张昀昊

100+30

2.8 三角不等式

1. 函数$f(x)=|3-x|+|x-7|$的最小值等于 4 ______.

2. 若不等式$|x-4|-|x-3|\le a$对一切$x\in R$恒成立，则实数a的取值范围是 $[1,+\infty)$ ______.

3. 若$-x^2+a\le|x-2|+|x+3|$对$x\in R$恒成立，则实数a的取值范围是 $(-\infty,5]$ ______.

4. 若关于x的不等式$|x-1|+|x-3|<m$在R上有解，则实数m的取值范围是 $(2,+\infty)$ ______.

5. 若存在实数x使得不等式$|x+1|+|x-a|\le 2$成立，则实数a的取值范围是 $[-3,1]$ ______.

【B组】

1、"$ab\ge 0$" 是 "$|a+b|=|a|+|b|$" 的（ C ）条件

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充要　　D. 既非充分又非必要

C

2、若关于x的不等式$|x-1|-|x-2|<a$的解集为$\varnothing$，则实数a的取值范围为 $(-\infty,-1]$ ______.

3、不等式$|x-1|+|3-x|\ge 2$等号成立的x的取值范围是 $[1,3]$ ______

4、若不等式$|x+4|-|x-3|\le a$对一切实数$x\in\mathbf{R}$恒成立，则实数a的取值范围是 $[7,+\infty)$ ______

5、关于x的不等式$|x+2|-|x-3|\ge k$的解集为$\mathbf{R}$，则实数k的取值范围是 $(-\infty,-5]$ ______

6、函数$y=|x+2024|-|x-2021|$的最小值是 -4045 ______，最大值是 4045 ______.

7、已知a、b为实数，求证：$|a|+|b|\le|a+b|+|a-b|$，并指出等号成立条件.

6.

证：$|a+b|+|a-b|$

$=\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|\right)+\left(\left|\frac{a+b}{2}\right|+\left|\frac{b-a}{2}\right|\right)$

$\ge |a|+|b|$

得证.

取等时 $a^2=b^2$

30

8、(1) 已知a、b、c为实数，求证：$|a-b|\le|a-c|+|b-c|$，并说明等号成立的条件；

(2) 设$x\in\mathbf{R}$，求方程$|3x-8|=|5-x|+|2x-3|$的解集.

(1) 证：$|a-c|+|b-c|$

$=|a-c|+|c-b|$

$\geqslant|a-b|$

得证

取等时$(a-c)(c-b)\geqslant 0$

(2) $|5-x|+|2x-3|=|x-5|+|2x-3|\geqslant|3x-8|$

$\therefore (x-5)(2x-3)\geqslant 0$

$\therefore \boxed{x\in(-\infty,\frac{3}{2}]\cup[5,+\infty)}$

9、已知a、b、c为实数，求证：$|a+b+c|\le|a|+|b|+|c|$.

证：RHS $\geqslant |a+b|+|c|$

$\geqslant|a+b+c|$

得证.

10、证明：对于正数h，如果$|x-a|<\frac{h}{2}$,$|y-a|<\frac{h}{2}$，那么$|x-y|<h$.

证：$|x-y|\le|x-a|+|a-y|<h$

得证.

11、已知平面直角坐标系上的三点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，记

$$d(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|,$$

$$d(B,C)=|x_3-x_2|+|y_3-y_2|,$$

$$d(C,A)=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|,$$

求证：$d(A,B)\le d(B,C)+d(C,A)$.

证：$\begin{cases}|x_3-x_2|+|x_1-x_3| \geqslant |x_2-x_1| \\ |y_1-y_3|+|y_3-y_2| \geqslant |y_2-y_1|\end{cases}$

$\therefore d(A,B) \leqslant d(B,C)+d(C,A)$

得证

12、设 $f(x)=|x+\frac{1}{a}|+|x-a|\ (a\neq 0)$.

（1）当 $a=1$ 时，解不等式：$|x+\frac{1}{a}|+|x-a|>3$；

（2）求证：$f(x)\geq 2$，并求出 $f(x)=2$ 时对应的 a 与 x 的取值.

(1) 原：$|x+1|+|x-1|>3$

∴ 解 $\boxed{x\in(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty)}$

(2) 证：$f(x)\geqslant |a+\frac{1}{a}|+|a-a|$

$\geqslant \boxed{2}$

取等 $\boxed{a=\pm 1,\ x\in[-1,1]}$

【C组】

1. 设a, b, c为正实数，求$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$的最小值 $12\sqrt{2}-17$.

2. 函数$f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\cdots+|2011x-1|$的最小值为 $\frac{592043}{711}$.

3. 设函数$f(x)=x^2+ax+b$，对于任意的$a, b \in R$，总存在$x_0 \in [0,4]$，使得$|f(x_0)| \geq m$成立，则实数m的取值范围是 $(-\infty, 2]$.

(1) 原式 $=\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}+\frac{\frac{8}{3}a+\frac{8}{3}b}{a+b+3c}-\frac{8}{3}$

$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3a+9c}{a+2b+c}+\frac{12b}{a+b+2c}+\frac{8a+8b}{a+b+3c}\right)-\frac{8}{3}$

令 $\frac{3a+9c}{a+2b+c}+\frac{12b}{a+b+2c}+\frac{8a+8b}{a+b+3c}=S$

发现 $S\cdot\left[(3a+9c)(a+2b+c)+2\cdot 12b(a+b+2c)+4\cdot(8a+8b)(a+b+3c)\right]$

$\geq\left[(3a+9c)+\sqrt{2}\cdot 12b+2\cdot(8a+8b)\right]^2$

$\therefore S \geq \frac{\left[19a+(16+12\sqrt{2})b+9c\right]^2}{35a^2+56b^2+9c^2+184ab+162bc+84ca}$

$=\frac{361a^2+(544+384\sqrt{2})b^2+81c^2+(608+456\sqrt{2})ab+(288+216\sqrt{2})bc+342ca}{35a^2+56b^2+9c^2+184ab+162bc+84ca}$

$=-43+36\sqrt{2}+\frac{\quad}{35a^2+56b^2+9c^2+184ab+162bc+84ca}$

$\geq -43+36\sqrt{2}$（对分子拆分成两项配方）

$\therefore$ 原式 $\geq \frac{1}{3}\cdot(-43+36\sqrt{2})-\frac{8}{3}$

$=\boxed{-17+12\sqrt{2}}$

取等 $a:b:c=-7+5\sqrt{2}:3-2\sqrt{2}:2-\sqrt{2}$

【B组】

1、“$ab\ge 0$”是“$|a+b|=|a|+|b|$”的（ C ）条件

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充要　　D. 既非充分又非必要

2、若关于 x 的不等式 $|x-1|-|x-2|<a$ 的解集为Ø，则实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$

3、不等式 $|x-1|+|3-x|\ge 2$ 等号成立的 x 的取值范围是 $[1,3]$

4、若不等式 $|x+4|-|x-3|\le a$ 对一切实数 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $[7,+\infty)$

5、关于 x 的不等式 $|x+2|-|x-3|\ge k$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-5]$

6、函数 $y=|x+2024|-|x-2021|$ 的最小值是 -4045，最大值是 4045.

7、已知 a、b 为实数，求证：$|a|+|b|\le|a+b|+|a-b|$，并指出等号成立条件.

证：$|a+b|+|a-b|\ge|a+b+a-b|=2|a|$，$(a+b)(a-b)\ge 0$ 即 $a^2\ge b^2$ 取等

$|a+b|+|a-b|=|a+b|+|b-a|\ge|a+b+b-a|=2|b|$，$(a+b)(b-a)\ge 0$ 即 $b^2\ge a^2$ 取等

$\therefore |a+b|+|a-b|\ge\frac{2|a|+2|b|}{2}=|a|+|b|$，$a^2=b^2$ 即 $|a|=|b|$ 取等

$\therefore$ 得证，$|a|=|b|$ 取等

A. 充分非必要　　B. 必要非充分　　C. 充要　　D. 既非充分

2、若关于 x 的不等式 $|x-1|-|x-2|<a$ 的解集为 $\varnothing$，则实数 a 的取值范围

≤ 1

为 $\underline{a\le -1}$.

3、不等式 $|x-1|+|3-x|\ge 2$ 等号成立的 x 的取值范围是 $\underline{1\le x\le 3}$.

4、若不等式 $|x+4|-|x-3|\le a$ 对一切实数 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围

5、关于 x 的不等式 $|x+2|-|x-3|\ge k$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则实数 k 的取值范围

6、函数 $y=|x+2024|-|x-2021|$ 的最小值是________，最大值是 $\underline{4045}$.

-4045

7、已知 a、b 为实数，求证：$|a|+|b|\le|a+b|+|a-b|$，并指出等号成立条件.

解：$左^2=a^2+b^2+2|ab|$.

$右^2=2a^2+2b^2+2|a^2-b^2|$.

$(|a|-|b|)^2\ge 0$

$\therefore a^2+b^2\ge 2|ab|$.

$2|a^2-b^2|\ge 0$.

$\therefore 0\le 左\le 右$.

$a^2=b^2$ 时取等.

【C组】

1. 设a,b,c为正实数，求$\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$的最小值 $12\sqrt{2}-17$.

2. 函数$f(x)=|x-1|+|2x-1|+|3x-1|+\cdots+|2011x-1|$的最小值为 $\frac{592043}{711}$.

3. 设函数$f(x)=x^2+ax+b$，对于任意的$a,b\in R$，总存在$x_0\in[0,4]$，使得$|f(x_0)|\geq m$成立，则实数m的取值范围是 $(-\infty,2]$

(1) 设 $a+2b+c=m$ $a+b+2c=n$ $a+b+3c=p$

则 $c=p-n$. $b=m+p-2n$ $a=-3p-m+5n$

原式 $=\frac{-m+2n}{m}+\frac{4m+4p-8n}{n}-\frac{8p-8n}{p}$

$=\frac{2n}{m}+\frac{4m}{n}+\frac{4p}{n}+\frac{8n}{p}-17\geq 4\sqrt{2}+8\sqrt{2}-17$

等号在 $a:b:c=1:\sqrt{2}+1:4+3\sqrt{2}$时取得。 $=12\sqrt{2}-17$

(2) $f(x)=|x-1|+\dots+2011\left|x-\frac{1}{2011}\right|$

取$x=\frac{1}{1422}$可取最小值

$f(x)_{min}=\frac{(1422-1)+(1422-2)+\dots+(2011-1422)}{1422}$

$=\frac{1}{1422}\times(1421+\dots+1+0+1+\dots+589)=\frac{592043}{711}$

(3) $f(0)=b$. $f(2)=2a+b+4$ $f(4)=4a+b+16$.

注意到 $|f(0)+f(4)-2f(2)|=8$ $\therefore |f(0)|+|f(4)|+2|f(2)|\geq 8$.

$\therefore |f(0)|, |f(2)|, |f(4)|$必有一个大于等于2

$\therefore m\in(-\infty,2]$