黄微

100+30

2.7 平均值不等式及其应用（2）

【A组】

1. 已知$x>0$，$y>0$，若$\frac{2y}{x}+\frac{8x}{y}\geq m^2+2m$恒成立，则实数$m$的取值范围是 [-4,2]

2. 若正数x，y满足$xy=x+y+3$，则$x+y$的取值范围是 $[6,+\infty)$.

3. 若$a>0,b>0,c>0,a+b+c=2$，则$\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}$的最小值为 $2+2\sqrt{2}$.

4. 已知$0<x<1$，则$\frac{9}{x}+\frac{16}{1-x}$的最小值为 ~~25~~ 49.

5. 已知$x>1$，$\frac{x^2-2x+3}{x-1}$的最小值为 $2\sqrt{2}$.

【B组】

1. 若正数x、y满足$x+y=1$，则$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$的最小值为 $2\sqrt{2}+3$.
$\sqrt{2}-1$ $2-\sqrt{2}$

2. 若$a>0,b>0,a+b=2$，则下列不等式对一切满足条件的a,b恒成立的是 ①③⑤

①$ab\leq 1$；②$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}$；③ $a^2+b^2\geq 2$；④$a^3+b^3\geq 3$；⑤$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2$

3. 若$a>b>0$，则$a^2+\frac{16}{b(a-b)}$的最小值是 16.

4. 已知$x^2+y^2=3$，$a^2+b^2=4$，则$ax+by$的最大值是 $2\sqrt{3}$，最小值是 $-2\sqrt{3}$

5. 若$x,y,a\in R^+$，且$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq a\sqrt{x+y}$恒成立，则$a$的最小值是 $\sqrt{2}$.

6. 一批货物随17列货车从A市以v千米/小时的速度匀速直达B市，两地铁路线长为400千米，为了安全，两列货车的间距不得小于$(\frac{v}{20})^2$千米，那么这批货物全部运到B市最快需要 8 小时.

7. 设$0<a<b$，$a+b=1$，则下列不等式正确的是（ C ）

A. $b<2ab<\sqrt{a^2+b^2}<a^2+b^2$　　B. $2ab<b<a^2+b^2<\sqrt{a^2+b^2}$

C. $2ab<a^2+b^2<b<\sqrt{a^2+b^2}$　　D. $2ab<a^2+b^2<\sqrt{a^2+b^2}<b$

8. 已知不等式$(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 9$对任意正实数$x,y$恒成立,则正实数$a$的最小值是（ B ）

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

9. 已知正整数a,b满足$4a+b=30$，则使得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$取得最小值的有序数对(a,b)是（ A ）

A. $(5,10)$　　B. $(6,6)$　　C. $(7,2)$　　D. $(10,5)$

10. 若$a,b\in\mathbf{R}^+$，满足$ab=a+b+3$，则$a+b$的取值范围是（ D ）

A. $(-\infty,-2]$　　B. $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$　　C. $(6,+\infty)$　　D. $[6,+\infty)$

11. 某种商品将在一段时间内进行提价，提价方案有三种，甲：先提价$m\%$，再提价$n\%$；乙：先提价$\frac{m+n}{2}\%$，再提价$\frac{m+n}{2}\%$；丙：一次性提价$(m+n)\%$．已知$m>n$，那么提价方案中提价幅度最大的是（ B ）

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 皆有可能

三元

12 (1) 求$y=x^2+\frac{2}{x}(x>0)$的最小值；(2) 求$y=6x+\frac{2}{3x^2}$ $(x>0)$ 的最小值.

解. $y=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3$

在 $x=1$ 时取等

解: $y=3x+3x+\frac{2}{3x^2}\geq 3\sqrt[3]{3x\cdot 3x\cdot\frac{2}{3x^2}}=3\sqrt[3]{6}$

在 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ 时取等

(3) 求$y=x^2(2-3x)(0<x<\frac{2}{3})$的最大值；　(4) 设$a>b>0$，求$y=2a+\frac{1}{b(a-b)}$的最小值.

解: $y=\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x(2-3x)\cdot\frac{4}{9}\leq\left(\frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+(2-3x)}{3}\right)^3\cdot\frac{4}{9}$

$=\frac{32}{243}$

在 $x=\frac{4}{9}$ 时取等

解: $y\geq 2a+\frac{1}{\frac{(b+(a-b))^2}{4}}=2a+\frac{4}{a^2}$

$=\cancel{2a+\frac{2}{a^2}}\ a+a+\frac{4}{a^2}$

$\geq 3\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\frac{4}{a^2}}=3\sqrt[3]{4}$

在 $a=\sqrt[3]{4}$ 时取等

13. (1) 已知$a,b,c>0$，且满足$a+b+c=1$，求$a^2+b^2+c^2$的最小值;

解：$(a^2+b^2+c^2)(1+1+1)\geq(a+b+c)^2$

$a^2+b^2+c^2\geq\frac{1}{3}$

在$a=b=c=\frac{1}{3}$时取等

(2) 已知$a,b,c>0$且$a^2+2ab+2ac+4bc=12$，求$a+b+c$的最小值;

解：$(a+2b)(a+2c)=12$

$a+2b+a+2c\geq2\sqrt{(a+2b)(a+2c)}$

即$2(a+b+c)\geq4\sqrt{3}$

$a+b+c\geq2\sqrt{3}$

在$\begin{cases}a=2\sqrt{3}-2t\\b=t\\c=t\end{cases}$，$\forall t\in(0,\sqrt{3})$时取等

(3) 已知$a,b,c>0$，且满足$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=1$，求$\frac{4}{a}+\frac{6}{b}+\frac{8}{c}$的最小值.

解：$\left(\frac{4}{a}+\frac{6}{b}+\frac{8}{c}\right)\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}\right)\geq(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2=18$

$\frac{4}{a}+\frac{6}{b}+\frac{8}{c}\geq18$，在$\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\b=1\\c=\frac{4}{3}\end{cases}$时取等

14. (1) 求$\frac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$的最小值;

解：令$x+1=t$

$t\in R^+$

$y=\frac{t^2+5t+4}{t}=t+\frac{4}{t}+5\geq2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+5=9$

故在$t=2$即$x=1$时取等

(2) 求$\frac{x^4+3x^2+3}{x^2+1}$的最小值.

解：令$x^2+1=t$

$t\in[1,+\infty)$

$y=\frac{t^2+t+1}{t}=t+\frac{1}{t}+1\geq2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}+1$

在$t=1$即$x=0$时取等

(3) 求$\frac{6\sqrt{x^2+1}}{x^2+4}$的最大值.

(3)解：令$\sqrt{x^2+1}=t$

$t\in[1,+\infty)$

$y=\frac{6t}{t^2+3}=\frac{6}{t+\frac{3}{t}}\leq\frac{6}{2\sqrt{t\cdot\frac{3}{t}}}=\sqrt{3}$

故最大值为$\sqrt{3}$，在$t=\sqrt{3}$即$x=\pm\sqrt{2}$时取等

C1：$(4\sqrt{x-2}+\sqrt{9-3x})^2\leq((x-2)+(3-x))(16+3)$

$y^2\leq19$

$y\leq\sqrt{19}$

在$x=\frac{54}{19}$取等

C2：1°$(\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x})^2\leq((x+27)+3(13-x)+2x)(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})$

$y^2\leq121$

$y=11$，在$x=9$时取等

2°$\sqrt{x+27}\geq3\sqrt{3}$，在$x=0$时取等

$\sqrt{13-x}+\sqrt{x}=\sqrt{(13-x)+x+2\sqrt{(13-x)(x)}}=\sqrt{13+2\sqrt{13-x}\sqrt{x}}$

而$2\sqrt{(13-x)x}\geq0$，在$x=0$或$x=13$时取等，故$\sqrt{13-x}+\sqrt{x}\geq$

即$y\geq3\sqrt{3}+\sqrt{13}$，在$x=0$时取等

15. 设$a>b>c$，下面给出求使不等式$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{m}{c-a}\geq 0$成立的最大自然数$m$的值的一种解法：$\because a>b>c \Rightarrow a-b>0$，$b-c>0$，$a-c>0$，

$\therefore \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{m}{c-a}\geq 0 \Rightarrow \frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{m}{a-c} \Rightarrow (a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\geq m$，

又$\because (a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})=\frac{a-c}{a-b}+\frac{a-c}{b-c}=\frac{a-b+b-c}{a-b}+\frac{a-b+b-c}{b-c}$

$=2+\frac{b-c}{a-b}+\frac{a-b}{b-c}\geq 2+2\sqrt{\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{a-b}{b-c}}=4$.

即$(a-c)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})\geq 4 \Rightarrow m\leq 4$，所以所求的最大自然数$m$的值为4.

① 正整数m、n、p满足什么条件时，不等式$\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}>\frac{p}{a-c}$对任意的$a>b>c$恒成立，请加以证明；

② 设$a>b>c>d$，用类似的方法求使不等式：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}+\frac{p}{d-a}\geq 0$成立的最大自然数$p$的值.

解 ① $\because a>b>c \Rightarrow a-b>0, b-c>0, a-c>0$

$\therefore \frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c}>\frac{p}{a-c} \Rightarrow (a-c)(\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c})>p$

~~又∵~~

$\Leftrightarrow (a-b+b-c)(\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c})>p$

而$(a-b+b-c)(\frac{m}{a-b}+\frac{n}{b-c})\geq(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2$

即$\Leftrightarrow \sqrt{m}+\sqrt{n}>\sqrt{p}$

② $\Leftrightarrow (a-d)(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d})\geq p$

$\Leftrightarrow 3^2\geq p$ （柯西）

$\Leftrightarrow p\leq 9$

故p最大为9

等号=3

【C组】

1. 函数$y=4\sqrt{x-2}+\sqrt{9-3x}$的最大值为 $\sqrt{19}$.　　过程见左

2. 函数$y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$的最大值为 11 ，最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

$(\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x})^2\leq$

3. 已知$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，求证：$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geq 9$.

3. 证明：$\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$2\beta\in(0,\pi)$，$\sin 2\beta\in(0,1]$

$\sin\beta\cos\beta=\frac{1}{2}\sin 2\beta\in(0,\frac{1}{2}]$

$\sin^2\beta\cos^2\beta\in(0,\frac{1}{4}]$

$\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geq\frac{4}{\sin^2\alpha}$

$LHS\geq\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}$

$(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha})(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\geq(1+2)^2$

即$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}\geq 9$

即$LHS\geq 9$

故得证

过程在柯西 13题