1. 函数 $f(x)=\sqrt{2-x}$ 的定义域为______________.

【答案】$\{x|x\le 2\}$

【解析】

【分析】由被开方数为非负数即可求得定义域.

【详解】$\because 2-x\ge 0$

$\therefore x\le 2$ 即函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left\{x|x\le 2\right\}$.

故答案为：$\left\{x|x\le 2\right\}$

2. 角 -215° 属于第________象限角.

【答案】二;

【解析】

【分析】通过与角 -215° 终边相同的角所在的象限判断得解.

【详解】由题得与 -215° 终边相同的角为 $-215^{\circ}+k\cdot 360^{\circ},k\in Z$.

当 k=1 时，与 -215° 终边相同的角为 145°，

因为 145° 在第二象限,

所以角 -215° 属于第二象限的角.

故答案为二

【点睛】本题主要考查终边相同的角，意在考查学生对该知识的理解掌握水平，属于基础题.

3. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\ \log_2 x,x>0\end{cases}$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$__________.

【答案】$\frac{1}{2}$##0.5

【解析】

【分析】根据函数 $f\left(x\right)$ 的解析式，求出 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值，从而求出 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 的值即可.

【详解】因为 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x,x\le 0\\ \log_2 x,x>0\end{cases}$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$，则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(-1\right)=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{2}$.

4. 函数 $f(x)=a^{x+1}+1$（$a>0$ 且 $a\ne 1$）的图象都过定点 P，且点 P 在角 θ 的终边上，则 $\sin\theta=$_________.

【答案】$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ## $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】由题意先求出定点 $P\left(-1,2\right)$，然后结合三角函数定义即可得解.

【详解】因为 $a^0=1$，所以令 $x+1=0$，得 $x=-1$，且此时 $f\left(x\right)=f\left(-1\right)=2$，即点 $P\left(-1,2\right)$，

所以 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{\left(-1\right)^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. 已知幂函数 $f(x)=\left(m^2-m-1\right)x^{m-1}$ 为偶函数, 且在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减, 则实数 m 的值为________.

【答案】-1

【解析】

【分析】利用幂函数的定义和性质即可求解.

【详解】因为 $f(x)=\left(m^2-m-1\right)x^{m-1}$ 是幂函数，所以 $m^2-m-1=1$，解得 $m=2$ 或 $m=-1$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递减，所以 $m-1<0$，解得 $m<1$，故而 $m=-1$.

而且当 $m=-1$ 时，$f(x)=x^{-2}$ 是偶函数，符合题意，从而实数 m 的值为 -1.

故答案为：-1.

6. 若 $2^a=3^b=m$，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则 $m=$____________.

【答案】$\sqrt{6}$

【解析】

【分析】由 $2^a=3^b=m$，可得 $a=\log_2 m$，$b=\log_3 m$，$m>0$，从而利用换底公式及对数的运算性质即可求解.

【详解】解：因为 $2^a=3^b=m$，所以 $a=\log_2 m$，$b=\log_3 m$，$m>0$，又 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{\log_2 m}+\frac{1}{\log_3 m}=\log_m 2+\log_m 3=\log_m\left(2\times3\right)=2$，

所以 $m^2=6$，所以 $m=\sqrt{6}$，

故答案为：$\sqrt{6}$.

7. 函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-5}$ 的严格递减区间为________.

【答案】$[2,+\infty)$

【解析】

【分析】由题意结合指数函数、二次函数以及复合函数单调性即可得解.

【详解】由题意指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^t$ 在定义域内严格单调递减,

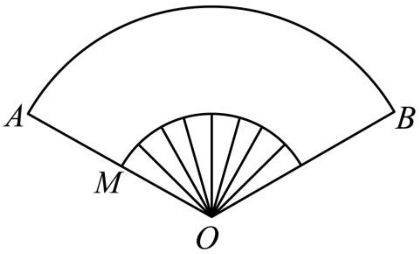
若要函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-5}$ 关于 x 严格单调递减，只需 $t=x^2-4x-5$ 关于 x 严格单调递增即可,

而二次函数对称轴为 $x=2$，且开口向上,

故它的严格单调递增区间为 $[2,+\infty)$，即函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-5}$ 的严格递减区间为 $[2,+\infty)$.

故答案为：$[2,+\infty)$.

8. “数摺聚清风，一捻生秋意”是宋朝朱翌描写折扇的诗句，折扇出人怀袖，扇面书画，扇骨雕琢，是文人雅士的宠物，所以又有“怀袖雅物”的别号．如图是折扇的示意图，其中 $OA=20\text{cm}$，$\angle AOB=120°$，M 为 OA 的中点，则扇面（图中扇环）部分的面积是________cm^2.

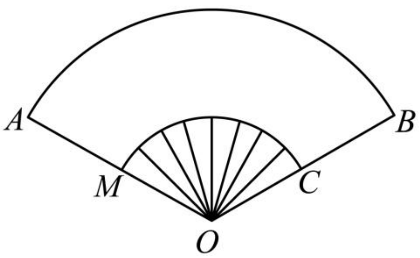


【答案】100π

【解析】

【分析】利用扇形面积公式去求扇环部分的面积即可.

【详解】设线段 BO 的中点为 C，则 $S_{扇环ABCM}=S_{扇形AOB}-S_{扇形OMC}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\left[20^2-\left(\frac{20}{2}\right)^2\right]=100\pi\ \text{cm}^2$.



故答案为：100π

9. 设 $f\left(x\right)$ 为奇函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=e^{x}-1$，则当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=$____

【答案】$-\mathrm{e}^{-x}+1$

【解析】

【分析】根据函数是奇函数，得 $f(-x)=-f(x)$，由 $x<0$，得 $-x>0$，代入已知的函数关系中，可得解.

【详解】$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

因为 $x\geq 0$ 时，$f(x)=e^{x}-1$.

当 $x<0$ 时，$-x>0$，$f(x)=-f(-x)=-\left(e^{-x}-1\right)=-e^{-x}+1$，

所以 $x<0$ 时，$f(x)=-\mathrm{e}^{-x}+1$.

故填：$-\mathrm{e}^{-x}+1$.

【点睛】本题考查根据函数的奇偶性，求对称区间上的函数解析式，属于基础题.

10. 已知函数 $f(x)=|x-3|,g(x)=-|x+4|+m$，若函数 $f(x)$ 的图像恒在函数 $g(x)$ 图像的上方，则 m 的取值范围为________.

【答案】$\left(-\infty,7\right)$

【解析】

【分析】首先将题目等价转换为 $|x-3|+|x+4|>m$ 恒成立，利用三角不等式求不等号左边最小值，由此即可得解.

【详解】由题意函数 $f(x)=|x-3|,g(x)=-|x+4|+m$，若函数 $f(x)$ 的图像恒在函数 $g(x)$ 图像的上方，

所以 $f(x)>g(x)$ 恒成立，即 $|x-3|>-|x+4|+m$ 恒成立，即 $|x-3|+|x+4|>m$ 恒成立，

故只需 $\left(|x-3|+|x+4|\right)_{\min}>m$ 即可，

而由三角不等式可得 $|x-3|+|x+4|\geq\left|3-\left(-4\right)\right|=7$，等号成立当且仅当 $-4\leq x\leq 3$，

即 $\left(|x-3|+|x+4|\right)_{\min}=7$，所以 m 的取值范围为 $\left(-\infty,7\right)$.

故答案为：$\left(-\infty,7\right)$.

11. 已知函数 $f(x)=ax^{2}-2x+1(x\in\mathrm{R})$ 两个零点，一个大于 2 另一个小于 2，则实数 a 的取值范围为________.

【答案】$\left(0,\frac{3}{4}\right)$

【解析】

【分析】由题意可得关于a的不等式组，求解得答案.

【详解】由函数$f(x)=ax^2-2x+1(x\in R)$两个零点，一个大于2另一个小于2,

所以$ax^2-2x+1=0$ 有两个不同的根，且一个根大于2另一个根小于2,

所以$a\neq 0$,

因为$f(2)=4a-4+1=4a-3$,

当$a>0$时，只需$f(2)<0$，即$\begin{cases}a>0\\4a-3<0\end{cases}$，解得$0<a<\frac{3}{4}$,

当$a<0$时，只需$f(2)>0$，即$\begin{cases}a<0\\4a-3>0\end{cases}$，无解,

综上所述实数a的取值范围为$\left(0,\frac{3}{4}\right)$.

故答案为：$\left(0,\frac{3}{4}\right)$.

12. 已知$g(x)=x+\frac{b}{x}$，若对任意的$x_1,x_2\in(1,2)$，都有$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1(x_1\neq x_2)$，则实数$b$的取值范围是_________.

【答案】$[8,+\infty)$

【解析】

【分析】由题意首项得到$\frac{\left(x_1+\frac{b}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{b}{x_2}\right)}{x_2-x_1}=\frac{b}{x_1x_2}-1>1(x_1\neq x_2)$，即对任意的$x_1,x_2\in(1,2)$，$b>2x_1x_2$恒成立，结合已知由此即可得解.

【详解】由题意对任意的$x_1,x_2\in(1,2)$，都有$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1(x_1\neq x_2)$，且$g(x)=x+\frac{b}{x}$,

所以$\frac{\left(x_1+\frac{b}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{b}{x_2}\right)}{x_2-x_1}=\frac{b}{x_1x_2}-1>1(x_1\neq x_2)$，$x_1,x_2\in(1,2)$,

即对任意的$x_1,x_2\in(1,2)$，$b>2x_1x_2$恒成立，

而$2x_1x_2<4$，不妨设$1<x_1<x_2<2$，令$x_1\to 2$，则$x_2\to 2,x_1x_2\to 4,2x_1x_2\to 8$，

所以对任意的$x_1,x_2\in(1,2)$，$b>2x_1x_2$恒成立，当且仅当$b\ge 8$，

即实数b的取值范围是$\left[8,+\infty\right)$.

故答案为：$\left[8,+\infty\right)$.

二、选择题（本题满分18分，共4小题，13、14每题4分，15、16每题5分）

13. 已知实数a，b满足$a>b$，则下列不等式中恒成立的是（　　）

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $|a|>|b|$　　D. $2^a>2^b$

【答案】D

【解析】

【分析】对于A，B，C通过举反例进行判断即可，对于D，由指数函数的性质判断即可

【详解】解：对于A，当$a=1,b=-2$时，$a^2=1<b^2=4$，所以A错误；

对于B，当$a=1,b=-2$时，$\frac{1}{a}=1>\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$，所以B错误，

对于C，当$a=1,b=-2$时，$|a|=1<|b|=2$，所以C错误，

对于D，因为指数函数$y=2^x$在R上为增函数，且$a>b$，所以$2^a>2^b$，所以D正确，

故选：D

14. 设$x\in\mathbf{R}$，不等式$|x-3|<2$的一个充分不必要条件是（　　）

A. $1<x<5$　　B. $x>0$　　C. $x<4$　　D. $2\le x\le 3$

【答案】D

【解析】

【分析】由$|x-3|<2$可得$1<x<5$，再由充分不必要条件的定义、结合选项即可得答案.

【详解】解：因为$|x-3|<2$，

所以$-2<x-3<2$，解得$1<x<5$，

由充分不必要条件的定义可知，只有D选项符合.

故选：D.

15. 为提高生产效率，某公司引进新的生产线投入生产，投入生产后，除去成本，每条生产线生产的产品可

获得的利润 s （单位：万元）与生产线运转时间 t （单位：年）满足二次函数关系：$s=-2t^2+40t-98$，现在要使年平均利润最大，则每条生产线运行的时间 t 为（　　）年.

A. 7　　　　B. 8　　　　C. 9　　　　D. 10

【答案】A

【解析】

【分析】表示出平均利润 $\frac{s}{t}$，然后利用基本不等式求最值以及最值的成立条件.

【详解】平均利润为 $\frac{s}{t}=\frac{-2t^2+40t-98}{t}=-\left(2t+\frac{98}{t}\right)+40\le-2\sqrt{2t\times\frac{98}{t}}+40=12$，

当且仅当 $2t=\frac{98}{t}$，即 $t=7$ 时取最大值.

故选：A.

16. 函数 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，若关于实数 t 的不等式 $f\left(\log_3 t\right)+f\left(\log_{\frac{1}{3}} t\right)>2f(2)$ 恒成立，则 t 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{1}{9}\right)\cup(9,+\infty)$　　　　B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$

C. $(9,+\infty)$　　　　D. $\left(0,\frac{1}{9}\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】由函数 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，不等式可化为 $f(\log_3 t)>f(2)$，再根据函数的单调性和奇偶性解不等式即可.

【详解】函数 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的偶函数，则 $f\left(x\right)=f\left(-x\right)=f\left(|x|\right)$，

又 $\log_{\frac{1}{3}} t=-\log_3 t$，则 $f\left(\log_3 t\right)+f\left(\log_{\frac{1}{3}} t\right)>2f(2)$，即为 $2f\left(\log_3 t\right)>2f(2)$，

即 $f(\log_3 t)>f(2)$，即 $f(|\log_3 t|)>f(2)$，

又因 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $|\log_3 t|>2$，则 $\log_3 t>2$ 或 $\log_3 t<-2$，解得 $t>9$ 或 $0<t<\frac{1}{9}$，

所以t的取值范围是$\left(0,\frac{1}{9}\right)\cup(9,+\infty)$.

故选：A.

三、解答题（本大题满分 78 分，共 5 小题）

17. 已知函数$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

（1）求函数的定义域；

（2）求证：$f(x)$是奇函数.

【答案】（1）$(-1,1)$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）解不等式$\frac{1-x}{1+x}>0$可得答案；

（2）通过证明$f(-x)=-f(x)$可得答案.

【小问 1 详解】

由已知得$\frac{1-x}{1+x}>0$，解得$-1<x<1$，

即函数的定义域为$(-1,1)$；

【小问 2 详解】

由（1）得函数的定义域为$(-1,1)$，

又$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，

所以$f(x)$是奇函数.

18. 已知函数$f(x)=a^x+b(a>0且a\neq1)$的图象经过点$(0,-2)$，$(2,1)$.

（1）求实数a，b的值；

（2）若不等式$a^{8-x^2}\geq\left(\frac{1}{4}\right)^x$的解集记为A，求$x\in A$时，函数$f(x)$的值域.

【答案】（1）$a=2$，$b=-3$

（2）$\left[-\frac{11}{4},13\right]$

【解析】

【分析】（1）根据函数$f(x)=a^x+b$过点$(0,-2)$，$(2,1)$，把点代入方程，从而可求解.

（2）求出集合 $A=\{x|-2\le x\le 4\}$，然后利用函数的单调性即可求解.

【小问 1 详解】

由题知点 $(0,-2)$，$(2,1)$ 在函数 $f(x)=a^x+b$ 上，所以 $\begin{cases}a^0+b=-2\\a^2+b=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$，

故 $a=2$，$b=-3$.

【小问 2 详解】

由 $a^{8-x^2}\ge\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ 得 $2^{8-x^2}\ge 2^{-2x}$，则 $8-x^2\ge -2x$，

解得 $-2\le x\le 4$，即 $A=\{x|-2\le x\le 4\}$，

因为 $f(x)=2^x-3$ 在 $[-2,4]$ 上单调递增，

故当 $x=-2$ 时，

$f(x)_{\min}=f(-2)=-\dfrac{11}{4}$，

当 $x=4$ 时，$f(x)_{\max}=f(4)=13$，

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{11}{4},13\right]$.

19. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}$，且 $f(2)=0$.

（1）求实数 a，判断函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性，并用定义证明；

（2）利用函数的单调性和奇偶性，解不等式 $f(t^2+3)+f(-2t^2+t-1)>0$.

【答案】（1）$a=-4$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增，证明见详解

（2）$-1<t<2$

【解析】

【分析】（1）先由 $f(2)=0$ 求出实数 a，再用定义法判断和证明函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）利用函数的单调性和奇偶性得出关于 t 的不等式，求出 t 取值范围.

【小问 1 详解】

由题知 $2+\dfrac{a}{2}=0$，则 $a=-4$，所以 $f(x)=x-\dfrac{4}{x}$.

$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增.

证明：对 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1-\frac{4}{x_1}-\left(x_2-\frac{4}{x_2}\right)=x_1-x_2-\left(\frac{4}{x_1}-\frac{4}{x_2}\right)$

$=x_1-x_2-\frac{4\left(x_2-x_1\right)}{x_1x_2}=\left(x_1-x_2\right)\left(1+\frac{4}{x_1x_2}\right)$，

因为 $0<x_1<x_2$，

所以 $x_1-x_2<0$，$1+\frac{4}{x_1x_2}>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增.

【小问 2 详解】

由（1）知 $f(x)=x-\frac{4}{x}$，

定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ 关于原点对称,

又 $f(-x)=-x+\frac{4}{x}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.

由 $f\left(t^2+3\right)+f\left(-2t^2+t-1\right)>0$，

得 $f\left(t^2+3\right)>-f\left(-2t^2+t-1\right)$，

即 $f\left(t^2+3\right)>f\left(2t^2-t+1\right)$，

又 $t^2+3>0$，$2t^2-t+1=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$，

由（1）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增,

所以 $t^2+3>2t^2-t+1$，

所以 $-1<t<2$.

20. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax-a$.

（1）若 $f(x)$ 的最大值为 0，求实数 a 的值；

（2）设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $M(a)$，求 $M(a)$ 的表达式；

（3）令 $g(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$，若 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为 1，求正实数 a 的取值范围.

【答案】（1） $a=0$ 或 $a=4$

（2） $M\left(a\right)=\begin{cases}-a,a\le 0\\ \dfrac{a^2}{4}-a,a\in\left(0,4\right)\\ a-4,a\ge 4\end{cases}$

（3） $0<a\le 1$

【解析】

【分析】（1）利用二次函数最值可得答案；

（2）分类讨论对称轴与区间的关系，结合二次函数可得最值；

（3）利用对勾函数的最值问题，分情况讨论，结合单调性的可得答案.

【小问 1 详解】

$f(x)=-x^2+ax-a=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}-a$，

因为 $f(x)$ 的最大值为 0，所以 $\dfrac{a^2}{4}-a=0$，

所以 $a=0$ 或 $a=4$.

【小问 2 详解】

函数 $f(x)=-x^2+ax-a$ 的对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$，

当 $\dfrac{a}{2}\le 0$，即 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上是减函数，所以 $M\left(a\right)=f\left(0\right)=-a$；

当 $0<\dfrac{a}{2}<2$，即 $0<a<4$ 时，

当 $x\in\left[\dfrac{a}{2},2\right]$ 时，$f(x)$ 是减函数，当 $x\in\left[0,\dfrac{a}{2}\right]$ 时，$f(x)$ 是增函数，

所以 $M\left(a\right)=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}-a$；

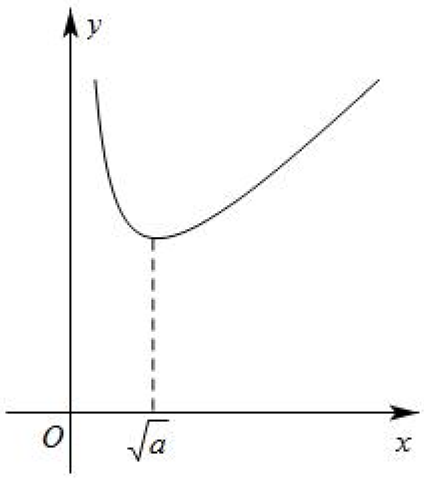
当 $\dfrac{a}{2}\ge 2$，即 $a\ge 4$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上是增函数，所以 $M\left(a\right)=f\left(2\right)=a-4$，

所以 $M\left(a\right)=\begin{cases}-a,a\le 0\\ \dfrac{a^2}{4}-a,a\in\left(0,4\right)\\ a-4,a\ge 4\end{cases}$.

【小问 3 详解】

由题意 $g(x)=-\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{a}{x}-a$，

令 $x=\dfrac{a}{x}$ 可得 $x=\sqrt{a}$，简图如下，



当 $0<\sqrt{a}\le 1$ 时，即 $0<a\le 1$ 时，$g\left(x\right)$ 在 $x\in[1,2]$ 是增函数，

所以 $g\left(1\right)=1+a-a=1$，成立.

当 $1<\sqrt{a}<2$ 时，即 $1<a<4$ 时，

$g\left(x\right)$ 在 $\left[1,\sqrt{a}\right]$ 上是减函数，在 $\left[\sqrt{a},2\right]$ 上是增函数，

所以 $g\left(\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}+\sqrt{a}-a=1$，解得 $a=1$，不成立；

当 $\sqrt{a}\ge 2$ 时，即 $a\ge 4$ 时，$g\left(x\right)$ 在 $[1,2]$ 上是减函数，

所以 $g\left(2\right)=2+\dfrac{1}{2}a-a=1$，解得 $a=2$，不成立；

综上所述，$0<a\le 1$.

21. 对于函数 $y=f(x)$，若在定义域内存在实数 x，满足 $f(-x)=-kf(x)$，其中为 k 整数，则称函数 $y=f(x)$ 为定义域上的“阶 k 局部奇函数”.

（1）已知函数 $f(x)=x^2+2x$，试判断 $y=f(x)$ 是否为 $(-1,1)$ 上的“2 阶局部奇函数”？并说明理由；

（2）若 $f(x)=\log_3(x+m)$ 是 $[-2,2]$ 上的“1 阶局部奇函数”，求实数 m 的取值范围；

（3）若 $f(x)=x^2-2x+t$，对任意的实数 $t\in(-\infty,2]$，函数 $y=f(x)$ 恒为 $\mathbf{R}$ 上的“k 阶局部奇函数”，求整数 k 取值的集合.

【答案】(1) 函数 $f(x)=x^2+2x$ 为 $(-1,1)$ 上的"2 阶局部奇函数", 理由见解析.

(2) $\left(2,\sqrt{5}\right]$

(3) $\{-5,-4,-3,-2,-1\}$

【解析】

【分析】根据新定义转化为方程解的问题即可解决.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)=x^2+2x$ 为 $(-1,1)$ 上的"2 阶局部奇函数", 理由如下:

原问题等价于判断关于 x 的方程 $f(-x)=-2f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是否有解,

由 $(-x)^2+2(-x)=-2(x^2+2x)$ 得, $3x^2+2x=0$, 解得 $x=0$ 或 $-\dfrac{2}{3}$,

所以方程 $f(-x)=-2f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有解,

即函数 $f(x)=x^2+2x$ 为 $(-1,1)$ 上的"2 阶局部奇函数".

【小问 2 详解】

由 $f(x)=\log_3(x+m)$ 是 $[-2,2]$ 上的"1 阶局部奇函数", 可知 $x+m>0$ 在 $[-2,2]$ 上恒成立, 可得 $m-2>0$,

即 $m>2$,

存在 $x\in[-2,2]$, 使得 $\log_3(-x+m)=-\log_3(x+m)$, 即 $\log_3(-x+m)+\log_3(x+m)=\log_3(m^2-x^2)=0$,

可得 $m^2-x^2=1$, 即 $m^2=x^2+1\in[1,5]$, 解得 $m\in\left[-\sqrt{5},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{5}\right]$,

综上 $m\in\left(2,\sqrt{5}\right]$.

【小问 3 详解】

问题等价于方程 $f(-x)=-kf(x)$ 恒有解, 即 $(-x)^2-2(-x)+t=-k(x^2-2x+t)$, 整理得

$(1+k)x^2+(2-2k)x+t+kt=0$,

当 $k=-1$ 时, 解得 $x=0$, 满足题意;

当 $k\neq-1$ 时, $\Delta\geq0$, 即 $(2-2k)^2-4(1+k)(t+kt)\geq0$, 化简得 $t(1+k)^2-(1-k)^2\leq0$ 对任意的实数

$t\in(-\infty,2]$恒成立,

$g(t)=t(1+k)^2-(1-k)^2$ 是关于 t 的一次函数且为 $(-\infty,2]$ 上的增函数, 故只需

$g(2)=2(1+k)^2-(1-k)^2=k^2+6k+1\leq0$,

解得$-3-2\sqrt{2}\le k\le -3+2\sqrt{2}$且$k\ne -1$，

综上，整数k取值的集合$\left\{-5,-4,-3,-2,-1\right\}$.

包泽韬

14

期末综合练习（9）

1. 函数$f(x)=\sqrt{2-x}$的定义域为 $(-\infty,2]$.

2. 角-215°属于第 二 象限角.

3. 设函数$f(x)=\begin{cases}2^{x},x\le 0\\ \log_2 x,x>0\end{cases}$，则$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$ $\frac{1}{2}$.

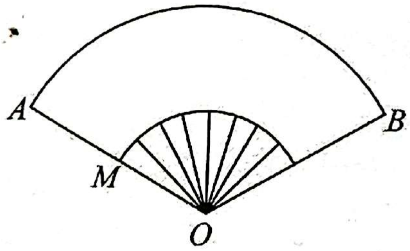
4. 函数$f(x)=a^{x+1}+1$ （$a>0$且$a\ne 1$）的图象都过定点P，且点P在角θ的终边上，则$\sin\theta=$ $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

5. 已知幂函数$f(x)=\left(m^{2}-m-1\right)x^{m-1}$为偶函数，且在$(0,+\infty)$上严格单调递减，则实数$m$的值为 -1 .

6. 若$2^{a}=3^{b}=m$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则$m=$ $\sqrt{6}$.

7. 函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^{2}-4x-5}$的严格递减区间为 $(2,+\infty)$.

8. “数摺聚清风，一捻生秋意”是宋朝朱翌描写折扇的诗句，折扇出入怀袖，扇面书画，扇骨雕琢，是文人雅士的宠物，所以又有“怀袖雅物”的别号．如图是折扇的示意图，其中$OA=20\text{cm}$，$\angle AOB=120^{\circ}$，M为OA的中点，则扇面（图中扇环）部分的面积是 $\cancel{50\pi}$ 100π cm^2.



9. 设$f(x)$为奇函数，且当$x\ge 0$时，$f(x)=e^{x}-1$，则当$x<0$时，$f(x)=$ $-e^{-x}+1$.

10. 已知函数$f(x)=|x-3|,g(x)=-|x+4|+m$，若函数$f(x)$的图像恒在函数$g(x)$图像的上方，则m的取值范围为 $(-\infty,7)$

11. 已知函数$f(x)=ax^{2}-2x+1(x\in\mathbf{R})$两个零点，一个大于2另一个小于2，则实数$a$的取值范围为 $\left(0,\frac{3}{4}\right)$.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

12. 已知$g(x)=x+\frac{b}{x}$，若对任意的$x_1,x_2\in(1,2)$，都有$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_2-x_1}>1(x_1\neq x_2)$，

则实数b的取值范围是 $[8,+\infty)$.

二、选择题（本题满分18分，共4小题，13、14每题4分，15、16每题5分）

13. 已知实数a，b满足$a>b$，则下列不等式中恒成立的是（ D ）

A. $a^2>b^2$　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　C. $|a|>|b|$　D. $2^a>2^b$

14. 设$x\in\mathbf{R}$，不等式$|x-3|<2$的一个充分不必要条件是（ D ）

A. $1<x<5$　B. $x>0$　C. $x<4$　D. $2\le x\le 3$

15. 为提高生产效率，某公司引进新的生产线投入生产，投入生产后，除去成本，每条生产线生产的产品可获得的利润s（单位：万元）与生产线运转时间t（单位：年）满足二次函数关系：$s=-2t^2+40t-98$，现在要使年平均利润最大，则每条生产线运行的时间t为（ D ）年.

A. 7　B. 8　C. 9　D. 10

16. 函数$y=f(x)$是定义在R上的偶函数，且$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，若关于实数t的不等式$f(\log_3 t)+f\left(\log_{\frac{1}{3}} t\right)>2f(2)$恒成立，则$t$的取值范围是

（ A ）

A. $\left(0,\frac{1}{9}\right)\cup(9,+\infty)$　B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$　C. $(9,+\infty)$　D. $\left(0,\frac{1}{9}\right)$

三、解答题（本大题满分78分，共5小题）

17. 已知函数$f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

（1）求函数的定义域；（2）求证：$f(x)$是奇函数.

解 (1) $\frac{1-x}{1+x}>0$

$(1-x)(1+x)>0$

$x\in(-1,1)$

(2) 证 $f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$

$=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$

$\therefore f(x)$奇函数.

18. 已知函数$f(x)=a^x+b(a>0$且$a\neq1)$的图象经过点$(0,-2)$，$(2,1)$.

(1) 求实数a，b的值;

(2) 若不等式$a^{8-x^2}\geq\left(\frac{1}{4}\right)^x$的解集记为A，求$x\in A$时，函数$f(x)$的值域.

解 (1) $(0,-2)(2,1)$代入，$a>0$

$\begin{cases}a^0+b=-2\\a^2+b=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=-3\\a=2\end{cases}$

(2) $2^{8-x^2}\geq\left(\frac{1}{4}\right)^x=2^{-2x}$

$\because 2^x$是严格增函数

$\therefore 8-x^2\geq-2x$

$x^2-2x-8\leq0$

$(x-4)(x+2)\leq0$

得$x\in[-2,4]$

$A=[-2,4]$

$f(x)=2^x-3$

$x\in A$时

值域为$[-\frac{11}{4},13]$

19. 已知函数$f(x)=x+\frac{a}{x}$，且$f(2)=0$.

(1) 求实数a，判断函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的单调性，并用定义证明;

(2) 利用函数的单调性和奇偶性，解不等式$f(t^2+3)+f(-2t^2+t-1)>0$.

解 (1) $f(2)=0$

$2+\frac{a}{2}=0$

$\therefore a=-4$

$f(x)=x-\frac{4}{x}$

单调增

对于$x_1<x_2$，$x_1,x_2\in(0,+\infty)$

$f(x_2)-f(x_1)=x_2-\frac{4}{x_2}+(-x_1+\frac{4}{x_1})$

$=(x_2-x_1)+\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}$

$=(x_2-x_1)(1+\frac{4}{x_1x_2})>0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

(2) $f(-x)=-x+\frac{4}{x}=-f(x)$

$f(x)$为奇函数

$f(t^2+3)>f(2t^2-t+1)$

$2t^2-t+1>0$，$t^2+3>0$

$\therefore t^2+3>2t^2-t+1$

$-t^2+t+2>0$

$\therefore t\in(-1,2)$

20. 已知函数 $f(x)=-x^2+ax-a$.

(1) 若 $f(x)$ 的最大值为 0，求实数 a 的值；

(2) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $M(a)$，求 $M(a)$ 的表达式；

(3) 令 $g(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$，若 $g(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最小值为 1，求正实数 a 的取值范围.

-1

解 (1) $f(x)_{max}=f(\frac{a}{2})=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}-a=\frac{a^2}{4}-a=0$

$\therefore$ ~~故~~ $a=0$ 或 4

(2) 对称轴 $\frac{a}{2}$

1° $\frac{a}{2}<0$, $a<0$.

$M(a)=f(0)=-a$

2° $\frac{a}{2}>2$, $a>4$

$M(a)=f(2)=a-4$

3° $\frac{a}{2}\in[0,2]$

$M(a)=f(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}-a$.

$\therefore M(a)=\begin{cases}a-4, & a>2\\ \frac{a^2}{4}-a, & 0\le a\le 2\\ -a, & a<0\end{cases}$

0 4

(3) $g(x)=x-a+\frac{a}{x}$

$=x+\frac{a}{x}-a$

$\because a>0$

$\therefore$ 转折点为 $\sqrt{a}$.

1° $\sqrt{a}<1$, $a<1$

$g(1)=1$ $1=1$ 成立

2° $\sqrt{a}\in[1,2]$

$min=g(\sqrt{a})=2\sqrt{a}-a=1$

$a=1$

3° $\sqrt{a}>2$, $a>4$

$min=g(2)=2-\frac{a}{2}=1$

$a=2$, 舍

得 $a\in(0,1]$

21. 对于函数 $y=f(x)$，若在定义域内存在实数 x，满足 $f(-x)=-kf(x)$，其中为 k 整数，则称函数 $y=f(x)$ 为定义域上的“阶 k 局部奇函数”.

(1) 已知函数 $f(x)=x^2+2x$，试判断 $y=f(x)$ 是否为 $(-1,1)$ 上的“2 阶局部奇函数”？并说明理由；(2) 若 $f(x)=\log_3(x+m)$ 是 $[-2,2]$ 上的“1 阶局部奇函数”，求实数 m 的取值范围；(3) 若 $f(x)=x^2-2x+t$，对任意的实数 $t\in(-\infty,2]$，函数 $y=f(x)$ 恒为 R 上的“k 阶局部奇函数”，求整数 k 取值的集合.

3

解 (1) ~~$f(-x)=-kf(x)$~~

~~$=-kf(-(-x))$~~

~~$=(-k)(-k)f(-x)$~~

~~$\therefore k=\pm1$~~

~~则 $k\neq\pm1$，一定不成立~~

~~$f(x)$ 不是"2 阶局部奇函数"~~

~~$f(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$ $f(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$~~

~~$f(-\frac{1}{2})=-kf(\frac{1}{2})$~~

~~$\therefore k=\frac{3}{5}$ 舍~~

$f(-x)=-2f(x)$

$x^2-2x=-2(x^2+2x)$

$3x^2+2x=0$

$x_1=0$ 或 $x_2=-\frac{2}{3}$

① $x=0$

$f(x)=f(-x)=0$

② $x=-\frac{2}{3}$

$f(-\frac{2}{3})=-\frac{8}{9}$

$f(\frac{2}{3})=\frac{16}{9}$ 成立

(2) ~~$x+(-2)>0$~~

$-2+m>0$

$\therefore m>2$

$f(-x)=\log_3(-x+m)$

$-kf(x)=-k\log_3(x+m)$

将 $k=1$ 代入

$\log_3(-x+m)=\log_3(\frac{1}{x+m})$

$m-x=\frac{1}{x+m}$

$\therefore m^2=x^2+1$

$x\in[-2,2]$ 则 $m^2\in[1,5]$

$\because m>2$

$\therefore m\in(2,\sqrt{5}]$

(3) $f(x)=-kf(-x)$

$x^2-2x+t=-k(x^2+2x+t)$

$(1+k)x^2+(2k-2)x+t+kt=0$

有解，对 $t\in(-\infty,2]$

1° $k=-1$

$\therefore 2t=0$，舍 X

2° $k\neq-1$

$\Delta=(2k-2)^2-4(1+k)(t+kt)$

$=4(k-1)^2-4t(k+1)^2\ge0$

在 $t\in(-\infty,2]$ 成立

$4(k-1)^2\ge8(k+1)^2$.

$\therefore k\in[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$

$\therefore k\in\{-5,-4,-3,-2\}$

-1