薛涛乡

6.3 诱导公式（1）

知识点：奇变偶不变，符号看象限——偶

【A组】

1. 若$P(-3,4)$为角α终边上一点，则$\cos(2\pi-\alpha)=$ $-\frac{3}{5}$.

2. 已知角θ的终边过点（1，−2），则$\cos(\pi+\theta)=$ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. 若$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，α是第二象限角，则$\sin(\alpha+\pi)=$ $-\frac{4}{5}$.

4. 已知$1-\cos(\pi-\alpha)=2\sin\alpha$，则$\tan\alpha=$ 0或$\frac{4}{3}$.　　$\alpha=\pi$或$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{3}{5}\\ \sin\alpha=\frac{4}{5}\end{cases}$

5. 下列等式中不恒成立的是　（ D ）

A. $\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$　　B. $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$

C. $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$　　D. $\cot(2\pi-\alpha)=\cot\alpha$

6. 已知角α和β的终边关于y轴对称，下列等式恒成立的是（ A ）

A. $\sin\alpha=\sin\beta$　　B. $\cos\alpha=\cos\beta$　　C. $\tan\alpha=\tan\beta$　　D. $\cot\alpha=\cot\beta$

7. 已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且α是第二象限角，则$\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)$的值等于 $\frac{1}{5}$.

$\frac{4}{5}$　$-\frac{3}{5}$

8. 函数$y=\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{|\cos\alpha|}+\frac{|\tan\alpha|}{\tan\alpha}+\frac{2\cot\alpha}{|\cot\alpha|}$的值域为 $\{-4,-2,0,6\}$

α在第一象限

$y=\begin{cases}1+2+1+2=6\\1-2-1-2=-4\\-1-2+1+2=0\\-1+2-1-2=-2\end{cases}$

二

三

【B组】

1. 若$\cos(\pi-\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$，且$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则$\sin(\pi+\alpha)=$ $-\frac{2}{3}$.

2. 已知$\sin(\alpha-\pi)=\frac{2}{3}$，且$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，则$\tan\alpha=$ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. 已知$\sin(\alpha-\frac{2}{3}\pi)=\frac{1}{4}$，则$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=$ $-\frac{1}{4}$.

4. 已知$\cos(\frac{1}{6}\pi+\theta)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos(\frac{5}{6}\pi-\theta)=$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 已知$\cos(11\pi-3)=p$，用p表示tan(-3)= $\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$.

6. 若tan α = −2，则sin(α − π)·cos(π + α)= $-\frac{2}{5}$.

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

7. $\sin^2(\alpha+\pi)-\cos(\alpha+\pi)\cos(-\alpha)+1$的值是 2 .

8. 在$\triangle ABC$中，给出下列四个式子：

①$\sin(A+B)+\sin C$ ②$\cos(A+B)+\cos C$ ③$\sin(2A+2B)+\sin 2C$

④$\cos(2A+2B)+\cos 2C$，其中值为常数的是 ②③ .

9. 函数式$\sqrt{1+2\sin(\pi-2)\cos(\pi+2)}$化简的结果是(A)

A.sin2-cos2 B.±(sin2-cos2) C.cos2-sin2 D.以上结论都不对

10. 当 n ∈ Z 时，在① $\sin(n\pi+\frac{\pi}{3})$ ② $\sin(2n\pi\pm\frac{\pi}{3})$ ③ $\sin(n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3})$ ④ $\cos(2n\pi\pm\frac{\pi}{6})$ ⑤ $\cos(n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6})$ 中与 $\sin\frac{\pi}{3}$ 相等的是 ③④ .

11.计算$\cos1^\circ+\cos2^\circ+\cos3^\circ+\cdots+\cos177^\circ+\cos178^\circ+\cos179^\circ=$ 0 .

12.已知$\cos170^\circ=m$，则$\tan10^\circ$的值为 $-\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$.

13. 已知$\sin(-\pi+\alpha)+2\cos(3\pi-\alpha)=0$，计算：

(1) $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+3\cos\alpha}$； (2) $\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

解：$-\sin\alpha-2\cos\alpha=0$

$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$

$\sin\alpha=-2\cos\alpha$

(1) 原式$=\frac{-4-1}{-2+3}=-5$

(2) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

故$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$，$\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{2}{5}$

故原式$=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}=-\frac{1}{5}$

14. 设$f(\theta)=\frac{2\cos^3\theta+\sin^2(2\pi-\theta)+\cos(-\theta)-3}{2+2\cos^2(\pi+\theta)+\cos(2\pi-\theta)}$，求$f(\frac{\pi}{3})$的值.

$f(\theta)=\frac{2\cos^3\theta+\sin^2\theta+\cos\theta-3}{2+2\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\frac{2\cos^3\theta+1-\cos^2\theta+\cos\theta-3}{2\cos^2\theta+\cos\theta+2}$

$=\frac{2\cos^3\theta-\cos^2\theta+\cos\theta-2}{2\cos^2\theta+\cos\theta+2}$

$\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

故$f(\frac{\pi}{3})=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2}$

$=-\frac{1}{2}$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

15. 已 知 $\sin(3\pi-\alpha)=\sqrt{2}\sin(2\pi+\beta)$ ，$\sqrt{3}\cos(-\alpha)=-\sqrt{2}\cos(\pi+\beta)$ ，且 $0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi$,求 $\sin\alpha,\sin\beta$.

解：$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$

$\sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\beta$

$\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=2\sin^2\beta+2\cos^2\beta$

即 $\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=2$

~~而 $2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2$~~

~~故 $\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$~~

~~故 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$~~

而 $3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=3$

故 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$

则 $\sin\beta=\frac{1}{2}$

16. 已知 $f(x)=\dfrac{\sin(n\pi-x)\cos(n\pi-x)}{\cos[(n+1)\pi-x]}\tan(x-n\pi)\cot(n\pi-x)$，$n\in Z$，求 $f(\frac{7}{6}\pi)$.

解：$f(x)=\dfrac{\sin(n\pi-x)\cos(n\pi-x)}{\cos[(n+1)\pi-x]}\cdot\cancel{\dfrac{\sin(n\pi-x)}{\cos(n\pi-x)}}\cdot(-1)$

$=\sin(n\pi-x)$

$\frac{n}{2}\in Z$ 时，$f(x)=-\sin x$

$\frac{n}{2}\notin Z$ 时，$f(x)=\sin x$

故 $\frac{n}{2}\in Z$ 时，$f(\frac{7}{6}\pi)=\frac{1}{2}$

$\frac{n}{2}\notin Z$ 时，$f(\frac{7}{6}\pi)=-\frac{1}{2}$

【C组】

1. 已知函数 $y=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$，求函数的最小值.

解：$y=\left|\sin x+\cos x+\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}\right)\right|$

$=\left|\sin x+\cos x+\frac{\sin x+\cos x+1}{\sin x\cos x}\right|$

令 $\sin x+\cos x=t$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]\setminus\{-1,1\}$

$\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

故 $y=\left|t+\frac{t+1}{\frac{t^2-1}{2}}\right|=\left|t+\frac{2}{t-1}\right|$

$=\left|(t-1)+\frac{2}{t-1}+1\right|$

而 $t-1+\frac{2}{t-1}\in(-\infty,-2\sqrt{2}]\cup[3\sqrt{2}+1,+\infty)$

故 $y\in[2\sqrt{2}-1,+\infty)$

y 的最小值为 $2\sqrt{2}-1$

2. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$ 满足 $x^2+y+z=xyz$，求函数 $f(x,y,z)=x^2(yz-1)+y^2(zx-1)+z^2(xy-1)$ 的最小值.

解：$yz=1+\frac{y+z}{x}$

$zx=1+\frac{z+x}{y}$

$xy=1+\frac{x+y}{z}$

故 $f(x,y,z)=x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)=2(xy+yz+zx)$

由Cauchy，$(xy+yz+zx)(z+x+y)\geq(3\sqrt{xyz})^2=9xyz=9(x+y+z)$

故 $xy+yz+zx\geq 9$

即 $f(x,y,z)\geq 18$

且 $f(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{3})=18$

故最小值为18

3. 已知实数 x，y 满足：$17(x^2+y^2)-30xy-16=0$ ①，求 $\sqrt{16x^2+4y^2-16xy-12x+6y+9}$ 的最大值.

由① $(x+y)^2+16(x-y)^2=16$

$\left(\frac{x+y}{4}\right)^2+(x-y)^2=1$

解：令 $m=\frac{x+y}{4}$，$n=x-y$

即 $x=2m+\frac{1}{2}n$，$y=2m-\frac{1}{2}n$

则代入①得 $m^2+n^2=1$

故令 $m=\sin\theta$，$n=\cos\theta$，$\theta\in(-\pi,\pi]$，则 $x=2\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$，$y=2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$

原式 $=\sqrt{(4x-2y)^2-3(4x-2y)+9}=\sqrt{(4\sin\theta+3\cos\theta)^2-3(4\sin\theta+3\cos\theta)+9}$

$=\sqrt{25\sin(\theta+\varphi)-15\sin(\theta+\varphi)+9}$，其中 $\begin{cases}\sin\varphi=\frac{3}{5}\\\cos\varphi=\frac{4}{5}\end{cases}$，$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

记 $\sin(\theta+\varphi)=t$

原式 $=\sqrt{25t^2-15t+9}=\sqrt{25\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{27}{4}}\leq 7$

在 $x=-\frac{11}{10}$，$y=-\frac{13}{10}$ 时取到，故最大值为7

【C组】

$1\sqrt{2}$

1. 已知函数 $y=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$，求函数的最小值.

解：原式 $y=\left|\sin x+\cos x+\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}\right|=\left|\frac{\sin^2x\cos x+\sin x\cos^2x+1+\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}\right|$

设 $\sin x+\cos x=t$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　$y=\left|\frac{t\cdot\frac{t^2-1}{2}+1+t}{\frac{t^2-1}{2}}\right|=\left|t+\frac{2(t+1)}{t^2-1}\right|=\left|t+\frac{2}{t-1}\right|=\left|t-1+\frac{2}{t-1}+1\right|\geq|-2\sqrt{2}+1|=2\sqrt{2}-1$

等号在 $t=1-\sqrt{2}$ 时取得

2. 设 $x, y, z\in\mathbf{R}_+$ 满足 $x+y+z=xyz$，求函数 $f(x,y,z)=x^2(yz-1)+y^2(zx-1)+z^2(xy-1)$ 的最小值.

解：$f(x,y,z)=x^2\cdot\left(\frac{xyz-x}{x}\right)+y^2\left(\frac{zxy-y}{y}\right)+z^2\left(\frac{xyz-z}{z}\right)=x^2\cdot\frac{y+z}{x}+y^2\cdot\frac{x+z}{y}+z^2\cdot\frac{x+y}{z}$

$=xy+xz+yx+yz+zx+zy=2(xy+yz+zx)$　$x+y+z=xyz$　$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=1$

$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}\right)\geq(1+1+1)^2=9$　$xy+yz+zx\geq 9$

$\therefore f(x,y,z)_{min}=18$ 等号 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时取得。

3. 已知实数 x，y 满足：$17(x^2+y^2)-30xy-16=0$，求 $\sqrt{16x^2+4y^2-16xy-12x+6y+9}$ 的最大值.

$25\times17=425$

解：$\sqrt{16x^2+4y^2-16xy-12x+6y+9}=\sqrt{(4x-2y)^2-3(4x-2y)+9}$

设 $4x-2y=a$.　$y=2x-\frac{a}{2}$　$17(4x^2-2ax+\frac{a^2}{4})+17x^2-60x^2+15ax-16=0$.

$25x^2-19ax+\frac{17a^2}{4}-16=0$　$\Delta=361a^2-100(\frac{17a^2}{4}-16)\geq 0$、$64a^2\leq1600$　$a^2\leq25$　$-5\leq a\leq5$.

$\therefore\sqrt{16x^2+4y^2-16xy-12x+6y+9}=\sqrt{a^2-3a+9}=\sqrt{(a-\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}}\leq\sqrt{\frac{169}{4}+\frac{27}{4}}=7$.

等号在 $x=\frac{19}{10}$　$y=\frac{13}{10}$ 时取得

$\therefore\sqrt{16x^2+4y^2-16xy-12x+6y+9}$ 最大值为 $\sqrt{19}$ 7.

法2 注意到 $(x+y)^2+16(x-y)^2-16=0$.　$\therefore$ 不妨设 $x+y=4\cos\theta$　$x-y=\sin\theta$.

$4x-2y=|4\cos\theta+3\sin\theta|\leq5$.

$\sqrt{16x^2+4y^2-16xy-12x+6y+9}=\sqrt{(4x-2y)^2-3(4x-2y)+9}\leq7$　等号 $x=-\frac{19}{10}$　$y=-\frac{13}{10}$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App