# 4.3 反函数 (2)

知识点：反函数的图像

【A 组】

1. 若函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$( B )

   A. 不能关于原点对称　　　B. 单调性不可能相反

   C. 不可能同时是奇函数　　D. 如果图像存在交点，则交点一定在 $y=x$ 直线

2. $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，且( $a$, $f(a)$ )在 $y=f(x)$ 图像上，则必在 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上的点是 (f(a), a)______.

3. 已知 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(3)=$ 5______.

4. 已知 $f(x)=1+\frac{1}{x}$，若函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则方程 $f^{-1}(x)=2$ 的解 $x=$ $\frac{3}{2}$______.

5. 设函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,2)$ 对称，且存在反函数 $f^{-1}(x)$，$f(4)=0$，则 $f^{-1}(4)=$ -2______.

【B 组】

1. 已知点 $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ 既在函数 $y=2^{ax+b}$ 的图像上，又在它的反函数的图像上，则实数 $a=$ $-\frac{12}{7}$______，$b=$ $\frac{10}{7}$______.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，若函数 $y=f(1+x)$ 的图象经过点 $(3,1)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点 (1, 4)______.

3. 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，且函数 $y=x-f(x)$ 的图象过点 $(1,2)$．则函数 $y=f^{-1}(x)-x$ 的图象一定过点 (-1, 2)______.

4. 函数 $f(x)=a^{x}-\frac{5}{2}a+6$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像经过点 $(5,2)$，且在区间 $\left(\frac{23}{4},+\infty\right)$ 上恒有 $f^{-1}(x)<0$，则实数 $a=$ $\frac{1}{2}$______.

5. 函数 $f(x)=\sqrt{x-a}\,(x\ge a)$ 的图像与其反函数的图像有公共点,则实数 $a$ 的范围是 $\{a|a\le\frac{1}{4}\}$.

6. 函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数( C )

(A) 是奇函数,在 $(0,+\infty)$ 上是减函数　　(B) 是偶函数,在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

(C) 是奇函数,在 $(0,+\infty)$ 上是增函数　　(D) 是偶函数,在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

7. 奇函数 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$, 则必在 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上的点是( B )

(A) $(-f(a),a)$　　(B) $(-f(a),-a)$　　(C) $(-a,f^{-1}(a))$　　(D) $(a,f^{-1}(-a))$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1-2x}{1+x}$，函数 $y=g(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x-1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(x)$ 等于( B )

(A) $\frac{3-2x}{x}$　　(B) $\frac{2-x}{x+1}$　　(C) $\frac{1-x}{x+2}$　　(D) $\frac{3}{x+2}$

9. 下面四个命题:

①关于直线 $y=x$ 成轴对称的两个图形一定是互为反函数的一对函数的图像;

②函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 与函数 $x=f^{-1}(y), y\in f(D)$ 是互为反函数;

③函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像若有交点, 则交点一定在直线 $y=x$ 上;

④函数 $y=f(x+a), x\in R$ 与函数 $y=f^{-1}(x+a), x\in R$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

其中错误的命题有 3 个.

10. 已知直线 $f(x)=kx+b$ 与曲线 $g(x)=\frac{a}{x}(a>0)$ 交于 $A(x_1, -3)$，$B(x_2, 4)$ 两点，则不等式 $f^{-1}(x)\le g^{-1}(x)$ 的解集为 $(-\infty,-3]\cup(0,4]$.

11. 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，且函数 $y=x-f(x)$ 的图像过点 $(1,3)$，则函数 $y=f^{-1}(x)+3$ 的图像一定经过定点 $(-2,4)$.

12. 给定实数$a$,且$a\neq 0,a\neq 1$，设函数$f(x)=\dfrac{x-1}{ax-1}(x\in R,且x\neq\dfrac{1}{a})$。求证：函数$f(x)$的图象关于$y=x$对称.

解：令$y=f(x)=\dfrac{x-1}{ax-1}$ $(x\neq\frac{1}{a})$

故$(ax-1)y=x-1$

$\therefore (ay-1)x=y-1$

假设$ay-1=0$，即$y=\frac{1}{a}$

则$\frac{x-1}{ax-1}=\frac{1}{a}\Rightarrow a=1$（矛盾）

$\therefore ay-1\neq 0$，则$x=\dfrac{y-1}{ay-1}$

$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{ax-1}=f(x)$ $(x\neq\frac{1}{a})$

即$f(x)$的反函数是其自身，

而$f(x)$与$f^{-1}(x)$关于$y=x$对称

$\therefore f(x)$的图象关于$y=x$对称.

13. 函数$f(x)$在R上是减函数,且它的反函数为$f^{-1}(x)$,如果$A(-2,1),B(2,-3)$是$y=f(x)$图像上的两点，求不等式$\left|f^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right|<2$的解集.

解：$f(-2)=1$，$f(2)=-3$

则$f^{-1}(1)=-2$，$f^{-1}(-3)=2$

$\left|f^{-1}(\frac{x-1}{x})\right|<2\Rightarrow -2<f^{-1}(\frac{x-1}{x})<2$

即$f^{-1}(1)<f^{-1}(\frac{x-1}{x})<f^{-1}(-3)$

$\because f(x)$在R上↓，$\therefore f^{-1}$在R上↓

$\therefore -3<\frac{x-1}{x}<1$　　$\therefore x>\frac{1}{4}$.

14. 已知函数$f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2(x>1)$.

(1) 求函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)$；(2) 如果不等式$(1-\sqrt{x})\cdot f^{-1}(x)>m(m-\sqrt{x})$对$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$上的每一个$x$都成立，求$m$的范围；(3) 设函数$g(x)=\dfrac{1}{f^{-1}(x)}+\sqrt{x}+2$，求函数$g(x)$的最小值及相应的$x$的值.

解：(1) 令$y=(\frac{x-1}{x+1})^2$

$\because x>1$，$\therefore \frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}\in(0,1)$

$\therefore \sqrt{y}=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$

$\therefore x=\dfrac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}$

即$f^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$，$x\in(0,1)$

(2) $\forall x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$，

$1+\sqrt{x}>m(m-\sqrt{x})$成立

即$(1+m)\sqrt{x}+1-m^2>0$

令$t=\sqrt{x}$，则$t\in[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

令$h(t)=(1+m)t+1-m^2$

只需$h(t)>0$在$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$成立

① $1+m=0$，即$m=-1$，$h(t)=0$，故$m\neq-1$

② $1+m\neq 0$，

$\begin{cases}h(\frac{1}{2})>0\\ h(\frac{\sqrt{2}}{2})>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<m<\frac{3}{2}\\ -1<m<1+\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$\therefore -1<m<\frac{3}{2}$

(3) $g(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\sqrt{x}+2$

$=1+\sqrt{x}+\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$

$\geq 2\sqrt{2}$

当且仅当$1+\sqrt{x}=\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}$，

即$x=3-2\sqrt{2}$时，等号成立，

$\therefore g(x)_{min}=g(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}$.

15. 已知函数$y=f(x), x\in D$是严格递增函数，其反函数是$y=f^{-1}(x)$.

(1) 若$y=x^2-1(x>\frac{1}{2})$，求$y=f^{-1}(x)$，并写出定义域$M$；

(2) 对于 (1) 的$y=f^{-1}(x)$和$M$，设任意$x_1\in M$， $x_2\in M$， $x_1\neq x_2$，求证：

$|f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)|<|x_1-x_2|$.

解：(1) $x=\sqrt{y+1}$，

即$f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}$，$M=(-\frac{3}{4},+\infty)$

(2) $\forall x_1, x_2\in(-\frac{3}{4},+\infty)$

则$|\sqrt{x_1+1}-\sqrt{x_2+1}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}$

$\because x_1>-\frac{3}{4}$ $\therefore \sqrt{x_1+1}>\frac{1}{2}$

$x_2>-\frac{3}{4}$ $\therefore \sqrt{x_2+1}>\frac{1}{2}$

$\therefore \sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}>1$ $\therefore 0<\frac{1}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}<1$

$\therefore \frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1+1}+\sqrt{x_2+1}}<|x_1-x_2|$

$\Rightarrow |f^{-1}(x_1)-f^{-1}(x_2)|<|x_1-x_2|$

16. 已知函数$f(x)=\sqrt{ax+2}$ ($a<0$)，其反函数为$f^{-1}(x)$。

(1) 若点$\mathrm{P}(\sqrt{3},-1)$在反函数$f^{-1}(x)$的图像上，求$a$的值;

(2) 求证：函数$f(x)$的图像与$y=x$的图像有且仅有一个公共点;

(3) 如果点$(m,n)$ $(m\neq n)$是函数$f(x)=\sqrt{ax+2}$ ($a<0$) 与其反函数$f^{-1}(x)$图像上的公共点，求$a$的取值范围.

解：(1) $\because f^{-1}(\sqrt{3})=-1$ $\therefore f(-1)=\sqrt{3}$

$\therefore f(-1)=\sqrt{-a+2}=\sqrt{3}$ $\therefore a=-1$

(2) 由题意得$\sqrt{ax+2}=x$，即$x^2-ax-2=0$

假设方程有2个根为$x_1, x_2$

$x_1\cdot x_2=-2<0$，故方程的2个根一正一负

而$x>0$，故方程只有一个解

即$f(x)$与$y=x$的图像有且仅有一个公共点.

(3) 由题意得

$\begin{cases} f(m)=n \\ f(n)=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} am+2=n^2 & ② \\ an+2=m^2 & ① \end{cases}$, $m\neq n$

$\therefore n^2-m^2=am+2-an-2$

$(n+m)(n-m)=a(m-n)$

$\therefore n+m=-a$

故$n=-a-m$

由①，$m^2=a(-a-m)+2$

$\therefore m^2+am+a^2-2=0$

由②，$n^2=a(-a-n)+2$

$\therefore n^2+an+a^2-2=0$

即$m, n$为方程$x^2+ax+a^2-2=0$不同的两根

且$m, n\in[0,-\frac{2}{a}]$

$\begin{cases} \Delta>0 \\ m\cdot n=a^2-2\geq 0 \end{cases}$

$\therefore a\in(-\frac{2\sqrt{6}}{3},-\sqrt{2}]$