94+

3.4 函数的奇偶性（1）

知识点：偶函数、奇函数、函数图像的对称性、抽象函数

【A 组】

1. 若定义在$[3-a,5]$上的函数$f(x)$为奇函数，则$a=$ 8 .

2. 若$f(x)$是偶函数，则$f(1+\sqrt{2})-f(\frac{1}{1-\sqrt{2}})=$ 0 .

3. 函数$y=2mx^2+(m+1)x+2$是偶函数的充分必要条件是 m=-1 .

4. 若$f(x)$是定义在R上的奇函数，当$x\le 0$时，$f(x)=2x^2-x$，则$f(1)+f(-1)=$ 0 .

5. 下面四个结论：①偶函数的图像一定与y轴相交；②奇函数的图像一定通过原点；③偶函数的图像关于y轴对称；④既是奇函数又是偶函数的函数一定是$f(x)=0\,(x\in R)$，其中正确命题的序号是 ③ .

【B 组】

1. 若函数$f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)(x-a)}$为奇函数，则$a=$ $\frac{1}{2}$.

2. 若$f(x)=ax^2+bx+3a+b$是定义在$[a-1,2a]$上的偶函数，则$a=$ $\frac{1}{3}$ ，$b=$ 0 .

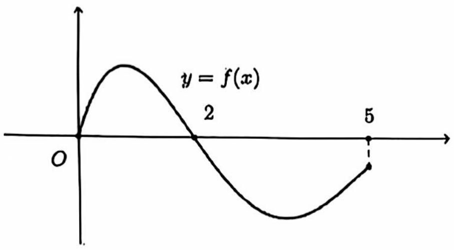
3. 已知$f(x)=ax^{2021}+bx^3+cx+2$，若$f(-3)=1$，则$f(3)=$ 3 .

4. 若$f(x)$是偶函数，当$-2\le x<0$时，$f(x)=\sqrt[3]{x}+x$，当$0<x\le 2$时，$f(x)=$ $-\sqrt[3]{x}-x$.

5. 已知$f(x)$是定义在R上的奇函数．若当$x<0$时，$f(x)=x^{\frac{1}{3}}+2^x-1$，则函数的解析式$f(x)=$ $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-2^{-x}+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x^{\frac{1}{3}}+2^{x}-1 & x<0 \end{cases}$

4+20

6. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$，若当 $x\in[0，5]$ 时，$f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(-2,0)\cup(2,5]$.



7. 函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ （ D ）　误，C.

A.是奇函数　　B.是偶函数　　C.既是奇函数又是偶函数　　D.是非奇非偶函数

8. 下列判断中正确的是(D)

A. $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 是偶函数

B. $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$ 是奇函数

C. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ （$x\in R^+$）是偶函数

D. $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 是奇函数

9. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 R 上的偶函数和奇函数，则下列结论恒成立的是（ A ）

A. $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数

B. $f(x)-|g(x)|$ 是奇函数

C. $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数

D. $|f(x)|-g(x)$ 是奇函数

10. 函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是（ B ）

A. $ab=0$　　B. $a^2+b^2=0$　　C. $a=b$　　D. $a+b=0$

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为 0 的函数，若对于任意的 a、$b\in R$ 都满足 $f(ab)=af(b)+bf(a)$，则函数 $f(x)$（ A ）

A.是奇函数　　B.是偶函数

C.既是奇函数又是偶函数　　D.既不是奇函数也不是偶函数

12. 判断下列函数的奇偶性，并说明理由.

(1) $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$；

解：(1) $f(-x)=(-x-1)\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$=\frac{(-x-1)}{|1+x|}\cdot\sqrt{1-x^2}$.

不奇不偶.

(2) $f(x)=\frac{x^3+ax^2}{x+a}$.

解：定义域：$(-\infty,-a)\cup(-a,+\infty)$

$a\neq0$时，不奇不偶

$a=0$时，$f(x)=\frac{x^3}{x}$. 为偶函数.

13. 已知 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}(a、b、c\in Z)$ 奇函数，且 $f(1)=2$，$f(2)<3$，

求 $a、b、c$ 的值.

解：$c=0$

$f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}$.

$\frac{a+1}{b}=2$

$\frac{4a+1}{2b}<3$.

$a+1=2b$

$\frac{4a+1}{a+1}<3$

$\frac{a-2}{a+1}<0$

$-1<a<2$.

$\because 2|a+1$

$\therefore a=1$.

$\therefore b=1$.

14. 定义两种运算：$a\oplus b=\sqrt{a^2-b^2}$，$a\otimes b=|a-b|$，(1)求函数 $f(x)=\frac{2\oplus x}{(x\otimes2)-2}$ 的定义域 (2)判断 $f(x)=\frac{2\oplus x}{(x\otimes2)-2}$ 奇偶性并证明.

解：(1) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{|x-2|-2}$.

$x\in[-2,0)\cup(0,2]$.

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2-x-2}=-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

$f(-x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=-f(x)$

$\therefore$为奇函数.

15. 已知函数 $f(x)=x|x+m|+n\,(m、n\in R)$.

(1) 求证：$m=n=0$ 是 $f(x)$ 是奇函数的充要条件；

(2) 若常数 $n=-4$，且 $f(x)<0$ 对任意 $x\in[0,1]$ 恒成立，求 m 的取值范围.

格式

解：(1) 必要性 $f(-x)=-x|-x+m|+n=-x|x+m|-n$.

$2n=x(|m-x|-|x+m|)$ 对任意x均成立

$\therefore n=0$，$|m-x|=|x+m|$.

$x^2-2mx+m^2=x^2+2mx+m^2$

$\therefore m=0$

充分性：$m=n=0$时，$f(x)=x|x|$

$f(-x)=-x|x|=f(x)$

$\therefore$得证

(2) ?

-5

【C组】

1、若函数 $f(x)=\dfrac{(\sqrt{1008}x+\sqrt{1009})^2+\sin 2018x}{2016x^2+2018}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 M+m=___1___.

2、已知函数 $f(x)=x^3+sinx\ (x\in R)$，函数 $g(x)$ 满足 $g(x)+g(2-x)=0\ (x\in R)$，若函数 $h(x)=f(x-1)-g(x)$ 恰有 2019 个零点，则所有这些零点之和为___2019___.

【滚动练习】

1. 集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\mid x=1,\ y\in R\}$，则 $M\cap N$ 等于___$\{(1,0)\}$___.

2. 已知 $A=\{x\mid x^2+x-2=0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+2a-4=0\}$，若 $B\subseteq A$，实数 a 的值等于___1，4___.

$a^2-8a+16$

3. 写出“$x>0$ 且 $y>0$”成立的一个必要非充分条件是___$xy>0$___.

4. $\alpha: x\neq 2$”是“$\beta: x^2\neq 4$”的___必要不充分___条件.

5. 用反证法证明命题：“如果 $a,b\in N$，$a\cdot b$ 可以被 5 整除，则 a,b 至少有一个能被 5 整除”应假设的内容是___a,b 都不能被 5 整除___.

15 (2) $x=0$时 $f(x)<0$ 恒成立;

$x\in(0,1]$时, 原不等式可化为: $|x+m| < -\frac{4}{x}$

$-x+\frac{4}{x} < m < -x-\frac{4}{x}$, ∴对$\forall x\in(0,1]$成立.

∴ $\begin{cases} m < (-x-\frac{4}{x})_{min} & ① \\ m > (-x+\frac{4}{x})_{max} & ② \end{cases}$

对①:

令 $g(x) = -x+\frac{4}{x}$, 在$(0,1]$上↓, ∴ $m < g(1) = 3$;

对②

令 $h(x) = -x-\frac{4}{x}$, 由对勾函数性质知, 它在$(0,1]$上↑, ∴ $m > (h(x))_{max} = h(1) = -5$.

∴ $-5 < m < 3$;

$M+N=2$, B 选项正确.

7. **解析** 由已知得

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{1008}\sqrt{1009}x+\sin 2018x}{2016x^2+2018}.$$

令

$$g(x)=\frac{2\sqrt{1008}\sqrt{1009}x+\sin 2018x}{2016x^2+2018},$$

则 $g(x)$为奇函数.所以 $g(x)$的图像关于$(0,0)$对称,则 $f(x)$的图像关于$\left(0,\frac{1}{2}\right)$对称.从而 $M+m=1$.

8. **解析** 由已知得 $f(-x)=-f(x)$, $f(2-x)=f(2+x)$, 则 $f(x+4)=f(-x)=$

不等式 $f(x)<6$，即 $2\log_2 x+2<6$，解得 $0<x<4$. 故不等式的解集为 $\{x \mid 0<x<4\}$.

11. 解析 函数 $f(x)=x^3+\sin x$ 为奇函数，则 $f(x)$ 的图像关于 $(0,0)$ 对称，所以 $f(x-1)$ 的图像关于 $(1,0)$ 对称. 由函数 $g(x)$ 满足 $g(x)+g(2-x)=0$，得 $g(x)$ 的图像关于 $(1,0)$ 对称. 由此可知 $h(x)$ 的图像关于 $(1,0)$ 对称，从而这 2019 个零点关于 $(1,0)$ 对称. 由于 $h(1)=f(0)-g(1)=0$，故 $x=1$ 是 $h(x)$ 的一个零点，其余 2018 个零点两两关于 $(1,0)$ 对称，和为 2018. 因此所有这些零点之和为 2019.

12. 解析 由已知得 $f(x+14)=$ 1