周末作业 10.13

一、填空题

1.已知非空集合A，B满足以下两个条件:

(ⅰ)$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\bigcap B=\varnothing$;

(ⅱ)若$x\in A$，则$x+1\in B$.

则有序集合对(A,B)的个数为(　)

【答案】12 个

【解析】【分析】

本题考查交集、并集及其运算, 考查了学生理解问题的能力. 分别讨论集合A, B元素个数, 即可得到结论. 根据元素关系分别进行讨论是解决本题的关键.

【解答】

解：若集合A中只有 1个元素，则集合B中有 5个元素，则A可以为$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，有 5种；

若集合A中只有 2个元素，则集合B中有 4个元素，则A可以为$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{1,5\}$，$\{2,4\}$，$\{2,5\}$，$\{3,5\}$，有 6种；

若集合A中只有 3个元素，则集合B中有 3个元素，则A只能是$\{1,3,5\}$，只有 1种，

则共有有序集合对(A,B) 12个，

2.已知集合$M=\{a|\frac{6}{5-a}\in N_{+}$，且$a\in Z\}$，则$M$等于(　)

【答案】$\{-1,2,3,4\}$

【解析】【分析】

本题主要考查了集合定义及表示方法.

根据$a\in Z$且$\frac{6}{5-a}\in N_{+}$，可得 $5-a$可能值为 1，2，3，6，然后求出对应a的值即可求解.

【解答】

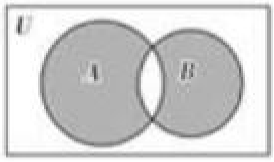
解：因为集合$M=\{a|\frac{6}{5-a}\in N_{+}$，且$a\in Z\}$，

所以 $5-a$可能值为 1，2，3，6，

所以对应a的值为 4，3，2，-1，

所以集合$M=\{-1,2,3,4\}$.

3.已知全集$U=R$，集合$A=\{x|0\leq x\leq 2\}$，$B=\{x|x^2-x>0.\}$，则图中的阴影部分表示的集合为(　)



【答案】$\{x|x\leq 1$或$x>2\}$

【解析】【分析】

本题主要考查了利用韦恩图表示的集合运算，属于基础题.

化简集合B，再求$A\cup B, A\cap B$，最后从并集中去掉交集部分即可.

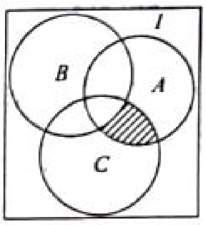
【解答】

解：$B=\{x|x<0$ 或$x>1\}$, $\therefore A\cup B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{x|x<0$ 或$x>1\}=R$,

$A\cap B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}\cap\{x|x<0$ 或$x>1\}=\{x|1<x\leqslant 2\}$,

∴阴影部分表示的集合为$A\cup B$中去掉$A\cap B$就是$\complement_R(A\cap B)=\{x|x\leqslant 1$ 或$x>2\}$.

4.如图，三个圆的内部区域分别代表集合A，B，C，全集为I，则图中阴影部分的区域表示(　)



【答案】$A\bigcap C\bigcap(\complement_I B)$

【解析】

本题主要考查了$Venn$图表达集合的关系及运算等基础知识，属于基础题.

先根据图中的阴影部分的元素属于哪个集合，不属于哪个集合进行判定，然后利用集合的交集和补集表示即可.

【解答】

解：根据题图可知阴影部分中的元素属于A，不属于B，属于C，

则阴影部分所表示的集合是$A\cap C\cap(\complement_I B)$.

5.若命题“$\exists x\in(0,+\infty)$，使得$ax>x^2+4$成立”是假命题，则实数a的取值范围是(　)

【答案】$(-\infty,4]$

【解析】【分析】

先把原命题转化为等价的真命题，再结合最值解决恒成立问题即可.

本题主要考查了存在量词和特称命题，以及把恒成立问题转化为最值问题解决，是基础题.

【解答】

解：若命题“$\exists x\in(0,+\infty)$，使得$ax>x^2+4$成立”是假命题，

则有“$\forall x\in(0,+\infty)$，使得$ax\leq x^2+4$成立”是真命题.

即$a\leq x+\frac{4}{x}$，则$a\leq(x+\frac{4}{x})_{min}$，

又$x+\frac{4}{x}\geq2\sqrt{4}=4$，当且仅当$x=2$时取等号，故$a\leq4$.

6.已知x,y满足$\begin{cases}2\leq x-2y\leq6\\-1\leq2x+y\leq5\end{cases}$，则$x+y$的取值范围是(　)

【答案】$[-\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$

【解析】【分析】

本题考查利用不等式性质求取值范围，属于中档题.

由题意，$\begin{cases}t=x-2y\\s=2x+y\end{cases}$，利用$s$，$t$表示$x$，$y$，进而得到$x+y$的表示，由$s$，$t$的范围，求出$x+y$的范围即可.

【解答】

解：由题意，设$\begin{cases}t=x-2y\\s=2x+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{5}(t+2s)\\y=\frac{1}{5}(-2t+s)\end{cases}$，

从而$x+y=-\frac{1}{5}t+\frac{3}{5}s$，

由于$\begin{cases}2\leqslant t\leqslant6\\-1\leqslant s\leqslant5\end{cases}$，

从而$x+y=-\frac{1}{5}t+\frac{3}{5}s\in[-\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$.

7.已知关于x的不等式组$\begin{cases}x^2-2x-8>0\\2x^2+(2k+7)x+7k<0\end{cases}$仅有一个整数解，则$k$的取值范围为(　)

【答案】$[-5,3)\cup(4,5]$

【解析】【试题解析】

【分析】

本题考查一元二次不等式的解集以及集合的交集运算，属于中档题.

分别求解不等式，对k进行分类讨论根据不等式的解集以及不等式组仅有一个整数解，即可求解.

【解答】

解：解不等式$x^2-2x-8>0$，得$x>4$或$x<-2$，

解方程组 $2x^2+(2k+7)x+7k=0$，得$x_1=-\frac{7}{2}$，$x_2=-k$，

①当$-k<-\frac{7}{2}$，即$k>\frac{7}{2}$时，

不等式 $2x^2+(2k+7)x+7k<0$的解为$-k<x<-\frac{7}{2}$，

此时不等式组解集$A=(-k,-\frac{7}{2})$，

∵集合A中有且仅一整数，

则$-5\leq -k<-4$，

解得 $4<k\leq 5$；

②当$-k>-\frac{7}{2}$，即$k<\frac{7}{2}$时，

不等式 $2x^2+(2k+7)x+7k<0$的解为$-\frac{7}{2}<x<-k$，要使集合A中有且只有一个整数解，

则$-3<-k\leq 5$，

即$-5\leq k<3$，

综上，k的取值范围为$[-5,3)\cup(4,5]$.

8.若不等式$x^2-(2a+2)x+2a<0(a>0)$有且只有三个整数解，实数a的取值范围为(　)

【答案】$\frac{3}{4}<a\leq\frac{4}{3}$

【解析】【分析】本题考查一元二次不等式的解法及应用，属于中档题.

利用不等式$x^2-(2a+2)x+2a<0(a>0)$有且只有三个整数解列不等式求解即可.

【解答】令$x^2-(2a+2)x+2a=0(a>0)$，

$\because \Delta=[-(2a+2)]^2-4\times 2a=4a^2+4>0$，

$\therefore x^2-(2a+2)x+2a=0(a>0)$的根为

$x_1=a+1-\sqrt{a^2+1}$，$x_2=a+1+\sqrt{a^2+1}$，

$\because a>0$，

$\therefore 0<x_1<1$，$x_2>2$，

不等式$x^2-(2a+2)x+2a<0(a>0)$的解集为$(a+1-\sqrt{a^2+1},a+1+\sqrt{a^2+1})$，

∵不等式$x^2-(2a+2)x+2a<0(a>0)$有且只有三个整数解，

∴整数解只能为 1、2、3，

所以$a + 1+\sqrt{a^2 + 1}\leqslant 4$ 且$a + 1+\sqrt{a^2 + 1} > 3$,

解不等式$a + 1+\sqrt{a^2 +}\leqslant 4$,

$\therefore \sqrt{a^2 + 1}\leqslant 3 - a$,

两边平方得$a^2 + 1\leqslant 9 - 6a + a^2$,

解得$a\leqslant \frac{4}{3}$,

解不等式$a + 1+\sqrt{a^2 + 1} > 3$,

$\therefore \sqrt{a^2 + 1} > 2 - a$,

两边平方得$a^2 + 1 > 4 - 4a + a^2$,

解得$a > \frac{3}{4}$,

$\therefore \frac{3}{4} < a\leqslant \frac{4}{3}$.

9.已知集合$\mathbf{A = \{x|\frac{3x-1}{x-2}\leqslant 1\}}$，集合$\mathbf{B = \{x|x^2 - (a+2)x + 2a < 0\}}$，若“$\mathbf{x \in A}$”是“$\mathbf{x \in B}$”的充分不必要条件，则实数$\mathbf{a}$的取值范围(　)

【答案】$(-\infty, -\frac{1}{2})$

【解析】【分析】

本题主要考查了必要条件、充分条件与充要条件的判断，以及不等式的解法，考查了集合的关系的应用，考查了运算求解能力，属于难题.

化简A，B，根据题意可知集合A是集合B的真子集，即可求解.

【解答】

解：$A = \{x|\frac{3x-1}{x-2}\leqslant 1\} = \{x|-\frac{1}{2}\leqslant x < 2\}, B = \{x|(x-a)(x-2) < 0\}$,

又$\because$“$x \in A$”是“$x \in B$”的充分不必要条件,

$\therefore A\subsetneqq B$,

$\therefore a < -\frac{1}{2}$,

10.已知集合$A = \{x|ax^2 - 3x + 2 = 0\}$至多有一个元素，则$a$的取值范围_____.

【答案】$a \geq \frac{9}{8}$或$a = 0$

【解析】【分析】

本题考查集合中元素的个数问题.

分情况讨论①若集合A中没有元素，即$A=\varnothing$，那么方程$ax^2-3x+2=0$无解，②若集合A中只有一个元素，那么方程$ax^2-3x+2=0$只有一个解.

【解答】

解：①若集合A中没有元素，即$A=\varnothing$，那么方程$ax^2-3x+2=0$无解，

即$a\neq 0$且$\Delta=(-3)^2-8a<0$，所以$a>\frac{9}{8}$.

②若集合A中只有一个元素，那么方程$ax^2-3x+2=0$只有一个解.

(ⅰ)当$a=0$时，$x=\frac{2}{3}$，此时$A=\{\frac{2}{3}\}$，满足题意，

(ⅱ)当$a\neq 0$时，$\Delta=(-3)^2-8a=0$，所以$a=\frac{9}{8}$，此时$A=\{\frac{4}{3}\}$，满足题意，

综上所述，$a=0$或$a\geqslant\frac{9}{8}$.

故答案为$a\geq\frac{9}{8}$或$a=0$.

11.若 $0<x<1$，则$\sqrt{x}$，$\frac{1}{x}$，x，x^2按从小到大的顺序排列是_____.

【答案】$x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$

【解析】【分析】

本题主要考查利用不等式的性质比较大小，属于基础题.

利用作差法结合不等式的性质比较大小.

【解答】

解：$\because 0<x<1$，

$\therefore \frac{1}{x}>1$，$0<\sqrt{x}<1$，$0<x^2<1$，

又$x-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)<0$，$x^2-x=x(x-1)<0$，

则$x<\sqrt{x}, x^2<x$，

故$x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$.

故答案为$x^2<x<\sqrt{x}<\frac{1}{x}$.

12.已知关于x的不等式 $3x^2+(10-2a)x-6a+3<0$ 的解集中恰有 5 个整数解，则实数a的范围是_____.

【答案】$-13\leq a<-\frac{23}{2}$或$\frac{7}{2}<a\leq 5$.

【解析】【分析】

本题考查一元二次不等式的解法，属于中档题.

将不等式化为 $3(x-\frac{2a-1}{3})(x+3)<0$，再对$a$进行分类讨论即可.

【解答】

解：因为 $3x^2+(10-2a)x-6a+3<0$,

所以$(3x-2a+1)(x+3)<0\Leftrightarrow 3(x-\frac{2a-1}{3})(x+3)<0$,

①当$\frac{2a-1}{3}<-3$，即$a<-4$时，不等式解集为$\{x|\frac{2a-1}{3}<x<-3\}$,

因解集中恰有 5个整数，得$-9\leq\frac{2a-1}{3}<-8$，解得$-13\leq a<-\frac{23}{2}$;

②当$\frac{2a-1}{3}>-3$，即$a>-4$时，不等式解集为$\{x|-3<x<\frac{2a-1}{3}\}$,

因解集中恰有 5个整数，得 $2<\frac{2a-1}{3}\leq 3$，解得$\frac{7}{2}<a\leq 5$;

③$\frac{2a-1}{3}=-3$，即$a=-4$时，不等式解集为空集，不合题意.

综上：当不等式 $3x^2+(10-2a)x-6a+3<0$的解集中恰有 5个整数解时,

a的范围是$-13\leq a<-\frac{23}{2}$或$\frac{7}{2}<a\leq 5$.

13.不等式$\frac{1}{|x-1|}<\frac{1}{2}$的解集为______

【答案】$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

【解析】【分析】

本题考查了绝对值不等式的解法，属基础题.

由$\frac{1}{|x-1|}<\frac{1}{2}$可得$|x-1|>2$，去分母后解绝对值不等式即可.

【解答】

解：由$\frac{1}{|x-1|}<\frac{1}{2}$可得$|x-1|>2$，可得$x-1>2$或$x-1<-2$,

即$x>3$或$x<-1$,

故答案为$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

二、选择题

14.已知$x>0$，$y>0$，且$x+2y+xy-7=0$，则$x+y$的最小值为(   )

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

【答案】A

【解析】【分析】

本题考查最值问题，属于中档题.

令$x+y=m$，则$y=m-x$，利用一元二次方程有解可得$x+y$的最小值

【解答】

解：令$x+y=m$，$m>0$，则$y=m-x$，

则$x+2y+xy-7=0$可化为$x+2(m-x)+x(m-x)-7=0$，

整理$x^2+(1-m)x+7-2m=0$，

∵此方程一定有解，

$\therefore\ \Delta\geq 0$，即$(1-m)^2-4\times(7-2m)\geq 0$，$m^2+6m-27\geq 0$，$(m-3)(m+9)\geq 0$，

解得$m\geq 3$，$m\leq -9$(舍)，则$x+y$的最小值为 3.

15.下列说法正确的是(　)

A. 若$a>b>0$，则$ac^2>bc^2$　　　　B. 若$a>b$，则$a^2>b^2$

C. 若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$　　　　D. 若$a<b$，则$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

【答案】C

【解析】【分析】

本题考查了不等式的概念及性质，属于基础题.

根据不等式性质及取特殊值法来判断即可.

【解答】

解：对于A，若$c=0$，则$ac^2=bc^2$，故 A错误;

对于B，若$a=1$，$b=-2$，则$a^2<b^2$，故 B错误;

对于C，若$a<b<0$，$a<0$，可得$a^2>ab$，若$a<b<0$，$b<0$，可得$ab>b^2$，则$a^2>ab>b^2$，故 C正确;

对于D，若$a=-1$，$b=1$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故 D错误.

故选 C.

16.关于x的不等式$|x-2|+|x+3|>a^2-4a$恒成立，则实数a的取值范围是(　)

A. $2\leq a\leq 3$　　B. $a<5$　　C. $a>-3$　　D. $-1<a<5$

【答案】D

【解析】【分析】

本题考查绝对值不等式.

先根据三角不等式求$|x-2|+|x+3|$的最小值，再解不等式即可.

【详解】因为$|x-2|+|x+3|>a^2-4a$恒成立，

所以有$(|x-2|+|x+3|)_{\min}>a^2-4a$.

而$|x-2|+|x+3|\geq|x+3+2-x|=5$,

当且仅当$x-2$与$x+3$异号，即$-3<x<2$时取等号，

所以$a^2-4a<5$，解得$-1<a<5$,

故选：D

三、解答题：本题共 4 小题，共 48 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.(本小题 12 分)

已知集合$A=\{x|x^2-x-2>0\}$，$B=\{x|2x^2+(2k+5)x+5k<0\}$.

(1)若$k<0$，求B；

(2)若$A\cap B$中有且仅有一个整数-2，求实数k的取值范围.

【答案】解：(1)$\because k<0$，$\therefore B=\{x|2x^2+(2k+5)x+5k<0\}=\{x|(2x+5)(x+k)<0\}$

$=\{x|-\frac{5}{2}<x<-k\}$.

(2)集合$A=\{x|x^2-x-2>0\}=\{x|x<-1$或$x>2\}$,

$B=\{x|2x^2+(2k+5)x+5k<0\}=\{x|(2x+5)(x+k)<0\}$.

当$-\frac{5}{2}>-k$，即$k>\frac{5}{2}$时，$B=\{x|-k<x<-\frac{5}{2}\}$，$A\cap B$中没有整数$-2$，不满足条件；

当$k=\frac{5}{2}$时，$B=\varnothing$，不满足条件；

当$k<\frac{5}{2}$时，$-\frac{5}{2}<-k$，$B=\{x|-\frac{5}{2}<x<-k\}$,

要使$A\cap B$中有且仅有一个整数-2，则$-2<-k\leq3$，解得$-3\leq k<2$,

$\therefore A\cap B$中有且仅有一个整数-2，实数k的取值范围是$[-3,2)$.

【解析】本题考查含参数的交集运算问题，考查解含参的一元二次不等式，属于中档题.

(1)由一元二次不等式的解法，求出相应一元二次方程的两根，结合函数图象得到不等式的解集；

(2)对k分类讨论，确定一元二次方程的两根的大小，求得集合B，再由交集运算，求得$A\cap B$，结合条件即可求得k的范围.

18.(本小题 12 分)

已知函数$f(x)=|2x-1|-|ax-3|$.

(1)当$a=2$时，若$f(x)\leq 2m^2-m-1$对$x\in R$恒成立，求实数m的取值范围；

(2)关于x的不等式$f(x)\geq 3x-3$在$x\in[1,2]$上有解，求实数a的取值范围.

【答案】解：(1)当$a=2$时，$f(x)=|2x-1|-|2x-3|$,

因为$|2x-1|-|2x-3|\leq|2x-1-2x+3|=2$,

所以$-2\leq|2x-1|-|2x-3|\leq 2$,

由题意可得 $2m^2-m-1\geq 2$，解得$m\geq\frac{3}{2}$或$m\leq-1$,

即m的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$；

(2)$f(x)\geq 3x-3$，即$|2x-1|-|ax-3|\geq 3x-3$在$x\in[1,2]$上有解,

即$|ax-3|\leq 2-x$在$x\in 1,\ 2]$上有解.

所以$x-2\leq ax-3\leq 2-x$,

则 $1+\frac{1}{x}\leq a\leq\frac{5}{x}-1$在$x\in 1,\ 2]$上有解.

所以$(1+\frac{1}{x})_{min}\leq a\leq(\frac{5}{x}-1)_{max}$,

所以$\frac{3}{2}\leq a\leq 4$,

故a的取值范围是$[\frac{3}{2},4]$.

【解析】(1)由绝对值不等式的性质可得$f(x)$的最大值，再由二次不等式的解法，可得所求范围；

(2)由题意可得$|ax-3|\leq 2-x$在$x\in 1,\ 2]$上有解，运用绝对值不等式的解法和不等式有解的条件，解不等式可得所求范围.

本题考查绝对值不等式的解法和性质，以及不等式恒成立问题解法，考查转化思想和运算能力、推理能力，属于中档题.

19.(本小题 12 分)

已知函数$f(x)=x^2-2ax-(2a+2)$.

(1)解关于x的不等式$f(x)>x$.

(2)若$f(x)+3\geq 0$在区间$(-1,+\infty)$上恒成立，求实数a的取值范围.

【答案】解：(1)由$f(x)>x$得$x^2-2ax-x-(2a+2)>0$，即$(x-2a-2)(x+1)>0$,

当 $2a+2>-1$，即$a>-\frac{3}{2}$时，原不等式的解为$x>2a+2$或$x<-1$,

当 $2a+2=-1$，即$a=-\frac{3}{2}$时，原不等式的解为$x\neq-1$，

当 $2a+2<-1$，即$a<-\frac{3}{2}$时，原不等式的解为$x>-1$或$x<2a+2$.

综上所述，当$a>-\frac{3}{2}$时，原不等式的解集为$\{x|x>2a+2$或$x<-1\}$；

当$a=-\frac{3}{2}$时，原不等式的解集为$\{x|x\in R$且$x\neq-1\}$；

当$a<-\frac{3}{2}$时，原不等式的解集为$\{x|x>-1$或$x<2a+2\}$.

(2)由$f(x)+3\geqslant0$在区间$(-1,+\infty)$上恒成立，得$x^2-2ax-2a+1\geqslant0$在区间$(-1,+\infty)$上恒成立，

$\therefore 2a\leqslant\frac{x^2+1}{x+1}$在$(-1,+\infty)$上恒成立，

令$g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$，则 $2a\leqslant g(x)_{min}$，

$\because g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-2(x+1)+2}{x+1}=x+1+\frac{2}{x+1}-2\geqslant2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}-2=2\sqrt{2}-2$，

$\therefore 2a\leqslant2\sqrt{2}-2$，$\therefore a\leqslant\sqrt{2}-1$，

即实数a的取值范围是$(-\infty,\sqrt{2}-1]$.

【解析】本题考查不等式的解法和恒成立问题，解决问题的关键是掌握分类讨论思想的应用.

(1)原不等式可化为$(x-2a-2)(x+1)>0$，分类讨论可得解集；

(2)问题转化为 $2a\leqslant\frac{x^2+1}{x+1}$在$(-1,+\infty)$上恒成立，令$g(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$，则 $2a\leqslant g(x)_{min}$，由基本不等式求出$g(x)$的最小值即可.

20.(本小题 12分)

已知函数$f(x)=|2x+1|-|2x-3|$.

(1)解不等式$f(x)\leq1$；

(2)若$\exists x_0$使$f(x_0)<a^2-5a$，求a的取值范围.

【答案】解：(1)$f(x)=\begin{cases}-4, & x\leq-\frac{1}{2}\\ 4x-2, & -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\\ 4, & x\geq\frac{3}{2}\end{cases}$，

$x\geq\frac{3}{2}$时，$4\leq1$不成立，舍去.

$-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$时，由 $4x-2\leq1$，解得：$-\frac{1}{2}<x\leq\frac{3}{4}$.

$x \leq -\frac{1}{2}$时，$-4 \leq 1$ 恒成立，$\therefore x \leq -\frac{1}{2}$.

$\therefore f(x) \leq 1$ 的解集为$(-\infty, \frac{3}{4}]$.

(2)$f(x)$的最小值为-4,

若$\exists x_0$使$f(x_0) < a^2 - 5a$,

则$f(x)_{min} < a^2 - 5a$，即$a^2 - 5a > -4$,

即$a^2 - 5a + 4 > 0$,

$\therefore a > 4$ 或$a < 1$.

即a的取值范围为$(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

【解析】本题主要考查绝对值不等式的解法，涉及一元二次不等式的解法和函数的最值，体现了转化的数学思想，属于中档题.

(1)去绝对值符号，将不等式等价转化为与之等价的三个不等式组，求出每个不等式组的解集，再取并集，即得所求；

(2)由(1)可得$f(x)$的最小值为-4，再根据$a^2 - 5a > -4$，求得a的范围.