6.2 任意角的正弦、余弦、正切、余切（2）

1. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$，其中 $a>b>0$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin\alpha=$ $\underline{\dfrac{2ab}{a^2+b^2}}$.

2. 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}=$ $\underline{2}$.

3. 若 $\cot(\sin\theta)\cdot\tan(\cos\theta)>0$，则 θ 是第 $\underline{一、三}$ 象限的角.

4. 若 θ 是锐角，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin^3\theta-\cos^3\theta=$ $\underline{\dfrac{11}{16}}$.

$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

5. 设 $\cot x=2$，则 $\dfrac{2\cos x-4\sin x}{5\cos x+3\sin x}=$ $\underline{0}$，$3\sin^2\theta-4\cos^2\theta=$ $\underline{-\dfrac{13}{5}}$.

6. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$，其中 $a>b>0$，$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sin\alpha=$ ________.

7. 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=-\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha-1}=$ ________.

8. 用列举法写出集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=\dfrac{1}{\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}}+\dfrac{2\tan\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}\right\}=$ $\underline{\{-1,-3,1,3\}}$.

9. 使函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$ 有意义的 x 的取值范围是 $\underline{[-4,-\pi]\cup[0,\pi]}$；使函数 $\lg\sin(\cos x)$ 有意义的 x 的取值范围是 $\underline{\{x\mid x\in(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi),k\in Z\}}$

10. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，那么 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值是 $\underline{\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$.

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知 $\sin\alpha=m(|m|<1)$，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，那么 $\tan\alpha=$ $\underline{-\dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}}}$.

12. 若角 α 的终边落在直线 $x+y=0$ 上，则 $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}+\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ 的值等于 $\underline{0}$.

$\dfrac{\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\dfrac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha}$

$(\tan\theta+\cot\theta)^{-\frac{3}{4}}=\sin\theta$, $\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^{-\frac{3}{4}}=\sin\theta$, $\Rightarrow \sin\theta=\cos^3\theta$,

$\Rightarrow \tan\theta=\cos^2\theta$ ∴ 原式 $=\frac{1}{2}$

13. 已知$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$\log_{\tan\theta+\cot\theta}\sin\theta=-\frac{3}{4}$，则$\log_{\tan\theta}\cos\theta=$ $\underline{\ \frac{1}{2}\ }$.

14. 证明下列恒等式:

(1) $\frac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$；　(2) $\frac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x}=\frac{3}{2}$；

(3) $\frac{\tan\alpha.\sin\alpha}{\tan\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\tan\alpha\cdot\sin\alpha}$；　(4) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

(1) 证：左式 $=\frac{\sin^2x+\cos^2x+2\sin x\cos x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$

$=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$

∵ $\sin x+\cos x\neq 0$, $\cos x\neq 0$

∴ 左式 $=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=$ 右式

(2) 证　∵ $\sin^2x+\cos^2x=1$

∴ $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)-2\sin^2x\cos^2x$

$=1-2\sin^2x\cos^2x$

∴ $\sin^6x+\cos^6x=1-3\sin^2x\cos^2x$

左式 $=\frac{1-(1-3\sin^2x\cos^2x)}{1-(1-2\sin^2x\cos^2x)}=\frac{3\sin^2x\cos^2x}{2\sin^2x\cos^2x}$

∵ $\sin x\cos x\neq 0$

∴ 左式 $=\frac{3}{2}=$ 右式

(3) 左式 $=\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha-1}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

右式 $=\frac{\sec\alpha+1}{\tan\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$=\frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$=$ 左式

(4) 左式

$=\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha+1)^2}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}=$ 右式

15. 已知$\cot\alpha=\frac{1}{3}$，求$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$.

解　$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$.

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=3$

$\sin\alpha=3\cos\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$10\cos^2\alpha=1$

∴ $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$

当α在第一象限 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\frac{3}{10}\sqrt{10}$, $\tan\alpha=3$

当α在第三象限 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\sin\alpha=-\frac{3}{10}\sqrt{10}$ $\tan\alpha=3$

16. 已知 $\sin\alpha=\frac{m^2-1}{m^2+1}(m>0)$，求$\cos\alpha$与$\tan\alpha$的值.

解　$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$=\pm\sqrt{1-\frac{(m^2-1)^2}{(m^2+1)^2}}$

$=\pm\frac{\sqrt{(m^2+1)^2-(m^2-1)^2}}{m^2+1}$

$=\pm\frac{2m}{m^2+1}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

① $\cos\alpha=\frac{2m}{m^2+1}$ $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{m^2-1}{m^2+1}}{\frac{2m}{m^2+1}}=\frac{m^2-1}{2m}$

② $\cos\alpha=-\frac{2m}{m^2+1}$ $\tan\alpha=-\frac{m^2-1}{2m}$

17. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{2}$，求下列各式的值：

(1) $\sin\alpha+2\cos\alpha$；

(2) $\dfrac{\cos\alpha-5\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha}$；

(3) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{5\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha+1}$；

(4) $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$.

-5

解 (1) $\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$3\cos^2\alpha=1$ $\therefore\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$

$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

① $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

原式 $=\sqrt{2}\cos\alpha+2\cos\alpha$

$=(2+\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$

② $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

原式 $=-(2+\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}$

(2) $\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha$ 代入

原式 $=\dfrac{\cos\alpha-5\sqrt{2}\cos\alpha}{3\cos\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha}$

$=\dfrac{1-5\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{1}{5}(1-5\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$

$=\frac{1}{5}(3+10-16\sqrt{2})=\frac{13}{5}-\frac{16}{5}\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $\dfrac{13-16\sqrt{2}}{7}$

(3) 原式 $=\dfrac{2\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cos^2\alpha-3\cos^2\alpha}{5\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{-1-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}+5}=-\frac{1}{5}$

(4) 原式 $=4\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$

$=(5-\sqrt{2})\times\frac{1}{3}$

$=\frac{5}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

18. (1) 已知 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=5\sin\alpha$，求 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 的范围；

(2) 已知 $6\sin3\alpha-\cos^2 2\beta=6$，求角 α 的值.

解 (1) $\sin^2\beta=\dfrac{5\sin\alpha-3\sin^2\alpha}{2}\in[0,1]$ 得 ~~...~~ $\sin\alpha\in[0,\frac{2}{3}]\cup\{1\}$

原式 $=\sin^2\alpha+\dfrac{5\sin\alpha-3\sin^2\alpha}{2}$

$=-\frac{1}{2}\sin^2\alpha+\frac{5}{2}\sin\alpha$ （$\sin\alpha\in[0,\frac{2}{3}]\cup\{1\}$）

则值域为 $[0,\frac{13}{9}]\cup\{2\}$

(2) $\sin3\alpha=1-\frac{1}{6}\cos^2 2\beta$

$\alpha=\frac{1}{3}\arcsin(1-\frac{1}{6}\cos^2 2\beta)$

$3\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$\alpha=\frac{2}{3}k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in Z$

(附加)

1. 已知实数 $a>b>0$，求函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{b-x^2}}$ 的最大值.

2. 设实数 x,y,z,ω 满足 $x+y+z+\omega=1$，求 $M=x\omega+2y\omega+3xy+3z\omega+4xz+5yz$ 的最大值.

3. 已知实数 m 满足：当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge ma^2$ 总成立，求 m 的最大值.

4. 设正实数 x,y 满足 $x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{27}{4}$，求$P=\frac{15}{x}-\frac{3}{4y}$ 的最小值.

5. 记 $F(x,y)=(x-y)^2+\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{y}\right)^2\ (y\neq 0)$，求$F(x,y)$ 的最小值.

1. $f(x)=\dfrac{x(\sqrt{a-x^2}+\sqrt{b-x^2})}{a-b}$

$(x\sqrt{a-x^2}+x\sqrt{b-x^2})^2\le(x^2+b-x^2)(x^2+a-x^2)=ab$

$f(x)\le\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$

$f(x)$最大值为 $\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$，在$x=\sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}$时取等.

2. $w=1-x-y-z$

$M=x(1-x-y-z)+2y(1-x-y-z)+3xy+3z(1-x-y-z)+4xz+5yz$

$=x-x^2-\cancel{xy}-\cancel{2x}+2y-\cancel{2xy}-2y^2-\cancel{2yz}+\cancel{3xy}+3z-\cancel{3zx}-\cancel{3zy}-3z^2+\cancel{4xz}+\cancel{5yz}$

$=x-x^2+2y-2y^2+3z-3z^2$

对于$f(a)=a-a^2$ 最大值为 $\frac{1}{4}$

$M\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{4}\times3=\frac{1}{4}\times6=\frac{3}{2}$

故 M最大值为$\frac{3}{2}$，在$x=y=z=\frac{1}{2}$，$w=-\frac{1}{2}$时取等

3. ~~$a=0$时 $\begin{cases}b=0,c=0\\ b\neq0\end{cases}$~~

~~$c\neq0$时 $\Delta=b^2-4ac\ge0$~~

~~$1°\ a=0$~~

~~$b^2+(b-c)^2+c^2\ge0$~~

~~4 恒成立~~

$a\neq0$.

$\Delta=b^2-4ac\ge0$

$m\le\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a^2}$

$m\le2+2\left(\frac{b}{a}\right)^2+2\left(\frac{c}{a}\right)^2-2\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}-2\frac{c}{a}-2\frac{b}{a}$

令 $x=\frac{b}{a}$，$y=\frac{c}{a}$，$x,y\in R$

$m\le2+2x^2+2y^2-2xy-2x-2y$

则$f(x,y)=x^2+y^2-xy-x-y+1$

$m\le2f(x,y)$.

$f(x,y)=x^2-(y+1)x+y^2-y+1\le f\left(\frac{y+1}{2},y\right)=-\frac{(y+1)^2}{4}+y^2-y+1=\frac{3}{4}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{3}{4}\le0$

故$m\in(-\infty,0]$

m最大为0

4. $P=\frac{15}{x}-\frac{3}{4y}$

得 $y=\frac{3x}{60-4Px}$ 代入

5. $f(x,y)$

$=\frac{10}{9}x^2+\left(\frac{2}{y}-2y\right)x+\frac{9}{y^2}+y^2$

$\ge-\dfrac{\left(\frac{2}{y}-2y\right)^2}{4\times\frac{10}{9}}+\frac{9}{y^2}+y^2=\frac{9}{10}y^2+\frac{81}{10y^2}+\frac{9}{5}$

$\because y\neq0$，$\therefore y^2\in(0,+\infty)$

$f(x,y)\ge2\cdot\frac{27}{10}+\frac{9}{5}=\frac{36}{5}$

最小值$\frac{36}{5}$

在 $y=3$，$x=\frac{3}{5}$ 时取等

(附加)

1 已知实数 $a>b>0$,求函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{b-x^2}}$ 的最大值.

2 设实数 x,y,z,ω 满足 $x+y+z+\omega=1$,求 $M=x\omega+2y\omega+3xy+3z\omega+4xz+5yz$ 的最大值.

3 已知实数 m 满足:当关于 x 的实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根时, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge ma^2$ 总成立,求 m 的最大值.

4 设正实数 x,y 满足 $x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{27}{4}$,求 $P=\frac{15}{x}-\frac{3}{4y}$ 的最小值.

$b^2=4ac\ \ b=2\sqrt{ac}$.

5 记 $F(x,y)=(x-y)^2+\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{y}\right)^2\ (y\neq0)$,求$F(x,y)$ 的最小值.

2. $M=x(1-x-y-z)+2y(1-x-y-z)+3z(1-x-y-z)+3xy+4xz+5yz$

$=x+y+z-x^2-2y^2-3z^2=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}-2(y-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}-3(z-\frac{1}{2})^2$

$\le\frac{3}{2}$

M最大值为$\frac{3}{2}$ 等号在$x=\frac{1}{2}$ $y=\frac{1}{2}$ $z=\frac{1}{2}$ $W=-\frac{1}{2}$时取得。

3. 记左式$=M$ 设$\frac{b}{a}=A$ $\frac{c}{a}=B$ $ax^2+bx+c=0$有实根 设为x_1,x_2(重根时将x_2换成x_1即可)

$x_1+x_2=-A$ $x_1x_2=B$ $\frac{左}{右}=(1-\frac{b}{a})^2+(\frac{b}{a}-\frac{c}{a})^2+(\frac{c}{a}-1)^2=(1-A)^2+(A-B)^2+(B-1)^2=(1+x_1+x_2)^2+(-x_1-x_2-x_1x_2)^2$

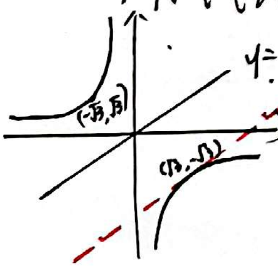
$+(x_1x_2-1)^2=2(x_1^2+x_1+1)(x_2^2+x_2+1)\geq2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$ 此时$x_1=x_2=-\frac{1}{2}$.

等号在$a=b=4c\neq0$时取得。

4 $x^2+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+(\frac{15}{x}-\frac{3}{4y})=\frac{27}{4}+P$ $\frac{27}{4}+P=x^2+\frac{16}{x}+y^2+\frac{1}{4y}=x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}+y^2+\frac{1}{8y}+\frac{1}{8y}\geq3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}+3\sqrt[3]{y^2\cdot\frac{1}{8y}\cdot\frac{1}{8y}}=\frac{51}{4}$

$\frac{27}{4}+P\geq\frac{51}{4}\Rightarrow P\geq6$. 等号在$x=2$ $y=\frac{1}{2}$时取得.

5 原式代表直线$l: x=3y$上一点$P(x_0,\frac{x_0}{3})$与曲线$C: y=-\frac{3}{x}$上一点$Q(y_0,-\frac{3}{y_0})$的距离的平方.



$y=\frac{1}{3}x$ $Q(x_1,-\frac{3}{x_1})$ 点到直线距离公式 $d_{Q-l}=\frac{|x_1+\frac{9}{x_1}|}{\sqrt{10}}\geq\frac{|2\sqrt{x_1\cdot\frac{9}{x_1}}|}{\sqrt{10}}=\frac{6}{\sqrt{10}}$ 等号在$x_1=3$或-3时取得

不妨取$Q(3,-1)$ 过Q向l作垂线,记垂足为A $QA: y=-3x+8$.

$\therefore A(\frac{12}{5},\frac{4}{5})$ $\therefore F(x,y)_{min}=(\frac{6}{\sqrt{10}})^2=\frac{36}{10}=\frac{18}{5}$ 等号在$x=\frac{12}{5}$ $y=3$时取得。