专题练习 6

填空题:

1. 不等式 $log_{\frac{1}{2}}x+2>x-1$ 的解集为<u>$(0,2)$</u>

2. 已知函数 $f(x)=\lg(1+2^x+3^x+4^x+a\cdot 5^x)$ 对一切 $x\leqslant 2$ 有意义, 实数 a 的取值范围是<u>$a>-\frac{6}{5}$</u>

   解析　$1+2^x+3^x+4^x+a\cdot 5^x>0$ 恒成立, 即 $a>-\frac{1+2^x+3^x+4^x}{5^x}$ 恒成立.
   而 $y=-\frac{1+2^x+3^x+4^x}{5^x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 故 $a>-\frac{6}{5}(x=2$ 时).

3. 已知函数 $f(x)=log_3(\frac{x}{3})\cdot log_3(\frac{x}{27})$，若对不相等的实数 x_1,x_2 有 $f(x_1)=f(x_2)$，求 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}$ 的最小值为<u>$\frac{2}{3}$</u>

4. 已知 $log_2(x+y)=log_2x+log_2y$, $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{9y}{y-1}$ 的最小值为<u>25</u>

   解析　$log_2(x+y)=log_2(xy)$，故 $x+y=xy$，即 $x=\dfrac{y}{y-1}$，$y=\dfrac{x}{x-1}$，其中 $x>1,y>1$.
   $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{9y}{y-1}=\dfrac{4x}{x-1}+9x=9(x-1)+\dfrac{4}{x-1}+13\geqslant 25$，在 $x=\dfrac{5}{3},y=\dfrac{5}{2}$ 时取等号.

5. 已知 $(\frac{1}{2})^{sin2\theta}<1$，则 θ 所在的象限为<u>一或三</u>象限.

   解析　根据指数函数的单调性可知 $sin2\theta>0$，因此 $2\theta\in(2k\pi,2k\pi+\pi),k\in\boldsymbol{Z}$。因此 $\theta\in(k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{2}),k\in\boldsymbol{Z}$，故 θ 为第一或第三象限角。

6. 已知 α 的终边过点 $(sin5,cos5)$，则 $\alpha=$<u>$\frac{\pi}{2}-5+2k\pi,k\in\boldsymbol{Z}$</u>

7. 已知 $\cos(11\pi-3)=p$, 用 p 表示 $\tan 3$=<u>$-\dfrac{\sqrt{1-p^2}}{p}$</u>.

8. 已知 $\sin\beta=\dfrac{1}{3}$, $\sin(\alpha+\beta)=0$, 则 $\sin(2\alpha+\beta)$=<u>$-\frac{1}{3}$</u>.

   解析　$\sin(\alpha+\beta)=0\iff\alpha+\beta=2k\pi$ 或 $2k\pi+\pi$，故 $\sin(2\alpha+\beta)=\sin(2(\alpha+\beta)-\beta)=\sin(-\beta)=-\sin\beta=-\frac{1}{3}$

9. 已知 $sin(\dfrac{5\pi}{6}-\alpha)=\sqrt{3}cos(\alpha+\dfrac{\pi}{6})$，则 $tan(\alpha+\dfrac{\pi}{6})=$<u>$\sqrt{3}$</u>

   解析　设 $\alpha+\dfrac{\pi}{6}=t$，故原式化为 $sin(\pi-t)=\sqrt{3}cost$，求 $tant$。
   $sin(\pi-t)=\sqrt{3}cost$ 即 $sint=\sqrt{3}cost$，故 $tant=\sqrt{3}$

10. 已知 $\dfrac{cos\alpha}{1+sin\alpha}=-\dfrac{1}{2}$, 则 $\dfrac{cos\alpha}{sin\alpha-1}$=<u>2</u>.

    解析　$\dfrac{cos\alpha}{1+sin\alpha}=\dfrac{1-sin\alpha}{cos\alpha}$
    注: $\dfrac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\dfrac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$

11. 若角 α 是第三象限角, 则 ① $sin\alpha+cos\alpha<0$; ② $tan\alpha-sin\alpha>0$; ③ $cot\alpha\cdot\csc\alpha<0$; ④ $sin\alpha\cdot\sec\alpha>0$. 其中正确的是<u>①②③④</u>.

12. 已知 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 且 $\log_{tan\theta+cot\theta}sin\theta=-\frac{3}{4}$, 则 $\log_{tan\theta}sin\theta+\log_{tan\theta}cos\theta=$<u>2</u>.

    解析　$(tan\theta+cot\theta)^{-\frac{3}{4}}=(\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{cos\theta}{sin\theta})^{-\frac{3}{4}}=(\frac{1}{sin\theta cos\theta})^{-\frac{3}{4}}=sin\theta$, 即 $sin\theta=cos^3\theta$. 故 $cos^2\theta=tan\theta$, 所以 $\log_{tan\theta}sin\theta+\log_{tan\theta}cos\theta=\log_{tan\theta}(sin\theta\cdot cos\theta)=2$.

13. 使函数 $y=\sqrt{\cos x}+\sqrt{25-x^2}$ 有意义的 x 的取值范围是<u>$[-5,-\frac{3\pi}{2}]\cup[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3\pi}{2},5]$</u>

14. 使函数 $y=\lg\sin(\cos x)$ 有意义的 x 的取值范围是<u>$\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbb{Z})$</u>.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 给出下列四个式子: ① $\sin(A+B)-\sin C$, ② $\cos(A+B)+\cos C$, ③ $\sin(2A+2B)+\sin 2C$, ④ $\cos(2A+2B)-\cos 2C$, 其中恒为常数的是 ①②③④ .

选择题:

1. 已知 $sin\alpha > sin\beta$，那么下列命题成立的是 ··· D

(A) 若 α, β 为第一象限角，则 $cos\alpha > cos\beta$ (B) 若 α, β 为第二象限角，则 $tan\alpha > tan\beta$

(C) 若 α, β 为第三象限角，则 $cos\alpha > cos\beta$ (D) 若 α, β 为第四象限角，则 $tan\alpha > tan\beta$

2. 下列各式为正号的是 ··(C)

(A) $cos2 - sin2$ (B) $cos2 \cdot sin2$ (C) $tan2 \cdot \sec 2$ (D) $sin2 \cdot tan2$

解析 $2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 故 $sin2 > 0$, $cos2 < 0$, $tan2 < 0$, $cot2 < 0$, $\sec 2 < 0$, $\csc 2 > 0$.

3. 设 $y = sin\alpha \cdot cos\alpha \cdot cot\alpha$, 且 α 是象限角, 则 y 的符号为 ·······························(A)

(A) 恒正 (B) 恒负 (C) 可能为 0 (D) 不确定

4. 已知实数 α, β 满足 $|\cos\alpha - \cos\beta| = |\cos\alpha| + |\cos\beta|$, 且 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则化简 $\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2}$ 的结果是 ···(C)

(A) $\cos\alpha - \cos\beta$ (B) $|\cos\alpha| - |\cos\beta|$ (C) $\cos\beta - \cos\alpha$ (D) $|\cos\alpha| + |\cos\beta|$

解析 $|\cos\alpha - \cos\beta| = |\cos\alpha| + |\cos\beta| \iff \cos\alpha\cos\beta \leqslant 0$.
又 $\cos\alpha < 0$, 故 $\cos\beta \geqslant 0$.
故 $E = |\cos\alpha - \cos\beta| = \cos\beta - \cos\alpha$.

解答题:

1. 已知函数 $f(x) = x - 2$，$g(x) = mx^2 - 2mx + 1 (m \in \boldsymbol{R})$.

(1) 对任意的 $x \in \boldsymbol{R}$，不等式 $g(x) > f(x)$ 恒成立，求 m 取值范围.

(2) 对任意的 $x_1 \in [1,2], x_2 \in [-1,0]$，使得 $g(x_1) > f(x_2)$，求 m 取值范围.

(3) 对任意的 $x_1 \in [1,2]$，存在 $x_2 \in [3,4]$，使得 $g(x_1) = f(x_2)$，求 m 取值范围.

(4) 对任意的 $x_1 \in [1,2]$，存在 $x_2 \in [0,2]$，使得 $g(x_1) > f(x_2)$，求 m 取值范围.

解析

(1) 问题转化为 $g(x) - f(x) > 0$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上恒成立，即 $mx^2 - (2m+1)x + 3 > 0$ 恒成立. $m = 0$ 不满足要求，$m < 0$ 不满足要求，$m > 0$ 时应有 $\Delta < 0$，即 $m \in (\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2})$

(2) 问题转化为 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值大于 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上的最大值. $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上的最大值为 -2, 故问题转化为 $g(x)+2 > 0$ 在 $[1,2]$ 上恒成立, 设 $h(x) = g(x)+2 = mx^2-2mx+3 = m(x-1)^2 - (m-3)$，下面分析 $h(x)$ 的最值

① $m > 0$，$h(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递增，因此最小值为 $h(1) = 3 - m$

② $m = 0$，$h(x) = 3$，最小值为 3

③ $m < 0$，$h(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递减，因此最小值为 $h(2) = 3$

故当 $m \in (-\infty, 3)$ 时，满足要求.

(3) 问题转化为 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的值域是 $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上值域的子集. $f(x)$ 在 $[3,4]$ 上值域为 $[1,2]$，$g(x) = m(x-1)^2 + (1-m)$，下面分析 $g(x)$ 的值域

① $m>0$，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递增，值域为 $[1-m,1]$

② $m=0$，$g(x)=1$，值域为 $\{1\}$

③ $m<0$，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递增，值域为 $[1,1-m]$

故当 $m\in[-1,0]$ 时满足要求.

(4) 问题转化为 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值大于 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值. $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上最小值为-2，下面分析 $g(x)$ 的最值

① $m>0$，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递增，因此最小值为 $g(1)=1-m$

② $m=0$，$g(x)=-1$，最小值为 -1

③ $m<0$，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 内单调递减，因此最小值为 $g(2)=1$

故当 $m\in(-\infty,3)$ 时，满足要求.

2. 已知 $sin\alpha+cos\alpha=\frac{1}{5}(0<\alpha<\pi)$, 求:

(1) $sin\alpha-cos\alpha$; (2) $sin^3\alpha+cos^3\alpha$; (3) $sin^4\alpha+cos^4\alpha$.

解析

(1) $(sin\alpha+cos\alpha)^2=1+2sin\alpha cos\alpha=\frac{1}{25}$，因此 $sin\alpha cos\alpha=-\frac{12}{25}$

因此有 $(sin\alpha-cos\alpha)^2=1-2sin\alpha cos\alpha=\frac{49}{25}$

故 $sin\alpha-cos\alpha=\pm\frac{7}{5}$

根据 $\alpha\in(0,\pi)$，故 $sin\alpha-cos\alpha>-1$，因此 $sin\alpha-cos\alpha=\frac{7}{5}$

注: 可以根据 $sin\alpha+cos\alpha$ 在不同象限的值域直接判断出来 α 是第二象限角.

(2) $sin^3\alpha+cos^3\alpha=(sin\alpha+cos\alpha)(sin^2\alpha+cos^2\alpha-sin\alpha cos\alpha)=(\frac{1}{5})(1+\frac{12}{25})=\frac{37}{125}$

注: 也可以在第一问的结果上构建方程组 $\begin{cases}\sin\alpha+cos\alpha=\frac{1}{5}\\ \sin\alpha-cos\alpha=\frac{7}{5}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=-\frac{3}{5}\end{cases}$ 后带入计算（下同）

(3) $sin^4\alpha+cos^4\alpha=(sin^2\alpha+cos^2\alpha)^2-2(sin\alpha cos\alpha)^2=1-2\times(-\frac{12}{25})^2=\frac{337}{625}$

3. 已知 $tan\alpha=\sqrt{2}$, 求下列各式的值:

1. $\frac{cos\alpha-5sin\alpha}{3cos\alpha+sin\alpha}$; 2. $\frac{sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha-3cos^2\alpha}{5sin\alpha cos\alpha+sin^2\alpha+1}$; 3. $2sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha+cos^2\alpha$.

解析

1. $\frac{cos\alpha-5sin\alpha}{3cos\alpha+sin\alpha}=\frac{1-5tan\alpha}{3+tan\alpha}=\frac{13-16\sqrt{2}}{7}$;
2. $\frac{sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha-3cos^2\alpha}{5sin\alpha cos\alpha+sin^2\alpha+1}=\frac{sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha-3cos^2\alpha}{5sin\alpha cos\alpha+2sin^2\alpha+cos^2\alpha}$
$=\frac{tan^2\alpha-tan\alpha-3}{5tan\alpha+2tan^2\alpha+1}=-\frac{1}{5}$;
3. $2sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha+cos^2\alpha=\frac{2sin^2\alpha-sin\alpha cos\alpha+cos^2\alpha}{sin^2\alpha+cos^2\alpha}$
$=\frac{2tan^2\alpha-tan\alpha+1}{tan^2\alpha+1}=\frac{5-\sqrt{2}}{3}$.

4. 化简：$\frac{sin(2\pi-\alpha)cos(\pi+\alpha)cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)cos(\frac{11\pi}{2}-\alpha)}{cos(\pi-\alpha)sin(3\pi-\alpha)sin(-\pi-\alpha)sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)}$

解析 原式

$$=\frac{sin(-\alpha)cos(\pi+\alpha)cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}{cos(\pi-\alpha)sin(\pi-\alpha)sin(-\pi-\alpha)sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$$
$$=\frac{(-sin\alpha)(-cos\alpha)(-sin\alpha)cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{(-cos\alpha)(sin\alpha)(-sin(\pi+\alpha))(cos\alpha)}$$
$$=\frac{(-sin\alpha)(-cos\alpha)(-sin\alpha)(-sin\alpha)}{(-cos\alpha)(sin\alpha)(sin\alpha)(cos\alpha)}$$
$$=-tan\alpha$$

5. (1) 已知 $sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\frac{1}{2}$，求 $cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)$ 的值.

(2) 已知 $cos(\frac{5\pi}{12}+x)=\frac{1}{3}$，且 $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，求 $cos(\frac{\pi}{12}-x)$ 的值.

解析

(1) 因为 $(\frac{\pi}{3}-\alpha)+(\frac{\pi}{6}+\alpha)=\frac{\pi}{2}$，所以 $cos(\frac{\pi}{6}+\alpha)=cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{3}-\alpha))=sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)=\frac{1}{2}$

(2) 因为 $(\frac{5\pi}{12}+x)+(\frac{\pi}{12}-x)=\frac{\pi}{2}$，所以 $cos(\frac{\pi}{12}-x)=cos(\frac{\pi}{2}-(\frac{5\pi}{12}+x))=sin(\frac{5\pi}{12}+x)$
因为 $x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$，所以 $\frac{5\pi}{12}+x\in(-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12})$，又因为 $cos(\frac{5\pi}{12}+x)=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{5\pi}{12}+x$ 是第四象限角，故 $sin(\frac{5\pi}{12}+x)=-\sqrt{1-cos^2(\frac{5\pi}{12}+x)}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$

注: 化简求值的问题，找到已知和未知之间特殊的数量关系可以简化问题.

6. 已知 $sin\theta,cos\theta$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0(a\in\boldsymbol{R})$ 的两根，(1) 求 $cos^3(\frac{\pi}{2}-\theta)+sin^3(\frac{\pi}{2}+\theta)$ 的值 (2) 求 $tan(\pi-\theta)-\frac{1}{tan\theta}$ 的值

解析 根据韦达定理有 $\begin{cases} sin\theta+cos\theta=a \\ sin\theta\cdot cos\theta=a \end{cases}$，由 $\Delta\geqslant 0$ 有 $a\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$
$(sin\theta+cos\theta)^2=1+2sin\theta\cdot cos\theta=1+2a=a^2$，解得 $a=1\pm\sqrt{2}$，结合 $y=sinx+cosx$ 的取值范围以及 $a\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ 可知,$a=1-\sqrt{2}$

(1) $cos^3(\frac{\pi}{2}-\theta)+sin^3(\frac{\pi}{2}+\theta)=cos^3\theta+sin^3\theta=(sin\theta+cos\theta)(sin^2\theta+cos^2\theta-sin\theta cos\theta)=a\cdot(1-a)=(1-\sqrt{2})(\sqrt{2})=\sqrt{2}-2$

(2) $tan(\pi-\theta)-\frac{1}{tan\theta}=-(tan\theta+\frac{1}{tan\theta})=-(\frac{sin\theta}{cos\theta}+\frac{cos\theta}{sin\theta})=-(\frac{1}{sin\theta\cdot cos\theta})=-\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $sin(2\pi-A)=-\sqrt{2}sin(\pi-B)$，$\sqrt{3}cosA=-\sqrt{2}cos(\pi-B)$，求 $\triangle ABC$ 的三个内角.

解析 $sin(2\pi-A)=-\sqrt{2}sin(\pi-B)$ 即 $sinA=\sqrt{2}sinB$
$\sqrt{3}cosA=-\sqrt{2}cos(\pi-B)$ 即 $\sqrt{3}cosA=\sqrt{2}cosB$
故有 $sin^2A+cos^2B=2sin^2B+\frac{2}{3}cos^2B=\frac{4}{3}sin^2B+\frac{2}{3}=1$，即 $sin^2B=\frac{1}{4}$
因此 $sinB=\frac{1}{2},sinA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因为 B 为三角形内角，$sinB=\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$ 或 $B=\frac{5\pi}{6}$，同理 $A=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$
若 $B=\frac{5\pi}{6}$，则必有 $A+B>pi$，不符合要求，因此 $B=\frac{\pi}{6},cosB=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $cosA=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $A=\frac{\pi}{4}$. 故 $C=\pi-A-B=\frac{7\pi}{12}$

泽铭

145

专题练习 6：幂指对综合与三角比

填空题：

1. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}x+2>x-1$ 的解集为 $(0,2)$

2. 已知函数 $f(x)=\lg(1+2^x+3^x+4^x+a\cdot 5^x)$ 对一切 $x\leqslant 2$ 有意义，实数 a 的取值范围是 $(-\frac{6}{5},+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=\log_3(\frac{x}{3})\cdot\log_3(\frac{x}{27})$，若对不相等的实数 x_1,x_2 有 $f(x_1)=f(x_2)$，求 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$

4. 已知 $\log_2(x+y)=\log_2x+\log_2y$，$\frac{4x}{x-1}+\frac{9y}{y-1}$ 的最小值为 25

$x=\frac{5}{3}$ $y=\frac{5}{2}$

5. 已知 $(\frac{1}{2})^{\sin 2\theta}<1$，则 θ 所在的象限为 一、三 象限.

6. 已知 α 的终边过点 $(\sin 5,\cos 5)$，则 $\alpha=$ $\frac{\pi}{2}-5+2k\pi$ $(k\in Z)$

7. 已知 $\cos(11\pi-3)=p$，用 p 表示 $\tan 3=$ $-\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$.

8. 已知 $\sin\beta=\frac{1}{3}$，$\sin(\alpha+\beta)=0$，则 $\sin(2\alpha+\beta)=$ $-\frac{1}{3}$.

9. 已知 $\sin(\frac{5\pi}{6}-\alpha)=\sqrt{3}\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})=$ $\sqrt{3}$

10. 已知 $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}=$ 2.

11. 若角 α 是第三象限角，则 ① $\sin\alpha+\cos\alpha<0$；② $\tan\alpha-\sin\alpha>0$；③ $\cot\alpha\cdot\csc\alpha<0$；④ $\sin\alpha\cdot\sec\alpha>0$.
其中正确的是 ①②③④

12（选）$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\log_{\tan\theta+\cot\theta}\sin\theta=-\frac{3}{4}$，则 $\log_{\tan\theta}\sin\theta+\log_{\tan\theta}\cos\theta=$ 2.

13. 使函数 $y=\sqrt{\cos x}+\sqrt{25-x^2}$ 有意义的 x 的取值范围是 $[-5,-\frac{3}{2}\pi]\cup[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{3}{2}\pi,5]$

14. 使函数 $y=\lg\sin(\cos x)$ 有意义的 x 的取值范围是 $\{x|x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi),k\in Z\}$

15. 在 $\triangle ABC$ 中，给出下列四个式子：① $\sin(A+B)-\sin C$；② $\cos(A+B)+\cos C$；③ $\sin(2A+2B)+\sin 2C$，④ $\cos(2A+2B)-\cos 2C$，其中恒为常数的是 ①②③④.

选择题：

D 1. 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$，那么下列命题成立的是…………………………

(A) 若 α,β 为第一象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$ ×
(B) 若 α,β 为第二象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$ ×
(C) 若 α,β 为第三象限角，则 $\cos\alpha>\cos\beta$ ×
(D) 若 α,β 为第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$ ✓

C 2（选）下列各式为正号的是…………………………………………（　　）

(A) $\cos 2-\sin 2$ ×　　(B) $\cos 2\cdot\sin 2$ ×　　(C) $\tan 2\cdot\sec 2$ ✓　　(D) $\sin 2\cdot\tan 2$ ×

A 3. 设 $y=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha$，且 α 是象限角，则 y 的符号为……………………（　　）

(A) 恒正　　(B) 恒负　　(C) 可能为 0　　(D) 不确定

C 4. 已知实数 α,β 满足 $|\cos\alpha-\cos\beta|=|\cos\alpha|+|\cos\beta|$，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则化简 $\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2}$ 的结果是……$\cos\alpha\cdot(-\cos\beta)\geq 0$ ∴ $\cos\alpha<0$ $\cos\beta\geq 0$……（　　）

(A) $\cos\alpha-\cos\beta$　　(B) $|\cos\alpha|-|\cos\beta|$　　(C) $\cos\beta-\cos\alpha$　　(D) $|\cos\alpha|+|\cos\beta|$

解答题:

1. 已知函数 $f(x)=x-2$，$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R})$.

(1) 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $g(x)>f(x)$ 恒成立，求 m 取值范围.

(2) 对任意的 $x_1\in[1,2], x_2\in[-1,0]$，使得 $g(x_1)>f(x_2)$，求 m 取值范围.

(3) 对任意的 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[3,4]$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$，求 m 取值范围.

(4) 对任意的 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[0,2]$，使得 $g(x_1)>f(x_2)$，求 m 取值范围.

恒成立

-5

解 (1) $mx^2-2mx+1>x-2$

$mx^2-(2m+1)x+3>0$

1° $m=0$

$-x+3>0$，不成立

2° $m\neq0$

则 $m>0$

$\Delta=(2m+1)^2-12m<0$

$4m^2-8m+1<0$

~~$\therefore m\in[\frac{2-\sqrt5}{2},\frac{2+\sqrt5}{2}]$~~

$\therefore m\in(1-\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2})$

(2) ~~$x_1\in[1,2]$~~

$x_2\in[-1,0]$

$f(x_2)_{max}=-2$

对 $x_1\in[1,2]$

$mx^2-2mx+1>-2$ 成立

$m(x^2-2x)>-3$

若 $x^2-2x=0$，成立

若 $x^2-2x\neq0$

~~$m>\frac{3}{x^2-2x}$~~ $m<-\frac{3}{x^2-2x}$

$-\frac{3}{x^2-2x}\in[3,+\infty)$

$\therefore m\in(-\infty,3)$

(3) $f(x_2)\in[1,2]$

则 $x_1\in[1,2]$

$mx^2-2mx+1$ 可取得 $[1,2]$ 中值

1° $m=0$

$g(x)=1$，成立

2° $m\neq0$

~~$g(x)=m(x^2-2x)+1$~~

$g(x)=m(x-1)^2-m+1$

2.1° $m>0$

$g(1)\leq2$ $g(2)\geq1$

$-m+1\leq2$ $1\geq1$

$m\leq-1$，舍去

2.2° $m<0$

$g(1)\geq1$ $g(2)\leq2$

$-m+1\geq1$ $1\leq2$

$\therefore m\leq0$

综上 $m\in(-\infty,0]$

(4) $x_2\in[0,2]$

$f(x_2)_{min}=-2$

1° $m=0$

$1>-2$，成立

2° $m>0$

$g(1)>-2$

$\therefore -m+1>-2$

$\therefore m<3$

3° $m<0$

$g(2)>-2$

$1>-2$ 成立.

$\therefore m\in(-\infty,3)$

(1) $sin\alpha - cos\alpha$; (2) $sin^3\alpha + cos^3\alpha$; (3) $sin^4\alpha + cos^4\alpha$.

解 (1) $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = \frac{1}{25}$

$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25}$

$\because \alpha \in (0,\pi)$, $\sin\alpha > 0$

$\therefore \cos\alpha < 0$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$\therefore \sin\alpha - \cos\alpha > 0$

$(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \sin^2 + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$

$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{7}{5}$

(2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$

$= (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha)$

$= \frac{1}{5}((\frac{1}{5})^2 - 3\sin\alpha\cos\alpha)$

$= \frac{1}{5}(\frac{1}{25} - 3\times(-\frac{12}{25}))$

$= \frac{37}{125}$

(3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= 1^2 - 2\times(-\frac{12}{25})^2 = \frac{337}{625}$

3. 已知 $tan\alpha = \sqrt{2}$, 求下列各式的值:

1. $\frac{cos\alpha - 5sin\alpha}{3cos\alpha + sin\alpha}$; 2. $\frac{sin^2\alpha - sin\alpha cos\alpha - 3cos^2\alpha}{5sin\alpha cos\alpha + sin^2\alpha + 1}$; 3. $2sin^2\alpha - sin\alpha cos\alpha + cos^2\alpha$.

解 1、原式 $= \frac{1 - 5\tan\alpha}{3 + \tan\alpha}$

$= \frac{1 - 5\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}$

$= \frac{13 - 16\sqrt{2}}{7}$

2. 原式 $= \frac{\tan^2\alpha - \tan\alpha - 3}{5\tan\alpha + 2\tan^2\alpha + 1}$

$= \frac{2 - \sqrt{2} - 3}{5\sqrt{2} + 4 + 1}$

$= -\frac{\sqrt{2} + 1}{5\sqrt{2} + 5} = -\frac{1}{5}$

3 ~~原式~~ $\tan\alpha = \sqrt{2}$

$\therefore \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha$

原式 $= 2(\sqrt{2}\cos\alpha)^2 - \sqrt{2}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$

$= (5 - \sqrt{2})\cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\therefore \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$

原式 $= \frac{5 - \sqrt{2}}{3}$

4. 化简: $\frac{sin(2\pi - \alpha)cos(\pi + \alpha)cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)cos(\frac{11\pi}{2} - \alpha)}{cos(\pi - \alpha)sin(3\pi - \alpha)sin(-\pi - \alpha)sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha)}$

解 原式 $= \frac{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)(-\sin\alpha)}{(-\cos\alpha)(\sin\alpha)(\sin\alpha)(\cos\alpha)}$

$= -\tan\alpha$

5. (1) 已知 $sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{1}{2}$，求 $cos(\frac{\pi}{6} + \alpha)$ 的值.

(2) 已知 $cos(\frac{5\pi}{12} + x) = \frac{1}{3}$，且 $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$，求 $cos(\frac{\pi}{12} - x)$ 的值.

解 (1) $\cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{3} - \alpha))$

$= \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{1}{2}$

(2) $\cos(\frac{\pi}{12} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{5}{12}\pi + x))$

$= \sin(\frac{5}{12}\pi + x)$

而 $\sin(\frac{5}{12}\pi + x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(\frac{5}{12}\pi + x)}$

$= \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\because x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$

$\therefore \sin(\frac{5}{12}\pi + x) < 0$

$\therefore \sin(\frac{5}{12}\pi + x) = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

$\cos(\frac{\pi}{12} - x) = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$

6. 已知 $sin\theta, cos\theta$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0(a\in \mathbf{R})$ 的两根，(1) 求 $cos^3(\frac{\pi}{2}-\theta)+sin^3(\frac{\pi}{2}+\theta)$ 的值 (2) 求 $tan(\pi-\theta)-\frac{1}{tan\theta}$ 的值

5

解 (1) 原式 $=\sin^3\theta+\cos^3\theta$

由韦达 $\begin{cases}\sin\theta\cos\theta=a\\ \sin\theta+\cos\theta=a\end{cases}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$a^2-2a=1$ $\because |a|\le 2$

$a=1\pm\sqrt{2}$ $\therefore a=1-\sqrt{2}$

原式 $=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=a((\sin\theta+\cos\theta)^2-3\sin\theta\cos\theta)$

$=a(a^2-3a)=a^3-3a^2$

$=\sqrt{2}-2$

"舍去根"

+

a的值可以求出

(2) 原式 $=-\tan\theta-\frac{1}{\tan\theta}$

$=-\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$=-\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=-\frac{1}{a}$

$=\sqrt{2}+1$

7. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $sin(2\pi-A)=-\sqrt{2}sin(\pi-B)$，$\sqrt{3}cosA=-\sqrt{2}cos(\pi-B)$，求 $\triangle ABC$ 的三个内角.

解

$-\sin A=-\sqrt{2}\sin B$

$\sin A=\sqrt{2}\sin B$

$\sqrt{3}\cos A=+\sqrt{2}\cos B$

$\sin^2A+\cos^2A=1$

$2\sin^2B+\frac{2}{3}\cos^2B=1$

又 $\sin^2B+\cos^2B=1$

$\frac{4}{3}\sin^2B=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin^2B=\frac{1}{4}$

$\because$ ~~$\sin B>0$~~ $B\in(0,\pi)$

$\therefore \sin B>0$, $\sin B=\frac{1}{2}$

$\sin A=\sqrt{2}\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$

~~$\cos B=\frac{}{2}$~~

1° $\cos B<0$

则 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos B<0$

$A>\frac{\pi}{2}$, $B>\frac{\pi}{2}$, 内角和大于 π, 舍去

2° $\cos B>0$

$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\frac{\pi}{6}$, $A=\frac{\pi}{4}$

$C=\frac{7}{12}\pi$

综上，三内角为 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{12}\pi$