0829 黄翌晨 14+10

补充专题：函数的图像

知识点：作图、识图、数形结合

1.要得到函数$y=f(x)$的图像，只须将函数$y=f(x+1)+2$的图像先向__右__平移__1__个单位，再向__下__平移__2__个单位即可.

2.若函数$y=x^2+(a+2)x+3,\ a\le x\le b$的图像关于直线$x=1$对称，则$b=$__6__.

-4

3.函数$f(x)=x^3+1$的图像关于__(0,1)__点对称.

4.若函数$y=f(x-1)$是奇函数，则函数$y=f(x)$的图像关于点__(-1,0)__对称.

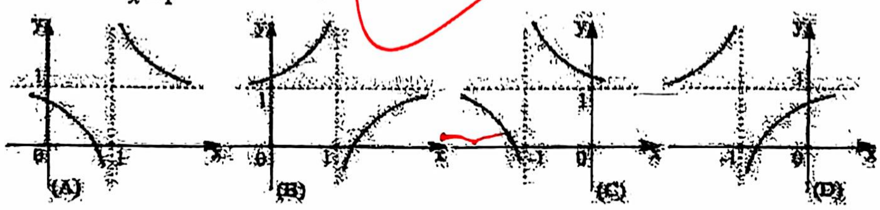
5.函数$y=f(2-x)$的图像与函数$y=f(x-1)$的图像关于__直线$x=\frac{3}{2}$__对称.

6.若方程$|x-8|=a$在$[7,9]$上有两个实数解，则a的取值范围是__(0,1]__.

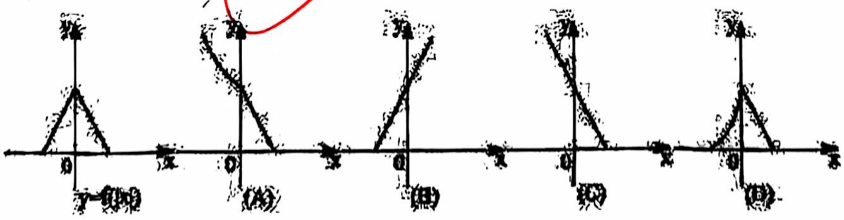
7.若把函数$y=f(x)$的图像作平移，可以使图像上的点$P(1,0)$变换成点$Q(2,2)$，则函数$y=f(x)$的图像经此变换后所得图像对应的函数为（ A ）

(A) $y=f(x-1)+2$；(B) $y=f(x-1)-2$；(C) $y=f(x+1)+2$；(D) $y=f(x+1)-2$.

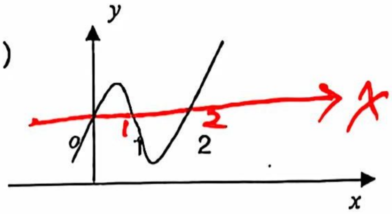
8.函数$y=\dfrac{x-2}{x-1}$的图像是(B)



9.已知函数$y=f(|x|)$的图像如左下图所示，则函数$y=f(x)$的图像不可能是(B)



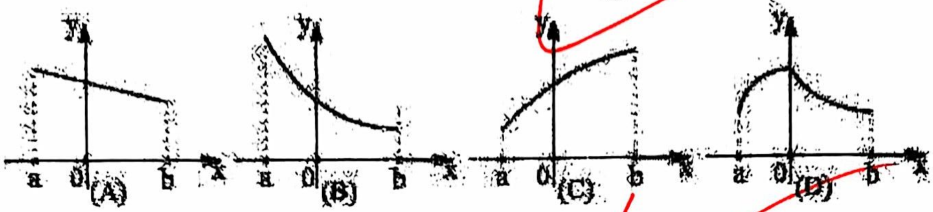
10.已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像如右图，则(　　)



(A) $b\in(-\infty,0)$　　(B) $b\in(0,1)$

(C) $b\in(1,2)$　　(D) $b\in(2,+\infty)$

11. 任取 x_1、$x_2\in[a,b]$, $x_1\neq x_2$，若 $f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数．下列图像中，可以是凸函数图像的是（ C ）



12. 函数 $f(x)=2^{|x-1|}$ 的单调递减区间是 $(-\infty,1]$.

13. 将函数 $g(x)=3^{-2x}$ 的图象经过下列哪一种变换可以得到函数 $f(x)=3^{2-2x}$ 的图象（ B ）

A. 向左平移 1 个单位长度　　B. 向右平移 1 个单位长度

C. 向左平移 2 个单位长度　　D. 向右平移 2 个单位长度

误: $[0,4)$

14. 已知函数 $f(x)=4^x-a\cdot 2^x+a$，在 $x\in(0,+\infty)$ 的图像恒在 x 轴上方，则实数 a 的取值范围是 ~~[illegible]~~ $(-\infty,4)$

令 $t=2^x$, $t\in(1,+\infty)$.

$t^2-at+a>0$ $\forall t\in(1,+\infty)$,

$a<\frac{t^2}{t-1}=t+1+\frac{1}{t-1}=(t-1)+\frac{1}{t-1}+2$

$t-1+\frac{1}{t-1}+2\geq 2+2=4$

即 $a<\left(\frac{t^2}{t-1}\right)_{min}=4$.

15. 已知函数 $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$，则(C)

A. $f(x)$ 是偶函数且是增函数　　B. $f(x)$ 是偶函数且是减函数

C. $f(x)$ 是奇函数且是增函数　　D. $f(x)$)是奇函数且是减函数

16. 设函数 $f(x)=3^{-x^2+ax}$ 在区间(1，2)上单调递增，则 a 的取值范围是 $a\geq 4$.

17. 已知 $f(x)=\begin{cases}4^x-2^{x+2}+m, x\leq 0\\ x+\frac{1}{x}, x>0\end{cases}$ 的最小值为 2，则 m 的取值范围为 $[5,+\infty)$.

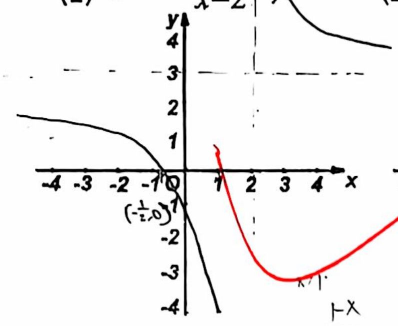
18.作出下列函数的图像：

$x \geq 2$

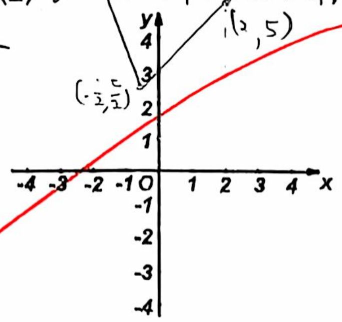
x^2-x-2

$-(x-2)(x+1)$

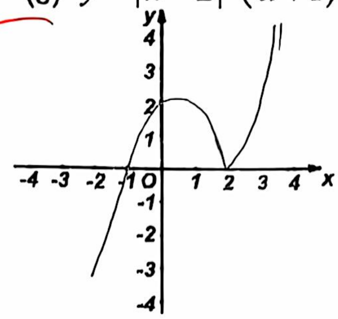
(1) $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$；



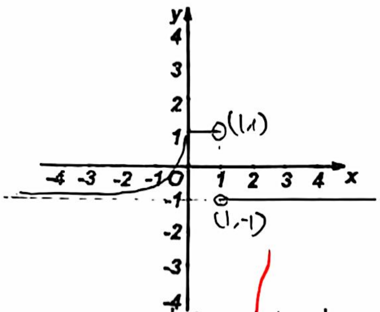
(2) $y=|x-2|+|2x+1|$；



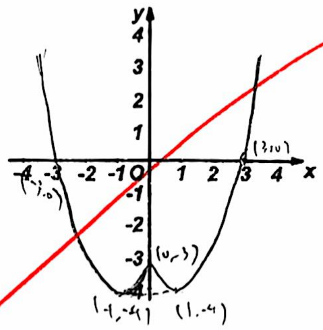
(3) $y=|x-2|\cdot(x+1)$



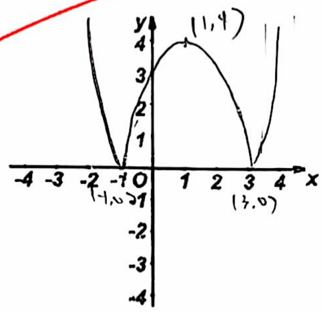
(4) $y=\dfrac{1-|x|}{|1-x|}$



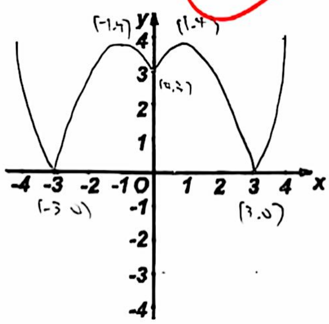
(5) $y=x^2-2|x|-3$



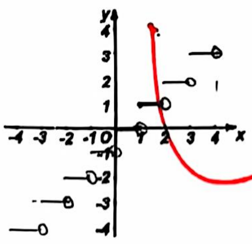
(6) $y=|x^2-2x-3|$

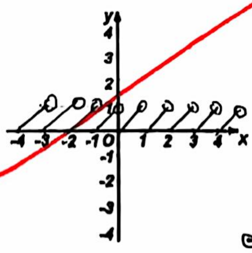


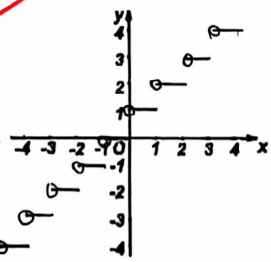
(7) $y=|x^2-2|x|-3|$

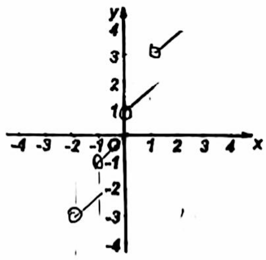


13、(1) 设$[x]$表示不超过x的最大整数，试作出函数$f(x)=[x]$、$g(x)=x-[x]$的图象；(2) 设$\{x\}$表示不小于x的最小整数，试作出函数$f(x)=\{x\}$、$g(x)=x+\{x\}$的图象.









14. 已知函数 $f(x)=x^2+2x$， $x\in R$.

(1) 若函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称，求 $g(x)$ 的解析式；

(2) 若函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，求 $g(x)$ 的解析式；

(3) 若函数 $g(x)$ 的图像与函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，求 $g(x)$ 的解析式.

(1) 顶点 $(-1,-1)$

∴ $g(x)$ 顶点 $(1,1)$.

∴ $g(x)=-(x-1)^2+1=-x^2+2x$

(2). $g(x)$ 顶点 $(1,-1)$.

∴ $g(x)=(x-1)^2-1$

∴ $g(x)=x^2-2x$

(3). $g(x)$ 顶点 $(3,-1)$

∴ $g(x)=(x-3)^2-1$

$g(x)=x^2-6x+8$

15. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+3-a$， $a\in R$.

(1) 当 $0\le x\le 2$ 时，函数 $y=f(x)$ 的最小值是关于 a 的函数 $m(a)$.求 $m(a)$ 的最大值及其相应的 a 值；

(2) 对于 $a\in R$，研究函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\left|x^2-2x-3\right|$ 的图像公共点的个数；(写出结论即可) .

-8

(1) 当 $-\frac{a}{2}\le 0$，即 $a\ge 0$ 时

$m(a)=f(0)=3-a\le 3$

当 $-\frac{a}{2}\ge 2$ 即 $a\le -4$ 时

$m(a)=f(2)=a+7\le 3$

~~当 $a\in(-4,0)$ 时~~

当 $a\in(-4,0)$ 时

$m_a=-\frac{a^2+4a-12}{4}$

$-\frac{a^2+4a}{4}+12\le 4$

当且仅当 $a=-2$ 时取等，成立

∴ 当 $a=-2$ 时，$m(a)$ 最大 $=4$

$$m(a)=\begin{cases}a+7, & a<-4\\ -\frac{1}{4}a^2-a+3, & -4<a<0\\ 3-a, & a\ge 0\end{cases}$$

(2) 当 $a\in(-\infty,-9]$ 时

$a\in(-9,-2-4\sqrt{3})$

$a=-2-4\sqrt{3}$

$a\in(-2-4\sqrt{3},6)$

$a\in[6,-2)$

$a=-2$

$a\in(-2,2]$

$a\in(-2,-2+4\sqrt{3})$

$a=-2+4\sqrt{3}$

$a\in[-2+4\sqrt{3},5)$

$a\in[3,+\infty)$

(附加) 16.设 D 是含数 1 的有限实数集， $f(x)$ 是定义在 D 上的函数.若 $f(x)$ 的图像绕原点逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与原图像重合，则在以下各项中， $f(1)$ 的可能取值是（ B ）(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) 0

(附加) 设函数 $f_0(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}, f_1(x)=\left|f_0(x)-\frac{1}{2}\right|, f_n(x)=\left|f_{n-1}(x)-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|, n\ge 1, n\in N$,则方程 $f_n(x)=\left(\frac{1}{n+2}\right)^n$ 有 2^{n+1} 个实数根.

(2) 当 $a \geqslant 0$ 时，$m(a)=f(0)=3-a$；

当 $-4 \leqslant a<0$ 时，$m(a)=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a^{2}-a+3$；

当 $a<-4$ 时，$m(a)=f(2)=a+7$.

所以，$m(a)=\begin{cases} a+7, & a<-4, \\ -\dfrac{1}{4}a^{2}-a+3, & -4 \leqslant a<0, \\ 3-a, & a \geqslant 0. \end{cases}$

分段讨论并比较大小得，当 $a=-2$ 时，$m(a)$ 有最大值 4.

(2) 公共点的横坐标 x 满足 $x^2+ax+3-a=|x^2-2x-3|$. 即 x 是方程 $a(x-1)=|x^2-2x-3|-x^2-3$ 的实数解.

设 $h(x)=|x^2-2x-3|-x^2-3$，则直线 $y=a(x-1)$ 与 $y=h(x)$ 有公共点时的横坐标与上述问题等价.

当 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$ 时，$h(x)=|x^2-2x-3|-x^2-3=-2x-6$；

解方程 $-2x-6=a(x-1)$ 即 $(a+2)x=a-6$，得 $x=\dfrac{a-6}{a+2}$，$a\neq-2$.

当 $-1\leqslant x\leqslant3$ 时，$h(x)=|x^2-2x-3|-x^2-3=-2x^2+2x$.

解方程 $-2x^2+2x=a(x-1)$ 即 $2x^2+(a-2)x-a=0$，得 $x=-\dfrac{a}{2}$ 或 $x=1$.

研究结论：

结论 1：无论 a 取何实数值，点 $(1,4)$ 必为两函数图像的公共点.

结论 2：(对某些具体的 a 取值进行研究).

当 $a=-2$ 时，两图像有一个公共点 $(1,4)$；

当 $a=-6$ 时，公共点有 2 个，坐标为 $(1,4)$、$(3,0)$；

当 $a=2$ 时，公共点有 2 个，坐标为 $(1,4)$、$(-1,0)$.

结论 3：当 $-2<a<2$，$-6<a<-2$ 时，公共点有 3 个，坐标为 $(1,4)$、$\left(-\dfrac{a}{2},\left|\dfrac{a^2}{4}+a-3\right|\right)$、$\left(\dfrac{a-6}{a+2},\dfrac{|a^2-17a+42|}{(a+2)^2}\right)$.

结论 4：具体包括下面几个方面：

当 $a=-6$ 时，公共点有 2 个，坐标为 $(1,4)$、$(3,0)$；

当 $a=2$ 时，公共点有 2 个，坐标为 $(1,4)$、$(-1,0)$.

当 $a>2$，$a=-2$ 或 $a<-6$ 时，公共点有 1 个，坐标为 $(1,4)$.

当 $-2<a<2$，$-6<a<-2$ 时，公共点有 3 个，坐标为 $(1,4)$、$\left(-\dfrac{a}{2},\left|\dfrac{a^2}{4}+a-3\right|\right)$、$\left(\dfrac{a-6}{a+2},\dfrac{|a^2-17a+42|}{(a+2)^2}\right)$.

解：$f(x)=\begin{cases}4^{x}-2^{x+2}+m, & x\leq 0\\ x+\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，

当$x>0$时，$f(x)=x+\frac{1}{x}\geq 2$，当且仅当$x=\frac{1}{x}$，即$x=1$时等号成立；

$\therefore$若$f(x)=\begin{cases}4^{x}-2^{x+2}+m, & x\leq 0\\ x+\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$的最小值为2，

则$x\leq 0$时，$4^{x}-2^{x+2}+m\geq 2$恒成立，

即$m\geq -4^{x}+4\cdot 2^{x}+2$在$(-\infty, 0]$上恒成立，

令$t=2^{x}$，则$m\geq -t^{2}+4t+2$在$t\in(0, 1)$上恒成立，

而$g(t)=-t^{2}+4t+2$在$t\in(0, 1)$上为增函数，

$\therefore -t^{2}+4t+2<-1+4+2=5$，则$m\geq 5$．

$\therefore m$的取值范围为$[5, +\infty)$．

$n=1$时，$f_1(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$，$|x|\le 1$，即$-1\le x\le 1$，$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=\frac{5}{6}$，$x=\pm\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{6}$；

$|x|>1$，即$x<-1$或$x>1$时，$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=\frac{1}{6}$，$x=\pm\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}$

一共4个解；

$n=2$时，$f_2(x)=\left|f_1(x)-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{16}$，$f_1(x)=\frac{5}{16},\frac{3}{16}$，同理有8个解；

$n=3$时，$f_3(x)=\left|f_2(x)-\frac{1}{8}\right|=\frac{1}{125}$，$f_2(x)=\frac{133}{1000}$，$\frac{117}{1000}$，同理有$2^4=16$个；

依次类推，$f_n(x)=\left(\frac{1}{n+2}\right)^n$有$2^{n+1}$个解。