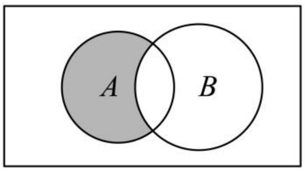
10.9 数学作业

姓名：__________班级：__________

1．已知集合 $A=\{-4,-2,0,2,4\}$， $B=\{x\mid x^2+2x-3<0\}$，则图中阴影部分表示的集合为__________.



$\{-4,2,4\}$.

2．若集合 $A=\{1,3,x\}$， $B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数为__________.

3个

3．若集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{1-x}\}$， $N=\{(x,y)\mid x=1\}$，则 $M\cap N=$__________.

$\{(1,0)\}$

4．已知集合 $A=\{(x,y)\big||x+1|+(y-2)^2=0,x\in R,y\in R\}$， $B=\{(x,y)|xy\le 0,x\in R,y\in R\}$，则集合 A 和 B 满足的关系为__________.

5．若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是__________.

$(-2,2]$

6．不等式"$x^2\leqslant 3x$"是不等式"$|x-2|<1$"的__________条件.

必要不充分

7．不等式 $x-1<|2x-1|<x$ 的解集为______.

$\left(\frac{1}{3},1\right)$

8．若 A 是 B 的必要非充分条件，B 是 C 的充要条件，C 是 D 的必要非充分条件，则 D 是 A 的__________条件.

9．若关于 x 的不等式 $x^2-(2a+1)x+2a<0$ 恰有两个整数解，则 a 的取值范围是__________.

【答案】$\left\{a \middle| -1\le a<-\frac{1}{2}\text{或}\frac{3}{2}<a\le 2\right\}$

【详解】令 $x^2-(2a+1)x+2a=0$，解得 $x=1$ 或 $x=2a$.

当 $2a>1$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，不等式 $x^2-(2a+1)x+2a<0$ 解得 $1<x<2a$，

则不等式中的两个整数解为 2 和 3，有 $3<2a\le 4$，解得 $\frac{3}{2}<a\le 2$；

当 $2a=1$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，不等式 $x^2-(2a+1)x+2a<0$ 无解，所以 $a=\frac{1}{2}$ 不符合题意；

当 $2a<1$，即 $a<\frac{1}{2}$ 时，不等式 $x^2-(2a+1)x+2a<0$ 解得 $2a<x<1$，

则不等式中的两个整数解为 0 和-1，有 $-2\le 2a<-1$，解得 $-1\le a<-\frac{1}{2}$.

综上，a 的取值范围是 $\left\{a \middle| -1\le a<-\frac{1}{2}\text{或}\frac{3}{2}<a\le 2\right\}$.

故答案为：$\left\{a \middle| -1\le a<-\frac{1}{2}\text{或}\frac{3}{2}<a\le 2\right\}$.

10. 已知 $a<0$，若 $(4x^2+a)(2x+b)\ge 0$ 在 $x\in(a,b)$ 上恒成立，则 0__________ (a,b)（用“∈”、“∉”、“关系不能确定”填空）；$b-a$ 的最大值为__________.

【答案】 ∉ $\frac{1}{4}$

【详解】如果 $0\in(a,b)$，则 $x=0$ 时不等式成立，即 $ab\ge 0$，

因为 $a<0$，可得 $b\le 0$，

与 $0\in(a,b)$ 矛盾，故 $0\notin(a,b)$；

法一：

因为 $0\notin(a,b)$，所以 $b\le 0$，

所以不等式的解集为 $\left(-\frac{\sqrt{-a}}{2},\frac{\sqrt{-a}}{2}\right)\cup\left(-\frac{b}{a},+\infty\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{-a}}{2},\frac{b}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{-a}}{2},+\infty\right)$，

因为 $-\frac{b}{2}\ge 0$，$\frac{\sqrt{-a}}{2}>0$，

所以要使得 $(4x^2+a)(2x+b)\ge 0$ 在 $x\in(a,b)$ 上恒成立，

只需$-\frac{\sqrt{-a}}{2} \le a$，

解得$-\frac{1}{4} \le a$，所以$b-a \le \frac{1}{4}$.

法二：

因为$\left(4x^2+a\right)\left(2x+b\right) \ge 0$在$x \in \left(a,b\right)$上恒成立，

所以$x=a$时可得$\left(4a^2+a\right)\left(2a+b\right) \ge 0$，

因为$2a+b \le 0$，所以$4a^2+a \le 0$，

解得$-\frac{1}{4} \le a$，所以$b-a \le \frac{1}{4}$，

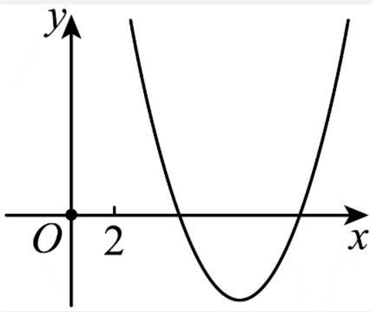
经检验，$a=-\frac{1}{4}$，$b=0$时符合条件.

11．已知方程$x^2+\left(m-2\right)x+5-m=0$的两根都大于 2，则实数$m$的取值范围是__________.

【详解】根据题意，二次函数$f\left(x\right)=x^2+\left(m-2\right)x+5-m$的图象与$x$轴的两个交点都在 2 的右侧，

根据图象可得$\begin{cases}\Delta \ge 0 \\ f\left(2\right)>0 \\ -\frac{m-2}{2}>2\end{cases}$，即$\begin{cases}\left(m-2\right)^2-4\left(5-m\right) \ge 0 \\ 4+2\left(m-2\right)+5-m>0 \\ -\frac{m-2}{2}>2\end{cases}$，

解得$-5<m \le -4$.



12．已知集合$A=\left\{x\middle|\left(x-3\right)\left(x^2-ax+1\right)=0,a \in \mathrm{R}\right\}$，若集合$A$只有两个元素，则实数$a$可取的一个值为__________；若集合$B=\{1,4\}$，集合$C=A \cup B$，当集合$C$有 8 个子集时，实数$a$的取值范围为__________.

【答案】　2（答案不唯一，另一个值为-2）　$-2<a \le 2$

【详解】由$(x-3)(x^2-ax+1)=0$，得$x=3$或$x^2-ax+1=0$，

由集合A只有两个元素，得方程$x^2-ax+1=0$有两个相等的实根，且该实根不为 3，

因此$\Delta = a^2 - 4 = 0$，解得$a = \pm 2$，此时方程的根为 1 或-1，符合题意，

所以$a = \pm 2$，取$a = 2$；

由集合C有 8 个子集，得集合C中有 3 个元素，而$B = \{1,4\}$，$3 \in A$，

则$A = \{3\}$或$A = \{1,3\}$或$A = \{3,4\}$或$A = \{1,3,4\}$，

当$A = \{3\}$时，方程$x^2 - ax + 1 = 0$无实根，$\Delta = a^2 - 4 < 0$，解得$-2 < a < 2$，

当$A = \{1,3\}$时，方程$x^2 - ax + 1 = 0$有两个相等的实根 1，则$a = 2$，

当$A = \{3,4\}$时，方程$x^2 - ax + 1 = 0$有两个相等的实根 4，

而方程$x^2 - ax + 1 = 0$有实根时，两根之积为 1，因此无解，

当$A = \{1,3,4\}$时，方程$x^2 - ax + 1 = 0$的两根分别为$3,4$，同上无解，

实数a的取值范围为$-2 < a \le 2$.

故答案为：2；$-2 < a \le 2$

13．若$0 < b < a < 1$，则下列不等式一定成立的是（　）

A．$ab < b^2$　　B．$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

C．$2a < 1 + b$　　D．$\sqrt{b} < \sqrt{a} < 1$

【答案】D

【分析】利用不等式的基本性质判断 A,B,D，反例判断 C 即可.

【详解】因为$0 < b < a < 1$，所以$b^2 < ab < 1$，所以 A 不正确；

且$1 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，所以 B 不正确；

对于 C，取$a = 0.8$，$b = 0.4$，不等式不成立，所以 C 不正确；

显然$\sqrt{b} < \sqrt{a} < 1$，满足不等式的基本性质，所以 D 正确；

故选：D.

14．下列命题是假命题的为（　　）

A．若$a > b > 0 > c > d$，则$ab > cd$

B．若$ac^2 > bc^2$，则$a > b$

C．若$a > b > 0$且$c < 0$，则$\frac{c}{a^2} > \frac{c}{b^2}$

D．若$a > b$且$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$，则$ab < 0$

【答案】A

15．已知关于x不等式$\dfrac{(x-2)(ax+b)}{x-c}\geq 0$的解集为$(-\infty,-2]\cup(1,2]$，则（　　）

A．$c=2$

B．点(a,b)在第二象限

C．$y=ax^2+bx-2a$的最大值为$3a$

D．关于x的不等式$ax^2+ax-b\geq 0$的解集为$[-2,1]$

【答案】D

【详解】原不等式等价于$\begin{cases}(x-2)(ax+b)(x-c)\geq 0\\ x-c\neq 0\end{cases}$，

因为解集为$(-\infty,-2]\cup(1,2]$,所以$x=1$和$x=-2$分别是$x-c=0$和$ax+b=0$的实数根,

故$a<0$且$c=1$，$-2a+b=0$，故A错误；

因为$a<0$，$b=2a<0$，所以点(a,b)在第三象限，故B错误；

$y=ax^2+bx-2a=ax^2+2ax-2a=a(x^2+2x-2)=a(x+1)^2-3a$，由于开口向下，故最大值为$-3a$，故C错误，

由$ax^2+ax-b\geq 0$得$ax^2+ax-2a\geq 0$即$x^2+x-2\leq 0$解集为$[-2,1]$，故D正确.

故选：D.

16．解下列不等式.

(1)$x(x+2)>x(3-x)+1$；　　(2)$-\dfrac{1}{2}x^2+3x-5>0$；

(3)$\dfrac{x+2}{3x-1}\geq 1$.

【答案】(1)$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$　　(2)无实数解

(3)$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{3}{2}\right]$

17. 解不等式

(1) $\left(x^2-4x-5\right)\left(x^2+1\right)<0$　　　　(2) $\dfrac{x+2}{3x-1}\geq 1$；

【答案】(1) $-1<x<5$　　(2) $\dfrac{1}{3}<x\leq\dfrac{3}{2}$

18. 若不等式 $(1-a)x^2-4x+6>0$ 的解集是 $\{x\mid -3<x<1\}$.

(1)求 a 的值，并求不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$ 的解集；

(2)一元二次不等式 $kx^2-ax+k\leq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，求 k 的范围.

【答案】(1)3； $\{x\left|x\right\rangle\dfrac{3}{2}$ 或 $x<-1\}$

(2) $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$

【详解】(1) 由题意可知：方程 $(1-a)x^2-4x+6=0$ 的两根为 $-3,1$，且 $1-a<0$，即 $a>1$，

则 $\begin{cases}\dfrac{4}{1-a}=-2\\ \dfrac{6}{1-a}=-3\end{cases}$，解得 $a=3$；

不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$，即为 $2x^2-x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{2}$ 或 $x<-1$，

所以不等式 $2x^2+(2-a)x-a>0$ 的解集为 $\{x\left|x\right\rangle\dfrac{3}{2}$ 或 $x<-1\}$.

(2) 由题意可得：一元二次不等式 $kx^2-3x+k\leq 0$ 的解集为 R，

若 $k=0$，则 $-3x\leq 0$ 不恒成立，不合题意；

若 $k\neq 0$，则 $\begin{cases}k<0\\ \Delta=9-4k^2\leq 0\end{cases}$，解得 $k\leq -\dfrac{3}{2}$；

综上所述：k 的范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$.

19．已知关于 x 的方程 $x^2+2(m-1)x+2m+6=0$ 至少有一个正根，求实数 m 的取值范围.

【答案】$m \le -1$.

【详解】设 $f(x)=x^2+2(m-1)x+2m+6$，

方程至少有一个正根，则有三种可能:

①有两个正根，可得 $\begin{cases} \Delta \ge 0, \\ f(0)>0, \\ \dfrac{2(m-1)}{-2}>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m \le -1 \text{或} m \ge 5, \\ m>-3, \\ m<1, \end{cases}$ 所以 $-3<m\le -1$.

②有一个正根，一个负根，可得 $f(0)<0$，得 $m<-3$.

③有一个正根，另一根为 0，可得 $\begin{cases} 6+2m=0, \\ 2(m-1)<0, \end{cases}$ 所以 $m=-3$.

综上所述， $m \le -1$.

20．关于 x 的方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 满足下列条件，求 m 的取值范围.

(1)有两个正根；

(2)一个根在 $(-2,0)$ 内，另一个根在 $(0,4)$ 内；

【答案】(1) $0<m\le 1$

(2) $-\dfrac{4}{5}<m<0$

（2）根据方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 一个根在 $(-2,0)$ 内，另一个根在 $(0,4)$ 内，得到不等式，求出答案.

【详解】(1) 令 $f(x)=x^2+(m-3)x+m$，设 $f(x)=0$ 的两个根为 x_1,x_2.

由题得 $\begin{cases} x_1+x_2=3-m>0 \\ x_1x_2=m>0 \\ \Delta=(3-m)^2-4m\ge 0 \end{cases}$，解得 $0<m\le 1$.

（2）令 $f(x)=x^2+(m-3)x+m$，设 $f(x)=0$ 的两个根为 x_1,x_2.

若方程 $x^2+(m-3)x+m=0$ 一个根在 $(-2,0)$ 内，另一个根在 $(0,4)$ 内，

结合 $f(x)=x^2+(m-3)x+m$ 开口向上，

则$\begin{cases} f\left(-2\right)=10-m>0 \\ f\left(0\right)=m<0 \\ f\left(4\right)=5m+4>0 \end{cases}$，解得$-\frac{4}{5}<m<0$.