专题练习 1

填空题:

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $M=\{1,2\},N=\{3,4\}$，则 $\overline{M\cup N}=$___$\{5\}$___

解析　根据并集的运算可知 $M\cup N=\{1,2,3,4\}$，故其补集 $\overline{M\cup N}=\{5\}$

注: 看清楚运算符号!

2. 设集合 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cap B=B$，则 $x=$___$0或-2或2$___

解析　首先对条件进行转换，$A\cap B=B$ 即 $B\subseteq A$，根据集合中元素的无序性可知需要进行分类讨论。

(1) $x^2=x$

此时对应于 $x=0或1$，但是经过检验发现 $x=1$ 使得集合中元素违背互异性。

(2) $x^2=4$

此时对应于 $x=2或-2$，均不违背互异性。

综上，$x=0或-2或2$

3. 设集合 $A=\{1,2,m\}$，其中 m 为实数，令 $B=\{a^2|a\in A\}$，$C=A\cup B$。若 C 中所有元素之和为 6，则 C 中所有元素之积为___-8___

解析　$B=\{1,4,m^2\}$，则在**不违背互异性的前提下**有 $C=\{1,2,4,m,m^2\}$。根据 C 中元素和为 6，而 $1+2+4>6$，又因为 $m^2+m>-1$ 恒成立，故应有 $m<0$ 且 $m^2\in\{1,2,4\}$。故可知 $m=-1$，$C=\{1,2,4,-1\}$，因此 C 中所有元素之积为-8.

4. 已知集合 $A=\{a|x=\dfrac{383a^2+a}{2a+1},x\in \boldsymbol{Z},a\in \boldsymbol{Z}\}$，$A$ 中最大的元素为___190___

解析　由于 $\dfrac{383a^2+a}{2a+1}$ 为二次比一次的形式，因此应考虑利用多项式除法来分离。为了方便运算，应考虑进行换元。

令 $t=2a+1$，因此 t 应为奇数，$a=\dfrac{t-1}{2}$。故 $\dfrac{383a^2+a}{2a+1}=\dfrac{383(\frac{t-1}{2})^2+(\frac{t-1}{2})}{t}=\dfrac{1}{4}[\dfrac{383(t-1)^2+2(t-1)}{t}]=\dfrac{1}{4}[\dfrac{383t^2-764t+381}{t}]=\dfrac{1}{4}[383t+\dfrac{381}{t}]-191$

易知可以先检验 $t=381$，此时原式为整数，而当 $t>381$ 易知原式不是整数，因此 t 最大值为 381，此时对应于 $a=190$

5. 若集合 $A=\{x|(a-1)x^2+3x-2=0\}$ 仅有一个真子集，实数 $a=$_$1或-\frac{1}{8}$_

解析　由于只有一个真子集，故集合中只有一个元素。因为二次项系数有参数 a，所以需要分类讨论

(1) $a=1$，此时方程退化回一次方程，只有一个实根，满足题意

(2) $a\neq 1$，此时方程为二次方程，若只有一个实根，则判别式为 0，即 $9+8(a-1)=0$，得 $a=-\dfrac{1}{8}$

6. 已知集合 $A=\{y|x^2+mx-y+2=0,x\in R\}$，$B=\{y|x+y+1=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，m 的取值范围是___$(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$___.

解析　首先可以判断出来 $B=[-2,-1]$，而 A 是函数 $y=x^2+mx+2$ 的函数值的取值范围。由于函数 $y=x^2+mx+2$ 的开口向上，欲使 $A\cap B\neq\varnothing$，则应有其函数值最小值小于等于-1。即 $\frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{2}+2\leqslant -1$，解得 $m\in(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

7. 已知集合 $A=\{x|\frac{x-2}{x+1}<0\}$，$x\in A$ 的一个必要条件是 $x\geqslant a$，则实数 a 的取值范围是 $\underline{a\leqslant -1}$

解析　$A=(-1,2)$，故 $a\leqslant -1$

注: **小范围可以推出大范围**

8. 已知 $x\in\boldsymbol{R}$，"$(x-2)(x-3)\leqslant 0$" 是 "$|x-2|+|x-3|=1$ 成立" 的___充要___条件.

解析　$(x-2)(x-3)\leqslant 0$ 解集为 $[2,3]$

$|x-2|+|x-3|=1$ 解集为 $[2,3]$（平底锅函数，三角不等式）

9. "$x+y\neq 3$" 是 "$x\neq 1$或$y\neq 2$" 成立的___充分非必要___条件.

解析　"$x+y\neq 3$" 对应了平面上除了直线 $x+y=3$ 的区域

"$x\neq 1$或$y\neq 2$" 对应了平面上除了点 $(1,2)$ 的区域

10. "$x+y\neq 5$" 是 "$x\neq 2$且$y\neq 3$" 成立的既非充分也非必要条件.

解析　"$x+y\neq 5$" 对应了平面上除了直线 $x+y=5$ 的区域

"$x\neq 2$且$y\neq 3$" 对应了平面上除了直线 $x=2$ 和直线 $y=3$ 的区域

11. "若 $a>1$ 且 $b>2$，则 $a+b>3$" 的否命题、逆命题、逆否命题中真命题的个数是___1___

解析　原命题为真，故逆否命题为真。

逆命题："若 $a+b>3$，则 $a>1$ 且 $b>2$" 为假，故否命题也为假.

12. 不等式 $\frac{x+5}{x^2+2x+5}\geqslant 1$ 的解集为 $\underline{[-1,0]}$

解析　因为 $x^2+2x+5>0$ 恒成立，因此可以转化为 $x+5\geqslant x^2+2x+5$，解集为 $[-1,0]$

注: 先判断分母是否恒正或者恒负，再考虑移项通分.

13. 不等式 $\frac{x^2(x+2)(x^2-x+1)}{x^2-5x+4}>0$ 的解集为 $\underline{(-2,0)\cup(0,1)\cup(4,+\infty)}$

解析　注: 穿针引线法求解，奇穿偶回，**偶次方根绝对不能丢弃，且易出错**.

14. 定义区间 $(c,d),[c,d),(c,d],[c,d]$ 的长度均为 $d-c(d>c)$。已知实数 $a>b$，则满足 $\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-b}\geqslant 3$ 的 x 构成的区间长度之和为___1___

解析　首先通分有 $\frac{3x-2a-b}{(x-a)(x-b)}\geqslant 3$，易知移项通分运算量很大。因此考虑分类讨论乘分母

(1) $x>a$ 或 $x<b$

此时不等式可以转化为 $3x-2a-b\geqslant 3(x-b)(x-a)$

(2) $a>x>b$

此时不等式可以转化为 $3x-2a-b\leqslant 3(x-b)(x-a)$

绘制 $y=3(x-b)(x-a)$ 和 $y=3x-2a-b$ 的草图可知不等式的解集为 $(b,x_1)\cup(a,x_2)$，其中 x_1,x_2 是方程 $3(x-b)(x-a)=3x-2a-b$ 的两根。根据韦达定理可知解集的区间长度和为 $x_1+x_2-a-b=1$

注: 本题也可以通过绘制 $y=\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-b}$ 的草图，分析其单调区间，值域来解决。本质是一样的。

15. 若 $a<b$，且 $a<\frac{1}{x^2-3x+2}<b$ 的解集为 $\varnothing$，则 $b-a$ 的最大值为___4___

解析　$\frac{1}{x^2-3x+2}\in(-\infty,-4]\cup(0,+\infty)$，故 $b-a$ 取最大值的时候为 $b=0,a=-4$

16. $|x+1|<3-2x$ 的解集是 $\underline{(-\infty,\frac{2}{3})}$

解析　解集为 $(-\infty,\frac{2}{3})$

注: 1. $|f(x)|>g(x)$ 的充要条件是 $f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$ 2. $|f(x)|<g(x)$ 的充要条件是

$-g(x) < f(x) < g(x)$

注: **此处绝对不能平方处理**，否则等价于 $|x+1| < |3-2x|$ 会得到 $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (4, +\infty)$；当不等式两侧均含有绝对值时才适合平方去绝对值.

17. 若关于 x 的不等式 $k|x| > |x-2|$ 恰有 4 个整数解，则实数 k 的取值范围是__$(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$__

解析　易知 $x=0$ 不是不等式的解，故 $k|x| > |x-2|$ 进行参变分离，同解变形 $k > |\frac{x-2}{x}|$，即 $k > |1-\frac{2}{x}|$

由函数 $f(x) = |1-\frac{2}{x}|$ 的图像可知整根的集合为 $\{2,3,4,5\}$，故 $f(5) < k \leqslant f(6)$，即 $k \in (\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$ 注: **解决整根问题的第一步往往是确认整根的集合**

18. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-a}{x-1+a} < 0 \\ x+3a > 1 \end{cases}$ 的整数解恰有两个，则实数 a 的取值范围是__$(1,2]$__

解析　首先可以确定第一个不等式的解集为 $(a, 1-a)$ 或 $(1-a, a)$，因为 a 和 $1-a$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称，因此 $\frac{1}{2}$ 必然在该不等式的解集中。而第二个不等式的解集为 $(1-3a, +\infty)$

① 若 $a \in [0,1]$，则 $(a, 1-a)$ 或 $(1-a, a)$ 没有整数解，故整个不等式组的解集中也没有整数解.

② 若 $a < 0$，则 $a < 0 < 1 < 1-a < 1-3a$，则整个不等式组解集为空集.

③ 若 $a > 1$，则 $1-3a < 1-a < 0 < 1 < a$ 整个不等式组的解集为 $(1-a, a)$，此时解集中必有两个整数解 $0, 1$，故当 $a \in (1,2]$ 时，满足要求.

综上，$a \in (1,2]$

注: 本题画数轴可以更方便分析，本题判断出 a 和 $1-a$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称后可以猜测到两个整根是 0 和 1.

19. 已知不等式组 $\begin{cases} x^2-x+a-a^2 < 0 \\ x+2a > 1 \end{cases}$ 的整数解恰好有两个，a 的取值范围是__$(1,2]$__

解析　设函数 $f(x) = x^2 - x$，则第一个不等式即 $f(x) < f(a)$，根据函数的性质可知不等式即 $|x-\frac{1}{2}| < |a-\frac{1}{2}|$，故 $\frac{1}{2} - |a-\frac{1}{2}| < x < \frac{1}{2} + |a-\frac{1}{2}|$，故第一个不等式解集为 $(1-a, a)$ 或 $(a, 1-a)$，第二个不等式解集为 $(1-2a, +\infty)$

① $a \in [0,1]$，此时第一个不等式中不含有两个整数解，不符合要求.

② $a < 0$，第一个不等式解集为 $(a, 1-a)$，而 $1-a < 1-2a$，故不等式组解集为空集，不符合要求.

③ $a > 1$，第一个不等式解集为 $(1-a, a)$，故不等式解集为 $(1-a, a)$，当 $a \in (1,2]$ 满足要求.

20. 若不等式 $x^2+px > 4x+p-3$，当 $0 \leqslant p \leqslant 4$ 时恒成立，则 x 的取值范围是__$(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$__

解析

(1) 方法 1：看做是关于 p 的一元一次不等式求解

不等式移项得到 $x^2 - 4x + 3 > (1-x)p$。

因式分解有 $(x-1)(x-3) > -p(x-1)$

下面根据 x 的取值范围进行分类讨论：

① $x > 1$，不等式转化为 $x - 3 > -p$，故 $x \in (3, +\infty)$

② $x = 1$，这种情况不成立

③ $x < 1$，不等式转化为 $x - 3 < -p$，故 $x \in (-\infty, -1)$

综上，当 $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 时不等式恒成立。

(2) 方法 2：看做是关于 x 的一元二次不等式求解

不等式移项得到 $x^2+(p-4)x+(3-p)>0$。即 $(x-(3-p))(x-1)>0$

因此根据两解可以写出不等式的解集为 $\begin{cases}(-\infty,3-p)\cup(1,+\infty) & 4\geqslant p\geqslant 2\\(-\infty,1)\cup(3-p,+\infty) & 0\leqslant p<2\end{cases}$

要使得不等式在 p 取到 $[0,4]$ 内任意值时成立，则应取所有 p 所对应的解集的交集，故当 $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ 时不等式恒成立。

注: 通过对比可知以 p 为主元更容易理解和推广。

解答题:

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0,x\in R\}$，$B=\{(x,y)|x+y+1=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 m 的取值范围.

   解析　根据题意，两集合交集非空代表两段函数的图像有交点，即方程 $x^2+(m+1)x+3=0$ 在 $[0,1]$ 内有根，因为 $x=0$ 并非原方程的根，故可等价于方程 $-(m+1)=x+\frac{3}{x}$ 在 $(0,1]$ 内有根 $y=x+\frac{3}{x}$ 在 $(0,1]$ 内单调减，故 $-(m+1)\in[4,+\infty)$，故 $m\in(-\infty,-5]$

2. 集合 $A=\{x|x^2-8x+12=0\},B=\{x|ax+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求 a 的取值范围.

   解析　$A\cup B=A$ 即 $B\subseteq A$

   ① $a=0$，此时 $B=\varnothing$，满足要求.

   ② $a\neq 0$，此时 $B=\{-\frac{1}{a}\}$，因为 $A=\{2,6\}$，若 $B\subseteq A$，则 $-\frac{1}{a}\in A$，因此 $a=-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{6}$

   综上 $a\in\{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\}$

3. 对任意实数 x，不等式 $2kx^2+kx-3<0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

   解析　当 $k=0$ 时，不等式成立。

   当 $k\neq 0$，从二次函数的角度看一元二次不等式，要使得不等式恒成立，则应有函数开口向下，即 $k<0$，并且有 $\Delta=k^2+24k<0$，因此 $k\in(-24,0)$。

   综上，$k\in(-24,0]$

4. 若关于 x 的不等式 $ax+6+|x^2-ax-6|\geqslant 4$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

   解析　原不等式转化为 $|x^2-ax-6|\geqslant -2-ax$ 恒成立，即 $x^2-ax-6\geqslant -2-ax$ 与 $x^2-ax-6\leqslant 2+ax$ 解集的并集为 $\boldsymbol{R}$

   前者解集为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，后者解集为 $[a-\sqrt{a^2+8},a+\sqrt{a^2+8}]$，故 $(-2,2)\subseteq[a-\sqrt{a^2+8},a+\sqrt{a^2+8}]$，因此 $a\in[-1,1]$

5. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $|x-a-1|\leqslant a$ 的解集依次是 A,B，求使得 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

   解析　$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 即 $-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，即 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$

   $|x-a-1|\leqslant a$ 即 $-a\leqslant x-a-1\leqslant a$，即 $1\leqslant x\leqslant 2a+1$

   由于 $a^2+1\geqslant 2a$ 恒成立，所以 A 必不为空集，故 $A\subseteq B$ 即 $1\leqslant 2a,a^2+1\leqslant 2a+1$，解得 $a\in[\frac{1}{2},2]$

6. 已知函数 $f(x)=|x-2|+|x-a|$，若对于任意的 $x\in[1,2]$，$f(x)\geqslant|x-4|$ 恒成立，求实数 a 的范围.

   解析　当 $x\in[1,2]$，$f(x)\geqslant|x-4|$ 即 $2-x+|x-a|\geqslant 4-x$，整理得 $|x-a|\geqslant 2$，由绝对值的几何意义可知 $a\in(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$

   注: 有自变量的具体范围的时候，可以先看一下绝对值是否可以直接去掉.

7. 已知关于 x 的不等式 $x^2+9+|x^2-3x|\geqslant kx$ (*)

(1) 若 (*) 在区间 $[1,5]$ 上恒成立，求实数 k 的取值范围.

(2) 若 (*) 在区间 $[1,5]$ 上有解，求实数 k 的取值范围.

解析　当 $x\in[1,5]$ 时，原不等式可以转化为 $x+\frac{9}{x}+|x-3|\geqslant k$

(1) 不等式恒成立即 k 比左侧最小值小，而易知左侧最小值在 $x=3$ 时取，故 $k\leqslant 6$

(2) 不等式有解即 k 比左侧最大值小，设 $f(x)=x+\frac{9}{x}+|x-3|$ 易知 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上先减后增，最大值在端点处取. $f(1)=12, f(5)=\frac{44}{5}$ 故 $k\leqslant 12$

注: **区分有解问题和恒成立问题**.

8. 已知不等式 $x^2+(a-2)x+3a>0(*)$

(1) 若不等式 $(*)$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

(2) 若不等式 $(*)$ 对任意的 $a\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 x 的取值范围

解析

(1) ① 通解法

$f(x)=x^2+(a-2)x+3a$ 的对称轴为 $x=1-\frac{a}{2}$

若 $1-\frac{a}{2}<-1$，即 $a>4$，此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，因此 $f(-1)>0$，即 $1+2-a+3a>0$，解得 $a>-\frac{3}{2}$，结合对称轴有 $a>4$

若 $1-\frac{a}{2}>1$, 即 $a<0$, 此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减, 因此 $f(1)>0$, 即 $1+a-2+3a>0$, 解得 $a>\frac{1}{4}$，此种情况无解

若 $1-\frac{a}{2}\in[-1,1]$, 即 $a\in[0,4]$, 此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内最小值在顶点处取, 即 $f(1-\frac{a}{2})>0$, 整理有 $a^2-16a+4<0$，解得 $a\in(8-2\sqrt{15},8+2\sqrt{15})$，结合对称轴有 $a\in(8-2\sqrt{15},4]$

综上，$a\in(8-\sqrt{15},+\infty)$

② 参变分离

$(x+3)a-2x+x^2>0$ 在 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即 $a>\frac{2x-x^2}{x+3}$ 在 $x\in[-1,1]$ 恒成立.

换元 $t=x+3, t\in[2,4]$, 即 $a>\frac{-t^2+8t-15}{t}$ 在 $[2,4]$ 恒成立. 进一步变形有 $a>-(t+\frac{15}{t})+8$ 在 $[2,4]$ 恒成立. 根据对勾函数性质可知 $-(t+\frac{15}{t})+8\leqslant 8-2\sqrt{15}$ ($t=\sqrt{15}$, 即 $x=\sqrt{15}-3$ 时取等号) ，故 $a\in(8-\sqrt{15},+\infty)$

(2) 将 a 做为主元，即 $(x+3)a-2x+x^2>0$ 在 $a\in[-1,1]$ 恒成立，设 $f(a)=(x+3)a-2x+x^2$，故只需 $f(1)>0, f(-1)>0$ 即可. 解得 $x\in(-\infty,\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},+\infty)$

注: 恒成立问题，首先考虑主元应该是谁，然后考虑是否要参变分离.

9. 已知函数 $f(x)=|x+\frac{1}{x}-4|$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m^2-m+2$

(1) 在区间 $[\frac{1}{6},3]$ 总有解，求实数 m 的取值范围.

(2) 在区间 $[\frac{1}{4},2]$ 总有解，求实数 m 的取值范围.

解析

(1) 首先要意识到不等式的右侧没有 x，因此可以将右侧当做一个整体，直接找 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{6},3]$ 上的最大值. 根据对勾函数的性质可知 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{6},1]$ 上先减后增，在 $[1,3]$ 单调递减. 故最大值会在 $x=\frac{1}{6}$ 或 $x=1$ 处取到. $f(\frac{1}{6})=\frac{13}{6}, f(1)=2$，故 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{13}{6}$

问题转化为求解不等式 $\frac{13}{6}\geqslant m^2-m+2$，解集为 $[\frac{3-\sqrt{15}}{6},\frac{3+\sqrt{15}}{6}]$.

(2) 同理，需要找 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{4},2]$ 上的最大值. 根据对勾函数的性质可知 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4},1]$ 上先减后增，在 $[1,2]$ 单调递减. 故最大值会在 $x=\frac{1}{4}$ 或 $x=1$ 处取到. $f(\frac{1}{4})=\dfrac{1}{4}, f(1)=2$，故 $f(x)$ 的最大值为 2

问题转化为求解不等式 $2 \geqslant m^2-m+2$，解集为 $[0,1]$.