6.3 诱导公式（2）

知识点：奇变偶不变，符号看象限——奇

【A 组】

1. 已知 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$ $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ ________.

2. 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$， $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ 的值为 $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$ ________.

3. 已知点 A 的坐标为 $(3,4)$，将 OA 绕坐标原点 O 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 至 OA'，则点 A' 的坐标为 $(4,-3)$ ________.

A

4. 下列等式中恒成立的是 （ A ）

A. $\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cos\alpha$

B. $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha$

C. $\tan(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=-\cot\alpha$

D. $\cot(\frac{3\pi}{2}-\alpha)=\cot\alpha$

5. 已知角 α 的終边经过点 $P(-3,-4)$，则 $\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ 的值为 $\frac{4}{5}$ ________.

【B 组】

1. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\pi+\alpha)=$ $-\frac{3}{5}$ ________.

2. 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，则 $\tan\varphi=$ $-\sqrt{3}$ ________.

3. 如果 $\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$, 那么 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ $-\frac{1}{3}$ ________.

4. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$，若 $\cos\theta=\frac{3}{5},\theta\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，则 $f\left(\theta-\frac{5\pi}{12}\right)=$ $-\frac{4}{5}\sqrt{2}$ ________.

5. 已知 $\sin\beta=\frac{1}{3},\sin(\alpha+\beta)=1$,则 $\sin(2\alpha+\beta)=$ $\frac{1}{3}$ ________.

6. 设 $f(n)=\sin(\frac{n\pi}{4}+\alpha)$，则 $f(n)\cdot f(n+4)+f(n+2)\cdot f(n+6)=$ -1 ________.

7. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+3\cos(\pi-\theta)=\sin(-\theta)$，则 $\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=$ $\frac{3}{5}$ ________.

8. 已知点 $P\left(\sin(\pi+\theta),\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\right)$ 在第三象限，则角 θ 所在的象限是第 一 ________ 象限.

9. 已知角 α 的终边上一点的坐标为 $\left(\sin\frac{4\pi}{3},\cos\frac{4\pi}{3}\right)$，则角 α 的最小正值为 $\frac{7}{6}\pi$ ________.

误：210°

10.已知角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的正半轴重合，将 α 的终边按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后，过点 $P\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$，则 $\cos\alpha$ 等于 $-\frac{4}{5}$ ________.

11. 已知 $f(x)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(-x)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin(-\pi-x)\cos(2\pi-x)}$.

(1) 化简 $f(x)$；(2) 若 x 是第三象限角，且 $\tan x=2$，求 $f(x)$ 的值.

解：(1) $f(x)=\dfrac{-\sin x\cdot\cos x\cdot(-\cos x)}{\sin x\cdot\cos x}$

$=\boxed{\cos x}$

(2) $\tan x=2$，$\cos x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\boxed{f(x)=-\frac{\sqrt{5}}{5}}$

12. 已知 $\sin\alpha$ 是方程 $3x^2-10x-8=0$ 的根，且 α 为第三象限角，求

$$\frac{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\tan^2(2\pi-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$ 的值.

解: $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$, $\cos\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{3}$, $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$Ys=\frac{\cos\alpha\cdot(-\cos\alpha)\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha\cdot\sin\alpha}$$

$=\tan\alpha$

$=\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

13、化简

(1) $\sin(21\pi-\alpha)+\cos(\frac{9\pi}{2}-\alpha)+\tan(\frac{9\pi}{4}-\alpha)-\sin(-\alpha-19\pi)-\cos(-\alpha-\frac{27}{2}\pi)-\tan(-\alpha-\frac{7\pi}{4})$.

(2) $\frac{\sin(31^\circ+\alpha)}{\tan(27^\circ+\alpha)}\cdot\frac{\tan(747^\circ+\alpha)}{\cos(36^\circ+\alpha)}\cdot\frac{\cos(1116^\circ+\alpha)}{\sin(751^\circ+\alpha)}$.

解(1) $Ys=\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)-\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)-\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\boxed{0}$

(2) $Ys=\frac{\sin(31^\circ+\alpha)\cdot\cos(27^\circ+\alpha)}{\sin(27^\circ+\alpha)}\cdot\frac{\sin(27^\circ+\alpha)}{\cos(36^\circ+\alpha)\cos(27^\circ+\alpha)}\cdot\frac{\cos(36^\circ+\alpha)}{\sin(31^\circ+\alpha)}=\boxed{1}$

14、已知 α 是第三象限角， $f(\alpha)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(-\alpha-2021\pi)+\sin(2022\pi-\alpha)}$.

(1)若 $\alpha=-\frac{32\pi}{3}$，求 $f(\alpha)$ 的值;

(2)若 $\tan\alpha=2$，求 $f(\alpha)$ 的值.

解: $f(\alpha)=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha-\sin\alpha}$

(1) $f(\alpha)=f(\frac{4}{3}\pi)=\boxed{-2+\sqrt{3}}$

(2) $f(\alpha)=\frac{-1+\tan\alpha}{-1-\tan\alpha}=\boxed{-\frac{1}{3}}$

【C组】

1、(1)已知集合 $A=\{\alpha \mid \alpha=k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\}$.

①是否存在 $B=[a,b]$，使 $A\cap B=\{-\frac{11\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\}$ 成立？如果存在，求出 a、b 的范围；如果不存在，说明理由.

②是否存在 $B=[a,b]$，使 $A\cap B$ 有且仅有 4 个元素？如果存在，求出 $b-a$ 的最大范围；如果不存在，说明理由.

(2)所有能使 $\tan\alpha=\tan 3$ 成立的 α 组成集合 A，请你写出一个集合 B，使 $B\subseteq A$，且 B 的元素有无限个.

解：(1) ① $\boxed{a\in(-\frac{17}{6}\pi,-\frac{11}{6}\pi],\ b\in[\frac{7}{6}\pi,\frac{13}{6}\pi)}$

② $\boxed{b-a\in[3\pi,5\pi)}$

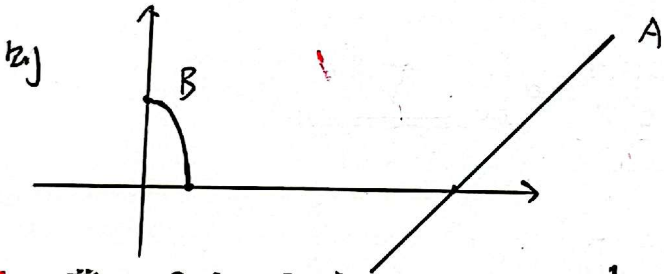
(2) $\boxed{B=A}$

2、当 s 和 t 取遍所有实数时，求 $(s+7-|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2$ 的最小值.

解：令 $A(s+7,s)$

$B(|\cos t|,2|\sin t|)$，$\therefore$ 原式 $=|AB|$

则



易看出，$|\cos t|=1$，$2|\sin t|=0$，$s=-3$ 时原式最小

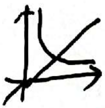
$\therefore$ 原式$_{min}=\boxed{18}$

3、若 $a>0$，$b>0$，求 $\min\{\max(a,b,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\}$.

解：不妨设 $a\geq b$

$\therefore$ 原式 $=\min\{\max\{a,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\}\}$

注意到 a 递增，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 递减（b 固定时）



故 $a=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ 时 $\max\{a,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\}$ 最小

$\therefore b^2=\frac{a^2}{a^3-1}$

$\therefore \frac{a^2}{a^3-1}\leq a^2$

$\therefore a\geq\sqrt[3]{2}$

$\therefore \min\{\max(a,b,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\}=\boxed{\sqrt[3]{2}}$

【C组】

1、(1)已知集合 $A=\{\alpha \mid \alpha=k\pi+\frac{\pi}{6},k\in \mathbf{Z}\}$.

①是否存在 $B=[a,b]$，使 $A\cap B=\{-\frac{11\pi}{6},-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\}$ 成立？如果存在，求出 a、b 的范围；如果不存在，说明理由.

②是否存在 $B=[a,b]$，使 $A\cap B$ 有且仅有 4 个元素？如果存在，求出 $b-a$ 的最大范围；如果不存在，说明理由.

(2)所有能使 $\tan\alpha=\tan 3$ 成立的 α 组成集合 A，请你写出一个集合 B，使 $B\subseteq A$，且 B 的元素有无限个.

(1) ① $a\in(-\frac{17}{6}\pi,-\frac{11}{6}\pi]$ $b\in[\frac{7\pi}{6},\frac{13\pi}{6})$

② 不妨设 $A\cap B=\{k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+2\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+3\pi+\frac{\pi}{6}\}$

$a\in(k\pi-\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6}]$ $b\in[k\pi+3\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+4\pi+\frac{\pi}{6})$

a,b 存在 $b-a$ 的最大范围为 $[3\pi,5\pi)$

③ ~~$a=3+k\pi$~~

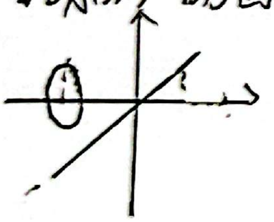
$A=\{a\mid a=3+k\pi\}$

取 $B=\{a\mid a=3+2k\pi\}$ 即可

$(s-(|\cos t|-7))^2+(s-2|\sin t|)^2$ (s,s) $(|\cos t|-7,2|\sin t|)$

2、当 s 和 t 取遍所有实数时，求 $(s+7-|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2$ 的最小值.

记 $A(s,s)$ B 为圆 $(x+7)^2+\frac{y^2}{4}=1$ 在 x 轴上端在 $x=-7$ 与 $x=-6$ 之间 原式 $=|AB|^2$.



由图像可知，当 B 坐标为 $(-6,0)$ 时，~~且~~ A 坐标为 $(-3,-3)$ 时 $|AB|^2$ 取最小值

此时 $|AB|^2=18$，等号在 $s=-3$，$t=k\pi,k\in Z$ 时取得。

3、若 $a>0$, $b>0$, 求 $\min\{\max(a,b,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\}$.

解 设 $t=\min\{\max(a,b,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\}$

则 $t\geq a$ $t\geq b$ $t\geq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ $t^3\geq ab(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

$\therefore t^3\geq 2$ $t\geq \sqrt[3]{2}$ $\therefore \min\{\max(a,b,\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})\}=\sqrt[3]{2}$ 等号在 $a=b=\sqrt[3]{2}$ 时取得.

65. 解析 设点 $A(s+7,s)$,点 $B(|\cos t|,2|\sin t|)$,则 $(s+7-|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2=|AB|^2$.

注意到 $|\cos t|\geq 0,2|\sin t|\geq 0$,不妨设 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,则点 B 的坐标为 $(\cos t,2\sin t)$.

易知点 $A(s+7,s)$ 为直线 $x-y-7=0$ 上的动点,点 $B(\cos t,2\sin t)$ 到直线 $x-y-7=0$ 的距离为

$$d=\frac{|\cos t-2\sin t-7|}{\sqrt{2}}=\frac{7+2\sin t-\cos t}{\sqrt{2}}.$$

又函数 $d=\frac{7+2\sin t-\cos t}{\sqrt{2}}$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,故当 $t=0$ 时, d 取得最小值 $\frac{6}{\sqrt{2}}$,则

$|AB|^2$ 的最小值为 $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2=18$.

所以 $(s+7-|\cos t|)^2+(s-2|\sin t|)^2$ 的最小值为 18 .