

国庆作业 (2)

- 1、已知集合 $A = \{1, a, a^2 - 1\}$, 若 $0 \in A$, 则 $a =$ _____.
- 2、命题 P : “如果 $x^2 \leq 1$, 那么 $x \leq a$ ”, 若命题 P 是真命题, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 3、如果集合 $A = \{x | ax^2 + 4x + 1 = 0\}$ 中只有一个元素, 则 a 的值是_____.
- 4、已知不等式 $-1 \leq x - m \leq 1$ 成立的一个必要非充分条件是 $-1 \leq x \leq 3$, 则实数 m 的取值范围是_____.
- 5、对任意 $x \in R$, $(1 - ax)(1 + x) \geq 0$ 的充要条件是_____.
- 6、已知 $(a - 3)x^2 + bx + 1 = 2bx^2 - ax + c$ 对 $x \in R$ 恒成立, 则 $a + b + c =$ _____.
- 7、已知关于 x 的方程 $x^2 - (a + b)x + ab - 2 = 0$. x_1, x_2 是此方程的两个实数根, 现给出三个结论: (1) $x_1 \neq x_2$; (2) $x_1 x_2 > ab$; (3) $x_1^2 + x_2^2 > a^2 + b^2$, 则正确的结论的序号是_____.
- 8、不等式 $x^2 - ax - b < 0$ 的解集是 $(2, 3)$, 则 $bx^2 - ax - 1 > 0$ 解集是_____.
- 9、已知不等式 $|x + 3| \leq 5$ 和 $(x + 6)(x + 4)^4(x - 1) \geq 0$ 中, 有且仅有一个成立, 则实数 x 的取值范围_____.
- 10、已知对于任意的 $x \in R$, 总有 $-3 < \frac{x^2 + tx - 2}{x^2 - x + 1} < 2$, 则实数 t 的取值范围_____.
- 11、若 $A = \left\{x \mid \left|x - \frac{1}{2}\right| < 1\right\}$, $B = \left\{x \mid \frac{1}{x} \geq 1\right\}$, 定义 $A \times B = \{x | x \in A \cup B \text{ 且 } x \notin A \cap B\}$, 则 $A \times B =$ _____.
- 12、已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 的两个子集, 满足: A 与 B 的元素个数相同, 且为 $A \cap B$ 空集. 若 $n \in A$ 时总有 $2n + 2 \in B$, 则集合 $A \cup B$ 的元素个数最多为_____.

13. 已知命题 p : 关于 x 的方程 $x^2 + mx + 1 = 0$ 有实根;

命题 q : 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个正实根.

(1) 若命题 p 为假命题, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若命题 p, q 中有且仅有一个是真命题, 求实数 m 的取值范围.

14. 设 $A = \{x \mid x^2 + (4 - a^2)x + a + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = A \cup B$, 求 a 的值; (2) 若 $A \cap B = A \cap C \neq \emptyset$, 求 a 的值.

15. (1) 解不等式组
$$\begin{cases} \left| \frac{4x+1}{x^2-x+1} \right| < 3 \\ x^2-3x-4 \leq 0 \end{cases}$$

(2) 将 (1) 解集记为 A , $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$ $A \cap B = \emptyset, A \cup B = [-1, 4]$, 求实数 a, b 的值.

16. 已知不等式 $ax^2 - (a + a^2)x + a^2 > 0$ 的解集是 A

(1) 当 $a = -1$ 时, 求集合 A ; (2) 当常数 $a \in R$ 时, 求集合 A ;

(3) 在 (2) 的结论下, $B = \{x | 1 < x < a^2 - 1\}$, $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围.

17. 第 19 届杭州亚运会于 2023 年 9 月 23 日至 10 月 8 日在浙江杭州举行, 某公司为了竞标配套活动的相关代言, 决定对旗下的某商品进行一次评估. 该商品原来每件售价为 15 元, 年销售 10 万件.

(1) 据市场调查, 若价格每提高 1 元, 销售量将相应减少 2000 件, 要使销售的总收入不低于原收入, 该商品每件定价最多为多少元?

(2) 为了抓住此次契机, 扩大该商品的影响力, 提高年销售量, 公司决定立即对该商品进行全面技术革新和营销策略改革, 并提高定价到 x 元. 公司拟投入 $\frac{1}{4}(x^2 - 400)$ 万元作为技改费用, 投入 50 万元作为固定宣传费用, 投入 $\frac{x}{4}$ 万元作为浮动宣传费用. 试问: 当该商品改革后的销售量 a 至少应达到多少万件时, 才可能使改革后的销售收入不低于原收入与总投入之和? 并求出此时商品的每件定价.

18. 设 A 是实数集的非空子集, 称集合 $B = \{uv \mid u, v \in A \text{ 且 } u \neq v\}$ 为集合 A 的生成集.

- (1) 当 $A = \{2, 3, 5\}$ 时, 写出集合 A 的生成集 B ;
- (2) 若 A 是由 5 个正实数构成的集合, 求其生成集 B 中元素个数的最小值;
- (3) 判断是否存在 4 个正实数构成的集合 A , 使其生成集 $B = \{2, 3, 5, 6, 10, 16\}$, 并说明理由.