

## 专题练习 1

填空题:

1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M = \{1, 2\}, N = \{3, 4\}$ , 则  $\overline{M \cup N} = \underline{\{5\}}$

**解析** 根据并集的运算可知  $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$ , 故其补集  $\overline{M \cup N} = \{5\}$

注: 看清楚运算符号!

2. 设集合  $A = \{1, 4, x\}, B = \{1, x^2\}$ , 且  $A \cap B = B$ , 则  $x = \underline{0 \text{ 或 } -2 \text{ 或 } 2}$

**解析** 首先对条件进行转换,  $A \cap B = B$  即  $B \subseteq A$ , 根据集合中元素的无序性可知需要进行分类讨论。

(1)  $x^2 = x$

此时对应于  $x = 0$  或  $1$ , 但是经过检验发现  $x = 1$  使得集合中元素违背互异性。

(2)  $x^2 = 4$

此时对应于  $x = 2$  或  $-2$ , 均不违背互异性。

综上,  $x = 0$  或  $-2$  或  $2$

3. 设集合  $A = \{1, 2, m\}$ , 其中  $m$  为实数, 令  $B = \{a^2 | a \in A\}, C = A \cup B$ . 若  $C$  中所有元素之和为 6, 则  $C$  中所有元素之积为  $\underline{-8}$

**解析**  $B = \{1, 4, m^2\}$ , 则在 **不违背互异性的前提下** 有  $C = \{1, 2, 4, m, m^2\}$ . 根据  $C$  中元素和为 6, 而  $1 + 2 + 4 > 6$ , 又因为  $m^2 + m > -1$  恒成立, 故应有  $m < 0$  且  $m^2 \in \{1, 2, 4\}$ . 故可知  $m = -1$ ,  $C = \{1, 2, 4, -1\}$ , 因此  $C$  中所有元素之积为  $-8$ .

4. 已知集合  $A = \{a | x = \frac{383a^2 + a}{2a + 1}, x \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{Z}\}$ ,  $A$  中最大的元素为  $\underline{190}$

**解析** 由于  $\frac{383a^2 + a}{2a + 1}$  为二次比一次的形式, 因此应考虑利用多项式除法来分离。为了方便运算, 应考虑进行换元。

令  $t = 2a + 1$ , 因此  $t$  应为奇数,  $a = \frac{t-1}{2}$ . 故  $\frac{383a^2 + a}{2a + 1} = \frac{383(\frac{t-1}{2})^2 + (\frac{t-1}{2})}{t} = \frac{1}{4} \left[ \frac{383(t-1)^2 + 2(t-1)}{t} \right] = \frac{1}{4} \left[ \frac{383t^2 - 764t + 381}{t} \right] = \frac{1}{4} \left[ 383t + \frac{381}{t} \right] - 191$   
易知可以先检验  $t = 381$ , 此时原式为整数, 而当  $t > 381$  易知原式不是整数, 因此  $t$  最大值为 381, 此时对应于  $a = 190$

5. 若集合  $A = \{x | (a-1)x^2 + 3x - 2 = 0\}$  仅有一个真子集, 实数  $a = \underline{1 \text{ 或 } -\frac{1}{8}}$

**解析** 由于只有一个真子集, 故集合中只有一个元素。因为二次项系数有参数  $a$ , 所以需要分类讨论

(1)  $a = 1$ , 此时方程退化回一次方程, 只有一个实根, 满足题意

(2)  $a \neq 1$ , 此时方程为二次方程, 若只有一个实根, 则判别式为 0, 即  $9 + 8(a-1) = 0$ , 得  $a = -\frac{1}{8}$

6. 已知集合  $A = \{y | x^2 + mx - y + 2 = 0, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y | x + y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ , 若  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $m$  的取值范围是  $\underline{(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)}$ .

**解析** 首先可以判断出来  $B = [-2, -1]$ , 而  $A$  是函数  $y = x^2 + mx + 2$  的函数值的取值范围。由于函数  $y = x^2 + mx + 2$  的开口向上, 欲使  $A \cap B \neq \emptyset$ , 则应有其函数值最小值小于等于  $-1$ . 即  $\frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 2 \leq -1$ , 解得  $m \in (-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$

7. 已知集合  $A = \{x | \frac{x-2}{x+1} < 0\}$ ,  $x \in A$  的一个必要条件是  $x \geq a$ , 则实数  $a$  的取值范围是  $a \leq -1$

解析  $A = (-1, 2)$ , 故  $a \leq -1$

注: 小范围可以推出大范围

8. 已知  $x \in \mathbf{R}$ , “ $(x-2)(x-3) \leq 0$ ” 是 “ $|x-2| + |x-3| = 1$  成立” 的 充要 条件.

解析  $(x-2)(x-3) \leq 0$  解集为  $[2, 3]$

$|x-2| + |x-3| = 1$  解集为  $[2, 3]$  (平底锅函数, 三角不等式)

9. “ $x+y \neq 3$ ” 是 “ $x \neq 1$  或  $y \neq 2$ ” 成立的 充分非必要 条件.

解析 “ $x+y \neq 3$ ” 对应了平面上除了直线  $x+y=3$  的区域

“ $x \neq 1$  或  $y \neq 2$ ” 对应了平面上除了点  $(1, 2)$  的区域

10. “ $x+y \neq 5$ ” 是 “ $x \neq 2$  且  $y \neq 3$ ” 成立的 既非充分也非必要 条件.

解析 “ $x+y \neq 5$ ” 对应了平面上除了直线  $x+y=5$  的区域

“ $x \neq 2$  且  $y \neq 3$ ” 对应了平面上除了直线  $x=2$  和直线  $y=3$  的区域

11. “若  $a > 1$  且  $b > 2$ , 则  $a+b > 3$ ” 的否命题、逆命题、逆否命题中真命题的个数是 1

解析 原命题为真, 故逆否命题为真.

逆命题: “若  $a+b > 3$ , 则  $a > 1$  且  $b > 2$ ” 为假, 故否命题也为假.

12. 不等式  $\frac{x+5}{x^2+2x+5} \geq 1$  的解集为  $[-1, 0]$

解析 因为  $x^2+2x+5 > 0$  恒成立, 因此可以转化为  $x+5 \geq x^2+2x+5$ , 解集为  $[-1, 0]$

注: 先判断分母是否恒正或者恒负, 再考虑移项通分.

13. 不等式  $\frac{x^2(x+2)(x^2-x+1)}{x^2-5x+4} > 0$  的解集为  $(-2, 0) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$

解析 注: 穿针引线法求解, 奇穿偶回, 偶次方根绝对不能丢弃, 且易出错.

14. 定义区间  $(c, d), [c, d), (c, d], [c, d]$  的长度均为  $d-c (d > c)$ . 已知实数  $a > b$ , 则满足  $\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} \geq 3$  的  $x$  构成的区间长度之和为 1

解析 首先通分有  $\frac{3x-2a-b}{(x-a)(x-b)} \geq 3$ , 易知移项通分运算量很大. 因此考虑分类讨论乘分母

(1)  $x > a$  或  $x < b$

此时不等式可以转化为  $3x-2a-b \geq 3(x-b)(x-a)$

(2)  $a > x > b$

此时不等式可以转化为  $3x-2a-b \leq 3(x-b)(x-a)$

绘制  $y = 3(x-b)(x-a)$  和  $y = 3x-2a-b$  的草图可知不等式的解集为  $(b, x_1) \cup (a, x_2)$ , 其中  $x_1, x_2$  是方程  $3(x-b)(x-a) = 3x-2a-b$  的两根. 根据韦达定理可知解集的区间长度和为  $x_1+x_2-a-b=1$

注: 本题也可以通过绘制  $y = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b}$  的草图, 分析其单调区间, 值域来解决. 本质是一样的.

15. 若  $a < b$ , 且  $a < \frac{1}{x^2-3x+2} < b$  的解集为  $\emptyset$ , 则  $b-a$  的最大值为 4

解析  $\frac{1}{x^2-3x+2} \in (-\infty, -4] \cup (0, +\infty)$ , 故  $b-a$  取最大值的时候为  $b=0, a=-4$

16.  $|x+1| < 3-2x$  的解集是  $(-\infty, \frac{2}{3})$

解析 解集为  $(-\infty, \frac{2}{3})$

注: 1.  $|f(x)| > g(x)$  的充要条件是  $f(x) > g(x)$  或  $f(x) < -g(x)$  2.  $|f(x)| < g(x)$  的充要条件是

$$-g(x) < f(x) < g(x)$$

注: 此处绝对不能平方处理, 否则等价于  $|x+1| < |3-2x|$  会得到  $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (4, +\infty)$ ; 当不等式两侧均含有绝对值时才适合平方去绝对值.

17. 若关于  $x$  的不等式  $k|x| > |x-2|$  恰有 4 个整数解, 则实数  $k$  的取值范围是  $(\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$

解析 易知  $x=0$  不是不等式的解, 故  $k|x| > |x-2|$  进行参变分离, 同解变形  $k > |\frac{x-2}{x}|$ , 即  $k > |1 - \frac{2}{x}|$

由函数  $f(x) = |1 - \frac{2}{x}|$  的图像可知整根的集合为  $\{2, 3, 4, 5\}$ , 故  $f(5) < k \leq f(6)$ , 即  $k \in (\frac{3}{5}, \frac{2}{3}]$  注: 解决整根问题的第一步往往是确认整根的集合

18. 已知关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} \frac{x-a}{x-1+a} < 0 \\ x+3a > 1 \end{cases}$  的整数解恰有两个, 则实数  $a$  的取值范围是  $(1, 2]$

解析 首先可以确定第一个不等式的解集为  $(a, 1-a)$  或  $(1-a, a)$ , 因为  $a$  和  $1-a$  关于  $\frac{1}{2}$  对称, 因此  $\frac{1}{2}$  必然在该不等式的解集中. 而第二个不等式的解集为  $(1-3a, +\infty)$

① 若  $a \in [0, 1]$ , 则  $(a, 1-a)$  或  $(1-a, a)$  没有整数解, 故整个不等式组的解集中也没有整数解.

② 若  $a < 0$ , 则  $a < 0 < 1 < 1-a < 1-3a$ , 则整个不等式组解集为空集.

③ 若  $a > 1$ , 则  $1-3a < 1-a < 0 < 1 < a$  整个不等式组的解集为  $(1-a, a)$ , 此时解集中必有两个整数解 0, 1, 故当  $a \in (1, 2]$  时, 满足要求.

综上,  $a \in (1, 2]$

注: 本题画数轴可以更方便分析, 本题判断出  $a$  和  $1-a$  关于  $\frac{1}{2}$  对称后可以猜测到两个整根是 0 和 1.

19. 已知不等式组  $\begin{cases} x^2 - x + a - a^2 < 0 \\ x + 2a > 1 \end{cases}$  的整数解恰好有两个,  $a$  的取值范围是  $(1, 2]$

解析 设函数  $f(x) = x^2 - x$ , 则第一个不等式即  $f(x) < f(a)$ , 根据函数的性质可知不等式即  $|x - \frac{1}{2}| < |a - \frac{1}{2}|$ , 故  $\frac{1}{2} - |a - \frac{1}{2}| < x < \frac{1}{2} + |a - \frac{1}{2}|$ , 故第一个不等式解集为  $(1-a, a)$  或  $(a, 1-a)$ , 第二个不等式解集为  $(1-2a, +\infty)$

①  $a \in [0, 1]$ , 此时第一个不等式中不含有两个整数解, 不符合要求.

②  $a < 0$ , 第一个不等式解集为  $(a, 1-a)$ , 而  $1-a < 1-2a$ , 故不等式组解集为空集, 不符合要求.

③  $a > 1$ , 第一个不等式解集为  $(1-a, a)$ , 故不等式解集为  $(1-a, a)$ , 当  $a \in (1, 2]$  满足要求.

20. 若不等式  $x^2 + px > 4x + p - 3$ , 当  $0 \leq p \leq 4$  时恒成立, 则  $x$  的取值范围是  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

解析

(1) 方法 1: 看做是关于  $p$  的一元一次不等式求解

不等式移项得到  $x^2 - 4x + 3 > (1-x)p$ .

因式分解有  $(x-1)(x-3) > -p(x-1)$

下面根据  $x$  的取值范围进行分类讨论:

①  $x > 1$ , 不等式转化为  $x-3 > -p$ , 故  $x \in (3, +\infty)$

②  $x = 1$ , 这种情况不成立

③  $x < 1$ , 不等式转化为  $x-3 < -p$ , 故  $x \in (-\infty, -1)$

综上, 当  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  时不等式恒成立.

(2) 方法 2: 看做是关于  $x$  的一元二次不等式求解

不等式移项得到  $x^2 + (p-4)x + (3-p) > 0$ . 即  $(x - (3-p))(x-1) > 0$

因此根据两解可以写出不等式的解集为 
$$\begin{cases} (-\infty, 3-p) \cup (1, +\infty) & 4 \geq p \geq 2 \\ (-\infty, 1) \cup (3-p, +\infty) & 0 \leq p < 2 \end{cases}$$

要使得不等式在  $p$  取到  $[0, 4]$  内任意值时成立, 则应取所有  $p$  所对应的解集的交集, 故当  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  时不等式恒成立。

注: 通过对比可知以  $p$  为主元更容易理解和推广。

解答题:

1. 已知集合  $A = \{(x, y) | x^2 + mx - y + 2 = 0, x \in R\}$ ,  $B = \{(x, y) | x + y + 1 = 0, 0 \leq x \leq 1\}$ , 若  $A \cap B \neq \emptyset$ , 求  $m$  的取值范围.

**解析** 根据题意, 两集合交集非空代表两段函数的图像有交点, 即方程  $x^2 + (m+1)x + 3 = 0$  在  $[0, 1]$  内有根, 因为  $x = 0$  并非原方程的根, 故可等价于方程  $-(m+1) = x + \frac{3}{x}$  在  $(0, 1]$  内有根  $y = x + \frac{3}{x}$  在  $(0, 1]$  内单调减, 故  $-(m+1) \in [4, +\infty)$ , 故  $m \in (-\infty, -5]$

2. 集合  $A = \{x | x^2 - 8x + 12 = 0\}$ ,  $B = \{x | ax + 1 = 0\}$ , 且  $A \cup B = A$ , 求  $a$  的取值范围.

**解析**  $A \cup B = A$  即  $B \subseteq A$

①  $a = 0$ , 此时  $B = \emptyset$ , 满足要求.

②  $a \neq 0$ , 此时  $B = \{-\frac{1}{a}\}$ , 因为  $A = \{2, 6\}$ , 若  $B \subseteq A$ , 则  $-\frac{1}{a} \in A$ , 因此  $a = -\frac{1}{2}$  或  $-\frac{1}{6}$

综上  $a \in \{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}\}$

3. 对任意实数  $x$ , 不等式  $2kx^2 + kx - 3 < 0$  恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

**解析** 当  $k = 0$  时, 不等式成立.

当  $k \neq 0$ , 从二次函数的角度看一元二次不等式, 要使得不等式恒成立, 则应有函数开口向下, 即  $k < 0$ , 并且有  $\Delta = k^2 + 24k < 0$ , 因此  $k \in (-24, 0)$ .

综上,  $k \in (-24, 0]$

4. 若关于  $x$  的不等式  $ax + 6 + |x^2 - ax - 6| \geq 4$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.

**解析** 原不等式转化为  $|x^2 - ax - 6| \geq -2 - ax$  恒成立, 即  $x^2 - ax - 6 \geq -2 - ax$  与  $x^2 - ax - 6 \leq 2 + ax$  解集的并集为  $R$

前者解集为  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ , 后者解集为  $[a - \sqrt{a^2 + 8}, a + \sqrt{a^2 + 8}]$ , 故  $(-2, 2) \subseteq [a - \sqrt{a^2 + 8}, a + \sqrt{a^2 + 8}]$ , 因此  $a \in [-1, 1]$

5. 关于实数  $x$  的不等式  $|x - \frac{(a+1)^2}{2}| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$  与  $|x - a - 1| \leq a$  的解集依次是  $A, B$ , 求使得  $A \subseteq B$  的  $a$  的取值范围.

**解析**  $|x - \frac{(a+1)^2}{2}| \leq \frac{(a-1)^2}{2}$  即  $-\frac{(a-1)^2}{2} \leq x - \frac{(a+1)^2}{2} \leq \frac{(a-1)^2}{2}$ , 即  $2a \leq x \leq a^2 + 1$

$|x - a - 1| \leq a$  即  $-a \leq x - a - 1 \leq a$ , 即  $1 \leq x \leq 2a + 1$

由于  $a^2 + 1 \geq 2a$  恒成立, 所以  $A$  必不为空集, 故  $A \subseteq B$  即  $1 \leq 2a, a^2 + 1 \leq 2a + 1$ , 解得  $a \in [\frac{1}{2}, 2]$

6. 已知函数  $f(x) = |x - 2| + |x - a|$ , 若对于任意的  $x \in [1, 2]$ ,  $f(x) \geq |x - 4|$  恒成立, 求实数  $a$  的范围.

**解析** 当  $x \in [1, 2]$ ,  $f(x) \geq |x - 4|$  即  $2 - x + |x - a| \geq 4 - x$ , 整理得  $|x - a| \geq 2$ , 由绝对值的几何意义可知  $a \in (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

注: 有自变量的具体范围的时候, 可以先看一下绝对值是否可以直接去掉.

7. 已知关于  $x$  的不等式  $x^2 + 9 + |x^2 - 3x| \geq kx$  (\*)

(1) 若 (\*) 在区间  $[1, 5]$  上恒成立, 求实数  $k$  的取值范围.

(2) 若 (\*) 在区间  $[1, 5]$  上有解, 求实数  $k$  的取值范围.

**解析** 当  $x \in [1, 5]$  时, 原不等式可以转化为  $x + \frac{9}{x} + |x - 3| \geq k$

(1) 不等式恒成立即  $k$  比左侧最小值小, 而易知左侧最小值在  $x = 3$  时取, 故  $k \leq 6$

(2) 不等式有解即  $k$  比左侧最大值小, 设  $f(x) = x + \frac{9}{x} + |x - 3|$  易知  $f(x)$  在  $[1, 5]$  上先减后增, 最大值在端点处取.  $f(1) = 12, f(5) = \frac{44}{5}$  故  $k \leq 12$

**注: 区分有解问题和恒成立问题.**

8. 已知不等式  $x^2 + (a - 2)x + 3a > 0$  (\*)

(1) 若不等式 (\*) 对任意的  $x \in [-1, 1]$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围

(2) 若不等式 (\*) 对任意的  $a \in [-1, 1]$  恒成立, 求实数  $x$  的取值范围

**解析**

(1) ① 通解法

$f(x) = x^2 + (a - 2)x + 3a$  的对称轴为  $x = 1 - \frac{a}{2}$

若  $1 - \frac{a}{2} < -1$ , 即  $a > 4$ , 此时  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调递增, 因此  $f(-1) > 0$ , 即  $1 + 2 - a + 3a > 0$ , 解得  $a > -\frac{3}{2}$ , 结合对称轴有  $a > 4$

若  $1 - \frac{a}{2} > 1$ , 即  $a < 0$ , 此时  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调递减, 因此  $f(1) > 0$ , 即  $1 + a - 2 + 3a > 0$ , 解得  $a > \frac{1}{4}$ , 此种情况无解

若  $1 - \frac{a}{2} \in [-1, 1]$ , 即  $a \in [0, 4]$ , 此时  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  内最小值在顶点处取, 即  $f(1 - \frac{a}{2}) > 0$ , 整理有  $a^2 - 16a + 4 < 0$ , 解得  $a \in (8 - 2\sqrt{15}, 8 + 2\sqrt{15})$ , 结合对称轴有  $a \in (8 - 2\sqrt{15}, 4]$  综上,  $a \in (8 - 2\sqrt{15}, +\infty)$

② 参变分离

$(x + 3)a - 2x + x^2 > 0$  在  $x \in [-1, 1]$  恒成立, 即  $a > \frac{2x - x^2}{x + 3}$  在  $x \in [-1, 1]$  恒成立.

换元  $t = x + 3, t \in [2, 4]$ , 即  $a > \frac{-t^2 + 8t - 15}{t}$  在  $[2, 4]$  恒成立. 进一步变形有  $a > -(t + \frac{15}{t}) + 8$  在  $[2, 4]$  恒成立. 根据对勾函数性质可知  $-(t + \frac{15}{t}) + 8 \leq 8 - 2\sqrt{15}$  ( $t = \sqrt{15}$ , 即  $x = \sqrt{15} - 3$  时取等号), 故  $a \in (8 - 2\sqrt{15}, +\infty)$

(2) 将  $a$  做为主元, 即  $(x + 3)a - 2x + x^2 > 0$  在  $a \in [-1, 1]$  恒成立, 设  $f(a) = (x + 3)a - 2x + x^2$ , 故只需  $f(1) > 0, f(-1) > 0$  即可. 解得  $x \in (-\infty, \frac{3 - \sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, +\infty)$

**注:** 恒成立问题, 首先考虑主元应该是谁, 然后考虑是否要参变分离.

9. 已知函数  $f(x) = |x + \frac{1}{x} - 4|$ , 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \geq m^2 - m + 2$

(1) 在区间  $[\frac{1}{6}, 3]$  总有解, 求实数  $m$  的取值范围.

(2) 在区间  $[\frac{1}{4}, 2]$  总有解, 求实数  $m$  的取值范围.

**解析**

(1) 首先要意识到不等式的右侧没有  $x$ , 因此可以将右侧当做一个整体, 直接找  $f(x)$  在区间  $[\frac{1}{6}, 3]$  上的最大值. 根据对勾函数的性质可知  $f(x)$  在  $[\frac{1}{6}, 1]$  上先减后增, 在  $[1, 3]$  单调递减. 故最大值会在  $x = \frac{1}{6}$  或  $x = 1$  处取到.  $f(\frac{1}{6}) = \frac{13}{6}, f(1) = 2$ , 故  $f(x)$  的最大值为  $\frac{13}{6}$  问题转化为求解不等式  $\frac{13}{6} \geq m^2 - m + 2$ , 解集为  $[\frac{3 - \sqrt{15}}{6}, \frac{3 + \sqrt{15}}{6}]$ .

(2) 同理，需要找  $f(x)$  在区间  $[\frac{1}{4}, 2]$  上的最大值. 根据对勾函数的性质可知  $f(x)$  在  $[\frac{1}{4}, 1]$  上先减后增，在  $[1, 2]$  单调递减. 故最大值会在  $x = \frac{1}{4}$  或  $x = 1$  处取到.  $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$ ,  $f(1) = 2$ , 故  $f(x)$  的最大值为 2

问题转化为求解不等式  $2 \geq m^2 - m + 2$ , 解集为  $[0, 1]$ .

## 专题练习 2

填空题:

1. “ $ab \leq 0$ ” 是 “ $|a - b| = |a| + |b|$ ” 的 充要 条件.

**解析** 考察三角不等式的取等条件.

$|a + b| \leq |a| + |b|$  的取等条件是  $ab \geq 0$

$|a - b| \leq |a| + |b|$  的取等条件是  $ab \leq 0$

2. 若实数  $a$  使得不等式  $|x - 2a| + |2x - a| \geq a^2$  对任意的  $x$  恒成立, 实数  $a$  的取值范围是  $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

**解析**

(1) 方法 1

首先将问题转化为左侧的最小值大于等于右侧, 设函数  $f(x) = |x - 2a| + |2x - a|$ , 根据斜底锅函数的图象可知, 其最低点必然位于系数绝对值最大的一项取零的位置, 即  $x = \frac{a}{2}$ , 最小值为  $|\frac{3a}{2}|$ , 由此不等式可以转化为  $|\frac{3a}{2}| \geq a^2$ , 即  $|\frac{3}{2}| \geq |a|$ , 故  $a \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

(2) 方法 2

通过设  $x = ka (k \in \mathbf{R})$  来简化计算.

根据  $x = ka (k \in \mathbf{R})$ , 不等式可以化为  $|ka - 2a| + |2ka - a| \geq a^2$ ,

消去  $|a|$ , 不等式变为  $|k - 2| + |2k - 1| \geq |a|$ .

通过对  $k$  进行分类讨论, 可以得到  $|k - 2| + |2k - 1|$  的取值范围为  $[\frac{3}{2}, +\infty)$ , 故  $|a| \leq \frac{3}{2}$ , 即  $a \in [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

注: 斜底锅函数  $f(x) = |ax + b| + |cx + d|$  ( $|a| \neq |c|$ ), 若  $|a| > |c|$ , 则取最小值时  $x = -\frac{b}{a}$ , 若  $|a| < |c|$ , 则取最小值时  $x = -\frac{d}{c}$

3. 若  $a > b > 0$ , 则  $a^2 + \frac{16}{b(a-b)}$  的最小值是 16.

**解析** 先考虑消元,  $b(a-b) \leq \left(\frac{b+(a-b)}{2}\right)^2$ , 取等条件为  $a = 2b$ .

故  $a^2 + \frac{16}{b(a-b)} \geq a^2 + \frac{64}{a^2} \geq 16$ . 取等条件为  $a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

4. 已知  $a > 0, b > 0$ , 且  $ab = 1$ , 则  $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$  的最小值为 4.

**解析**

(1) 消元法

用  $a$  表示  $b$  有  $b = \frac{1}{a}$ . 原式可以化为  $\frac{a}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{8}{\frac{1}{a} + a} = \frac{1+a^2}{2a} + \frac{8a}{1+a^2} \geq 2\sqrt{\frac{1+a^2}{2a} \cdot \frac{8a}{1+a^2}} = 4$ , 当且仅当  $a + b = a + \frac{1}{a} = 4$  时取等号.

(2) 乘常数

原式  $= (\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}) \times ab + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{8}{a+b}} = 4$ , 当且仅当  $\frac{a+b}{2} = \frac{8}{a+b}$ , 即  $a+b = 4$  时取等号.

注: 容易出现的错解: 消元后分别利用均值不等式得到答案 5. 应用多次平均值不等式时应注意不等式方向是否相同, 取等条件是否一致.

5. (1) 已知正实数  $a, b$  满足  $a + b = 4$ , 则  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3}$  的最小值是  $\frac{1}{2}$ .

**解析**  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3} = (\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+3}) \times (a+1 + b+3) \times \frac{1}{8} = (2 + \frac{b+3}{a+1} + \frac{a+1}{b+3}) \times \frac{1}{8} \geq \frac{1}{2}$ , 当且仅当  $a = 3, b = 1$  时取等号.



(2) 已知正实数  $a, b$  满足  $4a + 3b = 1$ , 则  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b}$  的最小值是  $3 + 2\sqrt{2}$ .

**解析**  $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+b} = \frac{1}{2a+b} + \frac{2}{2a+2b} = (\frac{1}{2a+b} + \frac{2}{2a+2b}) \times (2a+b+2a+2b) = 1+2 + \frac{2a+2b}{a+b} + \frac{2(2a+b)}{2a+2b} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ , 当且仅当  $a = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2, b = 3 - 2\sqrt{2}$  时取等号.

注: 体会“基”的思想: 将分母看做一组“基”, 线性组合表示限制条件, 根据系数对目标式进行变形.

6. 已知  $a, b, c, d$  满足  $a^2 - ab + 4 = 0, c^2 + d^2 = 1$ , 则当  $(a-c)^2 + (b-d)^2$  取最小值的时候,  $abcd = \underline{1 + \sqrt{2}}$ .

**解析**  $(a-c)^2 + (b-d)^2$  的几何意义为  $A(a, b), B(c, d)$  两点间距离的平方,  $A$  在对勾函数  $y = x + \frac{4}{x}$  上,  $B$  在单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  上.  $(a-c)^2 + (b-d)^2$  为  $|AB|^2$ .  
固定点  $A$  时,  $OAB$  构成三角形  $|AB| + 1 > |OB|$ , 仅当  $B$  在  $OA$  上时此时  $|AB| = |OB| - 1$  最小.  
 $|OA|^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (a + \frac{4}{a})^2 = 2a^2 + 8 + \frac{16}{a^2} \geq 8 + 2\sqrt{32} = 8 + 8\sqrt{2}$  ( $a = \sqrt[4]{8}$  时取等)

此时  $ab = a^2 + 4 = 4 + 2\sqrt{2}$ , 此时根据相似三角形可知  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{|OA|}{1} = \sqrt{8 + 8\sqrt{2}}$ , 故  $\frac{ab}{cd} = 8 + 8\sqrt{2}$ , 因此  $cd = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{8 + 8\sqrt{2}}$ , 故  $abcd = \frac{(4 + 2\sqrt{2})^2}{8 + 8\sqrt{2}} = \frac{24 + 16\sqrt{2}}{8 + 8\sqrt{2}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

7. 已知  $f(x) = x + 2, x \in [1, 4]$ , 则  $y = f(x^2) + f^2(x)$  的最大值是 22.

**解析** 先看定义域:  $f(x)$  的定义域为  $[1, 4]$ , 因此  $f(x^2)$  中  $x^2 \in [1, 4]$ , 故  $f(x^2)$  的定义域为  $x \in [-2, 2]$ . 而  $f^2(x)$  的定义域与  $f(x)$  的定义域相同.

两者相加, 定义域取交集, 因此  $y = f(x^2) + f^2(x)$  的定义域为  $[1, 2]$ .

于是  $y = x^2 + 2 + (x + 2)^2 = 2x^2 + 4x + 6 = 2(x + 1)^2 + 4 \in [12, 22]$ .

8. 已知  $y = f(2x + 1)$  的定义域为  $(1, 3]$ , 则  $y = f(x + 1)$  的定义域为 (2, 6].

**解析** 因为  $y = f(2x + 1)$  的定义域为  $(1, 3]$ , 所以  $y = f(x)$  的定义域是  $(3, 7]$ , 故  $y = f(x + 1)$  的定义域为  $(2, 6]$ .

注: 此类题目的桥梁是  $f$  括号内的取值范围是一致的.

9. 下列两组函数中表示同一函数的有 ①.

(1)  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|}$  和  $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+2}$  (2)  $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2}$  和  $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

**解析** 本质上还是在考察定义域.

10. 函数  $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}} x))}$  的定义域是  $(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}]$ .

**解析**  $\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}} x)) \geq 0 \iff 0 < \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{3}} x) \leq 1 \iff 1 > \log_{\frac{1}{3}} x \geq \frac{1}{3} \iff (\frac{1}{3})^1 < x \leq (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ .

11. 若函数  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  的定义域为  $[0, m]$ , 值域为  $[-\frac{25}{4}, -4]$ , 则实数  $m$  的取值范围是  $[\frac{3}{2}, 3]$ .

**解析**  $f(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$ , 因此  $x = \frac{3}{2}$  是函数值  $-\frac{25}{4}$  对应的唯一自变量, 必然要在定义域内. 又因为  $f(0) = f(3) = -4$ , 是  $f(x) = -4$  唯二的解. 于是由二次函数的图像易得  $m \in [\frac{3}{2}, 3]$ .

12. 若一系列函数的解析式相同, 值域相同, 但其定义域不同, 则称这些函数为“同族函数”, 那么函数解析式为  $f(x) = x^2$ , 值域为  $\{1, 4\}$  的“同族函数”共有 9 个.

**解析**  $1, -1, \pm 1 \rightarrow 1, 2, -2, \pm 2 \rightarrow 4$ , 于是从值域的角度,  $x$  的组合共有  $3 \times 3 = 9$  种选择.

注: 关键是要清楚一个  $y$  对应几个  $x$ .

13. 设函数  $f(x)$  满足  $f(x) = f(\frac{1}{1+x})$  对任意  $x \in [0, +\infty)$  都成立, 其值域是  $A_f$ , 已知对任何满足上述条件的  $f(x)$  都有  $\{y | y = f(x), 0 \leq x \leq a\} = A_f$ , 则  $a$  的取值范围为  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$ .



**解析** 易知  $y = x$  与  $y = \frac{1}{1+x}$  在  $x \in [0, +\infty)$  只有一个交点  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$

设  $g(x) = x$ , 在  $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$  的值域为  $R_{g1}$ , 在  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$  内值域为  $R_{g2}$ , 设  $h(x) = x$ , 在  $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$  的值域为  $R_{h1}$ , 在  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$  内值域为  $R_{h2}$ , 易知  $R_{g1} = R_{h2}, R_{g2} = R_{h1}$ ,

因此必有  $f(x)$  在  $(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$  的值域与在  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$  内值域相同. 而  $f(0) = f(1)$ . 所以  $f(x)$  在  $[0, \frac{\sqrt{5}-1}{2})$  的值域  $A_{f1}$  与在  $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty)$  内值域  $A_{f2}$  相同. 但是  $f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$  可以和其他任意的函数值不相等. 因此  $A_f = A_{f1} \cup \{f(\frac{\sqrt{5}-1}{2})\}$

故当  $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  时满足  $[0, a]$  上  $f(x)$  的值域也是  $A_f$

选择题:

1. 下列各式中, 最小值为 4 的是 ..... ( B )

(A)  $x + 2\sqrt{x} + 5$  (B)  $\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$  (C)  $x^2 + 3 + \frac{4}{x^2+3}$  (D)  $x + \frac{4}{x}$

**解析** 注意取等条件是否可以取到!

2. 已知不等式  $(x+y)(\frac{a}{x} + \frac{1}{y}) \geq 9$  对任意正实数  $x, y$  恒成立, 则正实数  $a$  的最小值是 ..... ( B )

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

**解析** 首先求出  $(x+y)(\frac{a}{x} + \frac{1}{y})$  最小值 (含  $a$ ), 然后令其大于等于 9, 得到  $a$  的取值范围, 从中选取最小值

$$(x+y)(\frac{a}{x} + \frac{1}{y}) = a + 1 + \frac{ay}{x} + \frac{x}{y} \geq a + 1 + 2\sqrt{a} \quad (x = \sqrt{a}y \text{ 时取等})$$

设  $f(a) = a + 1 + 2\sqrt{a}$ , 显然  $f(a)$  单调递增, 且有  $f(4) = 9$ . 故  $a \geq 4$  时原始  $\geq 9$ , 因此  $a$  最小值为 4.

3. 若实数  $a, b$  满足  $a > b > 0$ , 下列不等式中恒成立的是 ..... ( A )

(A)  $a + b > 2\sqrt{ab}$  (B)  $a + b < 2\sqrt{ab}$  (C)  $\frac{a}{2} + 2b > 2\sqrt{ab}$  (D)  $\frac{1}{2} + 2b < 2\sqrt{ab}$

4. 下列不等式恒成立的是 ..... ( B )

(A)  $a^2 + b^2 \leq 2ab$  (B)  $a^2 + b^2 \geq -2ab$  (C)  $a + b \geq -2\sqrt{|ab|}$  (D)  $a + b \leq 2\sqrt{|ab|}$

5. 已知两两不同的  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  满足  $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ , 且  $x_1 < y_1, x_2 < y_2, x_3 < y_3$ ,  $x_1y_1 + x_3y_3 = 2x_2y_2 > 0$ , 则下列选项中恒成立的是 ..... ( A )

(A)  $2x_2 < x_1 + x_3$  (B)  $2x_2 > x_1 + x_3$  (C)  $x_2^2 < x_1x_3$  (D)  $x_2^2 > x_1x_3$

**解析** 设  $x_1 + y_1 = 2m$ , 故可设 
$$\begin{cases} x_1 = m - a, & y_1 = m + a, & a > 0 \\ x_2 = m - b, & y_2 = m + b, & b > 0 \\ x_3 = m - c, & y_3 = m + c, & c > 0 \end{cases}$$

由此, 题目中的条件可以转化为  $m^2 - a^2 + m^2 - c^2 = 2(m^2 - b^2)$ , 即  $a^2 + c^2 = 2b^2$ , 且有  $m^2 - b^2 > 0$ .

下面推导  $a + c < 2b$

(1) 方法 1: 利用平方差公式

原式移项后可以进一步可以转化为  $(a+b)(a-b) + (c+b)(c-b) = 0$ .

$(a+b)(a-b) + (c+b)(c-b) = 0$  说明  $a < b < c$  或者  $c < b < a$ , 不妨设  $a < b < c$  (另一种情况对称), 此时必有  $(a+b) < (c+b)$ , 因此有  $|a-b| > |c-b|$ , 即  $b-a > c-b$ , 故  $a+c < 2b$

(2) 方法 2: 利用平均值不等式

设  $d = \frac{a+c}{2}$ , 根据  $a^2 + c^2 = 2b^2$ , 可以转化为  $(2d)^2 - 2ac = 2b^2$

根据平均值不等式有  $(2d)^2 - 2 \times (\frac{a+c}{2})^2 < 2b^2$ , 即  $(2d)^2 - 2d^2 < 2b^2$ .

故  $d < b$ , 即  $a + c < 2b$

解答题:

1. 已知函数  $f(x) = |x + m| + |x - 2m|$ , 若  $f(x) \geq 3$  恒成立, 求  $m$  的取值范围.

**解析** 问题可以转化为  $f(x)$  的最小值大于等于 3 恒成立, 而  $f(x)$  是一个平底锅函数, 最小值可以通过三角不等式求得, 即  $f(x) = |x + m| + |x - 2m| \geq |3m|$ , 因此有  $|3m| \geq 3$ , 得到  $m \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

注: 注意**问题转化**的逻辑; 注意两个绝对值的式子相加减, 想一下三角不等式

2. 已知关于  $x$  的不等式  $|x - 1| - |x - 2| < a$  (\*)

- (1) 若 (\*) 解集为  $\mathbb{R}$ , 求实数  $a$  的取值范围.  
(2) 若 (\*) 有实数解, 求实数  $a$  的取值范围.  
(3) 若 (\*) 的解集为  $\emptyset$ , 求实数  $a$  的取值范围.

**解析**

- (1)  $(1, +\infty)$   
(2)  $(-1, +\infty)$   
(3)  $(-\infty, -1)$

3. 已知  $a, b$  为常数, 函数  $f(x) = x^2 - bx + a$ , 当  $a = 2b - 1$  时, 若方程  $f(x) = 0$  在  $(-2, 1)$  上有解, 求实数  $b$  的取值范围.

**解析**  $f(x) = x^2 - bx + 2b - 1$ .

① 分对称轴位置讨论

$f(x)$  的对称轴为  $x = \frac{b}{2}$ ,  $f(-2) = 4b + 3$ ,  $f(1) = b$ ,  $\Delta = b^2 - 4(2b - 1) = b^2 - 8b + 4$

1. 若  $\frac{b}{2} \leq -2$ , 则  $f(x)$  在  $(-2, 1)$  单调增, 故“方程  $f(x) = 0$  在  $(-2, 1)$  上有解”即  $f(-2) < 0, f(1) > 0$ , 此种情况解集为  $(-\frac{3}{4}, 0]$ .  
2. 若  $\frac{b}{2} \geq 1$ , 则  $f(x)$  在  $(-2, 1)$  单调减, 故“方程  $f(x) = 0$  在  $(-2, 1)$  上有解”即  $f(-2) > 0, f(1) < 0$ , 此种情况解集为空集.  
3. 若  $\frac{b}{2} \in (-2, 1)$ , 则  $f(x)$  在  $(-2, 1)$  先减后增, 故“方程  $f(x) = 0$  在  $(-2, 1)$  上有解”即  $\Delta \geq 0$  且有  $f(-2) > 0$  或  $f(1) > 0$ , 此种情况解集为  $(0, 4 - 2\sqrt{3}]$

综上,  $b \in (-\frac{3}{4}, 4 - 2\sqrt{3}]$

② 参变分离

“方程  $f(x) = 0$  在  $(-2, 1)$  上有解”即“ $b = \frac{1-x^2}{2-x}$  在  $(-2, 1)$  上有解”, 即“ $b = \frac{3}{x-2} + (x-2) + 4$  在  $(-2, 1)$  上有解”

因此  $b$  的取值范围即  $y = \frac{3}{x-2} + (x-2) + 4$  在  $(-2, 1)$  上的值域.

$y = \frac{3}{x-2} + (x-2) + 4$  在  $(-2, \sqrt{3}-2)$  单调递增, 在  $[2-\sqrt{3}, 1)$  单调递减, 值域为  $(-\frac{3}{4}, 4 - 2\sqrt{3}]$ , 故  $b \in (-\frac{3}{4}, 4 - 2\sqrt{3}]$

注: 有解问题可以采用分对称轴位置讨论或参变分离解决, **小题推荐参变分离, 大题可以分类讨论写步骤, 参变分离检验**. 分对称轴位置讨论时, 对于对称轴在目标区间内的情况要注意其充要条件. 参变分离会把方程有解问题转化成函数求值域问题.

4. 已知函数  $f(x) = x^2 + 2mx + 2m + 3$

- (1) 若  $f(x)$  至少有一个零点在区间  $(0, 2)$  内, 求实数  $m$  的取值范围.
- (2) 若  $f(x)$  恰有一个零点在区间  $(0, 2)$  内, 求实数  $m$  的取值范围.
- (3) 若  $f(x)$  恰有一个零点在区间  $(0, +\infty)$  内, 求实数  $m$  的取值范围.

解析

(1) ① 分对称轴位置讨论

$f(x)$  对称轴为  $x = -m$ ,  $f(0) = 2m + 3$ ,  $f(2) = 7 + 6m$ ,  $\Delta = 4m^2 - 8m - 12$

1. 若  $-m \leq 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0, 2)$  单调增, 故“ $f(x)$  在  $(0, 2)$  上有零点”即  $f(0) < 0, f(2) > 0$ , 此种情况无解.
2.  $-m \geq 2$ , 则  $f(x)$  在  $(0, 2)$  单调减, 故“ $f(x)$  在  $(0, 2)$  上有零点”即  $f(0) > 0, f(2) < 0$ , 此种情况无解.
3.  $-m \in (0, 2)$ , 则  $f(x)$  在  $(0, 2)$  先减后增, “ $f(x)$  在  $(0, 2)$  上有零点”即  $\Delta \geq 0$ , 且有  $f(0) > 0$  或  $f(2) > 0$ , 此种情况解得  $m \in (-\frac{3}{2}, -1]$

综上,  $m \in (-\frac{3}{2}, -1]$

② 参变分离  $f(x)$  至少有一个零点在区间  $(0, 2)$  内, 即  $f(x) = 0$  在  $(0, 2)$  内有根, 即方程  $m = \frac{-3-x^2}{2x+2}$  在  $(0, 2)$  内有根, 即方程  $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3-(t-1)^2}{t}$  在  $t \in (1, 3)$  内有根, 即方程  $m = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $t \in (1, 3)$  内有根.

因此  $m$  的取值范围即  $y = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $t \in (1, 3)$  内的值域.

$y = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $(1, 2)$  单调增, 在  $(2, 3)$  单调减, 因此值域为  $(-\frac{3}{2}, -1]$ , 故  $m \in (-\frac{3}{2}, -1]$

(2) ① 通解法

$f(x)$  对称轴为  $x = -m$ ,  $f(0) = 2m + 3$ ,  $f(2) = 7 + 6m$ ,  $\Delta = 4m^2 - 8m - 12$

1. 符合函数零点存在定理, 此时有  $f(0) \cdot f(2) < 0$ , 即  $m \in (-\frac{3}{2}, -\frac{7}{6})$
2. 二次函数与  $x$  轴相切在区间内, 此时有  $\Delta = 0$ , 且  $-m \in (0, 2)$  即  $m = -1$
3. 左端点函数值为 0, 此时有  $m = -\frac{3}{2}$ , 此时  $f(2) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内先减后增, 故不存在零点.
4. 右端点函数值为 0, 此时有  $m = -\frac{7}{6}$ , 此时  $f(0) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内先减后增, 存在唯一零点.

综上,  $m \in (-\frac{3}{2}, -\frac{7}{6}] \cup \{-1\}$

② 参变分离  $f(x)$  恰有一个零点在区间  $(0, 2)$  内, 即方程  $m = \frac{-3-x^2}{2x+2}$  在  $(0, 2)$  内有一根, 即方程  $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3-(t-1)^2}{t}$  在  $t \in (1, 3)$  内有一根, 即方程  $m = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $t \in (1, 3)$  内有一根, 即函数  $y = m$  与函数  $y = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $t \in (1, 3)$  内只有一个交点.

$y = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $(1, 2)$  单调增, 在  $(2, 3)$  单调减, 因此当  $m \in (-\frac{3}{2}, -\frac{7}{6}] \cup \{-1\}$  时满足要求.

注: 二次函数在区间内恰有一个零点的通解法对应着**四种情况**: 1. 符合函数零点存在定理  
2.  $\Delta = 0$  且对称轴在区间内 3. 左端点为函数的一个零点 (应根据区间开闭情况单独检验)  
4. 右端点为函数的一个零点 (应根据区间开闭情况单独检验)

参变分离会将问题转化为动直线和定曲线只有唯一交点, 要注意相切的情况和端点情况.

这种情况参变分离和通解法都没有明显优势.

(3) ① 通解法

$f(x)$  对称轴为  $x = -m$ ,  $f(0) = 2m + 3$ ,  $\Delta = 4m^2 - 8m - 12$

1. “符合函数零点存在定理”，此时有  $f(0) < 0$ ，即  $m \in (-\infty, -\frac{3}{2})$
  2. 二次函数与  $x$  轴相切在区间内，此时有  $\Delta = 0$ ，且  $-m \in (0, +\infty)$  即  $m = -1$
  3. 左端点函数值为 0，此时有  $m = -\frac{3}{2}$ ， $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内先减后增，存在唯一零点。
- 综上， $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup \{-1\}$

② 参变分离  $f(x)$  恰有一个零点在区间  $(0, +\infty)$  内，即方程  $m = \frac{-3-x^2}{2x+2}$  在  $(0, +\infty)$  内有一根，即方程  $m = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3-(t-1)^2}{t}$  在  $t \in (1, +\infty)$  内有一根，即方程  $m = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $t \in (1, +\infty)$  内有一根，即函数  $y = m$  与函数  $y = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $t \in (1, +\infty)$  内只有一个交点。

$y = \frac{1}{2} \cdot [-(t + \frac{4}{t}) + 2]$  在  $(1, 2)$  单调增，在  $(2, +\infty)$  单调减，因此当  $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup \{-1\}$  时满足要求。

注：区间一侧为无穷的情况对于通解法可以根据开口方向将问题简化。

5. 已知  $g(x) = -x^2 + 2x$ ，若关于  $x$  的方程  $g(x) = -mx - m$  在  $(0, 2)$  上恰有两个不等实根，求  $m$  的取值范围。

解析

① 通解法

“方程  $g(x) = -mx - m$  在  $(0, 2)$  上恰有两个不等实根”即“方程  $-x^2 + (2+m)x + m = 0$  在  $(0, 2)$  上恰有两个不等实根”，设  $h(x) = -x^2 + (2+m)x + m$ ，对称轴为  $x = \frac{2+m}{2}$ ， $\Delta = (2+m)^2 + 4m$ ， $h(0) = m$ ， $h(2) = 3m$

$$h(x) = 0 \text{ 在 } (0, 2) \text{ 上恰有两个不等实根的充要条件是 } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{2+m}{2} \in (0, 2) \\ h(0) < 0 \\ h(2) < 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m \in (2\sqrt{3}-4, 0)$$

② 参变分离

“方程  $g(x) = -mx - m$  在  $(0, 2)$  上恰有两个不等实根”即“方程  $m = \frac{x^2-2x}{x+1}$  在  $(0, 2)$  上恰有两个不等实根”，即“函数  $y = m$  与函数  $y = t + \frac{3}{t} - 4$  在  $(1, 3)$  上恰有两个交点”

$y = t + \frac{3}{t} - 4$  在  $(1, \sqrt{3})$  单调减，在  $[\sqrt{3}, 3)$  上单调增，因此当  $m \in (2\sqrt{3}-4, 0)$  时满足要求。

6. 已知一元二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0, c > 0$ ) 的图像与  $x$  轴有两个不同的公共点，其中一个公共点的坐标为  $(c, 0)$ ，且当  $0 < x < c$  时，恒有  $f(x) > 0$ 。

- (1) 当  $a = 1, c = \frac{1}{2}$  时，求出不等式  $f(x) < 0$  的解
- (2) 求出不等式  $f(x) < 0$  的解（用  $a, c$  表示）
- (3) 若以二次函数的图像与坐标轴的三个交点为顶点的三角形面积为 8，求  $a$  的取值范围
- (4) 若不等式  $m^2 - 2km + 1 + b + ac \geq 0$  对所有  $k \in [-1, 1]$  恒成立，求  $m$  的取值范围。

解析

- (1) 当  $a = 1, c = \frac{1}{2}$  时， $f(x) = x^2 + bx + \frac{1}{2}$ ，因为过  $(\frac{1}{2}, 0)$ ，所以  $b = -\frac{3}{2}$ ，因此有  $f(1) = 0$ ，因此  $f(x) < 0$  的解集为  $(\frac{1}{2}, 1)$
- (2) 根据韦达定理可知  $f(\frac{1}{a}) = f(c) = 0$ ，因为当  $0 < x < c$  时，恒有  $f(x) > 0$ ，所以必有  $\frac{1}{a} > c$ ，因此  $f(x) < 0$  的解集为  $(c, \frac{1}{a})$
- (3) 根据题意可知该三角形面积为  $S = \frac{1}{2}(\frac{1}{a} - c) \times c = 8$ ，故  $\frac{1}{a} = c + \frac{16}{c} \in [8, +\infty)$ ，因此  $a \in (0, \frac{1}{8}]$

(4) 根据  $f(c) = 0$  可知  $1 + b + ac = 0$ , 因此不等式变为  $m^2 - 2km \geq 0$ , 下面根据  $m$  的取值范围进行分类讨论

i.  $m > 0$

此时不等式变为  $\frac{m}{2} \geq k$ , 故  $m \geq 2$

ii.  $m = 0$

此时不等式恒成立

iii.  $m < 0$

此时不等式变为  $\frac{m}{2} \leq k$ , 故  $m \leq -2$

综上:  $m \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \cup \{0\}$

7. 已知正实数  $x, y$  满足  $xy^2(x+y) = 4$ , 求  $2x+y$  的最小值.

**解析** 观察可知  $xy^2(x+y) = 4$  不能够将  $x, y$  分离, 且  $2x+y$  为一次相加的形式。此时应考虑设  $2x+y = k$ , 代入  $xy^2(x+y) = 4$  中求  $k$  的最小值即可。因为  $xy^2(x+y) = 4$  中  $x$  为二次,  $y$  为三次, 因此考虑代换  $x$ , 即  $x = \frac{k-y}{2}$

$\frac{k-y}{2}y^2(\frac{k+y}{2}) = 4$ , 即  $(k-y)y^2(k+y) = 16$ , 进一步整理得  $k^2y^2 - y^4 = 16$ , 参变分离得到  $k^2 = \frac{16}{y^2} + y^2$ , 根据对勾函数性质知  $k^2$  最小值为 8, 故  $k$  最小值为  $2\sqrt{2}$