第七讲：证明不等式的基本方法

知识方法述要

不等式是中学数学乃至现代数学中的重要内容，是数学课外活动的重要课题，是高考和数学奥林匹克竞赛的热门专题之一.本讲及之后八讲通过对若干典型问题的分析，介绍证明不等式的方法技巧及若干经典不等式的应用.

数学竞赛中的不等式证明题没有固定程序可循，富于灵活性和创造性. 在变化多端的不等式证明中,我们强调五种最基本的方法：比较法、分析法、综合法、反证法、数学归纳法.

1.比较法

要证明不等式 $A>B$，可以作差 $A-B$，并通过变形证明 $A-B>0$；当 $B>0$ 时，也可以作商 $\frac{A}{B}$,证明 $\frac{A}{B}>1$.

2. 分析法

从所求证的不等式出发，逐步推求能使它成立的条件，直至已知的事实为止，此法通常称为分析法. 分析法的实质是寻求不等式成立的充分条件，叙述的格式是："要证 ......，只要证......".

3. 综合法

从已知条件和一些显然成立的不等式出发，灵活运用不等式的性质，并巧妙地变形而推出所要证的不等式，这种证明方法通常叫作综合法，它与分析法的思路恰好相反.

4. 反证法

若把欲证的不等式看作一个命题，则用反证法来证明不等式就与用反证法证明某个命题的方法相同了. 即当直接证明不等式有困难时，可以借助反证法否定结论，寻找矛盾，从而间接证明要证的结论.

5. 数学归纳法

涉及正整数 n 的不等式，可视为一个关于正整数 n 的命题，考虑用数学归纳法证明.

例题精讲

【例 21-1】设 $a,b,c,x,y,z\in\mathbf{R}_+$，求证:

$$\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+y^2\right)\left(c^2+z^2\right)\geqslant(abz+bcx+cay-xyz)^2. \tag{①}$$

证明：左边减去右边，得

$$\begin{aligned}
&a^2b^2c^2+a^2y^2z^2+x^2b^2z^2+x^2y^2c^2+2abz\cdot xyz+2bcx\cdot xyz+2cay\cdot xyz-\\
&2abz\cdot bcx-2abz\cdot cay-2bcx\cdot cay\\
=\ &(ayz-abc)^2+(xbz+xyc)^2+2abz\cdot xyz+2cay\cdot xyz-2abz\cdot bcx-2bcx\cdot cay\\
=\ &(ayz-abc)^2+2ayz(xbz+xyc)-2abc(xbz+xyc)+(xbz+xyc)^2\\
=\ &(ayz-abc)^2+2(ayz-abc)(xbz+xyc)+(xbz+xyc)^2\\
=\ &(xbz+xyc+ayz-abc)^2\geqslant 0
\end{aligned}$$

评注 为简化起见，不等式 ①两边同时除以正数 $x^2y^2z^2$，可令 $u=\frac{a}{x}, v=\frac{b}{y}$ 和 $w=\frac{c}{z}(u,v,w\in\mathbf{R}_+)$，则原不等式等价于

$$\left[\left(\frac{a}{x}\right)^2+1\right]\left[\left(\frac{b}{y}\right)^2+1\right]\left[\left(\frac{c}{z}\right)^2+1\right]\geqslant\left(\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{y}+\frac{b}{y}\cdot\frac{c}{z}+\frac{c}{z}\cdot\frac{a}{x}-1\right)^2$$

即

$$u^2v^2w^2+u^2+v^2+w^2-2uvw(u+v+w)+2(uv+vw+wu)\geqslant 0,$$

也即

$$(uvw-u-v-w)^2\geqslant 0.$$

显然成立.

所以原不等式成立. 当且仅当 $u+v+w=uvw$，即 $abc=ayz+bxz+cxy$ 时,等号成立.

【例 21-2】 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：

$$a^ab^bc^c\geqslant a^{\frac{b+c}{2}}\cdot b^{\frac{c+a}{2}}\cdot c^{\frac{a+b}{2}}.$$

①

证明： 由于欲证不等式关于 a,b,c 对称，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $a-b,b-c,a-c$ 均大于等于 0，且 $\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{a}{c}$ 都大于等于 1，从而由

$$\frac{a^a\cdot b^b\cdot c^c}{a^{\frac{b+c}{2}}\cdot b^{\frac{c+a}{2}}\cdot c^{\frac{a+b}{2}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{2}}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{2}}\geqslant 1$$

即得所证.

评注 （1）把所证的不等式两边平方即为 $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}\geqslant a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}$. 两边同乘以 $a^ab^bc^c$，就变成了第三届美国数学奥林匹克试题:

设 $a,b,c\in\mathrm{R}_+$，求证：$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

②

类似地，有

$$\frac{a^ab^bc^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}}\geqslant 1$$

不等式 ② 可推广到一般情形:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}_+$，则

$$\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}$$

（2）由以上两例我们看到，运用比较法证明不等式的关键是作适当的变形，如配方、分解、拆项、通分等.

【例 21-3】设 $a,b>0$，求证：$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$.

证明：不妨设 $a>b>0$，则欲证不等式等价于

$$a\sqrt{a^2+1}\sqrt{ab+1}+b\sqrt{b^2+1}\sqrt{ab+1}>(a+b)\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1},$$

从而只需要证 $a\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{ab+1}-\sqrt{b^2+1}\right)>b\sqrt{b^2+1}\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{ab+1}\right)$.
上式等价于

$$a\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{b(a-b)}{\sqrt{ab+1}+\sqrt{b^2+1}}>b\sqrt{b^2+1}\cdot\frac{a(a-b)}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}}$$

注意到 $ab(a-b)>0$，上式等价于

$$\sqrt{a^2+1}\cdot\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{ab+1}\right)>\sqrt{b^2+1}\cdot\left(\sqrt{b^2+1}+\sqrt{ab+1}\right).$$

又由于 $a>b>0$，上式显然成立. 因此，不等式得证.

法二：

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right)\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)\geqslant(a+b)^2$$

即证 $\frac{(a+b)^2}{a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$

$\Leftarrow (a+b)\sqrt{ab+1}\geqslant a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}$

$\Leftarrow \sqrt{(a+b)[(a^2+1)b+(b^2+1)a]}\geqslant\sqrt{a^2(b^2+1)}+\sqrt{b^2(a^2+1)}$ (*

记 $(a^2+1)b=A$

$(b^2+1)a=B$

(*)式

$\Leftarrow \sqrt{(a+b)(A+B)}\geqslant\sqrt{aB}+\sqrt{bA}$ (1)

(1) 显然成立.

∴原不等式成立. $a=b$ 时取等

【例 21-4】给定 n 个非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$，求证：

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n^2} \leqslant \frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}$$

证明：要证原不等式，只要证

$$\frac{x_1-1}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_1\right)}+\frac{x_2-1}{\left(1+x_2^2\right)\left(1+x_2\right)}+\cdots+\frac{x_n-1}{\left(1+x_n^2\right)\left(1+x_n\right)} \leqslant 0$$

首先证明对于任何 k，都有 $\frac{x_k-1}{\left(1+x_k^2\right)\left(1+x_k\right)} \leqslant \frac{x_k-1}{4}$.

事实上，若 $x_k \geqslant 1$，则 $\left(1+x_k^2\right)\left(1+x_k\right) \geqslant (1+1)(1+1)=4$，上式显然成立;

若 $x_k<1$，则 $\frac{1}{\left(1+x_k^2\right)\left(1+x_k\right)}>\frac{1}{4}$，而 $x_k-1<0$，所以有 $\frac{x_k-1}{\left(1+x_k^2\right)\left(1+x_k\right)}<\frac{x_k-1}{4}$.

这样一来,便有

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1-1}{\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_1\right)}+\frac{x_2-1}{\left(1+x_2^2\right)\left(1+x_2\right)}+\cdots+\frac{x_n-1}{\left(1+x_n^2\right)\left(1+x_n\right)} \\
\leqslant\ & \frac{x_1-1}{4}+\frac{x_2-1}{4}+\cdots+\frac{x_n-1}{4} \\
=\ & \frac{\left(x_1+x_2+\cdots+x_n\right)-n}{4}=0,
\end{aligned}$$

即原不等式得证.

评注 由此例可以看出，分析法的特点是：从"未知"看"需知"，执果索因，逐步靠扰“已知”，其逐步推理，实际上是要寻找它的充分条件.

【例 21-5】设 $a, b, c \in[0,1]$，求证:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}+a+b+c \leqslant 3+\frac{1}{3}(a b+b c+c a)$$

证明：我们首先证明

$$\frac{1}{1+a+b} \leqslant 1-\frac{a+b}{2}+\frac{a b}{3}$$

这等价于证明

$$6 \leqslant(1+a+b)[6-3(a+b)+2 a b]$$

即

$$6 \leqslant 6+6(a+b)-3(a+b)-3(a+b)^2+2 a b+2 a b(a+b),$$

所以只需要证明

$$2 a b^2+2 a b^2-3 a^2-3 b^2-4 a b+3 a+3 b \geqslant 0$$

即

$$2a(a-1)(b-1)+2b(a-1)(b-1)+a(1-a)+b(1-b)\geqslant 0$$

因为 $a,b,c\in[0,1]$，所以上式显然成立.
因此，对其他两式有

$$\frac{1}{1+b+c}\leqslant 1-\frac{b+c}{2}+\frac{bc}{3}，\ \frac{1}{1+c+a}\leqslant 1-\frac{c+a}{2}+\frac{ca}{3}$$

将以上三式相加并化简即得

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}+a+b+c\leqslant 3+\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

法二：

证：要证 $\sum \frac{1}{1+a+b}+\sum a \le 3+\frac{1}{3}\sum ab$.

即证 $\sum \frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{2}\sum(a+b) \le \sum 1+\frac{1}{3}\sum ab$

即证 $\sum\left[\frac{2+(a+b)(a+b+1)}{2(1+a+b)}-1\right] \le \frac{1}{3}\sum ab$.

即证 $\sum \frac{(a+b)(a+b-1)}{2(1+a+b)} \le \frac{1}{3}\sum ab$

即证 $3\sum \frac{(a+b)(a+b-1)}{1+a+b} \le 2\sum ab$.

下证：$\forall a,b\in[0,1]$，有 $3(a+b)(a+b-1)\le 2ab(1+a+b)$.

1°. $a+b\le 1$ 显然 ；2°. $2\ge a+b>1$ $\therefore$ $ab\ge a+b-1$.

$\therefore$ 上式 $\Leftarrow$ $3(a+b)\le 2(1+a+b)$ $\Leftrightarrow$ $a+b\le 2$ 显然 .

$\therefore$ 综上：$\sum \frac{1}{1+a+b}+\sum a \le 3+\frac{1}{3}\sum ab$ 成立 #.

评注 由此例可以看出，综合法的特点是：从“已知”有“可知”,由因导因,逐步推向未知,其逐步推理,实际上是寻找它的必要条件.有时也将综合法、分析法结合起来，就好像有两个人，一个人从迷宫入口走向出口，另一个人从迷宫出口走向入口，争取在某处相会.

【例 21-6】设 n 是正整数，求证：$\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\cdots,\sqrt{n}$ 的算术平均数超过 $\frac{2\sqrt{n}}{3}$.

分析与解 用反证法. 我们要证明 $\frac{1}{n}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})>\frac{2}{3}\sqrt{n}$，即证 $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$，如果此式不是总成立，假定 n 是使其不成立的最小数，我们设法推出矛盾. 因为 $n=1$ 时要证的不等式是成立的，所以 $n>1$.因为 n 是使不等式不成立的最小数，所以在 $n-1$ 时不等式成立，于是

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}>\frac{2}{3}(n-1)^{\frac{3}{2}}$$

因为不等式对于 n 不成立，所以

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\geqslant\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}>\frac{2}{3}(n-1)^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}},2n^{\frac{3}{2}}>2(n-1)^{\frac{3}{2}}+3n^{\frac{1}{2}}$$

所以

$$n^{\frac{1}{2}}(2n-3)>2(n-1)^{\frac{3}{2}}$$

因为 $n\geqslant2$，上式两边都是正的，同时平方得 $n(2n-3)^2>4(n-1)^3$，即

$$4n^3-12n^2+9n>4n^3-12n^2+12n-4$$

因此 $9n>12n-4$，所以有 $4>3n$，这与 $n\geqslant2$ 矛盾,所以命题得证.

评注 用反证法证明不等式需注意，在否定了原命题的不等关系后，所得的数量关系，一般不止一种情形（因为"＞"的反面是"⩽"，而不单单是"＜"），在证明时切勿遗漏. 用数学归纳法同样可以证明此题，本质上与反证法类似。另外，本题也可以通过积分来证明:

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n}>\frac{1}{n}\int_0^n\sqrt{x}\,dx=\frac{2\sqrt{n}}{3}$$

【例 21-7】设 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant2)$ 都大于 1，求证：

$$2^{n-1}(a_1a_2\cdots a_n+1)>(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$$

证明：当 $n=2$ 时,即证：若 a_1,a_2 都大于 1，则

$$2(a_1a_2+1)>(1+a_1)(1+a_2)$$

①

① 可由 $2(a_1a_2+1)-(1+a_1)(1+a_2)=(a_1-1)(a_2-1)>0$ 导出，它表明 $n=2$ 时,上述命题成立.

假设当 $n=k$ 时,命题成立，则当 $n=k+1$ 时，由归纳假设及①，有

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1})\\<\;&2^{k-1}\cdot(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_k+1)\cdot(a_{k+1}+1)\\<\;&2^{k-1}\cdot2(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_k\cdot a_{k+1}+1)\\=\;&2^{(k+1)-1}(a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{k+1}+1)\end{aligned}$$

这说明，$n=k+1$ 时命题也成立，所以原不等式对一切 $n\geqslant2$ 的正整数均成立.

【例 21-8】 证明，对任意 $\alpha\leqslant1$ 与任意满足条件 $1\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$ 的数 x_1，$x_2,\cdots,x_n$，有

$$(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)^\alpha\leqslant1+1^{\alpha-1}\cdot x_1^\alpha+2^{\alpha-1}\cdot x_2^\alpha+\cdots+n^{\alpha-1}\cdot x_n^\alpha$$

证明：$n\in N$，当 $n=0$ 时,由 $1^\alpha=1$,不等式成立.假设欲证不等式对 n 成立,下面证明它对 $n+1$ 也成立，我们有

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})^\alpha-(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha\\
&=(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha\left[\left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n}\right)^\alpha-1\right]\\
&\leqslant(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha\left[\left(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n}\right)-1\right]\\
&=(1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha-1}x_{n+1}\leqslant[(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1}x_{n+1}\\
&=(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha
\end{aligned}
$$

其中不等式 $(1+x_1+\cdots+x_n)^{\alpha-1}x_{n+1}\leqslant[(n+1)\cdot x_{n+1}]^{\alpha-1}x_{n+1}$ 的正确性可由 $1+x_1+\cdots+x_n\geqslant(n+1)x_{n+1}$ 与 $\alpha-1\leqslant0$ 推出，由已证得的不等式及归纳假设得到

$$
\begin{aligned}
(1+x_1+\cdots+x_{n+1})^\alpha &\leqslant(1+x_1+\cdots+x_n)^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha\\
&\leqslant1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+\cdots+n^{\alpha-1}x_n^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha
\end{aligned}
$$

此即所要证明的结论.

评注 以上我们学习了证明不等式的五种基本方法,需要强调指出的是,这些方法是相互联系的,在证明过程中往往“你中有我，我中有你”,想简单地用一种基本方法解决问题常常是不能凑效的。

强化训练

1. 已知 a,b 都是正数且互不相等，求证：$a^5+b^5>a^2b^3+a^3b^2$.

2. 设 a,b,c 是正数，求证：$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c$. 当且仅当 $a=b=c$时，不等式中的等号成立.

3. 对任意正实数 x,y,z，证明不等式
$$\frac{x+1}{y+1}+\frac{y+1}{z+1}+\frac{z+1}{x+1}\leqslant\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

4. 设 a,b,c 是三角形的三边，且 $a+b+c=1$，求证：$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$.

5. 设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_8<a_9$，求证:$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3$.

6. 求证: $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

7. 求证：如果 $a,b,c,d>0$，则下面不等式中至少有一个不成立,

$$a+b<c+d,(a+b)(c+d)<ab+cd,(a+b)cd<ab(c+d).$$

8.设 $a>1,b>1,c>1,d>1,x,y$ 为实数且满足

$$a^x+b^y=\left(a^2+b^2\right)^x,c^x+d^y=2^y(cd)^{\frac{y}{2}}$$

求证：$x<y$.

9. 对于任意 $n \in N_+, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均为非负实数，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant \frac{1}{2}$，试用数学归纳法证明：$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \geqslant \frac{1}{2}$ 成立.

10. 已知 $a, b \in R_+$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，求证：对一切 $n \in N_+, (a+b)^n - a^n - b^n \geqslant 2^{2n} - 2^{n+1}$

11. 设 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 是互不相等的正整数,证明:

$$\left(x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_n^7\right) + \left(x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5\right) \geqslant 2\left(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3\right)^2.$$

12.已知 $x \geqslant y \geqslant z > 0$，求证：$\frac{x^2 y}{y+z} + \frac{y^2 z}{z+x} + \frac{z^2 x}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

13.已知由 +1 和 -1 所构成的三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$. 求证:

$$3\sum_{i=1}^{2014} a_i b_i + 3\sum_{i=1}^{2014} b_i c_i \leqslant \sum_{i=1}^{2014} a_i^2 + \sum_{i=1}^{2014} b_i^2 + \sum_{i=1}^{2014} c^2 + 3\sum_{i=1}^{2014} a_i c_i$$

14.设 $x_1, x_2, \cdots, x_{2012} \in \mathbf{R}$，且 $x_{12} = 1$，求 $\sum_{i,j=1}^{2012} min\{i,j\} \cdot x_i x_j$ 的最小值.

1. 【解析】作差：$\left(a^5+b^5\right)-\left(a^2 b^3+a^3 b^2\right)=\left(a^5- a^3 b^2\right)+\left(b^5-a^2 b^3\right)=a^3\left(a^2-b^2\right)-b^3\left(a^2-b^2\right) =\left(a^2-b^2\right)\left(a^3-b^3\right)$. 又 a, b 都是正数且互不相等，所以有 $\left(a^2-b^2\right)\left(a^3-b^3\right)>0$,即 $a^5+b^5>a^2 b^3+a^3 b^2$.

2. 【解析】我们只需要证明不等式左边减去右边的差是非负的即可.

$$\begin{aligned}
&\text{左一右} = \left(\frac{a^2+bc}{b+c}-a\right)+\left(\frac{b^2+ca}{c+a}-b\right)+\left(\frac{c^2+ab}{a+b}-c\right)\\
&=\frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c}+\frac{b^2+ca-ab-bc}{a+c}+\frac{c^2+ab-ac-bc}{a+b}\\
&=\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-a)(b-c)}{a+c}+\frac{(c-a)(c-b)}{a+b}\\
&=\frac{\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)+\left(b^2-a^2\right)\left(b^2-c^2\right)+\left(c^2-a^2\right)\left(c^2-b^2\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2+\left(b^2-c^2\right)^2+\left(c^2-a^2\right)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

当且仅当$a=b=c$时，不等式中的等号成立.

法二：

不妨设 $a \le b \le c$.

$a^2 \le b^2 \le c^2$　　$\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{c+a} \le \frac{1}{a+b}$

由排序不等式

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{a^2}{a+b}$$

$$左式 \geqslant \frac{b^2+bc}{b+c}+\frac{c^2+ca}{c+a}+\frac{a^2+ab}{a+b}$$

$$= b+c+a.$$

3.【解析】原不等式等价于

$$\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)} \le 0$$

不失一般性，我们设 y 是 x,y,z 中第二大的数（即 $x \leqslant y \leqslant z$ 或 $x \geqslant y \geqslant z$ ）.
若 $x \leqslant y \leqslant z$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\\ \leqslant\ &\frac{y-x}{x(x+1)}+\frac{z-y}{x(x+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}=0;\end{aligned}$$

若 $x \geqslant y \geqslant z$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{z(z+1)}+\frac{x-z}{x(x+1)}\\ \leqslant &\frac{y-x}{y(y+1)}+\frac{z-y}{y(y+1)}+\frac{x-z}{y(y+1)}=0.\end{aligned}$$

综上所述，原不等式成立.

时：要证 $\sum \frac{x+1}{y+1} \le \sum \frac{x}{y}$，即证 $\sum \frac{1}{x+1} \le \sum \frac{z}{(x+1)x}$

注意到 (x,y,z) 与 $\left(\frac{1}{x(x+1)}, \frac{1}{y(y+1)}, \frac{1}{z(z+1)}\right)$ 为一对反序

由排序不等式（反序和 ≤ 乱序和）得：$\sum \frac{1}{x+1} = \sum \frac{x}{x(x+1)} \le \sum \frac{z}{x(x+1)}$.#

注：本题为轮换对称式，不能直接定义 x,y,z 的一个序，

4. 【解析】设 S 是边长为 a,b,c的三角形的面积，由海伦公式知

$$S=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)}.$$

即 $16S^2=-1+4(ab+bc+ca)-8abc$,

又 $4(ab+bc+ca)=2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)$,

所以$16S^2=1-2\left(a^2+b^2+c^2\right)-8abc>0$.

5.【解析】要证原不等式，只要证 $a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9<3(a_3+a_6+a_9)$.
即 $(a_1+a_2-2a_3)+(a_4+a_5-2a_6)+(a_7+a_8-2a_9)<0$.

而由题设 $a_1+a_2<2a_3, a_4+a_5<2a_6, a_7+a_8<2a_9$,

即 $a_1+a_2-2a_3<0, a_4+a_5-2a_6<0, a_7+a_8-2a_9<0$,

所以原不等式获证.

6.【解析】由 $\sqrt{k-1}<\sqrt{k}<\sqrt{k+1}$，得 $\sqrt{k}+\sqrt{k-1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}, k\in\mathbf{N}_+$.

所以 $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$,

即 $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$.

从而 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{m})<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{m-1})(1\leqslant m\leqslant n, m$ 为正整数).取 $n=80$,

$m=1$，得 $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}$ ；

取$n=80, m=2$，得 $1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{80}-1)+1<2\sqrt{81}-1=17$.

于是 $16<\sum_{k=1}^{80}\frac{1}{\sqrt{k}}<17$.

7.【解析】用反证法. 把前两个不等式相乘， $(a+b)^2<ab+cd$，但 $(a+b)^2\geq 4ab$.因而 $4ab<ab+cd, 3ab<cd$. 又把后两个不等式相乘，得到 $ab(ab+cd)>(a+b)^2cd\geq 4abcd$，这样 $ab+cd>4cd$ 即 $ab>3cd$，矛盾.

8.【解析】用反证法. 假设 $x-y=t\geqslant 0$，由 $c^x+d^y=2^y(cd)^{\frac{y}{2}}$，可知

$$\left(\frac{c}{d}\right)^y\cdot c^t+1=\left(2\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^y$$

由 $t\geqslant 0, c>1$，可得 $c^t\geqslant 1$,所以 $\left(2\sqrt{\frac{c}{d}}\right)^y\geqslant\left(\frac{c}{d}\right)^y+1$.

设 $\sqrt{\frac{c}{d}}=u$，则由 $(2u)^y\geqslant u^{2y}+1$，可得 $2^y\geqslant u^y+u^{-y}\geqslant 2$，所以 $y\geqslant 1, x=y+t\geqslant 1$. 因此

$a^x+b^y=\left(a^2+b^2\right)^x \geqslant a^{2x}+b^{2x}$，但是 $a^x<a^{2x}, b^y \leqslant b^x<b^{2x,}$ ，得到矛盾，所以 $x<y$.

9.【解析】假设当 $n=k$ 时,命题成立，则当 $n=k+1$ 时，令 $x_k^{'}=x_k+x_{k+1}$，利用 $n=k$ 的结论.

当 $n=1$ 时，显然成立. 假设当 $n=k$ 时，命题成立，则当 $n=k+1$ 时，$x_k^{'}=x_k+x_{k+1}$，由归纳假设知

$$\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right) \cdots\left(1-x_k^{'}\right) \geqslant \frac{1}{2} . \quad ①$$

又 1-$x_k^{'}$=1-x_k-x_{k+1}

$\leqslant 1-x_k-x_{k+1}+x_k x_{k+1}$

$=\left(1-x_k\right)\left(1-x_{k+1}\right)$.

②

由式①和式②即得 $\left(1-x_1\right)\left(1-x_2\right) \cdots\left(1-x_k\right)\left(1-x_{k+1,}\right) \geqslant \frac{1}{2}$，组 $n=k+1$ 时命题成立. 于是根据数学归纳法，命题成立.

10.【解析】对$n \in N$. 用归纳法：当n =1 时，结论显然成立. 假设 $n=k$ 时，不等式成立，即有

$(a+b)^k-a^k-b^k \geqslant 2^{2k}-2^{k+1}$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}=(a+b)\left[(a+b)^k-a^k-b^k\right]+a^k b+a b^k$$

因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，所以 $a b=a+b$. 由 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4$，得到 $a+b \geqslant 4$，从而

$a^k b+a b^k \geqslant 2 \sqrt{a^k b a b^k}=2(a b)^{\frac{k+1}{2}} \geqslant 2^{k+2}$.

于是 $(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1} \geqslant 4\left(2^{2k}-2^{k+1}\right)+2^{k+2}=2^{2(k+1)}-2^{k+2}$

即不等式对 $n=k+1$ 成立.

11.【解析】（1） 当 $n=1$ 时,$x_1^7+x_1^5 \geqslant 2 \sqrt{x_1^7 \cdot x_1^5}=2\left(x_1^3\right)^2$ ，不等式成立.

（2）假设当 $n=k$ 时，不等式成立. 即

$$2\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3\right)^2 \leqslant\left(x_1^7+x_2^7+\cdots+x_k^7\right)+\left(x_1^5+x_2^5+\cdots+x_k^5\right) \quad ①$$

则当 $n=k+1$ 时，不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}$ ，不等式右边为

$$2\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3+x_{k+1}^3\right)^2=2\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3\right)^2+4x_{k+1}^3\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3\right)+2x_{k+1}^6$$

②

所以欲证不等式在 $n=k+1$ 时成立,由①②知只需要证明

$$4x_{k+1}^3\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3\right)+2x_{k+1}^6\leqslant x_{k+1}^7+x_{k+1}^5,$$

即证

$$4\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3\right)+2x_{k+1}^3\leqslant x_{k+1}^4+x_{k+1}^2,$$
③

事实上，

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3 &\leqslant 1^2+2^2+\cdots+(x_{k+1}-1)^2\\&=\left[\frac{x_{k+1}(x_{k+1}-1)}{2}\right]^2\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}4\left(x_1^3+x_2^3+\cdots+x_k^3\right)+2x_{k+1}^3&\leqslant 4\left[\frac{x_{k+1}(x_{k+1}-1)}{2}\right]^2+2x_{k+1}^3\\&=x_{k+1}^4+x_{k+1}^2.\end{aligned}$$

所以式③成立，不等式在 $n=k+1$ 时成立.

综上所述，对一切正整数 n ，不等式成立.

12.【解析】设 $A=\frac{x^2y}{y+z}+\frac{y^2z}{z+x}+\frac{z^2x}{x+y},B=\frac{x^2z}{y+z}+\frac{y^2x}{z+x}+\frac{z^2y}{x+y}$,显然 $A+B=x^2+y^2+z^2$，下证: $A\geqslant B$.

$$
\begin{aligned}
A-B&=\left(\frac{x^2y}{y+z}+\frac{y^2z}{z+x}+\frac{z^2x}{x+y}\right)-\left(\frac{x^2z}{y+z}+\frac{y^2x}{z+x}+\frac{z^2y}{x+y}\right)\\
&=\frac{x^2(y-z)}{y+z}+\frac{y^2(z-x)}{z+x}+\frac{z^2(x-y)}{x+y}\\
&=\frac{x^2(y-z)}{y+z}+\frac{z^2(x-y)}{x+y}-\frac{y^2(x-y)}{z+x}\ -\frac{y^2(y-z)}{z+x}\\
&=(y-z)\left(\frac{x^2}{y+z}-\frac{y^2}{z+x}\right)+(x-y)\left(\frac{z^2}{x+y}-\frac{y^2}{z+x}\right)\\
&=(y-z)(x-y)\frac{x^2+y^2+xy+yz+zx}{(x+z)(y+z)}-\\
&\quad(x-y)(y-z)\frac{z^2+y^2+xy+yz+zx}{(x+y)(x+z)}\\
&=(x-y)(y-z)\left[\frac{x^2+y^2+xy+yz+zx}{(x+z)(y+z)}-\frac{z^2+y^2+xy+yz+zx}{(x+y)(x+z)}\right]\\
&=\frac{(x-y)(y-z)}{(x+y)(x+z)}\left(x^2-z^2\right)\\
&=\frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x+y)},
\end{aligned}
$$

因为 $x\geqslant y\geqslant z>0$，所以 $A-B\geqslant 0$，即 $A\geqslant B$.
又 $2A\geqslant A+B=x^2+y^2+z^2$ ．所以有$A\geqslant\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$,

即$\frac{x^2y}{y+z}+\frac{y^2z}{z+x}+\frac{z^2x}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)$

法二：

$$\frac{x^2y}{y+z}+\frac{y^2z}{z+x}+\frac{z^2x}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2\cdot(y-z)}{y+z}+\frac{z^2(x-y)}{x+y}\geqslant\frac{y^2(x-z)}{x+z}$$

$$y^2(x-z)=y^2(x-y+y-z)\leq x^2(y-z)+z^2(x-y)$$

$$\therefore\ \frac{y^2(x-z)}{x+z}\leq\frac{x^2(y-z)+z^2(x-y)}{x+z}$$

下证 $$\frac{x^2(y-z)+z^2(x-y)}{x+z}\leq\frac{x^2(y-z)}{y+z}+\frac{z^2(x-y)}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2(y-z)\left(\frac{1}{x+z}-\frac{1}{y+z}\right)\leq z^2(x-y)\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x+z}\right)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2\cancel{(y-z)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x+z)}(y+z)}\geqslant\frac{z^2\cancel{(x-y)}\cancel{(y-z)}}{\cancel{(x+z)}(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2(x+y)\geqslant z^2(z+y)$$ 显然成立

$x=y=z$ 时 "=" 成立

13.【解析】注意到当$u\cdot v\leqslant 1$ 时,总有 $(1-u)(1-v)\geqslant 0$. 因此 $u+v\leq 1+uv$.

取$u=a_ib_i, v=b_ic_i$,, 则 $uv=a_ib_ib_ic_i=a_i(b_i)^2c_i=a_ic_i$ （这是因为 ${b_i}^2=1$ ）.

所以 $a_ib_i+b_ic_i\leqslant 1+a_ic_i$, 从而 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\leqslant n+\sum_{i=1}^{n}a_ic_i(n\geqslant 1)$，于是 $3\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+3\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\leqslant 3n+3\sum_{i=1}^{n}a_ic_i$

$$3n+3\sum_{i=1}^{n}a_ic_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2+\sum_{i=1}^{n}c_i^2+3\sum_{i=1}^{n}a_ic_i$$

(这是因为 $a_i^2=b_i^2=c_i^2=1$)，取 $n=2014$, 即得欲证不等式.

$\Leftrightarrow$ 证明 $\sum_{i=1}^{2024} b_i(a_i+c_i)-a_ic_i \leq 2024$

$\forall i$. $\because$ a_i. b_i c_i 的取值极为有限

$\therefore$ $b_i(a_i+c_i)-a_ic_i$

的取值也极为有限

只能是 1. -3

故. $b_i(a_i+c_i)-a_ic_i \leq 1$

$\therefore$ $\sum_{i=1}^{2024} \sim \quad \leq 2024$

14.【解析】令 $S_i=x_i+x_{i+1}+\cdots+x_{2012}$，则由于 $\sum_{i,j=1}^{2012}\min\{i,j\}\cdot x_ix_j=\sum_{i}^{2012}ix_i^2+2\sum_{i<j}ix_ix_j$,因此

$$\sum_{i,j=1}^{2012}\min\{i,j\}\cdot x_ix_j=S_1^2+S_2^2+\cdots+S_{2012}^2.$$

因为 $S_{12}-S_{13}=x_{12}=1$，所以 $2\left(S_{12}^2+S_{13}^2\right)\geqslant\left(S_{12}-S_{13}\right)^2=1$，即 $S_{12}^2+S_{13}^2\geqslant\frac{1}{2}$.

所以

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{2012}\min\{i,j\}\cdot x_ix_j &=\sum_{i=1}^{2012}S_i^2\\ &\geqslant S_{12}^2+S_{13}^2\geqslant\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

当且仅当 $S_{12}=\frac{1}{2},S_{13}=-\frac{1}{2}$ 时，$S_i=0(i\neq 12,13,1\leqslant i\leqslant 2012)$. 即当 $x_{2012}=x_{2011}=\cdots=x_{14}=0,x_{13}=-\frac{1}{2},x_{12}=1,x_{11}=-\frac{1}{2},x_{10}=x_9=\cdots=x_1=0$ 时，

$$\sum_{i,j=1}^{2012}\min\{i,j\}\cdot x_ix_j=\frac{1}{2}$$

所以最小值为 $\frac{1}{2}$.

$$\sum_{i,j=1}^{2012}\min\{i,j\}x_ix_j=\sum_{i=1}^{2012}ix_i^2+\sum_{1\le i<j\le 2012}ix_ix_j+\sum_{1\le j<i\le 2012}jx_ix_j$$

$$=\sum_{i=1}^{2012}ix_i^2+\sum_{1\le i<j\le 2012}2ix_ix_j \quad (*)$$

考虑到 $(x_1+x_2+\cdots+x_{2012})^2=\sum_{i=1}^{2012}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le 2012}2x_ix_j$

$$(x_2+x_3+\cdots+x_{2012})^2=\sum_{i=2}^{2012}x_i^2+\sum_{2\le i<j\le 2012}2x_ix_j$$

$$(x_3+x_4+\cdots+x_{2012})^2=\sum_{i=3}^{2012}x_i^2+\sum_{3\le i<j\le 2012}2x_ix_j$$

$$\vdots$$

$$x_{2012}^2=x_{2012}^2$$

叠加可知 $(*)=(x_1+x_2+\cdots+x_{2012})^2+(x_2+\cdots+x_{2012})^2+\cdots+x_{2012}^2$

$$\geq(x_{12}+x_{13}+\cdots\ x_{2012})^2+(x_{13}+\cdots+x_{2012})^2+\cdots+x_{2012}^2$$

$$\geq(x_{12}+x_{13}+\cdots+x_{2012})^2+(x_{13}+\cdots+x_{2012})^2\geq 2\left[\frac{1+x_{13}+\cdots+x_{2012}-(x_{13}+\cdots+x_{2012})}{2}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}$$

取等时 $x_1=x_2=\cdots=x_{10}=0$ ，$x_{11}=-\frac{1}{2}$ ，$x_{12}=1$ ，$x_{13}=-\frac{1}{2}$ ，$x_{14}=x_{15}=\cdots=x_{2012}=0$