3.4 函数的奇偶性（2）

【A 组】

1、若函数 $y=f(x),\ x\in[-2,\ a]$ 是偶函数，则 a 的值为 2.

2、若 $f(x)$、$g(x)$ 都是定义在 $[-a,\ a]$ 上的奇函数，且 $g(x)\neq 0$，则下列函数中，为奇函数的是：①③；为偶函数的是：②④.

① $f(x)+g(x)$；　② $f(x)\cdot g(x)$；　③ $f(x)-g(x)$；　④ $\frac{f(x)}{g(x)}$

3、若 $y=f(x)\,(x\in[-1,1])$，则 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 是 偶 函数，$G(x)=f(x)-f(-x)$ 是 奇 函数.（填奇偶性）

4、已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数，且 $f(1)=1$，若 $g(x)=f(x)+2$，则 $g(-1)=$ -1.

5、已知对于任意实数 x，函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，若方程 $f(x)=0$ 有 2019 个实数解，则这 2019 个实数解之和为 0.

【B 组】

1、已知 $f(x)=ax^2+(b-3)x+3\,(x\in[a^2-2,\ a])$ 是偶函数，则 $a+b=$ 4.

2、如果函数 $y=x^2+bx+c$ 是偶函数，则实数 b, c 所满足的一个充要条件是 $b=0, c\in R$.

3、若函数 $y=(x+a)(bx+2a)$（常数 $a,\ b\in\mathrm{R}$）是偶函数，且它的最大值为 4，则该函数的解析式 $y=$ $-2x^2+4$.

4、已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)=$ -26.

5、设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，$g(x)$ 是 R 上的偶函数，若函数 $f(x)+g(x)$ 的值域为 $[-1,4)$，则 $f(x)-g(x)$ 的值域为 $(-4,1]$.

6、已知函数 $y=\begin{cases}-x^2+x, & x>0\\ ax^2+x, & x<0\end{cases}$ 是奇函数，则 $a=$ 1.

7、设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是（B）

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$　　C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

8、已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，则 $f(\frac{5}{2})$ 的值是__0__.

9、给出下列关于函数奇偶性的命题:

①“函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称”是“函数 $y=f(x)$ 是偶函数或者奇函数”的必要条件;

②如果一个函数的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形，那么这个函数是奇函数;

③定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 若满足 $f(-1)=f(1)$，那么 $y=f(x)$ 是偶函数;

④定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 若满足 $f(-1)\neq -f(1)$，那么 $y=f(x)$ 不是奇函数;

其中真命题的序号是__①②④__(填所有真命题的序号).

10、已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都是定义域为 **R** 的奇函数，且 $g(x)$ 不恒为零，则给出下列四个函数：① $F(x)=f(x)+g(x)$；② $F(x)=f(x)-g(x)$；③ $F(x)=f(x)\cdot g(x)$；④ $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$；其中一定是偶函数的是__③④__.

11、已知 $f(x)=\frac{ax+b}{1+x^2}$，若函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式； (2) 求函数 $y=f(x)$ 的值域.

12、已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数 $a\in\mathbf{R}$）。

(1) 当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$；(2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

11、已知 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$，若函数 $y=f(x)$ 是定义在R上的奇函数，且 $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式； (2) 求函数 $y=f(x)$ 的值域.

解 (1) ∵ $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的奇函数

∴ $f(0)=0$ $b=0$

∵ $f(\frac{1}{2})=\frac{2}{5}$ $a=1$

$y=f(y)$ 的解析式 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ $x\in(-1,1)$

(2) 当 $x=0$ 时 $f(0)=0$

当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+x}$

① $x>0$ 时 基本不等式 $f(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+x}\leq\frac{1}{2}$ 当且仅当 $x=1$ 时取等

此时 $f(x)\in(0,\frac{1}{2}]$

② $x<0$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+x}=\dfrac{-1}{\frac{1}{-x}+(-x)}\geq-\frac{1}{2}$

当且仅当 $x=-1$ 时取等

$f(x)\in[-\frac{1}{2},0)$

综上所述 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

12、已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数 $a\in\mathbf{R}$）。

(1) 当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$；(2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由.

解：(1) $a=2$ 时 $f(x)-f(x-1)>2x-1$

$$x^2+\frac{2}{x}-(x-1)^2-\frac{2}{x-1}>2x-1$$

$$x(x-1)<0$$

$$0<x<1$$

(2) ① 当 $a=0$　$f(x)=x^2$

$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 关于原点对称

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$

$\therefore f(x)$ 为偶函数

② 当 $a\neq 0$　$f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ $(a\neq 0,\ x\neq 0)$

取 $x=\pm 1$　$f(-1)+f(1)=2\neq 0$

$f(-1)-f(1)=-2a\neq 0$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数、