

1. 函数  $y=\ln x$  的零点是\_\_\_\_\_.
2. 函数  $y=\frac{2x+3}{x+1}$  的对称中心为\_\_\_\_\_.
3. 已知  $\lg 2=a$ ，用  $a$  表示  $\log_2 25=$ \_\_\_\_\_.
4. 方程  $\cos x=\frac{1}{2}$  的解是\_\_\_\_\_.
5. 已知幂函数  $y=(2k^2-k)x^{k-\frac{1}{3}}$  在区间  $(0,+\infty)$  上是严格增函数，则  $k=$ \_\_\_\_\_.
6. 已知角  $\alpha$  的终边过点  $(\sin 5, \cos 5)$ ，且  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ，则角  $\alpha$  的弧度数是\_\_\_\_\_.
7. 不等式  $\log_2 x < -x+1$  的解集是\_\_\_\_\_.
8. 已知函数  $f(x)=\log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 \frac{x}{27}$ ，若对不相等的正数  $x_1, x_2$ ，有  $f(x_1)=f(x_2)$  成立，则  $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2}$  的最小值为\_\_\_\_\_.
9. 已知函数  $y=\begin{cases} x^2-2x+2, & x \geq 0 \\ x+\frac{a}{x}+3a, & x < 0 \end{cases}$  的值域为  $\mathbf{R}$ ，则实数  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.
10. 已知函数  $y=f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数，且  $f(-1)=0$ . 若对任意的  $x_1$ 、 $x_2 \in (0, +\infty)$  且  $x_1 \neq x_2$ ，都有  $\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$  成立，则不等式  $f(x) > 0$  的解集是\_\_\_\_\_.

11. 设  $a > 0$ ，若定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 0$ 、直线  $x = 3a$ 、直线  $x = 5a$  都成轴对称，且  $y = f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{3a}{2}\right]$  上恰有 5 个零点，则  $y = f(x)$  在区间  $[0, 5a]$  上的零点个数的最小值是\_\_\_\_\_.

12. 田同学向肖老师请教一个问题：已知三个互不相同的实数  $a, b, c$  满足  $a + b + c = 1$  和  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ ，求  $abc$  的取值范围.肖老师告诉他：函数  $y = x^3 - x^2 - x$  在区间  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$  上是严格增函数，在区间  $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$  上是严格减函数，在区间  $[1, +\infty)$  上是严格增函数.根据肖老师的提示，可求得该问题中  $abc$  值范围是\_\_\_\_\_.

二、选择题（本大题满分 18 分）本大题共有 4 题，第 13—14 题每题 4 分，第 15—16 题每题 5 分，每题有且只有一个正确选项，请在答题纸的相应编号上将代表答案的小方格涂黑.

13. 已知集合  $A = \{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ 或 } x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$ ，集合

$B = \left\{x \mid x = k\pi + (-1)^k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ ，则集合 A 与 B 的关系是（ ）

- A.  $A = B$                       B.  $A \subseteq B$                       C.  $A \supseteq B$                       D. 以上选项均不正确

14. 已知  $a \in \mathbf{R}$  且  $a \neq 0$ ，则下列不等式一定成立的是（ ）

- A.  $a + \frac{1}{a} > -3$                       B.  $a^2 + 1 \geq 3|a|$                       C.  $a^2 + 3 + \frac{1}{a^2 + 3} \geq 2$                       D.  $\frac{2}{1 + a^2} > 1$

15. 已知函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，给定下列四个语句：

- ①  $y = f(x)$  在区间  $(-\infty, 0]$  上是严格增函数，在区间  $(0, +\infty)$  上也是严格增函数；  
②  $y = f(x)$  在区间  $(-\infty, 0]$  上是严格增函数，在区间  $[0, +\infty)$  上也是严格增函数；

③  $y = f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上是严格增函数, 在区间  $(0, +\infty)$  上也是严格增函数;

④  $y = f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是严格增函数, 且  $y = f(x)$  是奇函数.

其中是“函数  $y = f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是严格增函数”充分条件的有 ( ) 个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

16. 已知  $A$ 、 $B$  为非空数集,  $\Omega$  为平面上的一些点构成的集合, 集合

$C = \{y \mid \exists x \in A, (x, y) \in \Omega\}$ , 集合  $D = \{x \mid \exists y \in B, (x, y) \in \Omega\}$ , 给定下

列四个命题, 其中真命题是 ( )

A. 若  $C \subseteq B$ , 则  $D \subseteq A$

B. 若  $C \subseteq B$ , 则  $D \supseteq A$

C. 若  $C \supseteq B$ , 则  $D \subseteq A$

D. 若  $C \supseteq B$ , 则  $D \supseteq A$

三、解答题 (本大题满分 78 分) 本大题共有 5 题, 解答下列各题必须在答题纸相应的编号规定区域内写出必要的步骤.

17. 已知  $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

(1) 求  $\tan x$  的值;

(2) 求值:  $\frac{\sin(\pi - x) + 2\cos(\pi + x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ .

18. 为确保 2023 年第六届中国国际进口博览会安全顺利进行, 上海市公安局决定在进博会期间实施交通管制. 经过长期观测发现, 某最高时速不超过 100 千米/小时的公路段的车流量  $y$  (辆/小时) 与车辆的平均速度  $v$  (千米/小时) 之间存在函数关系:

$$y = \begin{cases} \frac{17}{2}v^2 + \frac{295}{2}v, & 0 < v \leq 25 \\ \frac{144000v}{v^2 - 58v + 1225}, & 25 < v \leq 100 \end{cases}.$$

(1) 当车辆的平均速度为多少时, 公路段的车流量最大? 最大车流量为多少?

(2) 若进博会期间对该公路段车辆实行限流管控, 车流量不超过 4125 辆/小时, 则汽车的平均速度应在什么范围内?

已知奇函数  $f(x) = 2^x + \frac{a}{2^x}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 判断  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上的单调性并进行证明;

(3) 若函数  $f(x)$  满足  $f(1-m) + f(1-2m) < 0$ , 求实数  $m$  的取值范围.

19. 设  $a \in \mathbf{R}$ , 已知  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = a + \log_2 x$ .

(1) 求证: 函数  $y = f(x)$  不是偶函数;

(2) 若对任意的  $x_1, x_2 \in [1, 2]$ , 总存在  $x_3 \in [1, 2]$ , 使得  $|f(x_1) - f(x_2)| < g(x_3)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围;

(3) 若对任意的  $x_1, x_2 \in [1, 2]$ , 总有  $|f(x_1) - g(x_2)| \geq 1$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

20. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in P \\ -x^2 + 2x, & x \in M \end{cases}$ , 其中  $P, M$  是非空数集, 且  $P \cap M = \emptyset$ , 设

$f(P) = \{y \mid y = f(x), x \in P\}$ ,  $f(M) = \{y \mid y = f(x), x \in M\}$ ;

(1) 若  $P = (-\infty, 0)$ ,  $M = [0, 3]$ , 求  $f(P) \cup f(M)$ ;

(2) 是否存在实数  $a > -3$ , 使得  $P \cup M = [-3, a]$ , 且  $f(P) \cup f(M) = [-3, 2a-3]$ ? 若存在, 请求出满足条件的实数  $a$ ; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若  $P \cup M = \mathbf{R}$ , 且  $0 \in M$ ,  $1 \in P$ ,  $f(x)$  单调递增函数, 求集合  $P, M$ ;

21. 设函数  $y = f(x)$ ,  $x \in D$ . 记  $\underbrace{f(f(f \cdots f(x)))}_{n \text{ 次}} = f_n(x)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq 1$ . 对于  $D$  的非

空子集  $A$ , 若对任意  $x \in A$ , 都有  $f(x) \in A$ , 则称函数  $y = f(x)$  在集合  $A$  上封闭.

(1) 若  $g(x) = 2^x$ ,  $h(x) = 2^{-x}$ ,  $A = [0, 1]$ , 分别判断函数  $y = g(x)$  和  $y = h(x)$  是否在集合  $A$  上封闭;

(2) 设  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbf{R}$ , 区间  $B = [a, b]$  (其中  $a < b$ ), 若函数  $y = f(x)$  在集合  $B$  上

封闭，求  $b-a$  的最大值；

(3) 设  $k \in \mathbf{N}$ ， $k \geq 1$ ，若函数  $y = f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，函数  $y = f(x)$  和  $y = f_k(x)$  的图象都是连续的曲线，且函数  $y = f_k(x)$  在区间  $I = [a, b]$ （其中  $a < b$ ）上封闭，证明：存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ ，使得  $f(x_0) = x_0$ 。