§3.6 函数的奇偶性 (2)

A 组:

1. 若函数 $y=f(x),x\in[-2,a]$ 是偶函数，则 a 的值为___2___.
2. 若 $f(x),g(x)$ 都是定义在 $[-a,a]$ 上的奇函数，且 $g(x)\neq 0$，则下列函数中，为奇函数的是:__①③__；为偶函数的是：__② ④__.
   ①$f(x)+g(x)$; ② $f(x)\cdot g(x)$;③$f(x)-g(x)$;④ $\frac{f(x)}{g(x)}$
3. 若 $y=f(x)(x\in[-1,1])$，则 $F(x)=f(x)+f(-x)$ 是__偶__函数，$G(x)=f(x)+f(-x)$ 是__奇__函数.（填奇偶性）
4. 已知 $y=f(x)+x^2$ 是奇函数，且 $f(1)=1$，若 $g(x)=f(x)+2$，则 $g(-1)=$__-1__.
5. 已知对于任意实数 x，函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$，若方程 $f(x)=0$ 有 2019 个实数解，则这 2019 个实数解之和为__0__.

B 组:

1. 已知 $f(x)=ax^2+(b-3)x+3(x\in[a^2-2,a])$ 是偶函数，则 $a+b$=__4__.

   解析　$a^2-2+a=0$且$a\geqslant 0$，则 $a=1$，$b-3=0$(奇次方系数为零).
2. 如果函数 $y=x^2+bx+c$ 是偶函数，则实数 b,c 所满足的一个充要条件是__$b=0$__.
3. 若函数 $y=(x+a)(bx+2a)$（常数 $a,b\in\mathbb{R}$）是偶函数，且它的最大值为 4，则该函数的解析式 $y=$__$-2x^2+4$__.
4. 已知函数 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$，且 $f(-2)=10$，则 $f(2)$=__-26__

   解析　$f(x)+f(-x)=-16$
5. 已知 $y=f(x)(x\in\mathbb{R})$ 是奇函数，$y=g(x)(x\in\mathbb{R})$ 是偶函数，若 $y=f(x)+g(x)$ 的值域为 $[-1,4)$，则 $y=f(x)-g(x)$ 的值域为__$(-4,1]$__.

   解析　$h(x)=f(x)+g(x)$，则 $h(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)+g(x)$，且 $y=h(x)$ 与 $y=h(-x)$ 的值域相同.
   故 $y=-h(-x)$ 的值域为 $(-4,1]$.
6. 已知函数 $y=\begin{cases}-x^2+x, & x>0\\ ax^2+x, & x<0\end{cases}$ 是奇函数，则 $a=$__1__.

   解析　计算 $f(1),f(-1)$ 即可（利用必要条件解决问题）。
7. 设函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是 ····································（ B ）

   (A) $f(x-1)-1$　　(B) $f(x-1)+1$　　(C) $f(x+1)-1$　　(D) $f(x+1)+1$

   解析　原函数的对称中心为 $(-1,-1)$，故其向右平移一个单位再向上平移一个单位之后是奇函数，因此选 B
8. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbb{R}$ 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$，则 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值是__0__.

解析　$f(x)=\dfrac{xf(x+1)}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}\cdot f(x+2)=\dfrac{xf(x+2)}{x+2}=...=\dfrac{xf(x+k)}{x+k}(k\in\boldsymbol{Z},x\neq\boldsymbol{Z})$，

因此取 $x=\dfrac{5}{2},k=-5$，有 $f(\dfrac{5}{2})=\dfrac{\frac{5}{2}f(-\frac{5}{2})}{-\frac{5}{2}}=-f(-\dfrac{5}{2})=-f(\dfrac{5}{2})$，因此 $f(\dfrac{5}{2})=0$

9. 给出下列关于函数奇偶性的命题:
① “函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称” 是 “函数 $y=f(x)$ 是偶函数或者奇函数” 的必要条件;
② 如果一个函数的图像是以坐标原点为对称中心的中心对称图形, 那么这个函数是奇函数;
③ 定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 若满足 $f(-1)=f(1)$, 那么 $y=f(x)$ 是偶函数;
④ 定义在 $\boldsymbol{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 若满足 $f(-1)\neq-f(1)$, 那么 $y=f(x)$ 不是奇函数;
其中真命题的序号是__①②④__(填所有真命题的序号).

10. 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都是定义域为 $\boldsymbol{R}$ 的奇函数, 且 $g(x)$ 不恒为零, 则给出下列四个函数: ① $F(x)=f(x)+g(x)$; ② $F(x)=f(x)-g(x)$;③ $F(x)=f(x)\cdot g(x)$; ④ $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$; 其中一定是偶函数的是__③④__.

11. 已知 $f(x)=\dfrac{ax+b}{1+x^2}$, 若函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{5}$.

(1) 求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

(2) 求函数 $y=f(x)$ 的值域.

解析

(1) 根据 $f(0)=0$ 有 $b=0$，$f(x)=\dfrac{ax}{1+x^2}$，代入 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{2}{5}$，得到 $a=1$，故 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$；经检验 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是奇函数。

(2) i. 首先 $f(0)=0$，故 0 在值域中。

ii. 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}$，根据对勾函数性质可知 $x+\dfrac{1}{x}\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，因此 $\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}\in[-\dfrac{1}{2},0)\cup(0,\dfrac{1}{2}]$

综上，$f(x)$ 的值域为 $[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$.

注: 求一次比二次函数的值域，注意分类讨论。

12. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}\quad(x\neq 0$, 常数 $a\in\boldsymbol{R})$.

(1) 当 $a=2$ 时, 解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

解析

(1) 代入 $a=2$, 不等式为 $(x^2+\dfrac{2}{x})-((x-1)^2+\dfrac{2}{x-1})>2x-1$, 重组整理得 $(2x-1)+(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x-1})>2x-1$，进一步化简有 $\dfrac{2}{x}>\dfrac{2}{x-1}$，解得 $x\in(0,1)$；

(2) i. $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，为偶函数.

ii. $a\neq 0$ 时，$f(a)=a^2+1,f(-a)=a^2-1$，两者既不相等也不互为相反数，因此 $f(x)$ 必然是非奇非偶.

注: 奇函数 + 偶函数的结果是不确定的（如果两个函数都不是 “既是奇函数又是偶函数” 的话，结果必然非奇非偶函数）

13. (1) 判断函数 $f(x)=ax^2+\dfrac{b}{x}$ 的奇偶性.

解析　定义域别忘了.

$a=0$ 时, 奇函数; $b=0$ 时, 偶函数; $a=b=0$ 时, 既是奇函数又是偶函数; $ab\neq 0$ 时, 非奇非偶.

(2) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+bx+1}(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 为奇函数, 试求 a,b 的值.

解析　$0\in[-1,1]$, 故 $f(0)=0$, 于是易得 $a=0$, 则 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+bx+1}$. 此时不难得到 $b=0$.

注: 证明过程略.

(3) 已知 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, $f(x)+g(x)=x^2+x-2$, 求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式.

解析　$f(-x)+g(-x)=(-x)^2+(-x)-2$, 则 $f(x)-g(x)=x^2-x-2$, 于是 $\begin{cases}f(x)+g(x)=x^2+x-2\\ f(x)-g(x)=x^2-x-2\end{cases}$.

解得 $f(x)=x^2-2$, $g(x)=x$.

注: 第一步若不理解, 那么令 $h(x)=f(x)+g(x)$.

另外, $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. “什么都没变, 却有了不同”.

14. 已知函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的不恒为 0 的函数, 且对于任意的 $a,b\in\mathbb{R}$, 都有 $f(ab)=af(b)+bf(a)$;

(1) 求 $f(0),f(1)$ 的值;

(2) 判断 $y=f(x)$ 的奇偶性，并证明你的结论.

解析　容易判断出应该利用迭代法解决问题，首先考虑带入常值特值。令 $a=b=0$, 则 $f(0)=0$. 令 $a=b=1$, 则 $f(1)=0$. 令 $a=b=-1$, 则 $f(-1)=0$.

下一步为了判断奇偶性，应当考虑得到 $-x$ 的形式，故令 $a=-1$, $b=x$, 则 $f(-x)=-f(x)+xf(-1)=-f(x)$. 故 $f(x)$ 是奇函数.

又不恒为 0, 故仅是奇函数.

15. 已知 $y=f(x)$ 对任意实数 a,b 都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 成立.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性;

(3) 若 $f(-3)=a$, 用 a 的代数式表示 $f(12)$ 的值.

解析

(1) 令 $a=b=0$, 则易得 $f(0)=0$.

(2) 令 $a=x$, $b=-x$, 则 $f(0)=f(x)+f(-x)$, 即 $f(-x)=-f(x)$, 故 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的奇函数.

(3) $f(kx)=kf(x)(k\in\mathbb{Z})$（数学归纳法可证）.

$f(12)=f(6)+f(6)=2f(6)=2(f(3)+f(3))=4f(3)=-4f(-3)=-4a$.

16. 记函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 若存在 $x_0\in D$, 使 $f(x_0)=x_0$ 成立, 则称 (x_0,y_0) 为坐标的点为函数 $f(x)$ 图象上的不动点.

(1) 若函数 $f(x)=\dfrac{3x+a}{x+b}$ 图象上有两个关于原点对称的不动点, 求 a,b 应满足的条件;

(2) 下述命题: “若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 图象上存在有限个不动点，则不动点有奇数个” 是否正确? 若正确, 给予证明; 若不正确, 请举一反例.

解析

(1) 根据题意方程 $f(x)=x$ 应有两个相异的互为相反数的实根，即 $x^2+(b-3)x-a=0$ 有两个相异的互为相反数的实根（且不为 $-b$）

根据韦达定理有 $b-3=0$，故 $b=3$. 此时计算判别式有 $\Delta=4a>0$，故 $a>0$. 又因为 $b^2-a\neq 0$，所以 $a\neq 9$.

综上 $b=3, a\in(0,9)\cup(9,+\infty)$

注：好想不好说的几何角度：$f(x)=\dfrac{3x+a}{x+b}=3+\dfrac{a-3b}{x+b}$ 为对称中心为 $(-b,3)$ 的双曲线（$a=3b$ 不符合题意），有两条对称轴 $y=x+(3+b)$ 和 $y=-x+(3-b)$。当且仅当 $b=3$ 时，满足题意。随着 b 的改变，双曲线在竖直方向上移动，与 $y=x$ 的交点必然不再满足对称性（只有双曲线沿着 $y=-x+(3-b)$ 的方向移动才可以保持对称性）。故 $b=3, f(x)=3+\dfrac{a-9}{x+3}$. 当 $a>9$ 时双曲线在两区间上都单调递减，必然会与 $y=x$ 有两个交点。$a<9$ 时双曲线在两支上都单调递减，双曲线右下支上的点 $(\sqrt{9-a}-3, 3-\sqrt{9-a})$ 为双曲线与 $y=-x$ 交点，该处的切线与 $y=x$ 平行。随着 a 的减小，$(\sqrt{9-a}-3, 3-\sqrt{9-a})$ 在沿 $y=-x$ 移动，从 $y=x$ 的左上移动到右下，$(\sqrt{9-a}-3, 3-\sqrt{9-a})$ 在 $y=x$ 左上时根据函数零点存在定理必然有两交点，而右下则没有，边界情况为 $a=0$，故 $a\in(0,9)\cup(9,+\infty)$

(2) 正确，证明如下：

设 $g(x)=f(x)-x$，故 $g(x)$ 的零点即是 $f(x)$ 的不动点的横坐标。易知 $g(x)$ 是奇函数，因此当 $g(x)$ 零点有限的时候，若 $g(x_0)=0$，则 $g(-x_0)=0$。又因为有 $g(0)=0$，因此当 $g(x)$ 零点有限的时候，$g(x)$ 的零点必为奇数个。

注：根据对称性可知不动点会成对出现，唯一的特例是原点，相当于两个不动点重合了，因此是奇数个。

C 组：

(1) 已知 $f(x)=\dfrac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}+1$ 在 $[-2018,0)\cup(0,2018]$ 上最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$__2__.

解析　设 $g(x)=\dfrac{(2^x+1)^2}{2^x\cdot x}$，则 $g(x)=\dfrac{2^x+\frac{1}{2^x}+2}{x}=\dfrac{2^x+2^{-x}+2}{x}$，故 $g(-x)=-g(x)$，即 $g(x)$ 为奇函数，故 $M+m=2$

(2) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=g(x)$ 有相同的定义域，且都不是常值函数。若对定义域中任意 x 都有 $f(x)+f(-x)=0, g(x)\cdot g(-x)=1$，且 $x\neq 0$ 时 $g(x)\neq 1$. 设 $F(x)=\dfrac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)$ 的奇偶性并证明.

解析　$F(x)$ 是偶函数。

根据题意显然有 $f(x), g(x)$ 的定义域关于原点对称，因此 $F(x)$ 的定义域也关于原点对称。

对定义域内任意的 x 都有：

$$F(-x)=\frac{2f(-x)}{g(-x)-1}+f(-x)=\frac{-2f(x)}{\frac{1}{g(x)}-1}-f(x)=\frac{2f(x)g(x)}{g(x)-1}-f(x)$$

$$=\frac{2f(x)g(x)-f(x)g(x)+f(x)}{g(x)-1}=\frac{f(x)g(x)+f(x)}{g(x)-1}=\frac{f(x)(g(x)+1)}{g(x)-1}$$

$$F(x)=\frac{2f(x)}{g(x)-1}+f(x)=\frac{2f(x)+f(x)g(x)-f(x)}{g(x)-1}=\frac{f(x)+f(x)g(x)}{g(x)-1}=\frac{f(x)(1+g(x))}{g(x)-1}$$

因此 $F(x)=F(-x)$

又因为 $f(x), g(x)$ 不为常值函数，故 $F(x)$ 不恒为 0，因此 $F(x)$ 不是奇函数。因此 $F(x)$ 是偶函数。