2022-2023学年上海市华东师大二附中高一（上）期中数学试卷

95

学校：__________姓名：薛淞______班级：__________考号：__________

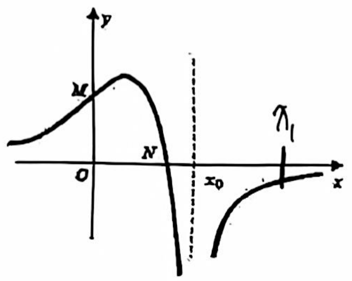
一、单选题：本题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.十六世纪中叶，英国数学家雷科德在《砺智石》一书中首先把“=”作为等号使用，后来英国数学家哈利奥特首次使用“<”和“>”符号，并逐渐被数学界接受，不等号的引入对不等式的发展影响深远．若 a，b，$c\in R$，则下列命题正确的是(B)

A. 若$ab\neq0$且$a<b$，则$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　　　B. 若$0<a<1$，则$a^3<a$

C. 若$a>b>0$，则$\dfrac{b+1}{a+1}<\dfrac{b}{a}$　　　　D. 若$c<b<a$且$ac<0$，则$cb^2<ab^2$

2.函数$f(x)=\dfrac{ax+b}{(x+c)^2}$的图象如图所示，则下列结论成立的是 C



$f(x_1)<0$　$(x_1+c)^2>0$　$\therefore ax_1+b<0$ 而 $b>0, x_1>0$　$\therefore a<0$

$x_0=-c$　$\therefore c<0$

$f(0)=\frac{b}{c^2}>0$　$\therefore b>0$

A. $a>0$，$b>0$，$c<0$　　　　B. $a<0$，$b>0$，$c>0$

C. $a<0$，$b>0$，$c<0$　　　　D. $a<0$，$b<0$，$c<0$

3.设$f(x)$是偶函数，且当$x\geqslant0$时，$f(x)$是严格单调函数，则满足$f(x)=f(\dfrac{x+3}{x+4})$的所有 x之和为(C)

A. -3　　　　B. 3　　　　C. -8　　　　D. 8

4.已知函数$g(x)$的定义域为 R，对任意实数 m、n都有$g(m+n)=g(m)+g(n)+2022$，且函数$f(x)=\underbrace{\dfrac{x\sqrt{2022-x^2}}{x^2+2022}}_{t(x)}+g(x)$的最大值为 p，最小值为 q，则$p+q=$(D)

$y=f(x)$关于$(0,-2022)$对称

$\begin{cases} g(x)+g(-x)=-4044 \\ t(x)+t(-x)=0 \end{cases}$

$\therefore f(x)+f(-x)=-4044$

A. -2　　　　B. 2022　　　　C. -2022　　　　D. -4044

二、填空题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

5.若集合$x\in\{1,x^2\}$，则$x=$ ~~-1~~ 0

6.“$x=1$”是“$(x-1)(x+1)=0$”的 充分不必要 条件．

7.若集合$A=\{y|y=-x^2+1,x\in R\}$，$B=\{y|y=2x^2-2x,x\in R\}$，则$A\cap B=$ $[-\frac{1}{2},1]$．

8.已知集合$A=\{x|ax^2+3x-2=0\}$有且仅有两个子集，则满足条件的实数 a组成的集合是 $\{-\frac{9}{8},0\}$

9.命题“$\forall x\in R$，$x^2+x+1>0$”的否定是$\exists x\in R$, $x^2+x+1\leqslant 0$.

$(0,+\infty)$

10.若函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x-a}(a\in R)$ 是偶函数，则 $f(x)$ 的单调递增区间是 R^+.

漏0

11.已知关于 x 的不等式 $\dfrac{kx^2-kx+1}{x^2+1}\leqslant 0$ 的解集为空集，则实数 k 的取值范围是 $[0,4)$.

12.已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a>0)$，若 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上是严格减函数，则实数 a 的取值范围是 $(1,3]$.

13.设集合 S 为实数集 R 的非空子集，若对任意 $x\in S$，$y\in S$，都有 $(x+y)\in S$，$(x-y)\in S$，$(xy)\in S$，则称集合 S 为“完美集合”．给出下列命题：

①若 S 为“完美集合”，则一定有 $0\in S$；

②“完美集合”一定是无限集；$\{0\}$

③繁合 $A=\{x|x=a+\sqrt{5}b,a\in Z,b\in Z\}$ 为“完美集合”；

④若 S 为“完美集合”，则满足 $S\subsetneq T\subsetneq R$ 的任意集合 T 也是“完美集合”．

其中真命题是①③．（写出所有正确命题的序号）

由韦达，$x_1^4+x_2^4=p^4+\frac{1}{2p^4}+2$

误，漏一个“±”

14.方程 $x^2-px-\dfrac{1}{2p^2}=0(p\in R)$ 的两根 x_1、x_2，满足 $x_1^4+x_2^4\leqslant 2+\sqrt{2}$，则 $p=\pm\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

三、解答题：本题共 4 小题，共 44 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15.（本小题 11 分）

(1) 求不等式组 $\begin{cases}|2x-1|\geqslant 7 & ---① \\ \dfrac{x+3}{x-1}\geqslant 2 & ---②\end{cases}$ 的解集；

(2) 求关于 x 的不等式 $x^2-x-a^2+a<0(a\in R)$ 的解集.

解：(1) 由①得 $x\in(-\infty,-3]\cup[4,+\infty)$

由②得 $\dfrac{-x+5}{x-1}\geqslant 0$，即 $x\in(1,5]$

故 $x\in[4,5]$

(2) $(x-(1-a))(x-a)<0$

1° $a=\frac{1}{2}$

$x\in\varnothing$

2° $a<\frac{1}{2}$

$x\in(a,1-a)$

3° $a>\frac{1}{2}$

$x\in(1-a,a)$

$1=\frac{2}{y}+\frac{1}{x}$

cauchy：$(x+ay)(\frac{1}{x}+\frac{2}{y})\geq(1+\sqrt{2a})^2$

$\therefore (x+ay)_{min}=(1+\sqrt{2a})^2=9 \Rightarrow a=2$

16.（本小题 11分）

已知正实数 x、y 满足 $xy=2x+y$.

(1) 求 xy 的最小值，并求取最小值时 x、y 的值；

(2) 若 $x+ay(a>0)$ 的最小值为 9，求 a 的值.

解：(1) $(2x+y)^2\geq 4\cdot 2x\cdot y$

即 $(xy)^2\geq 8xy$

而 $x,y\in R^+$，故 $xy\geq 0$

故 $xy\geq 8$

在 $x=2,y=4$ 时，$xy=8$

故 xy 最小值为8，其中 $x=2$，$y=4$

(2) 由 $xy=2x+y$ 得 $(x-1)(y-2)=2$

$(x-1)+a(y-2)\geq 2\sqrt{a(x-1)(y-2)}=2\sqrt{2a}$

而 $x+ay$ 的最小值为 9

$x+ay-1-2a$ 的最小值为 $2\sqrt{2a}$

故 $9-1-2a=2\sqrt{2a}$

$a=2$

$x+2y=(x-1)+2(y-2)+5\geq 2\sqrt{2(x-1)(y-2)}+5=2\sqrt{2\times2}+5=9$

而 $x=3,y=3$ 时，$xy=2x+y$，$x+2y=9$

故 a 的值为2

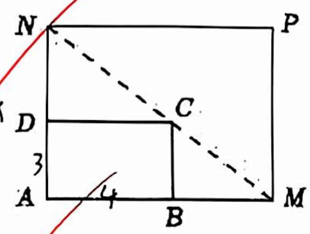
17.（本小题 11分）

如图所示，将一个矩形花坛 $ABCD$ 扩建成一个更大的矩形花坛 $AMPN$，要求 M 在射线 AB 上，N 在射线 AD 上，且对角线 MN 过点 C，已知 AB 长为 4 米，AD 长为 3 米，设 $AN=x$.

(1) 要使矩形花坛 $AMPN$ 的面积大于 54 平方米，则 AN 的长应在什么范围内？

(2) 要使矩形花坛 $AMPN$ 的扩建部分铺上大理石，则 AN 的长度是多少时，用料最省？（精确到 0.1 米）

(3) 当 AN 的长度是多少时，矩形花坛 $AMPN$ 的面积最小，并求出最小值.



解：(1) 记 $AM=y$ 米，面积为 S

$DN=x-3$

$DC=4$

$\triangle NDC\sim\triangle NAM$

$\frac{DN}{AN}=\frac{DC}{AM}$

$\frac{x-3}{x}=\frac{4}{y}$

$y=\frac{4x}{x-3}$　$x>3,y>4$

故 $x\in(3,+\infty)$

$S=xy=\frac{4x^2}{x-3}$，

$\frac{4x^2}{x-3}>54$

$x\in(\frac{9}{2},9)$

故 AN 的长在 $\frac{9}{2}$ 米至 9 米之间

(2) $S=\frac{4x^2}{x-3}$，令 $x-3=t$

$S=\frac{4t^2+24t+36}{t}=4t+\frac{36}{t}+24$

$\geq 2\sqrt{4\times36}+24=48$

在 $t=3$ 即 $x=6$ 时取等

故 AN 长度为6.0米时，用料最省

(3) AN 为6米，面积为48米

18.（本小题 11 分）

已知函数 $g(x)=ax^2-2ax+1+b(a>0)$ 在区间 $[2,3]$ 上的最大值为 4，最小值为 1．记 $f(x)=g(|x|)(x\in R)$．

(1) 求实数 a、b 的值；

(2) 若不等式 $f(x)+g(x)\geqslant t^2-2t-3$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，求实数 t 的范围；

(3) 对于定义在 $[p,q]$ 上的函数 $m(x)$，设 $x_0=p$，$x_n=q$，用任意的 $x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 将 $[p,q]$ 划分为 n 个小区间，其中 $x_{i-1}<x_i<x_{i+1}$，若存在一个常数 $M>0$，使得不等式 $|m(x_0)-m(x_1)|+|m(x_1)-m(x_2)|+\cdots+|m(x_{n-1})-m(x_n)|\leqslant M$ 恒成立，则称函数 $m(x)$ 为 $[p,q]$ 上的有界变差函数．试判断函数 $f(x)$ 是否是在 $[0,3]$ 上的有界变差函数，若是，求出 M 的最小值；若不是，请说明理由．

解：(1) $\because g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，而 $a>0$，故 $g(x)$ 在 $[2,3]$ 单调递增

$\therefore \begin{cases} g(2)=1 \\ g(3)=4 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$ 　　故 $g(x)=x^2-2x+1$，a 为 1，b 为 0

(2) 令 $f(x)+g(x)=T(x)$

则 $T(x)=\begin{cases} 2g(x)=2x^2-4x+2, & x\geq 0 \\ g(x)+g(-x)=2x^2+2, & x<0 \end{cases}$

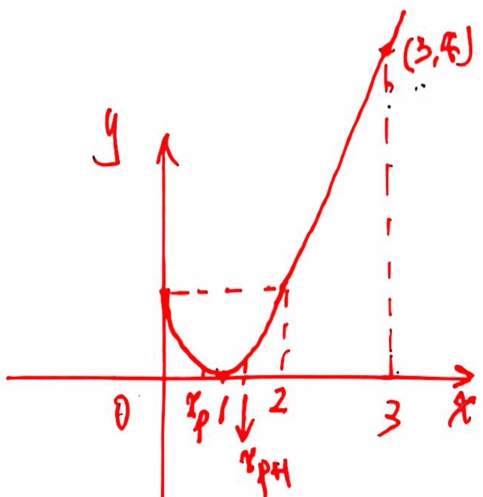
$x\geq 0$ 时，$2x^2-4x+2\geq 2(x-1)^2=0$，在 $x=1$ 时取等

$x<0$ 时，$2x^2+2>2$

故 $T(x)$ 的最小值为 0

即 $t^2-2t-3\leq 0$

$t\in[-1,3]$



(3) 是，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减，在 $[1,3]$ 单调递增

设 $p\in\{1,2,3\cdots,n-1\}$ 满足 $x_p\leq 1$，$x_{p+1}>1$

则 $f(x_p)>f(1)$，$f(p+1)>f(1)$

由三角不等式，$|f(x_p)-f(x_{p+1})|\leq|f(x_p)-f(1)|+|f(x_{p+1})-f(1)|$，在 $x_p=1$ 时取等

$LHS=(|f(0)-f(x_1)|+\cdots|f(x_{p-1})-f(x_p)|)+|f(x_p)-f(x_{p+1})|+(|f(x_{p+1})-f(x_{p+2})|+\cdots+|f(x_{n-1})-f(3)|$

$\leq(|f(0)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_p)-f(1)|)+(|f(1)-f(p+1)|+\cdots+|f(x_{n-1})-f(3)|)=(f(0)-f(1))+(f(3)-f(0))$

$=5$，在 $x_p=1$ 时取等

故 M 的最小值为 5