华师大二附中高一数学12月质量调研

2024.12.3

(考试时间120分钟　满分150分)

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1. 函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域是______.

【答案】$\left[-3,2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

2. 若 $3^{a}=2,3^{b}=5$，求 $3^{2a-b}=$______.

【答案】$\frac{4}{5}$

3. 函数 $y=\dfrac{1}{x-1}+1$ 的对称中心是______.

【答案】(1，1)

4.若函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上是严格增函数，则 a 的取值范围是______.

【答案】$a\in\left[1,+\infty\right)$.

5.设 $f\left(x\right)=-x^{3}+\left(a-2\right)x^{2}+x$ 是定义在R 上的奇函数，则 $f\left(a\right)=$ ________

【答案】-6

6. 函数 $y=x^{2}-4\left|x\right|+5$ 的严格减区间是______.

【答案】$(-\infty,-2]$和$[0,2]$

7.已知 $x>0$，$y>0$，$\lg 2^{x}+\lg 4^{y}=\lg 2$，则 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ 的最小值为________

【答案】4

【详解】因为 $\lg 2^{x}+\lg 4^{y}=\lg 2$，所以 $\lg(2^{x}\times 4^{y})=\lg 2$，所以 $\lg 2^{x+2y}=\lg 2$，所以 $x+2y=1$，

所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}=(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y})(x+2y)=1+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{x}{2y}+1\geq 2+2\sqrt{\dfrac{2y}{x}\times\dfrac{x}{2y}}=4$，

当且仅当 $\dfrac{2y}{x}=\dfrac{x}{2y}$，即 $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{4}$ 时等号成立，

所以 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$ 的最小值为 4.

8.若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 **R**，则函数 $y=f(x-1)$ 与 $y=f(1-x)$ 的图象关于_______对称

【答案】$x=1$

9. 已知函数$f\left(x\right)$是定义在$\left[-4,a-1\right]$上的偶函数，在$\left[-4,0\right]$上为严格增函数. 若$f\left(x+\frac{a}{5}\right)<f\left(-2\right)$，则实数$x$的取值范围是______.

【答案】$-5\le x<-3$或$1<x\le 3$

【详解】因为$f\left(x\right)$为偶函数，故$-4+a-1=0$即$a=5$，

而$f\left(x\right)$在$\left[-4,0\right]$上严格增且$f\left(x\right)$为偶函数，故$f\left(x\right)$在$\left[0,4\right]$上为严格减函数，

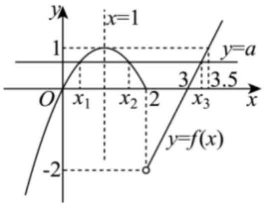
而$f\left(x+\frac{a}{5}\right)<f\left(-2\right)$即为$f\left(x+1\right)<f\left(-2\right)$，

故$4\ge\left|x+1\right|>2$，故$-5\le x<-3$或$1<x\le 3$，

10. 设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2+2x,x\le 2\\2x-6,x>2\end{cases}$关于$x$的方程$f\left(x\right)=a$有三个不等实根$x_1$，$x_2$，$x_3$，则$x_1+x_2+x_3$的取值范围是________.

【答案】$\left[5,\frac{11}{2}\right)$

【详解】画出函数图象,



结合图形可知，仅当$-1<a\le 0$时，方程$f\left(x\right)=a$有三个不等实根,

分别对应直线$y=a$与图象三个交点的横坐标，其中两个交点位于二次函数图像上,

不妨设$x_1<x_2<x_3$，显然x_1,x_2关于$x=1$对称，故$x_1+x_2=2$,

另一个交点位于一次函数图象上，令$2x-6=1$，解得$x=\frac{7}{2}$,

显然它在$y=2x-6$和$y=0$以及$y=1$的交点$\left(3,0\right)$和$\left(\frac{7}{2},1\right)$之间,

故$x_3\in\left[3,\dfrac{7}{2}\right)$，所以$x_1+x_2+x_3\in\left[5,\dfrac{11}{2}\right)$，

故答案为：$\left[5,\dfrac{11}{2}\right)$.

11．已知函数$f(x)=x^2+2mx+2m+3$至少有一个零点在区间$(0,2)$内，求实数m的取值范围是____________。

【答案】$-\dfrac{3}{2}<m\le -1$

【详解】对于函数$f(x)=x^2+2mx+2m+3$，

$\Delta=4m^2-4(2m+3)=4(m^2-2m-3)=4(m+1)(m-3)$，

当$\Delta<0$，即$-1<m<3$时，$f(x)$没有零点，不符合题意.

当$\Delta=0$，即$m=-1$或$m=3$时，

当$m=-1$时，$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，零点为1，

$1\in(0,2)$，符合题意.

当$m=3$时，$f(x)=x^2+6x+9=(x+3)^2$，零点为-3，

$-3\notin(0,2)$，不符合题意.

当$\Delta>0$，即$m<-1$或$m>3$时，$f(x)$有两个不相等的零点x_1,x_2，

至少有一个零点在区间$(0,2)$内，

则需$f(0)f(2)=(2m+3)(6m+7)<0$或$\begin{cases}f(0)=2m+3>0\\f(2)=6m+7>0\\0<-m<2\end{cases}$，

解得$-\dfrac{3}{2}<m<-\dfrac{7}{6}$，$-\dfrac{7}{6}<m<-1$，

另外若$f(0)=2m+3=0,m=-\dfrac{3}{2}$，

则$f(x)=x^2-3x=x(x-3)$，零点为0或3，不符合题意.

若$f(2)=4+4m+2m+3=6m+7=0,m=-\dfrac{7}{6}$，

则$f(x)=x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=(x-2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$，零点为$2$或$\dfrac{1}{3}$，

$\frac{1}{3}\in\left(0,2\right)$，符合题意.

综上所述，m 的取值范围是：$-\frac{3}{2}<m\leq -1$.

12. 已知集合 $A=B=\mathbf{N}$，定义集合 A 到 B 的函数 $f:x\to x$ 除以 3 的余数，例如 $f(27)=0, f(2024)=2$,求出函数 $f\left(x\right)$ 的图像与 $y=x^2-13x+43$ 的图像的所有交点________.

【答案】$(7,1)$

【详解】设 $g(x)=x^2-13x+43$，

设 $x=3k+r,k\in\mathbf{N},r\in\left\{0,1,2\right\}$，则 $f\left(x\right)=r$，

设两函数交点为 (x,y)，则 $y=0$ 或1 或2 .

①当 $y=0$ 时，令 $x^2-13x+43=0$，

则 $\Delta=169-4\times 43<0$，方程无解，即此时两图象不相交；

②当 $y=1$ 时，令 $x^2-13x+43=1$，即 $x^2-13x+42=0$ 解得 $x=6$，或 $x=7$.

当 $x=6$ 时，$f(6)=0$，而 $g(6)=1\neq f(6)$，即此时两函数图象不相交；

当 $x=7$ 时，$f(7)=1$，且 $g(7)=1$，故 $(7,1)$ 是两函数图象的交点；

③当 $y=2$ 时，令 $x^2-13x+43=2$，即 $x^2-13x+41=0$，

此时 $\Delta=169-4\times 41=5$，解得 $x=\frac{13\pm\sqrt{5}}{2}\notin\mathbf{N}$，方程无自然数解，

即此时两函数图象也不相交.

综上所述，$(7,1)$ 是两函数图象的唯一交点。

二、单选题（本大题共有 4 题，满分 18 分，第 13、14 题每题 4 分，第 15、16 题每题 5 分）每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13．下列函数中，既是奇函数又在其定义域上为增函数的是（　）

A. $y=3x$　　B. $y=-\frac{1}{x}$　　C. $y=\sqrt{x}$　　D. $y=\left|x\right|$

【答案】A

14. 霉菌有着很强的繁殖能力，主要依靠孢子进行繁殖.已知某种霉菌的数量 y 与其繁殖时间 t（天）满足关系式：$y=ma^t$.若繁殖 5 天后，这种霉菌的数量为 20，10 天后数量为 40，则

要使数量达到200大约需要（　　）（$\lg 2 \approx 0.3$，结果四舍五入取整）

A．20天　　B．21天　　C．22天　　D．23天

【答案】C

【详解】由题可得：$\begin{cases}20 = ma^5\\40 = ma^{10}\end{cases}$，两式相除可得$2 = a^5$，即$a = 2^{\frac{1}{5}}$，

设繁殖t天后数量达到200,

则$200 = ma^t$，又$20 = ma^5$，则$\frac{200}{20} = \frac{ma^t}{ma^5}$，

$\therefore 10 = \frac{a^t}{a^5}$，则$a^{t-5} = 10$，即$\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{t-5} = 10$，

$\therefore \log_2 10 = \frac{t}{5} - 1$，

$\therefore t = 5\log_2 10 + 5 = 5 \times \frac{\lg 10}{\lg 2} + 5 = 5 \times \frac{1}{0.3} + 5 \approx 22$，

则要使数量达到200大约需要22天.

15. 已知函数$f(x+1)$是偶函数，当$1 < x_1 < x_2$时，$\left[f(x_1) - f(x_2)\right](x_1 - x_2) > 0$恒成立，设$a = f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$b = f(2)$，$c = f(3)$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　）

A．$c < b < a$　　B．$b < a < c$　　C．$b < c < a$　　D．$a < b < c$

【答案】B

【详解】$\because$当$1 < x_1 < x_2$时，$\left[f(x_1) - f(x_2)\right](x_1 - x_2) > 0$恒成立，

$\therefore$当$1 < x_1 < x_2$时，$f(x_2) - f(x_1) > 0$，即$f(x_2) > f(x_1)$，

$\therefore$函数$f(x)$在$(1, +\infty)$上为单调增函数，

$\because$函数$f(x+1)$是偶函数，即$f(1+x) = f(1-x)$，

$\therefore$函数$f(x)$的图象关于直线$x = 1$对称，$\therefore a = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$，

又函数$f(x)$在$(1, +\infty)$上为单调增函数，$\therefore f(2) < f\left(\frac{5}{2}\right) < f(3)$，

即$f(2) < f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(3)$，$\therefore b < a < c$

16. 德国数学家狄利克雷定义了著名的狄利克雷函数：$D(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，且$D(x) = \begin{cases}1, x \in Q\\0, x \notin Q\end{cases}$，狄利克雷函数$D(x)$具体而深刻地显示了函数是数集到数集的映射这个现代函数的观点。下面给出下列四个结论：①函数$y = D(x)$是偶函数；②存在常数m使得函数$y = D(x+m)$是奇函数；③函数$y = D(x-1) - 1$有无数个零点；④$D(x+2024) = D(x)$对任意

$x\in\mathbf{R}$ 恒成立。其中，所有正确结论的个数是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C.3 个　　D. 4 个

【答案】C

【详解】解：因为当 $x\in\mathrm{Q}$，则$-x\in\mathbf{Q}$，所以$D(-x)=1=D(x)$，

当$x\notin\mathbf{Q}$，则$-x\notin\mathbf{Q}$，所以$D(-x)=0=D(x)$，

所以对$x\in\mathrm{R}$，　$D(-x)=D(x)$，

所以函数$y=D(x)$是偶函数，故①正确;

因为$y=D(x+m)=\begin{cases}1,x+m\in\mathrm{Q}\\0,x+m\notin\mathrm{Q}\end{cases}$，

所以$D(-x+m)=\begin{cases}1,-x+m\in\mathrm{Q}\\0,-x+m\notin\mathrm{Q}\end{cases}$，

所以$D(-x+m)\neq-D(x+m)$，

所以不存在常数m使得函数$y=D(x+m)$是奇函数，故②错误;

由$D(x-1)-1=0$，即$D(x-1)=1$解得$x-1\in\mathrm{Q}$，即$x\in\mathrm{Q}$，

所以函数$y=D(x-1)-1$有无数个零点，故③正确;

当$x\in\mathrm{Q}$时，$x+2024\in\mathrm{Q}$，所以$D(x+2024)=1=D(x)$；

当$x\notin\mathbf{Q}$时，$x+2024\notin\mathrm{Q}$，所以$D(x+2024)=0=D(x)$，

所以$D(x+2024)=D(x)$对任意$x\in R$恒成立，故④正确.

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）　解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17．**(本题满分 14 分，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分)**

求下列函数的值域:

(1)　$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+5}$

【答案】$\left(0,\dfrac{2}{5}\right]$

【详解】因为$\sqrt{x^2+4}\geq2$，所以$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+5}=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\left(x^2+4\right)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$，

令 $y=t+\frac{1}{t}(t\ge 2)$，根据对勾函数的单调性可知 $y=t+\frac{1}{t}$ 在$[2,+\infty)$上单调递增，

所以$y\ge 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，所以$\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ge\frac{5}{2}$，所以$0<\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}\le\frac{2}{5}$，

所以$f(x)$的值域为$\left(0,\frac{2}{5}\right]$

（2） $f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$

【答案】$[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$

【详解】函数$f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}=\frac{2\left(x^2+x+4\right)+x}{x^2+x+4}=2+\frac{x}{x^2+x+4}$，

当$x=0$时，$f(x)=2$；

当$x\ne 0$时，$f(x)=2+\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}$，

根据对勾函数的性质可知：

当$x>0$时，$x+\frac{4}{x}\ge 4$，则$0<\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}\le\frac{1}{5}$，所以$2< f(x)\le\frac{11}{5}$，

当$x<0$时，$x+\frac{4}{x}\le -4$，则$-\frac{1}{3}\le\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}<0$，所以$\frac{5}{3}\le f(x)< 2$，

综上所述，函数$f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$在$x\in\mathrm{R}$上的值域是$[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$.

故答案为：$[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$

【注】或用判别式法求解。

18.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，且$y=f(x)$的图象关于直线$x=2$对称.

(1)证明：$f(x)$是周期函数.

(2)若当$x\in[-2,2]$时，$f(x)=x^2+x^{-2}$，求当$x\in[2,6]$时，$f(x)$的解析式.

【答案】(1)证明见解析　　(2) $f(x)=(x-4)^2+(x-4)^{-2}$，$x\in[2,6]$

【详解】(1) 由函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=2$对称，

所以$f(x+2)=f(2-x)$，即有$f(-x)=f(x+4)$，

又函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，有$f(-x)=f(x)$，

所以$f(x+4)=f(-x)=f(x)$，

即$f(x)$是周期为4的周期函数;

(2) 当$x\in[-2,2]$时，$f(x)=x^2+x^{-2}$，又$f(x)$是周期为4的周期函数，

当$x\in[2,6]$，则$x-4\in[-2,2]$，

所以$f(x)=f(x-4)=(x-4)^2+(x-4)^{-2}$

所以$f(x)=(x-4)^2+(x-4)^{-2}$，$x\in[2,6]$

19. **(本题满分14分，第1小题满分6分，第2小题满分8分)**

已知函数$f(x)=x-2$，$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$.

(1)若对任意$x\in\mathbf{R}$，不等式$g(x)>f(x)$恒成立，求m的取值范围;

(2)若对任意$x_1\in[1,2]$，存在$x_2\in[3,4]$，使得$g(x_1)=f(x_2)$，求m的取值范围.

【答案】(1)$\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2},\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2)$[-1,0)$

【详解】(1) $mx^2-2mx+1>x-2\Rightarrow mx^2-(2m+1)x+3>0$，$m\neq 0$，

需满足$\begin{cases}m>0\\ \Delta=(2m+1)^2-12m<0\end{cases}$，解得$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$，

故m的取值范围为$\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{2},\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2) 对任意$x_1\in[1,2]$，存在$x_2\in[3,4]$，使得$g(x_1)=f(x_2)$，

故$f(x)=x-2$在$x\in[3,4]$上的值域包含$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$在$x\in[1,2]$上的值域，

其中$x\in[3,4]$时，$f(x)=x-2\in[1,2]$，

$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$的对称轴为$x=1$，

若$m>0$，则$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$在$x\in[1,2]$上单调递增，

故$g(x)\in[g(1),g(2)]=[-m+1,1]$，

但$[-m+1,1]$不会是$[1,2]$的子集，舍去；

当$m<0$时，则$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$在$x\in[1,2]$上单调递减，

故$g(x)\in[g(2),g(1)]=[1,-m+1]$，

$[1,-m+1]$是$[1,2]$的子集，则$1<-m+1\le 2$，解得$-1\le m<0$，

综上，m的取值范围是$[-1,0)$.

20．**(本题满分18分，第1小题满分4分，第2小题满分6分，第3小题满分8分)**

若函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的值域恰为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$，则称区间$[a,b]$为$f(x)$的一个“倒域区间”.

已知定义在$[-2,2]$上的奇函数$g(x)$，当$x\in[0,2]$时，$g(x)=-x^2+2x$.

(1)求$g(x)$的解析式；

(2)若关于x的方程$g(x)=-mx-m$在$(0,2)$上恰有两个不相等的根，求m的取值范围；

(3)求函数$g(x)$在定义域内的所有“倒域区间”.

【答案】

(1)$g(x)=\begin{cases}-x^2+2x,0\le x\le 2,\\ x^2+2x,-2\le x<0.\end{cases}$

(2)$2\sqrt{3}-4<m<0$

(3)$\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$和$\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right]$

【详解】(1) 当$x\in[-2,0)$时，则$-x\in(0,2]$，

由奇函数的定义可得$g(x)=-g(-x)=-\left[-(-x)^2+2(-x)\right]=x^2+2x$，

所以$g(x)=\begin{cases}-x^2+2x,0\le x\le 2,\\ x^2+2x,-2\le x<0.\end{cases}$.

(2) 方程$g(x)=-mx-m$即$x^2-(m+2)x-m=0$，设$h(x)=x^2-(m+2)x-m,0<x<2$，

由题意知$\begin{cases}h(0)=-m>0\\ h(2)=-3m>0\\ \Delta=(m+2)^2+4m>0\\ 0<\frac{m+2}{2}<2\end{cases}$，解得$2\sqrt{3}-4<m<0$.

(3) 因为$g(x)$在区间$[a,b]$上的值域恰为$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$,

其中$a\neq b$且$a\neq 0,b\neq 0$，所以$\begin{cases}a<b\\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}\end{cases}$，则$\begin{cases}a<b\\ ab>0\end{cases}$，

所以$0<a<b\le 2$或$-2\le a<b<0$．

①当$0<a<b\le 2$时，因为函数$g(x)$在$[0,1]$上单调递增，在$[1,2]$上单调递减,

故当$x\in[0,2]$时，$g(x)_{\max}=g(1)=1$，则$\frac{1}{a}\le 1$，所以$1\le a<2$，所以$1\le a<b\le 2$，

则$\begin{cases}g(b)=-b^2+2b=\frac{1}{b}\\ g(a)=-a^2+2a=\frac{1}{a}\\ 1\le a<b\le 2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$，

所以$g(x)$在$[1,2]$内的“倒域区间”为$\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$；

②当$-2\le a<b<0$时，$g(x)$在$[-2,-1]$上单调递减，在$[-1,0]$上单调递增,

故当$x\in[-2,0]$时，$g(x)_{\min}=g(-1)=-1$，所以$\frac{1}{b}\ge -1$，所以$-2<b\le -1$，所以$-2\le a<b\le -1$，

则$\begin{cases}g(a)=a^2+2a=\frac{1}{a}\\ g(b)=b^2+2b=\frac{1}{b}\\ -2\le a<b\le -1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ b=-1\end{cases}$，

所以$g(x)$在$[-2,-1]$内的“倒域区间”为$\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right]$.

综上所述，函数$g(x)$在定义域内的“倒域区间”为$\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$和$\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right]$.

21. (本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分)

设$f(x)$是定义在D上的函数，若对任何实数$\alpha\in(0,1)$以及D中的任意两数x_1,x_2,恒有$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，则称$f(x)$为定义在D上的$\mathbb{C}$函数。

(1) 判断函数$f_1(x)=x^2,f_2(x)=\frac{1}{x}\ (x<0)$中哪些是各自定义域上的$\mathbb{C}$函数,并说明理由。

(2) 已知$f(x)$是$\mathbb{R}$上的$\mathbb{C}$函数，m是给定的正整数，设$a_n=f(n)$，$n=0,1,2,\cdots,m$，且

$a_0=0$，$a_m=2m$，记$S_f=a_1+a_2+\cdots+a_m$，对于满足条件的任意函数$f(x)$，试求S_f的最大值。

(3)若$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数，且最小正周期为T，试证明$f(x)$不是$\mathbb{R}$上的$\mathbb{C}$函数。

【详解】

(1) $f_1(x)=x^2$ 是C函数，证明如下：

对于任意实数x_1，x_2，及$\alpha\in(0,1)$，有：$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)-\alpha f(x_1)-(1-\alpha)f(x_2)=(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)^2-\alpha {x_1}^2-(1-\alpha){x_2}^2=-\alpha(1-\alpha)(x_1-x_2)^2\le 0$

即：$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，所以$f_1(x)=x^2$ 是C函数．

$f_2(x)=\frac{1}{x}$ $(x<0)$ 不是C函数，证明如下：

反例：取$x_1=-3$，$x_2=-1$，$\alpha=\frac{1}{2}$，有：$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)-\alpha f(x_1)-(1-\alpha)f(x_2)=f(-2)-\frac{1}{2}f(-3)-\frac{1}{2}f(-1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}>0$

即：$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)>\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$，所以$f_2(x)=\frac{1}{x}$ $(x<0)$ 不是C函数．

(2) 对任意 $0\le n\le m$，取$x_1=m$，$x_2=0$，$\alpha=\frac{n}{m}\in[0,1]$

因为 $f(x)$是$\mathbb{R}$上的C函数，$a_n=f(n)$，且$a_0=0$，$a_m=2m$，

则：$a_n=f(n)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)=\frac{n}{m}\times 2m=2n$

那么：$S_f=a_1+a_2+\ldots+a_m\le 2\times(1+2+\ldots+m)=m^2+m$

可证$f(x)=2x$是C函数，且使得$a_n=2n$，$n=0, 1, 2, \ldots, m$都成立，此时$S_f=m^2+m$．

综上所述，S_f的最大值为m^2+m．

(3) 反证法：假设 $f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的C函数．

若存在 $m<n$,且 m，$n\in[0,T)$，使得 $f(m)\ne f(n)$．

若 $f(m)<f(n)$，记$x_1=m$，$x_2=m+T$，$\alpha=1-\frac{n-m}{T}$，则 $0<\alpha<1$，且 $n=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$．

则有：$f(n)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)=\alpha f(m)+(1-\alpha)f(m+T)=f(m)$，与 $f(m)<f(n)$矛盾．

若 $f(m)>f(n)$，记$x_1=n$，$x_2=n-T$，$\alpha=1-\frac{n-m}{T}$ 类似可得矛盾．

所以 $f(x)$在$[0,T)$上是常函数，又因为 $f(x)$是周期为 T 的周期函数，所以 $f(x)$是$\mathbb{R}$上的常函数，与 $f(x)$最小正周期为 T 矛盾．

因此，假设不成立，$f(x)$不是$\mathbb{R}$上的C函数．

21.(2).

取$x_1=m$，$x_2=0$，$\alpha=\frac{n}{m}$，$n\in\{0,1,2,\cdots,m\}$.

得到$f(\frac{n}{m}\cdot m+(1-\frac{n}{m})\cdot 0)\le\frac{n}{m}f(m)+(1-\frac{n}{m})f(0)$.

即$a_n\le\frac{n}{m}a_m+(1-\frac{n}{m})a_0$.

即$a_n\le 2n$.

故$S_f=\sum_{n=1}^{m}a_n\le\sum_{n=1}^{m}2n=m(m+1)$.

令$f(x)=2x$. $\forall x_1,x_2\in R$，$\alpha\in(0,1)$. 都有$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$.

即$f(x)$为R上的C函数，且$a_n=f(n)=2n$. 此时$S_f=m(m+1)$

故S_f的最大值为$m(m+1)$.

假设 $f(x)$ 是 R 上的 C 函数.

对于 $\forall x\in R$, $f(x)=f(x+T)$.

取 $x_1=x$, $x_2=T$, $\alpha=\frac{1}{2}$.

则 $f(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x+T))\le\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x+T)$

即 $f(x+\frac{T}{2})\le f(x)$

$\therefore f(x+T)\le f(x+\frac{T}{2})$

$\therefore f(x)=f(x+T)=f(x+\frac{T}{2})$

$\therefore \frac{T}{2}$ 也是 $f(x)$ 的一个正周期.

而 T 为 $f(x)$ 的最小正周期.

矛盾.

$\therefore$ 得证.

【答案】$\left(0,\frac{2}{5}\right]$

【详解】因为$\sqrt{x^2+4}\ge 2$，所以$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2+5}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{(x^2+4)+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}$， 2′

令$y=t+\frac{1}{t}(t\ge 2)$，根据对勾函数的单调性可知$y=t+\frac{1}{t}$在$[2,+\infty)$上单调递增，4′

所以$y\ge 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，所以$\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ge\frac{5}{2}$，所以$0<\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}\le\frac{2}{5}$，

所以$f(x)$的值域为$\left(0,\frac{2}{5}\right]$ 7′

（2）$f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$

【答案】$[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$

【详解】函数$f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}=\frac{2(x^2+x+4)+x}{x^2+x+4}=2+\frac{x}{x^2+x+4}$， 2′

当$x=0$时，$f(x)=2$； 3′

当$x\ne 0$时，$f(x)=2+\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}$，

根据对勾函数的性质可知：

当$x>0$时，$x+\frac{4}{x}\ge 4$，则$0<\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}\le\frac{1}{5}$，所以$2< f(x)?\ \frac{11}{5}$， 5′

当$x<0$时，$x+\frac{4}{x}\le -4$，则$-\frac{1}{3}\le\frac{1}{x+\frac{4}{x}+1}<0$，所以$\frac{5}{3}?\ f(x)\quad 2$，

综上所述，函数$f(x)=\frac{2x^2+3x+8}{x^2+x+4}$在$x\in\mathrm{R}$上的值域是$[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$.

故答案为：$[\frac{5}{3},\frac{11}{5}]$ 7′

20.

18、(1) 由函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称

所以 $f(-x)=f(x+4)$ …… 2分

又函数 $f(x)$ 是定义在R上的偶函数

所以 $f(-x)=f(x)$ …… 2分

所以 $f(x+4)=f(-x)=f(x)$

即 $f(x)$ 是周期为4的周期函数. …… 2分

(2) 当 $x\in[-2,2]$ 时，$f(x)=x^2+x^4$，

又 $f(x)$ 是周期为4的周期函数.

当 $x\in[2,6]$，则 $x-4\in[-2,2]$，

所以 $f(x-4)=(x-4)^2+(x-4)^4$ …… 4分

又 $f(x-4)=f(x)$

所以 $f(x)=(x-4)^2+(x-4)^4$，$x\in[2,6]$ …… 4分

19. **（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）**

已知函数 $f(x)=x-2$， $g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$．

对 $x=1$

(1)若对任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $g(x)>f(x)$ 恒成立，求 m 的取值范围；

(2)若对任意 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[3,4]$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$，求 m 的取值范围．

【答案】(1)$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$　　(2)$[-1,0)$

【详解】（1）$mx^2-2mx+1>x-2\Rightarrow mx^2-(2m+1)x+3>0$， $m\neq 0$，

2′　答案对，没写 $m>0$，也扣 2 分

需满足 $\begin{cases}m>0\\ \Delta=(2m+1)^2-12m<0\end{cases}$，2′ 解得 $\frac{2-\sqrt{3}}{2}<m<\frac{2+\sqrt{3}}{2}$， 2′

故 m 的取值范围为 $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$.

（2）对任意 $x_1\in[1,2]$，存在 $x_2\in[3,4]$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$，

故 $f(x)=x-2$ 在 $x\in[3,4]$ 上的值域包含 $g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$ 在 $x\in[1,2]$ 上的值域， 2′　最后答案对，没写这句不扣分　$A_g\subseteq A_f$

其中 $x\in[3,4]$ 时， $f(x)=x-2\in[1,2]$， 1′

$g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$ 的对称轴为 $x=1$，

1° 若 $m>0$，则 $g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递增，

故 $g(x)\in[g(1),g(2)]=[-m+1,1]$，

但 $[-m+1,1]$ 不会是 $[1,2]$ 的子集，舍去； 2′

2° 当 $m<0$ 时，则 $g(x)=mx^2-2mx+1(m\in\mathbf{R},m\neq 0)$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递减，

故 $g(x)\in[g(2),g(1)]=[1,-m+1]$，

$[1,-m+1]$ 是 $[1,2]$ 的子集，则 $1<-m+1\leq 2$，解得 $-1\leq m<0$， 2′

综上，m 的取值范围是 $[-1,0)$. 1′

20 题【详解】(1) 当 $x\in[-2,0)$ 时，则 $-x\in(0,2]$，

由奇函数的定义可得 $g(x)=-g(-x)=-\left[-(-x)^2+2(-x)\right]=x^2+2x$，3 分

所以 $g(x)=\begin{cases}-x^2+2x,0\le x\le 2,\\ x^2+2x,-2\le x<0.\end{cases}$. 1 分

(2) 方程 $g(x)=-mx-m$ 即 $x^2-(m+2)x-m=0$，设 $h(x)=x^2-(m+2)x-m,0<x<2$ 2 分

由题意知 $\begin{cases}h(0)=-m>0\\ h(2)=-3m>0\\ \Delta=(m+2)^2+4m>0\\ 0<\dfrac{m+2}{2}<2\end{cases}$，解得 $2\sqrt{3}-4<m<0$. 2 分

2 分

方法二：参变分离（参变分离给 1 分，换元设 T 写成耐克函数 2 分，分析单调性 1 分 4 分+结果 2 分）

(3)

因为 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域恰为 $\left[\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{a}\right]$，

答案对，只要过程差不多，可以给满分的。
答案不对，分析出 ab 要同号可以给 1 分，判断出 a 要小于等于-1 或大于等于 1 可以给 1 分.

其中 $a\ne b$ 且 $a\ne 0,b\ne 0$，所以 $\begin{cases}a<b\\ \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}\end{cases}$，则 $\begin{cases}a<b\\ ab>0\end{cases}$，

所以 $0<a<b\le 2$ 或 $-2\le a<b<0$. 1 分

①当 $0<a<b\le 2$ 时，因为函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，在 $[1,2]$ 上单调递减，

故当 $x\in[0,2]$ 时，$g(x)_{\max}=g(1)=1$，则 $\dfrac{1}{a}\le 1$，所以 $1\le a<2$，所以 $1\le a<b\le 2$，

则 $\begin{cases}g(b)=-b^2+2b=\dfrac{1}{b}\\ g(a)=-a^2+2a=\dfrac{1}{a}\\ 1\le a<b\le 2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$，

所以 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 内的“倒域区间”为 $\left[1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$；3 分（过程对，结果错，扣 2 分）

②当 $-2\le a<b<0$ 时，$g(x)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递减，在 $[-1,0]$ 上单调递增，

故当 $x\in[-2,0]$ 时，$g(x)_{\min}=g(-1)=-1$，所以 $\dfrac{1}{b}\ge -1$，所以 $-2<b\le -1$，所以 $-2\le a<b\le -1$，

则$\begin{cases} g(a)=a^2+2a=\dfrac{1}{a} \\ g(b)=b^2+2b=\dfrac{1}{b} \\ -2\le a<b\le -1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ b=-1 \end{cases}$，

3 分（过程对，结果错，扣 2 分）
直接由奇函数对称性得到另外一半区间给 3 分）

所以$g(x)$在$[-2,-1]$内的"倒域区间"为$\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right]$.

综上所述，函数$g(x)$在定义域内的"倒域区间"为$\left[1,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$和$\left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right]$.

综上，1 分

21题评分标准：
第一问：两个函数判断各2分
第二问：举出例子并算出最大值给3分，最大值的证明给3分。（如果是画出下凸函数的草图，然后用大量文字说明的话，也只给举例的3分吧）
第三问：证明过程中有“ 反证法?判断出常值函数?与最小正周期矛盾 ”的结构可以给4分左右，中间关于常值函数的证明如果完全正确给满分。其他酌情扣分～