1、函数 $y=x|x|-2x$ 的严格减区间是__________【$[-1,1]$】

2、函数 $y=\dfrac{1}{x^2+2x-4}$ 的严格增区间是__________【$\left(-\infty,-1-\sqrt{5}\right)$ 和 $\left(-1-\sqrt{5},-1\right]$】

3、若 $y=x+\dfrac{a}{x}$ 是 $[2,+\infty)$ 上的严格增函数，则实数 $a$ 的取值范围是__________【$a\le 4$】

4、函数 $y=x+\dfrac{4}{x+3}$ （$x\in(-3,0]$）的值域为__________【$[1,+\infty)$】

5、函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$ 的值域为__________【$\left[-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{4}\right]$】

6、已知函数 $f(x)=x-1$ （$x\in[0,4]$），则函数 $y=f\left(x^2\right)+\left(f(x)\right)^2$ 的值域为__________【$\left[-\dfrac{1}{2},4\right]$】

7、已知 $f(x)=\begin{cases}(a-5)x-2, x\ge 2,\\ x^2-2(a+1)x+3a, x<2.\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格减，则实数 $a$ 的取值范围是__________【$1\le a\le 4$】

8、设 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax, x\ge 1,\\ ax-1, x<1,\end{cases}$ 若函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则实数 $a$ 的取值范围是__________【$0\le a\le \dfrac{2}{3}$】

9、已知函数 $y=ax^2+(2a-1)x-3$ 在区间 $\left[-\dfrac{3}{2},2\right]$ 上的最大值为 $-\dfrac{3}{2}$，则实数 $a=$__________【0 或 $\dfrac{7}{16}$】

10、已知 $f(x)=-x^3-x$，若 $f\left(t^2+2t+k\right)+f\left(-2t^2+2t-5\right)>0$ 对任意 $t\in[0,5]$ 都成立，则实数 $k$ 的取值范围是__________【$k<1$】

11、已知函数 $y=x^2-ax+\dfrac{a}{2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值等于 $\dfrac{1}{4a}$，则 $a=$ __________【1 或 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$】

12、已知集合 $A=[t,t+1]\cup[t+4,t+9]$，$0\notin A$．若存在 $\lambda>0$，使得对任意 $a\in A$，都有 $\dfrac{\lambda}{a}\in A$，则 $t=$__________【1 或 $-3$】

13、若偶函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内严格增且 $f(-2)=1$，则不等式 $f(x-1)<1$ 的解集为（ A ）

A. $(-1,3)$　　B. $(-3,0)\cup(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1)\cup(0,3)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

14、若 $f(x)=\dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{x^2+4}+2$ 的最大值和最小值分别为 $M$ 、 $m$ ，则 $M+m=$ （ D ）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

15、函数 $y=\dfrac{\left(2x+|x|\right)^2+1}{x^2+10}$ （ B ）

A. 有最大值，无最小值　　B. 有最小值，无最大值

C. 有最大值，也有最小值　　D. 无最大值，也无最小值

16、设 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 、 $y=h(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的三个函数，则“ $y=f(x)+g(x)$ 、 $y=g(x)+h(x)$ 、 $y=h(x)+f(x)$ 均不是 $\mathbf{R}$ 上的增函数”是“ $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 、 $y=h(x)$ 均不是 $\mathbf{R}$ 上的增函数”的（ D ）

A. 充分非必要条件　B. 必要非充分条件　C. 充要条件　D. 既非充分也非必要条件

17、(1) 证：对任意 $x_1<x_2$ ，因 $x_2-x_1>0\Rightarrow f(x_2-x_1)>0$ ，故 $f(x_2)=f(x_1)+f(x_2-x_1)>f(x_1)$ ，证毕

(2) 解：令 $a=b=0$ ，得 $f(0)=0$ ；令 $b=-a$ ，得 $f(-a)=-f(a)$ ，而 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

故由(1)， $y=f(x)$ 是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上严格增

因此 $f\left(x^2+3\right)+f(4x)<0\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)<f(-4x)$ ，也即 $x^2+3<-4x$

解得 $x\in(-3,-1)$

18、(1) 证：注意 $t^2=2+2\sqrt{1-x^2}\in[2,4]$ 且 $t\geq0$ ，故定义域为 $\left[\sqrt{2},2\right]$

同时， $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2}t^2-1$ ，故 $g(t)=\dfrac{1}{2}t^3-\dfrac{3}{2}t^2$

当 $\sqrt{2}\leq t_1<t_2\leq2$ 时， $g(t_2)-g(t_1)=\dfrac{1}{2}(t_2-t_1)\left(t_2^2+t_2t_1+t_1^2-3t_2-3t_1\right)$

将 $t_2^2-(3-t_1)t_2+\left(t_1^2-3t_1\right)$ 视为 $t_2$ 的二次函数 $y=h(t_2)$ ，因为 $t_1<t_2\leq2$ ，所以

$h(t_2)\leq\max\left\{h(t_1),h(2)\right\}=\max\left\{3t_1^2-6t_1,t_1^2-t_1-2\right\}<0$ ，即 $y=g(t)$ 在 $\left[\sqrt{2},2\right]$ 上严格减

(2) 解：由(1)， $f(x)_{\max}=g(t)_{\max}=g\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}-3$ ，当 $x=\pm1$ 时取得最大值

而 $f(x)_{\min}=g(t)_{\min}=g(2)=-2$ ，当 $x=0$ 时取得最小值

19、 (1) 由题意，此时 $y=\begin{cases}\dfrac{30}{4+x},0\le x<6,\\ 12-\dfrac{3}{2}x,6\le x\le 8,\end{cases}$ 故 $y\ge 2$ 当且仅当 $0\le x<6$ 或 $6\le x\le\dfrac{20}{3}$

答：有效治疗时长为 $\dfrac{20}{3}$ 小时

(2) 当 $0\le x<6$ 时， $y=\dfrac{20}{4+x}>2$， $6\le x\le 8$ 时第一次服用的药剂在血液中的含量为 $8-x$，而新增的药剂在血液中的含量为 $\dfrac{10m}{4+(x-6)}$， 故 $6\le x\le 8$ 时血液中药剂的总含量为 $g(x)=8-x+\dfrac{10m}{x-2}$

因为 $6\le x_1<x_2\le 8$ 时，$g(x_2)-g(x_1)=(x_1-x_2)\left(1+\dfrac{10m}{(x_2-2)(x_1-2)}\right)<0$，所以此时 $y=g(x)$ 严格减，从而只需 $g(8)\ge 2$， 解得 $m\ge\dfrac{6}{5}$

答： $m$ 的最小值为 $\dfrac{6}{5}$

20、 (1) 此时 $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}-x$， 故 $|x+1|-1\ge 0$， 解得 $x\ge 0$ 或 $x\le -2$

即：定义域为 $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$

(2) 由题意，此时 $\sqrt{|ax+a|-a}=ax+a\ge 0$，故原方程等价于 $\sqrt{ax}=ax+a$

设 $t=\sqrt{ax}\ge 0$，则关于 $t$ 的方程 $t^2-t+a=0$ 有两个相异的非负实根

故由 $a\ne 0$ 知 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=1-4a>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\dfrac{1}{4}$

(3) 解不等式 $|x+a|\ge a$ 得：当 $a\le 0$ 时， $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；当 $a>0$ 时， $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-2a]\cup[0,+\infty)$

当 $a\le 0$ 时， $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-x,x\ge -a,\\ \sqrt{-2a-x}-x,x<-a,\end{cases}$ 显然 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上严格减，故只需 $y=\sqrt{x}-x$ 在 $x\ge -a$ 时严格减，即 $x_2>x_1\ge -a$ 时 $(x_2-x_1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}-1\right)>0$ 恒成立，解得 $a\le -\dfrac{1}{4}$

当 $a>0$ 时， $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-x,x\ge 0,\\ \sqrt{-2a-x}-x,x\le -2a,\end{cases}$ 显然 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不单调，故此时

$y=f(x)$ 不可能为单调函数

综上，$a\le -\frac{1}{4}$

21、(1) 解：$g(x)=f(x)-f(x-1)=-\frac{1}{x^2-x}$，故 $g(x)=4$ 当且仅当 $x=\frac{1}{2}$

(2) 解：$h(x)=\left|f(x+a)-f(x)\right|=\left|2ax+a^2\right|$，故 $f(x)\ge h(x)$ 等价于 $x^2\ge\left|2ax+a^2\right|$

因为 $a>0$，所以 $\left|2ax+a^2\right|=\begin{cases}2ax+a^2, x\ge -\frac{a}{2},\\ -2ax-a^2, x<-\frac{a}{2},\end{cases}$ 从而原不等式等价于不等式组

$\begin{cases}x^2\ge 2ax+a^2,\\ x\ge -\frac{a}{2},\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x^2\ge -2ax-a^2,\\ x<-\frac{a}{2}.\end{cases}$

解得 $x\in\left[-\frac{a}{2}, a-\sqrt{2}a\right]\cup\left[a+\sqrt{2}a, +\infty\right)$ 或 $x<-\frac{a}{2}$

综上，不等式的解集为 $\left(-\infty, a-\sqrt{2}a\right]\cup\left[a+\sqrt{2}a, +\infty\right)$

(3) 证：用反证法，假设 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不严格增，因为 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格增，所以存在 $x_2>x_1$，其中 $x_2\ge 0$，使得 $f(x_2)\le f(x_1)$

下设 $t=x_2-x_1$，由题意，$h_1(x)=\left|u(x+t)-u(x)\right|=\left|\left(f(x+t)-f(x)\right)-\left(f(x)-f(x-t)\right)\right|$，

$h_2(x)=v(x)-v(x-t)=\left|f(x+t)-f(x)\right|-\left|f(x)-f(x-t)\right|$

若记 $A=f(x+t)-f(x)$，$B=f(x)-f(x-t)$，则 $|A-B|=|A|-|B|$，这等价于 $\begin{cases}AB\ge 0,\\ |A|\ge|B|\end{cases}$

取 $x=x_1$，则 $A=f(x_2)-f(x_1)\le 0$

若 $A=0$，则 $|B|\le|A|=0$，从而 $B=0$，并依此类推得 $f(x_1-kt)=f\left(x_1-(k-1)t\right)$ 对一切 $k\in\mathbf{N}$ 成立，当 $k>\frac{x_1}{t}+1$ 时，与 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格增矛盾

若 $A<0$，则 $B\le 0$，且当 $B=0$ 时同上可得矛盾，故 $B<0$

但此时同理可得 $f(x_1-kt)>f\left(x_1-(k-1)t\right)$ 对一切 $k\in\mathbf{N}$ 成立，当 $k>\frac{x_1}{t}+1$ 时，又与 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格增矛盾

综上，$y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上严格增