专题练习 3

填空题:

1. 若函数 $y=f(x)$ 的值域是 $[\frac{1}{2},3]$，则函数 $F(x)=f(2x+1)+\frac{1}{f(2x+1)}$ 的值域是 $\underline{[2,\frac{10}{3}]}$

   解析　换元即可.

2. 函数 $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+3}(-2<x<0)$ 的值域为 $\underline{[2\sqrt{2}-3,\frac{2}{3})}$

   解析　设 $t=x+3(t\in(1,3))$，则 $y=\frac{t^2-3t+2}{t}=t+\frac{2}{t}-3$，根据对勾函数性质可知其值域为 $[2\sqrt{2}-3,\frac{2}{3})$

3. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$ 的值域是 $\underline{[0,\frac{\sqrt{6}}{6}]}$

   解析　首先换元，令 $t=x+1$, $\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}=\sqrt{\frac{t}{t^2+2t+4}}=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{t+\frac{4}{t}+2}}, & t\neq 0,\\ 0, & t=0.\end{cases}$，根据对勾函数的性质可知原函数的值域为 $[0,\frac{\sqrt{6}}{6}]$。

4. 函数 $y=\frac{1}{x^2+2x-4}$ 的严格增区间是 $\underline{(-\infty,-1-\sqrt{5})\text{ 和 }(-1-\sqrt{5},-1]}$.

   解析　**定义域先行**: $x\in\{x|x\neq -1\pm\sqrt{5}\}$
   外层函数为反比例函数，有两个严格减区间，故要寻找整体的严格增区间，应寻找内层函数的严格减区间即 $(-\infty,-1]$
   综合两者，因此是两个单调区间：$(-\infty,-1-\sqrt{5})$ 和 $(-1-\sqrt{5},-1]$
   注: 单调区间之间不能用并集符号连接!

5. 函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^{\sqrt{x^2-3x-4}}$ 的递增区间是 $\underline{\quad(-\infty,-1]\quad}$.

   解析　**定义域先行**: $x\in(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$
   外层函数为单调减的指数函数，故要寻找整体的严格增区间，应寻找内层函数的严格减区间即 $(-\infty,-1]$

6. 函数 $f(x)=\log_2(x-\frac{a}{x})\,(a>0)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上是增函数, 则 a 的取值范围是 $\underline{\quad(0,4)\quad}$.

   解析　当 $a>0$ 时, $y=x-\frac{a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
   考虑到**定义域**, 于是 $2-\frac{a}{2}>0$, 故 $a\in(0,4)$.

7. 已知函数 $y=log_2(x^2-ax-a)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上严格增，则 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,\frac{4}{3}]}$.

   解析　外层函数严格增，故内层函数 $y=x^2-ax-a$ 满足在区间 $(2,+\infty)$ 上严格增且函数值大于 0. 故应有 $\frac{a}{2}\leqslant 2$ 且 $4-3a\geqslant 0$，故 $a\leqslant\frac{4}{3}$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2021-ax}}{a-1}$ 在 $[0,1]$ 上严格减，那么实数 a 的取值的范围是 $\underline{(-\infty,0)\cup(1,2021]}$.

   解析　首先判断“定义域”，$2021-ax\geqslant 0$ 在 $x\in[0,1]$ 恒成立，设 $g(x)=2021-ax$，这是一条斜率不确定的线段，只需两个端点满足即可恒成立，即 $g(0)\geqslant 0,g(1)\geqslant 0$，因此 $a\leqslant 2021$，又因为 $a\neq 1$，因此 $a\in(-\infty,1)\cup(1,2021]$ 时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义.
   当 $a<0$ 时, $y=\sqrt{2021-ax}$ 在 $[0,1]$ 上严格单调增, 且 $a-1<0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调减, 符合题意, 当 $a=0$ 时, $f(x)=-\sqrt{2021}$ 并非严格增或严格减, 不符合题意, 当 $0<a<1$ 时, $y=\sqrt{2021-ax}$ 在 $[0,1]$ 上严格单调减, 且 $a-1<0$, 不符合题意, 当 $2021\geqslant a>1$ 时, $y=\sqrt{2021-ax}$ 在 $[0,1]$ 上严格单调减, $a-1>0$, 符合题意.
   综上实数 a 的取值的范围是 $(-\infty,0)\cup(1,2021]$.
   注: $y=a\cdot f(x)$，**即一个函数乘常系数，类型的函数的单调性在 $a>0$ 时与 $f(x)$ 保持一致，在 $a<0$ 时与 $f(x)$ 完全相反.**

9. 若函数 $y=\frac{a^x}{2a^2-5a+2}$ 在 $\mathbb{R}$ 上为严格减函数, 则 a 的取值范围是$\underline{\quad (0,\frac{1}{2})\cup(1,2) \quad}$.

解析 $\begin{cases} a\in(0,1) \\ 2a^2-5a+2>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a>1 \\ 2a^2-5a+2<0 \end{cases}$, 解得 $a\in(0,\frac{1}{2})\cup(1,2)$.

10. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax, x\geqslant -1 \\ (2-a)x+2a-5, x<-1 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是严格增函数, 则实数 a 的取值范围是$\underline{1\leqslant a\leqslant \frac{8}{5}}$.

解析 由函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax, x\geqslant -1 \\ (2-a)x+2a-5, x<-1 \end{cases}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上是严格增函数,

得 $\begin{cases} -a\leqslant -1 \\ 2-a>0 \\ 1-2a\geqslant -(2-a)+2a-5 \end{cases}$, 解得 $1\leqslant a\leqslant \frac{8}{5}$, 所以实数 a 的取值范围是 $1\leqslant a\leqslant \frac{8}{5}$. 故答案为: $1\leqslant a\leqslant \frac{8}{5}$

注: 分段函数严格单调增等价于各段都严格增，且在端点处相连或者满足“更上一层楼型”

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} (2-5a)^x & x<1 \\ \frac{a}{x}+5 & x\geqslant 1 \end{cases}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上严格递增，则实数 a 的取值范围是$\underline{\ [-\frac{1}{2},0)\ }$.

解析 函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上严格递增的充要条件为 $\begin{cases} 2-5a>1 \\ a<0 \\ a+5\geqslant 2-5a \end{cases}$, 解得 $a\in[-\frac{1}{2},0)$

12. 对于实数 a,b 定义运算 “*”: $a*b=\begin{cases} a^2-ab, & a\leqslant b, \\ b^2-ab, & a>b. \end{cases}$ 设 $f(x)=(2x-1)*(x-1)$，且关于 x 的方程 $f(x)=m(m\in\boldsymbol{R})$ 恰有三个互不相等的实数根 x_1,x_2,x_3，则 $x_1x_2x_3$ 的取值范围是$\underline{(-\frac{\sqrt{3}-1}{16},0)}$

解析 根据运算定义规则，首先求 $2x-1$ 和 $x-1$ 的交点，为 $(0,-1)$，

故 $f(x)=\begin{cases} (2x-1)^2-(2x-1)(x-1), & x\leqslant 0, \\ (x-1)^2-(2x-1)(x-1), & x>0. \end{cases}$

即 $f(x)=\begin{cases} 2x^2-x, & x\leqslant 0, \\ x-x^2, & x>0. \end{cases}$

观察函数图像可知，在满足题意的情况下，$y=m(0<m<\frac{1}{4})$ 与 $f(x)$ 在 y 轴左侧有一个交点，在 y 轴右侧有两个交点。故由韦达定理有 $x_2x_3=m$，$x_1=\frac{1-\sqrt{1+8m}}{4}$。故 $x_1x_2x_3=m\cdot\frac{1-\sqrt{1+8m}}{4}=-\frac{1}{4}(m\cdot(\sqrt{1+8m}-1))$。因为 $-\frac{1}{4}(m\cdot(\sqrt{1+8m}-1))$ 在 $m\in(0,\frac{1}{4})$ 单调递减，故其取值范围是 $(-\frac{\sqrt{3}-1}{16},0)$

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-|kx^2-2x|(k\in\boldsymbol{R})$ 恰有 4 零点，k 的取值范围是$\underline{(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)}$.

解析 容易判断，$g(x)$ 有一零点为 0. 设 $F(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ 1, & x<0. \end{cases}$, $H(x)=|kx-2|$，故其余三个零点是函数 $G(x)=F(x)-H(x)$ 的零点. 易知 $k=0$ 时 $G(x)$ 没有三个零点.

(1) 当 $k<0$ 时, $G(x)$ 在 $(-\infty,\frac{2}{k})$ 单调增，在 $(\frac{2}{k},0)$ 单调减，在 $(0,-\frac{k}{2})$ 单调减，在 $(-\frac{k}{2},+\infty)$ 单调增.$G(\frac{3}{k})=0,G(\frac{1}{k})=0,G(0)=-2,G(2-k)=2-2k$，故 $G(x)$ 有三个零点，分别是 $\frac{3}{k},\frac{1}{k}$，以及一个位于 $(0,2-k)$ 的零点.

(2) 当 $k>0$ 时，当 $x<0$，$G(x)=kx-1$，无零点.

当 $x\in(0,\frac{2}{k})$，$G(x)$ 单调增,$G(\frac{1}{k})=0$.

当 $x\geqslant\frac{2}{k}$, $G(x)=x^2-kx+2$, 要使得 $G(x)$ 在 $[\frac{2}{k},+\infty)$ 有两个零点, 必有 $\Delta>0$, 即 $k>2\sqrt{2}$. 抛物线的对称轴为 $x=\frac{k}{2}$，因为当 $k>2\sqrt{2}$ 时 $\frac{k}{2}>\frac{2}{k}$，又因为 $G(\frac{2}{k})>0$，所以当 $k>2\sqrt{2}$ 时，$G(x)$ 在 $[\frac{2}{k},+\infty)$ 有两个零点.

综上，$k\in(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$

注: 从数形结合角度平移 $H(x)$ 来看会更直观.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+9, & x\leqslant 1,\\ x+\frac{4}{x}+a, & x>1.\end{cases}$ 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)$，则实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$

解析　首先看到函数在 $x\leqslant 1$ 时是开口向上的二次函数，函数在 $x>1$ 时是对勾函数。由于 $f(1)$ 是最小值，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 应该单调递减，故其对称轴应该位于 $x=1$ 及其右侧，即 $a\geqslant 1$。这样我们有 $f(1)=10-2a<f(x),x<1$。又因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 为对勾函数，在 $(1,2]$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 的最小值在 $x=2$ 取得，$f(2)=4+a$, 故 $4+a\geqslant 10-2a$, 故 $a\geqslant 2$

注: 分段函数的最小值要比每一段内所有的函数值都要小.

15. “$a+b=0$” 是 “函数 $f(x)=x\,|x+a|+b$ 是奇函数” 的 必要不充分 条件

解析　奇函数若在 $x=0$ 处有定义, 则此处的函数值为零, 即 $f(0)=0$, 于是 $b=0$.
故 $f(x)=x\,|x+a|$. 于是由 $f(x)$ 为奇函数，不难得到 $a=0$, 比如 $f(-a)+f(a)=0$.

16. 若函数 $f(x)=\frac{a-e^x}{1+a\cdot e^x}$($a$ 为常数) 在定义域上为奇函数, 则 a 的值为 ± 1 .

解析　首选解法：$f(0)=0$ 或无意义，即 $\frac{a-1}{1+a}=0$ 或 $\frac{a-1}{1+a}$ 无意义，故 $a=\pm 1$
也可以采用就极限思想：让函数在 $\pm\infty$ 时的极限互为相反数求解：$x\to+\infty,f(x)\to-\frac{1}{a},x\to-\infty,f(x)\to a$，由 $a=\frac{1}{a}$ 得 $a=\pm 1$.
把握定义求解有：$f(x)=\frac{a-e^x}{1+a\cdot e^x},f(-x)=\frac{a-e^{-x}}{1+a\cdot e^{-x}}=\frac{ae^x-1}{a+e^x}$
由 $f(x)=-f(-x)$ 知 $\frac{a-e^x}{1+a\cdot e^x}=\frac{1-ae^x}{a+e^x}$，交叉相乘得到 $a^2-e^{2x}=1-a^2e^{2x}$，移项整理得 $(a^2-1)=(1-a^2)\cdot(e^{2x})$，因为此式恒成立，所以必有 $a=\pm 1$

17. 已知 $\boldsymbol{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 与偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)-g(x)=2^x$, 若对于 $\forall x\in(0,2]$, $mf(x)-g(2x)\geqslant 0$ 恒成立，则 m 的取值范围是 $[-2\sqrt{2},+\infty)$

解析　$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2},g(x)=-\frac{2^x+2^{-x}}{2}$
故 $m(\frac{2^x-2^{-x}}{2})+\frac{4^x+4^{-x}}{2}\geqslant 0$ 在 $(0,2]$ 上恒成立.
换元 $t=2^x-2^{-x},t\in(0,\frac{15}{4}]$，则 $4^x+4^{-x}=t^2+2$，故有 $mt+t^2+2\geqslant 0$ 在 $(0,\frac{15}{4}]$ 上恒成立.
参变分离有 $m\geqslant-(t+\frac{2}{t})$ 在 $(0,\frac{15}{4}]$ 上恒成立. 由对勾函数性质可知 $-(t+\frac{2}{t})$ 在 $(0,\frac{15}{4}]$ 上最大值为 $-\sqrt{2}$，因此有 $m\geqslant[-2\sqrt{2},+\infty)$

注: **一个定义域关于原点对称的函数 $f(x)$ 一定能够拆成一个奇函数和一个偶函数之和：** $f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

18. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x & x\leqslant 0\\ ax^2+bx & x>0\end{cases}$ 为奇函数，则 $a+b=$ 0

解析　代入特值有 $f(1)=a+b$，$f(-1)=0$，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以有 $a+b=0$

注: 根据奇偶性求参数可以考虑代入特值（必要条件），但最后需要检验是否充要（本题只问 $a+b$ 并不涉及）.

解答题:

1. 求下列函数的值域:

   (1) $y=\frac{3+x}{4-x}$; (2) $y=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$; (3) $y=\frac{x^4+x^2+5}{(x^2+1)^2}$.

   解析

   (1) $y=-1+\frac{7}{4-x}\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

   (2) $y=2+\frac{x}{x^2+x+4}$.
   当 $x=0$ 时, $y=2$; 当 $x\neq 0$ 时, $y=2+\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}$.
   $x+\frac{4}{x}+1\in(-\infty,-3]\cup[5,+\infty)$, 故 $y\in[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$

   (3) $y=\frac{(x^2+1)^2-(x^2+1)+5}{(x^2+1)^2}=1-\frac{1}{(x^2+1)}+\frac{5}{(x^2+1)^2}$.
   令 $t=\frac{1}{(x^2+1)},t\in(0,1]$, 故 $y=5t^2-t+1\in[\frac{19}{20},5]$

2. 求下列函数的值域:

   (1) $y=x+4\sqrt{1-x}$; (2) $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. (3) $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{2+x}$. (4) $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{2-x}$.

   解析

   (1) 令 $t=\sqrt{1-x}\in[0,+\infty)$, 则 $x=1-t^2$, 故 $y=1-t^2+4t=-(t-2)^2+5\in(-\infty,5]$.
   注: 可化为二次的.

   (2) 当 $x>1$ 时, $y=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}}=\sqrt{1+\frac{2x}{x^2-2x+1}}=\sqrt{1+\frac{2}{x+\frac{1}{x}-2}}\in(1,+\infty)$.
   当 $x<1$ 时, $y=-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}}=-\sqrt{1+\frac{2x}{x^2-2x+1}}$.
   再分为 $(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,1)$ 讨论可得 $y\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]$.
   综上, $y\in(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup(1,+\infty)$.

   (3) $y=\sqrt{1+x}-\sqrt{2+x}=\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{2+x})}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x})}=\frac{-1}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{2+x})}$
   易知函数在定义域 $[-1,+\infty)$ 内单调递增, 最小值在左端点 $x=-1$ 取 $y=-1$, 当 x 趋于无穷时, 函数值趋于 0。因此值域为 $[-1,0)$

   (4) $y=\sqrt{1+x}+\sqrt{2-x}$, 故 $y^2=(1+x)+(2-x)+2\sqrt{(1+x)(2-x)}=3+2\sqrt{(1+x)(2-x)}\in[3,6]$, 故 $y\in[\sqrt{3},\sqrt{6}]$

3. 设 a 为实数, 函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$.

   1. 若 $f(0)\geqslant 1$, 求 a 的取值范围; 2. 求 $f(x)$ 的最小值.

   解析

   1. $f(0)=-a|a|$, 因为 $g(x)=-x|x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格单调递, 且 $g(-1)=1$.
   于是 $f(0)=-a|a|\geqslant 1=g(-1)\iff a\leqslant -1$.
   注: 想象一下 $g(x)=-x|x|$ 的图象.

   2. $f(x)=\begin{cases}x^2+2ax-a^2, & x\leqslant a\\ 3x^2-2ax+a^2, & x\geqslant a\end{cases}$.
   函数图象由两个二次函数图象的部分拼接而成, 且拼接处连续, 分析两个开口向上的二次函数的对称轴可知, 一个为 $x=-a$, 一个为 $\frac{a}{3}$
   讨论拼接点 $x=a$ 与两个对称轴不同的位置关系下函数的单调性, 即可得到函数的最小值, 在不同的拼接点条件下寻找全局的最小值即为所求.

   ① $a=0$ 时, 三者重合, 此时最小值为 0

   ② $a>0$ 时, $-a<\frac{a}{3}<a$, 故函数 $f(x)$ 在第一段上先减后增, 在第二段上单调增, 因此最小值在第一段的顶点处取得 ($x=-a$), 最小值为 $-2a^2$

③ $a<0$ 时，$a<\frac{a}{3}<-a$，故函数 $f(x)$ 在第一段上单调递减，在第二段上先减后增，因此最小值在第二段顶点取得（$x=\frac{a}{3}$），最小值为 $\frac{2a^2}{3}$

综上，$a<0$ 时为 $\frac{2a^2}{3}$，$a\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-2a^2$.

注: 最值需要通过单调性来说明，分段函数分段求，分析各段上函数的单调性. 另外, 本题的另一个麻烦之处在于函数中的分段点与参数 a 有关, 各段中的 “对称轴”(单调区间的端点) 亦与参数 a 有关.

4. 已知函数 $f(x)=x^2+(x-1)|x-a|$，是否存在实数 a，使得不等式 $f(x)\geqslant 2x-3$ 对一切实数 x 恒成立，若存在，求出 a 的范围，若不存在，说明理由.

解析　不等式 $f(x)\geqslant 2x-3$ 对一切实数 x 恒成立即 $f(x)-2x+3\geqslant 0$ 恒成立. 设 $g(x)=f(x)-2x+3$，$g(x)=\begin{cases}(a-1)x+(3-a) & x<a\\ 2x^2-(a+3)x+(a+3) & x\geqslant a\end{cases}$，故应有 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立.

① $a>1$ ，此时 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 为单调递增的一次函数，不满足要求.

② $a=1$，此时 $g(x)=2(x<a)$，当 $x\geqslant a$ 时 $g(x)$ 单调递增，故满足要求.

③ $a<1$，此时 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 为单调递减的一次函数，在 $[a,\frac{a+3}{4})$ 单调减，在 $[\frac{a+3}{4},+\infty)$ 单调增，故 $g(x)\geqslant g(\frac{a+3}{4})=(a+3)-\frac{(a+3)^2}{8}$，当 $(a+3)-\frac{(a+3)^2}{8}\geqslant 0$ 时满足题意，解得 $a\in[-3,1)$

综上，$a\in[-3,1]$

注: 函数解析式内有部分绝对值的情况通常要写成分段函数来分析

5. 函数 $f(x)=\frac{x^2+(3a+1)x+c}{x+a}(a,c\in \boldsymbol{R})$

(1) 当 $a=0$ 时，是否存在实数 c 使得 $f(x)$ 是奇函数

(2) 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1,3)$，且 $f(x)$ 的图像和 x 轴负半轴有两个交点，求实数 a 的取值范围

解析

(1) 当 $a=0$，$f(x)=\frac{x^2+x+c}{x}=x+1+\frac{c}{x}(x\neq 0)$，$f(1)+f(-1)=2\neq 0$，故不存在 c 使得 $f(x)$ 为奇函数.

(2) $f(1)=\frac{2+3a+c}{1+a}=3$, 故 $c=1, f(x)=\frac{x^2+(3a+1)x+1}{x+a}$. 函数的零点是函数的分子部分的零点子集，故 $g(x)=x^2+(3a+1)x+1(x\neq -a)$ 与 x 轴负半轴有两个交点 x_1,x_2。

$$\begin{cases}\Delta=(3a+1)^2-4>0,\\ x_1+x_2=-(3a+1)<0,\\ a^2-(3a+1)a+1\neq 0.\end{cases}$$

解得 $a>\frac{1}{3}$且$a\neq\frac{1}{2}$

注: 否定一个函数是奇函数可以通过举反例.

6. 设函数 $f(x)=log_a(x-2a)+log_a(x-3a)$，其中 $a>0$且$a\neq 1$。若在区间 $[a+3,a+4]$ 上 $f(x)\leqslant 1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解析　由定义域的要求可知 $a+3>3a$，即 $a<\frac{3}{2}$。$f(x)$ 的单调性由 a 决定，下面进行分类讨论。

(1) $\frac{3}{2}>a>1$
此时 $f(x)$ 单调递增，故 $f(a+4)\leqslant 1$，即 $log_a((4-a)(4-2a))\leqslant 1$，
即 $(4-a)(4-2a)\leqslant a$，解得 $a\in(\frac{13-\sqrt{41}}{4},\frac{13+\sqrt{41}}{4})$(舍弃)

(2) $1>a>0$

此时 $f(x)$ 单调递减，故 $f(a+3)\leqslant 1$，即 $log_a((3-a)(3-2a))\leqslant 1$，

即 $(3-a)(3-2a)\geqslant a$，解得 $a\in(-\infty,\frac{5-\sqrt{7}}{2})\cup(\frac{5+\sqrt{7}}{2},+\infty)$，结合 $1>a>0$，得到 $a\in(0,1)$

综上，$a\in(0,1)$

注: 也可以在分类讨论的时候不解一元二次不等式

(1) $\frac{3}{2}>a>1$

由于 $y=(4-a)(4-2a)-a=2a^2-13a+16$ 在 $(1,\frac{3}{2})$ 内单调递减，而 $a=\frac{3}{2}$ 时不等式不成立，因此这种情况无解。

(2) $1>a>0$

由于 $y=(3-a)(3-2a)-a=2a^2-10a+9$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，而 $a=1$ 时不等式成立，因此这种情况解集为 $(0,1)$。