10.19 解析

3. 若集合 $A=\left\{x \mid ax^2+x+1=0, x\in\mathbf{R}\right\}$，且A中只有一个元素，则 $a=$________；

【答案】0或 $\frac{1}{4}$

4. 用反证法证明“自然数 a，b，c 中至多有一个偶数”时，假设应为_______.

【答案】a，b，c 中至少有两个偶数

5. 若集合 $A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-1}{x-2}=1\right.\right\}$，$B=\left\{(x,y)\middle|y=x^2-2x+1\right\}$，则 $A\cap B=$____.

【答案】$\{(1,0)\}$

6. 1.5

8.设集合 $M=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|x=\frac{k\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，则 M、N 之间的关系为

M ________ N.

【答案】$\subset$

9. 若集合 $A=\left\{x\mid\left|x^2+ax+b\right|=2,a,b\in R\right\}$ 中有且只有3个元素，且这3个元素恰为直角三角形的三边，则 $4a+b=$________.

【答案】-2

【详解】由 $\left|x^2+ax+b\right|=2$ 得 $x^2+ax+b=2$ 或 $x^2+ax+b=-2$，

方程 $x^2+ax+b-2=0$ 的判别式为 $\Delta_1=a^2-4(b-2)=a^2-4b+8$，

方程 $x^2+ax+b+2=0$ 的判别式为 $\Delta_2=a^2-4(b+2)=a^2-4b-8$，

显然 $\Delta_1>\Delta_2$，

又集合 $A=\left\{x\mid\left|x^2+ax+b\right|=2,a,b\in R\right\}$ 中有且只有3个元素，

所以方程 $x^2+ax+b-2=0$ 和 $x^2+ax+b+2=0$ 共三个根，

且只能方程 $x^2+ax+b-2=0$ 有两个根，方程 $x^2+ax+b+2=0$ 有一个根；

即 $\begin{cases}a^2-4b+8>0\\a^2-4b-8=0\end{cases}$，即 $b=\frac{1}{4}a^2-2$；

所以方程 $x^2+ax+b-2=0$ 可化为 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2-4=0$，解得 $x=2-\frac{a}{2}$ 或 $x=-2-\frac{a}{2}$，

方程 $x^2+ax+b+2=0$ 可化为 $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2=0$，解得 $x=-\frac{a}{2}$，

则 $2-\frac{a}{2}>-\frac{a}{2}>-2-\frac{a}{2}$，

又这三个元素恰为直角三角形的三边，所以 $\begin{cases}\left(2-\frac{a}{2}\right)^2=\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-2-\frac{a}{2}\right)^2\\ -\frac{a}{2}>0\\ 2-\frac{a}{2}>0\\ -2-\frac{a}{2}>0\end{cases}$，

解得 $a=-16$，

则 $b=\frac{1}{4}a^2-2=62$，因此 $4a+b=-2$.

故答案为：-2.

10. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{x-a}{x-1+a}<0\\ x+3a>1\end{cases}$ 的整数解恰好有两个，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$(1,2]$

【详解】由 $\begin{cases}\frac{x-a}{x-1+a}<0\\ x+3a>1\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}(x-a)\left[x-(1-a)\right]<0\\ x>1-3a\end{cases}$，

当 $a\le 0$ 时，$a<1-a\le 1-3a$，原不等式组无解，不符合题意舍去；

当 $0<a\le\frac{1}{4}$ 时，$0<a\le 1-3a<1-a<1$，原不等式组的解集为 $\{a|1-3a<x<1-a\}$，没有两个整数解，不符合题意舍去；

当 $\frac{1}{4}<a\le\frac{1}{2}$ 时，$-\frac{1}{2}\le 1-3a<a\le 1-a<1$，原不等式组的解集为 $\{a|a<x<1-a\}$，没有两个整数解，不符合题意舍去；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$1-3a<1-a<a$，原不等式组的解集为 $\{a|1-a<x<a\}$，

因为原不等式组的解集中恰好有两个整数解，

所以这两个整数解为 $0,1$，所以$\begin{cases}-1\le 1-a<0\\ 1<a\le 2\end{cases}$，解得$1<a\le 2$，

综上所述，实数a的取值范围是$(1,2]$.

故答案为：$(1,2]$.

11.已知正实数x，y，z满足$x^2+xy+yz+xz+x+z=6$，则 $3x+2y+z$的最小值是______.

【答案】$4\sqrt{3}-2$

【详解】因为x,y,z为正实数，

故$x^2+xy+yz+xz+x+z=6\Rightarrow(x^2+xz)+(xy+yz)+(x+z)=6$，

即$x(x+z)+y(x+z)+(x+z)=6\Rightarrow(x+y+1)(x+z)=6\Rightarrow x+z=\frac{6}{x+y+1}$，

$3x+2y+z=2(x+y)+(x+z)=2(x+y)+\dfrac{6}{x+y+1}$

$=2(x+y+1)+\frac{6}{x+y+1}-2\ge 2\sqrt{2(x+y+1)\cdot\frac{6}{x+y+1}}-2=4\sqrt{3}-2$，

当且仅当 $2(x+y+1)=\frac{6}{x+y+1}$，即$x+y=\sqrt{3}-1$，此时$x+z=\frac{6}{x+y+1}=2\sqrt{3}$，

所以 $3x+2y+z$的最小值为 $4\sqrt{3}-2$.

故答案为：$4\sqrt{3}-2$

12. 对于数集$X=\{-1,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\}$，其中$0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n,n\ge 2$，定义点集$Y=\{(s,t)\mid s\in X,t\in X\}$，若对于任意$(s_1,t_1)\in Y$，存在$(s_2,t_2)\in Y$，使得$s_1s_2+t_1t_2=0$，则称集合$X$具有性质$P$.则下列命题中为真命题的是__________.

①$X=\{-1,1,2\}$具有性质P；

②若集合X具有性质P，则$1\in X$；

③集合X具有性质P，若$x_1=\dfrac{1}{2}$，则$x_n=1$.

【答案】①②③

【详解】因为$X=\{-1,1,2\}$，所以

$Y=\{(-1,-1),(1,1),(2,2),(-1,1),(-1,2),(1,-1),(1,2),(2,-1),(2,1)\}$，

根据集合 X 具有性质 P 的定义，对于任意 $(s,t)\in Y$，

若 $s>0,t>0$，则 $s=t$ 或 $(s,t)=(1,2)$，或 $(s,t)=(2,1)$，

若 $s=t$，取 $s_2=-1,t_2=-1$，则 $ss_2+tt_2=0$；

若 $(s,t)=(1,2)$，取 $s_2=2,t_2=-1$，则 $ss_2+tt_2=0$；

若 $(s,t)=(2,1)$，取 $s_2=-1,t_2=2$，则 $ss_2+tt_2=0$；

若 s,t 有一个为负数，则 $s=-1$ 或 $t=-1$，

若 $s=-1$，则取 $s_2=t,t_2=1$，则 $ss_2+tt_2=0$；

若 $t=-1$，则取 $s_2=1,t_2=s$，则 $ss_2+tt_2=0$；

故①正确；

对于任意 $(s_1,t_1)\in Y$，存在 $(s_2,t_2)\in Y$，使得 $s_1s_2+t_1t_2=0$

取 $(x_1,x_1)\in Y$，存在 (x_p,x_q) 使得 $x_1x_p+x_1x_q=0$，所以 $x_p+x_q=0$，

不妨设 $x_p=1,x_q=-1$，所以若集合 X 具有性质 P，则 $1\in X$，故②正确；

③假设 $x_n>1$，令 $s_1=\frac{1}{2},t_1=x_n$，则存在 $s,t\in X$ 使得 $\frac{1}{2}s+tx_n=0$，

同②得 s,t 中必有一个数为 -1，

若 $s=-1$，则 $tx_n=\frac{1}{2}$，于是 $t=\frac{1}{2x_n}<\frac{1}{2}=x_1$，矛盾，

若 $t=-1$，则 $\frac{1}{2}s=x_n\cdot(-1)$，于是 $s=2x_n>x_n$，也矛盾，

所以 $x_n\le 1$，又由②得 $1\in X$，所以 $x_n\ge 1$，所以 $x_n=1$，故③正确，

故真命题是①②③正确.

故答案为：①②③.

陈述句“$x>1$ 或 $y>1$”的否定形式是（　　）.

A. $x>1$ 且 $y>1$　　B. $x<1$ 且 $y<1$

C. $x\le 1$ 且 $y\le 1$　　D. $x\le 1$ 或 $y\le 1$

【答案】C

【解析】

【分析】根据命题的否定的概念求解即可.

【详解】“$x>1$或$y>1$”的否定形式是：$x\le 1$且$y\le 1$.

故选：C

已知$a\in \mathrm{R}$，且$a\ne 0$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$　　B. $a^2+3+\frac{4}{a^2+3}>4$

C. $a^2+1>2|a|$　　D. $\frac{1}{1+a^2}>1$

【答案】B

【解析】

【分析】对于ACD，取特殊值可判断；对于B，利用基本不等式可判断.

【详解】对于A，令$a=-1$，则$a+\frac{1}{a}=-2<2$，A错；

对于B，$a^2+3+\frac{4}{a^2+3}\ge 2\sqrt{\left(a^2+3\right)\cdot\frac{4}{a^2+3}}=4$，

当且仅当$a^2+3=\frac{4}{a^2+3}$时，等号成立，但$a^2+3=\frac{4}{a^2+3}$无实数解，等号不成立，

所以$a^2+3+\frac{4}{a^2+3}>4$，B对；

对于C，令$a=1$，则$a^2+1=2,2|a|=2$，C错；

对于D，令$a=1$，则$\frac{1}{1+a^2}=\frac{1}{2}<1$，D错.

故选：B.

13. 已知a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2均为非零实数，不等式$a_1x^2+b_1x+c_1>0$和$a_2x^2+b_2x+c_2>0$的解集分别为集合M和N，且$\varnothing\subset M\subset \mathrm{R}$，$\varnothing\subset N\subset \mathrm{R}$．那么“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的（　　）.

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分又非必要条件

【答案】B

14. 下面命题错误的是（　　）

A. “$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件

B. “$m<0$”是“二次方程$x^2+(m-3)x+m=0$有一正根一负根”的充要条件

C. “$x\le1$且$y\le1$”是“$x+y\le2$”的充要条件

D. 设$a,b\in\mathbf{R}$，则“$a\ne0$”是“$ab\ne0$”的必要不充分条件

【答案】C

【分析】根据不等式的性质判断ACD的真假；根据一元二次方程根的分布判断B的真假.

【详解】对A：由$a>1$可得$0<\frac{1}{a}<1$，所以$\frac{1}{a}<1$成立，所以“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分条件；由$\frac{1}{a}<1$可得$a<0$或$a>1$，所以“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的不必要条件.

综上可得：“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件，故A正确；

对B：“二次方程$x^2+(m-3)x+m=0$有一正根一负根”等价于“$x_1x_2=m<0$”，故B正确；

对C: 由“$x\le1$且$y\le1$”可得“$x+y\le2$”, 但“$x+y\le2$”时, 如$x=-3$，$y=4$, 此时“$x\le1$且$y\le1$”不成立，故C错误；

对D：因为：$a\ne0$推不出$ab\ne0$，但$ab\ne0\Rightarrow a\ne0$，所以“$a\ne0$”是“$ab\ne0$”的必要不充分条件，所以D正确.

15. 某游泳馆出售冬季学生游泳卡，每张240元，使用规定：不记名，每卡每次只限1人，每天只限1次，某班有48名同学，老师打算组织同学们集体去游泳，除需要购买游泳卡外，每次还要包1辆车，无论乘坐多少名乘客，包车费均为40元，若使每位同学游泳8次，每人需至少交多少钱?

【答案】方法1：设购买x张游泳卡，活动总开支为y元，则购买游泳卡需$240x$元，48名同学每人游8次，共48×8次．但游泳卡只有x张，则每批只有x人参加，共分$\frac{48\times8}{x}$批，故包车费为$\left(\frac{48\times8}{x}\times40\right)$元,

$\therefore y=240x+\frac{48\times8}{x}\times40=240\left(x+\frac{64}{x}\right)$.

$\because x>0$，$\therefore x+\frac{64}{x}\ge2\sqrt{x\cdot\frac{64}{x}}=16$，$\therefore y\ge3\,840$.

当且仅当$x=\frac{64}{x}$，即$x=8$时，取等号.

$3\,840\div48=80$(元)．$\therefore$每人需至少交80元.

方法 2：设分 n 批去游泳，活动总开支为 y 元，则包车费为 $40n$ 元，

每批去$\frac{48\times8}{n}$人，需购买游泳卡$\frac{48\times8}{n}$张.

$\because n>0$，$\therefore y=40n+\frac{48\times8}{n}\times240=40\left(n+\frac{48^2}{n}\right)\geq40\times2\sqrt{48^2}=40\times2\times48=3\ 840$，

当且仅当 $n=\frac{48^2}{n}$，即 $n=48$ 时，取等号.3 840÷48＝80(元).

$\therefore$每人需至少交 80 元.

16. 设集合 $A=\left\{x\middle|x^2-3x+2=0\right\},B=\left\{x\middle|x^2+2\left(a+1\right)x+\left(a^2-5\right)=0\right\}$；

（1）若 $A\cap B=\{2\}$，求实数 a 的值；

（2）若 B 集合中有两个元素 x_1,x_2，求 $\left|x_1-x_2\right|$；

（3）若 $U=\mathbf{R},B\cap\overline{A}=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

【答案】（1）-1 或 -3

（2）$\sqrt{8a+24}$

（3）$a\leq-3$

【小问 1 详解】

由题意得 $A=\left\{x\middle|x^2-3x+2=0\right\}=\{1,2\}$，因为 $A\cap B=\{2\}$，所以 $2\in B$，

所以 $2^2+4(a+1)+a^2-5=0$ 即 $4+4a+4+a^2-5=0$，

化简得 $a^2+4a+3=0$，即 $(a+3)(a+1)=0$，解得 $a=-3$ 或 $a=-1$，

检验：当 $a=-3$ 时，$B=\left\{x\middle|x^2-4x+4=0\right\}=\{2\}$，满足 $A\cap B=\{2\}$，

当 $a=-1$ 时，$B=\left\{x\middle|x^2-4=0\right\}=\{-2,2\}$，满足 $A\cap B=\{2\}$，所以 $a=-3$ 或 $a=-1$.

【小问 2 详解】

因为 B 集合中有两个元素 x_1,x_2，所以方程 $x^2+2\left(a+1\right)x+\left(a^2-5\right)=0$ 有两个根，

所以 $\Delta=4(a+1)^2-4\left(a^2-5\right)=8a+24>0$ 且 $x_1+x_2=-2(a+1)$，$x_1x_2=a^2-5$，

所以 $\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4(a+1)^2-4\left(a^2-5\right)}=\sqrt{8a+24}$.

【小问 3 详解】

因为 $A=\{1,2\}$，且 $U=\mathbf{R},B\cap\overline{A}=\varnothing$，

当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=4(a+1)^2-4\left(a^2-5\right)=8a+24<0$，解得 $a<-3$，符合题意；

当 $B=\{1\}$ 时，则 $\begin{cases}\Delta=4\left(a+1\right)^2-4\left(a^2-5\right)=8a+24=0\\1^2+2\left(a+1\right)+\left(a^2-5\right)=0\end{cases}$，无解；

当 $B=\{2\}$ 时，则 $\begin{cases}\Delta=4\left(a+1\right)^2-4\left(a^2-5\right)=8a+24=0\\2^2+4\left(a+1\right)+a^2-5=0\end{cases}$，所以 $a=-3$；

当 $B=\{1,2\}$ 时，则 $\begin{cases}\Delta=4\left(a+1\right)^2-4\left(a^2-5\right)=8a+24>0\\1+2=-2\left(a+1\right)\\2=a^2-5\end{cases}$，无解；

综上，$a\le -3$．

18.已知函数 $f\left(x\right)=\left|2x-1\right|+\left|2x+a\right|$，$g\left(x\right)=x+3$．

（1）当 $a=-2$ 时，求不等式 $f\left(x\right)<g\left(x\right)$ 的解集；

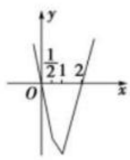
（2）设 $a>-1$，且当 $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$f\left(x\right)\le g\left(x\right)$，求 a 的取值范围.

(1)当 $a=-2$ 时，不等式 $f(x)<g(x)$ 化为 $|2x-1|+|2x-2|-x-3<0$.

设函数 $y=|2x-1|+|2x-2|-x-3$，

则 $y=\begin{cases}-5x，x<\frac{1}{2}，\\-x-2，\frac{1}{2}\le x\le 1，\\3x-6，x>1，\end{cases}$

其图象如图所示，由图象可知，当且仅当 $x\in(0,2)$ 时，$y<0$，所以原不等式的解集是 $\{x|0<x<2\}$.



(2)当 $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时，$f(x)=1+a$，

不等式 $f(x)\le g(x)$ 化为 $1+a\le x+3$，

所以 $x\ge a-2$ 对 $x\in\left[-\frac{a}{2},\frac{1}{2}\right)$ 都成立，故 $-\frac{a}{2}\ge a-2$，即 $a\le\frac{4}{3}$.

从而 a 的取值范围是 $\left(-1,\frac{4}{3}\right]$.