国庆作业（3）

1、设全集$U=\{1,2,a\}$， $A=\{1\}$，$\overline{A}=\{2,a^2+2a-2\}$，则实数$a=$_________.

2、如图，用长度为24米的材料围成一个矩形场地，场地中间用该材料加两道与矩形的边平行的隔墙，若使矩形的面积最大，则隔墙的长度是_________米.

3、集合$\boldsymbol{A=\{n|n^3<2023<3^n\}}$的子集个数为_________.

4、关于x的不等式$|\boldsymbol{x-a}|+|\boldsymbol{x-2}|\geq \mathbf{a}$的解集为R，则实数a的取值范围是_________.

5、已知集合$A=\{x||x-1|>2\}$，集合$B=\{x|mx+1<0\}$，若$A\cup B=A$，则m的取值范围是_________.

6、 若集合$A=\{x\,|\,2a+1\le x\le 3a-5\},B=\{x\,|\,3\le x\le 22\}$,则能使$A\subseteq A\cap B$成立的所有$a$的集合是_________.

7、由无理数引发的数学危机一直延续到19世纪．直到1872年，德国数学家戴德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数（史称戴德金分割），并把实数理论建立在严格的科学基础上，才结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续2000多年的数学史上的第一次大危机．所谓戴德金分割，是指将有理数集Q划分为两个非空的子集M与N，且满足$M\bigcup N=Q$，$M\bigcap N=\varnothing$，M中的每一个元素都小于N中的每一个元素，则称(M,N)为戴德金分割.
试判断，对于任一戴德金分割(M,N)，下列选项中，不可能成立的是 _________.

(1) M没有最大元素，N有一个最小元素

(2) M没有最大元素，N也没有最小元素

(3) M有一个最大元素，N有一个最小元素

(4) M有一个最大元素，N没有最小元素

8、设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为“取整函数”，如：$[1.6]=1$，$[-1.6]=-2$.现有关于“取整函数”的两个命题：①集合$A=\{x\mid x^2-[x]-1=0,-1<x<2\}$是单元素集；②对于任意$x\in\mathbf{R}$，$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$成立，则真命题为_________.

9、将集合$\boldsymbol{M=\{x|x=\frac{1}{k},k=1,2,\cdots,2024\}}$的所有非空子集记为$\boldsymbol{M_i(i=1,2,\cdots 2^{2024}-1)}$，每一非空子集中所有元素的乘积记为$\boldsymbol{m_i(i=1,2,\cdots 2^{2024}-1)}$,则$\boldsymbol{m_1+m_2+\cdots+m_{2^{2024}-1}=}$_________.

10、Q是有理数集，集合$M=\left\{x\middle|x=a+\sqrt{3}b,a,b\in Q,x\neq 0\right\}$，在下列集合中：

①$\left\{x\middle|x=\sqrt{3t},t\in M\right\}$；②$\left\{x\middle|x=t^2,t\in M\right\}$；

③$\left\{x\middle|x=x_1+x_2,x_1\in M,x_2\in M\right\}$；④$\left\{x\middle|x=x_1x_2,x_1\in M,x_2\in M\right\}$.

与集合M相等的集合序号是_________.

11. 解下列不等式：

(1)$\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\leq 1$；　　(2)$\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\geq 0$.

12. 已知集合 $A=\left\{x\mid\left|x-a\right|<2\right\}$， $B=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}<0\right.\right\}$.

(1)若 $a=2$，求 $A\cap B$；

(2)“$x\in B$”是“$x\in A$”的充分非必要条件，求实数 a 的取值范围.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=\left(m+1\right)x^{2}-\left(m-1\right)x+m-1$.

(1) 若不等式 $f\left(x\right)<1$ 的解集为 R，求 m 的取值范围；

(2) 解关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\geq\left(m+1\right)x$；

(3) 若不等式 $f\left(x\right)\geq 0$ 对一切 $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 恒成立，求 m 的取值范围.

14. 已知非空实数集S，T满足：任意$x \in S$，均有$\frac{x-1}{x} \in S$；任意$y \in T$，均有$\frac{y-1}{y+1} \in T$.

(1)直接写出S中所有元素之积的所有可能值；

(2)若T由四个元素组成，且所有元素之和为3，求T；

(3)若$S \cap T$非空，且由5个元素组成，求$S \cup T$的元素个数的最小值.

15. 集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是由$n(n>3)$个正整数组成的集合，如果任意去掉其中一个元素$a_i(i=1,2,\cdots,n)$之后，剩余的所有元素组成的集合都能分为两个交集为空的集合，且这两个集合的所有元素之和相等，就称集合A为“可分集合”.

(1)判断集合$\{1,2,3,4\}$、$\{1,3,5,7,9,11,13\}$是否为“可分集合”（不用说明理由）；

(2)求证：五个元素的集合$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$一定不是“可分集合”；

(3)若集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是“可分集合”，证明n是奇数.