§2.4 指数函数（1）

A 组:

1. 若函数 $f(x)=m^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格减函数, 则 m 的取值范围是$\underline{\quad (0,1) \quad}$.

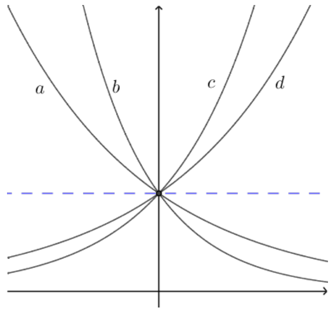
2. 已知函数 $f(x)=a^x$ 的图像恒过定点 P, 则 P 点坐标是$\underline{\quad (0,1) \quad}$.

   解析　$a^0=1!!!$

3. 如图, 指数函数 $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$, $y=d^x$, 则 a,b,c,d 与 1 的大小关系为$\cdots\cdots\cdots\cdots$(B)

   (A) $a<b<1<c<d$　　(B) $b<a<1<d<c$

   (C) $1<a<b<c<d$　　(D) $a<b<1<d<c$



4. 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+(x-2)^0$ 的定义域为$\underline{\quad [0,2)\cup(2,+\infty) \quad}$.

5. 函数 $y=(2a-3)^x$ 是指数函数, 则 a 的取值范围是$\underline{\quad (\frac{3}{2},2)\cup(2,+\infty) \quad}$.

6. 已知函数 $f(x)=(a-2)^x$, 当 $x<0$ 时, $f(x)>1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是$\underline{\quad (2,3) \quad}$.

7. 函数 $y=a^{x-2}+1\quad(a>0,$ 且 $a\neq1)$ 的图像必经过定点$\underline{\quad (2,2) \quad}$.

8. 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1, x\in[-1,2]$ 的值域为$\underline{\quad [-\frac{8}{9},2] \quad}$.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$, 则满足 $f(2x+1)<f(3x)$ 的 x 解集为$\underline{(-\infty,0)}$.

   解析　原不等式转化为 $2x+1>3x$ 且 $0>3x$，解得 $x\in(-\infty,0)$

B 组:

1. 已知函数① $y=(-3)^x$, ② $y=(\frac{1}{3})^x$, ③ $y=3^x$, ④ $y=x^{-3}$, ⑤ $y=(\sqrt{2})^x$, 其中是指数函数的有$\underline{\quad ②③⑤ \quad}$.

2. 若函数 $f(x)=(m^2-1)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上是严格减函数, 则 m 的取值范围是$\underline{(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})}$.

   解析　$0<m^2-1<1 \iff m\in(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$.

3. 满足 $(a^2+a+2)^x>(a^2+a+2)^{1-x}$(其中 $a\in\mathbb{R}$) 的实数 x 的取值范围是$\underline{\quad x>\frac{1}{2} \quad}$.

   解析　$a^2+a+2=(a+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>1$, 故 $x>1-x$.

4. 已知函数 $f(x)=4+a^{x-1}$ 的图像恒过定点 P, 则 P 点坐标是$\underline{\quad (1,5) \quad}$.

   解析　$a^0=1!!!$

5. 设集合 $P=\{(x,y)\mid y=k, x\in\boldsymbol{R}\}, Q=\{(x,y)\mid y=a^x+1, x\in\boldsymbol{R}, a>0$ 且 $a\neq1\}$, 已知 $P\cap Q=\varnothing$, 那么实数 k 的取值范围是$\underline{(-\infty,1]}$.

6. 若函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值比最小值大 $\dfrac{a}{2}$, 则实数 a 的值为__$\frac{1}{2},\frac{3}{2}$__.

解析　因为单调, 故 $|a-a^2|=\dfrac{a}{2}$, 解得 $a=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$. 经检验, 皆符合条件.

7. 若函数 $y=\dfrac{a^x}{2a^2-5a+2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上为严格减函数, 则 a 的取值范围是__$(0,\frac{1}{2})\cup(1,2)$__.

解析　$\begin{cases}a\in(0,1)\\2a^2-5a+2>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>1\\2a^2-5a+2<0\end{cases}$, 解得 $a\in(0,\frac{1}{2})\cup(1,2)$.

8. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$, 则该函数在 $\mathbb{R}$ 上是 $\cdots\cdots$ (A)

(A) 严格单调递减无最小值　　(B) 严格单调递减有最小值

(C) 严格单调递增无最大值　　(D) 严格单调递增有最大值

解析　$2^x+1\in(1,+\infty)$, 故 $\dfrac{1}{2^x+1}\in(0,1)$.

9. 若 $0<a<1$, $b<-1$, 则函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像不经过 $\cdots\cdots$ (A)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

解析　$f(0)=1+b<0$(连续性可知必过 III,IV). 又 $a\in(0,1)$, 故不过 I.

10. 函数 $y=2^{1-x}+2$ 的图像可以由函数 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像经过下面变换得到 $\cdots\cdots$ (C)

(A) 先向左平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位

(B) 先向左平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位

(C) 先向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位

(D) 先向右平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位

解析　令 $f(x)=(\frac{1}{2})^x=2^{-x}$, 则 $y=f(x-1)+2=2^{1-x}+2$.
另外, 用 $f(0)=1$ 也是可以的, 关键在于 "若你明白了什么是代表元素那就自由的得".

11. 若函数 $f(x)=\begin{cases}a^x, x\geqslant 1\\\left(2-\frac{a}{2}\right)x+2, x<1\end{cases}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的严格增函数, 则实数 a 的取值范围是__$[\frac{8}{3},4)$__.

解析　$f(x)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的严格增函数 $\iff\begin{cases}a>1\\2-\dfrac{a}{2}>0\\a\geqslant(2-\dfrac{a}{2})+2\end{cases}$, 解得 $a\in[\dfrac{8}{3},4)$

12. 判断下列函数的奇偶性, 并证明.

(1) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2},(a>0,a\neq 1)$;

(2) $y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1},(a>0,a\neq 1)$.

解析

(1) 奇;

(2) 偶.

13. 解不等式: $0.3^{x^2+x+1}>0.3^{-2x^2+5x}$.

解析　因为 $y=0.3^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递减, 故原不等式 $\iff x^2+x+1<-2x^2+5x\iff x\in(\frac{1}{3},1)$.

14. 解关于 x 的不等式: $a^{x^2}>(\frac{1}{a})^{-2x-1}$(其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$).

解析　$a>1$ 时, 等价于 $x^2>2x+1$, 即 $x\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$;
$a\in(0,1)$ 时, 等价于 $x^2<2x+1$, 即 $x\in(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.
故 $a\in(0,1)$ 时, 解集为 $(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$;
$a>1$ 时, 解集为 $(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$.

15. 已知函数 $f(x)=4^x+a\cdot 4^{-x}$ 是偶函数.

(1) 求 a 的值;

(2) 证明: 对任意实数 x_1 和 x_2, 都有 $\frac{1}{2}\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right]\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

解析

(1) $a=1$;

(2) 任取 x_1,x_2,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right]=\frac{1}{2}\left(4^{x_1}+4^{-x_1}+4^{x_2}+4^{-x_2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{4^{x_1}4^{x_2}}+2\sqrt{4^{-x_1}4^{-x_2}}\right)\\&=4^{\frac{x_1+x_2}{2}}+4^{-\frac{x_1+x_2}{2}}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\end{aligned}$$

16. 设函数 $f(x)=\left(a^2+a-5\right)a^x$ 是指数函数, 将 $f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位得到 $y=g(x)$ 的图像.

(1) 写出 $g(x)$ 的解析式;

(2) 对任意的 $x\in[-1,2],g(x)\geqslant 3+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{2}$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

解析

(1) $g(x)=2^{x+1}+2$

(2) $\because g(x)$ 在 $[-1,2]$ 上是严格增函数, $\therefore g(x)_{\min}=g(-1)=3\ \therefore 3+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{2}\leqslant 3,\therefore m\geqslant 1$ 或 $m\leqslant 0$.

17. 定义在 D 上的函数 $f(x)$, 如果满足: 对任意 $x\in D$, 存在常数 $M>0$, 都有 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数, 其中 M 称为函数 $f(x)$ 的上界. 已知 $f(x)=4^x+a\cdot 2^x-2$.

(1) 当 $a=-2$ 时, 求函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域, 并判断函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是否为有界函数，请说明理由；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是以 2 为上界的有界函数, 求实数 a 的取值范围.

解析

(1) $f(x)=4^x-2\cdot 2^x-2=(2^x-1)^2-3$, 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的值域为 $(-3,+\infty)$; 因此不存在常数 $M>0$, 使得 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是有界函数;

(2) $-2\leqslant 4^x+a\cdot 2^x-2\leqslant 2$ 对任意的 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立,
即 $-2^x\leqslant a\leqslant\frac{4}{2^x}-2^x$ 对任意的 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立, 因为 $x<0$, 所以 $2^x\in(0,1),-2^x\in(-1,0)$; 又 $y=\frac{4}{2^x}-2^x$ 在 $(-\infty,0)$ 上是严格减函数, 所以 $y=\frac{4}{2^x}-2^x>\frac{4}{2^0}-2^0=3$, 因此为使 $-2^x\leqslant a\leqslant\frac{4}{2^x}-2^x$ 对任意的 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立, 只需 $0\leqslant a\leqslant 3$.

薛淳？

145

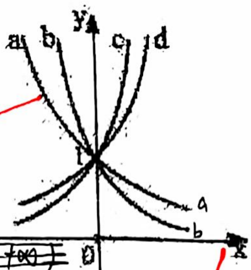
4.2 指数函数（1）

【A组】

1.若函数$f(x)=m^x$在R上是严格减函数，则m的取值范围是 (0,1) .

2. 已知函数$f(x)=a^x$的图像恒过定点P，则P点坐标是 (0,1) .

如图，指数函数$y=a^x$、$y=b^x$、$y=c^x$、$y=d^x$，则a、b、c、d与1的大小关系为（ B ）



(A) $a<b<1<c<d$　　(B) $b<a<1<d<c$

(C) $1<a<b<c<d$　　(D) $a<b<1<d<c$

3. 函数$f(x)=\underbrace{\sqrt{2^x-1}}_{x\in[0,+\infty)}+\underbrace{(x-2)^0}_{x\neq 2}$的定义域为 $[0,2)\cup(2,+\infty)$.

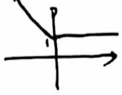
4. 函数$y=(2a-3)^x$是指数函数，则a的取值范围是 ~~$(\frac{3}{2},+\infty)$~~ $(\frac{3}{2},2)\cup(2,+\infty)$

5. 已知函数$f(x)=(a-2)^x$，当$x<0$时，$f(x)>1$恒成立，则实数a的取值范围是 (0,2) . (2,3)

6. 函数$y=a^{x-2}+1$（$a>0$, 且$a\neq 1$）的图像必经过定点 (2,2) .

7. 函数$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$，$x\in[-1,2]$的值域为 $[-\frac{8}{9},2]$.

8. 设函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, x\le 0\\ 1, x>0\end{cases}$，则满足$f(2x+1)<f(3x)$的x解集为 R^- .



~~$2x+1<1$~~

$\begin{cases}3x<0\\ 3x<2x+1\end{cases}$

【B组】

1. 已知函数：$y=(-3)^x, y=(\frac{1}{3})^x, y=3^x, y=x^{-3}, y=(\sqrt{2})^x$，其中是指数函数的有 $y=(\frac{1}{3})^x$, $y=3^x$, $y=(\sqrt{2})^x$.

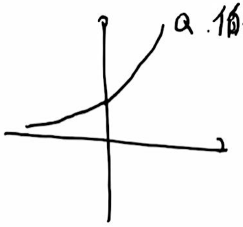
2. 若函数$f(x)=(m^2-1)^x$在R上是严格减函数，则m的取值范围是 ~~$(-1,0)\cup(0,1)$~~ $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

3. 满足$\underbrace{(a^2+a+2)}_{>1}{}^x>(a^2+a+2)^{1-x}$（其中$a\in R$）的实数$x$的取值范围是 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

4. 已知函数$f(x)=4+a^{x-1}$的图像恒过定点P，则P点坐标是 (1,5) .

5. 设集合$P=\{(x,y)\mid y=k, x\in R\}$，$Q=\{(x,y)\mid y=a^x+1, x\in R, a>0且a\neq 1\}$，已知$P\cap Q=\varnothing$，那么实数$k$的取值范围是 $(-\infty,1]$.

Q 值域：R^+



$|a-a^2|=\frac{a}{2}$

6. 若函数$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$在区间[1,2]上的最大值比最小值大$\frac{a}{2}$，则实数a的值为 $\frac{1}{2}$或$\frac{3}{2}$.

7. 若函数$y=\dfrac{a^x}{2a^2-5a+2}$在$(-\infty,+\infty)$上为严格减函数，则a的取值范围是 $(0,\frac{1}{2})\cup(1,2)$

a^x 增 $a\in(1,+\infty)$；减 $a\in(0,1)$

$2a^2-5a+2$ 正 $a\in(0,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$；负 $a\in(\frac{1}{2},2)$

8. 若函数$f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$，则该函数在R上是（ A ）

(A) 严格减无最小值　　(B) 严格减有最小值

(C) 严格增无最大值　　(D) 严格增有最大值

9. 若$0<a<1,b<-1$，则函数$f(x)=a^x+b$的图象不经过（ A ）

(A) 第一象限　(B) 第二象限　(C) 第三象限　(D) 第四象限

10. 函数$y=2^{1-x}+2$的图像可以由函数$y=(\frac{1}{2})^x$的图像经过下面变换得到（ C ）

(A) 先向左平移1个单位，再向上平移2个单位

(B) 先向左平移1个单位，再向下平移2个单位

(C) 先向右平移1个单位，再向上平移2个单位

(D) 先向右平移1个单位，再向下平移2个单位

$y=(\frac{1}{2})^{x-1}+2$

右1 上2

11. 若函数$f(x)=\begin{cases}a^x,x\geq1\\ \left(2-\frac{a}{2}\right)x+2,x<1\end{cases}$是R上的严格增函数，则实数$a$的取值范围是 $[\frac{8}{3},4)$.

$\begin{cases}a>1\\ 2-\frac{a}{2}>0\\ a^1\geq(2-\frac{a}{2})\times1+2\end{cases}$

12. 判断下列函数的奇偶性，并证明.

(1) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$，$(a>0,a\neq1)$；　(2) $y=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$，$(a>0,a\neq1)$.

解：记$y=f(x)$

$f(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=-f(x)$

故为奇函数

解：记$y=g(x)$

$g(-x)=-x\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}$

$=-x\dfrac{1-a^x}{1+a^x}$

$=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$

$=g(x)$

故为偶函数

13. 解不等式：$0.3^{x^2+x+1} > 0.3^{-2x^2+5x}$.

解：$y=0.3^x$ 在R上单调递减

故 $x^2+x+1 < -2x^2+5x$

即 $3x^2-4x+1<0$

$x\in(\frac{1}{3},1)$

14. 解关于 x 的不等式：$a^{x^2} > \left(\frac{1}{a}\right)^{-2x-1}$ （其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$）.

解：$a^{x^2} > a^{2x+1}$

而 $a^{2x+1}>0$

故 $\frac{a^{x^2}}{a^{2x+1}}>1$

即 $a^{x^2-2x-1}>1$

$a\in(0,1)$ 时

$x^2-2x-1<0$

$x\in(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$

$a\in(1,+\infty)$ 时

$x^2-2x-1>0$

$x\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty)$

15. 已知函数 $f(x)=4^x+a\cdot 4^{-x}$ 是偶函数.

(1) 求 a 的值；(2) 证明：对任意实数 x_1 和 x_2，都有 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

<使用AM-GM>不等式

解：(1) $f(1)=f(-1)$

$4+\frac{a}{4}=\frac{1}{4}+4a$

$\therefore a=1$

(2) 证明：$f(x)=4^x+(\frac{1}{4})^x$

$\frac{4^{x_1}+4^{x_2}}{2}\geq\sqrt{4^{x_1}\cdot 4^{x_2}}=4^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

同理 $\frac{(\frac{1}{4})^{x_1}+(\frac{1}{4})^{x_2}}{2}\geq(\frac{1}{4})^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

相加得 $\frac{1}{2}[(4^{x_1}+(\frac{1}{4})^{x_1})+(4^{x_2}+(\frac{1}{4})^{x_2})]\geq 4^{\frac{x_1+x_2}{2}}+(\frac{1}{4})^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

即 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

16. 设函数 $f(x)=(a^2+a-5)a^x$ 是指数函数，将 $f(x)$ 的图像向左平移1个单位，再向上平移2个单位得到 $y=g(x)$ 的图像.

(1) 写出 $g(x)$ 的解析式；(2) 对任意的 $x\in[-1,2]$，$g(x)\geq 3+\frac{m}{2}-\frac{m^2}{2}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

解：(1) $\begin{cases} a^2+a-5=1 \\ a\in(0,1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$

故 $a=2$

$f(x)=2^x$

$g(x)=2^{x+1}+2$

即 $g(x)=2\cdot 2^x+2$

(2) $x\in[-1,2]$，$g(x)$ 单调增

$\therefore g(x)\geq g(-1)=2\cdot 2^{-1}+2=3$

$\therefore -\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}+3\leq 3$

~~即 $m\in R-(1,+\infty)$~~

即 $m\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

17. 定义在D上的函数$f(x)$，如果满足：对任意$x\in D$，存在常数$M>0$，都有$-M\le f(x)\le M$成立，则称$f(x)$是D上的有界函数，其中M称为函数$f(x)$的上界．已知$f(x)=4^x+a\cdot 2^x-2$．

(1) 当$a=-2$时，求函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上的值域，并判断函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是否为有界函数，请说明理由；

不一定是sup

(2) 若函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上是以2为上界的有界函数，求实数a的取值范围．

解：(1) $f(x)=4^x-2\cdot 2^x-2$

令$2^x=t$，$t\in(1,+\infty)$

$f(x)=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$

故$f(x)$在R^+上的值域为$(-3,+\infty)$

不是有界函数．假设有界M，$M>0$

取$x=\log_2(\sqrt{M+4}+1)$

$t=\sqrt{M+4}+1$

$f(x)=(t-1)^2-3$

$=M+1>M$

而$f(x)\le M$恒成立，

故矛盾

不是有界函数

(2) $\forall x\in R^-$，$-2\le f(x)\le 2$

令$2^x=t$，$t\in(0,1)$

$f(x)=t^2+at-2$

$-2\le t^2+at-2\le 2$，$\forall t\in(0,1)$

即$-t\le a\le\frac{4}{t}-t$

而$-t<0$

$\frac{4}{t}-t>3$

$\therefore a\in[0,3]$

【滚动练习】

1. 不等式组$\begin{cases}4x+8>0\\x^2-2x+2>x\end{cases}$的解集是$(-2,1)\cup(2,+\infty)$

2. 对于实数x，规定：若$n\le x<n+1(n\in\mathbb{N})$，则$[x]=n$，例如，$[3]=[3.1]=[3.9]=3$，

3. 解不等式$4[x]^2-36[x]+45<0$的解集是$[2,8)$

4. 关于x的不等式$mx-n>0$的解集为$(1,+\infty)$，则关于x的不等式$(mx-n)(x-3)>0$的解集是$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

5. 设集合$P=\{m\mid -4<m<0\}$，$Q=\{m\mid mx^2-mx-1<0恒成立\}$，则下列关系式中成立的是(A)　A. $P\subseteq Q$　B. $P\supseteq Q$　C. $P=Q$　D. $P\cap Q=\varnothing$

6. 设α、β是关于方程$x^2-2(k-1)x+k+1=0(k\in R)$的两个实根，则$\alpha^2+\beta^2$的取值范围是$[2,+\infty)$

7. 已知不等式$x^2+(a-2)x+3a>0(*)$

(1)若不等式(*)对任意$x\in[-1,1]$恒成立，求实数a的取值范围；

(2)若不等式(*)对任意$a\in[-1,1]$恒成立，求实数x的取值范围．

6. $\Delta\ge 0$

$4(k-1)^2\ge 4k+1$

$k^2-3k\ge 0$

$k\in(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$

$\alpha+\beta=2(k-1)$

$\alpha\beta=k+1$

$\alpha^2+\beta^2=4k^2-10k+2=4(k-\frac{5}{4})^2-\frac{17}{4}\in[2,+\infty)$

7. (1) $x^2-2x+(x+3)a>0$

$x\in[-1,1]$

$a>\frac{2x-x^2}{x+3}$

令$x+3=t$，$t\in[2,4]$

$a>\frac{-t^2+8t-15}{t}=-t-\frac{15}{t}+8\in[-\frac{3}{2},8-2\sqrt{15}]$

$\therefore a\in(8-2\sqrt{15},+\infty)$

(2) 看成关于a函数　$\therefore a=-1$与$a=1$时成立即可

$\begin{cases}x^2-x+3>0\\x^2-3x-3>0\end{cases}$

$x\in(-\infty,\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},+\infty)$