薛泽兮

期末综合练习 1

1、已知 $A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 3\}$，$B=\{x|x\leqslant a-1$ 或 $x\geqslant a+1\}$，若 $A\cap(\bar{B})\neq\varnothing$，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. $\bar{B}=(a-1,a+1)$

2、设 a，$b\in\mathbf{R}$，p：$\log_2(a-1)+\log_2(b-1)>0$，$q$：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，则 p 是 q 的 充分不必要 条件.

$(a-1)(b-1)>1$ 且 $a,b>1$　　$(a-1)(b-1)>1$

3、若 $a>1$，$m=\log_a(a^2+1)$，$n=\log_a(a+1)$，$p=\log_a(2a)$，则 m，n，p 的大小关系是 $m>p>n$.

4、已知集合 $A=\{m^2,-2\}$，$B=\{m,m-3\}$，若 $A\cap B=\{-2\}$，则 $A\cup B=$ $\{4,-2,-5\}$.

5、已知函数 $f(x)=mx^2-mx-1$. 若对于 $x\in[1,3]$，$f(x)<5-m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 $(-\infty,\frac{6}{7})$

6、幂函数 $f(x)=(m^2-3m+3)x^m$ 的图象关于 y 轴对称，则实数 $m=$ 2.

7、函数 $y=\lg(c+2x-x^2)$ 的定义域是 $(m,m+4)$，则实数 c 的值为 3.

8、若不等式 $x^2-(a+1)x+a\leqslant 0$ 的解集是 $[-4,3]$ 的子集，则 a 的取值范围是 $[-4,3]$. $(x-a)(x-1)\leqslant 0$

9、著名数学家、物理学家牛顿曾提出：物体在空气中冷却，如果物体的初始温度为 θ_1 ℃，空气温度为 θ_0 ℃，则 t 分钟后物体的温度 θ(单位：℃)满足：$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$. 若常数 $k=0.05$，空气温度为 30 ℃，某物体的温度从 90 ℃下降到 50 ℃，大约需要的时间为 22 分钟. (参考数据：$\ln 3\approx 1.1$)

10、若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点，则实数 b 的取值范围是 $(0,2)$.

$f(x)+f(-x)=2$ 半奇

11、已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+1$，则 $f(\ln 5)+f\left(\ln\frac{1}{5}\right)=$ 2.

12、已知函数 $f(x)=4ax^2+4x-1$，对于任意的 $x\in(-1,1)$，$f(x)<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.

13、已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, & x\leqslant 0,\\ x+\frac{1}{x}+a, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的最小值，则 a 的取值范围为 $[0,2]$.

严格

14、若定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是 $[-1,0]\cup[1,3]$.

15、函数 $f(x)=x^2+ax+3$.

(1) 若当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)\geq a$ 恒成立，求：实数 a 的取值范围；

(2) 若当 $a\in[4,6]$ 时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 x 的取值范围；

解.(1) $f(x)-a\geq 0,\ \forall x\in[-2,2]$

故 $(x-1)a\geq -3-x^2$

令 $x-1=t$，$t\in[-3,1]$

$ta\geq -t^2-2t-4$

$t=0$ 时，成立

$t\in[-3,0)$ 时

$a\leq -t-\frac{4}{t}-2$

$-t-\frac{4}{t}-2\in[2,+\infty)$

故 $a\in(-\infty,2]$

$t\in(0,1]$ 时

$a\geq -t-\frac{4}{t}-2$

$-t-\frac{4}{t}-2\in(-\infty,-7]$

故 $a\in[-7,+\infty)$

综上，$a\in[-7,2]$

(2) 令 $g(a)=f(x)=x^2+ax+3$

$g(a)$ 单调

故 $\begin{cases} g(4)\geq 0 \\ g(6)\geq 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x^2+4x+3\geq 0 \\ x^2+6x+3\geq 0 \end{cases}$

故 $x\in(-\infty,-3-\sqrt{6}]\cup[-3+\sqrt{6},+\infty)$

16、已知 $f(x)=2x^2+bx+c$，不等式 $f(x)<0$ 的解集是 $(0,5)$；

△ (1) 若不等式组 $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x+k)<0 \end{cases}$ 的正整数解只有一个，求实数 k 的取值范围；

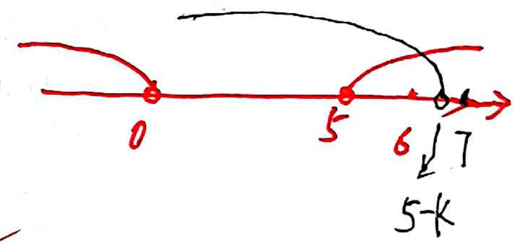
(2) 若对于任意 $x\in[-1,1]$，不等式 $t\cdot f(x)\leq 2$ 恒成立，求 t 的取值范围；

解：显然 $f(0)=f(5)=0$，故 $c=0$，$b=-10$

故 $f(x)=2x^2-10x$

(1) $f(x)>0 \iff x\in(-\infty,0)\cup(5,+\infty)$

$f(x+k)<0 \iff x+k\in(0,5) \iff x\in(-k,5-k)$



误：$k\in[-2,-1)\cup(1,2]$

故 $5-k\in(6,7]$ 或 $-k\in[-2,-1)$

故 $k\in[-2,-1)$

(2) $x\in[-1,1]$

$f(x)\in[-8,12]$

而 $t\cdot f(x)\leq 2$

显然 $t\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{6}]$

17、已知定义域为 R 的函数 $f(x)=a^x-(k-1)a^{-x}$($a>0$ 且 $a\neq 1$)是奇函数；

(1) 求实数 k 的值；

(2) 若 $f(1)<0$，判断函数 $f(x)$的单调性，若 $f(m^2-2)+f(m)>0$，求实数 m 的取值范围；

解：(1) $f(0)=0$，即 $a^0-(k-1)a^0=0$

即 $1-(k-1)=0$

故 $k=2$

(2) $f(x)=a^x-a^{-x}$

$f(1)=a-\frac{1}{a}<0$

故 $a\in(0,1)$

则 $a^x\downarrow$，$a^{-x}\uparrow$

故 $f(x)\downarrow$

$f(m^2-2)>-f(m)$

$f(m^2-2)>f(-m)$

$m^2-2<-m$

即 $m^2+m-2<0$

$m\in(-2,1)$

18.已知函数$f(x)=\begin{cases}|x+a| & x\geq 0\\ 2^x & x<0\end{cases}$，其中$a\in R$、

(1)若$a=-1$，解不等式$f(x)\geq\frac{1}{4}$；

(2)设$a>0$，$g(x)=log_2 f(\frac{1}{x})$，若对任意的$t\in[\frac{1}{2},2]$，函数$g(x)$在区间$[t,t+2]$上的最大值和最小值的差不超过 1，求实数$a$的取值范围；

(3)已知函数$y=f(x)$存在反函数，其反函数记为$y=f^{-1}(x)$，若关于x的不等式$f^{-1}(4-a)\leq f(x)+|2x-a^2|$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立，求实数$a$的取值范围.

解：(1) $f(x)\begin{cases}|x-1| & x\geq 0\\ 2^x & x<0\end{cases}$

$x\geq 0$时

$|x-1|\geq\frac{1}{4}$

$x\in[0,\frac{3}{4}]\cup[\frac{5}{4},+\infty)$

$x<0$时

$2^x\geq\frac{1}{4}$

$x\in[-2,0)$

故 $x\in[-2,\frac{3}{4}]\cup[\frac{5}{4},+\infty)$

(2) $t\in[\frac{1}{2},2]$

$x\in[t,t+2]$

故 $x\in R^+$，$\frac{1}{x}\in R^+$

$f(\frac{1}{x})=|\frac{1}{x}+a|$

而 $a>0$

$\therefore f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}+a$

故 $g(x)=log_2 f(\frac{1}{x})=log_2(\frac{1}{x}+a)$

故 $g(x)$单调递减

$\forall t\in[\frac{1}{2},2]$，$g(t)-g(t+2)=log_2(\frac{1}{t}+a)-log_2(\frac{1}{t+2}+a)$

$=log_2\left(\frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+2}+a}\right)\leq 1$

故 $\frac{\frac{1}{t}+a}{\frac{1}{t+2}+a}\leq 2$

即 $a\geq\frac{2-t}{t(t+2)}$，$\forall t\in[\frac{1}{2},2]$

令 $m=2-t$，则 $m\in[0,\frac{3}{2}]$

$\frac{2-t}{t(t+2)}=\frac{m}{m^2-6m+8}=\begin{cases}\frac{1}{m+\frac{8}{m}-6}, & m\in(0,\frac{3}{2}]\\ 0, & m=0\end{cases}$

$\frac{1}{m+\frac{8}{m}-6}\in(0,\frac{6}{5}]$

故 $\frac{2-t}{t(t+2)}\in[0,\frac{6}{5}]$，即 $a\in[\frac{6}{5},+\infty)$

(3) 见右页

(3) 若 $a<0$,

则 $-\frac{a}{2}>0, -\frac{3}{2}a>0$

$f(-\frac{a}{2})=f(-\frac{3}{2}a)=-\frac{a}{2}$

故不存在反函数

故 $a\geq 0$. 在 $x\geq 0$ 时, $f(x)=|x+a|=x+a$

$x<0$ 时, $2^x\in(0,1)$

故 $x\geq 0$ 时, $x+a\in[1,+\infty)$

$a\in[1,+\infty)$

$x\geq 0$ 时, $f(x)\in[a,+\infty)$

$x<0$ 时, $f(x)\in(0,1)$

1° $a\in[1,2]$ 时, $4-a\in[a,+\infty)$

$f^{-1}(4-a)=4-2a$

即 $x+a+|2x-a^2|\geq 4-2a \quad \forall x\in[0,+\infty)$

即 $x+3a+|2x-a^2|\geq 4$

显然, 左边在 $x=\frac{a^2}{2}$ 时取到最小值 $\frac{a^2}{2}+3a$

故 $\frac{a^2}{2}+3a\geq 4$

故 $a\in[\sqrt{17}-3,2]$

2° $a\in(3,4)$ 时, $4-a\in(0,1)$

$f^{-1}(4-a)=\log_2 a$

即 $x+a+|2x-a^2|\geq 4$, $\forall x\in[0,+\infty)$

故 $\frac{a^2}{2}+a\geq\log_2 a$

在 $a\in(3,4)$ 恒成立

综上所述, $a\in[\sqrt{17}-3,2]\cup(3,4)$

期末综合练习 1

1、已知 $A=\{x|x\le 0$ 或 $x\ge 3\}$，$B=\{x|x\le a-1$ 或 $x\ge a+1\}$，若 $A\cap(\bar{B})\ne\varnothing$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$1\le a\le 2$　　　　B．$1<a<2$

C．$a\le 1$ 或 $a\ge 2$　　　　D．$a<1$ 或 $a>2$

【答案】D

【解析】$A=\{x|x\le 0$ 或 $x\ge 3\}$，$B=\{x|x\le a-1$ 或 $x\ge a+1\}$，所以 $\complement_{R}B=\{x|a-1<x<a+1\}$；

又 $A\cap(\complement_{R}B)\ne\varnothing$，所以 $a-1<0$ 或 $a+1>3$，解得 $a<1$ 或 $a>2$，

所以实数 a 的取值范围是 $a<1$ 或 $a>2$.

【说明】对于集合的交、并、补运算，如果集合中的元素是离散的，可用 Venn 图表示；如果集合中的元素是连续的，可用数轴表示，此时要注意端点的情况；

设 a，$b\in\mathbf{R}$，p：$\log_2(a-1)+\log_2(b-1)>0$，$q$：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，则 p 是 q 的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】由题意得，p：$\log_2(a-1)+\log_2(b-1)=\log_2(a-1)(b-1)>0=\log_2 1$，

所以 $(a-1)(b-1)>1$，即 $a+b<ab$，因为 $\begin{cases}a-1>0,\\ b-1>0,\end{cases}$ 所以 $a>1$，$b>1$，则 $ab>0$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，

所以 p 是 q 的充分条件；

因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$，所以 $\frac{a+b}{ab}<1$，若 $ab>0$，则 $a+b<ab$，若 a

所以 p 是 q 的充分不必要条件.

【说明】充分条件、必要条件的两种判定方法

（1）定义法：根据 $p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$ 进行判断，适用于定义、定理判断性问题；

（2）集合法：根据 p，q 对应的集合之间的包含关系进行判断，多适用于条件中涉及参数范围的推断问题；

若 $a>1$，$m=\log_a(a^2+1)$，$n=\log_a(a+1)$，$p=\log_a(2a)$，则 m，n，p 的大小关系是(　　)

A．$n>m>p$　　　　B．$m>p>n$

C．$m>n>p$　　　　D．$p>m>n$

【答案】B

【解析】由 $a>1$ 知，$a^2+1-2a=(a-1)^2>0$，

即 $a^2+1>2a$，而 $2a-(a+1)=a-1>0$，即 $2a>a+1$，

$b<0$，则 $a+b>ab$，

所以 p 是 q 的非必要条件，

$\therefore a^2+1>2a>a+1$，而 $y=\log_a x$ 在定义域上单调递增，$\therefore m>p>n$.

1、已知集合 $A=\{m^2，-2\}$，$B=\{m，m-3\}$，若 $A\cap B=\{-2\}$，则 $A\cup B=$______________

【答案】$\{-5，-2,4\}$

【解析】$\because A\cap B=\{-2\}$，$\therefore -2\in B$，

若 $m=-2$，则 $A=\{4，-2\}$，$B=\{-2，-5\}$，$\therefore A\cap B=\{-2\}$，$A\cup B=\{-5，-2,4\}$；

若 $m-3=-2$，则 $m=1$，$\therefore A=\{1，-2\}$，$B=\{1，-2\}$，

$\therefore A\cap B=\{1，-2\}$(舍去)，

综上，有 $A\cup B=\{-5，-2,4\}$.

已知函数 $f(x)=mx^2-mx-1$.若对于 $x\in[1,3]$，$f(x)<5-m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为___

【答案】$\left(-\infty，\dfrac{6}{7}\right)$

【解析】要使 $f(x)<-m+5$ 在 $x\in[1，3]$上恒成立，

即 $m\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m-6<0$ 在 $x\in[1，3]$上恒成立．有以下两种方法：

方法 1：令 $g(x)=m\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}m-6$，$x\in[1,3]$.

当 $m>0$ 时，$g(x)$在$[1,3]$上单调递增，所以 $g(x)_{\max}=g(3)$，即 $7m-6<0$，所以 $m<\dfrac{6}{7}$，所以 $0<m<\dfrac{6}{7}$；

当 $m=0$ 时，$-6<0$ 恒成立；

当 $m<0$ 时，$g(x)$在$[1,3]$上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)$，即 $m-6<0$，所以 $m<6$，所以 $m<0$.

综上所述，m 的取值范围是$\left(-\infty，\dfrac{6}{7}\right)$.

方法 2：因为 $x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，又因为 $m(x^2-x+1)-6<0$ 在 $x\in[1,3]$上恒成立，

所以 $m<\dfrac{6}{x^2-x+1}$在 $x\in[1,3]$上恒成立．令 $y=\dfrac{6}{x^2-x+1}$，

因为函数 $y=\dfrac{6}{x^2-x+1}=\dfrac{6}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$在$[1,3]$上的最小值为$\dfrac{6}{7}$，所以只需 $m<\dfrac{6}{7}$即可.

所以 m 的取值范围是$\left(-\infty，\dfrac{6}{7}\right)$.

幂函数 $f(x)=(m^2-3m+3)x^m$ 的图象关于 y 轴对称，则实数 $m=$______________

【答案】2

【解析】由幂函数定义，知 $m^2-3m+3=1$，解得 $m=1$ 或 $m=2$，

当 $m=1$ 时，$f(x)=x$ 的图象不关于 y 轴对称，舍去，

当 $m=2$ 时，$f(x)=x^2$ 的图象关于 y 轴对称，因此 $m=2$.

5、函数 $y=\lg(c+2x-x^2)$的定义域是$(m，m+4)$，则实数 c 的值为________.

【答案】3

【解析】依题意得，一元二次不等式$-x^2+2x+c>0$，即 $x^2-2x-c<0$ 的解集为$(m，m+4)$，所以 m，$m+4$ 是方程 $x^2-2x-c=0$ 的两个根，所以$\begin{cases} m+m+4=2, \\ m(m+4)=-c, \end{cases}$ 解得 $m=-1$，$c=3$.

6、若不等式 $x^2-(a+1)x+a\le 0$ 的解集是$[-4，3]$的子集，则 a 的取值范围是____________

【答案】$[-4，3]$

【解析】原不等式为$(x-a)(x-1)\le 0$，当 $a<1$ 时，不等式的解集为$[a,1]$，此时只要 $a\ge -4$ 即可，即$-4\le a<1$；当 $a=1$ 时，不等式的解为 $x=1$，此时符合要求；当 $a>1$ 时，不等式的解集为$[1，a]$，此时只要 $a\le 3$ 即可，即 $1<a\le 3$，综上可得$-4\le a\le 3$；

7、著名数学家、物理学家牛顿曾提出：物体在空气中冷却，如果物体的初始温度为 θ_1 ℃，空气温度为 θ_0 ℃，则 t 分钟后物体的温度 θ(单位：℃)满足：$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$.若常数 $k=0.05$，空气温度为 30 ℃，某物体的温度从 90 ℃下降到 50 ℃，大约需要的时间为________分钟．(参考数据：$\ln 3\approx 1.1$)

【答案】22；

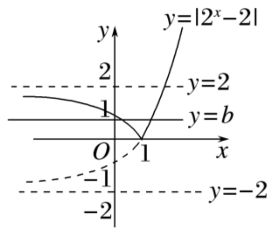
【解析】由题知 $\theta_0=30$，$\theta_1=90$，$\theta=50$，$\therefore 50=30+(90-30)e^{-0.05t}$，$\therefore e^{-0.05t}=\frac{1}{3}$，

$\therefore -0.05t=\ln\frac{1}{3}$，$\therefore 0.05t=\ln 3$，$\therefore t=\frac{\ln 3}{0.05}=20\times\ln 3\approx 22$；

8、若函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点，则实数 b 的取值范围是____________________

【答案】$(0，2)$

【解析】在同一平面直角坐标系中画出 $y=|2^x-2|$与 $y=b$ 的图象，如图所示.



$\therefore$当 $0<b<2$ 时，两函数图象有两个交点，从而函数 $f(x)=|2^x-2|-b$ 有两个零点；$\therefore b$ 的取值范围是$(0，2)$；

9、已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+1$，则 $f(\ln 5)+f\left(\ln\frac{1}{5}\right)=$________.

【答案】2

【解析】令 $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，则 $g(x)$的定义域为 R，

$g(-x)+g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln 1=0$，$\therefore g(x)$为奇函数，

$\therefore f(\ln 5)+f\left(\ln \frac{1}{5}\right)=f(\ln 5)+f(-\ln 5)=g(\ln 5)+1+g(-\ln 5)+1=2.$

10、已知函数 $f(x)=4ax^2+4x-1$，对于任意的 $x\in(-1,1)$，$f(x)<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________

【答案】$(-\infty,\ -1)$

【解析】因为 $f(x)=4ax^2+4x-1$，所以 $f(0)=-1<0$ 成立.

当 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$时，由 $f(x)<0$ 可得 $4ax^2<-4x+1$，所以 $4a<\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}\right)_{\min}$，

当 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$时，$\frac{1}{x}\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$，所以$\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}=\left(\frac{1}{x}-2\right)^2-4\geq-4$，

当且仅当 $x=\frac{1}{2}$时，等号成立，所以 $4a<-4$，解得 $a<-1$.

11、已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2,& x\leq 0,\\ x+\frac{1}{x}+a,& x>0,\end{cases}$ 若 $f(0)$是 $f(x)$的最小值，则 a 的取值范围为________

【答案】$[0,\ 2]$

【解析】由于当 $x>0$ 时，$f(x)=x+\frac{1}{x}+a$ 在 $x=1$ 时取得最小值 $2+a$，

因为 $f(0)$是 $f(x)$的最小值，所以当 $x\leq 0$ 时，$f(x)=(x-a)^2$ 单调递减，

则 $a\geq 0$，此时最小值为 $f(0)=a^2$，因此 $a^2\leq a+2$，解得 $0\leq a\leq 2$.

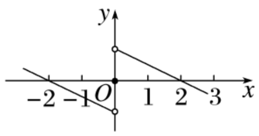
12、若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$在$(-\infty,\ 0)$上严格单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是____________________________

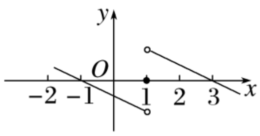
【答案】$[-1,\ 0]\cup[1,\ 3]$

【解析】因为函数 $f(x)$为定义在 R 上的奇函数，则 $f(0)=0$.

又 $f(x)$在$(-\infty,\ 0)$上单调递减，且 $f(2)=0$，画出函数 $f(x)$的大致图象如图(1)所示，

则函数 $f(x-1)$的大致图象如图(2)所示.





(1)　　　　(2)

当 $x\leq 0$ 时，要满足 $xf(x-1)\geq 0$，

则 $f(x-1)\leq 0$，得 $-1\leq x\leq 0$.

当 $x>0$ 时，要满足 $xf(x-1)\geq 0$，

则 $f(x-1)\geq 0$，得 $1\leq x\leq 3$.

故满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是$[-1,\ 0]\cup[1,\ 3]$；

函数 $f(x)=x^2+ax+3$.

（1）若当 $x\in[-2,2]$时，$f(x)\geq a$ 恒成立，求：实数 a 的取值范围；

（2）若当 $a\in[4,6]$时，$f(x)\geq 0$ 恒成立，求实数 x 的取值范围；

【答案】（1）$[-7，2]$；（2）$(-\infty，-3-\sqrt{6}]\cup[-3+\sqrt{6}，+\infty)$；

【解析】（1）若 $x^2+ax+3-a\geq 0$ 在 $x\in[-2,2]$上恒成立，

令 $g(x)=x^2+ax+3-a$，则有① $\Delta\leq 0$ 或② $\begin{cases}\Delta>0,\\ -\frac{a}{2}<-2,\\ g(-2)=7-3a\geq 0.\end{cases}$ 或③

$\begin{cases}\Delta>0,\\ -\frac{a}{2}>2,\\ g(2)=7+a\geq 0,\end{cases}$

解①得 $-6\leq a\leq 2$，解②得 $a\in\varnothing$，

解③得 $-7\leq a<-6$.

综上可得，满足条件的实数 a 的取值范围是$[-7，2]$.

（2）令 $h(a)=xa+x^2+3$.

当 $a\in[4,6]$时，$h(a)\geq 0$ 恒成立.

只需$\begin{cases}h(4)\geq 0,\\ h(6)\geq 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x^2+4x+3\geq 0,\\ x^2+6x+3\geq 0,\end{cases}$

解得 $x\leq -3-\sqrt{6}$或 $x\geq -3+\sqrt{6}$.

∴实数 x 的取值范围是$(-\infty，-3-\sqrt{6}]\cup[-3+\sqrt{6}，+\infty)$；

已知 $f(x)=2x^2+bx+c$，不等式 $f(x)<0$ 的解集是$(0，5)$；

（1）若不等式组$\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x+k)<0\end{cases}$ 的正整数解只有一个，求实数 k 的取值范围；

（2）若对于任意 $x\in[-1,1]$，不等式 $t\cdot f(x)\leq 2$ 恒成立，求 t 的取值范围；

【解析】（1）因为不等式 $f(x)<0$ 的解集是$(0,5)$，所以 0,5 是一元二次方程 $2x^2+bx+c=0$ 的两个实数根，

可得$\begin{cases}0+5=-\frac{b}{2},\\ 0\times 5=\frac{c}{2},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}b=-10,\\ c=0.\end{cases}$ 所以 $f(x)=2x^2-10x$.

不等式组$\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x+k)<0,\end{cases}$

即$\begin{cases}2x^2-10x>0,\\ 2(x^2+2kx+k^2)-10(x+k)<0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x<0\text{或}x>5,\\-k<x<5-k,\end{cases}$

因为不等式组的正整数解只有一个，可得该正整数解为 6，可得 $6<5-k\leq 7$，解得$-2\leq k<-1$，

所以 k 的取值范围是$[-2,-1)$；

（2）$tf(x)\leq 2$，即 $t(2x^2-10x)\leq 2$，即 $tx^2-5tx-1\leq 0$，

当 $t=0$ 时显然成立，

当 $t>0$ 时，有$\begin{cases}t\cdot 1-5t\cdot(-1)-1\leq 0,\\t\cdot 1-5t\cdot 1-1\leq 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}t+5t-1\leq 0,\\t-5t-1\leq 0,\end{cases}$ 解得$-\frac{1}{4}\leq t\leq\frac{1}{6}$，所以 $0<t\leq\frac{1}{6}$；

当 $t<0$ 时，函数 $y=tx^2-5tx-1$ 在$[-1,1]$上单调递增，

所以只要其最大值满足条件即可，所以 $t-5t-1\leq 0$，解得 $t\geq-\frac{1}{4}$，即$-\frac{1}{4}\leq t<0$，

综上，t 的取值范围是$\left[-\frac{1}{4},\ \frac{1}{6}\right]$；

19、（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知定义域为 R 的函数 $f(x)=a^x-(k-1)a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$是奇函数；

（1）求实数 k 的值；

（2）若 $f(1)<0$，判断函数 $f(x)$的单调性，若 $f(m^2-2)+f(m)>0$，求实数 m 的取值范围；

【解析】（1）∵$f(x)$是定义域为 R 的奇函数，∴$f(0)=a^0-(k-1)a^0=1-(k-1)=0$，

∴$k=2$，经检验 $k=2$ 符合题意，所以 $k=2$；

（2）$f(x)=a^x-a^{-x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$，

∵$f(1)<0$，∴$a-\frac{1}{a}<0$，又 $a>0$，且 $a\neq 1$，∴$0<a<1$，

而 $y=a^x$ 在 R 上单调递减，$y=a^{-x}$ 在 R 上单调递增，

故由单调性的性质可判断 $f(x)=a^x-a^{-x}$ 在 R 上单调递减，

不等式 $f(m^2-2)+f(m)>0$，可化为 $f(m^2-2)>f(-m)$，

∴$m^2-2<-m$，即 $m^2+m-2<0$，解得$-2<m<1$，

∴实数 m 的取值范围是$(-2,1)$.

已知函数$f(x)=\begin{cases}|x+a| & x\geq 0\\2^x & x<0\end{cases}$，其中$a\in R$.

(1)若$a=-1$，解不等式$f(x)\geq\frac{1}{4}$；

(2)设$a>0$，$g(x)=log_2 f(\frac{1}{x})$，若对任意的$t\in[\frac{1}{2},2]$，函数$g(x)$在区间$[t,t+2]$上的最大值

和最小值的差不超过1，求实数a的取值范围；

(3)已知函数$y=f(x)$存在反函数，其反函数记为$y=f^{-1}(x)$，若关于x的不等式$f^{-1}(4-a)\le f(x)+|2x-a^2|$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立，求实数$a$的取值范围．

【答案】解：(1)当$a=-1$，$f(x)=\begin{cases}|x-1|,x\ge 0\\ 2^x,x<0\end{cases}$，

当$x\ge 0$时，$f(x)=|x-1|\ge\frac{1}{4}$，解得$x\ge\frac{5}{4}$或$x\le\frac{3}{4}$，所以$0\le x\le\frac{3}{4}$或$x\ge\frac{5}{4}$；

当$x<0$时，$f(x)=2^x\ge\frac{1}{4}$，解得$x\ge -2$，所以$-2\le x<0$；

综上所述，不等式的解为$x\in[-2,\frac{3}{4}]\cup[\frac{5}{4},+\infty)$．

(2) $\because a>0$，$t\in[\frac{1}{2},2]$，$x\in[t,t+2]$，$\therefore f(x)=x+a$，$g(x)=log_2f(\frac{1}{x})=log_2(\frac{1}{x}+a)$，

由复合函数的单调判断原则，可知$g(x)$在$x\in[t,t+2]$上单调递减，

$\therefore g(x)_{max}-g(x)_{min}=g(t)-g(t+2)=log_2(\frac{1}{t}+a)-log_2(\frac{1}{t+2}+a)\le 1$，

化简得，$a\ge\frac{2-t}{t(t+2)}$在$t\in[\frac{1}{2},2]$上恒成立，

令$m=2-t\in[0,\frac{3}{2}]$，则$\frac{2-t}{t(t+2)}=h(m)=\frac{m}{(2-m)(4-m)}=\frac{m}{m^2-6m+8}$，

当$m=0$时，$h(m)=0$，

当$m\in(0,\frac{3}{2}]$时，$h(m)=\frac{1}{m+\frac{8}{m}-6}$，

由对勾函数性质可知，$m+\frac{8}{m}-6$在$(0,\frac{3}{2}]$上单调递减，$\therefore m+\frac{8}{m}-6\ge\frac{3}{2}+\frac{16}{3}-6=\frac{5}{6}$，即$0<h(m)\le\frac{6}{5}$，

故实数a的取值范围为$a\ge\frac{6}{5}$；

(3) $\because$函数$y=f(x)$存在反函数，$\therefore y=f(x)$单调，又$\because f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，$\therefore y=f(x)$在R上必须单调递增，

$\therefore 0+a\ge 2^0=1$即$a\ge 1$，

$\therefore f^{-1}(x)=\begin{cases}x-a,x\ge a\\ log_2x,0<x<1\end{cases}$，

令$F(x)=f(x)+|2x-a^2|$，$x\in[0,+\infty)$，

则$F(x)=x+a+|2x-a^2|=\begin{cases}3x-a^2+a, & x\ge\frac{a^2}{2}\\ -x+a^2+a, & x<\frac{a^2}{2}\end{cases}$，

$\therefore F(x)_{min}=F(\frac{a^2}{2})=\frac{a^2}{2}+a$，

$\because f^{-1}(4-a) \leq f(x)+|2x-a^2|$在$x\in[0,+\infty)$上恒成立，

$\therefore$当$0<4-a<1$即$3<a<4$时，$log_2(4-a)\leq\frac{a^2}{2}+a$恒成立，$\therefore 3<a<4$，

当$4-a\geq a$即$a\leq 2$时，$4-a-a\leq\frac{a^2}{2}+a$，解得$\sqrt{17}-3\leq a\leq 2$，

综上所述，实数a的取值范围为$a\in[\sqrt{17}-3,2]\cup(3,4)$.

【解析】(1)把$a=-1$代入函数，分段解不等式即可；

(2) $\because a>0$，$t\in[\frac{1}{2},2]$，$x\in[t,t+2]$，$\therefore f(x)=x+a$，$g(x)=log_2(\frac{1}{x}+a)$，再由复合函数的单调判断出$g(x)$在$[t,t+2]$上单调递减，从而得到$a\geq\frac{2-t}{t(t+2)}$在$t\in[\frac{1}{2},2]$上恒成立，然后用换元法，令$m=2-t$，构造新函数$h(m)$，再求出该函数的最大值即可；

(3)由函数$y=f(x)$存在反函数，可得$a\geq 1$且$f^{-1}(x)=\begin{cases}x-a,x\geq a\\ log_2x,0<x<1\end{cases}$；再令$F(x)=f(x)+|2x-a^2|$，$x\in[0,+\infty)$，得其最小值为$\frac{a^2}{2}+a$，然后分类讨论解不等式即可.

本题考查函数的综合应用，涉及绝对值函数、指对函数的单调性、函数的恒成立问题，在解题过程中用到换元法、构造法、分类讨论法，考查了学生灵活运用知识的能力和逻辑推理能力，属于难题.