薛泽

85+20

3.2 函数关系的建立

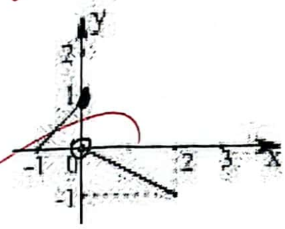
知识点：求函数表达式

【A 组】

1、已知函数 $f(x+1)=x^2+3x$，则 $f(x)=$ <u>x^2+x-2</u>.

2、已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(\frac{1}{x})=3x$，则 $f(x)=$ <u>$2x-\frac{1}{x}$</u>.

3、已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(3x)=2x+1$，则 $f(x)=$ <u>$\frac{2}{3}x+1$</u>.



4、已知 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的图象如右图，则 $f(x)=$ <u>$\begin{cases} x+1, & x\in[-1,0] \\ -\frac{1}{2}x, & x\in(0,2] \end{cases}$</u>

5、若一个长方体的高为 80 cm，长比宽多 10 cm，若把这个长方体的体积 $y(cm^3)$ 表示成长方体的宽 x (cm) 的函数，则函数关系式为 <u>$y=80x^2+800x$</u>.

【B 组】

若 $g(x)=\frac{1-x}{1+x}$，注意到 $g(\frac{1-x}{1+x})=x$

$f(g(x))=g(x^2)$

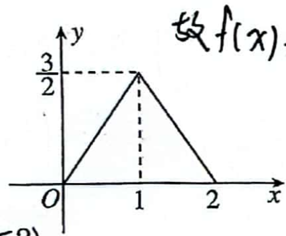
$f(g(\frac{1-x}{1+x}))=g((\frac{1-x}{1+x})^2)$

即 $f(g(\frac{1-x}{1+x}))=g(\frac{1-\frac{2x}{x^2+1}}{1+\frac{2x}{x^2+1}})$

故 $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

1. 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 f(x)的解析式为（ C ）

A. $\frac{x}{1+x^2}$ B. $-\frac{2x}{1+x^2}$ C. $\frac{2x}{1+x^2}$ D. $-\frac{x}{1+x^2}$



2. 下图中的图象所表示的函数的解析式为(B)

A. $y=\frac{3}{2}|x-1|(0\leq x\leq 2)$ B. $y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}|x-1|(0\leq x\leq 2)$

C. $y=\frac{3}{2}-|x-1|(0\leq x\leq 2)$ D. $y=1-|x-1|(0\leq x\leq 2)$

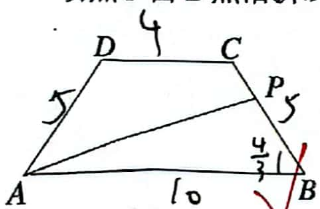
3. 设函数 y=f(x)的图像关于直线 x=1 对称.若 $x\leq 1$ 时 $f(x)=(x+1)^2-1$，则当 $x>1$ 时,f(x)的解析式是(B)

$f(x)=f(2-x)$

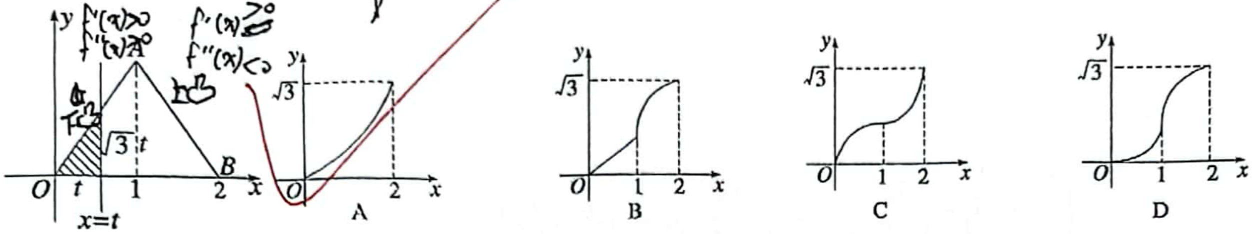
A、$f(x)=(x+3)^2-1$ B、$f(x)=(x-3)^2-1$ C、$f(x)=(x-3)^2+1$ D、$f(x)=(x-1)^2-1$

-5

4. 已知等腰梯形 ABCD 的两底边分别为 AB=10，CD=4，两腰 AD=CB=5，动点 P 由 B 点沿折线 BCDA 向 A 运动，设 P 点所经过的路程为 x，三角形 ABP 的面积为 S．则函数 S=$f(x)$ 的解析式为 <u>$f(x)=\begin{cases} 4x, & x\in[0,5] \\ \cancel{10+2x}\ 20, & x\in(5,9) \\ 56-4x, & x\in[9,14] \end{cases}$</u>



5. 如图，在平面直角坐标系中，△AOB 是边长为 2 的等边三角形．设直线 $x=t(0\leqslant t\leqslant 2)$截这个三角形可得位于此直线左方的图形的面积为 $f(t)$，则函数 $y=f(t)$的图像大致是（ D ）



6. 据调查，某地铁站的自行车存车处在某星期日的存车量为 4000 辆次，其中变速车存车费是每辆一次 0.3 元，普通车存车费是每辆一次 0.2 元，若普通车存车数为 x 辆次，存车费总收入为 y 元，则 y 关于 x 的函数关系式是(D)

A. $y=0.1x+800(0\leqslant x\leqslant 4000)$　　B. $y=0.1x+1200(0\leqslant x\leqslant 4000)$

C. $y=-0.1x+800(0\leqslant x\leqslant 4000)$　　D. $y=-0.1x+1200(0\leqslant x\leqslant 4000)$

7. (1) 已知 $f(x)$ 是一次函数，且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$，求 $f(x)$；

(2) 已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(0)=0$，$f(x+1)=f(x)+x+1$，求 $f(x)$.

解:(1) 设 $f(x)=ax+b$

~~$f(x+1)-f(x)=a$~~

$f(x+1)=f(x)+a$

$f(x-1)=f(x)-a$

$3f(x)+3a-2f(x)+2a=2x+17$

$f(x)+5a=2x+17$

取 $x=0$

$b+5a=17$

取 $x=-10$, $b-5a=-3$

故 $\begin{cases}a=2\\b=7\end{cases}$

$f(x)=2x+7$

(2) 令 $x=0$

$f(1)=f(0)+1=1$

令 $x=-1$

$f(-1)=f(0)-x-1=0$

由 $\begin{cases}f(-1)=0\\f(0)=0\\f(1)=1\end{cases}$ 联立解得：$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

8. 某市居民自来水收费标准如下：每户每月用水不超过 4 吨时，每吨为 1.80 元，当用水超过 4 吨时，超过部分每吨 3.00 元，某月甲、乙两户共交水费 y 元，已知甲、乙两用户该月用水量分别为 $5x$，$3x$ 吨.

(1) 求 y 关于 x 的函数;

(2) 若甲、乙两户该月共交水费 26.4 元，分别求出甲、乙两户该月的用水量和水费.

解.(1) $y=\begin{cases}1.8(5x+3x), & x\in[0,\frac{4}{5}]\\ 1.8(4+3x)+3(5x-4), & x\in(\frac{4}{5},\frac{4}{3}]\\ 1.8\times4\times2+3(5x-4+3x-4), & x\in(\frac{4}{3},+\infty)\end{cases}$

化简得 $y=\begin{cases}\frac{72}{5}x, & x\in[0,\frac{4}{5}]\\ \frac{102}{5}x-\frac{24}{5}, & x\in(\frac{4}{5},\frac{4}{3}]\\ 24x-\frac{48}{5}, & x\in(\frac{4}{3},+\infty)\end{cases}$

(2) $y=26.4$，有唯一解，$x=\frac{3}{2}$

甲：$5x=\frac{15}{2}$ 吨

$4\times1.8+(\frac{15}{2}-4)\times3=17.7$ 元

乙：$3x=\frac{9}{2}$ 吨

$4\times1.8+(\frac{9}{2}-4)\times3=8.7$ 元

9. 经过长期观测得到：在交通繁忙的时段内，某公路段汽车的车流量 y（千辆/时）与汽车的平均速度 v (km/h) 之间的函数关系为 $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}$ （$v>0$）。

(1) 在该时段内，当汽车的平均速度 v 为多少时，车流量最大？最大车流量为多少？（精确到 0.1 千辆/时）

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/时，则汽车的平均速度应在什么范围内？

解：(1) $y=\dfrac{920}{v+\frac{1600}{v}+3}\leq\dfrac{920}{80+3}\approx 11.1$ 千辆/时

在 $v=40$ km/h 时取等

(2) $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}>10$

解得 $v\in(25,64)$

10. 某摩托车生产企业，上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元 / 辆，出厂价为 1.2 万元 / 辆，年销售量为 1000 辆.本年度为适应市场需求，计划提高产品档次，适度增加投入成本.若每辆车投入成本增加的比例为 x（$0<x<1$），则出厂价相应地提高比例为 $0.75x$，同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$.已知年利润 =（出厂价 − 投入成本）× 年销售量.

(1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式；

(2) 为使本年度的年利润比上年有所增加，问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内？

解：(1) $y=\left(1.2\times(1+0.75x)-1\times(1+x)\right)\times 1000\times(1+0.6x)$

即 $y=-60x^2+20x+200$，$x\in(0,1)$

(2) 上年度：$y_0=(1.2-1)\times 1000=200$

即 $y_x>y_0$

即 $-60x^2+20x+200>200$

$x\in(0,\frac{1}{3})$

【C组】

1、以 $\max M(\min M)$ 表示数集 M 中最大（小）的数.设 $a>0, b>0, c>0$，已知 $a^2c+b^2c=1$，则 $\min\{\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}\}=$ $\underline{\sqrt[3]{2}}$.

2、(1) 证明：$|x-1|+|x-2|\geq 1$ 对所有实数 x 恒成立，并求等号成立的条件；

(2) 若不等式 $|x-1|-|x-2a|>1$ 的解集非空，求 a 的取值范围；

(3) 设关于 x 的不等式 $ax^2+2|x-a|-20<0$ 的解集为 A，试探究是否存在 $a\in\mathbb{N}$，使得不等式 $x^2+x-2<0$ 与 $|2x-1|<x+2$ 的解都属于 A. 若不存在，说明理由，若存在，请求出满足条件的 a 的所有值.

$\{0,1,2\}$

1.解. 由 $a^2c+b^2c=1$ 得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{1}{abc}$

即 $\frac{1}{abc}\geq 2$，当且仅当 $a=b$ 时取等

$\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}\geq(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c})^{\frac{1}{3}}\geq\sqrt[3]{2}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等

即 $\min\{\max\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}\}=\sqrt[3]{2}$，此时 $a=b=c=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

2.解. (1) 证明：$|x-1|+|x-2|\geq|1-2|=1$ （三角不等式）

当且仅当 $(x-1)(x-2)\leq 0$ 即 $x\in[1,2]$ 时取等

(2) $\max\{|x-1|-|x-2a|\}=|2a-1|>1$

即 $|2a-1|>1$

即 $a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

(3) $x^2+x-2<0 \Leftrightarrow x\in(-2,1)$

$|2x-1|<x+2 \Leftrightarrow x\in(-\frac{1}{3},3)$

故 $\begin{cases}(-2,1)\subseteq A\\(-\frac{1}{3},3)\subseteq A\end{cases}$

即 $(-2,3)\subseteq A$

$ax^2+2|x-a|-20<0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-a<10-\frac{1}{2}ax^2\\x-a>\frac{1}{2}ax^2-10\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(\frac{1}{2}x^2-1)a<10-x\\(\frac{1}{2}x^2+1)a<10+x\end{cases}$

$\because a\in\mathbb{N}$，故 $a\geq 0$

1°处理 $\forall x\in(-2,3)$，$(\frac{1}{2}x^2-1)a<10-x$

$\frac{1}{2}x^2-1\in[-1,\frac{7}{2})$，$10-x>0$

$a=0$ 时，成立

$a>0$ 时，若 $\frac{1}{2}x^2-1<0$，成立，若 $\frac{1}{2}x^2-1>0$

即 $x\in(-2,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},3)$，$a<\frac{10-x}{\frac{1}{2}x^2-1}$

记 $10-x=t$，$t\in(7,10-\sqrt{2})\cup(10+\sqrt{2},12)$

$\frac{10-x}{\frac{1}{2}x^2-1}=\frac{t}{\frac{1}{2}t^2-10t+49}=\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{49}{t}-10}$

记 $f(t)=\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{49}{t}-10}$，$t\in(7,10-\sqrt{2})\cup(10+\sqrt{2},12)$

$f(t)$ 在 $(0,7\sqrt{2})$ 单调递增，在 $(7\sqrt{2},+\infty)$ 单调递减

而 $(7,10-\sqrt{2})\subset(0,7\sqrt{2})$

$(10+\sqrt{2},12)\subset(7\sqrt{2},+\infty)$

故 $\inf\{f(t)\}=\min\{f(7),f(12)\}=2$

故 $0<a\leq 2$，$a\in\{1,2\}$

故 $a\in\{0,1,2\}$ 　　见上方框处

2°处理 $\forall x\in(-2,3)$，$(\frac{1}{2}x^2+1)a<10+x$

$\frac{1}{2}x^2+1\in\mathbb{R}^+$

$a<\frac{10+x}{\frac{1}{2}x^2+1}$

令 $10+x=t$，$t\in\mathbb{R}^+$

$\min\{\frac{10+x}{\frac{1}{2}x^2+1}\}=\min\{\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{51}{t}-10}\}=\frac{10+\sqrt{102}}{2}>5$

当且仅当 $t=\sqrt{102}$ 即 $x=\sqrt{102}-10$ 时取等

故 $\forall 0\leq a<5$ 皆满足

综上所述，$a\in\{0,1,2\}$

$a\in\mathbf{N}$，使得不等式$x^2+x-2<0$与$|2x-1|<x+2$的解都属于A，若不存在，

说明理由，若存在，请求出满足条件的a的所有值.

证 (1) ~~当$x<1$~~

~~$1-x+2-x\geq1$~~

$|x-1|+|x-2|$是x到$1,2$的距离之和

而无论x在$1,2$之间或之外，距离之和必须大于等于1

$\underbrace{\text{之间}}_{\text{和为}1}$　$\underbrace{\text{之外}}_{\text{和大于}1}$

当且仅当$x\in[1,2]$时取等.

(2) $1<|x-1|-|x-2a|\leq|(x-1)-(x-2a)|$

当且仅当$(x-1)(x-2a)\leq0$时取等.

$\therefore |2a-1|>1$

$\therefore a\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

(3) $\begin{cases}x^2+x-2<0\\|2x-1|<x+2\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x\in(-2,1)\\x\in(-\frac{1}{3},3)\end{cases}$

$\therefore (-2,3)\subseteq A$

若$a=0$.

$2|x|<20$

$\therefore x\in(-10,10)$ 成立

若$a\neq0$. 设$g(x)=ax^2+2|x-a|-20$

$\because a>0$

$\therefore g(-2)\leq0$ $g(3)\leq0$ $\therefore a=1$或2

当$a=1$. $g(x)=x^2+2|x-1|-20$.

当$x\geq1$ $g(x)=x^2+2x-22$

$g(1)<0$, $g(3)<0$.

当$x<1$ $g(x)=x^2-2x-18$

$g(-2)<0$ $(-2,3)\subseteq A$成立

当$a=2$. $g(x)=2x^2+2|x-2|-20$.

同理$x\geq2$与$x<2$均符合

$\therefore a=0$或1或2.