2021年北京大学强基计划数学试题参考答案

本试卷共20题，每一道题均为单项选择题.下面为考生回忆班，部分题目条件可能与实际考试有所出入，仅供参考.

总体感觉：北京大学这套数学强基试卷特点非常鲜明，试题题量适中，但难度很大，偏向于竞赛，很多题目都需要一定的竞赛知识基础和竞赛技巧才能解决.其中部分题目的难度已经超过了竞赛联赛一试.

1.已知a,b,c是三个不全相等的实数且满足$a=ab+c$，$b=bc+a$，$c=ca+b$.则$a+b+c=$（　　）

A.0　　B.1　　C.3　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】若a,b,c中有0，不妨设$a=0$，则$c=0$，$b=0$，这样与a,b,c是三个不全相等的实数矛盾.所以a,b,c不全为0.

题目中三式相加容易得到$ab+bc+ca=0$.

又因为条件中三式等价于$a(1-b)=c$，$b(1-c)=a$，$c(1-a)=b$，三式相乘得到

$abc(1-a)(1-b)(1-c)=abc$.因为$abc\neq 0$，故$(1-a)(1-b)(1-c)=1$，即

$$abc=-(a+b+c).$$

又因为条件中三式等价于$ac=abc-c^2$，$ab=abc+a^2$，$bc=abc+b^2$.三式相加得

$$ab+bc+ca=3abc+a^2+b^2+c^2,$$

即

$$3\left(ab+bc+ca\right)=3abc+(a+b+c)^2$$

由$ab+bc+ca=0$，及$abc=-(a+b+c)$得到$-3(a+b+c)+(a+b+c)^2=0$.

因为$a+b+c=-abc\neq 0$.

所以

$$a+b+c=3.$$

2.若a,b,c为非负实数，且$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=25$，则$a+b+c$的最小值为（　）

A.5　　B.1　　C.0　　D.以上都不对

【答案】A

【解析】因为$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=25$.

当$(a,b,c)=(5,0,0),(0,5,0)$或$(0,0,5)$取等.

3.若实数a,b,c,d满足$ab+bc+cd+da=1$，则$a^2+2b^2+3c^2+4d^2$的最小值为（　　）

A.1　　B.2　　C.4　　D.以上都不对

【答案】B

【解析】因式分解得$(a+c)(b+d)=1$.

根据柯西不等式可得

$$\left(a^2+\left(\sqrt{3}c\right)^2\right)\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)\ge\left(a+c\right)^2,$$

$$\left(\left(\sqrt{2}b\right)^2+\left(2d\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\ge\left(b+d\right)^2.$$

故 $a^2+2b^2+3c^2+4d^2$

$$\ge\frac{3}{4}\left(a+c\right)^2+\frac{4}{3}\left(b+d\right)^2\ge2\sqrt{\frac{3}{4}\left(a+c\right)^2\cdot\frac{4}{3}\left(c+d\right)^2}=2(a+c)(b+d)=2.$$

等号成立条件为 $a:b:c:d=3:2:1:1$，其中 $c=d=\pm\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4.已知 $a,b,c\in\mathrm{R}^+$，且 $(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=3$，则 $\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)$ 的最小值.

A. $24+6\sqrt{3}$　　B. $15+8\sqrt{3}$　　C. $417+240\sqrt{3}$　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】方法 1 “变元地位,c 为主元”.

$$\left(a+b-c\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\left(c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c}\left(a+b\right)\right)+1=3$$

$c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c}\left(a+b\right)\ge2\sqrt{\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$，令 $t=\sqrt{\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$，则有

$$t^2-2t\ge2.$$

解得 $t\ge1+\sqrt{3}$.

即

$$\left(a+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\left(1+\sqrt{3}\right)^2,$$

即

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge2+\sqrt{3}.$$

所以

$$\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right)\ge\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1\right)^2$$

$$=\left(\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1\right)^2\ge\left((2+2\sqrt{3})^2-1\right)^2=417+240\sqrt{3}.$$

当$c=1$，$\begin{cases} ab=1 \\ a+b=1+\sqrt{3} \end{cases}$时等号成立，故原式的最小值为$417+240\sqrt{3}$.

方法2 “齐次化分析”

原式整理可得$(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=3 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)-(a+b)\left(\frac{c}{ab}+\frac{1}{c}\right)+1=3$

$\Rightarrow (a+b)\left(\frac{c}{ab}+\frac{1}{c}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab(a+b)}=\frac{c}{ab}+\frac{1}{c} \ge \frac{2}{\sqrt{ab}}$,

由齐次性, 不妨设$ab=1$. 则 $\frac{a^2+b^2}{a+b} \ge 2$, 即$(a+b)^2-2 \ge 2(a+b)$. 因此 、

$$a+b \ge 1+\sqrt{3}.$$

于是,$a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2 \ge \left((1+\sqrt{3})^2-2\right)^2-2=14+8\sqrt{3}$，故

$$\begin{aligned}
&\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}\right) \\
&=\left(a^4+b^4\right)\left(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}\right)+\left(a^4+b^4\right)\left(\frac{1}{c^4}+\frac{c^4}{a^4b^4}\right)+1 \\
&\geqslant \left(a^4+b^4\right)^2+\left(a^4+b^4\right)\cdot 2\sqrt{\frac{1}{c^4}\cdot\frac{c^4}{a^4b^4}}+1 \\
&=\left(a^4+b^4+1\right)^2 \\
&\geqslant (15+8\sqrt{3})^2 \\
&=417+240\sqrt{3}
\end{aligned}$$

当$c=1, ab=1, a+b=1+\sqrt{3}$时等号成立. 这样的$a,b$显然是存在的. 故原式的最小值为

$417+240\sqrt{3}$.

5.已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$, $a_{n+1}=2^{a_n}$. 数列$\{b_n\}$满足$b_1=5$, $b_{n+1}=5^{b_n}$. 若正整数m满足 $b_m>a_{25}$, 则m的最小值为____________.

A.25　　B.24　　C.23　　D.以上都不对

【答案】B

【解析】分两步证明:

(1) 先证明对任意正整数 n 有 $b_n > a_{n+1}$,采用数学归纳法，当 $n=1$ 时有

$b_1 = 5 > 2^2 = a_2$ 显然成立,假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $b_k > a_{k+1}$,则当 $n=k+1$ 时，有

$b_{k+1} = 5^{b_k} > 5^{a_{k+1}} > 2^{a_{k+1}} = a_{k+2}$

所以对 $n=k+1$ 结论也成立.所以对任意正整数 n 有 $b_n > a_{n+1}$.

(2) 再证明对任意正整数 n 有 $a_{n+2} > 3b_n$,当 $n=1$ 时，有 $a_3 = 16 > 15 = 3b_1$,

假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $a_{k+2} > 3b_k$,则当 $n=k+1$ 时,

$a_{k+3} = 2^{a_{k+2}} > 2^{3b_k} = 8^{b_k} = \left(\frac{8}{5}\right)^{b_k} \times 5^{b_k} \ge \left(1+\frac{3}{5}\right)^5 > 3\times 5^{b_k}$,所以对 $n=k+1$ 结论也成立.

所以对任意正整数 n 有 $a_{n+2} > 3b_n$.

此时我们由(1)可以得到 $b_{24} > a_{25}$,

由(2)可以得到 $a_{25} > 3b_{23} > b_{23}$,所以满足 $b_m > a_{25}$ 的 m 的最小值为24.

6.已知实数 $x_0 \in [0,1)$. 数列 $\{x_k\}$ 满足：若 $x_{n-1} < \frac{1}{2}$，则 $x_n = 2x_{n-1}$，若 $x_{n-1} \ge \frac{1}{2}$，则 $x_n = 2x_{n-1} - 1 (n=1,2,\cdots)$. 现知 $x_0 = x_{2021}$，则可能的 x_0 的个数为（　　）

A.1　　B.2021　　C. $2^{2021}-1$　　D.以上都不对

【答案】 C

【解析】方法1 首先我们证明 $x_n \in [0,1)$ 恒成立. 若 $x_i \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$，则 $x_{i+1} = 2x_i \in [0,1)$;若 $x_i \in \left[\frac{1}{2},1\right)$，则 $x_{i+1} = 2x_i - 1 \in [0,1)$.由数学归纳法知，$x_n \in [0,1)$ 对 $\forall n \in \mathrm{N}^*$ 成立，那么有 $x_n = \{x_n\} = \{2^n x_0\}$，其中 $\{\alpha\}$ 表示 α 的小数部分.

$\therefore x_{2021} = \{2^{2021} x_0\}$.$\therefore \{2^{2021} x_0\} = x_0$，分 $2^{2021} x_0 - x_0$ 为整数.

$\therefore x_0 = \frac{k}{2^{2021}-1} \left(k = 0,1,2,\cdots,2^{2021}-2\right)$.

$\therefore$可能的 x_0 的值共有 $2^{2021}-1$ 个.

方法 2 分析 本题考察二进制的思想，也可以作为周期数列简单处理，难度不低，不过是一道陈题考虑二进制，易见在二进制之下其小数部分的每 2021 位是一个周期，而每个位置上各有 2 个可能，故共有 2^{2021} 种可能性，但要除去所有位上都为 1 的情形，故有 $2^{2021}-1$ 种可能性.

7.设 a_n 是与 $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ 的差的绝对值最小的整数，b_n 是与 $\sqrt{2n}$ 的差的绝对值最小的整数.记 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n.则 $2T_{100}-S_{100}$ 的值为（　　）

A.2021　　　　B.2022　　　　C.2023　　　　D.以上都不对

【答案】D

【解析】$a_n=k\Leftrightarrow\sqrt{\dfrac{n}{2}}\in\left(k-\dfrac{1}{2},k+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(k^2-k+\dfrac{1}{4},k^2+k+\dfrac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow n\in\left(2k^2-2k+\dfrac{1}{2},2k^2+2k+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow n\in\left[2k^2-2k+1,2k^2+2k\right]$.故有 $4k$ 个 n 使得 $a_n=k$.

于是

$$S_{100}=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{k}\times 4k\right)+\frac{1}{7}\times 16=24+\frac{16}{7}.$$

类似地，$b_n=k\Leftrightarrow\sqrt{2n}\in\left(k-\dfrac{1}{2},k+\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow n\in\left[\dfrac{k^2-k}{2}+1,\dfrac{k^2+k}{2}\right]$，故共有 k 个 n 使得 $b_n=k$.

则

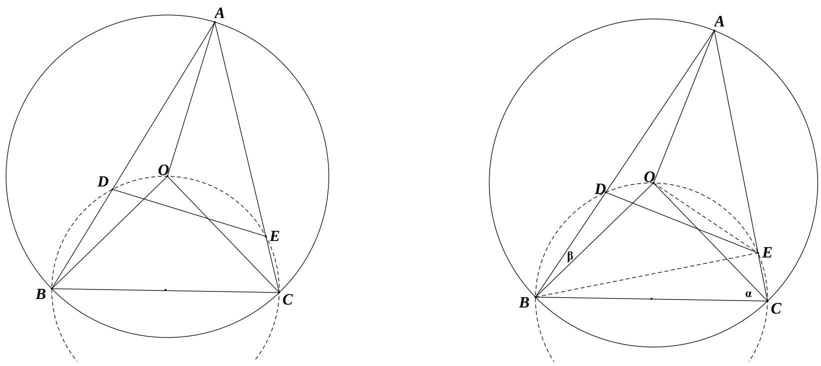
$$T_{100}=\sum_{k=1}^{13}\left(\frac{1}{k}\times k\right)+\frac{1}{14}\times 9=13+\frac{9}{14}.$$

故 $2T_{100}-S_{100}=2\left(13+\dfrac{9}{14}\right)-\left(24+\dfrac{16}{7}\right)=1$.

8.已知 O 为 ΔABC 的外心，AB,AC 与 ΔOBC 的外接圆交于 D,E，若 $DE = OA$，则 $\angle OBC=$（　　）.

A. 30°　　　　B. 45°　　　　C. 60°　　　　D.以上都不对

【答案】B



【解析】 由 $DE=OA=OB \Rightarrow \angle DBE=\angle OCB=\alpha$,所以 $\angle OBE=\alpha-\beta$,又

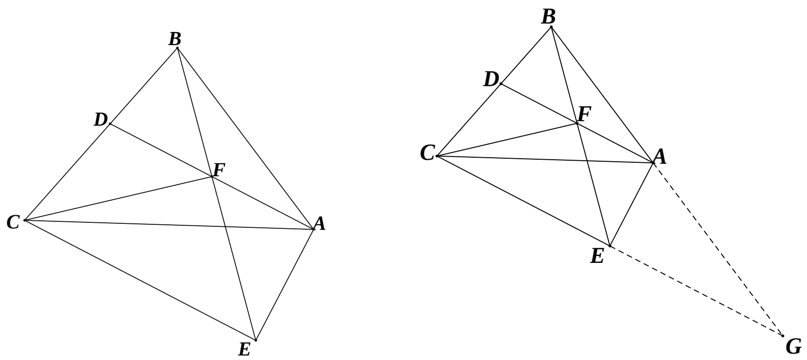
$\angle OBE=\angle OCE=\alpha-\beta$.所以 $\angle A=\alpha-\beta+\beta=\alpha$.又 $\angle BOC=180^\circ-2\alpha=2\angle A=2\alpha$,原式

$4\alpha=180^\circ$，所以 $\alpha=45^\circ$.

9.如图， AD 为 ΔABC 中 $\angle A$ 的平分线.过 A 作 AD 的垂线 AH ，过 C 作 CE // AD 交 AH 于点 E .若 BE 与 AD 交于点 F ,且 $AB=6$, $AC=8$, $BC=7$,则 $CF=$（　　）

A. $\sqrt{31}$　　B. $\sqrt{41}$　　C. $\sqrt{51}$　　D.以上都不对

【答案】A



【解析】 延长 CE , BA 交于点 G . AE 是 $\angle BAC$ 的外角平分线，结合 $AE\perp CE$ 可知， E 为 CG 的中点，从而 F 为 AD 的中点.因此

$$\left|\overrightarrow{CF}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{CD}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+2\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}}=\sqrt{31}.$$

10. 有三个给定的经过原点的平面. 过原点作第四个平面 α , 使之与给定的三个平面形成的 三个二面角均相等.则这样的 α 的个数是（　　）

A.4　　B.3　　C.1　　D.以上都不对

【答案】D

【解析】方法 1 若三个平面法向量共面（记平面为 β)，则只有一个和他们均垂直的平面满足要求. 这是因为 α 的法向量在 β 上的投影必须在这三个平面法向量两两形成的角的角平分线 上, 因此投影只能是零向量，也就是 α 的法向量需要与 β 垂直.

若三个平面法向量不共面，则任意两个法向量所在基线均有两个角分面. 我们考虑第一个平面和第二个平面的两个角分面, 以及第二个平面和第三个平面的两个角分面, 共可以产生四条交线, 这四条交线即为第四个平面法向量的基线. 极特殊情况，前三个 平面如果两两垂直, 即可以考虑空间直角坐标系中 xOy, yOz, zOx , 与他们三个夹角样的第四个平面法向量的方向，即为每个卦限的中分线, 一共四条，对应四个平面.

(注 I 非常容易产生的一种错误是认为此题的答案仅有 4 . 这是因为没有考虑三个平面的法向量共面的情形.

综上，这样的平面有 1 或 4 个.

方法 2 若三个平面法向量共面（记平面为 M)，则只有一个和他们均垂直的平面满足要求. 这是因为 N 的法向量在 M 上的投影必须在这三个平面法向量两两形成的角的角平分线 上, 因此投影只能是零向量，也就是 N 的法向量需要与 M 垂直.

若三个平面法向量不共面，考虑三个平面的法向量 α,β,γ ，且将所有法向量单位化（即模长为 1）.考虑新的平面的单位法向量 δ ，则应有 $|\alpha\cdot\delta|=|\beta\cdot\delta|=|\gamma\cdot\delta|$ ，转为坐标形式，恰好对应三元一次方程组.

显然 $\begin{cases}\alpha\cdot\delta=a\\ \beta\cdot\delta=a\\ \gamma\cdot\delta=a\end{cases}$ ， $\begin{cases}\alpha\cdot\delta=-a\\ \beta\cdot\delta=a\\ \gamma\cdot\delta=a\end{cases}$ ， $\begin{cases}\alpha\cdot\delta=a\\ \beta\cdot\delta=-a\\ \gamma\cdot\delta=a\end{cases}$ ， $\begin{cases}\alpha\cdot\delta=a\\ \beta\cdot\delta=a\\ \gamma\cdot\delta=-a\end{cases}$ 恰好对应四个不同解，故这样的平面有 4 个.

综上，这样的平面有 1 或 4 个.

11.求 $\sum_{i=0}^{2021}\left[\frac{2^i}{7}\right]$ 的末位数字.（ $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）

A.7　　B.6　　C.5　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】 2^i 模 7 的余数分别为 2,4,1,2,4,1.故

$$\left[\frac{2^i}{7}\right]+\left[\frac{2^{i+1}}{7}\right]+\left[\frac{2^{i+2}}{7}\right]=\frac{2^i+2^{i+1}+2^{i+2}}{7}-1=2^i-1.$$

故原式 $=2^0-1+2^1-1+\cdots+2^{2019}-1=\left(1+8+\cdots+8^{675}\right)-674$

$\equiv\left(1+8+4+2+6+8+4+2+6+\cdots+8\right)(\bmod 10)$

$\equiv\left(1+8+6\right)(\bmod 10)\equiv 5(\bmod 10)$.故选 C.

12.方程 $y^3+f^4=d^5$ 的正整数解 (y,f,d) 的组数为（　　）

A.1　　B.2　　C. 无穷　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】考虑到 $2^n+2^n=2^{n+1}$,取 $n\equiv 0(\bmod 3)$ ， $n\equiv 0(\bmod 4)$ ， $n\equiv -1(\bmod 5)$ 即可，可取

$n=60k+24(k\in \mathrm{N})$,有$\left(2^{20k+8}\right)^3+\left(2^{15k+6}\right)^4=\left(2^{12k+5}\right)^5$.故选 C.

13.设$y_n=1\underbrace{22\cdots2}_{n}1$.若$\left(10^9-1\right)\mid y_n$，则$n$的最小值为（　　）

A.9　　　　B.18　　　　C.80　　　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】由于$y_n=1\underbrace{22\cdots2}_{n}1=\underbrace{11\cdots1}_{n+1个}\times 11=\frac{11}{9}(10^{n+1}-1)$.那么由$\left(10^9-1\right)\mid y_n$可得

$\left(10^9-1\right)\left|\frac{11}{9}(10^{n+1}-1)\right.$，于是

$$9\left(10^9-1\right)\left|\left(10^{n+1}-1\right)\right.,$$

于是

$$\left(10^9-1\right)\left|\left(10^{n+1}-1\right)\right..$$

利用辗转相除法可以证明$\left(a^m-1,a^n-1\right)=a^{(m,n)}-1$.故有$9\left|n+1\right.$.令$n+1=9k$，代入原式则有$9\left(10^9-1\right)\left|10^{9k}-1\right.$.

而

$$10^{9k}-1=\left(10^9-1\right)\left(10^{9(k-1)}+10^{9(k-2)}+\cdots+19^9+1\right),$$

因此，我们有

$$9\left|\left(10^{9(k-1)}+10^{9(k-2)}+\cdots+19^9+1\right)\right.,$$

于是$9\left|k\right.$.所以$k\geq 9$，即$n+1\geq 81,n\geq 80$,所以n的最小值为 80. 故选 C.

14.设正整数$n\leq 2021$, 且 n^5-5n^3+4n+7 是完全平方数.则可能的 n 的个数为（　）

A.0　　　　B.5　　　　C.2021　　　　D.以上都不对

【答案】A

【解析】$n^5-5n^3+4n+7=n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)+7$.由于完全平方数模 4 余 0 或 1，故$\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)$被 4 整除. 从而$n\left(n^2-1\right)\left(n^2-4\right)+7$模 4 余 3，不可能是完全平方数. 故这样的$n$共 0 个.

15.方程$x^2-2xy+3y^2-4x+5=0$ 的整数解的组数为（　　）

A.0　　　　B.1　　　　C.2　　　　D.以上都不对

【答案】A

【解析】方程等价于$x^2-(2y+4)x+3y^2+5=0$,判别式

$$\Delta=(2y+4)^2-4\left(3y^2+5\right)=4\left(-2y^2+4y-1\right)=4\left(1-2(y-1)^2\right)\le 4.$$

判别式是一个平方数，经检验只能$\Delta=4$，此时$y=1$.方程转化为$x^2-6x+8=0$，解得

$x=2$或$x=4$.因此$(x,y)\in\{(2,1),(4,1)\}$.

16.如果一个十位数F的各位数字之和为 81，则称F是一个“幸运数”，则“幸运数”的个数为（　　）

A.48621　　B.48620　　C.48619　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】本题实质是不定方程的非负整数解的问题.

设$F=\overline{a_1a_2\cdots a_{10}}$.则

$$\sum_{i=1}^{10}a_i=81.$$

其中$1\le a_1\le 9$，$0\le a_i\le 9(i=2,3,\cdots,10)$.

令$b_i=9-a_i$，则有$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=9$，其中$0\le b_1\le 8$，$0\le b_i\le 9(i=2,3,\cdots,10)$.

该方程的非负整数解共$C_{9+10-1}^{10-1}=C_{18}^{9}=48620$组.

除去唯一一组不合题意的$(9,0,\cdots,0)$，故共有$48620-1=48619$个.

17.若 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 为非负整数，则方程 $x_1+x_2+\cdots+x_7=x_1x_2\cdots x_7$ 的解有（　　）组.

A.83　　B.84　　C.85　　D.以上都不对

【答案】C

【解析】 显然 $x_1=x_2=\cdots=x_7=0$ 是满足条件的一组解, 且只要 $x_1,x_2,\ldots,x_7$ 中有 0, 则 剩余的必须全为 0.

下面只考虑$x_1,x_2,\cdots,x_7$非零的情形. 不妨设 $0<x_1\le x_2\le\cdots\le x_7$. 则

$$x_1x_2\cdots x_7\le 7x_7\Rightarrow x_1x_2\cdots x_6\le 7.$$

显然此时必有 $x_1=x_2=x_3=x_4=1$(否则$x_4x_5x_6\ge 2^3=8>7$, 矛盾). 于是命题等价于

$x_5x_6x_7=4+x_5+x_6+x_7$, 且由 $x_5x_6\le 7$, 可得 $x_5\le 2$.

情形 1: $x_5=1$.则$x_6x_7=5+x_6+x_7\Rightarrow\left(x_6-1\right)\left(x_7-1\right)=6$.

满足条件的解有 $\left(x_6,x_7\right)=(2,7),(3,4)$.

情形2: $x_5=2$.则 $x_6=2$ 或 3 . $x_6=2$ 时，$4x_7=8+x_7$ （舍）; $x_6=3$ 时, $6x_7=9+x_7$ (舍).

故此类情形无解.

综上 $\left(x_1,x_2,\ldots,x_7\right)=(0,0,0,0,0,0,0),(1,1,1,1,1,2,7)$ 或 $(1,1,1,1,1,3,4)$.

考虑到轮换性，故共有 $7\times6\times2+1=85$ 组解.

18.若平面上有一千条二次曲线，则这些曲线可以把平面分成若干个连同区域，则连通区域数量的最大值为（　　）

A.1　　　　B.2　　　　C. 20101　　　　D.以上都不对

【答案】C

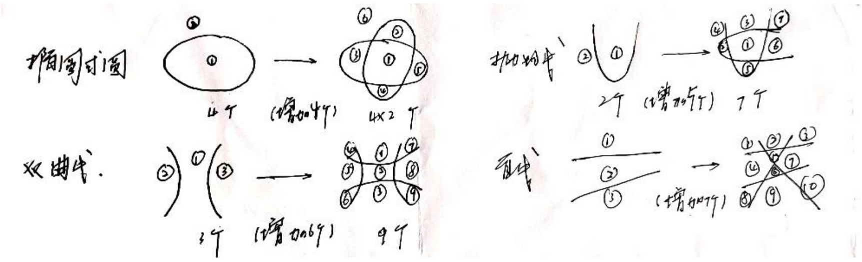
【解析】 从第 k 个二次曲线开始计算，新增加一个二次曲线变成 $k+1$ 条的情形，这条二次曲线与原来每一个二次曲线最多有 4 个交点，这样总共最多新增加 $4k$ 个交点.

（1）如果是椭圆或者圆，被分成 $4k$ 段圆弧，相当于增加连通区域最多 $4k$ 个；

（2）如果是抛物线，被分成 $4k+1$ 段曲线，相当于增加连通区域最多 $4k+1$ 个；

（3）如果是双曲线，被分成 $4k+2$ 段曲线，相当于最多增加连通区域 $4k+2$ 个；

（4）如果是两条直线，明显相交直线更优，相当于依次加入两条直线，最多增加连通区域 $4k+3$ 个.



如图二次曲线只考虑圆、椭圆、双曲线、抛物线，则从第一个曲线开始，每次均引入双曲线，答案为 $3+(4\times1+2)+(4\times2+2)+\cdots+(4\times99+2)=20001$，故可以选取离心率足够大（几乎一组平行直线），绕着其中心旋转 180° 过程中，选取任意 200 个位置即可.

如果包括二次曲线的退化形式，例如两条相交直线，则从第一条曲线开始，每次均引入相交直线，答案为 $4+(4\times1+3)+(4\times2+3)+\cdots+(4\times99+3)=20101$.此时选取 200 条直线两两相交，但交点不重合的情形即可.

19.设正整数 m,n 均不大于 2021，且 $\dfrac{m}{n+1}<\sqrt{2}<\dfrac{m+1}{n}$. 则这样的数组 (m,n) 个数为（　　）

A.3449　　　　B.3450　　　　C. 3451　　　　D.以上都不对

【答案】A

【解析】原式等价于 $\sqrt{2}n-1<m<\sqrt{2}(n+1)$.记区间 $I_n=(\sqrt{2}n-1,\sqrt{2}(n+1))$.则

$I_j\cap I_{j+1}=(\sqrt{2}(j+1)-1,\sqrt{2}(j+1))$，且 $I_j\cap I_k=\varnothing(k\geqslant j+2)$.由于 $\sqrt{2}(j+1)$ 不为整数,

故 $I_j\cap I_{j+1}$ 内恰有一个整数.当 $n\geqslant1430$ 时, $\sqrt{2}n-1>2021$.故所求数组 (m,n) 的个数是

诸$|I_n|(n=1,2,\cdots,1429)$之和.每个$m\in\{1,2,\cdots,2021\}$都出现在某个I_n之中，且当且仅当对于某个$j, m\in I_j\cap I_{j+1}$时，m会出现在两个I_n内.因此，所求数组个数为$2021+1428=3449$.

20. 现有 7 把钥匙和 7 把锁. 用这些钥匙随机开锁，则D_1,D_2,D_3这三把钥匙不能打开对应的锁的概率是（　　）

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{25}{49}$　　C. $\frac{20}{49}$　　D.以上都不对

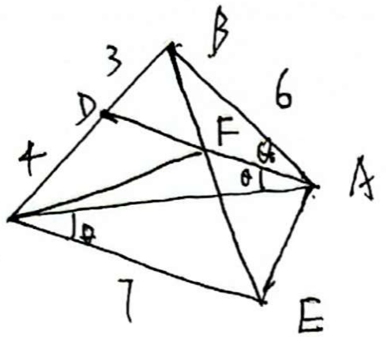
【答案】D

【解析】显然基本事件总数$N=7!$.记第i把锁被打开的情形构成集合$A_i(i=1,2,3)$,则$|A_i|=6!$，$|A_i\cap A_j|=5!$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=4!$，故事件A包含的基本事件数为$n=7!-C_3^1 6!+C_3^2 5!-C_3^3 4!$，故$P(A)=\frac{7!-C_3^1 6!+C_3^2 5!-C_3^3 4!}{7!}=1-\frac{3}{7}+\frac{3}{42}-\frac{1}{210}=\frac{67}{105}$.

无标题

- (北大强基$2021P1$）a,b,c不全相等，且$a=ab+c, b=bc+a, c=ca+b$，求$a+b+c$的值
- 解法二：三式相加得到$a+b+c=ab+bc+ac+a+b+c$，即$ab+bc+ac=0,$平方得到$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)=0$（式一）.再将三式各自平方相加得到$a^2b^2+a^2c^2+a^2c^2+6abc=0$（式二）.两式相减得到$2abc(a+b+c)=6abc,$由$abc$不为零（不妨设$a=0,$则由条件可知$b=c=0,$与$a,b,c$不全相等矛盾）得到$a+b+c=3.$
-
-

7、



解：如图，易知 $BD=3$，$DC=4$．

$\triangle ABC$中，$\cos 2\theta = \frac{100-49}{2\times 6\times 8} = \frac{17}{32}$．

$\therefore \cos\theta = \frac{7}{8}$，$\therefore CE = AC\cdot\cos\theta = 7$．

$\therefore \triangle BCE$等腰$\triangle$，又 $AD \parallel CE$

$\therefore DF=3$．又AD为角平分线，由面积关系：

$S_{\triangle BAC} = S_{\triangle BAD} + S_{\triangle DAC}$．

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot \sin 2\theta = \frac{1}{2}AD\cdot 6\sin\theta + \frac{1}{2}AD\cdot 8\cdot\sin\theta$

$\therefore AD = \frac{2\times 6\times 8\times \frac{7}{8}}{6+8} = 6$　$\therefore AF=3$

$\triangle ACF$中，由余弦定理知，$CF=\sqrt{31}$．

13. $y_n = 1\underbrace{22\cdots2}_{n个}1 = \underbrace{11\cdots1}_{n+1个1} \times 11 = \frac{11}{9}(10^{n+1}-1)$，∴由 $(10^9-1)\mid y_n$ 有

$(10^9-1)\mid \frac{11}{9}(10^{n+1}-1)$，$\Rightarrow 9\times(10^9-1)\mid(10^{n+1}-1)$，即 $9\times\underbrace{9\cdots9}_{9个9}\mid\underbrace{99\cdots9}_{n+1个9}$，

即 $9\times\underbrace{1\cdots1}_{9个1}\mid\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1}$ $*$ $\Rightarrow 9\mid\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1}$ ∴ $9\mid n+1$. 设 $n+1=9k$

注意到 $\underbrace{11\cdots1}_{n+1个1} = \underbrace{1\cdots1}_{9k个1} = \underbrace{\underbrace{1\cdots1}_{9个}\underbrace{1\cdots1}_{9个}\cdots\underbrace{1\cdots1}_{9个}}_{k组} = \underbrace{1\cdots1}_{9个1}\times(\underbrace{1\underbrace{0\cdots0}_{8个0}1\underbrace{\cdots}_{8个0}1\cdots\cdots1}_{k个1})$

∴ $* \Longleftrightarrow 9\mid\underbrace{1\underbrace{0\cdots0}_{8个0}1\underbrace{\cdots}_{8个0}1\cdots1}_{k个1}$

$\Longleftrightarrow 9\mid k$ ∴ $k_{min}=9$ ∴ $n_{min}=80$

16. 若F的每一位数字都为9，则各位数字之和为90

要使各位数字为81，需从10个9中总共减去9

设从第i位的9里减去x_i，$i=1,2,\cdots,10$

则问题转化为方程$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=9$的非负整数解组数

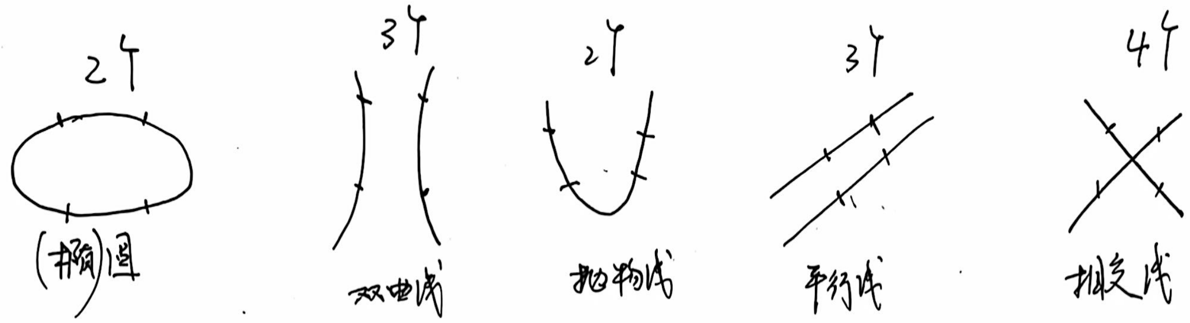
设$y_i=x_i+1$，$i=1,2,\cdots,10$，即求$y_1+\cdots+y_{10}=19$的正整数解组数

将19个1排列，在其中的18个空隙中选9个放入隔板，

所得的10个数为一组$y_1,\cdots,y_{10}$，组数为$C_{18}^{9}=48620$

去除0999999999不是十位数，答案为48619

二次曲线分为以下五类，椭圆与圆视为一类.



要使连通区域个数足够大，即交点要足够多. 设前k条二次曲线划分出的连通区域的最大值为 a_k，对第 $(k+1)$ 条二次曲线，它至多对每条二次曲线交有4个交点，以下来讨论这五类情况：

①、(椭)圆： $a_{k+1}=4k+a_k$；　②、双曲线：$a_{k+1}=4k+2+a_k$；

③. 抛物线： $a_{k+1}=4k+1+a_k$；　④. 平行线： $a_{k+1}=4k+2+a_k$

⑤. 相交线： $a_{k+1}=4k+2+1+a_k=a_k+4k+3$.

这表明要使连通区域个数最大，只要全体二次曲线为相交线且任三条直线不共点，任二条直线不平行. 由递推式： $a_{k+1}=a_k+4k+3$.

$$\begin{cases} a_k=a_{k-1}+4k-1 \\ a_{k-1}=a_{k-2}+4k-5 \\ \vdots \\ a_2=a_1+7 \end{cases}$$

$\therefore a_k=a_1+(7+11+\cdots+4k-1)=4+\frac{(4k+6)(k-1)}{2}$

$=2k^2+k+1$

$\therefore a_{100}=20101$　　选C.

$$\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}, \quad m, n \leq 2021.$$

有 $\sqrt{2}n-1 < m < \sqrt{2}n+\sqrt{2}$. 区间宽度为 $\sqrt{2}+1$，每个区间有1或2个 m

具体为 $(\lfloor\sqrt{2}n+\sqrt{2}\rfloor - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor + 1)$ 个. 由 $m, n \leq 2021$ 知. $\sqrt{2}n-1 < 2021$.

(否则 m 会超过 2021) 即 $n < 1011\sqrt{2}$ 　$n \leq 1429$ 　则 (m,n) 的对数为

$\sum_{n=1}^{1429}(\lfloor\sqrt{2}n+\sqrt{2}\rfloor - \lfloor\sqrt{2}n\rfloor + 1) = \lfloor 1430\sqrt{2}\rfloor - \lfloor\sqrt{2}\rfloor + 1429 = 2022 - 1 + 1429 = 3450$. 但 $n=1429$.

m 只能取 2020, 2021. 取不到 2022. 故有 $3450-1=3449$ 对。