薛溯

90

3.8 函数的周期性与对称性（1）

【A 组】

1. 函数 $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-1}$ 的图象关于 $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 对称.

2. 函数 $f(x)=|2x-3|$ 的图像关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称.

3. (1) $f(2-x)=f(4+x)$，则函数 $y=f(x)$ 图像关于 $x=3$ 对称.

(2) $f(2-x)=-f(4+x)$，则函数 $y=f(x)$ 图像关于 $(3,0)$ 对称.

(3) $f(1-x)+f(4+x)=3$，则函数 $y=f(x)$ 图像关于 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 对称.

4. 若 $f(2+x)=-f(4+x)$，则 $f(x)$ 的最小正周期是 4.

最大

5. 函数 $y=f(x-a)$ 与函数 $y=f(-x+a)$ 的图像关于 $x=a$ 对称.

6. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切实数 x 满足 $f(2-x)=f(4+x)$，且方程 $f(x)=0$ 有 5 个实根，则这 5 个实根之和为 15.

$f(x)$关于$x=3$对称.

【B 组】

1、定义在实数集 R 上的奇函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2020)$ 的值是 0.

$\begin{cases} f(1)=f(-1) \\ f(1)=-f(-1) \end{cases} \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow f(1+2k)=0, \forall k\in Z$

$f(2k)=f(0)=0,\ \forall k\in Z$

2、已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的函数，方程 $f(2013+x)\cdot f(2015-x)=0$ 恰好有 7 个解，则这 7 个解的和为 7.

$f(2013+x)$ 与 $f(2015-x)$ 关于 $x=1$ 对称.

3、已知函数 $f(x)\neq -1$，且对定义域内任意 x 总有关系 $[f(x+\pi)+1]\cdot[f(x)+1]=2$，那么下列结论中一定正确的是（ B ）

A. $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数　　B. $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数

C. $f(x)$ 是周期为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的周期函数　　D. $f(x)$ 不是周期函数

一定正确的是

4、定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(a,b),(c,b)$ 都对称 $(a\neq c)$，则（ B ）

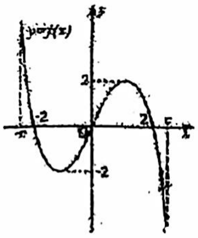
A. $f(x)$ 是以 $|a-c|$ 为周期的函数　　B. $f(x)$ 是以 $2|a-c|$ 为周期的函数

C. $f(x)$ 是以 $\dfrac{1}{2}|a-c|$ 为周期的函数　　D. $f(x)$ 不是周期函数

P_{-1}　a　p　c　P_1

5、$f(x)$是定义在区间$[-c,c]$上的奇函数，其图象如图所示：

令g（x）=af（x）+b，则下列关于函数g（x）的叙述正确的是（ B ）



A. 若$a<0$,则函数g（x）的图象关于原点对称.

B. 若$a=1$, $0<b<2$,则方程g（x）=0有大于2的实根.

C. 若$a=-2,b=0$,则函数$g(x)$的图象关于y轴对称

D. 若 $a\neq 0,b=2$,则方程g（x）=0有三个实根.

6、函数$f(x)$对一切实数x都满足$f(\frac{1}{2}+x)=f(\frac{1}{2}-x)$，并且方程$f(x)=0$有三个实根，这三个实根的和为 $\frac{3}{2}$.

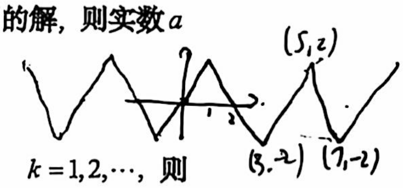
7、定义在R上的函数$y=f(x), y=f(-x), y=-f(x), y=-f(-x)$的图像重合，则函数$y=f(x)$的值域为 $\{0\}$.

8、函数$f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$的图像关于任意直线l对称后的图像依然为某函数图像，则实数a，b，c应满足的充要条件为 $a<0$ 且 $b^2=4ac$.

$y=f(x)$上仅有一点

函数的定义域为非空实数集，必修一 P114

9、设$f(x)$是定义在R上的奇函数，且对于任意的$x\in R$，$f(1+x)-f(1-x)=0$恒成立，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=2x$.若方程$f(x)=ax$恰好有5个不同的解，则实数a的取值范围为 $(-\frac{2}{3},-\frac{2}{7})\cup\{\frac{2}{5}\}$



10、设$f(x)=\frac{1+x}{1-x}$，又记$f_1(x)=f(x)$，$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))$，$k=1,2,\cdots$，则$f_{2024}(x)=$ x .

$f_2(x)=-\frac{1}{x}$ $f_4(x)=-x$

$f_3(x)=\frac{x+1}{x-1}$ $f_5(x)=\frac{1-x}{1+x}=f(-x)$ $f_k(x)=f_{k+4}(-x)$

11、对任意实数x，函数$f(x)$满足等式：$f(x)=-f(x+1)$，当$x\in(-1,0]$时，$f(x)=x^2+2x$，求当$x\in[8,10]$时，$f(x)$的表达式.

解：$f(x+1)=-f(x+2)$

$f(x)=f(x+2)$

$f(x)=f(x+10)$

$\forall x\in(9,10]$，$x-10\in(-1,0]$

$f(x-10)=(x-10)^2+2(x-10)=x^2-18x+80$

$f(x)=f(x-10)=x^2-18x+80$

$\forall x\in(8,9]$，$x+1\in(9,10]$

$f(x+1)=(x+1)^2-18(x+1)+80=x^2-16x+63$

$f(x)=-f(x+1)=-x^2+16x-63$

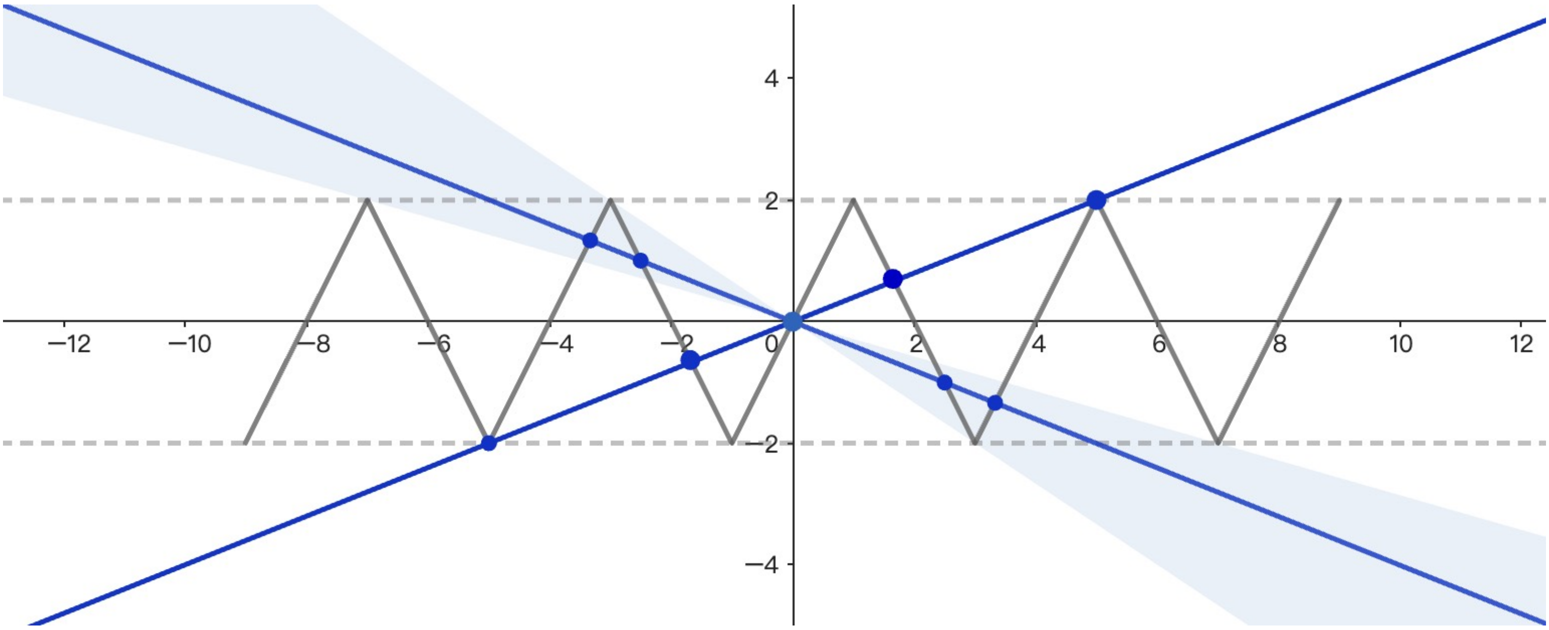
$f(9)=-9^2+16\times 9-63=0$

$f(8)=-f(9)=0$

~~而 $-x^2+16x-63$ 在 x~~

而 $x^2-18x+80$ 在 $x=8$时为0

综上 $f(x)=\begin{cases}x^2-18x+80, & x\in\{8\}\cup(9,10]\\ -x^2+16x-63, & x\in(8,9]\end{cases}$


4
2
−2
−4
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12

12、已知$f(x)$是R上的函数，且$f(x+2)\cdot[1-f(x)]=1+f(x)$ 且 $\forall x, f(x)\neq 2$

(1) 求证：$f(x)$是周期函数；(2) 若$f(4)=-\sqrt{3}$ 求$f(2020)$.

证明：(1) 假设$\exists x, f(x)=1$

$f(x+2)\cdot 0=2$

故不存在$f(x+2)$

故$\forall x, f(x)\neq 1$

$f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

$f(x+4)=-\frac{1}{f(x)}$

$f(x+6)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$

$f(x+8)=f(x)$

故8为$f(x)$的一个周期

$f(x)$是周期函数

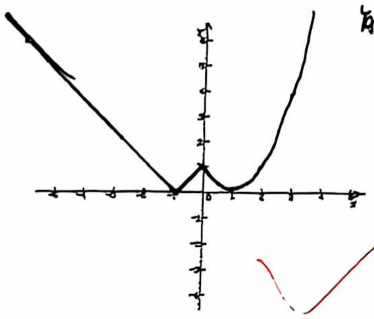
(2) $f(2020)=f(4+252\times 8)=f(4)$

$=-\sqrt{3}$

13、设定义域为R的函数$f(x)=\begin{cases}|x+1|, x\le 0\\(x-1)^2, x>0\end{cases}$.

(1)在平面直角坐标系内作出该函数的图像；

(2)试求出b和c所满足的关系，使得关于x的方程$f^2(x)+b\cdot f(x)+c=0$有7个不同的实根，请说明你的理由.



解：关于t方程 $f(x)=t$

若$t\in R^-$，有0个根

若$t\in\{0\}\cup(1,+\infty)$，有2个根

若$t=1$，有3个根

若$t\in(0,1)$有4个根

令p_1, p_2满足 $p^2+bp+c=0$，$p_1\le p_2$

故 ~~p~~ $p_1\in(0,1)$，$p_2=1$

~~$b+c+1=0$~~

记$f(k)=k^2+bk+c$

则$\begin{cases}f(1)=0\\f(0)>0\\-b\in(1,2)\end{cases}$

即$b+c=-1$

$c>0$

$b\in(-2,-1)$

故$\begin{cases}c=-1-b\\b\in(-2,-1)\end{cases}$

即可

14、已知函数$f(x)$同时满足下列五个条件：

(1) $f(x+1)$的定义域为$[-5,3]$，(2) $f(x)+f(-x)=0$，

(3) $f(-1)=0$，(4) 在$[-4,0)$上单调递减，(5) 没有最大值；

解不等式$x^3f(x)\le 0$；

解：由(1)，$f(x)$定义域为$[-4,4]$

由(2)，$f(0)=0$，$f(x)$为奇函数，由(3)，$f(1)=-f(-1)=0$

由(4)，$f(x)$在$[-4,0)$与$(0,4]$分别递减

故 $f(x)\in\begin{cases}R^+ & x\in[-4,-1)\cup(0,1)\\R^- & x\in(-1,0)\cup(1,4]\\0 & x\in\{-1,0,1\}\end{cases}$

而 $x^3\in\begin{cases}R^+ & x\in R^+\\R^- & x\in R^-\\0 & x\in\{0\}\end{cases}$

故 $x^3f(x)\le 0$ iff $x\in[-4,-1]\cup[1,4]\cup\{0\}$

15、已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且对任意 $x\in R$，都有 $f(2+x)=f(2-x)$

(1)若 $f(x)=0$ 有 50 个根，求所有这些根的和；

(2)若 $f(x)=0$ 有 51 个根，求所有这些根的和.

解、由 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称

若 $2-p$ 为根，则 $2+p$ 也为根

(1) $50\times 2=100$

(2) $51\times 2=102$

16、(1) 已知 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，且 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2x}$，

求 $x\in[3,4)$ 时，$f(x)$ 的解析式；

解：$4-x\in(0,1]$

$f(x)=f(4-x)=(4-x)^2+\dfrac{1}{2(4-x)}$

(2) 已知 $f(x)$ 的图像关于点 $(-2,0)$ 对称，且 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2x}$，求

$x\in[-5,-4)$ 时，$f(x)$ 的解析式；

10

解：$x\in(0,1]$，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2x}$

$x\in[-5,-4)$，$\cancel{f(x)=}$ $f(x)=f(-4-x)=-(x+4)^2+\cancel{2x+8}\dfrac{1}{2(x+4)}$

$-4-x\in(0,1]$

$-x^2-8x-16+\dfrac{1}{8+2x}$

(3) 已知 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,-2)$ 对称，且 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2x}$，求

$x\in(1,2)$ 时，$f(x)$ 的解析式.

解：$x\in[\cancel{-1}1,2)$

$2-x\in(0,1]$

$f(x)=4-f(2-x)=4-(x-2)^2+\dfrac{1}{2(x-2)}=-x^2+4x+\dfrac{1}{2(x-2)}$

$-x^2+4x-8+\dfrac{1}{2x-4}$

15、已知函数$f(x)$的定义域为R，且对任意$x\in R$，都有$f(2+x)=f(2-x)$

(1)若$f(x)=0$有50个根，求所有这些根的和；

(2)若$f(x)=0$有51个根，求所有这些根的和.

16、(1) 已知$f(x)$的图像关于直线$x=2$对称，且$x\in(0,1]$时，$f(x)=x^2+\frac{1}{2x}$，

求$x\in[3,4)$时，$f(x)$的解析式；　$f(2+x)=f(2-x)\Leftrightarrow f(x)=f(4-x)$.

解. $\forall x\in[3,4)$，$4-x\in(0,1]$ ∴$f(4-x)=(4-x)^2+\frac{1}{2(4-x)}$.

∴$f(x)=f(4-x)=(4-x)^2+\frac{1}{2(4-x)}$；$x\in[3,4)$.

(2) 已知$f(x)$的图像关于点$(-2,0)$对称，且$x\in(0,1]$时，$f(x)=x^2+\frac{1}{2x}$，求

$x\in[-5,-4)$时，$f(x)$的解析式；

解. $f(x)$关于$(-2,0)$对称$\Leftrightarrow f(-2+x)+f(-2-x)=0$.

$\Leftrightarrow f(x)+f(-4-x)=0$，$\forall x\in[-5,-4)$，$-4-x\in(0,1]$，$f(-4-x)=(-4-x)^2+\frac{1}{2(-4-x)}$

∴$f(x)=-f(-4-x)$

$=-(4+x)^2+\frac{1}{2(4+x)}$

(3) 已知$f(x)$的图像关于点$(1,-2)$对称，且$x\in(0,1]$时，$f(x)=x^2+\frac{1}{2x}$，求

$x\in[1,2)$时，$f(x)$的解析式.

解：$f(x)$关于$(1,-2)$对称$\Leftrightarrow f(x)+f(2-x)=-4$.

$\forall x\in[1,2)$. $2-x\in(0,1]$. $f(2-x)=(2-x)^2+\frac{1}{2(2-x)}$.

∴$f(x)=-4-f(2-x)=-4-(2-x)^2-\frac{1}{2(2-x)}$.

$=-x^2+4x-8+\frac{1}{2(x-2)}$

13、设定义域为R的函数$f(x)=\begin{cases}|x+1|, x\le 0\\(x-1)^2, x>0\end{cases}$.

(1)在平面直角坐标系内作出该函数的图像；

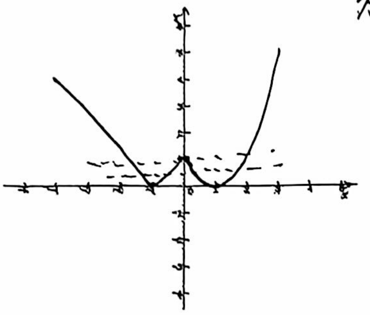
(2)试求出b和c所满足的关系，使得关于x的方程$f^2(x)+b\cdot f(x)+c=0$有7个不同的实根，请说明你的理由.

令 $f(x)=t$，故 $t^2+bt+c=0$ 必有一根为 $t_1=1$ ∴ $1+b+c=0$，$b+c=-1$，

且另一根 $t_2\in(0,1)$.

∴ $\begin{cases}1+t_2=-b\\1\cdot t_2=c\in(0,1)\end{cases}$

∴ $b+c=-1$，且 $c\in(0,1)$



14、已知函数$f(x)$同时满足下列五个条件：

(1) $f(x+1)$的定义域为$[-5,3]$，(2) $f(x)+f(-x)=0$，

(3) $f(-1)=0$，(4) 在$[-4,0)$上单调递减，(5) 没有最大值；

解不等式$x^3f(x)\le 0$；

解. $f(x)$定义域：$[-4,4]$，$f(-x)=-f(x)$ 奇函数，

$x=0$ ✓

$x>0$，$f(x)\le 0$，$x\in[1,4]$，

$x<0$，$f(x)\ge 0$，$x\in[-4,-1]$.

$x\in[1,4]\cup[-4,-1]\cup\{0\}$.