专题练习 1

填空题:

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $M=\{1,2\},N=\{3,4\}$，则 $\overline{M\cup N}=$___$\{5\}$___

   解析　根据并集的运算可知 $M\cup N=\{1,2,3,4\}$，故其补集 $\overline{M\cup N}=\{5\}$

   注: 看清楚运算符号!

2. 设集合 $A=\{1,4,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cap B=B$，则 $x=$___$0或-2或2$___

   解析　首先对条件进行转换，$A\cap B=B$ 即 $B\subseteq A$，根据集合中元素的无序性可知需要进行分类讨论。

   (1) $x^2=x$

   此时对应于 $x=0或1$，但是经过检验发现 $x=1$ 使得集合中元素违背互异性。

   (2) $x^2=4$

   此时对应于 $x=2或-2$，均不违背互异性。

   综上，$x=0或-2或2$

3. 设集合 $A=\{1,2,m\}$，其中 m 为实数，令 $B=\{a^2|a\in A\}$，$C=A\cup B$。若 C 中所有元素之和为 6，则 C 中所有元素之积为___-8___

   解析　$B=\{1,4,m^2\}$，则在**不违背互异性的前提下**有 $C=\{1,2,4,m,m^2\}$。根据 C 中元素和为 6，而 $1+2+4>6$，又因为 $m^2+m>-1$ 恒成立，故应有 $m<0$ 且 $m^2\in\{1,2,4\}$。故可知 $m=-1$，$C=\{1,2,4,-1\}$，因此 C 中所有元素之积为-8.

4. 已知集合 $A=\{a|x=\dfrac{383a^2+a}{2a+1},x\in\boldsymbol{Z},a\in\boldsymbol{Z}\}$，$A$ 中最大的元素为___190___

   解析　由于 $\dfrac{383a^2+a}{2a+1}$ 为二次比一次的形式，因此应考虑利用多项式除法来分离。为了方便运算，应考虑进行换元。

   令 $t=2a+1$，因此 t 应为奇数，$a=\dfrac{t-1}{2}$。故 $\dfrac{383a^2+a}{2a+1}=\dfrac{383(\frac{t-1}{2})^2+(\frac{t-1}{2})}{t}=\dfrac{1}{4}[\dfrac{383(t-1)^2+2(t-1)}{t}]=\dfrac{1}{4}[\dfrac{383t^2-764t+381}{t}]=\dfrac{1}{4}[383t+\dfrac{381}{t}]-191$
   易知可以先检验 $t=381$，此时原式为整数，而当 $t>381$ 易知原式不是整数，因此 t 最大值为 381，此时对应于 $a=190$

5. 若集合 $A=\{x|(a-1)x^2+3x-2=0\}$ 仅有一个真子集，实数 $a=$__$1或-\frac{1}{8}$__

   解析　由于只有一个真子集，故集合中只有一个元素。因为二次项系数有参数 a，所以需要分类讨论

   (1) $a=1$，此时方程退化回一次方程，只有一个实根，满足题意

   (2) $a\neq 1$，此时方程为二次方程，若只有一个实根，则判别式为 0，即 $9+8(a-1)=0$，得 $a=-\dfrac{1}{8}$

6. 已知集合 $A=\{y|x^2+mx-y+2=0,x\in R\}$，$B=\{y|x+y+1=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，m 的取值范围是___$(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$___.

   解析　首先可以判断出来 $B=[-2,-1]$，而 A 是函数 $y=x^2+mx+2$ 的函数值的取值范围。由于函数 $y=x^2+mx+2$ 的开口向上，欲使 $A\cap B\neq\varnothing$，则应有其函数值最小值小于等于-1。即 $\frac{m^2}{4}-\frac{m^2}{2}+2\leqslant -1$，解得 $m\in(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

7. 已知集合 $A=\{x|\frac{x-2}{x+1}<0\}$，$x\in A$ 的一个必要条件是 $x\geqslant a$，则实数 a 的取值范围是 $\underline{a\leqslant -1}$

解析　$A=(-1,2)$，故 $a\leqslant -1$

注: **小范围可以推出大范围**

8. 已知 $x\in \boldsymbol{R}$，“$(x-2)(x-3)\leqslant 0$” 是 “$|x-2|+|x-3|=1$ 成立” 的____充要____条件.

解析　$(x-2)(x-3)\leqslant 0$ 解集为 $[2,3]$

$|x-2|+|x-3|=1$ 解集为 $[2,3]$（平底锅函数，三角不等式）

9. “$x+y\neq 3$” 是 “$x\neq 1$或$y\neq 2$” 成立的____充分非必要____条件.

解析　“$x+y\neq 3$” 对应了平面上除了直线 $x+y=3$ 的区域

“$x\neq 1$或$y\neq 2$” 对应了平面上除了点 $(1,2)$ 的区域

10. “$x+y\neq 5$” 是 “$x\neq 2$且$y\neq 3$” 成立的既非充分也非必要条件.

解析　“$x+y\neq 5$” 对应了平面上除了直线 $x+y=5$ 的区域

“$x\neq 2$且$y\neq 3$” 对应了平面上除了直线 $x=2$ 和直线 $y=3$ 的区域

11. “若 $a>1$ 且 $b>2$，则 $a+b>3$” 的否命题、逆命题、逆否命题中真命题的个数是____1____

解析　原命题为真，故逆否命题为真。

逆命题：“若 $a+b>3$，则 $a>1$ 且 $b>2$” 为假，故否命题也为假.

12. 不等式 $\frac{x+5}{x^2+2x+5}\geqslant 1$ 的解集为 $\underline{[-1,0]}$

解析　因为 $x^2+2x+5>0$ 恒成立，因此可以转化为 $x+5\geqslant x^2+2x+5$，解集为 $[-1,0]$

注: 先判断分母是否恒正或者恒负，再考虑移项通分.

13. 不等式 $\frac{x^2(x+2)(x^2-x+1)}{x^2-5x+4}>0$ 的解集为 $\underline{(-2,0)\cup(0,1)\cup(4,+\infty)}$

解析　注: 穿针引线法求解，奇穿偶回，**偶次方根绝对不能丢弃，且易出错**.

14. 定义区间 $(c,d),[c,d),(c,d],[c,d]$ 的长度均为 $d-c(d>c)$。已知实数 $a>b$，则满足 $\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-b}\geqslant 3$ 的 x 构成的区间长度之和为____1____

解析　首先通分有 $\frac{3x-2a-b}{(x-a)(x-b)}\geqslant 3$，易知移项通分运算量很大。因此考虑分类讨论乘分母

(1) $x>a$ 或 $x<b$

此时不等式可以转化为 $3x-2a-b\geqslant 3(x-b)(x-a)$

(2) $a>x>b$

此时不等式可以转化为 $3x-2a-b\leqslant 3(x-b)(x-a)$

绘制 $y=3(x-b)(x-a)$ 和 $y=3x-2a-b$ 的草图可知不等式的解集为 $(b,x_1)\cup(a,x_2)$，其中 x_1,x_2 是方程 $3(x-b)(x-a)=3x-2a-b$ 的两根。根据韦达定理可知解集的区间长度和为 $x_1+x_2-a-b=1$

注: 本题也可以通过绘制 $y=\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x-b}$ 的草图，分析其单调区间，值域来解决。本质是一样的。

15. 若 $a<b$，且 $a<\frac{1}{x^2-3x+2}<b$ 的解集为 $\varnothing$，则 $b-a$ 的最大值为____4____

解析　$\frac{1}{x^2-3x+2}\in(-\infty,-4]\cup(0,+\infty)$，故 $b-a$ 取最大值的时候为 $b=0,a=-4$

16. $|x+1|<3-2x$ 的解集是 $\underline{(-\infty,\frac{2}{3})}$

解析　解集为 $(-\infty,\frac{2}{3})$

注: 1. $|f(x)|>g(x)$ 的充要条件是 $f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$ 2. $|f(x)|<g(x)$ 的充要条件是

$-g(x) < f(x) < g(x)$

注: **此处绝对不能平方处理**，否则等价于 $|x+1| < |3-2x|$ 会得到 $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (4, +\infty)$；当不等式两侧均含有绝对值时才适合平方去绝对值.

17. 若关于 x 的不等式 $k|x| > |x-2|$ 恰有 4 个整数解，则实数 k 的取值范围是 $\underline{(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]}$

解析 易知 $x = 0$ 不是不等式的解，故 $k|x| > |x-2|$ 进行参变分离，同解变形 $k > |\frac{x-2}{x}|$，即 $k > |1 - \frac{2}{x}|$

由函数 $f(x) = |1 - \frac{2}{x}|$ 的图像可知整根的集合为 $\{2, 3, 4, 5\}$，故 $f(5) < k \leqslant f(6)$，即 $k \in (\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$ 注: **解决整根问题的第一步往往是确认整根的集合**

18. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-a}{x-1+a} < 0 \\ x + 3a > 1 \end{cases}$ 的整数解恰有两个，则实数 a 的取值范围是 $\underline{(1, 2]}$

解析 首先可以确定第一个不等式的解集为 $(a, 1-a)$ 或 $(1-a, a)$，因为 a 和 $1-a$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称，因此 $\frac{1}{2}$ 必然在该不等式的解集中。而第二个不等式的解集为 $(1-3a, +\infty)$

① 若 $a \in [0, 1]$，则 $(a, 1-a)$ 或 $(1-a, a)$ 没有整数解，故整个不等式组的解集中也没有整数解.

② 若 $a < 0$，则 $a < 0 < 1 < 1-a < 1-3a$，则整个不等式组解集为空集.

③ 若 $a > 1$，则 $1-3a < 1-a < 0 < 1 < a$ 整个不等式组的解集为 $(1-a, a)$，此时解集中必有两个整数解 $0, 1$，故当 $a \in (1, 2]$ 时，满足要求.

综上，$a \in (1, 2]$

注: 本题画数轴可以更方便分析，本题判断出 a 和 $1-a$ 关于 $\frac{1}{2}$ 对称后可以猜测到两个整根是 0 和 1.

19. 已知不等式组 $\begin{cases} x^2 - x + a - a^2 < 0 \\ x + 2a > 1 \end{cases}$ 的整数解恰好有两个，a 的取值范围是 $\underline{(1, 2]}$

解析 设函数 $f(x) = x^2 - x$，则第一个不等式即 $f(x) < f(a)$，根据函数的性质可知不等式即 $|x - \frac{1}{2}| < |a - \frac{1}{2}|$，故 $\frac{1}{2} - |a - \frac{1}{2}| < x < \frac{1}{2} + |a - \frac{1}{2}|$，故第一个不等式解集为 $(1-a, a)$ 或 $(a, 1-a)$，第二个不等式解集为 $(1-2a, +\infty)$

① $a \in [0, 1]$，此时第一个不等式中不含有两个整数解，不符合要求.

② $a < 0$，第一个不等式解集为 $(a, 1-a)$，而 $1-a < 1-2a$，故不等式组解集为空集，不符合要求.

③ $a > 1$，第一个不等式解集为 $(1-a, a)$，故不等式解集为 $(1-a, a)$，当 $a \in (1, 2]$ 满足要求.

20. 若不等式 $x^2 + px > 4x + p - 3$，当 $0 \leqslant p \leqslant 4$ 时恒成立，则 x 的取值范围是 $\underline{(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)}$

解析

(1) 方法 1：看做是关于 p 的一元一次不等式求解

不等式移项得到 $x^2 - 4x + 3 > (1-x)p$。

因式分解有 $(x-1)(x-3) > -p(x-1)$

下面根据 x 的取值范围进行分类讨论：

① $x > 1$，不等式转化为 $x - 3 > -p$，故 $x \in (3, +\infty)$

② $x = 1$，这种情况不成立

③ $x < 1$，不等式转化为 $x - 3 < -p$，故 $x \in (-\infty, -1)$

综上，当 $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ 时不等式恒成立。

(2) 方法 2：看做是关于 x 的一元二次不等式求解

不等式移项得到 $x^2+(p-4)x+(3-p)>0$。即 $(x-(3-p))(x-1)>0$

因此根据两解可以写出不等式的解集为 $\begin{cases}(-\infty,3-p)\cup(1,+\infty) & 4\geqslant p\geqslant 2\\ (-\infty,1)\cup(3-p,+\infty) & 0\leqslant p<2\end{cases}$

要使得不等式在 p 取到 $[0,4]$ 内任意值时成立，则应取所有 p 所对应的解集的交集，故当 $x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$ 时不等式恒成立。

注: 通过对比可知以 p 为主元更容易理解和推广。

解答题:

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0,x\in R\}$，$B=\{(x,y)|x+y+1=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 m 的取值范围.

   解析　根据题意，两集合交集非空代表两段函数的图像有交点，即方程 $x^2+(m+1)x+3=0$ 在 $[0,1]$ 内有根，因为 $x=0$ 并非原方程的根，故可等价于方程 $-(m+1)=x+\frac{3}{x}$ 在 $(0,1]$ 内有根
   $y=x+\frac{3}{x}$ 在 $(0,1]$ 内单调减，故 $-(m+1)\in[4,+\infty)$，故 $m\in(-\infty,-5]$

2. 集合 $A=\{x|x^2-8x+12=0\},B=\{x|ax+1=0\}$，且 $A\cup B=A$，求 a 的取值范围.

   解析　$A\cup B=A$ 即 $B\subseteq A$

   ① $a=0$，此时 $B=\varnothing$，满足要求.

   ② $a\neq 0$，此时 $B=\{-\frac{1}{a}\}$，因为 $A=\{2,6\}$，若 $B\subseteq A$，则 $-\frac{1}{a}\in A$，因此 $a=-\frac{1}{2}$或$-\frac{1}{6}$

   综上 $a\in\{0,-\frac{1}{2},\frac{1}{6}\}$

3. 对任意实数 x，不等式 $2kx^2+kx-3<0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

   解析　当 $k=0$ 时，不等式成立。
   当 $k\neq 0$，从二次函数的角度看一元二次不等式，要使得不等式恒成立，则应有函数开口向下，即 $k<0$，并且有 $\Delta=k^2+24k<0$，因此 $k\in(-24,0)$。
   综上，$k\in(-24,0]$

4. 若关于 x 的不等式 $ax+6+|x^2-ax-6|\geqslant 4$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

   解析　原不等式转化为 $|x^2-ax-6|\geqslant -2-ax$ 恒成立，即 $x^2-ax-6\geqslant -2-ax$ 与 $x^2-ax-6\leqslant 2+ax$ 解集的并集为 $\boldsymbol{R}$
   前者解集为 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，后者解集为 $[a-\sqrt{a^2+8},a+\sqrt{a^2+8}]$，故 $(-2,2)\subseteq[a-\sqrt{a^2+8},a+\sqrt{a^2+8}]$，因此 $a\in[-1,1]$

5. 关于实数 x 的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $|x-a-1|\leqslant a$ 的解集依次是 A,B，求使得 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

   解析　$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 即 $-\frac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\frac{(a+1)^2}{2}\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$，即 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$
   $|x-a-1|\leqslant a$ 即 $-a\leqslant x-a-1\leqslant a$，即 $1\leqslant x\leqslant 2a+1$
   由于 $a^2+1\geqslant 2a$ 恒成立，所以 A 必不为空集，故 $A\subseteq B$ 即 $1\leqslant 2a,a^2+1\leqslant 2a+1$，解得 $a\in[\frac{1}{2},2]$

6. 已知函数 $f(x)=|x-2|+|x-a|$，若对于任意的 $x\in[1,2]$，$f(x)\geqslant|x-4|$ 恒成立，求实数 a 的范围.

   解析　当 $x\in[1,2]$，$f(x)\geqslant|x-4|$ 即 $2-x+|x-a|\geqslant 4-x$，整理得 $|x-a|\geqslant 2$，由绝对值的几何意义可知 $a\in(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$
   注: 有自变量的具体范围的时候，可以先看一下绝对值是否可以直接去掉.

7. 已知关于 x 的不等式 $x^2+9+|x^2-3x|\geqslant kx$ (*)

(1) 若 (*) 在区间 $[1,5]$ 上恒成立，求实数 k 的取值范围.

(2) 若 (*) 在区间 $[1,5]$ 上有解，求实数 k 的取值范围.

解析　当 $x\in[1,5]$ 时，原不等式可以转化为 $x+\frac{9}{x}+|x-3|\geqslant k$

(1) 不等式恒成立即 k 比左侧最小值小，而易知左侧最小值在 $x=3$ 时取，故 $k\leqslant 6$

(2) 不等式有解即 k 比左侧最大值小，设 $f(x)=x+\frac{9}{x}+|x-3|$ 易知 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上先减后增，最大值在端点处取. $f(1)=12,f(5)=\frac{44}{5}$ 故 $k\leqslant 12$

注: **区分有解问题和恒成立问题**.

8. 已知不等式 $x^2+(a-2)x+3a>0(*)$

(1) 若不等式 $(*)$ 对任意的 $x\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

(2) 若不等式 $(*)$ 对任意的 $a\in[-1,1]$ 恒成立，求实数 x 的取值范围

解析

(1) ① 通解法

$f(x)=x^2+(a-2)x+3a$ 的对称轴为 $x=1-\frac{a}{2}$

若 $1-\frac{a}{2}<-1$，即 $a>4$，此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递增，因此 $f(-1)>0$，即 $1+2-a+3a>0$，解得 $a>-\frac{3}{2}$，结合对称轴有 $a>4$

若 $1-\frac{a}{2}>1$, 即 $a<0$, 此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减, 因此 $f(1)>0$, 即 $1+a-2+3a>0$, 解得 $a>\frac{1}{4}$，此种情况无解

若 $1-\frac{a}{2}\in[-1,1]$, 即 $a\in[0,4]$, 此时 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内最小值在顶点处取, 即 $f(1-\frac{a}{2})>0$, 整理有 $a^2-16a+4<0$，解得 $a\in(8-2\sqrt{15},8+2\sqrt{15})$，结合对称轴有 $a\in(8-2\sqrt{15},4]$

综上，$a\in(8-2\sqrt{15},+\infty)$

② 参变分离

$(x+3)a-2x+x^2>0$ 在 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即 $a>\frac{2x-x^2}{x+3}$ 在 $x\in[-1,1]$ 恒成立.

换元 $t=x+3$, $t\in[2,4]$, 即 $a>\frac{-t^2+8t-15}{t}$ 在 $[2,4]$ 恒成立. 进一步变形有 $a>-(t+\frac{15}{t})+8$ 在 $[2,4]$ 恒成立. 根据对勾函数性质可知 $-(t+\frac{15}{t})+8\leqslant 8-2\sqrt{15}$ ($t=\sqrt{15}$, 即 $x=\sqrt{15}-3$ 时取等号），故 $a\in(8-2\sqrt{15},+\infty)$

(2) 将 a 做为主元，即 $(x+3)a-2x+x^2>0$ 在 $a\in[-1,1]$ 恒成立，设 $f(a)=(x+3)a-2x+x^2$，故只需 $f(1)>0,f(-1)>0$ 即可. 解得 $x\in(-\infty,\frac{3-\sqrt{21}}{2})\cup(\frac{3+\sqrt{21}}{2},+\infty)$

注: 恒成立问题，首先考虑主元应该是谁，然后考虑是否要参变分离.

9. 已知函数 $f(x)=|x+\frac{1}{x}-4|$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant m^2-m+2$

(1) 在区间 $[\frac{1}{6},3]$ 总有解，求实数 m 的取值范围.

(2) 在区间 $[\frac{1}{4},2]$ 总有解，求实数 m 的取值范围.

解析

(1) 首先要意识到不等式的右侧没有 x，因此可以将右侧当做一个整体，直接找 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{6},3]$ 上的最大值. 根据对勾函数的性质可知 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{6},1]$ 上先减后增，在 $[1,3]$ 单调递减. 故最大值会在 $x=\frac{1}{6}$ 或 $x=1$ 处取到.$f(\frac{1}{6})=\frac{13}{6},f(1)=2$，故 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{13}{6}$

问题转化为求解不等式 $\frac{13}{6}\geqslant m^2-m+2$，解集为 $[\frac{3-\sqrt{15}}{6},\frac{3+\sqrt{15}}{6}]$.

(2) 同理，需要找 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{4},2]$ 上的最大值. 根据对勾函数的性质可知 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{4},1]$ 上先减后增，在 $[1,2]$ 单调递减. 故最大值会在 $x=\frac{1}{4}$ 或 $x=1$ 处取到. $f(\frac{1}{4})=\dfrac{1}{4}, f(1)=2$，故 $f(x)$ 的最大值为 2

问题转化为求解不等式 $2\geqslant m^2-m+2$，解集为 $[0,1]$.

专题练习 2

填空题:

1. "$ab \leqslant 0$" 是 "$|a-b|=|a|+|b|$" 的__充要__条件.

   解析　考察三角不等式的**取等条件**.
   $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ 的取等条件是 $ab \geqslant 0$
   $|a-b| \leqslant |a|+|b|$ 的取等条件是 $ab \leqslant 0$

2. 若实数 a 使得不等式 $|x-2a|+|2x-a| \geqslant a^2$ 对任意的 x 恒成立，实数 a 的取值范围是__$[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$__

   解析

   (1) 方法 1
   首先将问题转化为左侧的最小值大于等于右侧，设函数 $f(x)=|x-2a|+|2x-a|$，根据斜底锅函数的图象可知，其最低点必然位于系数绝对值最大的一项取零的位置，即 $x=\frac{a}{2}$，最小值为 $|\frac{3a}{2}|$，由此不等式可以转化为 $|\frac{3a}{2}| \geqslant a^2$，即 $|\frac{3}{2}| \geqslant |a|$，故 $a \in [-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$

   (2) 方法 2
   通过设 $x=ka(k \in \boldsymbol{R})$ 来简化计算。
   根据 $x=ka(k \in \boldsymbol{R})$，不等式可以化为 $|ka-2a|+|2ka-a| \geqslant a^2$，
   消去 $|a|$，不等式变为 $|k-2|+|2k-1| \geqslant |a|$。
   通过对 k 进行分类讨论，可以得到 $|k-2|+|2k-1|$ 的取值范围为 $[\frac{3}{2},+\infty)$，故 $|a| \leqslant \frac{3}{2}$，即 $a \in [-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$

   注: 斜底锅函数 $f(x)=|ax+b|+|cx+d|$ $(|a| \neq |c|)$，若 $|a|>|c|$，则取最小值时 $x=-\frac{b}{a}$，若 $|a|<|c|$，则取最小值时 $x=-\frac{d}{c}$

3. 若 $a>b>0$, 则 $a^2+\frac{16}{b(a-b)}$ 的最小值是__16__.

   解析　先考虑消元，$b(a-b) \leqslant \left(\frac{b+(a-b)}{2}\right)^2$，取等条件为 $a=2b$.
   故 $a^2+\frac{16}{b(a-b)} \geqslant a^2+\frac{64}{a^2} \geqslant 16$. 取等条件为 $a=2\sqrt{2}, b=\sqrt{2}$

4. 已知 $a>0, b>0$，且 $ab=1$，则 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{8}{a+b}$ 的最小值为__4__.

   解析

   (1) 消元法
   用 a 表示 b 有 $b=\frac{1}{a}$。原式可以化为 $\frac{a}{2}+\frac{1}{2a}+\frac{8}{\frac{1}{a}+a}=\frac{1+a^2}{2a}+\frac{8a}{1+a^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{1+a^2}{2a}\cdot\frac{8a}{1+a^2}}=4$，当且仅当 $a+b=a+\frac{1}{a}=4$ 时取等号。

   (2) 乘常数
   原式 $=(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b})\times ab+\frac{8}{a+b}=\frac{a+b}{2}+\frac{8}{a+b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{8}{a+b}}=4$，当且仅当 $\frac{a+b}{2}=\frac{8}{a+b}$，即 $a+b=4$ 时取等号。

   注: 容易出现的错解：消元后分别利用均值不等式得到答案 5。**应用多次平均值不等式时应注意不等式方向是否相同，取等条件是否一致。**

5. (1) 已知正实数 a,b 满足 $a+b=4$，则 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}$ 的最小值是__$\frac{1}{2}$__.

   解析　$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3}=(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+3})\times(a+1+b+3)\times\frac{1}{8}=(2+\frac{b+3}{a+1}+\frac{a+1}{b+3})\times\frac{1}{8} \geqslant \frac{1}{2}$，当且仅当 $a=3, b=1$ 时取等号.

(2) 已知正实数 a,b 满足 $4a+3b=1$，则 $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+b}$ 的最小值是 $\underline{3+2\sqrt{2}}$.

解析　$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2a+b}+\frac{2}{2a+2b}=(\frac{1}{2a+b}+\frac{2}{2a+2b})\times(2a+b+2a+2b)=1+2+\frac{2a+2b}{a+b}+\frac{2(2a+b)}{2a+2b}\geqslant 3+2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2, b=3-2\sqrt{2}$ 时取等号.

注: 体会“基”的思想: 将分母看做一组“基”，线性组合表示限制条件，根据系数对目标式进行变形.

6. 已知 a,b,c,d 满足 $a^2-ab+4=0, c^2+d^2=1$, 则当 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 取最小值的时候, $abcd=\underline{1+\sqrt{2}}$

解析　$(a-c)^2+(b-d)^2$ 的几何意义为 $A(a,b), B(c,d)$ 两点间距离的平方, A 在对勾函数 $y=x+\dfrac{4}{x}$ 上，B 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上。$(a-c)^2+(b-d)^2$ 为 $|AB|^2$

固定点 A 时，OAB 构成三角形 $|AB|+1>|OB|$, 仅当 B 在 OA 上时此时 $|AB|=|OB|-1$ 最小。

$|OA|^2=a^2+b^2=a^2+(a+\dfrac{4}{a})^2=2a^2+8+\dfrac{16}{a^2}\geqslant 8+2\sqrt{32}=8+8\sqrt{2}$（$a=\sqrt[4]{8}$ 时取等）

此时 $ab=a^2+4=4+2\sqrt{2}$，此时根据相似三角形可知 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}=\dfrac{|OA|}{1}=\sqrt{8+8\sqrt{2}}$，故 $\dfrac{ab}{cd}=8+8\sqrt{2}$，因此 $cd=\dfrac{4+2\sqrt{2}}{8+8\sqrt{2}}$，故 $abcd=\dfrac{(4+2\sqrt{2})^2}{8+8\sqrt{2}}=\dfrac{24+16\sqrt{2}}{8+8\sqrt{2}}=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$

7. 已知 $f(x)=x+2, x\in[1,4]$, 则 $y=f(x^2)+f^2(x)$ 的最大值是 $\underline{\quad 22 \quad}$.

解析　先看定义域: $f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$，因此 $f(x^2)$ 中 $x^2\in[1,4]$, 故 $f(x^2)$ 的定义域为 $x\in[-2,2]$. 而 $f^2(x)$ 的定义域与 $f(x)$ 的定义域相同.

两者相加，定义域取交集，因此 $y=f(x^2)+f^2(x)$ 的定义域为 $[1,2]$

于是 $y=x^2+2+(x+2)^2=2x^2+4x+6=2(x+1)^2+4\in[12,22]$.

8. 已知 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $(1,3]$，则 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $\underline{\quad (2,6] \quad}$.

解析　因为 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $(1,3]$，所以 $y=f(x)$ 的定义域是 $(3,7]$，故 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $(2,6]$.

注: 此类题目的桥梁是 f **括号内的取值范围是一致的**.

9. 下列两组函数中表示同一函数的有 $\underline{\quad ① \quad}$.

(1) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|}$ 和 $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$ (2) $y=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2}$ 和 $y=\sqrt{x^2-3x+2}$

解析　本质上还是在考察定义域.

10. 函数 $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)\right)}$ 的定义域是 $\underline{\left(\frac{1}{3},\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right]}$.

解析　$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)\right)\geqslant 0 \iff 0<\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)\leqslant 1 \iff 1>\log_{\frac{1}{3}}x\geqslant\frac{1}{3} \iff (\frac{1}{3})^1<x\leqslant(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$.

11. 若函数 $f(x)=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$, 值域为 $[-\frac{25}{4},-4]$, 则实数 m 的取值范围是 $\underline{\quad [\frac{3}{2},3] \quad}$.

解析　$f(x)=x^2-3x-4=(x-\frac{3}{2})^2-\frac{25}{4}$，因此 $x=\frac{3}{2}$ 是函数值 $-\frac{25}{4}$ 对应的唯一自变量，必然要在定义域内. 又因为 $f(0)=f(3)=-4$, 是 $f(x)=-4$ 唯二的解. 于是由二次函数的图像易得 $m\in[\frac{3}{2},3]$.

12. 若一系列函数的解析式相同, 值域相同, 但其定义域不同, 则称这些函数为“同族函数”, 那么函数解析式为 $f(x)=x^2$, 值域为 $\{1,4\}$ 的“同族函数”共有 $\underline{\quad 9 \quad}$ 个.

解析　$1,-1,\pm1\to 1,\ 2,-2,\pm2\to 4$, 于是从值域的角度, x 的组合共有 $3\times3=9$ 种选择.

注: 关键是要清楚一个 y 对应几个 x.

13. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(\frac{1}{1+x})$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 都成立，其值域是 A_f，已知对任何满足上述条件的 $f(x)$ 都有 $\{y|y=f(x),0\leqslant x\leqslant a\}=A_f$，则 a 的取值范围为 $\underline{[\frac{\sqrt{5}-1}{2},+\infty)}$

解析　易知 $y=x$ 与 $y=\frac{1}{1+x}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 只有一个交点 $(\frac{\sqrt5-1}{2},\frac{\sqrt5-1}{2})$
设 $g(x)=x$，在 $(0,\frac{\sqrt5-1}{2})$ 的值域为 R_{g1}，在 $(\frac{\sqrt5-1}{2},+\infty)$ 内值域为 R_{g2}，设 $h(x)=x$，在 $(0,\frac{\sqrt5-1}{2})$ 的值域为 R_{h1}，在 $(\frac{\sqrt5-1}{2},+\infty)$ 内值域为 R_{h2}，易知 $R_{g1}=R_{h2},R_{g2}=R_{h1}$，
因此必有 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt5-1}{2})$ 的值域与在 $(\frac{\sqrt5-1}{2},+\infty)$ 内值域相同. 而 $f(0)=f(1)$. 所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\sqrt5-1}{2})$ 的值域 A_{f1} 与在 $(\frac{\sqrt5-1}{2},+\infty)$ 内值域 A_{f2} 相同. 但是 $f(\frac{\sqrt5-1}{2})$ 可以和其他任意的函数值不相等。因此 $A_f=A_{f1}\cup\{f(\frac{\sqrt5-1}{2})\}$
故当 $a\geqslant\frac{\sqrt5-1}{2}$ 时满足 $[0,a]$ 上 $f(x)$ 的值域也是 A_f

选择题:

1. 下列各式中, 最小值为 4 的是 …………………………………………………… (B)

   (A) $x+2\sqrt{x}+5$　　(B) $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$　　(C) $x^2+3+\frac{4}{x^2+3}$　　(D) $x+\frac{4}{x}$

   解析　注意取等条件是否可以取到!

2. 已知不等式 $(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9$ 对任意正实数 x,y 恒成立, 则正实数 a 的最小值是 …… (B)

   (A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

   解析　首先求出 $(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 最小值 (含 a)，然后令其大于等于 9，得到 a 的取值范围，从中选取最小值
   $(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{y}\right)=a+1+\frac{ay}{x}+\frac{x}{y}\geqslant a+1+2\sqrt{a}$ ($x=\sqrt{a}y$ 时取等)
   设 $f(a)=a+1+2\sqrt{a}$，显然 $f(a)$ 单调递增，且有 $f(4)=9$. 故 $a\geqslant4$ 时原始 $\geqslant9$，因此 a 最小值为 4.

3. 若实数 a,b 满足 $a>b>0$，下列不等式中恒成立的是 ………………………… (A)

   (A) $a+b>2\sqrt{ab}$　　(B) $a+b<2\sqrt{ab}$　　(C) $\dfrac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$　　(D) $\dfrac{1}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

4. 下列不等式恒成立的是 …………………………………………………………… (B)

   (A) $a^2+b^2\leqslant 2ab$　　(B) $a^2+b^2\geqslant-2ab$　　(C) $a+b\geqslant-2\sqrt{|ab|}$　　(D) $a+b\leqslant 2\sqrt{|ab|}$

5. 已知两两不同的 x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3 满足 $x_1+y_1=x_2+y_2=x_3+y_3$, 且 $x_1<y_1$, $x_2<y_2$, $x_3<y_3$, $x_1y_1+x_3y_3=2x_2y_2>0$，则下列选项中恒成立的是 ……………………… (A)

   (A) $2x_2<x_1+x_3$　　(B) $2x_2>x_1+x_3$　　(C) $x_2^2<x_1x_3$　　(D) $x_2^2>x_1x_3$

   解析　设 $x_1+y_1=2m$，故可设 $\begin{cases} x_1=m-a, & y_1=m+a, & a>0 \\ x_2=m-b, & y_2=m+b, & b>0 \\ x_3=m-c, & y_3=m+c, & c>0 \end{cases}$
   由此, 题目中的条件可以转化为 $m^2-a^2+m^2-c^2=2(m^2-b^2)$, 即 $a^2+c^2=2b^2$, 且有 $m^2-b^2>0$。下面推导 $a+c<2b$

   (1) 方法 1：利用平方差公式
   原式移项后可以进一步可以转化为 $(a+b)(a-b)+(c+b)(c-b)=0$。
   $(a+b)(a-b)+(c+b)(c-b)=0$ 说明 $a<b<c$ 或者 $c<b<a$，不妨设 $a<b<c$ (另一种情况对称)，此时必有 $(a+b)<(c+b)$，因此有 $|a-b|>|c-b|$，即 $b-a>c-b$，故 $a+c<2b$

   (2) 方法 2：利用平均值不等式
   设 $d=\frac{a+c}{2}$，根据 $a^2+c^2=2b^2$，可以转化为 $(2d)^2-2ac=2b^2$
   根据平均值不等式有 $(2d)^2-2\times(\frac{a+c}{2})^2<2b^2$，即 $(2d)^2-2d^2<2b^2$。
   故 $d<b$，即 $a+c<2b$

解答题：

1. 已知函数 $f(x)=|x+m|+|x-2m|$，若 $f(x)\geqslant 3$ 恒成立，求 m 的取值范围.

   解析　问题可以转化为 $f(x)$ 的最小值大于等于 3 恒成立，而 $f(x)$ 是一个平底锅函数，最小值可以通过三角不等式求得，即 $f(x)=|x+m|+|x-2m|\geqslant|3m|$，因此有 $|3m|\geqslant 3$，得到 $m\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

   注: 注意**问题转化**的逻辑；注意两个绝对值的式子相加减，想一下三角不等式

2. 已知关于 x 的不等式 $|x-1|-|x-2|<a(*)$

   (1) 若 (*) 解集为 $\mathbb{R}$, 求实数 a 的取值范围.

   (2) 若 (*) 有实数解, 求实数 a 的取值范围.

   (3) 若 (*) 的解集为 $\varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

   解析

   (1) $(1,+\infty)$

   (2) $(-1,+\infty)$

   (3) $(-\infty,-1)$

3. 已知 a,b 为常数，函数 $f(x)=x^2-bx+a$，当 $a=2b-1$ 时，若方程 $f(x)=0$ 在 $(-2,1)$ 上有解，求实数 b 的取值范围.

   解析　$f(x)=x^2-bx+2b-1$.

   ① 分对称轴位置讨论
   $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{b}{2}$，$f(-2)=4b+3$，$f(1)=b$，$\Delta=b^2-4(2b-1)=b^2-8b+4$

   1. 若 $\frac{b}{2}\leqslant-2$，则 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 单调增，故 "方程 $f(x)=0$ 在 $(-2,1)$ 上有解" 即 $f(-2)<0,f(1)>0$，此种情况解集为 $(-\frac{3}{4},0]$.
   2. 若 $\frac{b}{2}\geqslant 1$，则 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 单调减，故 "方程 $f(x)=0$ 在 $(-2,1)$ 上有解" 即 $f(-2)>0,f(1)<0$，此种情况解集为空集.
   3. 若 $\frac{b}{2}\in(-2,1)$，则 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 先减后增，故 "方程 $f(x)=0$ 在 $(-2,1)$ 上有解" 即 $\Delta\geqslant 0$ 且有 $f(-2)>0$ 或 $f(1)>0$，此种情况解集为 $(0,4-2\sqrt{3}]$

   综上，$b\in(-\frac{3}{4},4-2\sqrt{3}]$

   ② 参变分离
   "方程 $f(x)=0$ 在 $(-2,1)$ 上有解" 即 "$b=\frac{1-x^2}{2-x}$ 在 $(-2,1)$ 上有解"，即 "$b=\frac{3}{x-2}+(x-2)+4$ 在 $(-2,1)$ 上有解"
   因此 b 的取值范围即 $y=\frac{3}{x-2}+(x-2)+4$ 在 $(-2,1)$ 上的值域.
   $y=\frac{3}{x-2}+(x-2)+4$ 在 $(-2,\sqrt{3}-2)$ 单调递增，在 $[2-\sqrt{3},1)$ 单调递减，值域为 $(-\frac{3}{4},4-2\sqrt{3}]$，故 $b\in(-\frac{3}{4},4-2\sqrt{3}]$

   注: 有解问题可以采用分对称轴位置讨论或参变分离解决，**小题推荐参变分离，大题可以分类讨论写步骤，参变分离检验**。分对称轴位置讨论时，对于对称轴在目标区间内的情况要注意其充要条件。参变分离会把方程有解问题转化成函数求值域问题。

4. 已知函数 $f(x)=x^2+2mx+2m+3$

(1) 若 $f(x)$ 至少有一个零点在区间 $(0,2)$ 内，求实数 m 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 恰有一个零点在区间 $(0,2)$ 内，求实数 m 的取值范围.

(3) 若 $f(x)$ 恰有一个零点在区间 $(0,+\infty)$ 内，求实数 m 的取值范围.

解析

(1) ① 分对称轴位置讨论

$f(x)$ 对称轴为 $x=-m$，$f(0)=2m+3$，$f(2)=7+6m$，$\Delta=4m^2-8m-12$

1. 若 $-m\leqslant 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调增, 故“$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有零点”即 $f(0)<0, f(2)>0$, 此种情况无解.
2. $-m\geqslant 2$, 则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调减, 故“$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有零点”即 $f(0)>0, f(2)<0$, 此种情况无解.
3. $-m\in(0,2)$，则 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 先减后增，“$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上有零点”即 $\Delta\geqslant 0$，且有 $f(0)>0$ 或 $f(2)>0$，此种情况解得 $m\in(-\frac{3}{2},-1]$

综上，$m\in(-\frac{3}{2},-1]$

② 参变分离 $f(x)$ 至少有一个零点在区间 $(0,2)$ 内，即 $f(x)=0$ 在 $(0,2)$ 内有根，即方程 $m=\frac{-3-x^2}{2x+2}$ 在 $(0,2)$ 内有根，即方程 $m=\frac{1}{2}\cdot\frac{-3-(t-1)^2}{t}$ 在 $t\in(1,3)$ 内有根，即方程 $m=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $t\in(1,3)$ 内有根.

因此 m 的取值范围即 $y=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $t\in(1,3)$ 内的值域.

$y=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $(1,2)$ 单调增，在 $(2,3)$ 单调减，因此值域为 $(-\frac{3}{2},-1]$，故 $m\in(-\frac{3}{2},-1]$

(2) ① 通解法

$f(x)$ 对称轴为 $x=-m$，$f(0)=2m+3$，$f(2)=7+6m$，$\Delta=4m^2-8m-12$

1. 符合函数零点存在定理，此时有 $f(0)\cdot f(2)<0$，即 $m\in(-\frac{3}{2},-\frac{7}{6})$
2. 二次函数与 x 轴相切在区间内，此时有 $\Delta=0$，且 $-m\in(0,2)$ 即 $m=-1$
3. 左端点函数值为 0，此时有 $m=-\frac{3}{2}$，此时 $f(2)<0$，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 内先减后增，故不存在零点.
4. 右端点函数值为 0，此时有 $m=-\frac{7}{6}$，此时 $f(0)>0$，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 内先减后增，存在唯一零点.

综上，$m\in(-\frac{3}{2},-\frac{7}{6}]\cup\{-1\}$

② 参变分离 $f(x)$ 恰有一个零点在区间 $(0,2)$ 内，即方程 $m=\frac{-3-x^2}{2x+2}$ 在 $(0,2)$ 内有一根，即方程 $m=\frac{1}{2}\cdot\frac{-3-(t-1)^2}{t}$ 在 $t\in(1,3)$ 内有一根，即方程 $m=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $t\in(1,3)$ 内有一根，即函数 $y=m$ 与函数 $y=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $t\in(1,3)$ 内只有一个交点.

$y=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $(1,2)$ 单调增，在 $(2,3)$ 单调减，因此当 $m\in(-\frac{3}{2},-\frac{7}{6}]\cup\{-1\}$ 时满足要求.

注：二次函数在区间内恰有一个零点的通解法对应着**四种情况**：1. 符合函数零点存在定理 2. $\Delta=0$ 且对称轴在区间内 3. 左端点为函数的一个零点（应根据区间开闭情况单独检验）4. 右端点为函数的一个零点（应根据区间开闭情况单独检验）

参变分离会将问题转化为动直线和定曲线只有唯一交点，要**注意相切的情况和端点情况**。

这种情况参变分离和通解法都没有明显优势.

(3) ① 通解法

$f(x)$ 对称轴为 $x=-m$，$f(0)=2m+3$，$\Delta=4m^2-8m-12$

1. “符合函数零点存在定理”，此时有 $f(0)<0$，即 $m\in(-\infty,-\frac{3}{2})$
2. 二次函数与 x 轴相切在区间内，此时有 $\Delta=0$，且 $-m\in(0,+\infty)$ 即 $m=-1$
3. 左端点函数值为 0，此时有 $m=-\frac{3}{2}$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内先减后增，存在唯一零点.

综上，$m\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup\{-1\}$

② 参变分离 $f(x)$ 恰有一个零点在区间 $(0,+\infty)$ 内，即方程 $m=\frac{-3-x^2}{2x+2}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有一根，即方程 $m=\frac{1}{2}\cdot\frac{-3-(t-1)^2}{t}$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 内有一根，即方程 $m=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 内有一根，即函数 $y=m$ 与函数 $y=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 内只有一个交点.

$y=\frac{1}{2}\cdot[-(t+\frac{4}{t})+2]$ 在 $(1,2)$ 单调增，在 $(2,+\infty)$ 单调减，因此当 $m\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup\{-1\}$ 时满足要求.

注: 区间一侧为无穷的情况对于通解法可以根据开口方向将问题简化.

5. 已知 $g(x)=-x^2+2x$，若关于 x 的方程 $g(x)=-mx-m$ 在 $(0,2)$ 上恰有两个不等实根，求 m 的取值范围.

解析

① 通解法

“方程 $g(x)=-mx-m$ 在 $(0,2)$ 上恰有两个不等实根”即“方程 $-x^2+(2+m)x+m=0$ 在 $(0,2)$ 上恰有两个不等实根”, 设 $h(x)=-x^2+(2+m)x+m$, 对称轴为 $x=\frac{2+m}{2}$, $\Delta=(2+m)^2+4m$, $h(0)=m$，$h(2)=3m$

$h(x)=0$ 在 $(0,2)$ 上恰有两个不等实根的充要条件是 $\begin{cases}\Delta>0\\ \frac{2+m}{2}\in(0,2)\\ h(0)<0\\ h(2)<0\end{cases}$，解得 $m\in(2\sqrt{3}-4,0)$

② 参变分离

“方程 $g(x)=-mx-m$ 在 $(0,2)$ 上恰有两个不等实根” 即 “方程 $m=\frac{x^2-2x}{x+1}$ 在 $(0,2)$ 上恰有两个不等实根”，即 “函数 $y=m$ 与函数 $y=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(1,3)$ 上恰有两个交点”

$y=t+\frac{3}{t}-4$ 在 $(1,\sqrt{3})$ 单调减，在 $[\sqrt{3},3)$ 上单调增，因此当 $m\in(2\sqrt{3}-4,0)$ 时满足要求.

6. 已知一元二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0,c>0)$ 的图像与 x 轴有两个不同的公共点，其中一个公共点的坐标为 $(c,0)$，且当 $0<x<c$ 时，恒有 $f(x)>0$。

(1) 当 $a=1,c=\dfrac{1}{2}$ 时，求出不等式 $f(x)<0$ 的解

(2) 求出不等式 $f(x)<0$ 的解（用 a,c 表示）

(3) 若以二次函数的图象与坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为 8，求 a 的取值范围

(4) 若不等式 $m^2-2km+1+b+ac\geqslant 0$ 对所有 $k\in[-1,1]$ 恒成立，求 m 的取值范围。

解析

(1) 当 $a=1,c=\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=x^2+bx+\dfrac{1}{2}$，因为过 $(\dfrac{1}{2},0)$，所以 $b=-\dfrac{3}{2}$，因此有 $f(1)=0$，因此 $f(x)<0$ 的解集为 $(\dfrac{1}{2},1)$

(2) 根据韦达定理可知 $f(\dfrac{1}{a})=f(c)=0$，因为当 $0<x<c$ 时，恒有 $f(x)>0$，所以必有 $\dfrac{1}{a}>c$，因此 $f(x)<0$ 的解集为 $(c,\dfrac{1}{a})$

(3) 根据题意可知该三角形面积为 $S=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}-c)\times c=8$, 故 $\dfrac{1}{a}=c+\dfrac{16}{c}\in[8,+\infty)$, 因此 $a\in(0,\dfrac{1}{8}]$

(4) 根据 $f(c)=0$ 可知 $1+b+ac=0$，因此不等式变为 $m^2-2km\geqslant 0$，下面根据 m 的取值范围进行分类讨论

i. $m>0$

此时不等式变为 $\dfrac{m}{2}\geqslant k$，故 $m\geqslant 2$

ii. $m=0$

此时不等式恒成立

iii. $m<0$

此时不等式变为 $\dfrac{m}{2}\leqslant k$，故 $m\leqslant -2$

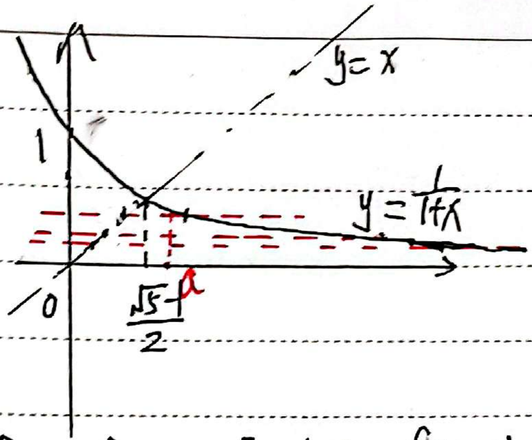
综上：$m\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)\cup\{0\}$

7. 已知正实数 x,y 满足 $xy^2(x+y)=4$，求 $2x+y$ 的最小值.

解析　观察可知 $xy^2(x+y)=4$ 不能够将 x,y 分离，且 $2x+y$ 为一次相加的形式。此时应考虑设 $2x+y=k$，代入 $xy^2(x+y)=4$ 中求 k 的最小值即可。因为 $xy^2(x+y)=4$ 中 x 为二次，y 为三次，因此考虑代换 x，即 $x=\dfrac{k-y}{2}$

$\dfrac{k-y}{2}y^2(\dfrac{k+y}{2})=4$，即 $(k-y)y^2(k+y)=16$，进一步整理得 $k^2y^2-y^4=16$，参变分离得到 $k^2=\dfrac{16}{y^2}+y^2$，根据对勾函数性质知 k^2 最小值为 8，故 k 最小值为 $2\sqrt{2}$

12.



$f(0)=f(1)$、$f(\frac{1}{101})=f(100)$、$f(\frac{1}{11})=f(10)$、$f(\frac{1}{2})=f(\frac{2}{3})$、……、$f(\frac{\sqrt5-1}{2})=f(\frac{\sqrt5-1}{2})$、……

当且仅当 $a\geq\frac{\sqrt5-1}{2}$ 时，$\{y|y=f(x), 0\leq x\leq a\}$ 可取遍 A_f 中的所有值。

7. 解答题:

法二，构造 $(2x+y)^2=4x^2+4xy+y^2$.

由条件 $\Rightarrow$ $16=4xy^2(x+y)=y^2(4x^2+4xy)$

$\leq\left(\frac{y^2+4x^2+4xy}{2}\right)^2 \Rightarrow 4x^2+4xy+y^2\geq 8$

$\therefore 2x+y\geq 2\sqrt2$，

等号成立有 $y^2=4xy+4x^2$，$(2x+y+\sqrt2 y)(2x+y-\sqrt2 y)=0$. $x=\frac{\sqrt2-1}{2}y$ 且 $y^2=4$.

即 $x=\sqrt2-1$, $y=2$.