$，

所以 $t=x^2+3x$ 在 $(-\infty,-3]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

而 $y=\sqrt{t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $y=\sqrt{x^2+3x}$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-3]$.

故选：D.

例 5．（陕西省宝鸡市金台区 2022-2023 学年高三下学期期末数学试题）函数 $y=\log_2(2x-x^2)$ 的单调递减区间为（　）

A．$(1,2)$　　B．$(1,2]$

C．$(0,1)$　　D．$[0,1)$

【答案】A

【解析】由 $2x-x^2>0$，得 $0<x<2$，

令 $t=2x-x^2$，则 $y=\log_2 t$，

$t=2x-x^2$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,2)$ 上递减，

因为 $y=\log_2 t$ 在定义域内为增函数，

所以 $y=\log_2(2x-x^2)$ 的单调递减区间为 $(1,2)$，

故选：A

例 6．（陕西省榆林市 2022-2023 学年高三下学期阶段性测试）函数 $y=\lg\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)$ 的单调递增区间为（　）

A．$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)(k\in Z)$　　B．$\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{11}{6}\pi\right)(k\in Z)$

C．$\left(2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi\right)(k\in Z)$　　D．$\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{6}\right)(k\in Z)$

【答案】C

【解析】根据题意，$2\cos x-\sqrt{3}>0$，解得，$2k\pi-\frac{\pi}{6}<x<2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z$

又函数 $y=lgx$ 在定义域内为单调增函数，

且函数 $y=2\cos x-\sqrt{3}$ 在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi\right),k\in Z$ 内为单调增函数

根据复合函数的单调性可知：

$y=lg\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)$ 的单调增区间为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi\right),k\in Z$

选项 C 正确，选项 ABD 错误.

故选：C.

【解题总结】

讨论复合函数 $y=f[g(x)]$ 的单调性时要注意：既要把握复合过程，又要掌握基本函数的单调性．一般需要先求定义域，再把复杂的函数正确地分解为两个简单的初等函数的复合，然后分别判断它们的单调性，再用复合法则，复合法则如下：

1、若 $u=g(x)$，$y=f(u)$ 在所讨论的区间上都是增函数或都是减函数，则 $y=f[g(x)]$ 为增函数；

2、若 $u=g(x)$，$y=f(u)$ 在所讨论的区间上一个是增函数，另一个是减函数，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数．列表如下：

$u=g(x)$	$y=f(u)$	$y=f[g(x)]$
增	增	增
增	减	减
减	增	减
减	减	增

复合函数单调性可简记为“同增异减”，即内外函数的单性相同时递增；单性相异时递减．

题型三：利用函数单调性求函数最值

例 7.（河南省 2023 届高三下学期仿真模拟考试数学试题）已知函数 $f\left(x\right)$ 为定义在 **R** 上的单调函数，且 $f\left(f\left(x\right)-2^x-2x\right)=10$，则 $f\left(x\right)$ 在 $[-2,2]$ 上的值域为______.

【答案】$\left[-\frac{7}{4},10\right]$

【解析】因为 $f\left(x\right)$ 为定义在 **R** 上的单调函数，

所以存在唯一的 $t\in R$，使得 $f\left(t\right)=10$，

则 $f\left(x\right)-2^x-2x=t$，$f\left(t\right)-2^t-2t=t$，即 $f\left(t\right)=2^t+3t=10$，

因为函数 $y=2^t+3t$ 为增函数，且 $2^2+3\times2=10$，所以 $t=2$，

$f\left(x\right)=2^{x}+2x+2$.

易知$f\left(x\right)$在$\left[-2,2\right]$上为增函数，且$f\left(-2\right)=-\frac{7}{4}$，$f\left(2\right)=10$，

则$f\left(x\right)$在$\left[-2,2\right]$上的值域为$\left[-\frac{7}{4},10\right]$.

故答案为：$\left[-\frac{7}{4},10\right]$.

例 8.（上海市静安区 2023 届高三二模数学试题）已知函数$f\left(x\right)=\frac{a^{x}}{2^{x}+1}(a>0)$为偶函数，则函数$f\left(x\right)$的值域为____________.

【答案】$\left(0,\frac{1}{2}\right]$

【解析】$\because$函数$f\left(x\right)=\frac{a^{x}}{2^{x}+1}$（$a>0$）是偶函数，

$\therefore f\left(-x\right)=f\left(x\right)\Rightarrow\frac{a^{-x}}{2^{-x}+1}=\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^{x}}{2^{x}+1}=\frac{a^{x}}{2^{x}+1}\Rightarrow\frac{2}{a}=a\Rightarrow a=\sqrt{2}$，

$\therefore f\left(x\right)=\frac{(\sqrt{2})^{x}}{2^{x}+1}$，易得$f\left(x\right)>0$，

设$t=(\sqrt{2})^{x}(t>0)$，

则$y=\frac{t}{t^{2}+1}=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\le\frac{1}{2}$，

当且仅当$t=\frac{1}{t}$即$t=1$时，等号成立，

所以$0<t\le\frac{1}{2}$，

所以函数$f\left(x\right)$的值域为$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

故答案为：$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

例 9.（河南省部分学校大联考 2022-2023 学年高三下学期 3 月质量检测）已知函数$f\left(x\right)=a^{x}+3x+1(a>0$且$a\neq1)$，若曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线与直线$x+2y-1=0$垂直，则$f\left(x\right)$在$\left[-1,2\right]$上的最大值为__________.

【答案】$7+\frac{1}{\mathrm{e}^{2}}$

【解析】由题意得 $f'(x)=a^x\ln a+3$，所以 $f'(0)=\ln a+3$，

因为切线与直线 $x+2y-1=0$ 垂直，而 $x+2y-1=0$ 的斜率为 $-\frac{1}{2}$，

所以切线斜率为 2，即 $\ln a+3=2$，解得 $a=\mathrm{e}^{-1}$，

所以 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}+3x+1$，且 $f'(x)=-\mathrm{e}^{-x}+3$，

显然 $f'(x)$ 是增函数，

当 $x\in[-1,2]$ 时，$f'(x)\geq f'(-1)=3-\mathrm{e}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上单调递增，故 $f(x)_{\max}=f(2)=7+\frac{1}{\mathrm{e}^2}$.

故答案为：$7+\frac{1}{\mathrm{e}^2}$

变式 5.（新疆乌鲁木齐市第八中学 2023 届高三上学期第一次月考）若函数 $f(x)=\frac{2x+m}{x+1}$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为3，则实数 m=_______.

【答案】3

【解析】∵函数 $f(x)=\frac{2x+m}{x+1}=2+\frac{m-2}{x+1}$，

由复合函数的单调性知，

当 $m>2$ 时，$f(x)=\frac{2x+m}{x+1}$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，最大值为 $f(0)=m=3$；

当 $m<2$ 时，$f(x)=\frac{2x+m}{x+1}$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，最大值为 $f(1)=\frac{2+m}{2}=3$，

即 m=4，显然 m=4 不合题意，

故实数 m=3.

故答案为：3

【解题总结】

利用函数单调性求函数最值时应先判断函数的单调性，再求最值．常用到下面的结论：

1、如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a，b]$ 上是增函数，在区间 $[b，c)$ 上是减函数，则函数 $y=f(x)(x\in a，c)$ 在 $x=b$ 处有最大值 $f(b)$．

2、如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a，b]$ 上是减函数，在区间 $[b，c)$ 上是增函数，则函数 $y=f(x)(x\in a，c)$ 在 $x=b$ 处有最小值 $f(b)$．

3、若函数 $y=f(x)$ 在 $[a，b]$ 上是严格单调函数，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a，b]$ 上一定有最大、最小值．

4、若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上是单调递增函数，则 $y=f(x)$ 的最大值是 $f(b)$，最小值是 $f(a)$．

5、若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a，b]$ 上是单调递减函数，则 $y=f(x)$ 的最大值是 $f(a)$，最小值是 $f(b)$．

题型四：利用函数单调性求参数的范围

例 10. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(3a-1\right)x+4a(x<1)\\ \dfrac{a}{x}\left(x\geq 1\right)\end{cases}$，满足对任意的实数 x_1， x_2 且 $x_1\neq x_2$， 都有 $\left[f(x_1)-f(x_2)\right](x_1-x_2)<0$，则实数 a 的取值范围为（　）

A. $\left[\dfrac{1}{7},1\right)$　　B. $\left[0,\dfrac{1}{3}\right)$　　C. $\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$　　D. $\left[\dfrac{1}{6},1\right)$

【答案】C

【解析】对任意的实数 $x_1\neq x_2$， 都有 $\left[f(x_1)-f(x_2)\right](x_1-x_2)<0$,即 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$ 成立，

可得函数图像上任意两点连线的斜率小于 0，说明函数是减函数；

可得：$\begin{cases}3a-1<0\\ a>0\\ 3a-1+4a\geq a\end{cases}$，

解得 $a\in\left[\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{3}\right)$，

故选：C

例 11.（吉林省松原市 2022-2023 学年高三上学期第一次月考）若函数 $f\left(x\right)=\log_a\left(x^3-ax\right)$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）在区间 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 内单调递增，则 a 的取值范围是（　）

A. $\left[\dfrac{1}{4},1\right)$　　B. $\left[\dfrac{3}{4},1\right)$　　C. $\left(\dfrac{9}{4},+\infty\right)$　　D. $\left(1,\dfrac{9}{4}\right)$

【答案】B

【解析】函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)(a>0,a\neq 1)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 内有意义，

则 $(-\dfrac{1}{2})^3+\dfrac{1}{2}a\geqslant 0,\therefore a\geqslant\dfrac{1}{4}$，

设 $t=x^3-ax$,则 $y=\log_a t$， $t'=3x^2-a$

(1) 当 $a>1$ 时， $y=\log_a t$ 是增函数，

要使函数 $f(x)=\log_a(x^3-ax)(a>0,a\neq 1)$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 内单调递增，

需使 $t=x^3-ax$ 在区间 $(-\dfrac{1}{2},0)$ 内内单调递增，

则需使 $t'=3x^2-a\geq 0$，对任意 $x\in(-\dfrac{1}{2},0)$ 恒成立 ，即 $a\leq 3x^2$ 对任意 $x\in(-\dfrac{1}{2},0)$ 恒成立；

因为$x\in(-\frac{1}{2},0)$时，$0<3x^2<\frac{3}{4}$所以$a<0$与$a>\frac{1}{4}$矛盾，此时不成立.

（2）当$0<a<1$时，$y=\log_a t$是减函数，

要使函数$f(x)=log_a(x^3-ax)(a>0,a\neq 1)$在区间$(-\frac{1}{2},0)$内单调递增，

需使$t=x^3-ax$在区间$(-\frac{1}{2},0)$内内单调递减，

则需使$t'=3x^2-a\leq 0$ 对任意$x\in(-\frac{1}{2},0)$恒成立，

即$a\geq 3x^2$对任意$x\in(-\frac{1}{2},0)$恒成立，

因为$x\in(-\frac{1}{2},0)$时,$0<3x^2<\frac{3}{4}$，

所以$a\geqslant\frac{3}{4}$，

又$a<1$，所以$\frac{3}{4}\leqslant a<1$.

综上，a的取值范围是$\frac{3}{4}\leqslant a<1$

故选：B

例12.（四川省广安市2022-2023学年高三上学期期末数学试题）已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-9,x\leq 1\\ \frac{a}{x},x>1\end{cases}$在R上单调递增，则实数$a$的取值范围为（　）

A．$[-5,0)$　　　　B．$(-\infty,-2)$

C．$[-5,-2]$　　　　D．$(-\infty,0)$

【答案】C

【解析】由题意，$x\in\mathbf{R}$，

在$f(x)=\begin{cases}-x^2-ax-9,x\leq 1\\ \frac{a}{x},x>1\end{cases}$中，函数单调递增，

$\therefore\begin{cases}-\frac{-a}{2\times(-1)}\geq 1\\ a<0\\ -1-a-9\leq\frac{a}{1}\end{cases}$，解得：$-5\leq a\leq -2$，

故选：C.

变式 6.（江西省临川第一中学 2023 届高三上学期期末考试数学（理）试题）已知函数 $f(x)=\log_a\left(x^2-ax+3\right)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(0,1)$　　　　B．$(1,4)$

C．$(0,1)\cup(1,4)$　　　　D．$[2,4)$

【答案】D

【解析】函数 $f(x)=\log_a\left(x^2-ax+3\right)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，

当 $0<a<1$ 时，$x^2-ax+3=(x-\frac{a}{2})^2+3-\frac{a^2}{4}\geq 3-\frac{a^2}{4}>0$ 恒成立，

而函数 $u=x^2-ax+3$ 在区间 $[0,1]$ 上不单调，因此 $0<a<1$，不符合题意，

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，于是得函数 $u=x^2-ax+3$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递减，

因此 $\frac{a}{2}\geq 1$，并且 $1^2-a\cdot 1+3>0$，解得 $2\leq a<4$，

所以实数 a 的取值范围是 $[2,4)$.

故选：D

变式 7.（天津市复兴中学 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题）已知函数 $f(x)=x^2+2kx-5$ 在 $[-2,4]$ 上具有单调性，则实数 k 的取值范围为（　）.

A．$k\leq -4$　　　　B．$k\geq 2$

C．$k\leq -4$ 或 $k\geq 2$　　　　D．$k<-4$ 或 $k>2$

【答案】C

【解析】函数 $f(x)=x^2+2kx-5$ 的对称轴为 $x=-k$，

因为函数 $f(x)=x^2+2kx-5$ 在 $[-2,4]$ 上具有单调性，

所以 $-k\geq 4$ 或 $-k\leq -2$，即 $k\leq -4$ 或 $k\geq 2$.

故选：C

【解题总结】

若已知函数的单调性，求参数 a 的取值范围问题，可利用函数单调性，先列出关于参数 a 的不等式，利用下面的结论求解.

1、若 $a>f(x)$ 在 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a>f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最大值.

2、若 $a<f(x)$ 在 $[m,n]$ 上恒成立 $\Leftrightarrow a<f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最小值.

题型五：基本初等函数的单调性

例 13.（2023·天津河西·天津市新华中学校考模拟预测）已知函数 $y=f(x+2)$ 是 R 上的偶函数，对任意 x_1，

$x_2 \in [2,+\infty)$，且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立．若 $a=f(\log_3 18)$，$b=f\left(\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}\right)$，$c=f\left(e^{\frac{\ln 10}{2}}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是（　）

A．$b<a<c$　　B．$a<b<c$　　C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$

【答案】A

【解析】因为函数 $y=f(x+2)$ 是 **R** 上的偶函数，

所以函数 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=2$，

又因为对任意 x_1，$x_2 \in [2,+\infty)$，且 $x_1 \neq x_2$ 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 成立．

所以函数 $y=f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

而 $3=\log_3 27>\log_3 18>\log_3 9=2$，$\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}=\ln e^2-\ln\sqrt{2}=2-\ln\sqrt{2}<2$，$e^{\frac{\ln 10}{2}}=e^{\ln\sqrt{10}}=\sqrt{10}>3$，

所以 $e^{\frac{\ln 10}{2}}>\log_3 18>2>\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}$，

所以 $c>a$，

因为函数 $y=f(x)$ 的对称轴为 $x=2$，

所以 $b=f\left(\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}\right)=f\left(4-\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}\right)=f\left(2+\ln\sqrt{2}\right)$，

而 $a=f(\log_3 18)=f(\log_3 9\times 2)=f(2+\log_3 2)$，

因为 $\ln\sqrt{2}<\log_3 2$，

所以 $2<4-\ln\dfrac{e^2}{\sqrt{2}}<\log_3 18<3$，

所以 $b<a$，

所以 $b<a<c$．

故选：A．

例 14．（多选题）（甘肃省庆阳市宁县第一中学 2022-2023 学年高三上学期期中数学试题）已知函数 $f(x)$ 在区间 $[-5,5]$ 上是偶函数，在区间 $[0,5]$ 上是单调函数，且 $f(3)<f(1)$，则（　　）

A．$f(-1)<f(-3)$　　B．$f(0)>f(-1)$

C．$f(-1)<f(1)$　　D．$f(-3)>f(5)$

【答案】BD

【解析】函数 $f(x)$ 在区间 $[0,5]$ 上是单调函数，又 $3>1$，且 $f(3)<f(1)$，

故此函数在区间$\left[0,5\right]$上是减函数.

由已知条件及偶函数性质，知函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-5,0\right]$上是增函数.

对于 A，$-3<-1$，故$f(-3)<f(-1)$，故 A 错误；

对于 B，$0>-1$，故$f\left(0\right)>f\left(-1\right)$，故 B 正确；

对于 C，$f\left(-1\right)=f\left(1\right)$，故 C 错误；

对于 D，$f\left(-3\right)=f\left(3\right)>f\left(5\right)$，故 D 正确.

故选:BD.

例 15．（2023 届北京市朝阳区高三第一次模拟考试数学试题）下列函数中，既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（　）

A．$y=x^3$　　B．$y=-x^2+1$　　C．$y=\log_2 x$　　D．$y=2^{|x|}$

【答案】D

【解析】根据函数的奇偶性和单调性，对四个函数逐一判断可得答案.函数$y=x^3$是奇函数，不符合；

函数$y=-x^2+1$是偶函数，但是在$(0,+\infty)$上单调递减，不符合；

函数$y=\log_2 x$不是偶函数，不符合；

函数$y=2^{|x|}$既是偶函数又在区间$(0,+\infty)$上单调递增，符合.

故选：D

【解题总结】

1、比较函数值大小，应将自变量转化到同一个单调区间内，然后利用函数单调性解决.

2、求复合函数单调区间的一般步骤为：①求函数定义域；②求简单函数单调区间；③求复合函数单调区间(同增异减).

3、利用函数单调性求参数时，通常要把参数视为已知数，依据函数图像或单调性定义，确定函数单调区间，与已知单调区间比较，利用区间端点间关系求参数.同时注意函数定义域的限制，遇到分段函数注意分点左右端点函数值的大小关系.

题型六：函数的奇偶性的判断与证明

例 16．利用图象判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1, x>0\\ x^2+2x-1, x<0\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2+x, x<0,\\ x^2-x,\ \ x>0\end{cases}$

(3) $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$；

(4) $y=\left|\log_2(x+1)\right|$；

(5) $y=x^2-2|x|-1$.

【解析】（1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

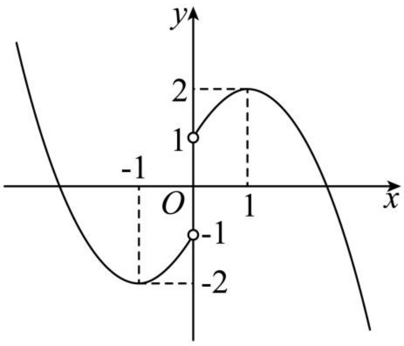
对于函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1, & x>0\\ x^2+2x-1, & x<0\end{cases}$，

当 $x>0, f(x)=-x^2+2x+1$，为二次函数，是一条抛物线，开口向下，对称轴为 $x=1$，

当 $x<0, f(x)=x^2+2x-1$，为二次函数，是一条抛物线，开口向上，对称轴为 $x=-1$，

画出函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+1, & x>0\\ x^2+2x-1, & x<0\end{cases}$ 的图象，如图所示，

函数图象关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 为奇函数；



（2）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

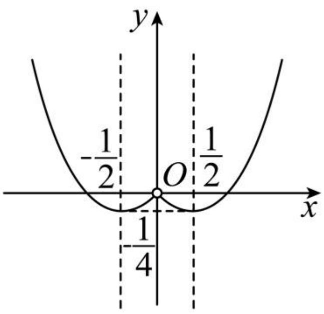
对于函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$，

当 $x<0, f(x)=x^2+x$，为二次函数，是一条抛物线，开口向上，对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，

当 $x>0, f(x)=x^2-x$，为二次函数，是一条抛物线，开口向上，对称轴为 $x=\frac{1}{2}$，

画出函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & x<0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$ 的图象，如图所示，

函数图象关于 y 轴对称，故 $f(x)$ 为偶函数；

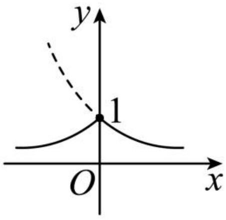


（3）先作出 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象，保留 $y=(\frac{1}{2})^x$ 图象中 $x\geq0$ 的部分，

再作出 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图象中 $x>0$ 部分关于 y 轴的对称部分，

即得 $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$ 的图象，如图实线部分.

由图知 $y=(\frac{1}{2})^{|x|}$ 的图象关于 y 轴对称，所以该函数为偶函数.

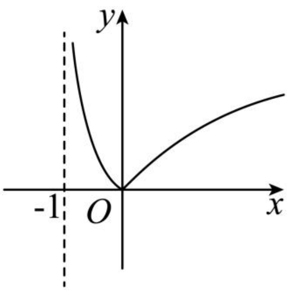


（4）将函数 $y=\log_2 x$ 的图象向左平移一个单位长度，再将 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折上去，

即可得到函数 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象，如图，

由图知 $y=|\log_2(x+1)|$ 的图象既不关于 y 轴对称，也不关于 x 轴对称，

所以该函数为非奇非偶函数；



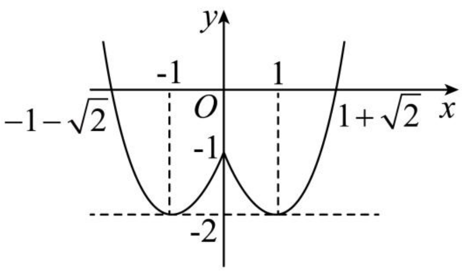
（5）函数 $y=f(x)=x^2-2|x|-1=\begin{cases}x^2-2x-1, x\geq 0\\ x^2+2x-1, x<0\end{cases}$，

当 $x\geq 0, f(x)=x^2-2x-1$，为二次函数，是一条抛物线，开口向上，对称轴为 $x=1$，

当 $x<0, f(x)=x^2+2x-1$，为二次函数，是一条抛物线，开口向上，对称轴为 $x=-1$，

画出函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x-1, & x\geq 0\\ x^2+2x-1, & x<0\end{cases}$ 的图象，如图，

由图知 $y=x^2-2|x|-1$ 的图象关于 y 轴对称，所以该函数为偶函数.



例 17.（2023·北京·高三专题练习）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A. $y=\cos x$　　B. $y=\mathrm{e}^{|x|}$　　C. $y=\lg x$　　D. $y=\frac{1}{x}$

【答案】B

【解析】对于 A，函数 $y=\cos x$ 的定义域为 **R**，且满足 $\cos(-x)=\cos x$，所以其为偶函数，

在 $(0,\pi)$ 上单调递减，在 $(\pi,2\pi)$ 上单调递减，故 A 不符合题意；

对于 B，设 $y=f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$，函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\begin{cases}\mathrm{e}^{x},x\geq 0\\(\frac{1}{\mathrm{e}})^{x},x<0\end{cases}$ 的定义域为 **R**，

且满足 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$ 为偶函数，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}$ 为单调递增函数，故 B 符合题意；

对于 C，函数 $y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，不关于原点对称，

所以函数 $y=\lg x$ 为非奇非偶函数，故 C 不符合题意；

对于 D，设 $y=f(x)=\frac{1}{x}$，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，关于原点对称，

且满足 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 为奇函数，

又函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 D 不符合题意.

故选：B.

例 18．（多选题）（黑龙江省哈尔滨市第五中学校 2022-2023 学年高三下学期开学检测数学试题）设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 **R**，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，则下列结论正确的是（　）

A. $f(x)\cdot g(x)$ 是偶函数　　B. $|f(x)|\cdot g(x)$ 是奇函数

C. $f(x)\cdot|g(x)|$ 是奇函数　　D. $|f(x)\cdot g(x)|$ 是偶函数

【答案】CD

【解析】因为函数 $f(x),g(x)$ 的定义域都为 **R**，

所以各选项中函数的定义域也为 **R**，关于原点对称，

因为 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，

所以 $f(-x)=-f(x),g(-x)=g(x)$，

对于 A，因为 $f(-x)\cdot g(-x)=-f(x)g(x)$，

所以函数 $f(x)\cdot g(x)$ 是奇函数，故 A 错误；

对于 B，因为 $|f(-x)|\cdot g(-x)=|-f(x)|\cdot g(x)=|f(x)|\cdot g(x)$，

所以函数 $|f(x)|\cdot g(x)$ 是偶函数，故 B 错误；

对于 C，因为 $f(-x)\cdot|g(-x)|=-f(x)\cdot|g(x)|$，

所以函数 $f(x)\cdot|g(x)|$ 是奇函数，故 C 正确；

对于 D，因为 $|f(-x)\cdot g(-x)|=|-f(x)\cdot g(x)|=|f(x)\cdot g(x)|$，

所以函数 $|f(x)\cdot g(x)|$ 是偶函数，故 D 正确.

故选：CD.

变式 8.（北京市海淀区 2023 届高三二模数学试题）下列函数中，既是奇函数又在区间 $(0,1)$ 上单调递增的是（　）

A．$y=\lg x$　　B．$y=\dfrac{2}{x}$　　C．$y=2^{|x|}$　　D．$y=\tan x$

【答案】D

【解析】对于 A，$y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，定义域不关于原点对称，所以为非奇非偶函数，故 A 错误，

对于 B，$f(x)=\dfrac{2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称，又 $f(-x)=-x-\dfrac{1}{x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，但在 $(0,1)$ 单调递减，故 B 错误，

对于 C，$f(x)=2^{|x|}$ 的定义域为 R ,关于原点对称，又 $f(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，故 C 错误，

对于 D，$f(x)=\tan x$，由正切函数的性质可知 $f(x)=\tan x$ 为奇函数，且在 $(0,1)$ 单调递增，故 D 正确，

故选：D

【解题总结】

函数单调性与奇偶性结合时，注意函数单调性和奇偶性的定义，以及奇偶函数图像的对称性.

题型七：已知函数的奇偶性求参数

例 19.（四川省成都市蓉城联盟 2022-2023 学年高三下学期第二次联考）已知函数 $f(x)=\left(\mathrm{e}^{x}+a\mathrm{e}^{-x}\right)\sin 2x$ 是偶函数，则 $a=$______.

【答案】-1

【解析】$f(x)=\left(\mathrm{e}^{x}+a\mathrm{e}^{-x}\right)\sin 2x$ 定义域为 R，

由 $f(-x)=f(x)$ 得：$\left(\mathrm{e}^{-x}+a\mathrm{e}^{x}\right)\sin(-2x)=\left(\mathrm{e}^{x}+a\mathrm{e}^{-x}\right)\sin 2x$，

因为 $\sin(-2x)=-\sin 2x$，所以 $-\left(\mathrm{e}^{-x}+a\mathrm{e}^{x}\right)=\mathrm{e}^{x}+a\mathrm{e}^{-x}$，故 $a=-1$.

故答案为：-1

例 20.（江西省部分学校 2023 届高三下学期一轮复习验收考试）若函数 $f(x)=\log_2\left(16^{x}+1\right)-ax$ 是偶函数，则 $\log_a 2=$__________.

【答案】1

【解析】∵ $f(x)$ 为偶函数，定义域为 R，

∴对任意的实数 x 都有 $f(x)=f(-x)$，

即 $\log_2(16^x+1)-ax=\log_2(16^{-x}+1)+ax$，

∴ $2ax=\log_2(16^x+1)-\log_2(16^{-x}+1)=\log_2 16^x=4x$，

由题意得上式对任意的实数 x 恒成立，

∴ $2a=4$，解得 $a=2$，所以 $\log_a 2=1$

故答案为：1

例 21．（湖南省部分学校 2023 届高三下学期 5 月联数学试题）已知函数 $f(x)=2x^2+ax+2$，若 $f(x+1)$是偶函数，则 $a=$______．

【答案】-4

【解析】因为 $f(x+1)$是偶函数，

所以 $f(-x+1)=f(x+1)$，

$\therefore 2(-x+1)^2+a(-x+1)+2=2(x+1)^2+a(x+1)+2$，

即 $8x=-2ax$，

解得 $a=-4$．

故答案为：-4．

变式 9． 若函数 $f(x)=2e^{2x}+ae^{-2x}+1$为偶函数，则 $a=$__________．

【答案】2

【解析】∵函数 $f(x)=2e^{2x}+ae^{-2x}+1$为偶函数

∴ $f(x)=2e^{2x}+ae^{-2x}+1=f(-x)=2e^{-2x}+ae^{2x}+1$

即 $(2-a)e^{2x}=(2-a)e^{-2x}$

又∵ $e^{2x}>0, e^{-2x}>0, e^{2x}\neq e^{-2x}(x\neq 0)$ ∴ $2-a=0$

故答案为：$a=0$

【解题总结】

利用函数的奇偶性的定义转化为 $f(-x)=\pm f(x)$，建立方程，使问题得到解决，但是在解决选择题、填空题时还显得比较麻烦，为了使解题更快，可采用特殊值法求解．

题型八：已知函数的奇偶性求表达式、求值

例 22．（2023 年高三数学押题卷五）已知函数 $f(x)$是奇函数，函数 $g(x)$是偶函数．若 $f(x)-g(x)=x\sin x$，

则 $f\left(\dfrac{2023\pi}{2}\right)=$（　）

A．$\dfrac{2023\pi}{2}$　　B．$-\dfrac{2023\pi}{2}$　　C．0　　D．-1

【答案】C

【解析】由函数 $f(x)$ 是奇函数，函数 $g(x)$ 是偶函数，$f(x)-g(x)=x\sin x$，

故 $f(-x)-g(-x)=-x\sin(-x)$，即 $-f(x)-g(x)=x\sin(x)$，

将该式和 $f(x)-g(x)=x\sin x$ 相减可得 $f(x)=0$，

则 $f\left(\frac{2023\pi}{2}\right)=0$，

故选：C

例 23．（广东省湛江市 2023 届高三二模数学试题）已知奇函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3^{-x}, x<0,\\ g(x)+1, x>0,\end{cases}$ 则 $g(x)=$________.

【答案】$-x^2+3^x-1$

【解析】当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(x)=g(x)+1=-f(-x)=-\left[(-x)^2-3^{-(-x)}\right]=-x^2+3^x$，

则 $g(x)=-x^2+3^x-1$．

故答案为：$-x^2+3^x-1$．

例 24． 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+4x-3$，则函数 $f(x)$ 的解析式为________.

【答案】$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, x<0\\ 0, x=0\\ -x^2+4x-3, x>0\end{cases}$

【解析】由于函数 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，则 $f(0)=0$．

当 $x>0$ 时，$f(x)=-x^2+4x-3$，

设 $x<0$，则 $-x>0$，则 $f(-x)=-x^2-4x-3=-f(x)$，

所以 $f(x)=x^2+4x+3$．

综上所述，$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, x<0\\ 0, x=0\\ -x^2+4x-3, x>0\end{cases}$．

故答案为：$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, x<0\\ 0, x=0\\ -x^2+4x-3, x>0\end{cases}$

变式 10． 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域是 $\{x\in\mathbf{R}|x\neq\pm1\}$，函数 $f(x)$ 是一个偶函数，$g(x)$ 是一个奇函数，且 $f(x)-g(x)=\frac{1}{x-1}$，则 $f(x)$ 等于（　）

A. $\dfrac{1}{x^2-1}$　　B. $\dfrac{2x^2}{x^2-1}$　　C. $\dfrac{2}{x^2-1}$　　D. $\dfrac{2x}{x^2-1}$

【答案】A

【解析】由函数 $f(x)$ 是一个偶函数， $g(x)$ 是一个奇函数，

所以 $f(-x)=f(x)$， $g(-x)=-g(x)$，

因为 $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x-1}$①，

则 $f(x)+g(x)=f(-x)-g(-x)=\dfrac{1}{-x-1}$②，

所以①+②得 $2f(x)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{-x-1}=\dfrac{2}{x^2-1}$，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

故选：A.

【解题总结】

抓住奇偶性讨论函数在各个分区间上的解析式，或充分利用奇偶性得出关于 $f(x)$ 的方程，从而可得 $f(x)$ 的解析式.

题型九：已知 $f(x)=$ 奇函数+M

例 25.（宁夏银川一中、昆明一中 2023 届高三联合二模考试数学试题）已知函数 $f(x)=ax^5+b\sin x+c$，若 $f(-1)+f(1)=2$，则 $c=$（　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

【答案】C

【解析】因为 $f(-1)+f(1)=2$，

所以 $-a-b\sin1+c+a+b\sin1+c=2$，

所以 $c=1$.

故选：C.

例 26.（河南省济洛平许 2023 届高三第四次质量检测数学试题）已知 $f(x)+1$ 在 **R** 上单调递增，且为奇函数.若正实数 a，b 满足 $f(a-4)+f(b)=-2$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值为（　）

A. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{3}{4}+\sqrt{2}$　　C. $3+2\sqrt{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】由于 $f(x)+1$ 为奇函数，所以 $f(x)+1+f(-x)+1=0\Rightarrow f(x)+f(-x)=-2$，

由 $f(a-4)+f(b)=-2$ 得 $a-4=-b \Rightarrow a+b=4$ ，

由于 $a>0,b>0$, 所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{4}\left(3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{1}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $a=b$ 时取等号，故 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为 $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选：A

例 27.（重庆市巴蜀中学 2023 届高三高考适应性月考数学试题）已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 在区间 $[-5,5]$ 的最大值是 M，最小值是 m，则 $f(M+m)$ 的值等于(　)

A．0　　　　B．10　　　　C．$\frac{\pi}{4}$　　　　D．$\frac{\pi}{2}$

【答案】C

【解析】令 $g(x)=\cos x\cdot\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，则 $f(x)=\frac{\pi}{4}+g(x)$，

∴$f(x)$和 $g(x)$在 $[-5,5]$ 上单调性相同，

∴设 $g(x)$在 $[-5,5]$ 上有最大值 $g(x)_{\max}$，有最小值 $g(x)_{\min}$.

∵ $g(-x)=\cos x\cdot\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$，

∴ $g(x)+g(-x)=\cos x\cdot\ln\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right]=0$ ，

∴$g(x)$在 $[-5,5]$ 上为奇函数，∴ $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$，

∴ $M=g(x)_{\max}+\frac{\pi}{4},m=g(x)_{\min}+\frac{\pi}{4}$，∴ $M+m=\frac{\pi}{2}$，

$f(M+m)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

故选：C.

变式 11.（福建省福州格致中学 2022-2023 学年高三下学期期中考数学试题）已知函数 $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+b\sin x+2$，若 $f(-3)=7$，则 $f(3)$（　）

A．等于 -7　　　　B．等于 -5　　　　C．等于 -3　　　　D．无法确定

【答案】C

【解析】设 $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，显然定义域为 R，

又 $g(x)+g(-x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-x^2\right)=\ln 1=0$ ，

则 $g(-x)=-g(x)$，所以 $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是 R 上的奇函数；

又 $y=\sin x$ 也是 R 上的奇函数，所以 $f(x)-2$ 也是 R 上的奇函数，

因此 $f(-3)-2=-(f(3)-2)$，则 $f(3)=4-f(-3)=4-7=-3$.

故选：C.

【解题总结】

已知 $f(x)=$ 奇函数+M，$x\in[-a,a]$，则

（1）$f(-x)+f(x)=2M$

（2）$f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=2M$

题型十：函数的对称性与周期性

例 28.（多选题）（2023·山东烟台·统考二模）定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(4+x)=0$，$f(2+2x)$ 是偶函数，$f(1)=1$，则（　）

A．$f(x)$ 是奇函数　　　　B．$f(2023)=-1$

C．$f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称　　　　D．$\sum_{k=1}^{100}kf(2k-1)=-100$

【答案】ABD

【解析】对于选项 A，∵ $f(2+2x)$ 是偶函数，∴ $f(2-2x)=f(2+2x)$，

∴函数 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，∴ $f(-x)=f(4+x)$，

∵ $f(x)+f(4+x)=0$，∴ $f(-x)=-f(x)$，∴ $f(x)$ 是奇函数，则 A 正确；

对于选项 B，∵ $f(4+x)=-f(x)$，∴ $f(8+x)=-f(4+x)$，∴ $f(8+x)=f(x)$，

∴ $f(x)$ 的周期为 8，∴ $f(2023)=f(253\times8-1)=f(-1)=-f(1)=-1$，则 B 正确；

对于选项 C，若 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(3)=f(-1)$，

但是 $f(-1)=-f(1)=-1$，$f(3)=f(1)=1$，即 $f(3)\neq f(-1)$，这与假设条件矛盾，则选项 C 错误；

对于选项 D，将 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $f(2-2x)=f(2+2x)$，得 $f(3)=f(1)=1$，

将 $x=1$，代入 $f(x)+f(4+x)=0$，得 $f(5)=-f(1)=-1$，

同理可知 $f(7)=-f(3)=-1$，

又∵ $f(x)$ 的周期为 8，∴ $f(x)$ 正奇数项的周期为 4，

$$\therefore \sum_{k=1}^{100}kf(2k-1)=f(1)+2f(3)+3f(5)+\cdots+100f(199)$$

$$=[f(1)+2f(3)+3f(5)+4f(7)]+[5f(9)+6f(11)+7f(13)+8f(15)]\cdots$$

$+[97f(193)+98f(195)+99f(197)+100f(199)]=25\times(-4)=-100$，则 D 正确.

故选：ABD.

例 29.（多选题）（2023·湖南·高三校联考阶段练习）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的导函数分别是 $f'(x)$ 和 $g'(x)$，若 $f(x)+g(x-2)=1$，$f'(x+2)=g'(2-x)$，且 $g(x+2)$ 是奇函数，则下列结论正确的是（　）

A．$f(4)=1$ ✓　　　　B．$g'(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称 ✓

C．$\sum_{k=1}^{2024} f(k)=0$　　　　D．$\sum_{k=1}^{2024} f(k)g(k+1)=0$

【答案】ABD　$g(-x+2)=-g(x+2) \Longrightarrow g(2+x)+g(2-x)=0 \Longleftrightarrow$ 关于 $(2,0)$ 中心对称；

【解析】因为 $g(x+2)$ 是奇函数，所以 $g(2)=0$．因为 $f(x)+g(x-2)=1$，所以 $f(4)+g(2)=1$，所以 $f(4)=1$，则 A 正确； ✓

因为 $f(x)+g(x-2)=1$，所以 $f'(x)+g'(x-2)=0$，所以 $f'(x+2)+g'(x)=0$，

因为 $f'(x+2)=g'(2-x)$，所以 $g'(2-x)+g'(x)=0$，则 $g'(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称，则 B 正确； ✓

因为 $f'(x+2)=g'(2-x)$，所以 $f'(x+2)-g'(2-x)=0$，　$\left(f(x+2)+g(2-x)\right)'=0$

所以 $f(x+2)+g(2-x)=c$（c 为常数），所以 $f(x)+g(4-x)=c$（c 为常数）．

因为 $f(x)+g(x-2)=1$，所以 $g(x-2)-g(4-x)=1-c$．　找周期．

令 $x=3$，得 $g(1)-g(1)=1-c=0$，所以 $c=1$，则 $g(x-2)=g(4-x)$． ✓

因为 $g(x+2)$ 是奇函数，所以 $g(x+2)=-g(-x+2)$，所以 $g(x-2)=-g(-x+6)$，

所以 $g(4-x)=-g(-x+6)$，所以 $g(x)=-g(x+2)$，所以 $g(x)=g(x+4)$，

即 $g(x)$ 是周期为 4 的周期函数．　$T_1=4$

因为 $f(x)+g(x-2)=1$，所以 $f(x)=1-g(x-2)$，所以 $f(x+4)=1-g(x+2)$，

所以 $f(x)=f(x+4)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数．　$T_2=4$

因为 $g(2)=0$，所以 $g(4)=0$，$g(1)=-g(3)$，所以 $f(2)=f(4)=1$，$f(1)=1-g(3)=1+g(1)$，$f(3)=1-g(1)$，则

$g(x-2)=g(4-x)$　令 $x=4$　　$g(4-x)=-g(-x+6)$　　$g(x)=-g(x+2)$　　$f(x)=1-g(x-2)$

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=4$，　$f(1)g(2)+f(2)g(3)+f(3)g(4)+f(4)g(5)=0$，

故 $\sum_{k=1}^{2024} f(k)=2024$，$\sum_{k=1}^{2024} f(k)g(k+1)=0$，即 C 错误，D 正确．

故选：ABD．

例 30.（多选题）（2023·河北·统考模拟预测）已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 **R**，导函数分别为 $f'(x)$，$g'(x)$，若 $f(3-x)=g(x)-2$，$f'(x)=g'(x+1)$，且 $g(2+x)+g(-x)=0$，则（　）

A．4 为函数 $g(x)$ 的一个周期　　　　B．函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,-2)$ 对称

C．$\sum_{n=1}^{2024} g(n)=0$　　　　D．$\sum_{n=1}^{2024} f(n)=4048$

【答案】ABC

【解析】由 $g(2+x)+g(-x)=0$ 得 $g(2-x)=-g(x)$，

由 $f(3-x)=g(x)-2$ 求导得 $-f'(3-x)=g'(x)$，

又 $f'(x)=g'(x+1)$ 得 $f'(3-x)=g'(4-x)$，所以 $-g'(x)=g'(4-x)$，

所以 $g(x)=g(4-x)+c$，所以 $g(2)=g(2)+c \Rightarrow c=0, g(x)=g(4-x)$，

所以 $g(4-x)=-g(2-x) \Rightarrow g(x+2)=-g(x) \Rightarrow g(x+4)=-g(x+2)=g(x)$，

所以 4 为函数 $g(x)$ 的一个周期，A 正确；

$f(3-x)=g(x)-2 \Rightarrow g(x)=f(3-x)+2$，故 $g(2-x)=f(3-(2-x))+2=f(1+x)+2$，

因此 $f(3-x)+2+f(1+x)+2=0 \Rightarrow f(3-x)+f(1+x)=-4$，

故函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,-2)$ 对称，B 正确，

在 $g(2+x)+g(-x)=0$ 中，令 $x=-1, \therefore g(1)=0$

由 $f'(x)=g'(x+1)$ 得 $f(x)=g(x+1)+c$，c 为常数，故 $f(-x+4)=g(-x+5)+c$，

由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,-2)$ 对称，

$f(x)+f(-x+4)=g(x+1)+c+g(-x+5)+c=-4$，

因此 $g(x+1)+g(-x+5)+2c=-4 \Rightarrow g(x+1)-g(x-3)+2c=-4 \Rightarrow c=-2$，

所以 $f(x)=g(x+1)-2$，由于 $g(x)$ 的周期为 4，所以 $f(x)$ 的周期也为 4，

由于 $g(4-x)=f(3-x)+2=g(x)$，所以 $g(3)=g(1)=0$，$g(4)+g(2)=g(0)+g(2)=0$，

所以 $\sum_{n=1}^{2024} g(n)=506[g(1)+g(2)+g(3)+g(4)]=0$，故 C 正确，

由于 $f(x)=g(x+1)-2$，

$\sum_{n=1}^{2024} f(n)=\sum_{n=1}^{2024}[g(n+1)-2]=\sum_{n=1}^{2024} g(n+1)-2\times 2024=506[g(2)+g(3)+g(4)+g(5)]-2\times 2024=0-4048=-404$
,故 D 错误，

故选:ABC

变式 12．（**多选题**）（2023·山东滨州·统考二模）函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线，且满足 $f(3+x)-f(3-x)+6x=0$，函数 $f(1-2x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称，则（　）

A．$f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称　　B．8 是 $f(x)$ 的一个周期

C．$f(x)$ 一定存在零点　　D．$f(101)=-299$

【答案】ACD

【解析】对于 A,由于 $f(1-2x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称,所以 $f(1-2x)+f(1+2x)=2$,故 $f(1-x)+f(1+x)=2$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，故 A 正确，

由 $f(3+x)-f(3-x)+6x=0$ 得 $f(3+x)+3x=f(3-x)-3x$，令 $g(x)=f(3+x)+3x, \therefore g(-x)=f(3-x)+3x,$

所以 $g(x)=g(-x)$，故 $g(x)$ 为偶函数，又 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,1)$ 对称，所以 $f(x)+f(-x+2)=2$，又 $f(x)=g(x-3)-3(x-3)$，从而

$g(x-3)-3(x-3)+g(-x+2-3)-3(-x+2-3)=2 \Rightarrow g(x-3)+g(-x-1)=-10$,

所以 $g(x)$ 的图象关于 $(-2,-5)$ 对称，

对于 C,在 $f(1-x)+f(1+x)=2$ 中,令 $x=0, f(1)=1>0$，所以

$g(-2)=f(1)-6=-5, \therefore g(2)=-5=f(5)+6 \Rightarrow f(5)=-11<0$，由于 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的图象是一条连续不断的曲线，由零点存在性定理可得 $f(x)$ 在 $(1,5)$ 有零点，故 C 正确

对于 D,由于 $g(x)$ 的图象关于 $(-2,-5)$ 对称以及 $g(x)=g(-x)$ 得

$g(x)+g(-x-4)=-10 \Rightarrow g(x)+g(x+4)=-10$,又 $g(x+8)+g(x+4)=-10$,所以 $g(x)=g(x+8)$,所以 $g(x)$ 是周期为 8 的周期函数，$f(101)=g(98)-3\times98=g(2)-294=-5-294=-299$，故 D 正确，

对于 B，$f(1)=1$，$f(9)=g(6)-18=g(-2)-18=g(2)-18=-5-18=-23\neq f(1)$，所以 8 不是 $f(x)$ 的周期，

故选：ACD

【解题总结】

（1）若函数 $y=f(x)$ 有两条对称轴 $x=a$，$x=b(a<b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(b-a)$；

（2）若函数 $y=f(x)$ 的图象有两个对称中心 $(a,c),(b,c)(a<b)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(b-a)$；

（3）若函数 $y=f(x)$ 有一条对称轴 $x=a$ 和一个对称中心 $(b,0)(a<b)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=4(b-a)$.

题型十一：类周期函数

例 31.（2023·山西长治·高三山西省长治市第二中学校校考阶段练习）定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=2f(x)$，$f(x)=\begin{cases} x^2-x, x\in(0,1) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-2|}, x\in[1,2] \end{cases}$，若 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)\geq\frac{t}{2}-\frac{1}{t}$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是（　）

若无2，则周期

A. $[-2,0)\cup(0,1)$　　B. $[-2,0)\cup[1,+\infty)$　　C. $[-2,1]$　　D. $(-\infty,-2]\cup(0,1]$

【答案】D

【解析】若 $-2\leq x\leq0$，则 $0\leq x+2\leq2$

$\because f(x+2)=2f(x)$，$\therefore f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)=\frac{1}{2}\begin{cases}(x+2)^2-(x+2),x\in(-2,-1)\\-\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|},x\in[-1,0]\end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases}\frac{(x+2)^2-(x+2),}{2}x\in(-2,-1)\\-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+|x|},x\in[-1,0]\end{cases}$

$\because x\in(-2,0]$ 时，$f(x)\geq\frac{t}{2}-\frac{1}{t}$ 恒成立，$\therefore$ 只需 $f(x)_{\min}\geq\frac{t}{2}-\frac{1}{t}$.

当 $x\in(-2,-1)$ 时，$y=(x+2)^2-(x+2)$ 最小值为 $-\frac{1}{8}$（当 $x=-\frac{3}{2}$ 时）；

当 $x\in[-1,0]$ 时，$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+|x|}$ 最小值为 $-\frac{1}{2}$（当 $x=0$ 时），

$\therefore f(x)_{\min}=-\frac{1}{2}$

所以只需 $\frac{t}{2}-\frac{1}{t}\leq-\frac{1}{2}$，解得：$t\leq-2$ 或 $0<t\leq1$

$\therefore$ 实数 t 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup(0,1]$

故选：D

例 32.（2023·江西南昌·高三校考期中）已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\frac{1}{2}f(x+2)$，且当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=-x^2+2x$．设 $f(x)$ 在 $[2n-2,2n)$ 上的最大值为 a_n（$n\in\mathbf{N}^*$），且数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n．若对于任意正整数 n 不等式 $k(S_n+1)\geq 2n-9$ 恒成立，则实数 k 的取值范围为（　）

A．$[0,+\infty)$　　B．$\left[\frac{1}{32},+\infty\right)$　　C．$\left[\frac{3}{64},+\infty\right)$　　D．$\left[\frac{7}{64},+\infty\right)$

【答案】C

【解析】由已知先求出 $f(x)_{\max}=2^{n-1}$，即 $a_n=2^{n-1}$，进一步可得 $S_n=2^n-1$，再将所求问题转化为 $k\geq\frac{2n-9}{2^n}$ 对于任意正整数 n 恒成立，设 $c_n=\frac{2n-9}{2^n}$，只需找到数列 $\{c_n\}$ 的最大值即可．当 $2n-2\leq x<2n$ 时，则

$0\leq x+2-2n<2$，$f(x+2-2n)=-(x+2-2n)(x-2n)$，

所以，$f(x)=2^{n-1}f[x-2(n-1)]=-2^{n-1}(x+2-2n)(x-2n)$，显然当 $x=2n-1$ 时，

$f(x)_{\max}=2^{n-1}$，故 $a_n=2^{n-1}$，$S_n=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$，若对于任意正整数 n 不等式

$k(S_n+1)\geq 2n-9$ 恒成立，即 $k2^n\geq 2n-9$ 对于任意正整数 n 恒成立，即 $k\geq\frac{2n-9}{2^n}$ 对于任

意正整数 n 恒成立，设 $c_n=\frac{2n-9}{2^n}$，$c_{n+1}-c_n=\frac{11-2n}{2^{n+1}}$，令 $\frac{11-2n}{2^{n+1}}>0$，解得 $n<\frac{11}{2}$，

令 $\frac{11-2n}{2^{n+1}}<0$，解得 $n>\frac{11}{2}$，考虑到 $n\in\mathbf{N}^*$，故有当 $n\le 5$ 时，$\{c_n\}$ 单调递增，

当 $n\ge 6$ 时，有 $\{c_n\}$ 单调递减，故数列 $\{c_n\}$ 的最大值为 $c_6=\frac{3}{2^6}=\frac{3}{64}$，

所以 $k\ge\frac{3}{64}$.

故选：C.

例 33.（2023·全国·高三专题练习）定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，若 $x\in[-4,-2]$ 时，$f(x)\ge\frac{1}{18}(\frac{3}{t}-t)$ 恒成立，则实数 t 的取值范围是(　　)

A．$(-\infty,-1]\cup(0,3]$　　　　B．$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left(0,\sqrt{3}\right]$

C．$[-1,0)\cup[3,+\infty)$　　　　D．$\left[-\sqrt{3},0\right)\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right)$

【答案】C

【解析】因为 $x\in[-4,-2]$，所以 $x+4\in[0,2]$，

因为 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，

所以 $f(x+4)=(x+4)^2-2(x+4)=x^2+6x+8$，

因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$，

所以 $f(x+4)=3f(x+2)=9f(x)$，

所以 $f(x)=\frac{1}{9}f(x+4)=\frac{1}{9}\left(x^2+6x+8\right)$，$x\in[-4,-2]$，

又因为 $x\in[-4,-2]$，$f(x)\ge\frac{1}{18}\left(\frac{3}{t}-\mathrm{t}\right)$ 恒成立，

故 $\frac{1}{18}\left(\frac{3}{t}-\mathrm{t}\right)\le f(x)_{min}=-\frac{1}{9}$，

解不等式可得 $\mathrm{t}\ge 3$ 或 $-1\le\mathrm{t}<0$.

变式 13.（多选题）（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases}4-|4x-8|,1\le x\le 3\\ \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{3}\right),x>3\end{cases}$，则下列说法正确的是（　）

A．若函数 $y=f(x)-kx$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围为 $\left(\frac{1}{18},\frac{1}{3}\right)$

B．关于 x 的方程 $f(x)-\frac{1}{2^{n-3}}=0\left(n\in N^{*}\right)$ 有 $2n-1$ 个不同的解

C．对于实数 $x\in[1,+\infty)$，不等式 $xf(x)-8\le 0$ 恒成立

D．当 $x\in\left[3^{n-1},3^{n}\right]\left(n\in N^{*}\right)$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为 $4\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

【答案】ABD

【解析】∵ $f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{3}\right),x>3$，则 $f(x)$ 在 $\left[3^{n},3^{n+1}\right)\left(n\in N^{*}\right)$ 的图象是将 $\left[3^{n-1},3^{n}\right)\left(n\in N^{*}\right)$ 的图象沿 x 轴方向伸长为原来的 3 倍、沿 y 轴方向缩短为原来的一半

∴ $f(x)=2^{3-n}\left[1-\left(3^{1-n}x-2\right)\right],x\in\left[3^{n-1},3^{n}\right)\left(n\in N^{*}\right)$

则 $f(x)$ 在 $\left[3^{n-1},2\cdot 3^{n-1}\right]\left(n\in N^{*}\right)$ 上单调递增，在 $\left(2\cdot 3^{n-1},3^{n}\right)\left(n\in N^{*}\right)$ 上单调递减

∴ $f(x)$ 在 $\left[3^{n-1},3^{n}\right)\left(n\in N^{*}\right)$ 上的最大值为 $f(2\cdot 3^{n-1})=\frac{1}{2^{n-3}}$，最小值为 $f(3^{n-1})=0$，即 $f(x)$ 在 $\left[3^{n-1},3^{n}\right)\left(n\in N^{*}\right)$ 上的值域为 $\left[0,\frac{1}{2^{n-3}}\right]\left(n\in N^{*}\right)$

对于 A，令 $f(x)-kx=0$，即 $f(x)=kx$，则 $y=f(x)$ 与 $y=kx$ 有四个交点

作出 $n=1,2,3$ 时 $f(x)$ 的图象，如图 1：$(6,2),(18,1)$ 分别与 $(0,0)$ 连线的斜率为 $\frac{1}{3},\frac{1}{18}$

结合图象可得：实数 k 的取值范围为 $\left(\frac{1}{18},\frac{1}{3}\right)$，A 正确；

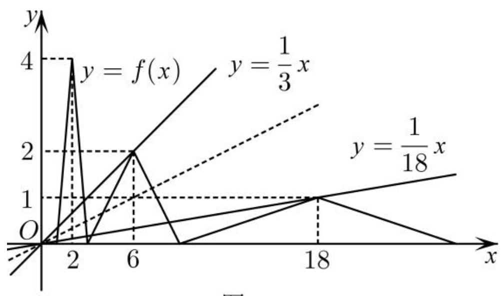


图1

对于 B，令 $f(x)-\frac{1}{2^{n-3}}=0\left(n\in N^{*}\right)$，则 $f(x)=\frac{1}{2^{n-3}}\left(n\in N^{*}\right)$

∴方程的根的个数即为 $y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2^{n-3}}\left(n\in N^{*}\right)$ 的交点个数

当 $n=1$ 时，$y=f(x)$ 的最大值为 $f(2)=4$

∴ $y=f(x)$ 与 $y=4$ 有且仅有一个交点，

当 $n\ge 2\left(n\in N^{*}\right)$ 时，则有：

①当 $k<n\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$ 时，$f(x)$ 在 $\left[3^{k-1},3^k\right)$ 上的最大值为 $f(2\cdot3^{k-1})=\dfrac{1}{2^{k-3}}>\dfrac{1}{2^{n-3}}$，则 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ 在 $\left[3^{k-1},3^k\right)$ 内有两个交点

∴当 $x\in\left[1,3^n\right)$，$y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ 有 $2(n-1)$ 交点

②当 $k=n$，则 $f(x)$ 在 $\left[3^{n-1},3^n\right)$ 上的最大值为 $f(2\cdot3^{n-1})=\dfrac{1}{2^{n-3}}$

∴ $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ 有且仅有一个交点

③当 $k>n\left(k\in\mathrm{N}^*\right)$ 时，$f(x)$ 在 $\left[3^{k-1},3^k\right)$ 上的最大值为 $f(2\cdot3^{k-1})=\dfrac{1}{2^{k-3}}<\dfrac{1}{2^{n-3}}$，则 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ 在 $\left[3^{k-1},3^k\right)$ 内没有交点

∴当 $x\in\left[3^{n+1},+\infty\right)$，$y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ 没有交点

∴当 $x\in\left[1,+\infty\right)$，$y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{1}{2^{n-3}}$ 的交点个数为 $1+2(n-1)=2n-1$

当 $n=1$ 时，也成立

∴关于 x 的方程 $f(x)-\dfrac{1}{2^{n-3}}=0\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 有 $2n-1$ 个不同的解，B 正确

对于 C，因为图象过点 $(6,2)$，令 $x=6$，则 $6f(6)-8=4>0$，C 错误

对于 D，由题意可得：当 $x\in\left[3^{n-1},3^n\right]\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形为三角形，其底边长为 $3^n-3^{n-1}=2\cdot3^{n-1}$，高为 $f(2\cdot3^{n-1})=\dfrac{1}{2^{n-3}}$

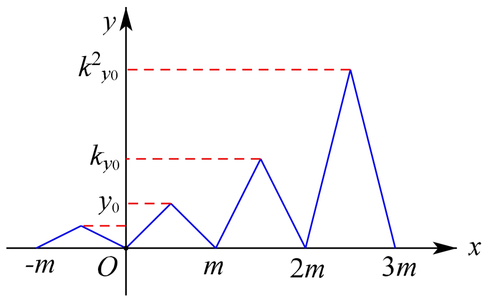
∴当 $x\in\left[3^{n-1},3^n\right]\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 时，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\left(2\cdot3^{n-1}\right)\times\dfrac{1}{2^{n-3}}=4\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

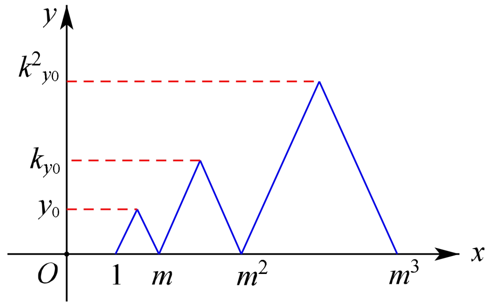
故选：ABD.

【解题总结】

1、类周期函数

若 $y=f(x)$ 满足：$f(x+m)=kf(x)$ 或 $f(x)=kf(x-m)$，则 $y=f(x)$ 横坐标每增加 m 个单位，则函数值扩大 k 倍．此函数称为周期为 m 的类周期函数．





类周期函数图象倍增函数图象

2、倍增函数

若函数 $y=f(x)$ 满足 $f(mx)=kf(x)$ 或 $f(x)=kf(\frac{x}{m})$，则 $y=f(x)$ 横坐标每扩大 m 倍，则函数值扩大 k 倍．此函数称为倍增函数.

注意当 $m=k$ 时，构成一系列平行的分段函数，$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\in[1, m) \\ g(x-m+1), & x\in[m, m^2) \\ g(x-m^2+1), & x\in[m^2, m^3) \\ \cdots & \\ g(x-m^{n-1}+1), & x\in[m^{n-1}, m^n) \end{cases}$.

题型十二：抽象函数的单调性、奇偶性、周期性

例 34.（安徽省蚌埠市 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题）已知定义在 R 上的函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足：①$f(0)=1$；②$g(x)$ 为奇函数；③$\forall x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$；④任意的 x，$y\in\mathrm{R}$，$f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$.

（1）判断并证明函数 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）判断并证明函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性.

【解析】（1）依题意，$f^2(x)-g^2(x)=f(x)f(x)-g(x)g(x)=f(x-x)=f(0)=1$ ← 令x=y

$\therefore 1=f^2(0)-g^2(0)\Rightarrow g(0)=0$

$\therefore f(-x)=f(0-x)=f(0)f(x)-g(0)g(x)=f(x)$，

又因为 $f(x)$ 的定义域为 R，所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

（2）由④知，$f(x+y)=f(x)f(-y)-g(x)g(-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$

$f(x_2)-f(x_1)=f\left(\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right)-f\left(\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right)$

$=f\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)f\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)+g\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)g\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)-f\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)f\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)+g\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)g\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)$

$=2g\left(\dfrac{x_2+x_1}{2}\right)g\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)$

$\because x_1$，$x_2>0$，$x_1<x_2$，$\therefore \dfrac{x_2+x_1}{2}$，$\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)=2g\left(\dfrac{x_2+x_1}{2}\right)g\left(\dfrac{x_2-x_1}{2}\right)>0$

即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

例 35.（2023·河北石家庄·统考模拟预测）设函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x-1)$ 为奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数，当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=-x^2+1$，则下列结论错误的是（　）

A．$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$　　　　B．$f(x+7)$ 为奇函数

C．$f(x)$ 在 $(6,8)$ 上是减函数　　　　D．方程 $f(x)+\lg x=0$ 仅有 6 个实数解

【答案】C

【解析】由题设 $f(-x-1)=-f(x-1)$，则 $f(x)$ 关于 $(-1,0)$ 对称，即 $f(x)=-f(-x-2)$，

$f(x+1)=f(-x+1)$，则 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，即 $f(x)=f(2-x)$，

T=8，关键

所以 $f(2-x)=-f(-x-2)$，则 $f(2+x)=-f(x-2)$，故 $f(x)=-f(x-4)$，

所以 $f(x-4)=-f(x-8)$，即 $f(x)=f(x-8)$，故 $f(x)=f(x+8)$，

所以 $f(x)$ 的周期为 8，

$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=f(2-\dfrac{7}{2})=f(-\dfrac{3}{2})=-f(\dfrac{3}{2}-2)=-f(-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{3}{4}$，A 正确；

由周期性知：$f(x-1)=f(x+7)$，故 $f(x+7)$ 为奇函数，B 正确；

由题意，$f(x)$ 在 $(6,8)$ 与 $(-2,0)$ 上单调性相同，而 $x\in(-1,0)$ 上 $f(x)=-x^2+1$ 递增，

$f(x)$ 关于 $(-1,0)$ 对称知：$x\in(-2,-1)$ 上 $f(x)$ 递增，故 $(-2,0)$ 上 $f(x)$ 递增，

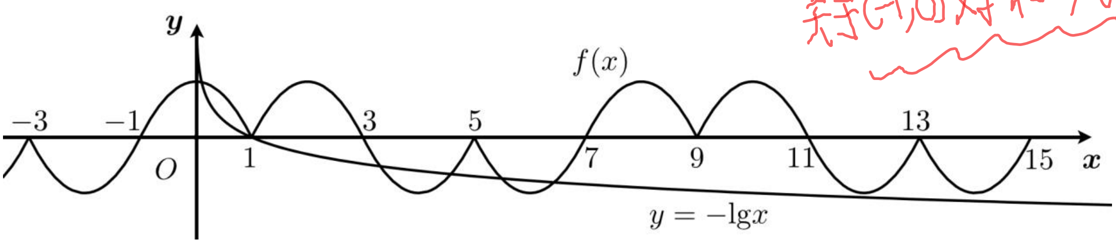
所以 $f(x)$ 在 $(6,8)$ 上是增函数，C 错误；

$f(x)+\lg x=0$ 的根等价于 $f(x)$ 与 $y=-\lg x$ 交点横坐标，

根据 $f(x)$、对数函数性质得：$f(x)\in[-1,1]$，$-\lg 12<-1<-\lg 6$，

所以如下图示函数图象：函数共有 6 个交点，D 正确.

关于(-1,0)对称，关于x=1对称
T=8.



故选：C

例 36.（2023·湖北·统考模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，有 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0$，若 $f\left(1\right)=0$，则不等式 $(x-1)f(x)>0$ 的解集是（　）

A．$\left(-1,1\right)\bigcup\left(1,+\infty\right)$　B．$\left(-1,1\right)$　C．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$　D．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(0,1\right)$

【答案】A

【解析】已知 $f\left(x\right)$ 是定义在 **R** 上的偶函数，则 $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，

又对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递减，又 $f\left(1\right)=0$，所以 $f\left(-1\right)=f\left(1\right)=0$，

根据函数 $f\left(x\right)$ 的单调性可知：$(x-1)f(x)>0$ 等价为 $\begin{cases}x-1>0\\f\left(x\right)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1<0\\f\left(x\right)<0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}x>1\\x>1\text{或}x<-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\-1<x<1\end{cases}$，解得 $x>1$ 或 $-1<x<1$，

即不等式的解集为 $\left(-1,1\right)\bigcup\left(1,+\infty\right)$.

故选：A.

变式 14.（四川省遂宁市 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题）定义在 R 上的函数 $f(x)$，对任意 $x_1,x_2\in R$，满足下列条件：① $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)-2$　② $f(2)=4$

（1）是否存在一次函数 $f(x)$ 满足条件①②，若存在，求出 $f(x)$ 的解析式；若不存在，说明理由.

（2）证明：$g(x)=f(x)-2$ 为奇函数；

【解析】解析：假设存在一次函数 $f\left(x\right)$，设 $f\left(x\right)=kx+b\left(k\neq0\right)$

则 $f\left(x_1+x_2\right)=k\left(x_1+x_2\right)+b$，

$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)-2=k\left(x_1+x_2\right)+2b-2$，所以 $b=2b-2$，$b=2$.

$f\left(2\right)=2k+b=4,k=1$，故满足条件的一次函数为：$f\left(x\right)=x+2$

（2）定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 对任意的 $x_1,x_2\in R$，

都有 $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)-2$ 成立，

令 $x_1=x_2=0$，则 $f\left(0+0\right)=f\left(0\right)+f\left(0\right)-2$，得 $f\left(0\right)=2$

令 $x_1=x,x_2=-x$，则 $f\left(x-x\right)=f\left(x\right)+f\left(-x\right)-2$

所以 $[f(x)-2]+[f(-x)-2]=0$，即 $g\left(x\right)+g\left(-x\right)=0$，于是 $g\left(-x\right)=-g\left(x\right)$

$\therefore g\left(x\right)=f\left(x\right)-2$ 为奇函数.

变式 15.（安徽省蚌埠市 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题）已知定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 满

足：

①$f(0)=1$；

②任意的x，$y\in \mathrm{R}$，$f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$.

（1）求$f^2(x)-g^2(x)$的值；

（2）判断并证明函数$f(x)$的奇偶性.

【解析】（1）依题意，$f^2(x)-g^2(x)=f(x)f(x)-g(x)g(x)=f(x-x)=f(0)=1$.

（2）由（1）知$f^2(0)-g^2(0)=1$，

$\therefore g^2(0)=f^2(0)-1=0$，即$g(0)=0$，

$\therefore f(-x)=f(0-x)=f(0)f(x)-g(0)g(x)=f(x)$，

又因为$f(x)$的定义域为R，

所以函数$f(x)$为偶函数.

变式16．（多选题）（2023·辽宁沈阳·高三沈阳二中校考开学考试）已知函数$f(x)$对任意$x\in R$都有$f(x+4)-f(x)=2f(2)$，若$y=f(x-1)$的图象关于直线$x=1$对称，且对任意的x_1，$x_2\in(0,2)$，且$x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，则下列结论正确的是（　）.

A．$f(x)$是偶函数　　　　B．$f(x)$的周期$T=4$

C．$f(2022)=0$　　　　D．$f(x)$在$(-4,-2)$单调递减

【答案】ABC

【解析】由$y=f(x-1)$的图象关于直线$x=1$对称，则$f(1+x-1)=f(1-x-1)$，

即$f(-x)=f(x)$，故$f(x)$是偶函数，A正确；

由$f(x+4)-f(x)=2f(2)$，令$x=-2$，可得$f(2)=0$，则$f(x+4)=f(x)$，

则$f(x)$的周期$T=4$，B正确；

$f(2022)=f(4\times 505+2)=f(2)=0$，故C正确；

又$f(x)$在$(0,2)$递增，则$(-2,0)$递减，由周期$T=4$，则$f(x)$在$(-4,-2)$单调递增，

故D错误.

故答案为：ABC

【解题总结】

抽象函数的模特函数通常如下：

(1)若$f(x+y)=f(x)+f(y)$，则$f(x)=xf(1)$(正比例函数)

(2)若 $f(x+y)=f(x)f(y)$，则 $f(x)=[f(1)]^x$ (指数函数)

(3)若 $f(xy)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)=\log_b x$ (对数函数)

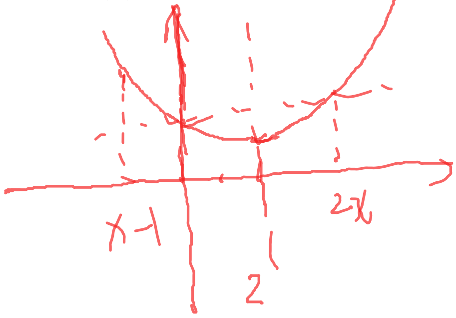
(4)若 $f(xy)=f(x)f(y)$，则 $f(x)=x^a$ (幂函数)

(5)若 $f(x+y)=f(x)+f(y)+m$，则 $f(x)=xf(1)-m$ (一次函数)

(6)对于抽象函数判断单调性要结合题目已知条件，在所给区间内比较大小，有时需要适当变形.

题型十三：函数性质的综合

例 37.（广西 2023 届高三毕业班高考模拟测试数学试题）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上单调递减，且 $f(x+2)$ 为偶函数，则不等式 $f(x-1)>f(2x)$ 的解集为（　）



A. $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(6,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$

C. $\left(-\frac{5}{3},1\right)$　　D. $\left(-1,\frac{5}{3}\right)$

【答案】D

【解析】∵函数 $f(x+2)$ 为偶函数，∴ $f(-x+2)=f(x+2)$，即 $f(2-x)=f(2+x)$，

∴函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

又∵函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，在区间 $(-\infty,2]$ 上单调递减，

∴函数 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

∴由 $f(x-1)>f(2x)$ 得，$|(x-1)-2|>|2x-2|$，解得 $x\in\left(-1,\frac{5}{3}\right)$.

故选：D.

例 38.（北京市西城区第五十六中学 2023 届高三数学一模试题）已知函数 $f(x)=\log_2\left(\frac{1}{|x|}+1\right)+\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}$，则不等式 $f(\lg x)>3$ 的解集为（　）

A. $\left(\frac{1}{10},10\right)$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$

C. $(1,10)$　　D. $\left(\frac{1}{10},1\right)\cup(1,10)$

【答案】D

【解析】由 $\begin{cases}|x|\neq 0\\ x^2\neq 0\end{cases}$ 得 $x\neq 0$，即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $f(-x)=\log_2\left(\frac{1}{|-x|}+1\right)+\sqrt{\frac{1}{(-x)^2}+3}=\log_2\left(\frac{1}{|x|}+1\right)+\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的偶函数，

当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2\left(\frac{1}{x}+1\right)+\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}$，

因为函数 $y=\frac{1}{x}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $y=\log_2\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $y=\sqrt{\frac{1}{x^2}+3}$ 都是在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

根据单调性的性质，可知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

又因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

又 $f(1)=3$，所以 $f(\lg x)>3=f(1)$，可得 $|\lg x|<|1|=1$，

所以 $-1<\lg x<1$，且 $\lg x\neq 0$，解得 $\frac{1}{10}<x<1$ 或 $1<x<10$，

所以不等式 $f(\lg x)>3$ 的解集为 $\left(\frac{1}{10},1\right)\cup(1,10)$.

故选：D

例 39.（2023·广东广州·统考二模）已知偶函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f'(x)+e^{-x}+x$ 也是偶函数，若 $f(2a-1)<f(a+1)$，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(0,2)$

C．$(2,+\infty)$　　D．$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

【答案】B

【解析】因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，等式两边求导可得 $f'(x)=-f'(-x)$，①

因为函数 $f'(x)+e^{-x}+x$ 为偶函数，则 $f'(x)+e^{-x}+x=f'(-x)+e^{x}-x$，②

联立①②可得 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}-x$，

令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1\geq\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-1=0$，且 $g'(x)$ 不恒为零，

所以，函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，即函数 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

故当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，所以，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

由 $f(2a-1)<f(a+1)$ 可得 $f(|2a-1|)<f(|a+1|)$，

所以，$|2a-1|<|a+1|$，整理可得 $a^2-2a<0$，解得 $0<a<2$.

故选：B.

变式 17.（2023·河南商丘·商丘市实验中学校联考模拟预测）已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，$f(3)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则不等式 $\frac{f(x)+2f(-x)}{x}<0$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　　　B．$(-3,0)\cup(0,3)$

C．$(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　　　D．$(-\infty,-3)\cup(0,3)$

【答案】A

【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，$f(3)=0$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(-3)=0, f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

由 $\frac{f(x)+2f(-x)}{x}<0$，得 $xf(x)>0$，

当 $x>0$ 时，由 $f(x)>0=f(3)$，得 $x>3$，

当 $x<0$ 时，由 $f(x)<0=f(-3)$，得 $x<-3$，

所以原不等式的解集为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

故选：A.

变式 18.（2023·安徽黄山·统考二模）已知函数 $f(x)=\lg(|x|-1)+2023^{x}+2023^{-x}$，则使不等式 $f(3x)<f(x+1)$ 成立的 x 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　　　B．$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

C．$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　　　D．$\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

【答案】C

【解析】由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x<-1 或 x>1\}$，关于原点对称，

由 $f(x)=\lg(|x|-1)+2023^{x}+2023^{-x}$ 得 $f(-x)=\lg(|-x|-1)+2023^{-x}+2023^{x}=f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数，

当 $x>1$ 时，$f(x)=\lg(x-1)+2023^{x}+2023^{-x}$，由于函数 $t=2023^{x}$，$y=\lg(x-1)$ 均为 $(1,+\infty)$ 单调递增函数，

$y=t+\frac{1}{t}$ 在 $t>1$ 单调递增，因此 $f(x)$ 为 $(1,+\infty)$ 上的单调递增函数，所以不等式 $f(3x)<f(x+1)$ 等价于

$\begin{cases}|3x|<|x+1|\\|3x|>1\end{cases}$，解得 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，

故选：C

变式 19.（2023·四川成都·校考三模）已知函数 $f(x)=e^{x-2}+e^{2-x}+2x^{2}-8x+7$，则不等式 $f(2x+3)>f(x+2)$

的解集为（　）

A．$(-1,-\frac{1}{3})$　　B．$(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$

C．$(-\frac{1}{3},1)$　　D．$(-\infty,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$

【答案】B

【解析】由函数 $f(x)=e^{x-2}+e^{2-x}+2x^2-8x+7=e^{x-2}+e^{2-x}+2(x-2)^2-1$，

所以 $f(x+2)=e^x+e^{-x}+2x^2-1$，令 $g(x)=f(x+2)=e^x+e^{-x}+2x^2-1$，

可得 $g'(x)=e^x-e^{-x}+4x$

令 $h(x)=g'(x)=e^x-e^{-x}+4x$ 且 $h(0)=0$，

可得 $h'(x)=e^x+e^{-x}+4>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，所以 $h(x)>h(0)=0,(x>0)$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又由 $g(-x)=e^{-x}+e^x+2(-x)^2-1=e^x+e^{-x}+2x^2-1=g(x)$，

所以函数 $g(x)$ 为偶函数，则在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

又由 $f(2x+3)>f(x+2)$，即 $g(2x+1)>g(x)$，即 $|2x+1|>|x|$，

整理得 $3x^2+4x+1>0$，解得 $x>-\frac{1}{3}$ 或 $x<-1$，

即不等式 $f(2x+3)>f(x+2)$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$．

故选：B.

变式 20．（2023·宁夏银川·校联考二模）已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$，则关于 x 的不等式 $f(x^2-2x)+f(x-2)<0$ 的解集为（　）

A．$(-1,2)$　　B．$(-2,1)$

C．$(2,+\infty)\cup(-\infty,-1)$　　D．$(1,+\infty)\cup(-\infty,-2)$

【答案】A

【解析】函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$ 的定义域为 R，定义域关于原点对称，

$f(-x)=e^{-x}-e^x-2\sin(-x)=e^{-x}-e^x+2\sin x=-f(x)$，

所以函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$ 为奇函数，

因为 $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x\ge 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2\cos x\ge 0$，

当且仅当 $e^x=e^{-x}$，即 $x=0$ 时，等号成立，

所以函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$ 在 R 上单调递增，

所以 $f(x^2-2x)+f(x-2)<0$ 可化为 $f(x^2-2x)<-f(x-2)$，即 $f(x^2-2x)<f(2-x)$，

所以 $x^2-2x<2-x$，

即 $x^2-x-2<0$，解得 $-1<x<2$，

所以不等式 $f(x^2-2x)+f(x-2)<0$ 的解集为 $(-1,2)$.

故选：A

变式 21.（2023·黑龙江哈尔滨·哈九中校考模拟预测）已知函数 $f(x)=\sin(2x-2)+e^{1-x}-e^{x-1}+2$，若 $f(a^2+1)+f(2a-2)>4$，则实数 a 范围是（　）

A．$(-\infty,-3)$　　B．$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

C．$(-3,1)$　　D．$(1,+\infty)$

【答案】C

【解析】根据题意，令 $g(x)=f(x+1)-2=\sin 2x+e^{-x}-e^{x}$，则 $g'(x)=2\cos 2x-(e^{-x}+e^{x})$，

又由 $e^{-x}+e^{x}\geq 2\sqrt{e^{-x}\cdot e^{x}}=2\geq 2\cos 2x$，当且仅当 $e^{-x}=e^{x}$，即 $x=0$ 时，等号成立，

所以 $e^{-x}+e^{x}\geq 2\cos 2x$，则 $g'(x)\leq 0$，则 $g(x)$ 在 **R** 上单调递减，

又由 $g(-x)=\sin(-2x)+e^{x}-e^{-x}=-(\sin 2x+e^{-x}-e^{x})=-g(x)$，故函数 $g(x)$ 为奇函数，

由 $f(a^2+1)+f(2a-2)>4$ 可化为 $f(a^2+1)-2>-[f(2a-2)-2]$，故 $g(a^2)>-g(2a-3)$，即 $g(a^2)>g(3-2a)$，

又 $g(x)$ 在 **R** 上单调递减，则 $a^2<3-2a$，解得 $-3<a<1$，即 $a\in(-3,1)$.

故选：C.

变式 22.（2023·全国·高三专题练习）设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2$，若对任意 $x\in[a,\ a+2]$，不等式 $f(x+a)\geq 2f(x)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$[\sqrt{2},+\infty)$　　B．$(\sqrt{2},+\infty)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$[1,\sqrt{2})$

【答案】A

【解析】∵当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2$，

∴此时函数 $f(x)$ 单调递增，

∵$f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，

∴函数 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，

当当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2$，

若对任意 $x\in[a,\ a+2]$，不等式 $f(x+a)\geq 2f(x)$ 恒成立，

∵$2f(x)=f(\sqrt{2}x)$，

∴$f(x+a)\geq f(\sqrt{2}x)$恒成立，

则$x+a\geq\sqrt{2}x$恒成立，

即$a\geq -x+\sqrt{2}x=\left(\sqrt{2}-1\right)x$恒成立，

∵$x\in[a, a+2]$，

∴$\left(\left(\sqrt{2}-1\right)x\right)_{max}=\left(\sqrt{2}-1\right)(a+2)$，

即$a\geq\left(\sqrt{2}-1\right)(a+2)$，

解得$a\geq\sqrt{2}$，

即实数a的取值范围是故答案为$\left[\sqrt{2},+\infty\right)$.

故选：A

【解题总结】

（1）奇偶性与单调性综合解题，尤其要重视利用偶函数（或轴对称函数）与单调性综合解不等式和比较大小.

（2）奇偶性、单调性、周期性综合解题，尤其要注意对称性与周期性之间的关系，周期是两条对称轴（或对称中心）之间距离的2倍，是对称中心与对称轴之间距离的4倍.

真题感悟

1.（2022·全国·统考高考真题）已知函数$f(x)$的定义域为**R**，且$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y), f(1)=1$，则$\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　）

A．-3　　B．-2　　C．0　　D．1

【答案】A

【解析】**[方法一]：赋值加性质**

因为$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，令$x=1, y=0$可得，$2f(1)=f(1)f(0)$，所以$f(0)=2$，令$x=0$可得，$f(y)+f(-y)=2f(y)$，即$f(y)=f(-y)$，所以函数$f(x)$为偶函数，令$y=1$得，$f(x+1)+f(x-1)=f(x)f(1)=f(x)$，即有$f(x+2)+f(x)=f(x+1)$，从而可知$f(x+2)=-f(x-1)$，$f(x-1)=-f(x-4)$，故$f(x+2)=f(x-4)$，即$f(x)=f(x+6)$，所以函数$f(x)$的一个周期为6．因为$f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$，$f(3)=f(2)-f(1)=-1-1=-2$，$f(4)=f(-2)=f(2)=-1$，$f(5)=f(-1)=f(1)=1$，$f(6)=f(0)=2$，所以

一个周期内的$f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=0$．由于22除以6余4，

所以$\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1-1-2-1=-3$．故选：A．

[方法二]:【最优解】构造特殊函数

由 $f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)$，联想到余弦函数和差化积公式

$\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)=2\cos x\cos y$，可设 $f\left(x\right)=a\cos\omega x$，则由方法一中 $f\left(0\right)=2,f\left(1\right)=1$ 知 $a=2,a\cos\omega=1$，

解得 $\cos\omega=\dfrac{1}{2}$，取 $\omega=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $f\left(x\right)=2\cos\dfrac{\pi}{3}x$，则

$f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{3}y\right)+2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}x-\dfrac{\pi}{3}y\right)=4\cos\dfrac{\pi}{3}x\cos\dfrac{\pi}{3}y=f\left(x\right)f\left(y\right)$，所以 $f\left(x\right)=2\cos\dfrac{\pi}{3}x$

符合条件，因此 $f(x)$ 的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{3}}=6$， $f\left(0\right)=2,f\left(1\right)=1$，且

$f\left(2\right)=-1,f\left(3\right)=-2,f\left(4\right)=-1,f\left(5\right)=1,f\left(6\right)=2$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0$，

由于 22 除以 6 余 4，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{22}f\left(k\right)=f\left(1\right)+f\left(2\right)+f\left(3\right)+f\left(4\right)=1-1-2-1=-3$. 故选：A．

【整体点评】法一：利用赋值法求出函数的周期，即可解出，是该题的通性通法；

2．（2022·全国·统考高考真题）已知函数 $f(x),g(x)$ 的定义域均为 **R**，且

$f(x)+g(2-x)=5,g(x)-f(x-4)=7$．若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f\left(k\right)=$（ ）

A．-21　　B．-22　　C．-23　　D．-24

【答案】D

【解析】因为 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，

所以 $g\left(2-x\right)=g\left(x+2\right)$，

因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+2)-f(x-2)=7$，即 $g(x+2)=7+f(x-2)$，

因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(x)+g(x+2)=5$，

代入得 $f(x)+\left[7+f(x-2)\right]=5$，即 $f(x)+f(x-2)=-2$，　关键

所以 $f\left(3\right)+f\left(5\right)+\ldots+f\left(21\right)=\left(-2\right)\times5=-10$，

$f\left(4\right)+f\left(6\right)+\ldots+f\left(22\right)=\left(-2\right)\times5=-10$.

因为 $f(x)+g(2-x)=5$，所以 $f(0)+g(2)=5$，即 $f\left(0\right)=1$，所以 $f(2)=-2-f\left(0\right)=-3$.

因为 $g(x)-f(x-4)=7$，所以 $g(x+4)-f(x)=7$，又因为 $f(x)+g(2-x)=5$，

联立得，$g\left(2-x\right)+g\left(x+4\right)=12$，

所以 $y=g(x)$ 的图像关于点 $\left(3,6\right)$ 中心对称，因为函数 $g(x)$ 的定义域为 **R**，

所以 $g(3)=6$

因为 $f(x)+g(x+2)=5$，所以 $f(1)=5-g(3)=-1$.

所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+[f(3)+f(5)+\ldots+f(21)]+[f(4)+f(6)+\ldots+f(22)]=-1-3-10-10=-2$.

故选：D

3．（2021·全国·统考高考真题）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+2)$ 为偶函数，$f(2x+1)$ 为奇函数，则（　）

A．$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B．$f(-1)=0$　　C．$f(2)=0$　　D．$f(4)=0$

【答案】B

【解析】因为函数 $f(x+2)$ 为偶函数，则 $f(2+x)=f(2-x)$，可得 $f(x+3)=f(1-x)$，

因为函数 $f(2x+1)$ 为奇函数，则 $f(1-2x)=-f(2x+1)$，所以，$f(1-x)=-f(x+1)$，

所以，$f(x+3)=-f(x+1)=f(x-1)$，即 $f(x)=f(x+4)$，

故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，

因为函数 $F(x)=f(2x+1)$ 为奇函数，则 $F(0)=f(1)=0$，

故 $f(-1)=-f(1)=0$，其它三个选项未知.

故选：B.