11.2 周末作业

一、填空题

1、已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$， $B=\{x,x^2\}$， $B\subseteq A$， 则 $x=$________.

答案：2

2、不等式 $\dfrac{x-2}{x-1}\le 0$ 的解集是________.

答案：(1,2]

3、已知正数 a,b 满足 $a+2b=1$， 则 ab 的最大值是________.

答案：$\frac{1}{8}$

4、已知 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$， $g(x)=\sqrt{x}$， 则 $f[g(x)]=$________.

答案：$\frac{x}{1+x}(x\ge 0)$

5、已知 $-1\le a+b\le 1$， $1\le a-b\le 3$， 则 $3a-b$ 的取值范围是________.

答案：[1,7]

6、已知 $f(x)=ax^{9999}+bx^{123}-x-8$， 且 $f(-2)=10$， 则 $f(2)=$________.

答案：-26

7、不等式 $x|x-4|\ge 3$ 的解集是________.

答案：$[1,3]\cup[2+\sqrt{7},+\infty)$

8、已知正数 a,b 满足 $a+2b=1$， 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 取到最小值时， $a=$________.

答案：$\sqrt{2}-1$

9、若方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 的两个实根均在 $(0,2)$ 上，则实数 m 的取值范围是______.

答案：$(\frac{2}{3},1]$

10、不等式 $\dfrac{x^{2023}(x-2)^{2025}}{(x+1)^{2026}}\sqrt{x^2-4x+3}\ge 0$ 的解集是________.

答案：$(-\infty,-1)\cup(-1,0]\cup\{1\}\cup[3,+\infty)$

11、已知函数 $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$， 若方程 $\left[f(x)\right]^2+af(x)+2=0$ 恰好有 5 个不同的解，

则所有满足条件的 a 构成的集合是________.

答案：$\{-3\}$

12、定义一种集合运算 $nand$ 为：$A\ nand\ B=\{x\mid x\notin A或x\notin B\}$。设全集为 U，给定集合 A 与 B，则仅使用 $nand$ 运算和 A,B,U，可以表示下列集合中的________（填序号）

① $A\cup B$　　② $A\cap B$　　③ $\overline{A}$

答案：①②③

二、选择题

13、已知 $a,b,c\in R$，且 $a>b$，则下列不等式正确的是（　　）

A. $ac>bc$　　B. $a^2>b^2$　　C. $a^3>b^3$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

答案：C

14、设 a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1<0$ 解集为 M，不等式 $a_2x^2+b_2x+c_2<0$ 解集为 N，则“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的（　　）

A. 充要条件　　B. 既非充分也非必要条件

C. 充分非必要条件　　D. 必要非充分条件

答案：B

15、已知非空集合 A,B 满足以下两个条件：

① $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A\cap B=\varnothing$

② A 的元素个数不是 A 中的元素，B 的元素个数不是 B 中的元素.

则有序集合对 (A,B) 的个数为（　　）

A. 16　　B. 22　　C. 26　　D. 32

答案：D

16、已知不等式 $\left|x^2+\frac{1}{x}\right|+\left|x^2-\frac{1}{x}\right|+ax\geq 2x-8$ 恒成立，则实数 a 不可能是（　　）

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

答案：D

已知 $y=f(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数，根据下列条件，可以断定 $y=f(x)$ 为严格增函数的是（　　）

(A) 对任意 $x>0$，都有 $f(x)>f(0)$

(B) 对任意 $x\geq 0$，都有 $f(x+1)>f(x)$

(C) 对任意 $x_1, x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\geq x_2$，都有 $f(x_1)\geq f(x_2)$

(D) 对任意 $x_1, x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$

答案：D

三、解答题

求函数 $f(x)=2x+\dfrac{8}{x}$ 在下列区间上的最大值和最小值：

①$\mathbf{R}$；　②$(0,1]$；　③$[3,+\infty)$；　④ $[1,3]$；　⑤$[-3,-1]\cup(2,4]$.

(1) 无；(2) $f(x)_{\min}=10$，无最大值；(3) $f(x)_{\min}=\dfrac{26}{3}$，无最大值；

(4) $f(x)_{\min}=f(2)=8, f(x)_{\max}=f(1)=10$；(5)

$f(x)_{\min}=f(-1)=-10, f(x)_{\max}=f(4)=10$.

17、求实数 m，使不等式 $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ 的解集是 R。

答案：$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

18、已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(1-a)x+a^2-5=0\}$.

(1) 若 $A\cap B=\{2\}$，求实数 a 的值；

(2) 若 $\overline{A}\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

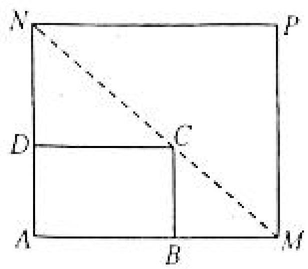
答案：(1) $a=1$ 或 3

(2) 即 $A\supseteq B$，要讨论 B 是否是空集。$a\in[3,+\infty)$

19、如图，现要将矩形花坛 $ABCD$ 扩建为更大的矩形花坛 $AMPN$，使得点 C 在对角线 MN 上。已知 AB 长 3 米，AD 长 2 米。

（1）设 DN 长 x 米，试用 x 表示矩形 $AMPN$ 的面积 S；

（2）求矩形 $AMPN$ 的面积 S 的最小值，并指出取到最小值时 DN 的长度。



答案：（1）$AN=2+x$，$AM=3+\frac{6}{x}$，$S=12+3x+\frac{12}{x}$

（2）$S\geq 24$，取等时 $DN=2$

20、已知函数 $f(x)=x^2+ax$，其中 a 是实数.

（1）$f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值记为 $M(a)$，求 $M(a)$ 的表达式；

（2）$f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最小值记为 $m(a)$，求 $m(a)$ 的表达式；

（3）若 $M(a)-m(a)=3$，求实数 a 的值.

答案：（1）$M(a)=\begin{cases}1-a, a\in(-\infty,-1]\\ 4+2a, a\in(-1,+\infty)\end{cases}$

（2）$m(a)=\begin{cases}4+2a, a\in(-\infty,-4]\\ -\frac{a^2}{4}, a\in(-4,2]\\ 1-a, a\in(2,+\infty)\end{cases}$

（3）需分四类讨论：

①$a\in(-\infty,-4]$，$(1-a)-(4+2a)=3$ 得 $a=-2$，舍

②$a\in(-4,-1]$，$(1-a)-(-\frac{a^2}{4})=3$ 得 $a=2\pm2\sqrt{3}$，舍去 $2+2\sqrt{3}$

③$a\in(-1,2]$，$(4+2a)-(-\frac{a^2}{4})=3$ 得 $a=-4\pm2\sqrt{3}$，舍去 $-4-2\sqrt{3}$

④$a\in(2,+\infty)$，$(4+2a)-(1-a)=3$ 得 $a=0$，舍

综上，$a=2-2\sqrt{3}$ 或 $-4+2\sqrt{3}$

已知$a>0$，函数$f(x)=ax-bx^2$，

（1）当$b>0$时，若对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\leqslant 1$，证明：$a\leqslant 2\sqrt{b}$.

（2）当$b>1$时，证明：对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件是：$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

（3）当$0<b\leqslant 1$时，讨论：对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件.

解：（1）依题设，对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\leqslant 1$.

$\because\quad f(x)=-b\left(x-\dfrac{a}{2b}\right)^2+\dfrac{a^2}{4b}$，$\therefore\quad f\left(\dfrac{a}{2b}\right)=\dfrac{a^2}{4b}\leqslant 1$，

$\because\quad a>0$，$b>0$，$\therefore\quad a\leqslant 2\sqrt{b}$.

（2）（必要性），对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant f(x)$据此可推出$-1\leqslant f(1)$

即$a-b\geqslant -1$，$\therefore\quad a\geqslant b-1$. 对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leq 1$，

因为$b>1$，可推出$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)\leqslant 1$. 即$a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}-1\leqslant 1$，$\therefore\quad a\leqslant 2\sqrt{b}$，所以$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

（充分性）：因$b>1$，$a\geqslant b-1$，对任意$x\in[0,1]$，可以推出：

$ax-bx^2\geqslant b(x-x^2)-x\geqslant -x\geqslant -1$，即：$ax-bx^2\geqslant -1$；

因为$b>1$，$a\leqslant 2\sqrt{b}$，对任意$x\in[0,1]$，

$f(x)=-b\left(x-\dfrac{a}{2b}\right)^2+\dfrac{a^2}{4b}$，$\therefore\quad f\left(\dfrac{a}{2b}\right)=\dfrac{a^2}{4b}\leqslant 1$，，即$ax-bx^2\leqslant 1$，$\therefore\quad -1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

综上，当$b>1$时，对任意$x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$的充要条件是：$b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

（3）因为$a>1$，$0<b\leqslant 1$时，对任意$x\in[0,1]$.

$f(x)=ax-bx^2\geqslant -b\geqslant -1$，即$f(x)\geqslant -1$；

$f(x)\leqslant 1\Rightarrow f(1)\leqslant 1\Rightarrow a-b\leqslant 1$，即$a\leqslant b+1$；

$a\leq b+1$时，$f(x)\leq (b+1)x-bx^2$，

而$bx^2-(b+1)x+1=(bx-1)(x-1)\geq 0$

故$(b+1)x-bx^2\leq 1$，即$f(x)\leqslant 1$.

所以，当 $a>1$， $0<b\leqslant 1$ 时，对任意 $x\in[0,1]$， $|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是： $a\leqslant b+1$.

21、对于定义域为 R 的函数 $f(x)$ 以及非空集合 S：若对任意 x_1， $x_2\in R$，当 $x_1-x_2\in S$ 时，都有 $f(x_1)-f(x_2)\in S$，则称 $f(x)$ 是 S 关联的.

(1)若 $f(x)=2x+1$，则 $f(x)$ 是否是 $[0,+\infty)$ 关联的，$f(x)$ 是否是 $[0,1]$ 关联的；

(2)设 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的，当 $x\in[0,3]$， $f(x)=x^2-2x$，解不等式：$2\leq f(x)\leq 3$；

(3)证明：$f(x)$ 既是 $\{1\}$ 关联的，又是 $[0,+\infty)$ 关联的，当且仅 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联的.

解：(1)一方面，$x_1-x_2\in[0,+\infty)$ 而 $f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)\in[0,+\infty)$,

则 $f(x_1)-f(x_2)\in[0,+\infty)$,

另一方面，$x_1-x_2\in[0,1]$,

$f(x_1)-f(x_2)=2(x_1-x_2)\in[0,2]$,

存在 $f(x_1)-f(x_2)\notin[0,1]$,

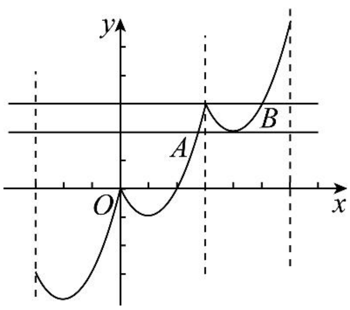
故 $f(x)=2x+1$ 是 $[0,+\infty)$ 关联的，$[0,1]$ 不关联；

(2) $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联的，则 $x_1-x_2=3$， $f(x_1)-f(x_2)=3$,

故 $f(x+3)=f(x)+3$,

则当 $x\in[3,6]$，$f(x)=f(x-3)+3=(x-3)^2-2(x-3)+3=x^2-8x+18$,

结合图像可知，$2\leq f(x)\leq 3$ 分别在 $[0,3]$，$[3,6]$ 有解，



①$x\in[0,3]$，$2\leq x^2-2x\leq 3$，则 $1+\sqrt{3}\leq x\leq 3$,

②$x\in[3,6]$，$2\leq x^2-8x+18\leq 3$，则 $3\leq x\leq 5$,

综上可知：不等式 $2 \le f(x) \le 3$ 的解集为 $[1+\sqrt{3},5]$.

(3)一方面，若 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的，且是 $[0,+\infty)$ 关联的，

则 $f(x+1)=f(x)+1$,

并且 $f(x)$ 为递增函数，

所以对于 $x_1-x_2\in[1,2]$，$1=f(x_2+1)-f(x_2)\le f(x_1)-f(x_2)\le f(x_2+2)-f(x_2)=2$,

即 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联的，

另一方面，若 $f(x)$ 是 $[1,2]$ 关联的，

则 $x_1-x_2\in[1,2]$，$1\le f(x_1)-f(x_2)\le 2$,

则 $f(x+1)-f(x)\ge 1$，$f(x+2)-f(x+1)\ge 1$,

故 $f(x+2)-f(x)\ge 2$，并且 $f(x+2)-f(x)\le 2$,

即 $f(x+2)-f(x)=2$,

可得 $f(x+1)=f(x)+1$,

故 $f(x)$ 是 $\{1\}$ 关联的，

再证 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 关联的，

①当 $x_1<x_2\le x_1+1$,

则 $x_2+1-x_1\in[1,2]$,

此时 $x_2-x_1\in[0,+\infty)$,

$$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2+1)-f(x_1)-1\in[0,1]\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)\in[0,+\infty),$$

②当 $x_1<x_2$，$x_1+n<x_2\le x_1+n+1$，$n\in N^*$,

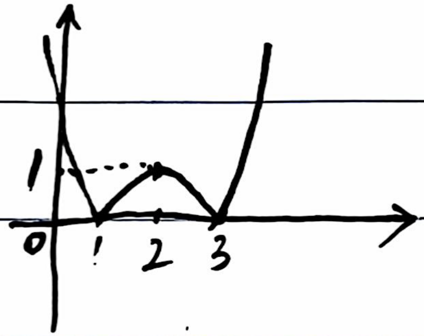
则有 $x_1<x_2-n\le x_1+1$,

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2-n)+n-f(x_1)\ge n$,

则 $f(x_2)-f(x_1)\in[0,+\infty)$.

综合①和②可知，$f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 关联的.

11.



$f(x)$ 的图像如图所示，由图像得 $f(x)=k$ 的解的情况为：

$k<0$ 无解；$k=0$ 两解 $x=1,3$；$0<k<1$ 四解；

$k=1$ 三解 $x=2\pm\sqrt{2},2$；$k>1$ 两解

设 $y^2+ay+2=0$ 的根为 y_1、y_2，则有 $f(x)=y_1$ 和 $f(x)=y_2$ 共有5个解

∴ 只可能为三解和两解的组合

∴ $y=1$ 是 $y^2+ay+2=0$ 的一个根

代入解得 $a=-3$

检验：$[f(x)]^2 \cancel{+} -3f(x)+2=0$ 的解满足 $f(x)=1$ 或 2，恰有5个不同的 x

∴ 所有满足条件的 a 的集合是 $\{-3\}$

12. $A \text{ nand } B = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$\overline{A \cap B} \text{ nand } U = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$ ✓

$A \text{ nand } U = \overline{A}$ ✓

同理 $\overline{B}$ 也是可表示的

$\overline{A} \text{ nand } \overline{B} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$ ✓

∴ ①②③

15、已知非空集合 A,B 满足以下两个条件：

① $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$， $A\cap B=\varnothing$

② A 的元素个数不是 A 中的元素， B 的元素个数不是 B 中的元素.

则有序集合对 (A,B) 的个数为（　　）

A. 16　　　　B. 22　　　　C. 26　　　　D. 32

集合名称	元素个数	集合	(A,B)对数
A	1	$\{6\}$	1
B	6	$\{1,2,3,4,5,7\}$	
A	2	$\{6,\square\}$	$C_5^1=5$
B	5	$\{2,\square,\square,\square,\square\}$	
A	3	$\{5,\square,\square$	$C_5^2=10$
B	4	$\{3,\square,\square,\square\}$	
A	4	$\{3,\square,\square,\square\}$	$C_5^3=10$
B	3	$\{4,\square,\square\}$	
A	5	$\{2,\square,\square,\square,\square\}$	$C_5^4=5$
B	2	$\{5,\square\}$	
A	6	$\{1,2,3,4,5,7\}$	1
B	1	$\{6\}$	

综上，共有 32种