

11.27 周测解析

1. 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域是_____.

【解析】解: \because 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$,

$$\therefore \sqrt{x+1} \neq 0,$$

$$\text{即 } x+1 > 0,$$

$$\text{解得 } x > -1,$$

\therefore 函数 y 的定义域是 $(-1, +\infty)$.

故答案为: $(-1, +\infty)$.

2. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$ 则 $f(3) =$ _____.

【解答】

解: 因为幂函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(2, \sqrt{2})$,

所以幂函数的解析式为: $f(x) = \sqrt{x}$,

$$\text{则 } f(3) = \sqrt{3}.$$

故答案为: $\sqrt{3}$.

3. 已知函数 $f(x) = x^2 + x - 1$ 的两个零点分别为 x_1 和 x_2 , 则 $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ 的值为_____.

【解析】解: $\because f(x) = x^2 + x - 1$ 的两个零点分别为 x_1 和 x_2 ,

$\therefore x_1$ 和 x_2 是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两根,

$$\therefore x_1 + x_2 = -1, \quad x_1 \cdot x_2 = -1,$$

$$\therefore x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) = 1.$$

故答案为: 1.

4. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2x$ 是奇函数, 则实数 $a =$ _____.

【解析】解: 由奇函数定义有 $f(-x) = -f(x)$,

$$\text{则 } f(-1) = a - 2 = -f(1) = -(a + 2),$$

$$\text{解得 } a = 0.$$

5. 已知 $\log_2 3 = m$, 试用 m 表示 $\log_6 9 =$ _____ $2m/(1+m)$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x^3} + ax^3 - bx - 5$, 且 $f(-2) = 2$, 那么 $f(2) =$ _____.

【解析】解：由题意， $f(-2) = \frac{1}{(-2)^3} + a(-2)^3 - b \times (-2) - 5 = 2$ ，即 $\frac{1}{2^3} + a \times 2^3 - b \times 2 = -7$ ，

$$\text{故 } f(2) = \frac{1}{2^3} + a \times 2^3 - 2b - 5 = -7 - 5 = -12,$$

故答案为：-12.

代入 $x = -2$ ， $x = 2$ ，整体代换求值即可.

7. 已知函数 $f(x) = |x + \frac{1}{x} - 4|$ ，若关于 x 的不等式 $f(x) \geq m^2 - m + 2$ 在区间 $[\frac{1}{6}, 3]$ 上总有解，则实数 m 的取值范围为_____.

【解析】解：当 $x \in [\frac{1}{6}, 3]$ 时， $y = x + \frac{1}{x} \geq 2$ ，当且仅当 $x = 1$ 时取得等号，

$$\text{因为当 } x = \frac{1}{6} \text{ 时， } y = x + \frac{1}{x} = 6 + \frac{1}{6} = \frac{37}{6},$$

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时， } y = x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3},$$

$$\text{根据对勾函数性质，当 } x \in [\frac{1}{6}, 3] \text{ 时， } y = x + \frac{1}{x} - 4 \in [-2, \frac{13}{6}],$$

$$\text{所以当 } x \in [\frac{1}{6}, 3] \text{ 时， } f(x) = |x + \frac{1}{x} - 4| \in [0, \frac{13}{6}],$$

因为关于 x 的不等式 $f(x) \geq m^2 - m + 2$ 在区间 $[\frac{1}{6}, 3]$ 上总有解，

$$\text{所以 } m^2 - m + 2 \leq \frac{13}{6}, \text{ 解得 } \frac{3-\sqrt{15}}{6} \leq m \leq \frac{3+\sqrt{15}}{6},$$

$$\text{所以实数 } m \text{ 的取值范围为 } [\frac{3-\sqrt{15}}{6}, \frac{3+\sqrt{15}}{6}],$$

$$\text{故答案为： } [\frac{3-\sqrt{15}}{6}, \frac{3+\sqrt{15}}{6}].$$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$ ，函数 $g(x) = b - f(2-x)$ ，如果 $y = f(x) - g(x)$

恰好有两个零点，则实数 b 的取值范围是_____.

【解析】解：函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} 2 - |x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$$

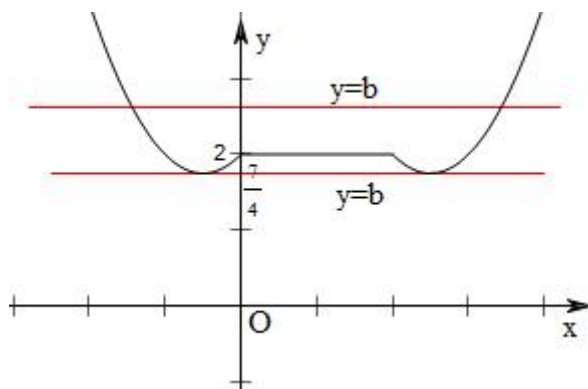
$$\text{则函数 } f(2-x) = \begin{cases} 2 - |2-x|, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{故函数 } y = f(x) + f(2-x) =$$

$$2 - |x| + x^2, x < 0$$

$$\begin{cases} 2 - |x| + 2 - |2-x|, & 0 \leq x \leq 2, \\ (x-2)^2 + 2 - |2-x|, & x > 2 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + 2 - |2-x|, x > 2$$



$$\begin{aligned} & x^2 + x + 2, x < 0 \\ \text{即 } y = f(x) + f(2-x) = & \begin{cases} 2, 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 8, x > 2 \end{cases}, \end{aligned}$$

因为函数 $g(x) = b - f(2-x)$, 且 $y = f(x) - g(x)$ 恰好有两个零点,

等价于 $f(x) + f(2-x) = b$ 恰有两个根,

即函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 与函数 $y = b$ 的图象恰有两个交点,

$$\text{因为 } y = x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} \text{ 且 } y = x^2 - 5x + 8 = (x - \frac{5}{2})^2 + \frac{7}{4},$$

所以函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 的最低点的纵坐标为 $\frac{7}{4}$,

作出函数 $y = f(x) + f(2-x)$ 和 $y = b$ 的图象如图所示,

由图象可知, 当 $b = \frac{7}{4}$ 或 $b > 2$ 时, 两个函数图象有两个交点,

即 $y = f(x) - g(x)$ 恰好有两个零点,

所以实数 b 的取值范围是 $\{\frac{7}{4}\} \cup (2, +\infty)$.

故答案为: $\{\frac{7}{4}\} \cup (2, +\infty)$.

9. 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = g(x)$ 的图像与 $y = e^x$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称, 而函数 $y = f(x)$ 的图像与 $y = g(x)$ 的图像关于 x 轴对称, 若 $f(m) = -1$, 则 m 的值为 $-e$.

10. 求函数 $y = \lg^2(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)$ 的单调递增区间 $(-1, 0)$ 和 $(2, +\infty)$.

11. 若函数 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x + 4a, & (x < 1) \\ a^x, & (x \geq 1) \end{cases}$ 是 R 上的严格减函数, 则 a 的取值范围为 **$[1/6, 1/3]$** .

12. 设 $f(x) = x - 1$, $g(x) = -\frac{4}{x}$, 若存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{1}{4}, 4]$, 使得

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + g(x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1}) + f(x_n) \text{ 成立, 则}$$

正整数 n 的最大值为 3.

【解析】 解: 由题意知, 存在 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [\frac{1}{4}, 4]$,

$$\text{使得 } f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + g(x_n) = g(x_1) + g(x_2) + \dots + g(x_{n-1}) + f(x_n) \text{ 成立,}$$

$$\text{即 } f(x_1) - g(x_1) + f(x_2) - g(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) - g(x_{n-1}) = f(x_n) - g(x_n) \text{ 成立.}$$

$$\text{而 } f(x_n) - g(x_n) = x_n - 1 + \frac{4}{x_n} \geq 2\sqrt{x_n \cdot \frac{4}{x_n}} - 1 = 3,$$

当且仅当 $x_n = 2 \in [\frac{1}{4}, 4]$ 时等号成立,

$$\text{又 } f(x_1) - g(x_1) + f(x_2) - g(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) - g(x_{n-1}) = f(x_n) - g(x_n),$$

$$\therefore f(x_n) - g(x_n) \geq 3(n-1), \text{ 而 } x_n \in [\frac{1}{4}, 4], \text{ 即 } f(x_n) - g(x_n) \in [3, \frac{65}{4}].$$

$$\therefore \text{只需 } 3(n-1) \leq \frac{65}{4} \text{ 成立即可, 有 } n \leq \frac{77}{12}, \text{ 故正整数 } n \text{ 的最大值为 } 6.$$

故答案为: 6.

13. 已知 a, b 为实数, 若 $\alpha: ab = 0$, $\beta: a^2 + \sqrt{b} = 0$, 则 α 是 β 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【解析】解: $\because \beta: a^2 + \sqrt{b} = 0, \therefore a = 0$ 且 $b = 0$,

由 $a = 0, b = 0 \Rightarrow ab = 0$, 反之不成立.

$\therefore ab = 0$ 是 $a = 0, b = 0$ 的必要不充分条件,

即 α 是 β 的必要不充分条件,

故选: B.

由 $a^2 + \sqrt{b} = 0$, 得到 $a = 0$ 且 $b = 0$, 即可判断出关系.

本题考查了等式的性质, 简易逻辑的判定方法, 属于基础题.

14. 已知实数 $a, b > 0$, $a + 19b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{19}{b}$ 的最小值为 ()

A. 100

B. 300

C. 800

D. 400

【解答】

$$\text{解: 根据题意, } \frac{1}{a} + \frac{19}{b} = (\frac{1}{a} + \frac{19}{b})(a + 19b) = 362 + \frac{19b}{a} + \frac{19a}{b} \geq 362 + 2\sqrt{\frac{19b}{a} \cdot \frac{19a}{b}} = 400,$$

当且仅当 $\frac{19b}{a} = \frac{19a}{b}$, 即 $a = b = \frac{1}{20}$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{1}{a} + \frac{19}{b}$ 的最小值为 400.

故选 D.

15. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 对于下列命题:

① 若存在常数 M , 使得对任意 $x \in R$, 有 $f(x) \geq M$, 则 M 是函数 $f(x)$ 的最小值;

② 若函数 $f(x)$ 有最小值, 则存在唯一的 $x_0 \in R$, 使得对任意 $x \in R$, 有 $f(x) \geq f(x_0)$;

③ 若函数 $f(x)$ 有最小值, 则至少存在一个 $x_0 \in R$, 使得对任意 $x \in R$, 有 $f(x) \geq f(x_0)$;

④若 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值, 则存在 $x \in R$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$.

则下列判断正确()

- A. ①对②对 B. ①错③错 C. ③对④错 D. ②错④对

【解析】解: 对于①, M 不一定是满足 $f(x)$ 的函数值, 所以可能 $f(x)$ 的最小值大于 M , 故①错误,

对于②, 函数 $f(x)$ 有最小值, 可能存在若干的 $x_0 \in R$, 使得对任意 $x \in R$, 有 $f(x) \geq f(x_0)$, 故②错误,

对于③, 由最小值定义, 若函数 $f(x)$ 有最小值, 则至少存在一个 $x_0 \in R$, 使得对任意 $x \in R$, 有 $f(x) \geq f(x_0)$, 故③正确,

对于④, 由最小值的定义知, $f(x)$ 是函数 $f(x)$ 的最小值, 则存在 $x_0 \in R$, 使得 $f(x) \geq f(x_0)$, 故④正确.

故选: D.

16. 设 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = x - a^{-x}$ 和 $g(x) = x \log_a x - 1$ 的零点(其中 $a > 1$), 则 $x_1 + 9x_2$ 的取值范围是()

- A. $[6, +\infty)$ B. $(6, +\infty)$ C. $[10, +\infty)$ D. $(10, +\infty)$

【解析】解: 因为 x_1, x_2 分别是函数 $f(x) = x - a^{-x}$ 和 $g(x) = x \log_a x - 1$ 的零点, 则 x_1, x_2 分别是 $a^x = \frac{1}{x}$ 和 $\log_a x = \frac{1}{x}$ 的解,

所以 x_1, x_2 分别是函数 $y = \frac{1}{x}$ 与函数 $y = a^x$ 和函数 $y = \log_a x$ 交点的横坐标,

所以交点分别为 $A(x_1, \frac{1}{x_1}), B(x_2, \frac{1}{x_2})$,

因为 $a > 1$,

所以 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$,

由于函数 $y = \frac{1}{x}$ 与函数 $y = a^x$ 和函数 $y = \log_a x$ 都关于 $y = x$ 对称,

所以点 A 与点 B 关于 $y = x$ 对称,

因为 $A(x_1, \frac{1}{x_1})$ 关于 $y = x$ 对称的点坐标为 $(\frac{1}{x_1}, x_1)$,

所以 $x_1 = \frac{1}{x_2}$,

即 $x_1 \cdot x_2 = 1$, 且 $x_1 \neq x_2$,

所以 $x_1 + 9x_2 = x_1 + x_2 + 8x_2 \geq 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} + 8x_2 > 2 + 8x_2$,

由于 $x_1 \neq x_2$ 所以不能取等号,

因为 $x_2 > 1$,

所以 $2 + 8x_2 > 2 + 8 = 10$,

即 $x_1 + 9x_2 \in (10, +\infty)$,

故选: D.

17. 已知函数 $f(x) = m \cdot (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4, x \in [\sqrt{2}, 16]$

(1) 若 $m=1$, 求函数 $f(x)$ 的零点;

(2) 若函数 $f(x) > 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

$x=16$ $m>22$

18. 2020 年初, 新冠肺炎疫情袭击全国, 对人民生命安全和生产生活造成严重影响. 在党和政府强有力的抗疫领导下, 我国控制住疫情后, 一方面防止境外疫情输入, 另一方面逐步复工复产, 减轻经济下降对企业和民众带来的损失. 为降低疫情影响, 某厂家拟在 2020 年举行某产品的促销活动, 经调查测算, 该产品的年销售量(即该厂的年产量) x 万件与年促销费用 m 万元 ($m \geq 0$) 满足 $x = 4 - \frac{k}{m+1}$ (k 为常数), 如果不搞促销活动, 则该产品的年销售量只能是 2 万件. 已知生产该产品的固定投入为 8 万元, 每生产一万件该产品需要再投入 16 万元, 厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍(此处每件产品年平均成本按 $\frac{8+16x}{x}$ 元来计算)

(1) 将 2020 年该产品的利润 y 万元表示为年促销费用 m 万元的函数;

(2) 该厂家 2020 年的促销费用投入多少万元时, 厂家的利润最大? 最大利润是多少?

【答案】 解: (1) 由题意可知, 当 $m=0$ 时, $x=2$,

$$x = 4 - \frac{k}{m+1},$$

则 $2 = 4 - k$, 解得 $k=2$,

$$\text{故 } x = 4 - \frac{2}{m+1},$$

\therefore 厂家将每件产品的销售价格定为每件产品年平均成本的 1.5 倍,

$$\therefore \text{每件产品的销售价格为 } 1.5 \times \frac{8+16x}{x},$$

$$\text{故 2020 年该产品的利润 } y = 1.5x \cdot \frac{8+16x}{x} - 8 - 16x - m = 36 - \frac{16}{m+1} - m \quad (m \geq 0).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } y = 36 - \frac{16}{m+1} - m = 37 - \left[\frac{16}{m+1} + (m+1) \right],$$

当 $m \geq 0$ 时, $m+1 > 0$,

$$\text{则 } \frac{16}{m+1} + m+1 \geq 2\sqrt{\frac{16}{m+1} \cdot (m+1)} = 2\sqrt{16} = 8, \text{ 当且仅当 } \frac{16}{m+1} = m+1, \text{ 即 } m=3 \text{ 时,}$$

等号成立,

$$\text{故 } y \leq -8 + 37 = 29,$$

该厂家 2020 年的促销费用投入 3 万元时, 厂家的利润最大, 最大利润是 29 万元.

17. 已知函数 $f(x) = \log_a(2x - 3) + 1 (a > 0, a \neq 1)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) < 3$ 的解集;

(2) 当 $a = 10$ 时, 设 $g(x) = f(x) - 1$, 且 $g(3) = m$, $g(4) = n$, 求 $\log_6 45$ (用 m, n 表示);

(3) 在 (2) 的条件下, 是否存在正整数 k , 使得不等式 $2g(x+1) > \lg(kx^2)$ 在区间 $[3, 5]$ 上有解, 若存在, 求出 k 的最大值, 若不存在, 请说明理由.

【答案】解: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \log_2(2x - 3) + 1 < 3$,

$$\therefore 0 < 2x - 3 < 4, \therefore \text{不等式 } f(x) < 3 \text{ 的解集为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right);$$

(2) 当 $a = 10$ 时, $g(x) = f(x) - 1 = \lg(2x - 3)$,

$$\therefore m = g(3) = \lg 3, \quad n = g(4) = \lg 5,$$

$$\therefore \log_6 45 = \frac{\lg 45}{\lg 6} = \frac{\lg 9 + \lg 5}{\lg 3 + \lg 2} = \frac{2m + n}{m - n + 1}.$$

(3) 在 (2) 的条件下, 不等式 $2g(x+1) > \lg(kx^2)$ 化为 $(2x-1)^2 > \lg(kx^2)$,

$$\therefore k < \frac{(2x-1)^2}{x^2} = \left(\frac{1}{x} - 2\right)^2, \quad \frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right],$$

$$\therefore k < h(x)_{\max} = h(5) = \frac{81}{25}$$

$\therefore k$ 是正整数, $\therefore k$ 的最大值为 3.

18. 若函数 $f(x)$ 对定义域内的任意 x 都满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则称 $f(x)$ 具有性质 M .

(1) 判断 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 是否具有性质 M , 并证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是严格减函数;

(2) 已知函数 $g(x) = |\ln x|$, 点 $A(1, 0)$, 直线 $y = t (t > 0)$ 与 $g(x)$ 的图象相交于 B, C 两点 (B 在左边), 验证函数 $g(x)$ 具有性质 M 并证明 $|AB| < |AC|$;

(3) 已知函数 $h(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right|$, 是否存在正数 m, n, k , 当 $h(x)$ 的定义域为 $[m, n]$ 时, 其值域为 $[km, kn]$, 若存在, 求 k 的范围, 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) 解: 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 具有性质 M ,

下面证明 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是严格减函数.

证明: 任取 $0 < x_1 < x_2 < 1$,

$$\text{则 } f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \frac{1}{x_1}) - (x_2 + \frac{1}{x_2}) = (x_1 - x_2) + (\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}) = (x_1 - x_2) \cdot \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2},$$

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $1 > x_1 x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

所以, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减;

(2)解: 因为 $g(\frac{1}{x}) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x = \ln x = g(x)$, 所以 $g(x)$ 具有性质 M ,

证明: 由性质 $\ln x = t$ 得 $\ln x = -t$ 或 $\ln x = t$, 解得 $x = e^{-t}$ 或 $x = e^t$,

因为 $t > 0$, $e^{-t} < e^t$, 所以 $x_B = e^{-t}$, $x_C = e^t$,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{(1 - x_B)^2 + t^2} = \sqrt{(1 - e^{-t})^2 + t^2}, |AC| = \sqrt{(1 - x_C)^2 + t^2} = \sqrt{(1 - e^t)^2 + t^2},$$

$$\text{所以 } |AB|^2 - |AC|^2 = (1 - e^{-t})^2 - (1 - e^t)^2 = [2 - (e^{-t} + e^t)](e^t - e^{-t}),$$

当 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号, 且 $0 < e^{-t} = \frac{1}{e^t} < 1 < e^t$,

所以 $2 - (e^{-t} + e^t) < 0$, $e^t - e^{-t} > 0$,

所以 $|AB|^2 - |AC|^2 = [2 - (e^t + e^{-t})](e^t - e^{-t}) < 0$, 即 $|AB| < |AC|$;

(3)解: 注意到 $h(1) = 0$, 由于 m, n, k 均为正整数,

所以, 要使存在正数 m, n, k , 当 $h(x)$ 的定义域为 $[m, n]$ 时, 其值域为 $[km, kn]$, 则 $0 < m < n < 1$ 或 $1 < m < n$,

当 $0 < m < n < 1$,

因为 $0 < x < 1$, $h(x) = |x - \frac{1}{x}| = \frac{1}{x} - x$ 为单调递减函数,

所以, 其值域为 $(h(n), h(m))$,

所以 $h(n) = km$, $h(m) = kn$,

所以 $\frac{h(n)}{h(m)} = \frac{m}{n}$, 即 $\frac{\frac{1}{n} - n}{\frac{1}{m} - m} = \frac{m}{n}$, 整理得 $1 - n^2 = 1 - m^2$, 即 $m = n$, 与定义域为 $[m, n]$ 矛盾;

当 $1 < m < n$ 时,

因为 $x > 1$, $h(x) = |x - \frac{1}{x}| = x - \frac{1}{x}$ 为增函数,

所以, 其值域为 $(h(m), h(n))$,

所以 $h(m) = km$, $h(n) = kn$, 即 $m - \frac{1}{m} = km, n - \frac{1}{n} = kn$,

所以 $(1-k)m^2 = 1, (1-k)n^2 = 1, m^2 = n^2 = \frac{1}{1-k}$, 即 $m = n$, 与定义域为 $[m, n]$ 矛盾;

综上, 不存在正数 m, n, k 满足条件.

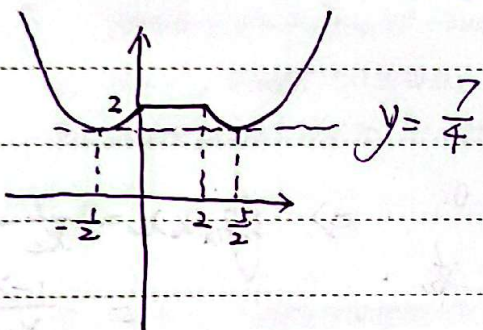
7. $x \in [\frac{1}{6}, 3]$ 时, $x + \frac{1}{x} - 4 \in [-2, \frac{13}{6}]$.

$\therefore f(x)_{\max} = \frac{13}{6}$ 即 $m^2 - m + 2 \leq \frac{13}{6}$
 $m^2 - m - \frac{1}{6} \leq 0$ 解得 $m \in [-\frac{3+\sqrt{15}}{6}, \frac{3+\sqrt{15}}{6}]$.

8. $y = f(x) - g(x) = f(x) + f(2-x) - b$. \therefore 记 $h(x) = f(x) + f(2-x)$

$f(x) = \begin{cases} 2-|x|, & x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2+x, & x < 0 \\ 2-x, & 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2, & x > 2 \end{cases}$

$f(2-x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases} \therefore h(x) = \begin{cases} x^2+x+2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-5x+6, & x > 2 \end{cases}$



要使 $b = h(x)$ 恒有解

$\therefore b \in \{\frac{7}{4}\} \cup (2, +\infty)$.

9. 易知 $g(x)$ 为 e^x 的反函数 $\therefore g(x) = \ln x$.

$\therefore f(x) = -\ln x$. $f(m) = -1 \Rightarrow \ln m = 1$. $m = e$.

10. 定义域 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x > 0 \Rightarrow x > 1$ or $x < 0$.

易知 y 与 $f(x) = |\lg(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)|$ 增减性一致.

$f(x) = \begin{cases} \lg(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x), & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ or } x \leq -1 \\ -\lg(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x), & 0 < \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, 2) \end{cases}$

令 $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$, 当 $t \geq 1$ 时, $f(t)$ 增, 此时需要 $t(x)$ 增

即 $x \geq 2$; 当 $0 < t < 1$ 时, $f(t)$ 减, 此时需要 $t(x)$ 减, 即 $x \in (-1, 0)$

这里的 2 和 -1 为端点, 不重要 \therefore 增区间为 $[-1, 0)$, $[2, +\infty)$

(注: 由于 $f(2) = 0$, 因此不能写成并的形式).

$$11. f(x) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上减} \quad \therefore \begin{cases} 3a-1 \leq 0 \\ 0 < a < 1 \\ 3a-1+4a \geq a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq \frac{1}{3} \\ 0 < a < 1 \\ a \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$$

$$12. \text{ 设 } h(x) = f(x) - g(x) = x + \frac{4}{x} - 1$$

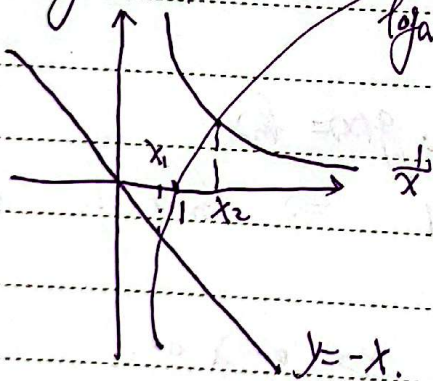
$$x \in [\frac{1}{4}, 4] \quad \therefore h(x) \in [3, \frac{61}{4}]$$

$$\text{要使 } \sum_{i=1}^n h(x_i) = h(x_n) \quad \text{LHS} \geq 3(n-1), \text{ RHS} \leq \frac{61}{4}$$

$$\therefore 3(n-1) \leq \frac{61}{4} \Rightarrow n \leq 5 \quad n \leq 6 \text{ (可取到)}$$

$$16. \begin{cases} x_1 = a^{x_1} \\ x_2 \log_a x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \log_a x_1 = 0 \\ \log_a x_2 = \frac{1}{x_2} \end{cases} \Rightarrow \log_a x_1 x_2 = \frac{1}{x_2} - x_1 = \frac{1-x_1 x_2}{x_2}$$

如图:



$$\therefore x_1 x_2 = 1 \quad (\text{分母不为零})$$

$$\therefore x_1 + \frac{1}{x_2} = x_1 + \frac{1}{x_1} > 10$$

$$(\text{因 } 0 < x_1 < 1)$$

证 P.