1. 函数 $y=\ln x$ 的零点是__________.

【答案】$x=1$

【解析】

【分析】转化为求解方程 $\ln x=0$ 的根即可.

【详解】由 $\ln x=0$ 可得 $x=1$，

所以函数 $y=\ln x$ 的零点是 $x=1$，

故答案为： $x=1$.

2. 函数 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ 的对称中心为__________.

【答案】$(-1,2)$

【解析】

【分析】把原函数解析式变形得到 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}=2+\dfrac{1}{x+1}$，可得 $y-2=\dfrac{1}{x+1}$，换元，令 $y'=y-2$，$x'=x+1$，原函数化为 $y'=\dfrac{1}{x'}$，可得它的对称中心，即得原函数对称中心。

【详解】由题得，$y=\dfrac{2x+3}{x+1}=2+\dfrac{1}{x+1}$，可得 $y-2=\dfrac{1}{x+1}$，设 $y'=y-2$，$x'=x+1$，则原函数化为 $y'=\dfrac{1}{x'}$，y' 与 x' 成反比例函数关系且是奇函数，对称中心为 $(0,0)$，即 $y'=0,x'=0$，解得 $y=2,x=-1$，因此函数 y 的对称中心为 $(-1,2)$.

故答案为：$(-1,2)$

【点睛】本题考查求函数的对称中心，利用了换元法。

3. 已知 $\lg 2=a$，用 a 表示 $\log_2 25=$______.

【答案】$\dfrac{2-2a}{a}$

【解析】

【分析】利用换底公式及对数的运算性质计算可得.

【详解】因为 $\lg 2=a$，所以 $\log_2 25=\dfrac{\lg 25}{\lg 2}=\dfrac{2\lg 5}{\lg 2}=\dfrac{2\lg\frac{10}{2}}{\lg 2}=\dfrac{2\lg 10-2\lg 2}{\lg 2}=\dfrac{2-2a}{a}$.

故答案为：$\dfrac{2-2a}{a}$

4. 方程 $\cos x=\dfrac{1}{2}$ 的解是______.

【答案】 $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$

【解析】

【分析】根据余弦函数的性质计算可得.

【详解】因为 $\cos x=\frac{1}{2}$，所以 $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$，

即方程 $\cos x=\frac{1}{2}$ 的解是 $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$.

故答案为： $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ 或 $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in Z$.

5. 已知幂函数 $y=\left(2k^2-k\right)x^{k-\frac{1}{3}}$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上是严格增函数，则 $k=$______.

【答案】1

【解析】

【分析】根据幂函数的定义及性质得到方程（不等式）组，解得即可.

【详解】因为幂函数 $y=\left(2k^2-k\right)x^{k-\frac{1}{3}}$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上是严格增函数，

所以 $\begin{cases}2k^2-k=1\\ k-\frac{1}{3}>0\end{cases}$，解得 $k=1$.

故答案为：1

6. 已知角 α 的终边过点 $\left(\sin 5,\cos 5\right)$，且 $\alpha\in\left[0,2\pi\right)$，则角 α 的弧度数是______.

【答案】 $\frac{5\pi}{2}-5$

【解析】

【分析】首先判断角 α 为第二象限角，再根据三角函数的定义及诱导公式得到 $\cos\alpha=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-5\right)$，即可得解.

【详解】因为角 α 的终边过点 $\left(\sin 5,\cos 5\right)$，

又 $\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$，所以 $\sin 5<0$， $\cos 5>0$，所以角 α 为第二象限角，

因为 $\alpha\in\left[0,2\pi\right)$，所以 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{\sin 5}{\sqrt{\sin^2 5+\cos^2 5}}=\sin 5=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-5\right)=\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-5\right)$,

又 $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{2}-5<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{5\pi}{2}-5$.

故答案为：$\dfrac{5\pi}{2}-5$

7. 不等式 $\log_2 x<-x+1$ 的解集是______.

【答案】$(0,1)$

【解析】

【分析】依题意可得 $\log_2 x+x-1<0$，令 $f(x)=\log_2 x+x-1$，判断函数的单调性，结合 $f(1)=0$，即可求出不等式的解集.

【详解】不等式 $\log_2 x<-x+1$，即 $\log_2 x+x-1<0$，

令 $f(x)=\log_2 x+x-1$，$x\in(0,+\infty)$，

因为 $y=\log_2 x$ 与 $y=x-1$ 均在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又 $f(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时 $f(x)<0$，

则不等式 $\log_2 x<-x+1$ 的解集是 $(0,1)$.

故答案为：$(0,1)$

8. 已知函数 $f(x)=\log_3\dfrac{x}{3}\cdot\log_3\dfrac{x}{27}$，若对不相等的正数 x_1,x_2，有 $f(x_1)=f(x_2)$ 成立,

则 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{9}{x_2}$ 的最小值为______.

【答案】$\dfrac{2}{3}$

【解析】

【分析】对于函数 $f(x)=\log_3\dfrac{x}{3}\cdot\log_3\dfrac{x}{27}$ 整理变形，再利用 $f(x_1)=f(x_2)$，可得 $\log_3 x_1x_2=4$，利用基本不等式求解 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{9}{x_2}$ 最小值.

【详解】$f\left(x\right)=\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_3\frac{x}{27}=\left(\log_3x-1\right)\left(\log_3x-3\right)=\left(\log_3x\right)^2-4\log_3x+3$,

由不相等的正实数 x_1,x_2，且 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$,

则 $\left(\log_3x_1\right)^2-4\log_3x_1+3=\left(\log_3x_2\right)^2-4\log_3x_2+3$,

则 $\left(\log_3x_1+\log_3x_2-4\right)\left(\log_3x_1-\log_3x_2\right)=0$,

因为 $\log_3x_1-\log_3x_2\neq0$,

所以 $\log_3x_1+\log_3x_2=4$,

故 $\log_3x_1x_2=4$，则 $x_1x_2=81$,

又 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}\geq2\sqrt{\frac{9}{x_1x_2}}=\frac{2}{3}$,

当且仅当 $\frac{1}{x_1}=\frac{9}{x_2}$，即 $x_1=3$，$x_2=27$ 时取等号,

故 $\frac{1}{x_1}+\frac{9}{x_2}$ 的最小值为 $\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$

9. 已知函数 $y=\begin{cases}x^2-2x+2,x\geq0\\ x+\frac{a}{x}+3a,x<0\end{cases}$ 的值域为 R，则实数 a 的取值范围为____________.

【答案】$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

【解析】

【分析】先求解出 $x\geq0$ 时 $f\left(x\right)$ 的值域，然后根据 $a=0,a>0,a<0$ 分类讨论 $x<0$ 时 $f\left(x\right)$ 的值域，由此确定出 a 的取值范围.

【详解】当 $x\geq0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-2x+2=\left(x-1\right)^2+1$，此时 $f\left(x\right)\in\left[1,+\infty\right)$,

当 $a=0$ 且 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=x$,

此时 $f\left(x\right)\in\left(-\infty,0\right)$，且 $\left(-\infty,0\right)\cup\left[1,+\infty\right)\neq\mathbf{R}$，所以不满足；

当 $a>0$ 且 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=x+\frac{a}{x}+3a$,

由对勾函数单调性可知 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{a},0\right)$ 上单调递减，

所以 $f\left(x\right)_{\max}=f\left(-\sqrt{a}\right)=3a-2\sqrt{a}$，此时 $f\left(x\right)\in\left(-\infty,3a-2\sqrt{a}\right]$，

若要满足 $f\left(x\right)$ 的值域为 R，只需要 $3a-2\sqrt{a}\geq 1$，解得 $a\geq 1$；

当 $a<0$ 且 $x<0$ 时，因为 $y=x,y=\dfrac{a}{x}$ 均在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增，

所以 $f\left(x\right)=x+\dfrac{a}{x}+3a$ 在 $\left(-\infty,0\right)$ 上单调递增，且 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，

$f\left(x\right)\to-\infty$，

所以此时 $f\left(x\right)\in\left(-\infty,+\infty\right)$，此时显然能满足 $f\left(x\right)$ 的值域为 R；

综上可知，a 的取值范围是 $\left(-\infty,0\right)\cup\left[1,+\infty\right)$，

故答案为：$\left(-\infty,0\right)\cup\left[1,+\infty\right)$.

10. 已知函数 $y=f\left(x\right)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且 $f\left(-1\right)=0$.若对任意的 x_1、

$x_2\in\left(0,+\infty\right)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_1f\left(x_2\right)-x_2f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}>0$ 成立，则不等式 $f\left(x\right)>0$ 的解集是

______.

【答案】$\left(-1,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

【解析】

【分析】依题意不妨令 $0<x_1<x_2$，即可得 $\dfrac{f\left(x_2\right)}{x_2}>\dfrac{f\left(x_1\right)}{x_1}$，令 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{x}$，$x\in$

$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，即可得到 $g\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，再由 $f\left(-1\right)=0$ 及奇偶性得到

$g\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的取值情况，从而得到 $f\left(x\right)>0$ 的解集.

【详解】因为对任意的 x_1、$x_2\in\left(0,+\infty\right)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{x_1f\left(x_2\right)-x_2f\left(x_1\right)}{x_2-x_1}>0$ 成立，

不妨令 $0<x_1<x_2$，则 $x_1f\left(x_2\right)-x_2f\left(x_1\right)>0$，即 $x_1f\left(x_2\right)>x_2f\left(x_1\right)$，

所以 $\dfrac{f\left(x_2\right)}{x_2}>\dfrac{f\left(x_1\right)}{x_1}$，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

则当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$ 时，$g(x_2)>g(x_1)$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又函数 $y=f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数且 $f(-1)=0$，则 $f(1)=-f(-1)=0$，

所以 $g(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，

则当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，

又 $f(x)$ 为奇函数，所以当 $-1<x<0$ 时，$f(x)>0$，当 $x<-1$ 时，$f(x)<0$，

所以不等式 $f(x)>0$ 的解集是 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$(-1,0)\cup(1,+\infty)$

11. 设 $a>0$，若定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$、直线 $x=3a$、直线 $x=5a$ 都成轴对称，且 $y=f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3a}{2}\right]$ 上恰有 5 个零点，则 $y=f(x)$ 在区间 $[0,5a]$ 上的零点个数的最小值是______.

【答案】13

【解析】

【分析】根据函数的多对称性得出周期，尽可能减少零点个数并作出图象说明其存在性即可.

【详解】因为函数 $f(x)$ 关于直线 $x=3a$ 对称，又直线 $x=5a$ 为对称轴，

所以 $x=a$ 也是函数 $f(x)$ 的对称轴，又 $x=0$ 是 $f(x)$ 的对称轴，

则直线 $x=2a$ 也是函数 $f(x)$ 的对称轴，进而 $x=4a$ 也是函数 $f(x)$ 的对称轴.

又由 $f(x)$ 关于直线 $x=2a$ 对称，则 $f(2a+x)=f(2a-x)$；

由 $f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(2a-x)=f(x)$，

则 $f(2a+x)=f(x)$，故 $f(x)$ 是以 $2a$ 为周期的函数.

所以由 $y=f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3a}{2}\right]$ 有 5 个零点，则 $y=f(x)$ 在 $\left[2a,\dfrac{7}{2}a\right]$ 有 5 个零点，

且在$\left[0,2a\right]$至少有 5 个零点,

当$f(x)$在$\left[0,2a\right]$有 5 个零点时，则在$\left(\frac{3}{2}a,2a\right]$无零点,

由函数$f(x)$关于直线$x=a$对称可知,

必有$f(a)=0$，即a为其中一个零点，且$f(x)$在$\left[0,\frac{a}{2}\right)$无零点,

故在$\left[\frac{a}{2},a\right),\left(a,\frac{3a}{2}\right]$各有 2 个零点.

由函数$f(x)$以$2a$为周期可知，$3a,5a$也是函数$f(x)$的零点,

且函数$f(x)$在$\left[2a,\frac{5a}{2}\right)$，$\left(\frac{7}{2}a,4a\right]$，$\left[4a,\frac{9a}{2}\right)$无零点，故在$\left[\frac{5a}{2},3a\right),\left(3a,\frac{7a}{2}\right]$,

$\left[\frac{9a}{2},5a\right)$各有 2 个零点,

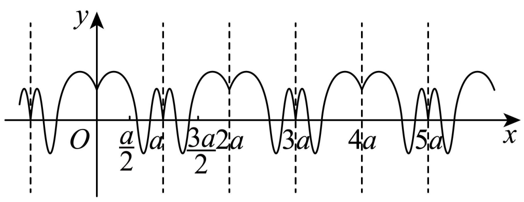
由上分析，$y=f(x)$在$\left[0,\frac{3a}{2}\right]$有 5 个零点，在$\left(\frac{3}{2}a,2a\right]$无零点,

此时$f(x)$在区间$\left[0,5a\right]$上的零点个数为$5+6+2=13$个.

如图，可作出满足题意的函数$f(x)$的图象，其在$\left[0,5a\right]$上有 13 个零点,

所以$f\left(x\right)$在$\left[0,5a\right]$上的零点个数的最小值是 13.

故答案为：13.



12. 田同学向肖老师请教一个问题：已知三个互不相同的实数a，b，c满足$a+b+c=1$和$a^2+b^2+c^2=3$，求abc的取值范围.肖老师告诉他：函数$y=x^3-x^2-x$在区间$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$上是严格增函数，在区间$\left[-\frac{1}{3},1\right]$上是严格减函数，在区间$\left[1,+\infty\right)$上是严格增函数.根据肖老师的提示，可求得该问题中$abc$值范围是______.

【答案】$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$

【解析】

【分析】根据题意可得：$ab=c^2-c-1$，$a+b=1-c$，结合韦达定理和根的判别式可得$-1<c<\frac{5}{3}$，由$ab=c^2-c-1$，得$abc=c^3-c^2-c$，令$f(c)=c^3-c^2-c\left(-1<c<\frac{5}{3}\right)$，结合条件得到$f(c)$的单调性，从而得到$abc$值范围

【详解】由题$a+b+c=1$和$a^2+b^2+c^2=3$，$a\neq b\neq c$，得

$1=\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=3+2ab+2ac+2bc$，

所以$ab+ac+bc=-1$，则$-1=ab+c(b+a)=ab+c(1-c)$，即$ab=c^2-c-1$，

又$a+b=1-c$，所以由韦达定理得a和b为关于x的方程$x^2+(c-1)x+c^2-c-1=0$的两个不等根，

所以$\Delta=(c-1)^2-4(c^2-c-1)>0$，即$3c^2-2c-5<0$，得$-1<c<\frac{5}{3}$，

再由$ab=c^2-c-1$，得$abc=c^3-c^2-c$，令$f(c)=c^3-c^2-c\left(-1<c<\frac{5}{3}\right)$，

根据题意可知：$f(c)$在$\left(-1,-\frac{1}{3}\right]$上单调递增，在$\left(-\frac{1}{3},1\right)$上单调递减，在$\left[1,\frac{5}{3}\right)$上单调递增，

$f(-1)=-1$，$f(-\frac{1}{3})=\frac{5}{27}$，$f(1)=-1$，$f(\frac{5}{3})=\frac{5}{27}$，

当$c=-\frac{1}{3}$时，$a=-\frac{1}{3}$，$b=\frac{5}{3}$或$b=-\frac{1}{3}$，$a=\frac{5}{3}$，不满足实数a，b，c互不相同；

当$c=1$时，$a=-1$，$b=1$或$b=-1$，$a=1$，不满足实数a，b，c互不相同；

所以abc值范围是$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$，

故答案为：$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$

二、选择题（本大题满分 18 分）本大题共有 4 题，第 13—14 题每题 4 分，第

15—16 题每题 5 分，每题有且只有一个正确选项，请在答题纸的相应编号上将代表答案的小方格涂黑.

13. 已知集合 $A=\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\left\{x\middle|x=k\pi+(-1)^{k}\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 A 与 B 的关系是（　　）

A. $A=B$　　　　B. $A\subseteq B$　　　　C. $A\supseteq B$　　　　D. 以上选项均不正确

【答案】A

【解析】

【分析】化简集合 B，用列举法表示集合 A 、 B，即可判断.

【详解】因为 $A=\{x\mid x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\}$

$=\left\{\cdots,-\frac{11\pi}{3},-\frac{10\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},-\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3},\frac{13\pi}{3},\frac{14\pi}{3},\cdots\right\}$,

又 $B=\left\{x\middle|x=k\pi+(-1)^{k}\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}\right\}=\{x\mid x=(2t+1)\pi-\frac{2\pi}{3}$ 或 $x=2t\pi+\frac{2\pi}{3},t\in\mathbf{Z}\}$

$=\{x\mid x=2t\pi+\frac{\pi}{3}$ 或 $x=2t\pi+\frac{2\pi}{3},t\in\mathbf{Z}\}$

$=\left\{\cdots,-\frac{10\pi}{3},-\frac{11\pi}{3},-\frac{4\pi}{3},-\frac{5\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{8\pi}{3},\frac{7\pi}{3},\frac{14\pi}{3},\frac{13\pi}{3},\cdots\right\}$,

所以 $A=B$.

故选：A

14. 已知 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $a+\frac{1}{a}>-3$　　　　B. $a^{2}+1\geq3|a|$　　　　C. $a^{2}+3+\frac{1}{a^{2}+3}\geq2$　　　　D. $\frac{2}{1+a^{2}}>1$

【答案】C

【解析】

【分析】利用特殊值判断 A、B、D，根据对勾函数的性质判断 C.

【详解】对于 A：当 $a=-10$ 时，$a+\frac{1}{a}=-10\frac{1}{10}<-3$，故 A 错误;

对于 B：当 $a=1$ 时，$a^2+1=2$，$3|a|=3$，此时 $a^2+1<3|a|$，故 B 错误；

对于 C：因为 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$，所以 $a^2+3>3$，

又 $\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$ 在 $(3,+\infty)$ 上单调递增，所以 $a^2+3+\frac{1}{a^2+3}>\frac{10}{3}$，

显然满足 $a^2+3+\frac{1}{a^2+3}\geq 2$，故 C 正确；

对于 D：当 $a=1$ 时，$\frac{2}{1+a^2}=1$，故 D 错误.

故选：C

15. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，给定下列四个语句：

① $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格增函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上也是严格增函数；

② $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格增函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上也是严格增函数；

③ $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上是严格增函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上也是严格增函数；

④ $y=f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是严格增函数，且 $y=f(x)$ 是奇函数.

其中是“函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格增函数”的充分条件的有（　　）个.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】利用反例说明①④，根据单调性的定义判断②③.

【详解】对于①，令 $f(x)=\begin{cases}x, x\leq 0\\ x-5, x>0\end{cases}$，

满足 $y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格增函数，在区间 $(0,+\infty)$ 上也是严格增函数，

但是函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调，故①错误；

对于②：$y=f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是严格增函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上也是严格增函数，

即任意的 $x_1\in(-\infty,0)$ 都有 $f(x_1)<f(0)$，$x_2\in(0,+\infty)$ 都有 $f(x_2)>f(0)$，

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，

设任意的 $x_3,x_4\in\mathrm{R}$ 且 $x_3<x_4$，若 $x_3,x_4\in(-\infty,0]$，则 $f(x_3)<f(x_4)$，

若$x_3,x_4\in[0,+\infty)$，则$f(x_3)<f(x_4)$，

若$x_3\in(-\infty,0]$，$x_4\in[0,+\infty)$，则$f(x_3)<f(x_4)$，

所以函数$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上是严格增函数，故②正确；

对于③：$y=f(x)$在区间$(-\infty,1)$上是严格增函数，在区间$(0,+\infty)$上也是严格增函数，

则$y=f(x)$在区间$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$上是严格增函数，在区间$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$上也是严格增函数，

结合②可知，函数$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上是严格增函数，故③正确；

对于④：令$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x},x<0\\0,x=0\\\frac{-1}{x},x>0\end{cases}$，满足$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是严格增函数，且

$y=f(x)$是奇函数，

但是函数$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上不单调，故④错误.

故选：B

16. 已知A、B为非空数集，Ω为平面上的一些点构成的集合，集合

$C=\{y|对任意x\in A,有(x,y)\in\Omega\}$，集合$D=\{x|对任意y\in B,有(x,y)\in\Omega\}$，给定下列四个命题，其中真命题是（　　）

A. 若$C\subseteq B$，则$D\subseteq A$

B. 若$C\subseteq B$，则$D\supseteq A$

C. 若$C\supseteq B$，则$D\subseteq A$

D. 若$C\supseteq B$，则$D\supseteq A$

【答案】D

【解析】

【分析】运用元素和集合的关系判断即可.

【详解】设$A=\{a_1,a_2,a_3\cdots a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3\cdots b_n\},n>2$，

若$\Omega=\{(a_1,c),(a_2,c)\}$，此时$C=\varnothing\subseteq B$，$D=\varnothing\subseteq A$，B错误；

若$\Omega=\{(c,b_1),(c,b_2)\cdots(c,b_n)\},c\notin A$，此时$C=\varnothing\subseteq B$，$D=\{c\}$，$D\subseteq A$错误，A错误；

若$C \supseteq B$，则$\forall\left(a_i,b_j\right)\left(1 \le i,j \le n,i,j \in \mathrm{N}^*\right) \in \Omega$,则$D \supseteq A$，

且$A=\left\{a_1\right\},B=\left\{b_1,b_2\right\}$，若$\Omega=\left\{\left(a_1,b_1\right),\left(a_2,b_1\right),\left(a_1,b_2\right),\left(a_2,b_2\right),\left(c,b_1\right),\left(c,b_2\right)\right\}$，$D$真包含$A$,故D正确，C错误.

故选：D.

三、解答题（本大题满分78分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应的编号规定区域内写出必要的步骤.

17. 已知$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$，$x \in (0,\pi)$.

（1）求$\tan x$的值；

（2）求值：$\dfrac{\sin(\pi-x)+2\cos(\pi+x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}$.

【答案】（1）$-\dfrac{4}{3}$

（2）10

【解析】

【分析】（1）将$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$两边平方得到$2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}<0$，进而求得$\sin x-\cos x=\dfrac{7}{5}$，与$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$联立求出$\sin x$、$\cos x$，即可得解；

（2）利用诱导公式化简，再由同角三角函数的基本关系将弦化切，最后代入计算可得.

【小问1详解】

因为$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$，

所以$(\sin x+\cos x)^2=\dfrac{1}{25}$，即$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\dfrac{1}{25}$，

即$1+2\sin x\cos x=\dfrac{1}{25}$，所以$2\sin x\cos x=-\dfrac{24}{25}<0$，

又$x \in (0,\pi)$，则$\sin x>0$，所以$\cos x<0$，所以$x \in \left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，

所以$\sin x-\cos x>0$，

则$\sin x-\cos x=\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-4\sin x\cos x}$

$=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2-2\times\left(-\frac{24}{25}\right)}=\frac{7}{5}$,

所以 $\sin x=\frac{4}{5}$， $\cos x=-\frac{3}{5}$，

则 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{4}{3}$.

【小问 2 详解】

因为 $\tan x=-\frac{4}{3}$，

所以 $\frac{\sin(\pi-x)+2\cos(\pi+x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$=\frac{\sin x-2\cos x}{\cos x+\sin x}=\frac{\tan x-2}{1+\tan x}=\frac{-\frac{4}{3}-2}{1+\left(-\frac{4}{3}\right)}=10$.

18. 为确保 2023 年第六届中国国际进口博览会安全顺利进行，上海市公安局决定在进博会期间实施交通管制.经过长期观测发现，某最高时速不超过 100 千米/小时的公路段的车流量 y （辆/小时）与车辆的平均速度 v （千米/小时）之间存在函数关系：

$$y=\begin{cases}\frac{17}{2}v^2+\frac{295}{2}v, 0<v\le 25\\ \frac{144000v}{v^2-58v+1225}, 25<v\le 100\end{cases}.$$

（1）当车辆的平均速度为多少时，公路段的车流量最大？最大车流量为多少？

（2）若进博会期间对该公路段车辆实行限流管控，车流量不超过 4125 辆/小时，则汽车的平均速度应在什么范围内？

【答案】（1）车辆的平均速度为 35 千米/小时，最大车流量为 12000 辆/小时；

（2）$[0,15]\cup[77,100]$.

【解析】

【分析】（1）利用函数的单调性及基本不等式求出分段函数的最大值即得.

（2）利用给定条件，列出不等式并求解即得.

【小问 1 详解】

当$0 \le v \le 25$时，函数$y=\frac{17}{2}v^2+\frac{295}{2}v$在$[0,25]$上单调递增，当$v=25$时，$y_{\max}=9000$，

当$25 < v \le 100$时，

$$y=\frac{144000v}{v^2-58v+1225}=\frac{144000}{v+\frac{1225}{v}-58}\le\frac{144000}{2\sqrt{v\cdot\frac{1225}{v}}-58}=\frac{144000}{2\times35-58}=12000,$$

当且仅当$v=\frac{1225}{v}$，即$v=35$时取等号，而$9000<12000$，

所以车辆的平均速度为 35 千米/小时时，公路段的车流量最大，最大车流量为 12000 辆/小时.

【小问 2 详解】

当$0 \le v \le 25$时，$\frac{17}{2}v^2+\frac{295}{2}v \le 4125$，整理得$(17v+550)(v-15)\le 0$，解得$-\frac{550}{17}\le v \le 15$，则$0 \le v \le 15$，

当$25 < v \le 100$时，$v^2-58v+1225>0$，不等式$\frac{144000v}{v^2-58v+1225}\le 4125$化为：

$11v^2-1022v+13475 \ge 0$，整理得$(11v-175)(v-77)\ge 0$，解得$v \le \frac{175}{11}$或$v \ge 77$，则$77 \le v \le 100$，

所以汽车的平均速度应在$[0,15]\cup[77,100]$范围内.

已知奇函数$f(x)=2^x+\frac{a}{2^x}$，$x\in(-1,1)$.

（1）求实数a的值；

（2）判断$f(x)$在$(-1,1)$上的单调性并进行证明；

（3）若函数$f(x)$满足$f(1-m)+f(1-2m)<0$，求实数m的取值范围.

解析：（1）∵函数$f(x)$是定义在$(-1,1)$上的奇函数，∴$f(0)=0$，即$1+a=0$，可得$a=-1$.

∴$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$，则$f(-x)=2^{-x}-\frac{1}{2^{-x}}=-(2^x-\frac{1}{2^x})=-f(x)$，符合题设.∴$a=-1$.

（2）证明：由（1）可知，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$.任取$-1<x_1<x_2<1$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(2^{x_1}-\frac{1}{2^{x_1}})-(2^{x_2}-\frac{1}{2^{x_2}})=(2^{x_1}-2^{x_2})-(\frac{1}{2^{x_1}}-\frac{1}{2^{x_2}})$$

$$=(2^{x_1}-2^{x_2})+(\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{2^{x_1+x_2}})=(2^{x_1}-2^{x_2})(1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}})$$，$\because 2^{x_1}-2^{x_2}<0, 1+\frac{1}{2^{x_1+x_2}}>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$ $\therefore f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增.

（3）$\because f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，又 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是奇函数，

$\therefore f(1-m)+f(1-2m)<0$ 可化为 $f(1-m)<-f(1-2m)=f(2m-1)$，又由（2）知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，$\therefore -1<1-m<2m-1<1$，解得 $\frac{2}{3}<m<1$.

19. 设 $a\in\mathbf{R}$，已知 $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$，$g\left(x\right)=a+\log_2 x$.

（1）求证：函数 $y=f\left(x\right)$ 不是偶函数；

（2）若对任意的 x_1、$x_2\in\left[1,2\right]$，总存在 $x_3\in\left[1,2\right]$，使得 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<g\left(x_3\right)$ 成立，求实数 a 的取值范围；

（3）若对任意的 x_1，$x_2\in\left[1,2\right]$，总有 $\left|f\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|\geq 1$ 成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

（3）$\left(-\infty,0\right]\cup\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$

【解析】

【分析】（1）利用偶函数的定义即可证明；

（2）分别得到 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\left[1,2\right]$ 的单调性，将问题转化为 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|_{\max}<g\left(x\right)_{\max}$ 即可求解；

（3）将问题转化为 $f\left(x\right)_{\min}-g\left(x\right)_{\max}\geq 1$ 或 $f\left(x\right)_{\max}-g\left(x\right)_{\min}\leq -1$，结合单调性即可求解.

【小问 1 详解】

由题可得 $f\left(x\right)=x+\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$，

因为 $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f\left(x\right)\neq f\left(x\right)$，

所以函数 $y=f\left(x\right)$ 为奇函数，不是偶函数；

【小问 2 详解】

对任意的x_1、$x_2\in[1,2]$，不妨设$x_1<x_2$，

所以$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{1}{x_1}-x_2-\frac{1}{x_2}=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}\right)$，

因为$1\le x_1<x_2\le 2$，所以$x_1-x_2<0$，$x_1x_2-1>0$，$x_1x_2>0$，

所以$f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(x_1)<f(x_2)$，

所以$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，

则$f(x)_{\min}=f(1)=2$，$f(x)_{\max}=f(2)=\frac{5}{2}$，

所以$|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{5}{2}-2=\frac{1}{2}$，

由于$g(x)=a+\log_2 x$在$[1,2]$上单调递增，

所以$g(x)_{\max}=g(2)=a+1$，

要使对任意的x_1、$x_2\in[1,2]$，总存在$x_3\in[1,2]$，使得$|f(x_1)-f(x_2)|<g(x_3)$成立，

则$g(x)_{\max}=a+1>\frac{1}{2}$，即$a>-\frac{1}{2}$，

所以实数a的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$；

【小问3详解】

对任意的x_1，$x_2\in[1,2]$，总有$|f(x_1)-g(x_2)|\ge 1$成立，

所以$f(x_1)-g(x_2)\ge 1$或$f(x_1)-g(x_2)\le -1$，

则$f(x)_{\min}-g(x)_{\max}\ge 1$或$f(x)_{\max}-g(x)_{\min}\le -1$，

由（2）可得当$x\in[1,2]$，$f(x)_{\min}=f(1)=2$，$f(x)_{\max}=f(2)=\frac{5}{2}$，

$g(x)_{\max}=g(2)=a+1$，$g(x)_{\min}=g(1)=a$，

所以$2-(a+1)\ge 1$或$\frac{5}{2}-a\le -1$，解得$a\le 0$或$a\ge\frac{7}{2}$，

故实数a的取值范围是$(-\infty,0]\cup\left[\frac{7}{2},+\infty\right)$.

20. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\in P\\ -x^2+2x, & x\in M\end{cases}$，其中 P、M 是非空数集，且 $P\cap M=\varnothing$，设 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$；

（1）若 $P=(-\infty,0)$，$M=[0,3]$，求 $f(P)\cup f(M)$；

（2）是否存在实数 $a>-3$，使得 $P\cup M=[-3,a]$，且 $f(P)\cup f(M)=[-3,2a-3]$？若存在，请求出满足条件的实数 a；若不存在，请说明理由；

（3）若 $P\cup M=R$，且 $0\in M$，$1\in P$，$f(x)$ 是单调递增函数，求集合 P、M；

【答案】(1) $f(P)\cup f(M)=[-3,+\infty)$；(2) $a=3$；(3) $P=(0,t)\cup[1,+\infty),M=(-\infty,0]\cup[t,1)$，其中 $0<t<1$ 或者 $P=(0,t]\cup[1,+\infty),M=(-\infty,0]\cup(t,1)$,其中 $0<t<1$ 或者 $P=[1,+\infty),M=(-\infty,1]$ 或者 $P=(0,+\infty),M=(-\infty,0]$

【解析】

【分析】(1)根据 $P=(-\infty,0)$, $M=[0,3]$ 分别代入对应的分段区间求解集合的范围再求并集即可.

(2)先假设 $-3\in M$ 推出矛盾,故可得 $-3\in P$.代入可得 $a\geq 3$,再分析当 $a>3$ 时与题设矛盾可得 $a=3$.

(3)先根据函数的单调性确定 $(-\infty,0)\subseteq M$, $(1,+\infty)\subseteq P$,再证明在 $(0,1)$ 上存在分界点的话,这个分界点应该满足的性质,最后根据此性质写出满足题意的集合即可.

【详解】(1)因为 $P=(-\infty,0)$,所以 $f(P)=\{y\mid y=|x|,x\in(-\infty,0)\}=(0,+\infty)$,

因为 $M=[0,3]$,所以 $f(M)=\{y\mid y=-x^2+2x,x\in[0,3]\}=[-3,1]$.

故 $f(P)\cup f(M)=[-3,+\infty)$.

(2)若 $-3\in M$,则 $f(-3)=-15\notin[-3,2a-3]$,不符合要求.

所以 $-3\in P$,所以 $f(-3)=3$,因为 $f(-3)=3\in[-3,2a-3]$,所以 $2a-3\geq 3$,解得 $a\geq 3$.

若 $a>3$ 则 $2a-3>3>-(x-1)^2+1=-x^2+2x$.

因为$P\cap M=\varnothing$,所以$2a-3$的原象$x_0\in P$且$3<x_0\le a$

所以$x_0=2a-3\le a$,得$a\le 3$,与前提矛盾.

故$a=3$

(3)因为$f(x)$是单调递增函数,所以对任意的$x<0$有$f(x)<f(0)=0$,所以$x\in M$

所以$\left(-\infty,0\right)\subseteq M$,同理可证$\left(1,+\infty\right)\subseteq P$.若存在$0<x_0<1$,使得$x_0\in M$,

则$1>f\left(x_0\right)=-{x_0}^2+2x_0>x_0$,于是$\left[x_0,-{x_0}^2+2x_0\right]\subseteq M$,

记$x_1=-{x_0}^2+2x_0\in\left(0,1\right),x_2=-{x_1}^2+2x_1,\ldots$

所以$\left[x_0,x_1\right]\subseteq M$,同理可知$\left[x_1,x_2\right]\subseteq M$ …

由$x_{n+1}=-{x_n}^2+2x_n$,得$1-x_{n+1}=1+{x_n}^2-2x_n=\left(1-x_n\right)^2$,

所以$1-x_n=\left(1-x_{n-1}\right)^2=\left(1-x_{n-2}\right)^{2^2}=\ldots=\left(1-x_0\right)^{2^n}$.

所以$\log_2\left(1-x_n\right)=\log_2\left(1-x_0\right)^{2^n}=2^n\log_2\left(1-x_0\right)$,故$\dfrac{\log_2\left(1-x_n\right)}{\log_2\left(1-x_0\right)}=2^n$,

即$\log_{\left(1-x_0\right)}\left(1-x_n\right)=2^n$,此时$n=\log_2\left(\log_{\left(1-x_0\right)}\left(1-x_n\right)\right)$.

对于任意$x\in\left[x_0,1\right]$,取$\left[\log_2\log_{\left(1-x_0\right)}\left(1-x\right)-1,\log_2\log_{\left(1-x_0\right)}\left(1-x\right)\right]$中的自然数$n_x$,

则$x\in\left[xn_x,xn_x+1\right]\subseteq M$.所以$\left[x_0,1\right)\subseteq M$.

综上所述,满足要求的P,M必有如下表示:

$P=\left(0,t\right)\cup\left[1,+\infty\right),M=\left(-\infty,0\right]\cup\left[t,1\right)$,其中$0<t<1$或者

$P=\left(0,t\right]\cup\left[1,+\infty\right),M=\left(-\infty,0\right]\cup\left(t,1\right)$,其中$0<t<1$或者

$P=\left[1,+\infty\right),M=\left(-\infty,1\right]$或者$P=\left(0,+\infty\right),M=\left(-\infty,0\right]$

【点睛】本题主要考查了函数与集合的综合运用,需要根据题意确定元素与区间的包含关系.同时也考查了根据函数的单调性分析集合的问题,需要根据题意找到临界点满足的性质,属于难题.

21. 设函数$y=f\left(x\right)$, $x\in D$.记$\underbrace{f\left(f\left(f\cdots f\left(x\right)\right)\right)}_{n个f}=f_n\left(x\right)$, $n\in\mathbf{N}$, $n\ge 1$.对于D的非

空子集 A，若对任意 $x\in A$，都有 $f(x)\in A$，则称函数 $y=f(x)$ 在集合 A 上封闭.

（1）若 $g(x)=2^x$，$h(x)=2^{-x}$，$A=[0,1]$，分别判断函数 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 是否在集合 A 上封闭；

（2）设 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$，区间 $B=[a,b]$（其中 $a<b$），若函数 $y=f(x)$ 在集合 B 上封闭，求 $b-a$ 的最大值；

（3）设 $k\in\mathbf{N}$，$k\ge 1$，若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，函数 $y=f(x)$ 和 $y=f_k(x)$ 的图象都是连续的曲线，且函数 $y=f_k(x)$ 在区间 $I=[a,b]$（其中 $a<b$）上封闭，证明：存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=x_0$.

【答案】（1）函数 $y=g(x)$ 不在集合 A 上封闭，函数 $y=h(x)$ 在集合 A 上封闭

（2）2

（3）证明见解析

【解析】

【分析】（1）结合所给新定义，利用函数单调性得出定义域为 A 时的函数值域即可得解；

（2）结合所给新定义，分 $0\le a<b$、$a<b\le 0$ 及 $a<0<b$ 进行讨论即可得；

（3）利用反证法，由函数 $y=f(x)$ 和 $y=f_k(x)$ 的图象都是连续的曲线，运用零点的存在性定理中蕴含的思想，假设不存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_0)=x_0$，则必有对任意 $x\in R$，$f(x)>x$ 恒成立或 $f(x)<x$ 恒成立，从而分情况进行讨论后得出与已知条件矛盾的点即可得证.

【小问 1 详解】

由函数 $g(x)=2^x$ 在区间 $A=[0,1]$ 上单调递增，故 $g(x)\in[1,2]$，

故函数 $y=g(x)$ 不在集合 A 上封闭；

由函数 $h(x)=2^{-x}$ 在区间 $A=[0,1]$ 上单调递减，故 $h(x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，

此时有 $\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq[0,1]$，故函数 $y=h(x)$ 在集合 A 上封闭；

【小问 2 详解】

当 $0 \le a < b$ 时，由函数 $y = f(x)$ 在集合 B 上封闭，

则有 $\begin{cases} a \le a^2 \\ b^2 \le b \\ 0 \le a < b \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$，此时 $b - a = 1$；

当 $a < b \le 0$ 时，由 $f\left(x\right) = x^2 \ge 0$，

此时函数 $y = f(x)$ 不可能在集合 B 上封闭；

当 $a < 0 < b$ 时，由函数 $y = f(x)$ 在集合 B 上封闭，

则有 $\begin{cases} b^2 \le b \\ a^2 \le b \\ a < 0 < b \end{cases}$，解得 $\begin{cases} -1 \le a \le 0 \\ 0 < b \le 1 \end{cases}$，此时 $\left(b - a\right)_{\max} = 1 - \left(-1\right) = 2$，

综上所述，$b - a$ 的最大值为 2；

【小问 3 详解】

假设不存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $f\left(x_0\right) = x_0$，

即对任意 $x \in R$，$f\left(x\right) \ne x$，

由函数 $y = f(x)$ 的图象是连续的曲线，

故对任意 $x \in R$，$f\left(x\right) > x$ 恒成立或 $f\left(x\right) < x$ 恒成立，

若对任意 $x \in R$，$f\left(x\right) > x$ 恒成立，

则当 $I = \left[a, b\right]$ 时，有 $f\left(b\right) > b$，则 $f\left(f\left(b\right)\right) > f\left(b\right) > b$，$\cdots$，

即有 $f_k\left(x\right) > b$，此时函数 $y = f_k\left(x\right)$ 不可能在区间 $I = \left[a, b\right]$ 上封闭，

与已知条件矛盾，故对任意 $x \in R$，$f\left(x\right) > x$ 不成立；

若对任意 $x \in R$，$f\left(x\right) < x$ 恒成立，

则当 $I = \left[a, b\right]$ 时，有 $f\left(a\right) < a$，则 $f\left(f\left(a\right)\right) < f\left(a\right) < a$，$\cdots$，

即有 $f_k\left(a\right) < a$，此时函数 $y = f_k\left(x\right)$ 不可能在区间 $I = \left[a, b\right]$ 上封闭，

与已知条件矛盾，故对任意 $x \in R$，$f\left(x\right) < x$ 不成立；

故存在 $x_0 \in \mathbf{R}$，使得 $f\left(x_0\right) = x_0$.