蒲涵

100+20

4.1 幂函数&指数幂的拓展（1）

「指数幂的拓展」

1. 当 $x<0$ 时，$|x|+\sqrt[6]{x^6}+2\sqrt[3]{x^3}+3\sqrt[4]{x^4}=$ $\underline{-3x}$.

$-x \quad -x \quad 2x \quad -3x$

2. 若 $a>0$，$b>0$，化简 $\left(a^{2-\sqrt{3}}b\right)^{2+\sqrt{3}}\cdot b^{2-\sqrt{3}}=$ $\underline{ab^4}$.

3. 化简：$\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}x^{-1}y^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{5}{8}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}\right)}\times\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\sqrt{y}}}=$ 　　$\left(x^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x}\,(x>0)$ 　　$\dfrac{\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}(a>0,b>0)$.

解：(1) 原式 $=\dfrac{5x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{16}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{6}}}=16x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{3}}=16\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y}}$

(2) 原式 $=x^{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^2$

(3) 原式 $=\dfrac{-3a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{5}{6}}}{\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}}=-9a$

4. 已知 $x+y=12$，$xy=9$，且 $x<y$，求 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$.

解：原式 $=\dfrac{(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}{(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

$\because x<y$

$\therefore x-y=-\sqrt{(x+y)^2-4xy}=-\sqrt{12^2-4\times9}=-6\sqrt{3}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{12+2\sqrt{9}}{-6\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

5. 已知 $4^x=a$，求 $\dfrac{2^{3x}+2^{-3x}}{2^x+2^{-x}}$ 的值.

解：原式 $=\dfrac{(2^x+2^{-x})(2^{2x}-2^x\cdot2^{-x}+2^{-2x})}{2^x+2^{-x}}=4^x+\dfrac{1}{4^x}-1=a+\dfrac{1}{a}-1$

「幂函数」

【A 组】

1. 若 $f(x)=ax^2+b$ 是幂函数，则实数 a，b 满足条件 $\underline{a=1,\ b=0}$.

2. 若幂函数的图像经过点（4，2），则此幂函数为 $\underline{f(x)=\sqrt{x}}$.

3. 幂函数 $y=x^{-3}$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的值域为 $\underline{[-1,-\frac{1}{8}]}$.

4. 幂函数 $y=x^a$ 的图像不经过原点，那么 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,0]}$.

5. 如果幂函数 $y=x^a$ 的图像，当 $0<x<1$ 时，在直线 $y=x$ 的上方，那么 a 的取值范围是 $\underline{(-\infty,\ 1)}$.

6. 若一个幂函数的图像经过点 $(3,\dfrac{1}{9})$，则它的单调减区间是 $\underline{R^+}$.

$y=x^{-2}$

7. 设 $a\in\{-2,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2},2\}$，已知函数 $y=x^a$ 为偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上递减，则 a 可取的值为 $\underline{\quad -2 \quad}$.

【B 组】

$y=x^{\frac{2}{3}}$

1.若幂函数 $y=x^k$ 的图像经过点 $(8,4)$，则函数 $y=x^k$ 的值域是 $\underline{\quad}$ $[0,+\infty)$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{2}}, x>0 \\ -x^{-1}, x<0 \end{cases}$，若 $f(x)=\frac{1}{3}$，则 $x=\underline{\frac{1}{9} 或 -3}$.

3. 若幂函数 $f(x)=(m^2+m-5)x^{m^2-2m-3}$ 的图象不经过原点，则 m 的值为 $\underline{\quad 2 \quad}$.

4. 幂函数 $y=x^k$ 的图像当 $0<x<1$ 时，在直线 $y=x$ 的上方，在 $x>1$ 时，在直线 $y=x$ 的下方，且 $k>0$，试写出一个符合上述条件的幂函数 $\underline{y=x^{\frac{1}{2}}}$.

5. 函数 $y=x^{\frac{3}{5}}$ 在区间 $[-1,1]$ 上是（ A ）

(A) 增函数且是奇函数　　(B) 增函数且是偶函数

(C) 减函数且是奇函数　　(D) 减函数且是偶函数

6. 下列四个命题中，正确的是 $\underline{①④}$.

① $y=x^{-4}$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数；

② $y=x^{\frac{3}{2}}$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

③ $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数；

④ $y=x^{-\frac{4}{5}}$ 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

7. 设 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 是两个不同的幂函数，集合 $M=\{x|f(x)=g(x)\}$，则集合 M 中的元素个数是（ B ）

(A) 1 或 2 或 0　(B) 1 或 2 或 3　(C) 1 或 2 或 3 或 4　(D) 0 或 1 或 2 或 3

8. 下列命题中，真命题的是（ C ）

(A) 幂函数中不存在既不是奇函数，又不是偶函数的函数；

(B) 如果一个幂函数不是偶函数，那么它一定是奇函数；

(C) 图象不经过$(-1,1)$的幂函数，一定不是偶函数；

(D) 如果两个幂函数有三个公共点，那么这两个函数一定相同.

9. 若幂函数$y=x^{m^2-2m-3}$ $(m\in\mathbf{Z})$的图像与坐标轴没有交点，且图像关于y轴对称，则m的值为 $-1,1,3$

10.已知函数$f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2+7m+11}$，问当实数$m$取什么值时，

① 函数$f(x)$是正比例函数；② 函数$f(x)$是反比例函数；③ 函数$f(x)$是幂函数.

解：① $\begin{cases} m^2-m-1\neq 0 \\ m^2+7m+11=1 \end{cases}$ $m\in\{-2,-5\}$

② $\begin{cases} m^2-m-1\neq 0 \\ m^2+7m+11=-1 \end{cases}$ $m\in\{-3,-4\}$

③ $m^2-m-1=1$ $m\in\{2,-1\}$

11. 已知$(a+1)^{-\frac{3}{5}}<(3-2a)^{-\frac{3}{5}}$，求实数$a$的取值范围.

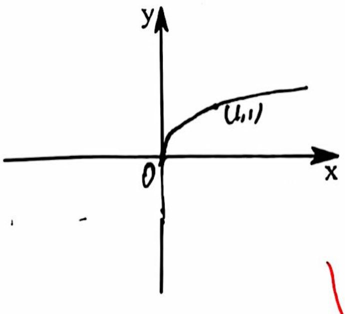
解. 令 $f(x)=x^{-\frac{3}{5}}$，$f(x)$ 在 R^- 与 R^+ 单调↓，在$\{0\}$无定义

故 $a+1<0<3-2a$
或
$a+1>3-2a>0$
或
$3-2a<a+1<0$

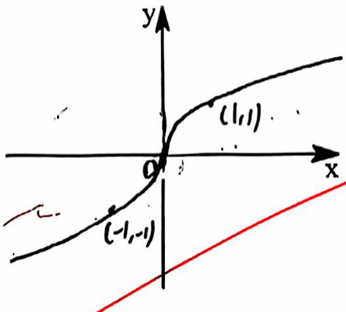
解得 $a\in(-\infty,-1)\cup(\frac{2}{3},\frac{3}{2})$

12. 画出下列函数的图象：

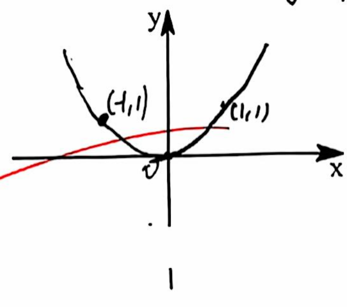
① $y=x^{\frac{1}{4}}$；



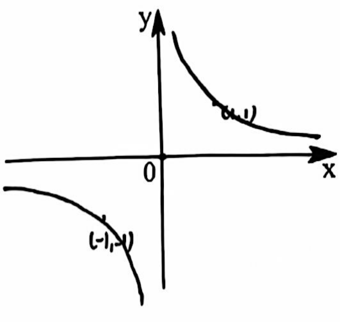
② $y=x^{\frac{3}{5}}$；



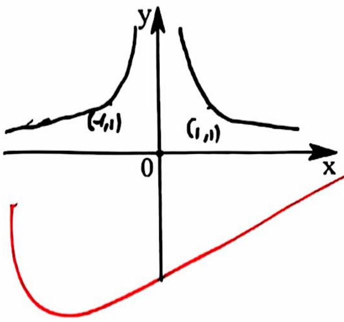
③ $y=x^{\frac{4}{3}}$



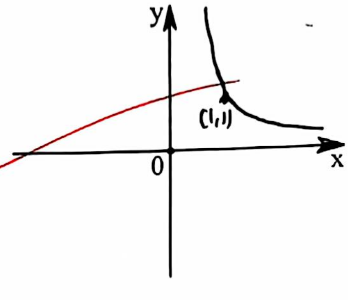
④ $y=x^{-\frac{1}{3}}$；

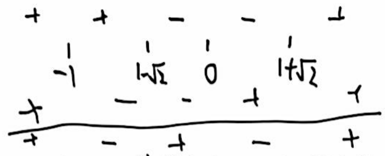


⑤ $y=x^{-\frac{2}{5}}$；



⑥ $y=x^{-\frac{3}{2}}$





13. 讨论函数 $y=(k^2+k)x^{k^2-2k-1}$ 在 $x>0$ 时随着 x 的增大其函数值的变化情况.

解：记 $f(x)=x^{k^2-2k-1}$

$k\in(1-\sqrt2,1+\sqrt2)$ 时, $f(x)\downarrow$,

$k\in(-\infty,1-\sqrt2)\cup(1+\sqrt2,+\infty)$ 时, $f(x)\uparrow$

$k\in\{1-\sqrt2,1+\sqrt2\}$ 时, $f(x)=1$

而 $k\in(-1,0)$, $k^2+k<0$

$k\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, $k^2+k>0$

$k\in\{-1,0\}$, $k^2+k=0$

综上所述, $k\in\{-1,1-\sqrt2,0,1+\sqrt2\}$, y 为常值

$k\in(-1,1-\sqrt2)\cup(0,1+\sqrt2)$, y 递减

$k\in(-\infty,-1)\cup(1-\sqrt2,0)\cup(1+\sqrt2,+\infty)$, y 递增

14. 已知幂函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}p^2+p+\frac{3}{2}}$ $(p\in Z)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，且在定义域上是偶函数.

(1) 求 p 的值，并写出函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 对于 (1) 中求得的函数 $f(x)$，设函数 $g(x)=-q\cdot f[f(x)]+(2q-1)\cdot f(x)+1$，问是否存在实数 q $(q<0)$，使得 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,-4]$ 上是严格减函数，且在 $(-4,0)$ 上是严格增函数. 若存在，请求出 q；若不存在，请说明理由.

解：(1) $-\frac12p^2+p+\frac32>0$

$p\in(-1,3)$

而 $p\in Z$

$\therefore p\in\{0,1,2\}$ 记定义域为 I

$p=0$ 时, $f(x)=x^{\frac32}$, $I=[0,+\infty)$, 舍

$p=1$ 时, $f(x)=x^2$, 可取

$p=2$ 时, $f(x)=x^{\frac32}$, 舍

$\therefore p=1$, $f(x)=x^2$

(2) $g(x)=-qx^4+(2q-1)x^2+1$

令 $p(x)=-qx^2+(2q-1)x+1$

$g(x)=p(x^2)$

$y=x^2$ 在 R^- 严格减

故 $p(x)$ 在 $[16,+\infty)$ 严格增, 在 $(0,16)$ 严格减

故 $\begin{cases}-q>0\\ \frac{2q-1}{2q}=16\end{cases}$ 即 $q=-\frac{1}{30}$

($x=16$ 为 $f(x)$ 对称轴)

【C组】

1. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=1+\sqrt{2f(x)-f^2(x)}$ $(x\in R)$，求 $f(1)+f(2020)$ 的最大值.

解: $f(x+1)-1=\sqrt{2f(x)-f^2(x)}$

故 $1\le f(x)\le 2$, $\forall x\in R$

移方得 $f^2(x+1)-2f(x+1)+1=2f(x)-f^2(x)$

令 $g(x)=f^2(x)-2f(x)$

$g(x+1)+1=-g(x)$

$g(x+2)+1=-g(x+1)$

相减, $g(x+1)-g(x+2)=g(x+1)-g(x)$

即 $g(x)=g(x+2)$

$f^2(x)-2f(x)=f^2(x+2)-2f(x+2)$

$(f(x)-1)^2=(f(x+2)-1)^2$

而 $\forall x\in R$, $f(x)\ge 1$

$\therefore f(x)=f(x+2)$

$T=2$

原式 $=f(0)+f(1)=f(0)+1+\sqrt{2f(0)-f^2(0)}$

令 $f(0)=t$, 原式 $=t+1+\sqrt{2t-t^2}$

由Cauchy, $(t-1+\sqrt{2t-t^2})^2\le(t^2-2t+1+2t-t^2)(1+1)$

故 原式 $\le 2+\sqrt2$, 最大值为 $2+\sqrt2$ 在 $t=1+\frac{\sqrt2}{2}$ 时取到

$$f(x+2)=1+\sqrt{2f(x+1)-f^2(x+1)}=1+\sqrt{-(f(x+1)-1)^2+1}$$

$$=1+\sqrt{-(2f(x)-f^2(x))+1}=1+\sqrt{(f(x)-1)^2}$$

注意到，$f(x+1)\geq 1$ 恒成立 ∴ $f(x)\geq 1$ 也恒成立

∴ $f(x+2)=1+|f(x)-1|=f(x)$. $T=2$

∴ $f(2020)=f(2)$. $f(1)+f(2020)=f(1)+f(2)$.

又令 $x=1$, $f(2)=1+\sqrt{2f(1)-f^2(1)}$

$f(1)+f(2)=f(1)+1+\sqrt{2f(1)-f^2(1)}$. 设 $f(1)=t$ $(t\geq 1)$

由柯西不等式

$$\left(t-1+\sqrt{2t-t^2}\right)^2\leq\left[(t-1)^2+\left(\sqrt{2t-t^2}\right)^2\right](1^2+1^2)=2$$

$t=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立

∴ $\left(t-1+\sqrt{2t-t^2}\right)_{max}=\sqrt{2}$

∴ $\left(f(1)+f(2020)\right)_{max}=\sqrt{2}+2$.