一、填空题

1、设 $A=\{0,9,x\}$， $B=\{0,x^2\}$，且 $A\cap B=B$，则 x 的值为__________________.

答案：$-3,1,3$

2、命题：“a,b 是实数，若 $|a-1|+|b-1|=0$，则 $a=b=1$”，它的一个等价命题是

____

答案：a,b 是实数，若 $a\neq 1$ 或 $b\neq 1$，则 $|a-1|+|b-1|\neq 0$

3、不等式 $x(x+2)<x(3-x)+1$ 的解集是________________________.

答案：$(-\frac{1}{2},1)$

4、$3x+7+\frac{1}{2x+1}\geq x+1+\frac{1}{2x+1}$ 的解集为__________________________

答案：$\left[-3,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

5、如果函数 $y=f(x+1)$ 是奇函数，那么函数 $y=f(x)$ 的图像关于____________对称。

答案：点 $(1,0)$

6、设 $m>n>0$，则 $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ 与 $\frac{m-n}{m+n}$ 的大小关系是___________________

答案：大于

7、若不等式 $|ax+1|\leq b$ 的解是 $-1\leq x\leq 5$，则 $a=$ ______ ， $b=$ ______

答案：$a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$

8、已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$，那么函数 $f(ax)+f\left(\frac{x}{a}\right)$（其中常数 $a>1$）的定义域是________________

答案：$\left[\frac{-1}{2a},\frac{1}{2a}\right]$

9、已知 $f(x)$、$g(x)$ 都是 R 上的奇函数，$f(x)>0$ 的解集是 $(1,3)$，$g(x)>0$ 的解集是 $(2,4)$，则 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集是______________

答案：$(-3,-2)\cup(2,3)$

10、已知函数 $f(x)$ 满足 $f^2(x+1)-f(x+1)+f^2(x)-f(x)=2$，则 $f(1)+f(2020)$ 的最大值是 ________

解：

$$\begin{cases}f^2(x+1)-f(x+1)+f^2(x)-f(x)=2\\ f^2(x+2)-f(x+2)+f^2(x+1)-f(x+1)=2\end{cases}\Rightarrow f^2(x+2)-f(x+2)=f^2(x)-f(x)$$

$f(1)+f(2020)=f(1)+f(0)$,

$f^2(1)-f(1)+f^2(0)-f(0)=2 \Rightarrow f^2(1)+f^2(0)=2+f(1)+f(0)$

由 $\begin{cases} f^2(1)+f^2(0)=2+f(1)+f(0) \\ f^2(1)+f^2(0) \geq \dfrac{(f(1)+f(0))^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{(f(1)+f(0))^2}{2} \leq 2+(f(1)+f(0))$

$\Rightarrow 1-\sqrt{5} \leq f(1)+f(0) \leq 1+\sqrt{5}$

11、若定义域为$[0,+\infty)$的函数$y=f(x)$同时满足以下两个条件：（1）对任意$x\in[0,+\infty)$，都有$f(x)\geq 0$；（2）当$x_1,x_2\geq 0$时，总有$f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)$成立，则称$y=f(x)$为“Ω函数”．现有下列判断：

①若$y=f(x)$为“Ω函数”，则$f(0)=0$；

②若$y=f(x)$为“Ω函数”，则$y=f(x)$在$[0,+\infty)$上严格增；

③设$g(x)=\begin{cases} 0, x\in\mathbf{Q}, \\ 1, x\notin\mathbf{Q} \end{cases}$，则函数$y=g(x)$在$[0,+\infty)$上是“Ω函数”；

④设$g(x)=x^2+x$，则函数$y=g(x)$在$[0,+\infty)$上是“Ω函数”．

其中正确的结论是___________.

答案：①④

13、结论“a,b,c中至少有一个大于0”的正确的反设应是 （　　）

（A） a,b,c中至多有一个大于0。　　（B） a,b,c中至多有一个不大于0。

（C） a,b,c中至多有两个不大于0。　　（D） a,b,c中三个都不大于0。

答案：D

14、若$a>0$，　$b>0$，则不等式$-b<\dfrac{1}{x}<a$的解集是（　　）

（A） $\left(-\dfrac{1}{b},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$　　（B） $\left(-\dfrac{1}{a},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1}{b}\right)$

（C） $\left(-\infty,-\dfrac{1}{b}\right)\cup\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$　　（D） $\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right)$

答案：C

17、已知$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-a}(x\neq a, a$为非零常数$)$.

(1) 解不等式$f(x)<x$；

(2) 设$x>a$时，$f(x)$有最小值为6，求a的值.

解：(1)当$a>0$时,解集为$\{x|-\frac{3}{a}<x<a\}$;

当$a<0$时,解集为$\{x|x>-\frac{3}{a}$或$x<a\}$.

(2)设$t=x-a$，则$x=t+a(t>0)$，

所以$y=\frac{t^2+2at+a^2+3}{t}=t+\frac{a^2+3}{t}+2a\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{a^2+3}{t}}+2a=2\sqrt{a^2+3}+2a$，

当且仅当$t=\frac{a^2+3}{t}$，即$t=\sqrt{a^2+3}$时等号成立,

即函数$f(x)$有最小值$2\sqrt{a^2+3}+2a$.

由题意得$2\sqrt{a^2+3}+2a=6$，

解得$a=1$.

18、已知a,b,c为正实数.

(1)若$a+b-2ab=0$，求$a+4b$的最小值;

(2)若$a+b+c=2$，证明$\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\geq 2$.

(1) 由已知得$a+b=2ab\Rightarrow\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}=1$,

所以$a+4b=(a+4b)\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\right)=\left(\frac{1}{2}+2\right)+\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\geq 2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{2b}}+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$,

当且仅当$2b=a=\frac{3}{2}$时取得最小值;

(2) 由基本不等式知$\begin{cases}\frac{c^2}{a}+a\geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a}\cdot a}=2c\\ \frac{b^2}{c}+c\geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c}\cdot c}=2b\\ \frac{a^2}{b}+b\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a\end{cases}\Rightarrow\frac{c^2}{a}+a+\frac{a^2}{b}+b+\frac{b^2}{c}+c\geq 2(a+b+c)$,

所以$\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\geq a+b+c=2$,

当且仅当$a=b=c=\frac{2}{3}$时等号成立.

19、某种商品原来定价每件p元,每月将卖出n件,若定价上涨x成(x成即$x\cdot 10\%,0<x\leq 10$),

每月卖出数量将减少y成，而售货金额变成原来的z倍。

(1) 若$y=ax$，其中a是满足$\frac{1}{3}\leq a<1$的常数，用a来表示当售货金额最大时x的值;

（2）　若 $y = \frac{2}{3}x$，求使售货金额比原来有所增加的 x 的取值范围。

答案：（1）$x = \frac{5(1-a)}{a}$　（2）$0 < x < 5$

10.30数学限时训练答题卡

93

姓名：薛淳予　班级：　考号：

考号							
4	1	5	8	3	4	9	8

正确填涂 ■

填空题（仅错误的打×）

1. $1, 3, -3$
2. a,b是实数,若a≠1或b≠1,则$|a-1|+|b-1|\neq 0$　5
3. $(-\frac{1}{2}, 1)$
4. $[-3, -\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}, +\infty)$
5. $(1,0)$
6. $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} > \frac{m-n}{m+n}$
7. $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$
8. $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$
9. $(-3,-2)\cup(2,3)$
10. $\sqrt{5}-1$　×　5　$\sqrt{5}+1$
11. ①④　5
12. $(-\infty, -\frac{1}{b})\cup(\frac{1}{a}, +\infty)$

解答题

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

13.（10分）

解：(1) $\frac{x^2+3}{x-a} < x$

$\frac{x^2+3}{x-a} - x < 0$

$\frac{ax+3}{x-a} < 0$

$a=0$时，$\frac{3}{x}<0$，$x\in R^-$

$a>0$时，$\frac{x+\frac{3}{a}}{x-a}<0$，$x\in(-\frac{3}{a}, a)$

$a<0$时，$\frac{x+\frac{3}{a}}{x-a}>0$，$x\in(-\infty, a)\cup(-\frac{3}{a}, +\infty)$

(2) 令$x-a=t$

$\because x>a \quad \therefore t\in R^+$

$f(x) = \frac{t^2+2at+a^2+3}{t} = t+\frac{a^2+3}{t}+2a$

其最小值为$2\sqrt{a^2+3}+2a$，在$t=\sqrt{a^2+3}$时取得

$2\sqrt{a^2+3}+2a=6$，故$a=1$

所以a的值为1

解答题

								12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

14. （12分）

(1) 解：~~a-2ab-a-b~~

$ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b=0$

$ab-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$(a-\frac{1}{2})(4b-2)=1$

$(a-\frac{1}{2})+(4b-2)\geqslant 2\sqrt{(a-\frac{1}{2})(4b-2)}=2$

即 $a+4b\geqslant\frac{9}{2}$，

而当 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{3}{4}$ 时 $a+b-2ab=0$，$a+4b=\frac{9}{2}$

故 $a+4b$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$

(2) 证明：由 Cauchy，$\left(\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\right)(a+b+c)\geqslant(a+b+c)^2$

即 $\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\geqslant a+b+c$

故 $\frac{c^2}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}\geqslant 2$

在 $a=b=c$ 时取等

解答题

								12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

15.（12分）

解：~~设~~ $z=(1+\frac{x}{10})(1-\frac{y}{10})$

(1) $y=ax$时，$z=(1+\frac{x}{10})(1-\frac{ax}{10})=-\frac{a}{100}x^2-\frac{a-1}{10}x+1$

$=t-\frac{a}{100}(x-\frac{5-5a}{a})^2$，其中$t$为~~关于~~常数

故 $z\le t$

$z=t$时，$x=\frac{5-5a}{a}$

故售货金额最大时，x为$\frac{5-5a}{a}$

(2) $y=\frac{2}{3}x$时，$z=(1+\frac{x}{10})(1-\frac{\frac{2}{3}x}{10})$

记 $f(x)=(1+\frac{x}{10})(1-\frac{\frac{2}{3}x}{10})$

$f(x)>1$，解得 $x\in(0,5)$

故x的取值范围为$(0,5)$

解答题

								12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

16.（12分）

解：(1) $f(0)=f(0)+f(0)-1$

$\therefore f(0)=1$

$f(-1+1)=f(-1)+f(1)-1$

$f(0)=f(-1)+f(1)-1$

$1=f(-1)+0-1$

$\therefore f(-1)=2$

故 $f(0)=1$，$f(-1)=2$

(2) 单调递减

证明：$\forall x_1<x_2$，令 $x_2-x_1=t$，$t>0$，故 $f(t)<1$

$f(x_1+t)=f(x_1)+f(t)-1$

$f(x_1+t)-f(x_1)=f(t)-1$

~~即 $f(x_2)-f(x_1)<1-1=0$~~

~~故 $f(x_2)<f$~~

即 $f(x_2)-f(x_1)<1-1=0$

故 $f(x_2)<f(x_1)$

故 $f(x)$在R上单调递减

(3) $f(2x)=f(x)+f(x)-1=2f(x)-1$

故 $2f(x)=f(2x)+1$

故原不等式等价于 $f(-2x^2-3x)+f(2x)>3$

$f(-2x^2-3x)+f(2x)-1=f(-2x^2-x)$

故原不等式等价于 $f(-2x^2-x)>2$

而 $f(-1)=2$

故 $f(-2x^2-x)>f(-1)$

由单调递减

故等价于 $-2x^2-x<-1$

$x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$

解：由 $\left.\begin{array}{l} f^2(x+2)-f(x+2)+f^2(x+1)-f(x+1)=2 \\ f^2(x+1)-f(x+1)+f^2(x)-f(x)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f^2(x+2)-f(x+2)=f^2(x)-f(x)$

从而 $f^2(2020)-f(2020)=f^2(2018)-f(2018)=\cdots=f^2(2)-f(2)$.

而 $f^2(2)-f(2)=2-f^2(1)+f(1)$

$\therefore f^2(2020)-f(2020)=2-f^2(1)+f(1)$

$\Rightarrow f^2(2020)+f^2(1)=f(2020)+f(1)+2 \geq \dfrac{(f(2020)+f(1))^2}{2}$

设 $f(2020)+f(1)=t$，则 $t+2 \geq \dfrac{t^2}{2}$

$\Rightarrow 1-\sqrt{5} \leq t \leq 1+\sqrt{5}$ $f(1)=f(2020)$ 时等号成立