第 14 讲函数的值域与最值（学生版）

知识梳理与应用

类型一：分式类型函数

最一般形式：$y=\dfrac{dx^2+ex+f}{ax^2+bx+c},x\in D$

常见的为：分子分母中至多有一个为 2 次多项式

基本思路：

1. 换元：分子或分母为一次多项式时，可换元；复合函数，外层为分式函数时，内层可换元；

2. **分离整式：**即可得到反比例函数形式、对勾函数形式或蝴蝶函数形式；

3. 单调性或基本不等式：如果满足平均值不等式的使用条件可直接应用求最值；若不满足可根据单调性求值域/最值；

示例：

（1）$y=\dfrac{4x+3}{2x-1}=\dfrac{2(2x-1)+5}{2x-1}=2+\dfrac{5}{2x-1},(x\neq\dfrac{1}{2})$ 即可判断单调性

（2）$y=\dfrac{x^2-1}{x+2}=\dfrac{(x+2)^2-4(x+2)+3}{x+2}=(x+2)+\dfrac{3}{x+2}-4,(x\neq-2)$

亦可换元：

令 $t=x+2,t\neq0,x=t-2$，则 $y=\dfrac{(t-2)^2-1}{t}=\dfrac{t^2-4t+3}{t}=t+\dfrac{3}{t}-4$

即可使用平均值不等式或判断单调性；

（3）$y=\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$

定义域：$\{x\mid x\neq-1$ 且 $x\neq3\}$，

换元：令 $t=x-1$, 则 $t\neq-2$ 且 $t\neq2$，$x=t+1$

$$y=\frac{t}{(t+1)^2-2(t+1)-3}=\frac{t}{t^2-4},$$

$t=0$ 时，$y=0$；（注意分类讨论，0 不能做除数）

$t\neq0$ 时，$y=\dfrac{1}{t-\dfrac{4}{t}}$ 即可判断单调性

【例 1】（2018·上海普陀区·曹杨二中高三月考）★☆☆☆☆

函数 $y=\dfrac{2x+3}{x+2}$，$x\in[0,2]$ 的值域是________.

【例 2】（2017·上海市洋泾中学高一月考）★★☆☆☆

已知 $x>2$，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$ 的值域为___________.

【例 3】（2019•复旦附中高一上期末 10）★★★★☆

对于函数 $f(x)$，若对于任意的 a，b，$c\in R$，$f(a)$，$f(b)$，$f(c)$ 为某一三角形的三边长，则称 $f(x)$ 为“可构造三角形函数”，已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x+t}{e^x+1}$ 是“可构造三角形函数”，则实数 t 的取值范围是________.

【练习】（2017·上海市松江二中高一月考）★★★☆☆

函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ 的值域为_________________.

【练习】（2021·上海杨浦区·复旦附中高一期末）★★★☆☆

若函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x+1}(x\geq 0)$ 的值域为 $[a,+\infty)$，则实数 a 的取值范围是__________.

类型二：含绝对值类型函数

含有绝对值的函数，一般都可以通过**写成分段函数**去绝对值来解决问题.

但有些特殊的形式出在客观题位置时，可以直接应用结论：

$f(x)=a_1|x-b_1|+a_2|x-b_2|$，$x\in R$ 形式

若 $a_1+a_2>0$，$f(x)$ 开口向上，有最小值，为 $min\{f(b_1),f(b_2)\}$；

若 $a_1+a_2<0$，$f(x)$ 开口向下，有最大值，为 $max\{f(b_1),f(b_2)\}$；

若 $a_1+a_2=0$， $f(x)$ 就最大值为 $max\{f(b_1),f(b_2)\}$， 也有最小值为 $min\{f(b_1),f(b_2)\}$

$f(x)=a_1|x-b_1|+a_2|x-b_2|$， $x\in[m,n]$ 形式

若 $a_1+a_2\geq 0$, $f(x)$ 最大值为 $max\{f(m),f(n)\}$, 最小值需判断 $[m,n]$ 和 b_1,b_2 的位置关系

若 $a_1+a_2\leq 0$, $f(x)$ 最小值为 $\min\{f(m),f(n)\}$, 最大值需判断 $[m,n]$ 和 b_1,b_2 的位置关系

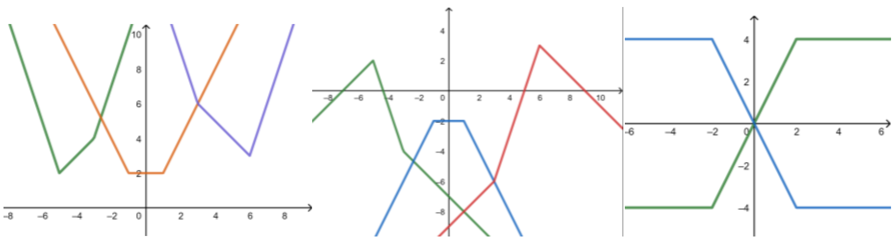
证明：

不妨设 $b_1<b_2$

则 $f(x)=\begin{cases}-(a_1+a_2)x+a_1b_1+a_2b_2,x\leq b_1\\(a_1-a_2)x-a_1b_1+a_2b_2,b_1\leq x\leq b_2\\(a_1+a_2)x-a_1b_1-a_2b_2,x\geq b_2\end{cases}$

所以图像如下

$a_1+a_2>0$，　　　　$a_1+a_2<0$，　　　　$a_1+a_2=0$



【例 4】（2021·上海市大同中学高一期末）★★★☆☆

函数 $y=|x-1|+|x|,x\in[a,2]$ 的最大值为 3，则 a 的取值范围为 ________________.

【例 5】（2021·上海黄浦区·高三二模）★★★★☆

已知$a\in R$，函数$f(x)=\begin{cases}|x+a|+|x-2|, x\ge 0\\ x^2-ax+\frac{1}{2}a+1, x<0\end{cases}$的最小值为$2a$，则由满足条件的$a$的值组成的集合是____________.

【练习】（2020 华师大二附中高二期末）★★★☆☆

已知$f(x)=|2x-m|-|x+2m|(m>0)$的最小值为$-\frac{5}{2}$，则m的值_________.

【练习】（2019·上海位育中学高二期末）★★★☆☆

已知函数$f(x)=|x-a|+|x-3a|$，若当$3\le x\le 4$时，函数$f(x)$都能取到最小值，求实数a的取值范围.

类型三：含根式类型函数

【例 6】（2015·上海理工大学附属中学高一月考）★★★☆☆

函数$y=4x-\sqrt{2x-1}$的值域是__________.

【例 7】（2018·上海市市西中学高三期中）★★★☆☆

函数$f(x)=2x\sqrt{2-x^2}$的值域是_______.

【练习】（2018·上海浦东新区·高三三模）★★★☆☆

$y=\frac{\sqrt{1-x}+2}{x}$的值域是________.

【练习】（2019·上海市第二中学高二期末）★★★☆☆

已知函数$f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{2-x}-\sqrt{1-x}$，则函数$y=f(x)+g(x)$的值域_____.

以练熟技

1、（2019 秋•控江中学高一上期末）★★★☆☆

已知常数$a\in R$，函数$f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+1}$，若$f(x)$的最大值与最小值之差为 2，则$a=$____.

2、（精选）★★★☆☆

若关于x的不等式$m|x+1|+|x-2|\geq 3$恒成立，则实数m的取值范围为______.