10.26 周末作业

1.已知全集$U=\mathrm{R}$，$A=\{x|(x-1)(x+2)(x-3)\leq 0\}$，则$\overline{A}=$______.

【答案】$\{x|-2<x<1$ 或$x>3\}$

2集合$\{x|x\in\mathrm{N}$ 且$\frac{6}{x+2}\in\mathrm{N}\}$可用列举法表示为______.

【答案】$\{0,1,4\}$

3已知集合$A=\{x/y\sqrt{3-x}=1\}$, $B=\{y/y\sqrt{3-x}=1\}$，则$A\cap B=$______.

【答案】$\{x/0<x<3\}$

4已知集合$A=\{-1,1,2\}$, $B=\{y/y=x^2,x\in A\}$，则满足$(A\cap B)\subseteq S\subseteq(A\cup B)$的集合$S$共有（　）个

A．3　　B．4　　C．7　　D．8

【答案】D

5用反证法证明命题“若$x+y>2$，则$x>1$或$y>1$”的过程中，应当作出的假设是____________.

【答案】$x\leq 1$且$y\leq 1$

若$-1\leq a\leq 3$且$-2\leq b\leq 1$，则 $2a-3b$的取值范围是______.

【答案】$[-5,12]$

7已知全集$U=\mathrm{R}$，集合$A=(-1,4)$, $B=\{x/2t-3\leq x\leq t+1\}$，若$\overline{A}\cap B=\emptyset$，求实数$t$的取值范围.

【答案】$1<t<3$或$t>4$

8.存在无数多个实数x，使得$m^2(1-x)=mx+1$成立，则实数m的值为________

【答案】-1

9．x，y，z 均为正实数，$\frac{2xy+yz}{4x^2+4y^2+3z^2}$的最大值是______.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{6}$

【详解】$4x^2+4y^2+3z^2=4x^2+3y^2+y^2+3z^2$

$\geq 2\sqrt{4x^2\cdot 3y^2}+2\sqrt{y^2\cdot 3z^2}=2\sqrt{3}(2xy+yz)$,

所以$\frac{2xy+yz}{4x^2+4y^2+3z^2}\leq\frac{2xy+yz}{2\sqrt{3}(2xy+yz)}=\frac{\sqrt{3}}{6}$,

当且仅当 $2x=\sqrt{3}y=3z$时取到等号，

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{6}$

10.正实数 x，y 满足$x+y=1$，若不等式$t+\frac{8}{t}\le\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$恒成立，求实数$t$的取值范围.

【答案】$\{t|t<0$ 或 $1\le t\le 8\}$

【详解】因为$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})(x+y)=5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\ge 5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=9$,

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，即$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$时，等号成立，

所以$(\frac{1}{x}+\frac{4}{y})_{\min}=9$,

所以$t+\frac{8}{t}\le 9$,

当$t<0$时，$t+\frac{8}{t}<0$，符合题意；

当$t>0$时，$t^2+8\le 9t$，解得 $1\le t\le 8$.

综上所述，实数t的取值范围为$\{t|t<0$ 或 $1\le t\le 8\}$.

11不等式$|x+3|-|x-1|\le|a-3|$对任意实数x恒成立，则实数a的取值范围是______.

12.若函数$f(x)$满足$2f\left(\frac{x+1}{x}\right)-f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x$，则$f(x)=$__________.

【答案】$\frac{1}{3(x-1)}(x\ne 1)$

13.函数$f(x)$在定义域内满足$f(x)+2f(1-x)=\frac{1}{x}+1$，则$f(x)$的函数表达式为__________.（含自变量的取值范围）

【答案】$\frac{2}{3(1-x)}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3},x\ne 0,1$

14.建造一个容积为8立方米，深为2米的长方体无盖水池。如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元，那么水池的最低造价是_________元.　　　【答案】1120

15.若函数$y=ax^2+bx+3a+b$是偶函数，且定义域为$[a-1,\ 2a]$，则$a+b=$____.【答案】1/3

16.函数$y=f(x)$的解析式为$f(x)=x^5+ax^3+bx-8(a,\ b$ 是常数$)$，且$f(-3)=5$，则$f(3)=$______.　　　【答案】-21

17函数$y=x^2+x-1$，若y的值域是$\left[-\frac{5}{4},-1\right]$，写出所有可能的定义域的集合.

18．$f(x)$ 定义在整数集上，且满足 $f(n)=\begin{cases} n-3 & (n\ge 1000) \\ f[f(n+5)] & (n<1000) \end{cases}$，求 $f(100)$ 的值。

【答案】997

18，法一：记 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$f_1(x)=f(x)$，则

$f(100)=f_2(105)=f_3(110)=\cdots=\underline{f_{181}(1000)}=f_{180}(997)=f_{181}(1002)=$

$f_{180}(999)=f_{181}(1004)=f_{180}(1001)=f_{179}(998)=f_{180}(1003)=\underline{f_{179}(1000)}$

$\therefore f(100)=f_{181}(1000)=f_{179}(1000)=f_{177}(1000)=\cdots=f(1000)=997$；

法二：$f(1000)=997$，$f(999)=f(f(1004))=f(1001)=998$；

$f(998)=f(f(1003))=f(1000)=997$，$f(997)=f(f(1002))=f(999)=998$，

$\cdots$，$f(100)=997$.

19.下列关于集合的符号表述中，正确的是（　）

A．$\{-1\}\in\{-1,2\}$　B．$\sqrt{3}\notin R$　C．$1\subseteq[0,1]$　D．$\emptyset\subseteq\{0\}$

【答案】D

20.命题$p:a>0,b>0$；$q_1:\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$；$q_2:\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$；$q_3:\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$，则（　）

A．p 是q_1的充要条件　B．p 是q_2的充要条件

C．p 是q_3的充要条件　D．以上都不对

【答案】D

21.若实数 x，y，z 满足$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=1$，则下列说法错误的是（　）

A．xyz的最大值是$\frac{\sqrt{6}}{6}$　B．$x+y+z$的最大值是$\frac{\sqrt{6}}{2}$

C．x的最大值是$\frac{\sqrt{6}}{2}$　D．$x+y$的最大值是$\sqrt{2}$

【答案】A

【详解】对于 C，由$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=1$，

整理得，$y^2+(x+z)y+x^2+z^2+zx-1=0$，可以看作关于$y$的一元二次方程，

所以$\Delta_1=(x+z)^2-4(x^2+z^2+zx-1)\geq0$，

即 $3z^2+2xz+3x^2-4\leq0$，可以看作关于z的一元二次不等式，

所以$\Delta_2=4x^2-12(3x^2-4)\geq0$，解得$-\frac{\sqrt{6}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{6}}{2}$，

当$x=\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，$y=-\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以 x 的最大值是$\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 C 正确；

对于 B，由$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=1$，

即 $2(x^2+y^2+z^2)+2xy+2yz+2zx=2$，

即$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=2$，

令$a=x+y$，$b=x+z$，$c=y+z$，则$a^2+b^2+c^2=2$，

即$(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)=2$，即$ab+ac+bc=\frac{(a+b+c)^2-2}{2}$，

由$a^2+b^2\geq2ab$，当且仅当$a=b$时等号成立，

$a^2+c^2\geq2ac$，当且仅当$a=c$时等号成立，

$b^2+c^2 \geq 2bc$，当且仅当$b=c$时等号成立，

所以 $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2ab+2ac+2bc$，当且仅当$a=b=c$时等号成立，

即$-2(a^2+b^2+c^2) \leq -(2ab+2ac+2bc)$，

所以$(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2) \leq (a+b+c)^2-(2ab+2ac+2bc)$

即$(a+b+c)^2-2\times 2 \leq 2$，即$(a+b+c)^2 \leq 6$，

所以$a+b+c \leq \sqrt{6}$，

即$x+y+x+z+y+z \leq \sqrt{6}$，

即$x+y+z \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$，当且仅当$x+y=x+z=y+z$，即$x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}$时等号成立，

对于 D，所以$x+y+z$的最大值是$\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 B 正确；

由$a^2+b^2+c^2=2$，即$(x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=2$，

所以$(x+y)^2 \leq 2$，即$x+y \leq \sqrt{2}$，

当且仅当$x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$z=-\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，

所以$x+y$的最大值是$\sqrt{2}$，故 D 正确；

对于 A，取$x=1$，$y=-\frac{4}{5}$，$z=-\frac{1+\sqrt{17}}{10}$，

则$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=1+\frac{16}{25}+\frac{18+2\sqrt{17}}{100}-\frac{4}{5}+\frac{4+4\sqrt{17}}{50}-\frac{1+\sqrt{17}}{10}=1$，

而$xyz=1\times(-\frac{4}{5})\times(-\frac{1+\sqrt{17}}{10})=\frac{2(1+\sqrt{17})}{25}$，

又$\frac{2(1+\sqrt{17})}{25}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{12+12\sqrt{17}-25\sqrt{6}}{150}$，

而$(12+12\sqrt{17})^2-(25\sqrt{6})^2=144+288\sqrt{17}+144\times 17-625\times 6=288\sqrt{17}-1158=$

$\sqrt{1410048}-\sqrt{1340964}>0$，

所以$xyz=\frac{2(1+\sqrt{17})}{25}>\frac{\sqrt{6}}{6}$，故 A 错误.

故选：A.

解：记 $f(x,y,z)=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=yz-\lambda(2x+y+z)=0$ ①

$\frac{\partial f}{\partial y}=xz-\lambda(2y+x+z)=0$ ②

$\frac{\partial f}{\partial z}=xy-\lambda(2z+y+x)=0$ ③

①-②有. $z(y-x)-\lambda(x-y)=0$, $(y-x)(z+\lambda)=0$

$\therefore y=x$ or $z=-\lambda$

同理, ②-③有 $y=z$ or $x=-\lambda$

$\therefore y=x=z$; $x=y=-\lambda$, $y=z=-\lambda$, $x=z=-\lambda$;

若 $x=y=z$. 代入原条件知. $6x^2=1$, $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$, $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 或

$x=y=z=-\frac{\sqrt{6}}{6}$; $xyz=\frac{\sqrt{6}}{36}$ ① or $-\frac{\sqrt{6}}{36}$ ②;

不妨设 $x=y=-\lambda$. 代入①中. $-\lambda z-\lambda(-2\lambda-\lambda+z)=0$, 有

$3\lambda^2-2\lambda z=0 \Rightarrow \lambda=0$ or $z=\frac{3}{2}\lambda$

若 $x=y=-\lambda=0$. 代入原条件有. $z^2=1$, $z=\pm1$. $xyz=0$ ③;

若 $\begin{cases} x=y=-\lambda \\ z=\frac{3}{2}\lambda \end{cases}$ 代入原条件有. $\lambda^2=\frac{4}{9}$, $\lambda=\pm\frac{2}{3}$.

故 $\begin{cases} x=y=-\frac{2}{3} \\ z=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=y=\frac{2}{3} \\ z=-1 \end{cases}$

$xyz=\frac{4}{9}$ ④ 或, $xyz=-\frac{4}{9}$ ⑤

综上, $(xyz)_{max}=\frac{4}{9}$.

22.求下列方程或不等式的解集:

(1)$|x-1|+|x+4|=|2x+3|$

(2)$\sqrt{5-x^2}<x-1$

【答案】(1)$\{x|x\leq-4$ 或 $x\geq1\}$

(2) $\{x|\ 2<x\leq\ 5\}$

23.求下列函数的定义域.

①$f(x)=\sqrt{x+4}+x^0+\frac{1}{x+2}$；②$f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x}$且 $x\in\mathbf{Z}$；；

【解析】①由题意，要使$f(x)$有意义，则$\begin{cases}x+4\geq 0,\\ x\neq 0,\\ x+2\neq 0,\end{cases}$

解得 $x\geq -4$ 且 $x\neq 0$，$x\neq -2$，

即 $f(x)$的定义域为$[-4,\ -2)\cup(-2,0)\cup(0,\ +\infty)$；

②由题意，要使函数有意义，只需$\begin{cases}3-x\geq 0,\\ 1+x\geq 0,\end{cases}$ 所以$-1\leq x\leq 3$.

又 $x\in\mathbf{Z}$，所以 $x=-1$，0，1，2，3.

所以函数的定义域为$\{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$；

函数 $f(x)$的定义域是$\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$，则 $y=f(3-x)$的定义域是(　　)

A．$[0,\ 1]$　　B．$\left[0,\ \frac{5}{2}\right]$

C．$\left[2,\ \frac{5}{2}\right]$　　D．$(-\infty,\ 3)$

【答案】C；

24.求下列函数的解析式.

①已知$f(x)$为一次函数，$f(2x+1)+f(2x-1)=-4x+6$，则 $f(x)=$________.

②已知$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$________.

③已知$f(x)$为一次函数，且 $f(f(x))=4x-1$，则 $f(x)=$________.

④设函数 $f(x)=\begin{cases}2,\ x>0,\\ x^2+bx+c,\ x\leq 0,\end{cases}$ 若 $f(-4)=f(0), f(-2)=-2$, 则 $f(x)$的解析式为________.

⑤若 $f\left(x-\frac{2}{x}\right)=x^2+\frac{4}{x^2}$，则 $f(x)=$________.

【答案】①$-x+3$；②$x^2-1(x\geq 1)$；③$2x-\frac{1}{3}$或$-2x+1$；④$f(x)=\begin{cases}2,\ x>0\\ x^2+4x+2,\ x\leq 0\end{cases}$；⑤$x^2+4$；

25. 关于 x 的方程$x^2-(3-t)x+2+t=0$.

(1)若该方程的两个实数根x_1，x_2满足$(x_1+x_2)x_1x_2=-6$，求实数 t 的值；

(2)若该方程在区间$[0,2]$上有且仅有一个实数根，求实数 t 的取值范围.

【答案】(1)-3

(2)$[-2,0)\cup\{5-2\sqrt{6}\}$

26.已知$f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，$f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}$，求$f(x)$与$g(x)$的解析式.

解：f(-x)+g(-x)=g(x)-f(x)=-1/(x+1)
与条件两式相加得：g(x)=1/(x^2-1)
代入得：f(x)=x/(x^2-1)

27.定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足：$f(1)=\frac{5}{2}$，且对于任意实数x、y，总有$f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$成立. 若对于任意非零实数y，总有$f(y)>2$.设有理数x_1,x_2满足$|x_1|<|x_2|$，判断$f(x_1)$和$f(x_2)$的大小关系，并证明你的结论.

$f(1)=\frac{5}{2}$，$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)$

$\forall y\neq 0$，$f(y)>2$

令$y=0$　$f(x)\cdot f(0)=2f(x)$，$\forall x$　$\Rightarrow f(0)=2$

$\forall n\in N^+$

$f(\frac{1}{n})\cdot f(\frac{k}{n})=f(\frac{k+1}{n})+f(\frac{k-1}{n})$，$\forall k\in N^+$

$\because \forall x\neq 0$，有$f(x)>2$ $\therefore f(\frac{1}{n})>2$　上式变形得:

$f(\frac{1}{n})\cdot f(\frac{k}{n})-f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})=f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})$

$(f(\frac{1}{n})-1)\cdot f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})=f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})$

$>f(\frac{k}{n})-f(\frac{k-1}{n})$

$\because f(\frac{1}{n})-f(0)>0$　$\therefore f(\frac{k+1}{n})-f(\frac{k}{n})>0$

$\therefore \{f(\frac{k}{n})\}_{k=1}^{+\infty}$ 为单调增数列

$\because f(x)\cdot f(-x)=f(0)+f(2x)$　$\therefore f(x)=f(-x)$，$f(x)$为偶函数

$f(x)\cdot f(x)=f(2x)+f(0)$

$\therefore f(x_1)=f(|x_1|)$，$f(x_2)=f(|x_2|)$

设$|x_1|=\frac{p}{n}$，$|x_2|=\frac{q}{n}$（已通分保证分母相同）

$|x_1|<|x_2|\Rightarrow 0\le p<q$

$\therefore f(\frac{p}{n})<f(\frac{q}{n})$　$\therefore f(x_1)<f(x_2)$