6.4 求角

1、已知$\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in[-\pi,\pi]$，则$x=$ $-\frac{1}{8}\pi$或$-\frac{3}{8}\pi$或$\frac{5}{8}\pi$或$\frac{7}{8}\pi$.

$\{2x \mid 2x=k\pi+(-1)^k\frac{3}{2}\pi\}$ ~~$2x\in\{x \mid x=\frac{3}{4}\pi+k\pi,k\in Z\}$~~

2、已知$\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-1$，则$x=$ $\frac{k}{2}\pi+\frac{7}{24}\pi,k\in Z$.

3、方程$2\sin^2 x+3\cos x=0,x\in[-2\pi,2\pi]$的解集为______. $\{-\frac{4}{3}\pi,-\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\}$

4、已知$\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且$\alpha$是第二象限角，则角$\alpha=$______. $(4k+2)\pi+\frac{2}{3}\pi,k\in Z$

5、方程$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x=0$的解集为 $\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z\}$.

$\sin(x+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(\frac{\pi}{2}+x)$.

6、已知集合$A=\{\alpha \mid 2\sin\alpha-1\geq 0\}$，$B=\{\alpha \mid \sqrt{2}\cos\alpha+1\geq 0\}$，则$A\cap B=$ $\{x \mid x\in[2k\pi+\frac{1}{6}\pi,2k\pi+\frac{3}{4}\pi],k\in Z\}$.

7、"$\alpha=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$"是"$\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$"的（A）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8、若三角方程$\sin x=0$与$\sin 2x=0$的解集分别为E,F，则（A）

$E\subset F$

A. $E\subset F$　　B. $E\supset F$　　C. $E=F$　　D. $E\cap F=\varnothing$

9、方程$\sqrt{1-\cos^2 x}=\cos x$的解集是（D）

A. $\left\{x \mid x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$　　B. $\left\{x \mid x=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$

C. $\left\{x \mid x=k\pi-\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$　　D. $\left\{x \mid x=2k\pi\pm\frac{\pi}{4},k\in Z\right\}$

10、已知$\theta\in[0,2\pi]$，$\sin\theta$和$\cos\theta$分别是方程$x^2-kx+k+1=0$的两个根，求θ.

解

则$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=k\\ \sin\theta\cos\theta=k+1\end{cases}$

$\Delta=k^2-4(k+1)=k^2-4k-4\geq 0$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$k^2=1+2(k+1)$

$k^2-2k-3=0$

$(k-3)(k+1)=0$

$k=3$或$k=-1$

当$k=3$时$\Delta<0$ 舍

$\therefore k=-1$

$x^2+x=0$

$x_1=0,x_2=-1$

1° $\sin\theta=0,\cos\theta=-1$

$\theta=\pi$

2° $\sin\theta=-1$ $\cos\theta=0$

$\theta=\frac{3}{2}\pi$

$\theta=\pi$或$\frac{3}{2}\pi$

20

11、已知集合 $A=\left\{-\frac{1}{2},3,\cos x\right\}, B=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2},\sin x\right\}$. 当 $A\cap B=\{y\}$ 时，求 x 和 y 的值.

解 1° $y=-\frac{1}{2}$

则 $\cos x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x\neq\sin x$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin x=-\frac{1}{2}, \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x\in\{x|x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi, k\in Z\}$

2° $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x\neq-\frac{1}{2}$, $\cos x\neq\sin x$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x\in\{x|x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\}$

3° $\cos x=\sin x$, $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

则 ~~$x=\{x|x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z\}$ 当 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$~~ $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综

$y=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{7}{6}\pi+2k\pi, k\in Z$,

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$,

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, …… $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$

$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\frac{5}{4}\pi+2k\pi, k\in Z$,

12、已知关于 x 的方程 $\sin^2 x+\cos x+m=0$.

(1) 当 $m=1$ 时，求方程的解；(2) 要使此方程有解，试确定 m 的取值范围.

解 (1) $1-\cos^2 x+\cos x+m=0$

$\cos^2 x-\cos x-m-1=0$.

$m=1$ 代入

$\cos^2 x-\cos x-2=0$

$\cos x=2$ 或 -1

$\because |\cos x|\leq 1$

$\therefore \cos x=-1$

$x=\{x|x=\pi+2k\pi, k\in Z\}$

(2) 即 ~~$\cos^2 x-\cos$~~ $x^2-x-m-1=0$ 有 $[-1,1]$ 上的解.

不妨求使之不成立的范围

$\Delta=1+4(m+1)<0$

$4m<-5$ $\therefore m<-\frac{5}{4}$

$\Delta=0$ 时 $m=-\frac{5}{4}$.

$x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 有解舍

$\Delta>0$ 时

$x_1=\frac{1-\sqrt{4m+5}}{2}$ $x_2=\frac{1+\sqrt{4m+5}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{4m+5}}{2}>1$ ~~$m\in(-\frac{5}{4}, \ldots)$~~ 不成立

$\frac{1+\sqrt{4m+5}}{2}<-1$ 也不成立

无解

$\therefore m\in(-\infty,-\frac{5}{4})$

$\therefore$ 原问题中 $m\in[-\frac{5}{4},+\infty)$

方法不妥！

$[-\frac{5}{4},1]$

13、已知角 α 是第三象限角，$\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

(1) 求 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 的值；(2) 求 $\dfrac{1+2\sin(\pi-\alpha)\cos(-2\pi-\alpha)}{\sin^2(-\alpha)-\sin^2(\frac{5\pi}{2}-\alpha)}$ 的值.

解 (1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha$

$(\frac{1}{2}\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$

$\therefore \cos^2\alpha=\frac{4}{5}$

$\cos\alpha=-\frac{2}{5}\sqrt{5}$

$\sin\alpha=-\frac{1}{5}\sqrt{5}$

(2) 原式 $=\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha+1+2\tan\alpha}{\tan^2\alpha-1}$

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ 代入

原式 $=\dfrac{\frac{1}{4}+1+1}{\frac{1}{4}-1}=\dfrac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{4}}=-3$

$y = \frac{}{2}\pi\ \frac{}{2}$

$B = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$

$\therefore k \in Z.\ y = -\frac{1}{2}.$

$3^\circ\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}.$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in Z.$

$y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

程有解，试确定 m 的取值范围.

(2) $m = -\sin^2 x - \cos x$

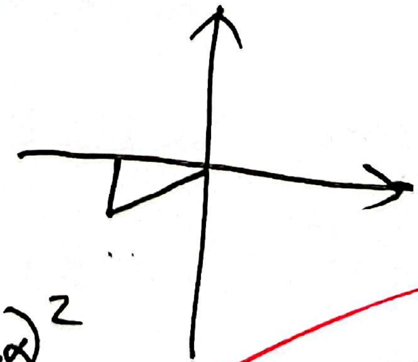
$= \cos^2 x - 1 - \cos x$

$= \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$ $\because \cos x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow m \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right].$

$\frac{-\alpha)\cos(-2\pi - \alpha)}{\alpha) - \sin^2(\frac{5\pi}{2} - \alpha)}$ 的值.

$= -\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$



$\frac{\cdot\cos\alpha}{-\cos^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$

2)

【C组】

1、已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x, y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3$，当 $x>0$ 时 $f(x)<3$ (1) $f(x)$ 在实数集R上是否为单调函数？并说明理由.

(2)若 $f(6)=-9$，求 $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)$.

解 (1) 设 $g(x)=f(x)-3$

$\therefore g(x+y)=g(x)+g(y)$

且 $x>0$ 时 $g(x)<0$

$g(x+0)=g(x)+g(0)$

$\therefore g(0)=0$

$g(x-x)=0=g(x)+g(-x)$

$\therefore g(x)$ 为奇函数

在 $x>0$ 时

设 $0<x_1<x_2$

$g(x_2)=g(x_1)+g(x_2-x_1)$

$g(x_2)-g(x_1)=g(x_2-x_1)<0$

$\therefore g(x_2)<g(x_1)$，g为减函数

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$，g为减函数

$\because x>0,\ g(x)<0,\ g(0)=0$，$\therefore$ g为奇函数

$\therefore g(x)$ 在R上单调减

$\because f(x)=g(x)+3$

$\therefore f(x)$ 在R上单调减

(2) 引理 ~~f~~ $g(nx)=ng(x)\quad n\in N^*$

$n=1$ 时成立

$n>1$ 时

$g(nx)=g((n-1)x)+g(x)$

$=(n-1)g(x)+g(x)=ng(x)$

由数归得证

$g(6)=6g(1)=f(6)-3=-12$

$\therefore g(1)=-2$

$g(1)=2^{2010}g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)=-2$

$\therefore g\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)=-\frac{1}{2^{2009}}$

$\therefore f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)=-\frac{1}{2^{2009}}+3$

2、设 a, b 为正实数，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4a^3b^3$，求 $\log_a b$.

解 令 $x=\frac{1}{a},\ y=\frac{1}{b},\ x,y\in R^+$

$x+y\le 2\sqrt{2}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{-2}{ab^2}=4$

~~$x^2y^2(x+y)-2x^2y^2=4$~~

$x^3y+xy^3-2x^2y^2=4$

$xy(x^2+y^2)-2x^2y^2-4=0$

$x^2+y^2+2xy\le 8$

$x^2+y^2\le 8-2xy$

$0\le xy(8-2xy)-2x^2y^2-4$

$=-4x^2y^2+8xy-4$

$=-4(xy-1)^2$

$\therefore xy=1$

$\therefore ab=1$

原式 $=\log_a\frac{1}{a}=-1$

【滚动练习】

1. 已知集合 $A=(-1,2]$，$B=\{-1,0,\sqrt{3}\}$，则 $A\cup B=$ $[-1,2]$.

2. 不等式 $\frac{x}{1-x}>0$ 的解集为 $(0,1)$.

$x(1-x)>0$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公比为 2，且 $S_4=15$，则 $a_1=$ 1.

1, 2, 4, 8

4. 函数 $y=\sqrt{3-|2x+1|}$ 的定义域是 $[-2,1]$.

5. 设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\log_5 12=$ $\frac{2a+b}{1-a}$.（结果用 a 和 b 表示）

6. 若幂函数 $y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格增函数，则实数 $m=$ -1.

7. 已知 $x_1^2+nx_1+1=0$，且 $x_2^2+nx_2+1=0,(n>2)$ 且 $x_1\ne x_2$，则 $x_1\cdot x_2=$ 1.

8. 若关于 x 的不等式 $kx^2-2kx+3>0$ 对一切实数 x 都成立，则实数 k 的取值范围是 $[0,3)$.

2. 由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$ 有 $a+b\le 2\sqrt{2}ab$, $(a+b)^2\le 8a^2b^2$.

∴ $4a^3b^3=(a-b)^2=(a+b)^2-4ab\le 8a^2b^2-4ab \Rightarrow$

∴ $a^2b^2\le 2ab-1$. $(ab)^2-2ab+1\le 0$. $(ab-1)^2\le 0$

∴ $ab=1$ 从而 $\log_a b=-1$.

【C组】

137.75

1、已知函数 $f(x)$ 对于任意实数 x, y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3$，当 $x>0$ 时 $f(x)<3$ (1) $f(x)$ 在实数集 R 上是否为单调函数？并说明理由.

(2)若 $f(6)=-9$，求 $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)$.

1. (1) 取 $y>0$. $f(x+y)-f(x)=f(y)-3$ $x>0$ 时 $f(y)<3$ $f(y)-3<0$ ∴ $f(x+y)-f(x)<0$

$f(x+y)<f(x)$ ∴ $f(x)$ 在 R 上单调函减.

(2) $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2009}\right)=2f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)-3$ 数学归纳法 $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010-x}\right)=2^x\cdot f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)-3\cdot(2^x-1)$. $x\in N^*$

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2008}\right)=4f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)-9$.

$x=1$ 时成立 设 $x=n$ 时成立 $x=n+1$ 时.

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010-n-1}\right)=2\cdot\left(2^x\cdot f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)-3\cdot 2^x+3\right)-3$

$=2^{x+1}\cdot f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)-3\cdot(2^{x+1}-1)$ ∴ $x=n+1$ 时成立，

∴ $f(1)=2^{2010}\cdot f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)-3\cdot 2^{2010}+3$.

$f(2)=2f(1)-3$

$f(4)=2f(2)-3=4f(1)-9$

$f(6)=6f(1)-15=-9$

$\Rightarrow f(1)=1$

∴ $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)=\frac{3\cdot 2^{2010}-2}{2^{2010}}=3-\frac{1}{2^{2009}}$.

C

2、设 a, b 为正实数，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le 2\sqrt{2}$，$(a-b)^2=4a^3b^3$，求 $\log_a b$.

2. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{ab}\le 8$

$a^2-2ab+b^2=4a^3b^3$

$\frac{1}{ab}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-\frac{2}{a^2b^2}=4$

$4=-\frac{2}{a^2b^2}+\frac{1}{ab}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

$\le -\frac{2}{a^2b^2}+\frac{8}{ab}-\frac{2}{a^2b^2}$

$\frac{4}{a^2b^2}-\frac{8}{ab}+4\le 0$

$4\left(\frac{1}{ab}-1\right)^2\le 0$

$\left(\frac{1}{ab}-1\right)^2\le 0$

$\frac{1}{ab}-1=0$

$\Rightarrow ab=1$

∴ $\log_a b=\log_a \frac{1}{a}=-1$.

【滚动练习】

1. 已知集合 $A=(-1,2]$，$B=\{-1,0,\sqrt{3}\}$，则 $A\cup B=$__________.

2. 不等式 $\frac{x}{1-x}>0$ 的解集为__________.

a_1.　　$a_1\frac{1-2^4}{1-2}=15$.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公比为 2，且 $S_4=15$，则 $a_1=$ 1.

$\frac{15}{8}$. $\frac{15}{4}$. $\frac{15}{2}$ 1.

4. 函数 $y=\sqrt{3-|2x+1|}$ 的定义域是__________.

5. 设 $\lg 2=a$，$\lg 3=b$，则 $\log_5 12=$__________.（结果用 a 和 b 表示）

6. 若幂函数 $y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是严格增函数，则实数 $m=$__________.

7. 已知 $x_1^2+nx_1+1=0$，且 $x_2^2+nx_2+1=0,(n>2)$ 且 $x_1\ne x_2$，则 $x_1\cdot x_2=$__________.

8. 若关于 x 的不等式 $kx^2-2kx+3>0$ 对一切实数 x 都成立，则实数 k 的取值范围是

__________.

所以 $f\left(\frac{5}{12}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

10. 解析 (1) 对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1<x_2$,有

$$f(x_2)=f(x_1+(x_2-x_1))=f(x_1)+f(x_2-x_1)-3.$$

因为 $x_2-x_1>0$,所以 $f(x_2-x_1)<3$,即 $f(x_2)<f(x_1)$,从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为单调减函数.

(2) 由 $f(6)=f(2)+f(4)-3=f(2)+[f(2)+f(2)-3]-3=3f(2)-6=-9$,得 $f(2)=-1$.

又由 $f(2)=f(1)+f(1)-3$,得 $f(1)=1$.

对任意的 $a\in\mathbf{R}$,有 $f(a)=2f\left(\frac{a}{2}\right)-3$,则 $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{f(a)+3}{2}$.

令 $a_1=f(1)=1$,

$$a_{n+1}=f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)=\frac{f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)+3}{2}=\frac{a_n+3}{2}.$$

退一位可得

$$a_n=\frac{a_{n-1}+3}{2}.$$

两式相减,得 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$.

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$,则 $b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$.故$\{b_n\}$是以 $b_1=a_2-a_1=1$ 为首项、$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.从而 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即 $a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

于是将 $a_2-a_1=1,a_3-a_2=\frac{1}{2},a_4-a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\cdots,a_{n+1}-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 累加,可得

$$a_{n+1}-a_1=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

所以

$$a_{n+1}=a_1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

故 $f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2010}\right)=a_{2011}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{2009}$.

11. 解析 将 $2-x$ 代入 $f(x)+xf(2-x)=2$ 得 $f(2-x)+(2-x)f(x)=2$