蔺泽多

148

4.2 指数函数（2）

【A 组】

1. 若 $f(\pi^x)=2x-1$，则 $f(1)=$ ___-1___.

2. 函数 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x^2-8x+1}$ 单调递增区间是 ___$[-2,+\infty)$___. 即求 $-2x^2-8x+1$ 的↓区间

$x=-4$

3. 函数 $y=x^2$ 与函数 $y=2^x$ 的图像的交点个数 ___3___. $x^2=2^x$

④ 已知指数函数 $y=(2-a)^x$ 是严格增函数，则实数 a 的取值范围是 ___$(-\infty,1)$___. $2-a>1$

5. 实数 a 满足 $4^{a-1}<(\frac{1}{2})^{a-4}$，则实数 a 的取值范围为 ___$(-\infty,2)$___. $2^{2a-2}<2^{4-a}$

6. 若函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$，在 $[2,3]$ 上的最大值比最小值大 $\frac{a^2}{2}$，则 a= ___$\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$___.

$|a^2-a^3|=\frac{a^2}{2}$

1° $x>0$　2° $x\neq0$

$2\ln x=x\ln2$　舍

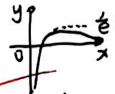
$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 2}{2}$

记 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f(x)$ 在 $(0,e)$↑，在 $(e,+\infty)$↓

$y=f(x)$



$\frac{\ln2}{2}>0$

$f(2)=f(4)=\frac{\ln2}{2}$，仅有2根

3° $x<0$

$2\ln(-x)=x\ln2$

$-x=t$

$2\ln t=-t\ln2$

$\frac{\ln t}{t}=-\frac{\ln2}{2}$

即求 $f(t)=-\frac{\ln2}{2}$ 的根个数

$-\frac{\ln2}{2}<0$

故有且仅有1根

∴总共3个根

【B 组】

1. 若函数 $f(x)=\frac{1}{2^x-1}+a$ 为奇函数，则实数 $a=$ ___$\frac{1}{2}$___.

$f(1)=f(-1)$，$1+a=-(a-2)$

②. 函数 $f(x)=\frac{3^x}{9^x+1}-\frac{1}{2}$ 的值域是 ___$(-\frac{1}{2},0]$___.

3. 函数 $y=3^{\sqrt{x^2-5x+4}}$ 的递减区间是 ___$(-\infty,1]$___，值域是 ___$[1,+\infty)$___.

4. 已知实数 a,b 满足等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^b$，下列 5 个关系式中，不可能成立的有 ___③④___. ① $0<b<a$；② $a<b<0$；③ $0<a<b$；④ $b<a<0$；⑤ $a=b$.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}(2-a)x+1,(x<1)\\ a^x,\quad(x\geq1)\end{cases}$ $(a>0,a\neq1)$ 是 R 上的严格增函数，那么实数 a 的取值范围是 ___$[\frac{3}{2},2)$___.

$a<2$

$a>1$

$(2-a)+1\leq a^1$

6. 函数 $y=2^{-|x-1|}$ 单调减区间是 ___$[1,+\infty)$___.

7. 若函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0,a\neq1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是 ___$(1,+\infty)$___.

$f'(x)=\ln a\cdot a^x-1$

$f''(x)=\frac{a^x}{x}+a^x\ln^2a>0\Rightarrow f'(x)$↑，$f'(-\log_a(\ln a))=0$　∴$a>1$，否则无定义

$f(-\log_a(\ln a))<0$，才能有2个零点.

即 $\frac{1}{\ln a}+\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}-a<0$

令 $\ln a=t$

$\frac{1}{t}+\frac{\ln t}{t}-e^t<0$

$\ln t+1<t\cdot e^t$

有 $\ln(t-1+1)<t-1$

即 $\ln t+1<t$

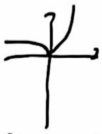
$e^t>1$

即 $t\cdot e^t>t$

故恒成立

8. 若 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $y=|a^x-1|$ 与 $y=2a$ 的图像有两个交点，则 a 的取值范围是 ___$(0,\frac{1}{2})$___.

1° $a\in(0,1)$　2° $a\in(1,+\infty)$



$2a\in(0,1)$　$2a\in(0,1)$

$a\in(0,\frac{1}{2})$　舍

$t=2^x\in(0,\frac{1}{2}]$

$1+t+at^2\geq 0$

$a\geq -\frac{1+t}{t^2}=-(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2})$，$t\in(0,\frac{1}{2}]$

$[-6,+\infty)$

9. 当 $x\in(-\infty,-1]$ 时，不等式 $1+2^x+4^x a\geq 0$ 恒成立，则 a 的取值范围是 $[6,+\infty)$.

10. 设函数 $f(x)$ 定义在实数集上，且图像关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=3^x-1$，则（ B ）

$f(\frac{5}{3})$ $f(\frac{3}{2})$ $f(\frac{4}{3})$ $\qquad$ $f(\frac{4}{3})$ $f(\frac{3}{2})$ $f(\frac{5}{3})$

(A) $f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})$； $\qquad$ (B) $f(\frac{2}{3})<f(\frac{3}{2})<f(\frac{1}{3})$；

(C) $f(\frac{2}{3})<f(\frac{1}{3})<f(\frac{3}{2})$； $\qquad$ (D) $f(\frac{3}{2})<f(\frac{2}{3})<f(\frac{1}{3})$.

$f(\frac{4}{3})$ $f(\frac{5}{3})$ $f(\frac{3}{2})$ $\qquad$ $f(\frac{3}{2})$ $f(\frac{4}{3})$ $f(\frac{5}{3})$

11. 若函数 $y=2^{-x+1}+m$ 的图像不经过第一象限，则 m 的取值范围是 $(-\infty,-2]$.

$2\cdot(\frac{1}{2})^x+m$

12. 若函数 $f(x)=\dfrac{a-e^x}{1+a\cdot e^x}$（$a$ 为常数）在定义域上为奇函数，则 a 的值为 ± 1.

移 $\qquad$ 移

13. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，而 $f(a^x)$ 在 R 上是增函数，则实数 a 的取值范围是 $(0,1)$.

$2^x=t\in R^+$ $\quad$ $t^2-3t+3=(t-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}$ $\quad$ $t\in(0,1]\cup[2,4]$ $\quad$ $x\in(-\infty,0]\cup[1,2]$

14. 已知函数 $y=4^x-3\cdot 2^x+3$ 的值域为 $[1,7]$，则 x 的范围可以是（ D ）

(A) $[2,4]$ $\qquad$ (B) $(-\infty,0)$ $\qquad$ (C) $(0,1)\cup[2,4]$ $\qquad$ (D) $(-\infty,0]\cup[1,2]$

15. 已知函数 $y=\dfrac{1}{4-2^x}$ 的图像关于点 P 对称，则 P 点的坐标为 $(2,\frac{1}{8})$.

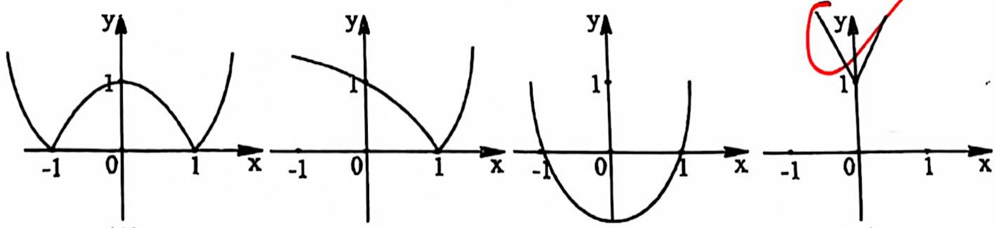
(m,n)

$\frac{1}{4-2^{2-x}}+\frac{1}{4-2^{2+x}}=\frac{1}{4}(\frac{1}{1-2^{-x}}+$

$=\frac{1}{4}(\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2^x-1})$

$=\frac{1}{4}$

16. 已知函数 $f(x)=2^x-2$，则函数 $y=|f(|x|)|$ 的图像只可能是（ A ）



(A) $\qquad$ (B) $\qquad$ (C) $\qquad$ (D)

17. 求函数 $y=3\cdot 4^x-10\cdot 2^x+3\cdot 4^{-x}-10\cdot 2^{-x}$ 的最小值.

解 令 $2^x=t$ $\quad$ $t^2+\frac{1}{t^2}=(t+\frac{1}{t})^2-2$，令 $t+\frac{1}{t}=m$ $\quad$ $m\in[2,+\infty)$

$y=3t^2-10t+\frac{3}{t^2}-\frac{10}{t}$

$=3(t+\frac{1}{t})^2-6-10(t+\frac{1}{t})$

$=3m^2-10m-6$

y_m 在 $[2,+\infty)$ ↑

$y\geq y|_{m=2}=3\times 2^2-10\times 2-6=-14$

在 $t=1$，即 $x=0$ 时取等

18. 设函数 $f(x)=\frac{a(a^{2x}-1)}{a^x(a^2-1)}$ $(a>0,且\ a\neq1)$，证明： $y=f(x)$ 是 R 上为严格增函数.

证明 $\forall x_1<x_2$，令 $a^{x_1}=t_1$，$a^{x_2}=t_2$，$t_1,t_2\in R^+$

$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a(a^{2x_2}-1)}{a^{x_2}(a^2-1)}-\frac{a(a^{2x_1}-1)}{a^{x_1}(a^2-1)}=\frac{a}{a^2-1}\left(\frac{t_2^2-1}{t_2}-\frac{t_1^2-1}{t_1}\right)=\frac{a}{a^2-1}\left[(t_2-t_1)+\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\right]$

在 $0<a<1$ 时，$t_1>t_2>0$

$\frac{a}{a^2-1}<0$，$t_2-t_1<0$，$\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}<0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$

在 $a>1$ 时，$t_2>t_1>0$

$\frac{a}{a^2-1}>0$，$t_2-t_1>0$，$\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$

综上所述，$y=f(x)$ 严格增

19. 若 $a^{2x}+\frac{1}{2}a^x-\frac{1}{2}\le0$ $(a>0且\ a\neq1)$，求函数 $y=2a^{2x}-3a^x+4$ 的值域.

解：令 $a^x=t$，$t\in R^+$

$t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\le0$

$t\in(-1,\frac{1}{2}]$

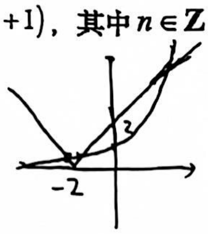
$\therefore t\in(0,\frac{1}{2}]$

$y=2t^2-3t+4=2(t-\frac{3}{4})^2+\frac{23}{8}$

$y\in[3,4)$

20. 利用函数图像，讨论方程 $2^x-|x+2|=0$ 解的个数，并指出每个解所在区间 $[n,n+1)$，其中 $n\in\mathbf{Z}$.

解：



令 $f(x)=2^x-|x+2|$

$f(-3)=-\frac{7}{8}$

$f(-2)=\frac{1}{4}$

$f(-1)=-\frac{1}{2}$

$f(2)=0$

$\therefore -3<x_1<-2<x_2<-1$

$x_3=2$

$\therefore [-3,-2)$，$[-2,-1)$，$[2,3)$

21. 已知函数 $f(x)=\frac{2^x}{a}-\frac{a}{2^x}$ $(a>0)$是奇函数.

(1) 求 a 的值； (2) 判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调性并证明.

解：(1) $f(0)=0$

$\frac{1}{a}-\frac{a}{1}=0$

~~$a=\pm1$~~ $a=1$

(2) $f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$

$\forall x_1<x_2$

$2^{x_1}<2^{x_2}$

$\frac{1}{2^{x_2}}<\frac{1}{2^{x_1}}$

$f(x_2)-f(x_1)=(2^{x_2}-2^{x_1})+\left(\frac{1}{2^{x_1}}-\frac{1}{2^{x_2}}\right)>0$

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$

$\therefore$ 严格单调增

22. 已知 $f(x)=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}$，(1) 判断函数的奇偶性；(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数；(3) 求函数 $f(x)$ 的值域.

解 (1) $f(-x)=\dfrac{10^{-x}-10^{x}}{10^{-x}+10^{x}}=-f(x)$

∴奇函数

(2) $f(x)=\dfrac{10^{2x}-1}{10^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{10^{2x}+1}$

$\forall x_2>x_1$，$2x_2>2x_1$，$10^{2x_2}>10^{2x_1}$

$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{2}{10^{2x_1}+1}-\dfrac{2}{10^{2x_2}+1}=\dfrac{2}{(10^{2x_1}+1)(10^{2x_2}+1)}(10^{2x_2}-10^{2x_1})>0$

∴ $f(x_2)>f(x_1)$

(3) 令 $10^{2x}=t$，$t\in R^+$

$f(x)=1-\dfrac{2}{t+1}$

$t+1\in(1,+\infty)$

$\dfrac{2}{t+1}\in(0,2)$

$1-\dfrac{2}{t+1}\in(-1,1)$

即 $f(x)\in(-1,1)$

23. 已知 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $2^x+3^y>2^{-y}+3^{-x}$，求证：$x+y>0$.

证明：$2^x-2^{-y}+3^y-3^{-x}>0$

$2^{-y}(2^{x+y}-1)+3^{-x}(3^{x+y}-1)>0$

$2^{-y}(2^{x+y}-1)$ 与 $3^{-x}(3^{x+y}-1)$ 至少有1个为正

1° $2^{-y}(2^{x+y}-1)>0$

$2^{x+y}-1>0$

$x+y>0$

2° $3^{-x}(3^{x+y}-1)>0$

同理，$x+y>0$

故 $x+y>0$，得证

法2. 构造 $f(t)=2^t-3^{-t}$

$f(t)\uparrow$，$f(x)>f(-y)$.

∴ $x>-y$. 即 $x+y>0$

24. 已知函数 $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+a^2-2}{2^x-1}$ $(x\in\mathbf{R},x\neq 0)$，其中 a 为实数.

(1) 若函数 $f(x)$ 为奇函数，求出 a 的值；半给

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，求 a 的取值范围；

(3) 当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)>1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解. (1) $f(1)=a^2+2a-2$

$f(-1)=-2a^2-a+4$

$a^2+2a-2=-(-2a^2-a+4)$

即 $a^2-a-2=0$

$a=-1$ 或 $a=2$

$a=-1$ 时，$f(x)=-\dfrac{2^x+1}{2^x-1}$

$a=2$ 时，$f(x)=\dfrac{2(2^x+1)}{2^x-1}$

∴ a 为 -1 或 2

(2) $f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x-a}{2^x-1}+\dfrac{a^2+a-2}{2^x-1}$

$=a+\dfrac{a^2+a-2}{2^x-1}$

$\dfrac{1}{2^x-1}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 单调减

∴ $a^2+a-2<0$

∴ $a\in(-2,1)$

(3) $f(x)$ 在 $[1,2]$ 单调

∴ $\begin{cases} f(1)>1 \\ f(2)>1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2a+a^2-2>1 \\ \dfrac{4a+a^2-2}{3}>1 \end{cases}$

解得 $a<-5$ 或 $a>1$