138

专题练习 4：函数性质综合应用

填空题：

1. 函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的严格单调函数，且对 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $f(f(x)-\frac{4}{x})=4$，则 $f(x)=$ ______ $\frac{4}{x}+2$

2. 已知函数 $f(x)=x^3+x$，若 $f(t^2+2t+k)+f(-2t^2+2t-5)>0$ 对任意的 $t\in[0,5]$ 都成立，则 k 的取值范围是 ______ $(10,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)=2^x-(\frac{1}{2})^x+3$，且 $f(m^2)+f(-5m+4)<6$，则实数 m 的取值范围是 ______ $(1,4)$.

4. 已知函数 $y=f(3x+1)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为严格增函数，若 $f(x)<f(2x+1)$，则 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$.

5. 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $[2-a,3]$ 上是偶函数，在 $[0,3]$ 上严格单调递减，并且 $f(-m^2-\frac{a}{5})>f(-m^2+2m-2)$，则 m 的取值范围是 $(-\infty,\frac{1}{2})$.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & 0<x<2,\\ -2x+8, & x\geqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+2)$，则 $f(\frac{1}{a})$ 的值是 ______ 2

7. 设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}$。对任意 $x\in[1,+\infty)$，$f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)$

8. 函数 $y=\frac{3-x}{1+2x}$ 的严格递减区间是 $(-\infty,\frac{1}{2})$ 5 $(-\frac{1}{2},+\infty)$，对称中心是 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，值域是 $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},+\infty)$

9. 已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-4$，且 $f(-2)=10$，则 $f(2)=$ -18

10. 已知 $f(x)=\frac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}+1$ 在 $[-2018,-1]\cup[1,2018]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$ 2.

11. 已知函数 $f(x)=\frac{3^{x+1}+1}{3^x+1}$ 在 $[-2021,2021]$ 上的最大值和最小值分别为 M,m，则 $M+m=$ 4

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x+1)$ 是奇函数，$f(x+2)$ 是偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=kx+b$，若 $f(0)+f(3)=8$，则 $f(\frac{2023}{2})=$ 4

13. 已知函数 $g(x)=x^3-9x^2+29x-30$，$g(n)=-12$，$g(m)=18$，则 $m+n=$ 6

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & x\leqslant 1\\ (x-1)^2 & x>1\end{cases}$，函数 $g(x)=b-f(1-x)$，如果 $y=f(x)-g(x)$ 恰有两个零点，则实数 b 的取值范围是 $\{\frac{3}{4}\}\cup(1,+\infty)$

15. 已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(\pi-x)$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时 $f(x)=\sqrt{x}$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ 上的零点个数为 9

16（选）函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f(x+y)+f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(1)=0$，则 $f(2022)=$ 0 或 -2

17. $f(x)$ 是定义在 R 上的以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,6]$ 内的解的个数的最小值是 9.

18. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-m$，则 $f(2023)=$ -1

选择题:

C 1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数，$h(x)=a\cdot f(x)-b\cdot g(-x)+8$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有最大值 9，那么 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最小值为 ( )

(A) -9 (B) -1 (C) 7 (D) 1

A 2. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty),x_1\neq x_2$, 有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, 则( )

(A) $f(3)<f(-2)<f(1)$ (B) $f(1)<f(-2)<f(3)$

(C) $f(-2)<f(1)<f(3)$ (D) $f(3)<f(1)<f(-2)$

B 3. 已知函数 $f(x)\neq -1$, 且对定义域内任意的 x 总有关系 $(f(x+\pi)+1)(f(x)+1)=2$, 那么下列结论中正确的是 ( )

(A) $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数 (B) $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数

(C) $f(x)$ 是周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数 (D) $f(x)$ 不是周期函数

C 4. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$。若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)=$ ( )

(A) -50 (B) 0 (C) 2 (D) 50

解答题:

1. 函数 $f(x)=\frac{x}{ax+b}$ $(a,b$ 是非零常数)，满足 $f(2)=1$，且方程 $f(x)=x$ 仅有一个解.

(1) 求 a,b 的值

(2) 是否存在常数 m，使得对于定义域内任意的 x，$f(x)+f(m-x)=4$ 恒成立

(3) 在平面直角坐标系中，求定点 $A(-3,1)$ 到此函数上任意一点 P 的距离 $|AP|$ 的最小值.

解(1) $\begin{cases}\frac{2}{2a+b}=1\\ \frac{x}{ax+b}=x \text{ 有唯一解}\end{cases}$

讨论得 $\boxed{\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=1\end{cases}}$

(2) $f(x)=\frac{2x}{x+2}=2-\frac{4}{x+2}$

$\therefore \frac{4}{m-x+2}+\frac{4}{x+2}=0$

$\therefore m=-4$，故 $\boxed{存在}$

(3) 设 $P(x,\frac{2x}{x+2})$，令 $t=x+2$

$\therefore |AP|^2=t^2+2t-\frac{8}{t}+\frac{16}{t^2}+2$

$=(t-\frac{4}{t}+1)^2+9$

≥ 9

$\therefore |AP|_{min}=\boxed{3}$，此时 $x_p=-\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

2. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数，且 $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$. 1. 求证: $f(x)$ 是周期函数; 2. 若 $f(4)=-\sqrt{3}$, 求 $f(2020)$.

解: (1) $f(x+2)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$

$\therefore f(x+4)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=-\frac{1}{f(x)}$

$\therefore f(x+8)=-\frac{1}{f(x+4)}=f(x)$

得证.

(2) $f(2020)=f(4)=\boxed{-\sqrt{3}}$

3. 已知函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，若 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)=x^2+x^4$，则 $x\in[2,6]$ 时求 $f(x)$ 解析式.

解：$f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+(x-4)^4=\boxed{x^4-16x^3+97x^2+264x+272}$

4. 已知 $y=f(x)(x\in\mathbb{R})$ 是奇函数, 若当 $x<0$ 时, $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+2^x-1$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

解：$\boxed{f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}+2^x-1, & x<0 \\ x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2^x}+1, & x\geqslant 0 \end{cases}}$

5. 已知函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有定义，对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x，都有 $f(ax)=af(x)$.

(1) 证明 $f(0)=0$

(2) 证明 $f(x)=\begin{cases} kx, & x\geqslant 0, \\ hx & x<0. \end{cases}$ 其中 k,h 均为常数。

(3) 当上一问中的 $k>0$，设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)(x>0)$，讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的单调性并求最值.

解：(1) 取 $x=0$，$a\neq 1$

$\therefore f(0)=af(0)$

$\therefore f(0)=0$

得证.

(2) 对 $\forall x_0>0$

$f(x_0)=x_0f(1)$

$\therefore k=f(1)$

对 $\forall x_0<0$ 同理可得 $h=f(-1)$

对 $x_0=0$ 显然成立

得证.

(3) $g(x)=\dfrac{1}{kx}+kx$

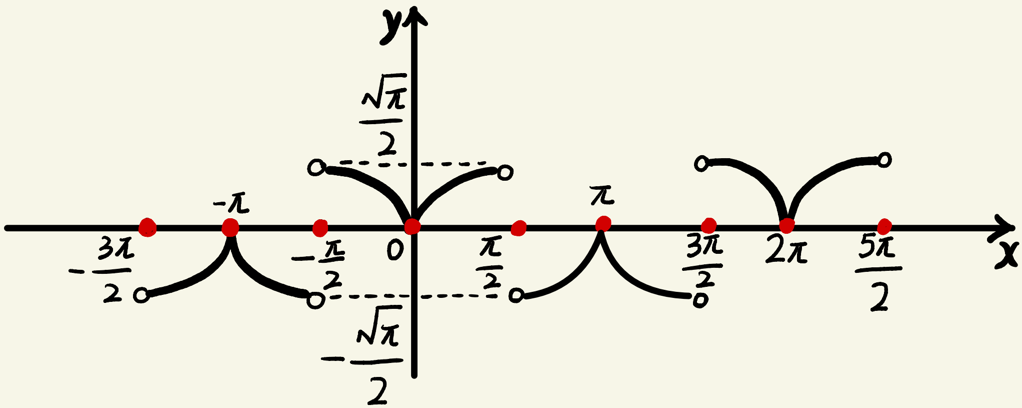
$g'(x)=k-\dfrac{1}{kx^2}$

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(0,1)$ 递减

$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 递增

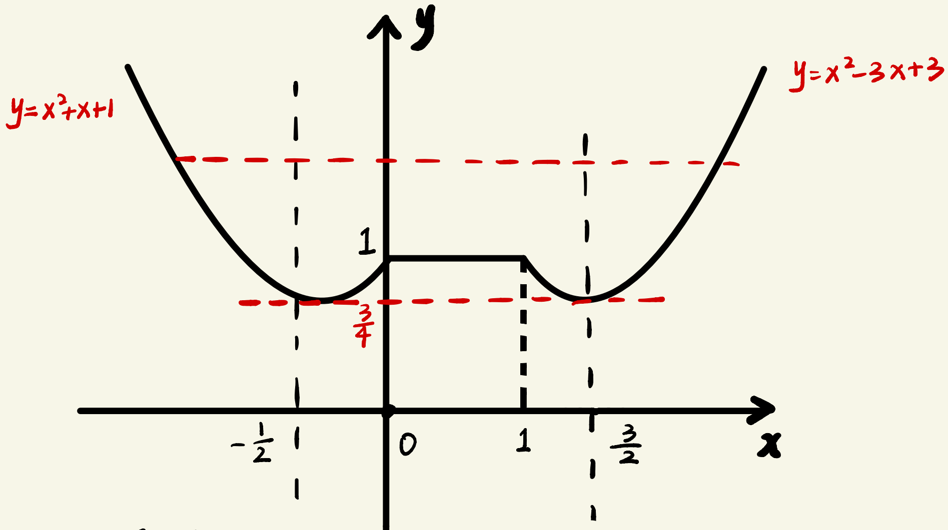
$g(x)_{min}=2$，x_0 为 $\frac{1}{k}$

-4



y
$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$-\pi$
π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$\frac{5\pi}{2}$
x
$-\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

第15题图



第14题图

专题练习 4

填空题:

1. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，且对 $x\in(0,+\infty)$ 都有 $f(f(x)-\dfrac{4}{x})=4$，则 $f(x)=$__$2+\frac{4}{x}$__

   解析　由于函数 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 的单调函数，则必有 $f(x)-\dfrac{4}{x}$ 为常数才可以使得 $f(f(x)-\dfrac{4}{x})=4$，故可以设 $f(x)=c+\dfrac{4}{x}$，因此有 $f(c)=c+\dfrac{4}{c}=4$，解得 $c=2$，因此 $f(x)=2+\dfrac{4}{x}$

2. 已知函数 $f(x)=x^3+x$，若 $f(t^2+2t+k)+f(-2t^2+2t-5)>0$ 对任意的 $t\in[0,5]$ 都成立，则 k 的取值范围是 $(10,+\infty)$.

   解析　$f(x)$ 为奇函数，在 $\boldsymbol{R}$ 上单调增，根据对称性可以将函数值上的不等关系转化为变量的不等关系，即 $(t^2+2t+k)+(-2t^2+2t-5)>0$ 在 $t\in[0,5]$ 恒成立.
   参变分离有 $t^2-4t+5<k$ 在 $t\in[0,5]$ 恒成立，因此有 $k>10$
   注: $f(x)$ 关于 (a,b) 对称，则 $f(x_1)+f(x_2)=2b\Leftrightarrow x_1+x_2=2a$
   $f(x)$ 关于 (a,b) 对称，且在定义域内单调增，则 $f(x_1)+f(x_2)<2b\Leftrightarrow x_1+x_2<2a$
   $f(x)$ 关于 (a,b) 对称，且在定义域内单调增，则 $f(x_1)+f(x_2)>2b\Leftrightarrow x_1+x_2>2a$
   $f(x)$ 关于 (a,b) 对称，且在定义域内单调减，则 $f(x_1)+f(x_2)>2b\Leftrightarrow x_1+x_2<2a$
   $f(x)$ 关于 (a,b) 对称，且在定义域内单调减，则 $f(x_1)+f(x_2)<2b\Leftrightarrow x_1+x_2>2a$
   以上结论可以通过代数推导，更推荐结合图像理解.

3. 已知函数 $f(x)=2^x-(\frac{1}{2})^x+3$，且 $f(m^2)+f(-5m+4)<6$，则实数 m 的取值范围是__$(1,4)$__.

   解析　直接应用上面结论即可，也可以设 $g(x)=f(x)-3$，将 $f(m^2)+f(-5m+4)<6$ 转化为 $g(m^2)+g(-5m+4)<0$ 后按照更熟悉的奇函数形式处理.

4. 已知函数 $y=f(3x+1)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为严格增函数，若 $f(x)<f(2x+1)$，则 x 的取值范围是__$(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$__.

   解析　函数 $y=f(3x+1)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上为严格增函数即 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，且"开口向上"，因此离对称轴 $x=1$ 近的变量的函数值小，由此 $f(x)<f(2x+1)$ 可以转化为 $|x-1|<|2x|$，两侧平方有 $(x-1)^2<4x^2$，解得 $x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},+\infty)$

5. 已知函数 $f(x)$ 在定义域 $[2-a,3]$ 上是偶函数，在 $[0,3]$ 上严格单调递减，并且 $f(-m^2-\frac{a}{5})>f(-m^2+2m-2)$，则 m 的取值范围是__$[1-\sqrt{2},\frac{1}{2})$__.

   解析　首先根据定义域的对称性可以求得 $a=5$，进一步根据对称性可以判断出函数"开口向下"，离 y 轴越近函数值越大，再结合定义域的要求，则 $f(-m^2-\frac{a}{5})>f(-m^2+2m-2)\Leftrightarrow$
   $\begin{cases}|-m^2-1|<|-m^2+2m-2|\\-3\leqslant -m^2-1\leqslant 3\\-3\leqslant -m^2+2m-2\leqslant 3\end{cases}$　第一个配方后可以直接去绝对值，最终得到 $m\in[1-\sqrt{2},\frac{1}{2})$
   注: **奇函数和偶函数的定义域都是关于原点对称的，若要证明奇偶性首先要判断定义域!**

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+x, & 0<x<2,\\-2x+8, & x\geqslant 2.\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+2)$, 则 $f(\frac{1}{a})$ 的值是__2__

   解析　根据题意可知 $0<a<2$，否则 $a>2,a+2>2$，由单调性可知无法满足 $f(a)=f(a+2)$，因此有 $a^2+a=-2(a+2)+8$。解得 $a=1$(舍去-4)，故 $f(\dfrac{1}{a})=f(1)=2$

7. 设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$。对任意 $x\in[1,+\infty),f(mx)+mf(x)<0$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

解析　$f(x)$ 为奇函数，在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 内单调递增，$f(1)=f(-1)=0$。

(1) 若 $m>0$，则 $x\in[1,+\infty)$ 时 $f(mx)>0, mf(x)>0$，不满足题意。

(2) 若 $m=0$，mx 不在 $f(x)$ 定义域内。

(3) 若 $m<0$，则 $f(mx)+mf(x)=mx-\dfrac{1}{mx}+mx-\dfrac{m}{x}=2mx-\dfrac{1+m^2}{mx}<0$，整理得 $2mx<\dfrac{1+m^2}{mx}\Rightarrow 2m^2x^2>1+m^2\Rightarrow m^2>\dfrac{1}{(2x^2-1)}$。因为当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\dfrac{1}{(2x^2-1)}\leqslant 1$，故 $m<-1$

8. 函数 $y=\frac{3-x}{1+2x}$ 的严格递减区间是 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 和 $(-\frac{1}{2},+\infty)$，对称中心是 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，值域是 $\{t\mid t\neq-\frac{1}{2}\}$.

解析　反比例函数对称中心的横坐标是分母为零的值，纵坐标是分离出的常数.

9. 已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-4$，且 $f(-2)=10$，则 $f(2)=$ -18

解析　$f(x)+f(-x)=-8$，函数关于 $(0,-4)$ 中心对称。

注：设 $g(x)=f(x)+4$，则 $g(x)$ 为奇函数.（多项式函数是奇函数等价于偶次方的系数为零，是偶函数等价于奇次方的系数为零.）

10. 已知 $f(x)=\frac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}+1$ 在 $[-2018,-1]\cup[1,2018]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$ 2 .

解析　设 $g(x)=\frac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}$，则 $g(x)=\frac{2^x+\frac{1}{2^x}+2}{x}=\frac{2^x+2^{-x}+2}{x}$，故 $g(-x)=-g(x)$，即 $g(x)$ 为奇函数，故 $M+m=2$

注：**涉及最大值与最小值和的题目一般可以优先考虑对称性**.

11. 已知函数 $f(x)=\frac{3^{x+1}+1}{3^x+1}$ 在 $[-2021,2021]$ 上的最大值和最小值分别为 M,m，则 $M+m=$ 4 .

解析　$g(x)=f(x)-2=\frac{3^x-1}{3^x+1}$ 为奇函数，故 $f(x)$ 关于 $(0,2)$ 中心对称，$M+m=4$

注：本题如果没有发现 $f(x)-2$ 是奇函数，利用单调性也是可以解决的，计算量相对大.

注：其实 $y=\frac{a^x-1}{a^x+1}$, $y=\frac{a^x+1}{a^x-1}$ 都是奇函数.

12. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\boldsymbol{R}$，$f(x+1)$ 是奇函数，$f(x+2)$ 是偶函数，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=kx+b$，若 $f(0)+f(3)=8$，则 $f(\frac{2023}{2})=$ 4

解析　因为 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 中心对称，当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)=kx+b$ 为连续函数，所以 $f(1)=0$ 且在 $[0,2]$ 上 $f(x)=kx+b$. 又因为 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，所以 $f(3)=f(1)$，故 $f(0)=8, f(\frac{1}{2})=4, f(\frac{3}{2})=-4$，即 $f(\frac{8k+1}{2})=4, f(\frac{8k+3}{2})=-4, f(\frac{8k+5}{2})=-4, f(\frac{8k+7}{2})=4(k\in\boldsymbol{Z})$ 因此 $f(\frac{2023}{2})=4$

注：如果对称中心的横坐标在定义域内，则对称中心在函数图象上，如果对称中心横坐标不在定义域内，则对称中心不在函数图象上；本题可以得到周期性的结论，但是对于解决问题并没有直接帮助。

13. 已知函数 $g(x)=x^3-9x^2+29x-30$，$g(m)=-12, g(n)=18$，则 $m+n=$ 6

解析　对于三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$，当 $b^2-3ac\leqslant 0$ 时，其为单调函数，因此 $g(x)$ 是单调函数.

对于三次函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$，其对称中心为 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$，故 $g(x)$ 对称中心为 $(3,3)$，因为 $\frac{g(m)+g(n)}{2}=3$，所以 $m+n=6$

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & x\leqslant 1\\(x-1)^2 & x>1\end{cases}$，函数 $g(x)=b-f(1-x)$，如果 $y=f(x)-g(x)$ 恰有两个零点，则实数 b 的取值范围是 $\{\frac{3}{4}\}\cup(1,+\infty)$

解析　设 $h(x)=f(x)-g(x)=f(x)+f(1-x)-b$，$h(x)$ 的零点即 $y=f(x)+f(1-x)$ 与 $y=b$ 的交点的横坐标. 因为 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称，所以 $y=f(x)+f(1-x)$ 关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称. 当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)+f(1-x)=1$；当 $x>1$ 或 $x<0$ 时，$f(x)+f(1-x)$ 为二次函数，最小值为 $\dfrac{3}{4}$
根据对称性绘制图像可知当 $b\in\{\frac{3}{4}\}\cup(1,+\infty)$ 时满足要求.
注: **两个互对称的函数相加的结果会具有自对称性.**

15. 已知定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=-f(\pi-x)$，当 $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时 $f(x)=\sqrt{x}$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[-\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$ 上的零点个数为__9__

解析　$f(x)=-f(\pi-x)$ 即 $f(x)$ 关于 $(\frac{\pi}{2},0)$ 中心对称，又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 2π 是 $f(x)$ 的一个周期. 因为定义域为 $\boldsymbol{R}$，所以 $f(\frac{k\pi}{2})=0,k\in\boldsymbol{Z}$；结合图像可知有 9 个零点
注: 两个横坐标不同位置的对称性会产生周期性

(1) 两个对称轴的横坐标之差的二倍是函数的周期：$f(x)=f(2a-x),f(x)=f(2b-x)\Leftrightarrow 2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期。

(2) 两个纵坐标相同的对称中心的横坐标之差的二倍是函数的周期：$f(x)+f(2a-x)=2m,f(x)+f(2b-x)=2m\Leftrightarrow 2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期。

(3) 一个对称轴和一个对称中心的横坐标之差的四倍是函数的周期：$f(x)=f(2a-x),f(x)+f(2b-x)=2m\Leftrightarrow 4|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期。

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\boldsymbol{R}$，$f(x+y)+f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(1)=0$，则 $f(2022)=$__-2或0__

解析　令 $y=1$，则对于任意的 $x\in\boldsymbol{R}$ 有 $f(x+1)+f(x-1)=0$
故迭代有 $f(x+3)+f(x+1)=0$，因此有 $f(x+3)=f(x-1)$，即 4 是 $f(x)$ 的一个周期. 故 $f(2022)=f(2)$
代入 $x=0,y=0$，有 $f(0)+f(0)=f(0)\cdot f(0)$，故 $f(0)=0$ 或 $f(0)=2$
代入 $x=1,y=1$，由 $f(2)+f(0)=f(1)\cdot f(1)$，故 $f(2)=-f(0)$
因此 $f(2022)=-2$或0

17. $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的以 3 为周期的奇函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,6]$ 内的解的个数的最小值是__9__.

解析　$f(x)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上奇函数，故 $f(0)=0$，又因为 $f(2)=0$，由周期性 $f(-1)=0$，由奇函数性质进一步可以推得 $f(-2)=0$，故由周期性可知 $f(n)=0(n\in\boldsymbol{Z})$
由奇函数和周期性可知 $f(1.5)=f(-1.5)=0$，进一步可知 $f(4.5)=0$
注: 对于周期为 T 的奇函数，必有 $f(\frac{T}{2})=f(-\frac{T}{2})=0$

18. 已知定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=f(1-x)$，且当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=2^x-m$，则 $f(2023)=$__-1__

解析　根据 $f(x+1)=f(1-x)$ 可知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 轴对称，又因为 $f(x)$ 为奇函数，因此 $f(x)$ 的周期为 4，故 $f(2023)=f(-1)=-f(1)$。
因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，因此 $m=1$，所以 $f(1)=2-1=1$ 故 $f(2023)=-1$

选择题:

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为奇函数，$h(x)=a\cdot f(x)-b\cdot g(-x)+8$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有最大值 9，那么 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最小值为 $\cdots\cdots$ (C)

   (A) -9　　(B) -1　　(C) 7　　(D) 1

   解析　由于 $g(x)$ 为奇函数，故 $h(x)=af(x)-bg(x)+8$, 设 $h_1(x)=h(x)-8=af(x)-bg(x)$，易知 $h_1(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有最大值 1，且 $h_1(x)$ 为奇函数，所以 $h_1(x)$ 在区间 $(-\infty 0)$ 上有最小值-1。因此 $h(x)$ 在区间 $(-\infty 0)$ 上最小值为 7

2. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$, $x_1\neq x_2$, 有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$, 则(A)

   (A) $f(3)<f(-2)<f(1)$　　(B) $f(1)<f(-2)<f(3)$

   (C) $f(-2)<f(1)<f(3)$　　(D) $f(3)<f(1)<f(-2)$

   解析　等价定义:

   - 严格单调增: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0(x_1\neq x_2)$;
   - 严格单调减: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0(x_1\neq x_2)$.

3. 已知函数 $f(x)\neq -1$, 且对定义域内任意的 x 总有关系 $(f(x+\pi)+1)(f(x)+1)=2$, 那么下列结论中正确的是 $\cdots\cdots$ (B)

   (A) $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数　　(B) $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数

   (C) $f(x)$ 是周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数　　(D) $f(x)$ 不是周期函数

   解析　由条件可得 $(f(x+2\pi)+1)(f(x+\pi)+1)=2$, 于是 $f(x+2\pi)=f(x)$.
   注: $f(x)+f(x+t)=c \Leftrightarrow 2t$ 是 $f(x)$ 的一个周期。
   进阶版：$f(x+a)+f(x+b)=c \Leftrightarrow 2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期。
   $f(x)\cdot f(x+t)=c(c\neq 0) \Leftrightarrow 2t$ 是 $f(x)$ 的一个周期。
   进阶版：$f(x+a)\cdot f(x+b)=c(c\neq 0) \Leftrightarrow 2|a-b|$ 是 $f(x)$ 的一个周期。

4. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的奇函数，满足 $f(1-x)=f(1+x)$。若 $f(1)=2$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(50)=\cdots\cdots$ (C)

   (A) -50　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 50

   解析　因为 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(1-x)=f(1+x)$，故 $f(x)$ 具有周期性，最小正周期为 4，即 $f(x)=f(x+4)$. 由题意可知 $f(0)=0, f(1)=2$, 可以推出 $f(2)=0, f(3)=f(-1)=-2$，由此可知 $f(4k)+f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)=0, k\in\boldsymbol{Z}$。故原式 $=f(1)+f(2)=2$
   注: 具有周期性的求和问题，先求一个周期内的和.

解答题:

1. 函数 $f(x)=\frac{x}{ax+b}$ (a,b 是非零常数)，满足 $f(2)=1$，且方程 $f(x)=x$ 仅有一个解.

   (1) 求 a,b 的值

   (2) 是否存在常数 m，使得对于定义域内任意的 x，$f(x)+f(m-x)=4$ 恒成立

   (3) 在平面直角坐标系中，求定点 $A(-3,1)$ 到此函数上任意一点 P 的距离 $|AP|$ 的最小值.

   解析　(1) 由 $f(2)=1$，$\frac{2}{2a+b}=1$，故 $2a+b=2$；$f(x)=x$ 即 $\frac{x}{ax+b}=x$，即 $(\frac{1}{ax+b}-1)x=0$，容易判断其有两个解 $x_1=0, x_2=\frac{1-b}{a}$. 要符合题意只可能是 $b=1$，两根重合. 进一步推得 $a=\frac{1}{2}$

(2) $f(x)=\frac{2x}{x+2}$，为反比例型函数，其对称中心为 $(-2,2)$，因此 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-4-x)=4$. 由此可知 $m=-4$

(3) 设 $P(x_0,\frac{2x_0}{x_0+2})$，故 $|AP|=\sqrt{(x_0+3)^2+(\frac{2x_0}{x_0+2}-1)^2}=\sqrt{(x_0+3)^2+(1-\frac{4}{x_0+2})^2}$. 设 $t=x_0+2(t\neq 0)$, 则 $|AP|=\sqrt{(t+1)^2+(1-\frac{4}{t})^2}=\sqrt{(t-\frac{4}{t})^2+2(t-\frac{4}{t})+10}$, 设 $k=t-\frac{4}{t},k\in\boldsymbol{R}$, $|AP|=\sqrt{k^2+2k+10}=\sqrt{(k+1)^2+9}\geqslant 3$（当 $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$ 时取得最小值）

2. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 且 $f(x+2)(1-f(x))=1+f(x)$. 1. 求证: $f(x)$ 是周期函数; 2. 若 $f(4)=-\sqrt{3}$, 求 $f(2020)$.

解析

1. 若 $f(x)$ 为常数函数, 则设为 $f(x)=t$, 于是 $t(1-t)=1+t$, 无解, 故 $f(x)$ 不是常函数.

   ① 若 $f(x)=1$ 有解, 设为 x_0, 则 $f(x_0+2)(1-f(x_0))=1+f(x_0)$, 故 $f(x_0)=-1$. 矛盾.
   若 $f(x)=0$ 有解, 设为 x_0, 则 $f(x_0+2)(1-f(x_0))=1+f(x_0)$, 故 $f(x_0+2)=1$. 显然不可能 (见上一行).

   ② 由 (i) 知 $f(x)=1$ 无解, 且 $f(x)=0$ 无解,
   则 $f(x+4)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$, 故 $f(x+8)=-\frac{1}{f(x+4)}=f(x)$.

   综上, 8 是 $f(x)$ 的一个周期.

2. $f(2020)=f(4)=-\sqrt{3}$.

3. 已知函数 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，若 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)=x^2+x^4$，则 $x\in[2,6]$ 时求 $f(x)$ 解析式.

解析　任取 $x\in[2,6]$，因为 $f(x)$ 周期为 4，所以 $f(x)=f(x-4)$，又因为 $x-4\in[-2,2]$，故 $f(x-4)=(x-4)^2+(x-4)^4$，因此 $f(x)=(x-4)^2+(x-4)^4(x\in[2,6])$

4. 已知 $y=f(x)(x\in\mathbb{R})$ 是奇函数, 若当 $x<0$ 时, $f(x)=x^{\frac{1}{3}}+2^x-1$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

解析　当 $x>0$ 时, $f(x)=-f(-x)=-((-x)^{\frac{1}{3}}+2^{-x}-1)=x^{\frac{1}{3}}-2^{-x}+1$.
又上述两式当 $x=0$ 时也满足 $f(0)=0$.
故 $f(x)=\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}+2^x-1,x\leqslant 0\\ x^{\frac{1}{3}}-2^{-x}+1,x>0\end{cases}$.

5. 已知函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有定义，对任意实数 $a>0$ 和任意实数 x，都有 $f(ax)=af(x)$.

(1) 证明 $f(0)=0$

(2) 证明 $f(x)=\begin{cases}kx, & x\geqslant 0,\\ hx & x<0.\end{cases}$ 其中 k,h 均为常数。

(3) 当上一问中的 $k>0$，设 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+f(x)(x>0)$，讨论 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 的单调性并求最值.

解析

(1) 令 $x=0$，有 $f(0)=af(0),a>0$，故 $f(0)=0$

(2) 当 $x>0$ 时，令 $x=1$，$f(a)=af(1)$，因为对任意 a 均成立，故可将 a 作为自变量，写为 x，有 $f(x)=f(1)\cdot x$，取 $k=f(1)$，有 $f(x)=kx,x\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，令 $x=-1$，$f(-a)=-af(-1)$，故同理可以设 $h=-f(-1)$，有 $f(x)=hx,x<0$。

(3) $g(x)=kx+\frac{1}{kx}x>0,k>0$，换元 $u=kx$，设 $g_1(u)=u+\frac{1}{u}$，根据对勾函数性质可知 $g_1(u)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $[1,+\infty)$ 单调递增，因此有 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{k})$ 单调递减，在 $[\frac{1}{k},+\infty)$ 单调递增。其最小值为 2。