

基于网格化处理与遍历搜索算法的多波束测深模型

摘 要

本文研究多波束测深问题,通过研究测线间隔、海水深度等参数之间的几何关系,推导了多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间重叠率的数学公式,建立了最短布线优化模型,并通过**网格化处理**和使用**遍历搜索法**进行求解,为实际船测量布线提供了理论参考。

对于问题一,根据海底坡面的坡角与三角函数关系计算出不同位置海水深度。将多波束测深的覆盖宽度分为左右两个部分,利用**正弦定理**分别计算出这两个部分长度,再将两者相加得到整个覆盖宽度。根据题中平坦地区重叠率的公式,**定义地面不平坦时的重叠率**。将题中所给开角、坡度、海水深度数据代入相应公式,通过 MATLAB 编程求解海水深度、覆盖宽度、重叠率。(计算结果见正文表 1)

对于问题二,首先建立空间直角坐标系,根据坡角求出坡面方程和坡面法向量,并通过测线方向夹角 β 求出测线的方向向量。测线方向向量与坡面法向量叉乘可得覆盖宽度方向向量,利用**线面角公式**求得覆盖宽度与水平面夹角。将船横纵坐标代入坡面方程,计算出相应位置的海水深度。沿用问题一推导的覆盖宽度计算公式,以船距离海域中心点距离和测线方向夹角 β 为自变量,建立求解覆盖宽度的数学模型。(计算结果见正文表 2)

对于问题三,将待求海域**网格化**,定义多波束扫过面积与船行驶距离之比为**测线覆盖效率**。通过模拟船在任意位置行驶固定长度,得出测线覆盖效率与船行驶角度的函数关系式,推导出**当测线与海水等深线平行时覆盖效率最大**。为了使测线总长度最小,同时又要覆盖整个海域,以测线离原点的距离为自变量,以测线之间的间距最大为目标函数,建立**目标规划模型**,采用**遍历搜索法**逐步增加间隔长度,并满足约束条件,求解出各条测线间的最优间隔。设计共有 **34** 条平行于海水等深线的测线,最小总长度为 **125936m (68 海里)**。

对于问题四,先采用**克里格插值法**将附件中离散数据连续化,便于求出各个坐标的海水深度。再设计一种沿等深线运动且与海域对角线对称的测线。以测线方向夹角和测线起点为自变量,建立以漏测面积、坡度变化量为目标的**多目标规划模型**,求解出相对较优的初始测线。最后以测线间间距最大为目标函数,重叠率和漏测面积为约束条件,建立求解间距的**目标规划模型**,利用**遍历搜索法**计算结果,得到测线总长度为 **578194.4m**,漏测海区百分比为 **1.365%**,重叠率超过 20% 的长度为 **127192.5m**。

关键词: 目标规划模型 遍历搜索算法 克里格插值法 网格化处理

1 问题重述

1.1 问题背景

目前，多波束测深系统是海底地形和地貌探测的主要设备之一，在探测海洋领域发挥着重要的作用。在其系统中，覆盖条带的宽度、重叠率和测线的长度对系统测量的效率起着至关重要的作用。覆盖条带宽度 w 随换能器开角 θ 和水深 D 的变化而变化。而重叠率较小，易出现漏测；重叠率较大，测线较长，效率较低。本题要通过机理分析建立相关数学模型，并解决以下问题。

1.2 问题重述

问题一：与测线方向垂直的平面和海底坡面的交线构成一条与水平面夹角为 α 的斜坡(图 1)，要求建立此时多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。若多波束换能器的角 120° ，坡度 1.5° ，海域中心点处的海水深度 70 m，利用上述模型计算题目表 1 内指标值。

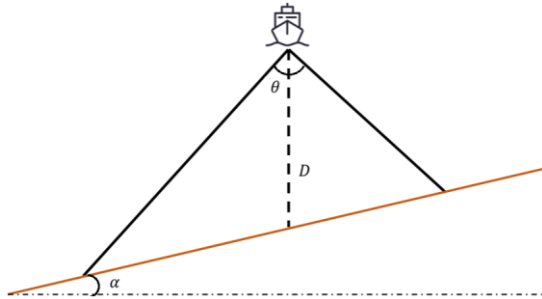


图1 问题 1 的示意图

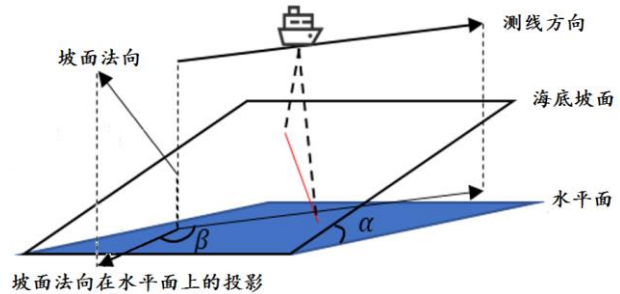


图2 问题 2 的示意图

问题二：矩形待测海域中（图 2），测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 β ，要求建立此时多波束测深覆盖宽度的数学模型。若多波束换能器开角 120° ，坡度 1.5° ，海域中心点处的海水深度 120m，利用上述模型计算题目表 2 内指标值。

问题三：南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，海域中心点处的海水深度为 110 m，西深东浅，坡度为 1.5° ，多波束换能器的开角为 120° 。要求设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足 10%~20% 的要求。

问题四：多波束测量船利用附件中海水深度数据测量布线。要求在设计测线时，满足以下要求：（1）尽可能使沿测线扫描形成的条带覆盖整个待测海域。（2）相邻条带之间的重叠率要控制在 20% 以下。（3）测线的总长度要尽可能短。

设计出具体的测线后，计算以下指标：（1）测线的总长度。（2）漏测海区在总待测海域面积中的百分比。（3）在重叠区域中，重叠率超过 20% 的部分的总长度。

2 问题分析

2.1 问题一的分析

对于求解多波束测深的覆盖宽度，将整个长度以换能器位置垂直向下与坡面交点为分界点，分为左右两个部分。整个多束波三角形也被分为左右两个小三角形。

因为两个小三角形上方顶角为换能器开角一半，左右两个顶角可以根据坡面坡角计算，公共边为该处海水深度，通过海底坡面坡角与三角函数关系可以计算，所以每个小三角形已知一条边长度和其对角、左右两部分覆盖长度的对角。根据正弦定理，分别计算出这两个部分长度。左右两部分之和即为多波束测深的覆盖宽度。

对于求解相邻条带之间重叠率，因为题中只给出平坦地区重叠率的公式，所以需要定义地面不平坦时的重叠率。再将测线距中心点处的距离和海底坡面坡角代入公式即得到重叠率数值。

2.2 问题二的分析

根据题目一，为了建立三维多波束侧身覆盖宽度数学模型，需要求出船体位置处海水深度和此时条带与水平方向夹角。为方便计算，以海域中心垂直向下于海底坡面交点为圆心，坡面法向量在水平面投影为 x 轴，竖直方向为 z 轴，同时垂直于 x 与 z 轴且向右方向为 y 轴，建立空间直角坐标系。为简化计算，将坡面法向量放入 x - z 面，再根据坡角，求得坡面法向量。根据船距中心点长度和测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角，运用三角函数求得船在坐标系中的位置。

对于条带与水平方向夹角：因为条带为多波束平面与海底坡面夹角，且坡面法向垂直坡面，测线垂直多波束平面，所以条带向量为二者向量叉乘。再根据线面角公式便可求得条带与水平方向夹角。

对于船体位置处海水深度：由于面恒过原点，且已知法向量，根据点法式求得坡面方程。代入船体位置 x 、 y 轴坐标求得船体在坡面上的投影。海平面高度与该投影 z 轴数值之差即为船体位置处海水深度。

再根据第一问中多波束测深的覆盖宽度数学模型求得第二问中相应的数学模型。

2.3 问题三的分析

根据题目二，为了在该矩形海域设计符合重叠率要求的最短测线，需要确定船行驶角度与测线间隔。为了方便采集数据以及计算，将待求海域网格化。

对于最佳行驶角度，为了量化不同测线优劣程度，定义变量测线覆盖效率为多束波扫过面积与船行驶距离之比。当船处于海域中任意位置时，通过模拟计算每个方向情况下行驶固定长度的覆盖效率，得到测线覆盖效率与船行驶角度的函数关系式。覆盖效率值最大时对应的角度即为船行驶角度。

对于相邻测线间距，为了使测线总长度最小的同时又要覆盖整个海域，以测线离原点的距离为自变量，以测线之间的间距最大为目标函数，建立目标规划模型。通过比较覆盖长度左右部分分别与距左右边界距离在斜坡投影长度确定起止测线。因为重叠越小，间隔越大，条数越少，总测量长度越短。所以再重叠率尽可能接近 10% 条件下，采用遍历搜索法逐步增加间隔长度，求解出最优间隔。

2.4 问题四的分析

根据第三问结论，由于当测线和等深线平行时测量覆盖效率最高，所以测量布线尽量沿着与等深线平行方向分布。因为克里格插值法可以合理地选择变化函数和半方差函数，满足数据差值准确性和空间一致性，所以用其将附件中离散数据连续化。根据连续后的海水深度数据绘制海水深度图，将该海域依据等深线走向分为两个部分。因为东南角部分等深线成平行分布，测线也平行分布；而非东南角部分等深线分布沿海域对角线近似对称，为使测线覆盖效率最高，设计一种沿等深线运动且与海域对角

线对称的折线测线。

为了计算测线总长度、漏测面积占总面积百分比等参数，以测线方向夹角和测线起点为自变量，建立以漏测面积、坡度变化量为目标的多目标规划模型，求解出相对较优的初始测线。最后以测线间间距最大为目标函数，重叠率和漏测面积为约束条件，建立求解间距的目标规划模型，利用遍历搜索法计算结果，

3 模型假设

- (1) 假设测量船航行过程中船体的晃动对于测量的影响忽略不计。
- (2) 假设研究海域各参数稳定，不会再短时间内发生变动。
- (3) 忽略海域中海水密度不同对多波束测深产生的影响。
- (4) 忽略多波束测深系统中的仪器误差
- (5) 忽略海底不同介质对多波束测深反射的影响。

4 符号说明

符号	说明
D_0	海域中心海水深度
D_i	第 i 根测线处海水深度
L	测线总长度
α	海面坡度
θ	多波束换能器的开角
γ	覆盖线与水平面所形成的夹角
φ	测线与坡面所形成的夹角
η_i	第 i 根测线与第 $i-1$ 根测线覆盖条带的重叠率
$W_{i,1}$	第 i 根测线处靠近坡角部分覆盖宽度
$W_{i,2}$	第 i 根测线处远离坡角部分覆盖宽度
W_i	第 i 根测线多波束产生总的覆盖宽度
β	测线与坡面法向量在水平面投影的夹角
\vec{k}	覆盖线的方向向量
\vec{l}	测线方向向量
l_i	第 i 根测线与第 $i+1$ 根测线之间的距离
ζ	测线覆盖效率
$S_{\text{覆盖}}$	测量船行驶过程中覆盖线所围成的面积
r	测量船行驶距离

5 模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

首先，运用几何知识确定海水深度以及覆盖宽度，其次计算在海底地形不平坦情况下相邻条带的重叠率，最后建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型，并且求解多波束换能器的开角为 120° ，坡度为 1.5° ，海域中心点处的海水深

度为 70 m 时的相关参数。

5.1.1 模型的建立

■ 确定海水深度

已知海域中心点处的海水深度为 70m，通过测线距中心处的距离可以推算出该测线处海水深度。

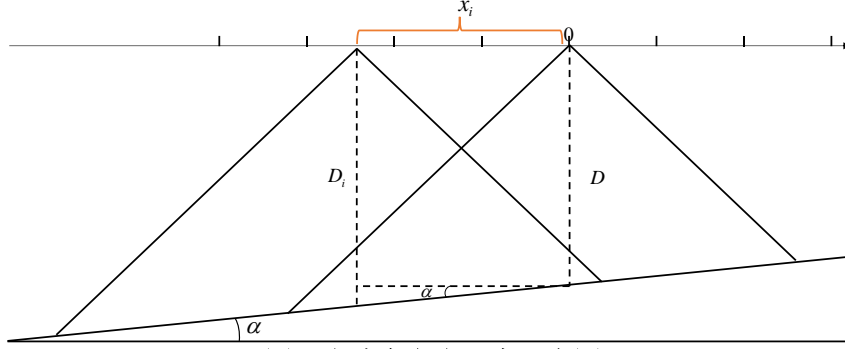


图3 多波束海水深度示意图

在与测线方向垂直的平面中，以海域中心为原点，以远离坡角方向为正方向，建立一维数轴（如图 3 所示）。

根据几何知识，测线海水深度的计算公式如下：

$$D_i = D_0 - x_i \tan \alpha, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

其中， D_0 为海域中心海水深度， D_i 为第 i 根测线处海水深度， x_i 为第 i 根测线与海域中心测线的距离， α 为海面坡度。

■ 确定覆盖宽度

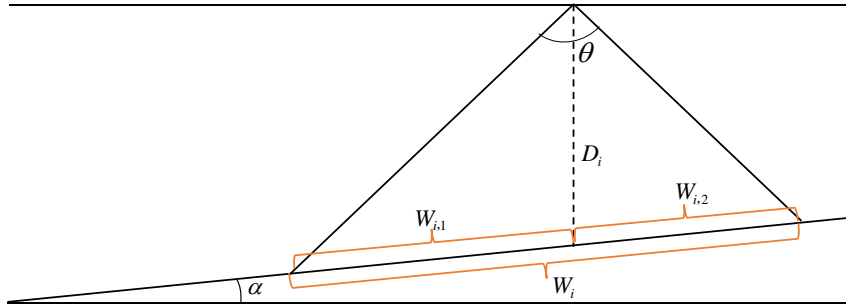


图4 多波束条带覆盖宽度示意图

在多波束条带覆盖所形成的三角形中存在正弦定理（图 4）：

$$\frac{D_i}{\sin\left(90^\circ - \frac{\theta}{2} - \alpha\right)} = \frac{W_{i,1}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (2)$$

$$\frac{D_i}{\sin\left(90^\circ - \frac{\theta}{2} + \alpha\right)} = \frac{W_{i,2}}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (3)$$

其中， D_i 是第 i 根测线处海水深度， $W_{i,1}$ 是第 i 根测线处靠近坡角部分覆盖宽度， $W_{i,2}$ 是第 i 根测线处远离坡角部分覆盖宽度， θ 是多波束换能器的开角。

由式（2）（3）得到多波束覆盖宽度公式：

$$W_i = \sin \frac{\theta}{2} D_i \left(\frac{1}{\sin \left(90^\circ + \alpha - \frac{\theta}{2} \right)} + \frac{1}{\sin \left(90^\circ - \alpha - \frac{\theta}{2} \right)} \right) \quad (4)$$

根据三角函数公式化简式（4）得到：

$$W_i = \frac{D_i \cos \alpha \sin \theta}{\cos \left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\theta}{2} \right)} \quad (5)$$

W_i 是第 i 根测线多波束产生总的覆盖宽度。

■ 相邻条带重叠率

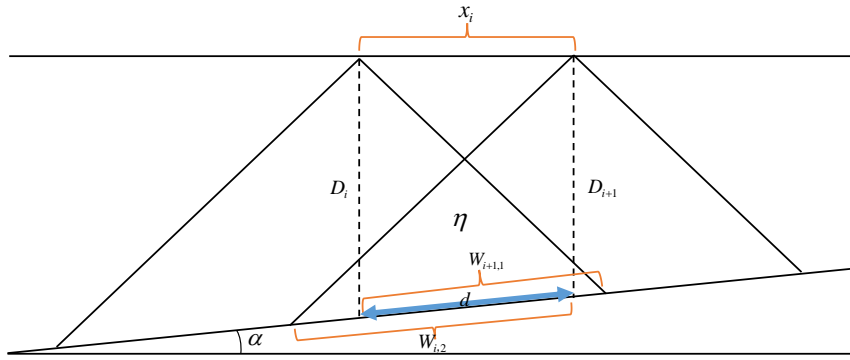


图5 相邻条带重叠示意图

当海底地形不平坦时，相邻测线覆盖条带在海底坡面上投影的长度为：

$$d = |x_{i+1} - x_i| / \cos \alpha \quad (6)$$

第 i 根测线与第 $i-1$ 根测线条带的重叠率为：

$$\eta_i = \begin{cases} 1 - \frac{|x_i - x_{i-1}| / \cos \alpha}{W_{i-1,2} + W_{i,1}}, & i = 2, 3, \dots \\ 0, & i = 1 \end{cases} \quad (7)$$

其中， η_i 为第 i 根测线与第 $i-1$ 根测线覆盖条带的重叠率，当 $\eta_i < 0$ 时，表示漏测。

■ 模型确立

在与测线方向垂直的平面中，以海域中心为原点，以远离坡角方向为正方向，建立一维数轴，单位长度为 l_0 。

测线距中心点处的距离研究范围为 $[n_1 l_0, n_k l_0]$ 。 n_k 中 k 表示测线的编号为 k 。设定海域中心处的测线编号为 j ，则海域中心处海水深度为 D_j 。

第 i 根测线海水深度的计算公式：

$$D_i = D_j - x_i \tan \alpha \quad (8)$$

测线编号与测线之间的距离存在以下关系：

$$x_i = (n_i - n_j) l_0 \quad (9)$$

多波束覆盖宽度的计算公式：

$$W_i = \frac{D_i \cos \alpha \sin \theta}{\cos \left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\alpha + \frac{\theta}{2} \right)} \quad (10)$$

多波束第 i 根测线覆盖条带与第 $i-1$ 根测线覆盖条带的重叠率：

$$\eta_i = \begin{cases} 1 - \frac{|x_i - x_{i-1}| / \cos \alpha}{W_{i-1,2} + W_{i,1}}, & i = 2, 3, \dots \\ 0, & i = 1 \end{cases} \quad (11)$$

综上，建立多波束测深的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型如下：

$$\begin{cases} x_i = (n_i - n_j) l_0 \\ D_i = D_j - x_i \tan \alpha \\ W_i = \frac{D_i \cos \alpha \sin \theta}{\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)} \\ \eta_i = \begin{cases} 1 - \frac{|x_i - x_{i-1}| / \cos \alpha}{W_{i-1,2} + W_{i,1}}, & i = 2, 3, \dots \\ 0, & i = 1 \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

5.1.2 模型的求解

多波束换能器的开角 θ 为 120° ，坡度 α 为 1.5° ，海域中心点处的海水深度 D_j 为 70 m。测线距中心点处的距离研究范围为 $[-800, 800]$ ，单位长度为 200m，则海域中心处的测线编号为 5。

以测线距中心点处的距离为 -600m 处的测线为例计算相关参数（该测线为第 2 根测线）。

该测线处海水深度 D_2 为：

$$D_2 = D_5 - x_2 \tan \alpha = 70 - (-600) \tan 1.5^\circ = 85.71 \quad (13)$$

该测线处多波束覆盖宽度 W_2 为：

$$W_2 = \frac{D_2 \cos \alpha \sin \theta}{\cos\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{85.71 \cos 1.5^\circ \sin 120^\circ}{\cos(1.5^\circ - 60^\circ) \cos(1.5^\circ + 60^\circ)} = 297.63 \quad (14)$$

该测线处与第 1 条测线的重叠率 η_1 为：

$$\eta_2 = 1 - \frac{|x_2 - x_1| / \cos \alpha}{W_{1,2} + W_{2,1}} = 0.35 \quad (15)$$

其余位置测线相关参数计算过程同理，全部计算结果如表 1 所示，同时保存到 result1.xlsx 文件中。

表 1 问题 1 计算结果

测线距中心点 处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.95	85.71	80.47	75.24	70.00	64.76	59.53	54.29	49.05
覆盖宽度/m	315.81	297.63	279.44	261.26	243.07	224.88	206.70	188.51	170.33
与前一条测线 的重叠率/%	——	34.68	30.56	25.88	20.53	14.34	7.11	-1.46	-11.77

由表 1 可知，随着测线距离中心点的距离增加，海水深度减小，覆盖宽度减小，与前一条测线的重叠率逐渐减小。当测线距离中心点处距离为 600m 时，重叠率小于 0，表明存在漏测，在远离坡角方向需要更多测线以实现完整的覆盖。

5.2 问题二模型的建立与求解

首先建立合适的三维坐标系来表示测量船的坐标以及测量船在海底坡面上投影点的坐标，接着由坡面法向量和坡面确定坡面方程，其次由坡面与多波束平面相交得到覆盖线的方向向量进而计算覆盖线与水平面的夹角，最后基于问题一的模型求解多波束覆盖宽度的数学模型。

5.2.1 模型的建立

■ 确定测量船的坐标

以海域中心点垂直向上与海底坡面的交点为原点，坡面法向量在水平投影方向为 x 轴正方向，以垂直于 x 轴，水平向右为 y 轴正方向，以垂直于水平面竖直向上方向为 z 轴正方向，建立三维坐标轴。三维坐标轴示意图如图 6 所示。

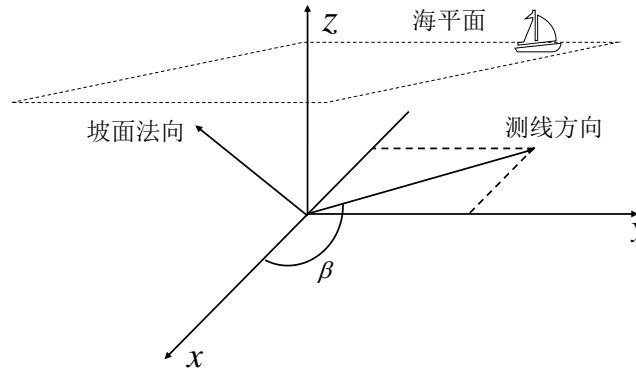


图6 三维坐标轴示意图

测量船始终在海平面上航行，海平面与海域中心竖直距离为 D_0 ，因此测量船 z 轴坐标始终为 D_0 。

设定测量船距海域中心的距离为 A ，根据测线方向在分别在 x 轴和 y 轴上面的投影可得测量船 x 轴坐标和 y 轴坐标分别为 $A \cos \beta$ 和 $A \sin \beta$ 。

测量船坐标：

$$S = (A \cos \beta, A \sin \beta, D_0) \quad (16)$$

式中， β 为测线在水平面的投影与 x 轴正方向的夹角。

同时，可得测线方向向量 \vec{l} 为：

$$\vec{l} = (\cos \beta, \sin \beta, 0) \quad (17)$$

■ 计算坡面法向量坐标

根据上述坐标轴的建立，坡面经过 $(0,0,0)$ 点。我们设定坡面法向量 \vec{P} 在 x 轴上的投影为长度为 1，根据几何知识易知法向量 \vec{P} 在 z 轴上的投影为长度为 $\cot \alpha$

坡面法向量坐标：

$$\vec{P} = (1, 0, \cot \alpha) \quad (18)$$

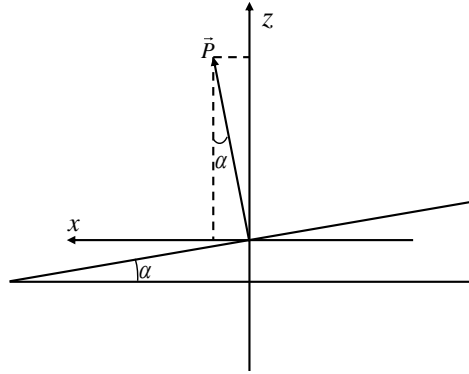


图7 坡面法向量示意图

■ 计算测量船处的海水深度

海底坡面过点 $(0,0,0)$ ，同时坡面法向量为 $(1,0,\cot \alpha)$ ，根据平面的点法式方程^[1]，可以求得坡面方程：

$$z = -x \tan \alpha \quad (19)$$

测量船在坡面上投影点的坐标为：

$$S' = (A \cos \beta, A \sin \beta, -A \cos \beta \tan \alpha) \quad (20)$$

由测量船投影点坐标可知测量船处海水深度的计算公式：

$$D = D_0 + A \cos \beta \tan \alpha \quad (21)$$

■ 计算测量船覆盖线与水平面的夹角

设坡面为 P ，坡面法向量为 \vec{p} ；多波束所在平面为 N ，多波束所在平面法向量为 \vec{n} ，由于测线垂直于多波束所在平面，所以测线方向可视为多波束所在平面法向量；水平面为 M ，水平面法向量为 \vec{m} 。

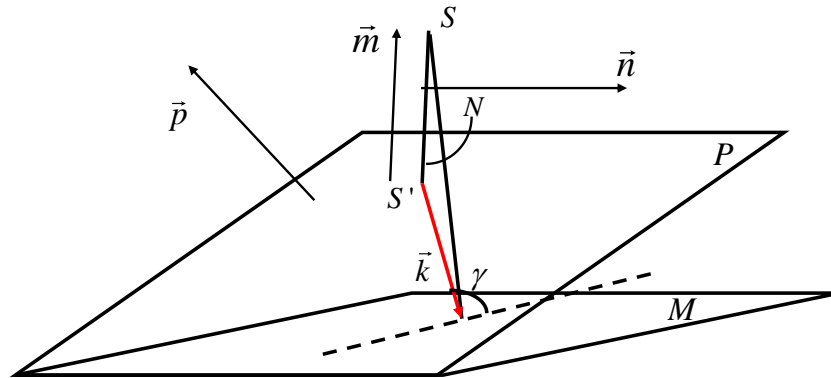


图8 测量船覆盖线示意图

测量船发出多波束产生的覆盖线同时存在于坡面以及多波束所在平面，如图 8 所示，图中红线表示多波束产生的覆盖线：

$$P \cap N = k \quad (22)$$

其中， k 表示多波束产生的覆盖线。

通过坡面法向量和多波束所在平面法向量可以求得覆盖线的方向向量：

$$\vec{p} \times \vec{n} = \vec{k} \quad (23)$$

其中 $\vec{p} = (1, 0, \cot \alpha)$ ， $\vec{n} = \vec{l} = (\cos \beta, \sin \beta, 0)$

计算得到覆盖线的方向向量为：

$$\vec{k} = (-\cot \alpha \sin \beta, \cot \alpha \cos \beta, \sin \beta) \quad (24)$$

水平面法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$ ，通过水平面法向量与覆盖线方向向量计算覆盖线与水平面所产生的夹角：

$$\sin \gamma = \sin \langle \vec{m}, \vec{k} \rangle = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{k}|}{|\vec{m}| |\vec{k}|} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\sin \beta)^2}} \quad (25)$$

其中 γ 是覆盖线与水平面所形成的夹角。

将式 (25) 进行变换，得到夹角公式：

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\sin \beta)^2}}\right), \quad \gamma \in [0, \pi/2] \quad (26)$$

■ 计算多波束覆盖宽度

基于问题 1，可以得到三维坐标中覆盖宽度计算公式：

$$W = \frac{(D_0 + A \cos \beta \tan \alpha) \cos \gamma \sin \theta}{\cos\left(\gamma - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)} \quad (27)$$

■ 模型确立

以海域中心点垂直向上与海底坡面的交点为原点，建立三维坐标轴：x 轴正方向为坡面法向量的水平投影方向，y 轴正方向为垂直于 x 轴、水平向右，z 轴正方向为垂直于水平面、竖直向上。

在三维坐标系中，测量船的坐标 S 为 $(A \cos \beta, A \sin \beta, D_0)$ ，测量船在海底平面上投影点 S' 的坐标为 $(A \cos \beta, A \sin \beta, -A \cos \beta \tan \alpha)$ 。

海域中心点垂直向上与海底坡面的交点为原点，依照测量船投影点坐标求得测量船所在位置海水深度 D ：

$$D = D_0 + A \cos \beta \tan \alpha \quad (28)$$

坡面与多波束所在平面相交为多波束在坡面的覆盖线，依照平面点法式方程和面面相交相关知识求得覆盖线的方向向量 \vec{k} ：

$$\vec{k} = (-\cot \alpha \sin \beta, \cot \alpha \cos \beta, \sin \beta) \quad (29)$$

由线面相交的知识可以求得覆盖线与水平面相交的夹角 γ ：

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\sin \beta)^2}}\right), \quad \gamma \in [0, \pi/2] \quad (30)$$

依照上述计算过程得到覆盖线与水平面的夹角和海水深度，基于问题 1 的模型可得三维坐标系中多波束测深覆盖宽度 W ：

$$W = \frac{(D_0 + A \cos \beta \tan \alpha) \cos \gamma \sin \theta}{\cos\left(\gamma - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)} \quad (31)$$

综上，建立多波束测深覆盖宽度的数学模型如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} S = (A \cos \beta, A \sin \beta, D_0) \\ S' = (A \cos \beta, A \sin \beta, -A \cos \beta \tan \alpha) \\ D = D_0 + A \cos \beta \tan \alpha \\ \vec{k} = (-\cot \alpha \sin \beta, \cot \alpha \cos \beta, \sin \beta) \\ \gamma = \arcsin\left(\frac{\sin \beta}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\sin \beta)^2}}\right), \gamma \in [0, \pi/2] \\ W = \frac{(D_0 + A \cos \beta \tan \alpha) \cos \gamma \sin \theta}{\cos\left(\gamma - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)} \end{array} \right. \quad (32)$$

5.2.2 模型的求解

若多波束换能器的开角 θ 为 120° ，坡度 α 为 1.5° ，海域中心点处的海水深度 D_0 为 120m 。

以测量船距海域中心点处的距离为 0.3 海里，测线方向与坡面法向量夹角 β 为 0° 时为例，计算测量船距离海域中心点处的距离。

船与海域中心的距离： $A = 0.3 * 1852 = 555.6$

测线方向与坡面法向量夹角 β 为 0° ，代入式 (30)，计算得到覆盖线与水平面夹角 γ ：

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\sin 0^\circ}{\sqrt{(\cot 1.5^\circ)^2 + (\sin 0^\circ)^2}}\right) = 0^\circ \quad (33)$$

代入式 (31)，计算多波束覆盖宽度：

$$W = \frac{(120 + 555.6 \cos 0^\circ \tan 1.5^\circ) \cos 0^\circ \sin 120^\circ}{\cos\left(-\frac{120^\circ}{2}\right) \cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right)} = 466.09 \quad (34)$$

其余位置测量船距海域中心点处的距离计算过程同理，全部计算结果如表 2 所示，同时保存到 result2.xlsx 文件中。

表 2 问题 2 的计算结果

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线 方向 夹角/ $^\circ$	0	415.69	466.09	516.49	566.89	617.29	667.69	718.09	768.48
	45	416.19	451.87	487.55	523.23	558.91	594.59	630.27	665.95
	90	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69
	135	416.19	380.51	344.83	309.15	273.47	237.79	202.11	166.43
	180	415.69	365.29	314.89	264.50	214.10	163.70	113.30	62.90
	225	416.19	380.51	344.83	309.15	273.47	237.79	202.11	166.43
	270	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69	416.69
	315	416.19	451.87	487.55	523.23	558.91	594.59	630.27	665.95

依照图 9 和表 2，当测线方向与坡面法向量水平投影夹角为 90° 与 270° 时，多波束产生的覆盖宽度始终为 416.69m，不随测量船与海域中心点处的距离变化而改变。当测量船与海域中心点处距离相等时，测量船的运动范围为海平面上一个圆，覆盖宽度变化规律关于 180° 对称。测量船距离海域中心点处距离大于 0 时，随着测线方向角度的增大，覆盖宽度在 $[0, 180^\circ]$ 区间上单调递减，在 $[180^\circ, 360^\circ]$ 区间上单调递增，在 180° 处取得最小值。

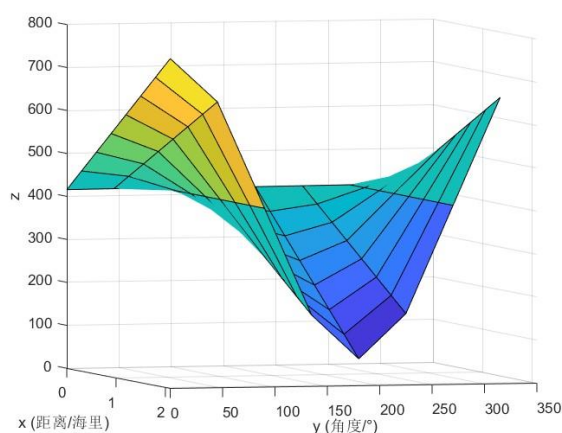


图9 覆盖宽度三维示意图

5.3 问题三模型的建立与求解

首先，我们将矩形海域在水平面方向网格化，简化问题。研究的矩形海域为规则形状，因此测量船航行路线为直线。分别对测量船行驶角度为 90° 和其他角度时测线覆盖效率进行讨论，测线覆盖效率衡量标准为测线长度以及行驶过程中覆盖的面积。验证 90° 为最佳行驶角度后，在海域中依照测线的边界条件遍历搜索测线的位置，并计算其他角度下测量船行驶的情况验证模型的正确性。具体流程图如图 10 所示。

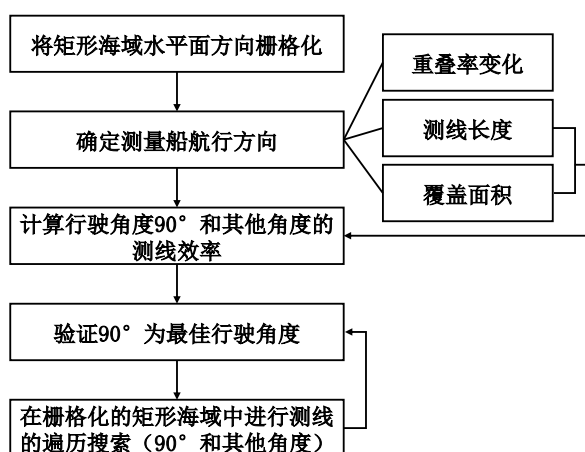


图10 问题三数学模型建立与求解流程图

5.3.1 模型的建立

考虑一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，海域中心点处的海水深度为 110 m，西深东浅，坡度为 1.5° ，多波束换能器的开角为 120° 。

■ 将矩形海域网格化

网格法的划分思想是将整个空间分割成多个微小区域，称为网格。一般来说，网

格法将环境划分为大小相同的单元格，并且在本文中，我们使用网格法来进行海底环境建模。

将矩形海域长度转化为以米的单位，矩形海域南北长 3704m，东西宽 7408m。将矩形海域网格化，示意图如图 11 所示。由西到东为 x 轴正方向，由南到北为 y 轴正方向，建立矩形海域水平面坐标轴，则该海域中心坐标为(1852,3704)

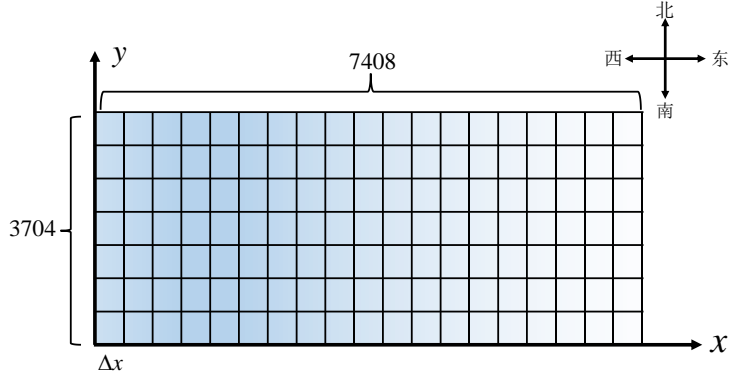


图11 矩形海域网格示意图

■ 确定测线运动方向

由于研究海域为矩形海域，该海域的西部较深，东部较浅，坡度保持固定，形状规则。基于这样的前提条件，我们理应设计规则直线的测线布局，测线的方向宜平行于等深线的方向^[2]。通过选择规则的测线布局，我们可以在海域中均匀、有序地采集数据从而在整个研究海域内获取到一致性和可比性较高的数据。规则直线测线的设计还能简化数据采集过程，降低测线间的干扰，提高数据处理效率。

当测量船行驶一定距离时，通过多波束测量，可以形成覆盖线。这些覆盖线的形状通常呈现出成梯形的面积（图 12，13），计算公式如下：

$$S_{\text{覆盖}} = \frac{(W_A + W_B)r / \cos \varphi}{2} \quad (35)$$

其中， $S_{\text{覆盖}}$ 是测量船行驶过程中覆盖线所围成的面积， W_A 是测量船起始位置 A 覆盖线长度， W_B 是测量船行驶 r 距离后终止位置 B 覆盖线长度， r 是测量船行驶距离， φ 是测线方向与坡面所形成的线面角。

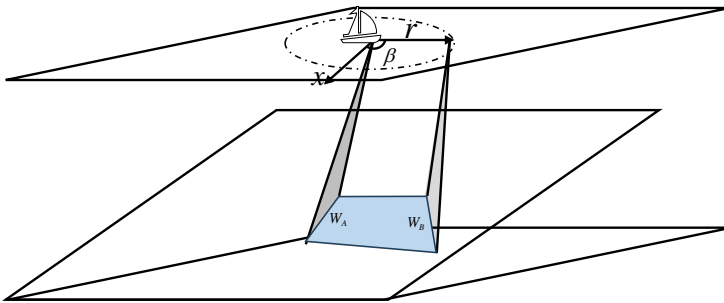


图12 测量船航行覆盖面积示意图

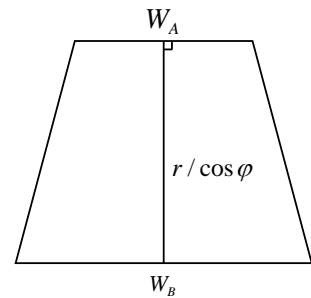


图13 覆盖面积几何关系图

关于测线规划的效率，测线行驶相同的距离，覆盖的面积越大，那么测量效率越高，测线覆盖效率 ζ 定义如下：

$$\zeta = \frac{S_{\text{覆盖}}}{r} \quad (36)$$

式中， r 是测量船行驶距离。

问题二中多波束覆盖宽度数学公式：

$$W = \frac{(D_0 + A \cos \beta \tan \alpha) \cos \gamma \sin \theta}{\cos\left(\gamma - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\gamma + \frac{\theta}{2}\right)} \quad (37)$$

覆盖线与水平面形成的线面角计算公式：

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha \sin \beta)^2}} \quad (38)$$

式中 γ 是覆盖线与水平面形成的线面角， α 是海底坡角， β 是测线与 x 轴形成的夹角。

测线在海底坡面投影线与水平面形成的线面角计算公式：

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tan \alpha \cos \beta)^2}} \quad (39)$$

式中 φ 是测线在海底坡面投影线与水平面形成的线面角， α 是海底坡角， β 是测线与 x 轴形成的夹角。

联立式 (35-39)，代入多波束开角 $\theta = 120^\circ$ 化简测线覆盖效率公式如下：

$$\zeta = \frac{2\sqrt{3}D_0 \sqrt{(1 + (\tan \alpha \cos \beta)^2)(1 + (\tan \alpha \sin \beta)^2)}}{1 - 3(\tan \alpha \cos \beta)^2} \quad (40)$$

研究海域坡面坡度不变，海域中心处海水深度稳定，因此 α 和 D_0 为常值，测线覆盖效率仅仅与行驶角度 β 有关。

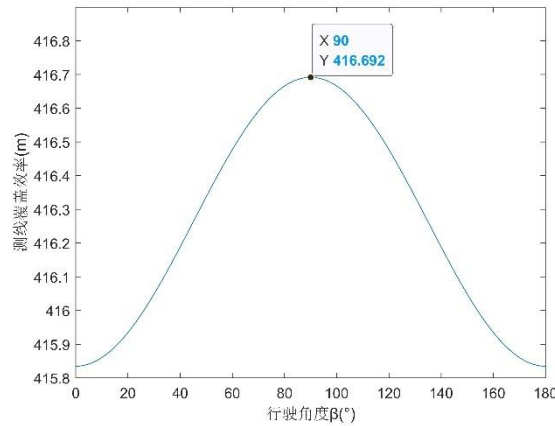


图14 行驶角度与测线覆盖效率函数图

由图 14 可知，当测量船行驶角度为 90° 时，航行相同的距离，测量船发出多波束所覆盖的面积最大，测量覆盖效率最大。

■ 测线边界条件

测线从西到东开始进行扫描，测线扫描的边界条件为测线靠近坡角一侧覆盖长度不小于测线在坡面的投影长度，示意图如图 15 所示。

的间距尽可能大，目标函数如下：

$$\max l_i \quad (46)$$

式中， l_i 是第 i 根测线与第 $i+1$ 根测线之间的距离。

➤ 约束条件

确定测量船南北向行驶效率最高，在网格化的矩形海域上进行遍历搜索，分别讨论第一根测线，最后一根测线以及其余测线的边界条件。

第一根测线边界条件：

$$W_{1,1} \geq i / \cos \alpha, i \in N^* \quad (47)$$

最后一根测线边界条件：

$$W_{n,2} > (3704 - j) / \cos \alpha, j \in N^* \quad (48)$$

其余测线边界条件：

$$0.9 \cos \alpha (W_{i-1,2} + W_{i,1}) \leq l_i \leq 0.8 \cos \alpha (W_{i-1,2} + W_{i,1}) \quad (49)$$

综上，建立针对问题三矩形海域建立测线规划的数学模型如下：

$$\begin{cases} \max l_i \\ \zeta = \frac{2\sqrt{3}D_0\sqrt{(1+(\tan \alpha \cos \beta)^2)(1+(\tan \alpha \sin \beta)^2)}}{1-3(\tan \alpha \cos \beta)^2} \\ W_{1,1} \geq i / \cos \alpha, i \in N^* \\ W_{n,2} > (3704 - j) / \cos \alpha, j \in N^* \\ 0.8 \cos \alpha (W_{i-1,2} + W_{i,1}) \leq l_i \leq 0.9 \cos \alpha (W_{i-1,2} + W_{i,1}) \end{cases} \quad (50)$$

5.3.2 模型的求解

求解方法：遍历搜索

根据模型建立部分，研究的矩形海域效率最高的测线规划为南北向直线，即 β 为 90° 时测线效率最高。根据上述模型中的边界条件，针对测线的选择采用以下搜索过程（流程图如图 16 所示）：

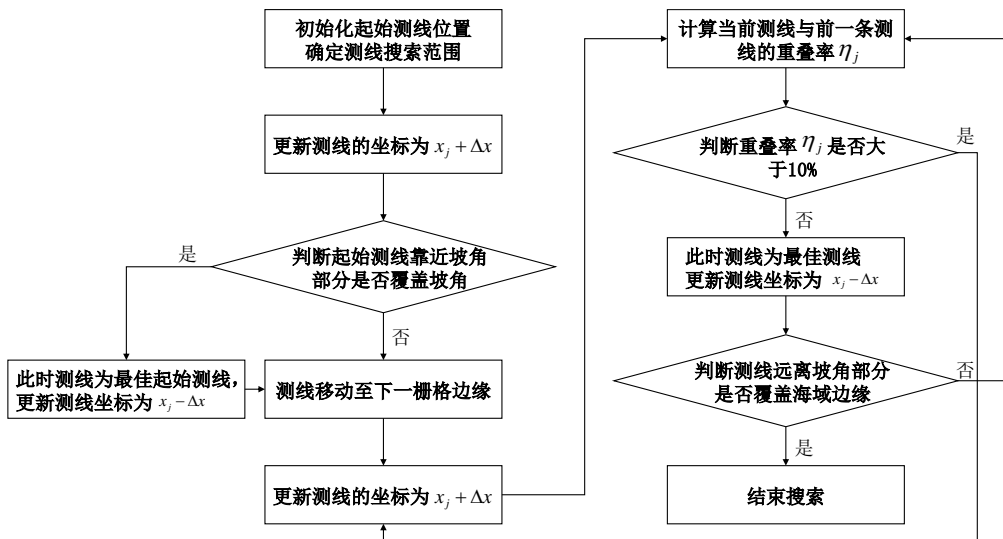


图16 遍历搜索测线流程图

Step1. 测线横坐标 x_j 初始搜索范围为 $[0, 7408]$ ，搜索步长 Δx 为 0.1。令 j 的初始值为 1。

Step2. 更新 $x_j = x_j + \Delta x$ 。

Step3. 比较波束前部分覆盖长度 $W_{j,1}$ 与测线到前边界距离在坡面投影长度 $x_j / \cos \alpha$ 。如果 $W_{j,1} \geq x_j / \cos \alpha$ ，进入 **Step2**；否则，第一条测线 $x_{j(best)}$ 为 $x_j - \Delta x$ ，并且重复 **Step4**。

Step4. 赋值 $j = j + 1$ 。

Step5. 测线横坐标 x_j 搜索范围变为 $[x_{j-1}, 7408]$ ，搜索步长仍为 Δx 。

Step6. 更新 $x_j = x_j + \Delta x$ 。

Step7. 计算当前测线与前一条测线的重叠率 η_j ，如果 $\eta_j \geq 0.1$ ，重复 **Step6**，否则该条测线 $x_{j(best)} = x_j - \Delta x$ 。

Step8. 比较波束后部分覆盖长度 $W_{j,2}$ 与测线到后边界距离在坡面投影长度 $(3074 - x_j) / \cos \alpha$ 。如果 $W_{j,2} \geq (3074 - x_j) / \cos \alpha$ ，进入 **Step7**；否则最后一条测线 $x_{j(best)}$ 为 $x_j - \Delta x$ ，并结束搜索。

测线布设求解结果：

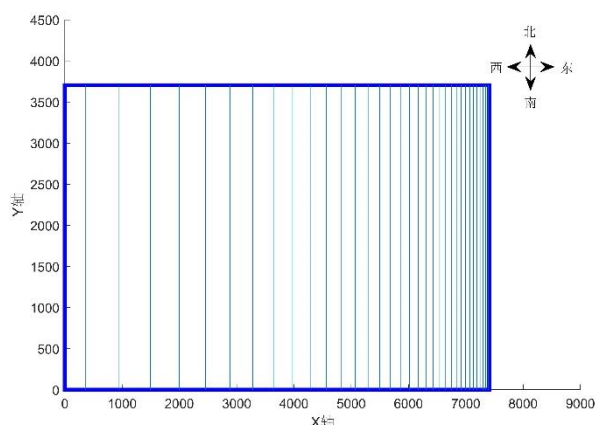


图17 问题3 测线结果图

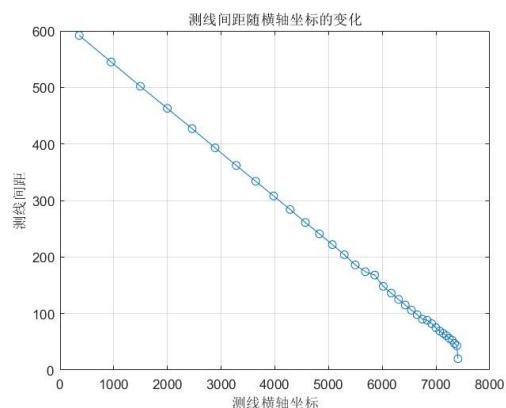


图18 测线间距变化图

由西到东，海水深度逐渐变小。由图 17 和图 18 可知，自西向东测线之间的间距逐渐减小，测线越来越密集，同时测线间距下降幅度也逐渐减小。问题三测线具体计算结果如表 3 所示。

表 3 问题三测线计算结果

序号	测线与原点的距离 (m)	序号	测线与原点的距离(m)
1	358.5	18	6022.8
2	950.5	19	6170.4
3	1496	20	6306.4
4	1998.7	21	6431.7
5	2462	22	6547.2
6	2889	23	6653.7
7	3282.5	24	6751.8
8	3645.1	25	6842.2
9	3979.2	26	6925.5
10	4287.1	27	7002.3

11	4570.9	28	7073
12	4832.4	29	7138.2
13	5073.4	30	7198.3
14	5295.5	31	7253.7
15	5500.2	32	7304.7
16	5688.8	33	7351.7
17	5862.6	34	7390.5

行驶角度为 90° 时，共有 34 条线，则总测线长度 L 为：

$$L = 34 \times 3704 = 125936(m) \quad (51)$$

5.3.3 模型的检验

为验证模型的正确性，我们对测量船沿一定角度航行情况讨论。

因为矩形海域海水深度不同，西深东浅，当测量船行驶方向不为南北向时，覆盖宽度改变，重叠率改变较大，难以稳定控制在 10%~20% 中间。

与此同时，直角三角形中斜边大于直角边，所以当测量船沿斜线航行时每一根测线的长度大于沿南北向方向航行时的测线长度。

在靠近海域边界的时候，由于多波束的覆盖宽度剧烈变化，海水深度较浅，覆盖宽度较小，可能会出现部分区域无法覆盖到的情况，如图 19 所示。

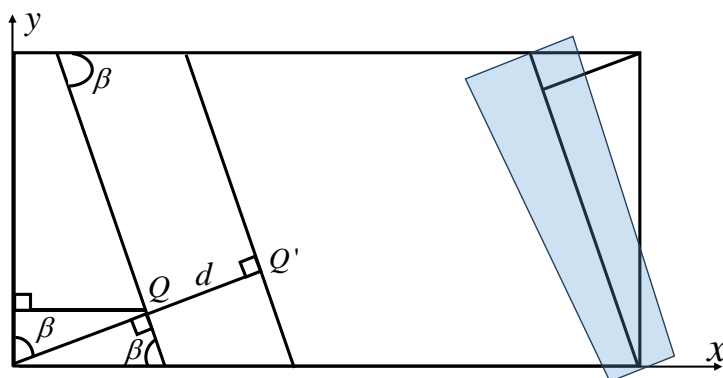


图19 一定角度偏移测线运动示意图

起始测线的搜索：

距离其实测线最远的点是坐标轴原点。由坐标原点向起始测线作垂线，垂点为 Q 。

点 Q 的坐标为 $(x_j \sin^2 \beta, x_j \sin \beta \cos \beta)$ 。

当测线位于 Q 点产生的覆盖线靠近坡角那部分可以覆盖坡角时，即 $W_{1,2} > x_j \sin \beta$ 时，确定最佳起始测线。

其余测线的搜索：

设第二根测线距离起始测线的距离为 d ，对于测线上任意一点都可以求得接下来一根测线上点的位置。

以 Q 点为例， Q' 的坐标为 $(x_j \sin^2 \beta + d \sin \beta, x_j \sin \beta \cos \beta + d \cos \beta)$ 。通过 Q 点和 Q' 点的坐标可以计算该位置的海水深度进而计算多波束产生的覆盖宽度，接着判断覆盖重叠率是否在 10%~20%。依照网格法，计算测线上重叠率是否符合条件，若符合条件，那么记录当前测线之间的距离为 d_{\max} 以及当前测线的位置 x_j 。随后进行下一根测线的搜索。

终止测线的判断方法数学计算方法与起始测线相同，判断条件改为覆盖线远离坡角一侧能否覆盖矩形海域的边缘。

其他度数求解结果:

由于上文已经论证了 90° 效率最大, 结合题意检验其他角度下, 所需的总测线长度。不妨取 $\Delta\beta = 0.1^\circ$, 计算结果如表 4 所示。

表 4 不同行驶角度下测线规划结果

行驶角度 $\beta(^{\circ})$	90	89.9	89.8	89.7	89.6
测线总长度	125936.0	125936.2	125936.7	125937.7	129643.2
测线条数	34	34	34	34	35
行驶角度 $\beta(^{\circ})$	89.5	89.4	89.3	89.2	89.1
测线总长度	129644.9	129647.1	129649.7	129652.6	129656.0
测线条数	34	34	34	34	34

行驶角度非 90° 的测线效率较低, 因此在相同测线数量下, 测线总长度较长。值得注意的是当 $\beta = 89.6^\circ$, 测线条数变为 35 条, 这是由于第 34 条测线无法覆盖到最右上角顶点 (东北), 因此需要多添加一条测线。

5.4 问题四模型的建立与求解

首先, 我们应用克里格插值法对附件中的缺失数据进行补充, 得到完整的海底曲面数据; 接着, 分析矩形海域海底情况, 总结海底地势变化规律; 其次, 我们根据测线南北向行驶时确定起始测线的位置, 随后使测线偏移一定角度布设最佳测线。

5.4.1 模型的建立

■ 克里格插值法补充缺失数据

所给附件中横纵坐标以 0.02 海里为单位长度, 即 37.04m。无法具体得知每 1m 上海洋深度, 因此我们对数据进行插值处理, 获得完整数据。由于在同一海域中, 海水深度具有较强的空间自相关性, 因此我们采用克里格插值法^[3]对缺失数据进行补充。

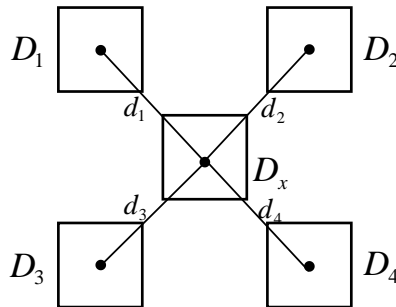


图20 插值补充缺失数据示意图

缺失数据 D_x 计算公式:

$$D_x = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{d_i} D_i \right) / \sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i} \quad (52)$$

式中, D_x 是所求点的海水深度, $D_1 \sim D_4$ 分别为距离所求点最近的已知数据, $d_1 \sim d_4$ 为已知点到所求点的距离。根据数据在空间上的相关性, 距离越远, 已知数据对所求点的影响越小。

■ 分析矩形海域海底情况

由海水深度的三维图和等深线图 (图 21,22), 可知该海域西南部分地势较高, 可能该地区离海岸较近, 例如浅滩、海湾等; 东南部分地势较低。海域西南至东北方向

呈 U 型，东南部分的等深线近似平行。

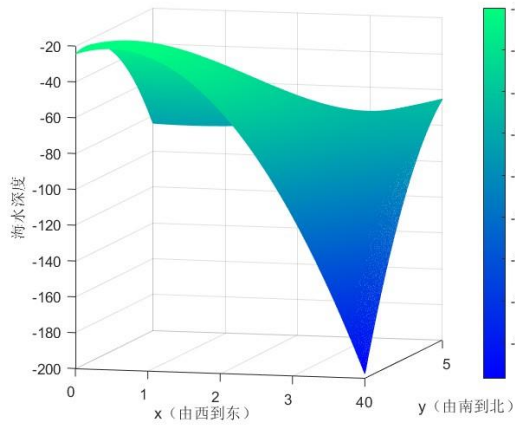


图21 海水深度三维图

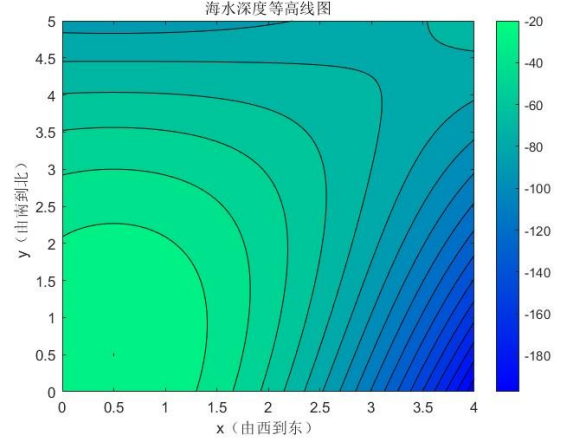


图22 海水深度等深线图

■ 测线布设

考虑测量效率，测线的方向宜平行于等深线的方向^[2]，因此对于该海域我们依照等深线分布划分区域，分别讨论划分区域的测线布设。测线的走势基本与海域等深线一致。我们以西南至东北方向的连线作为分界线，为简化问题，等深线为 U 型时，测线为相互垂直的两条直线。当测线扫描完东北角后，测线布设为相互平行的直线。

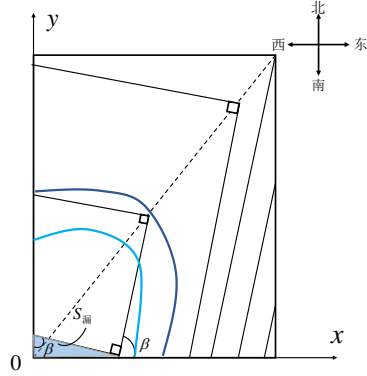


图23 测线布设示意图

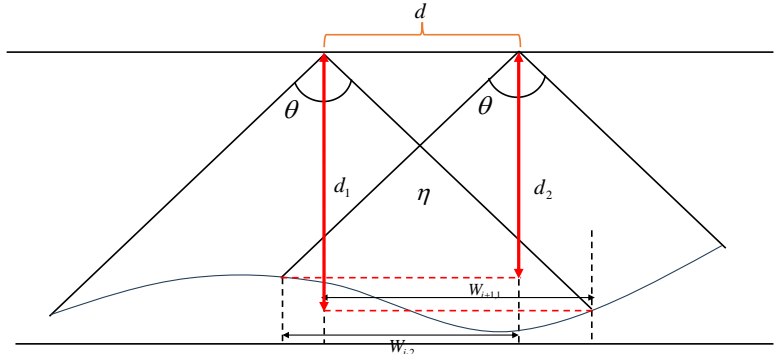


图24 多波束在海底投影几何关系图

确定起始测线的横坐标 x_1

当 β 为 90° 时，基于问题三模型，当测线靠近矩形海域边缘时，确定起始测线的横坐标。通过遍历搜索得到起始测线的横轴坐标值为 41。

起始测线布设多目标规划综合模型建立

➤ 目标函数：

- (1) 测线扫描所形成的条带尽量覆盖整个待测海域，即漏测区域面积尽可能小：

$$\min S_{\text{漏}} \quad (53)$$

- (2) 测量船扫过面积最大：

$$\max S_{\text{覆盖}} \quad (54)$$

- (3) 测线尽量沿着海域等深线行驶

$$\min \frac{\sum |\Delta \text{depth}|}{\sum \Delta r} \quad (55)$$

公式中 $\Delta depth$ 表明移动距离前后海水深度的变化, Δr 表明测量船行驶的单位距离。两者比值越小表明单位距离上测线海水深度差越小, 越接近等深线。

➤ **约束条件:**

起始测线的起点在 x 轴上:

$$x_j \in (0, 7408), y_j = 0 \quad (56)$$

测线行驶角度范围为 $[\arctan(\frac{5}{4}), 90^\circ]$

$$\beta \in [\arctan(\frac{5}{4}), 90^\circ] \quad (57)$$

综上, 建立研究海域起始测线布设多目标规划模型为:

$$\begin{aligned} & \min S_{\text{漏}} \\ & \min \frac{\sum |\Delta depth|}{\sum \Delta r} \\ & \min S_{\text{覆盖}} \\ & st. \begin{cases} 0 \leq \eta < 0.2 \\ x_j \in (0, 7408) \\ y_j = 0 \\ \beta \in [\arctan(\frac{5}{4}), 90^\circ] \end{cases} \end{aligned} \quad (58)$$

➤ **网格化求解覆盖宽度:**

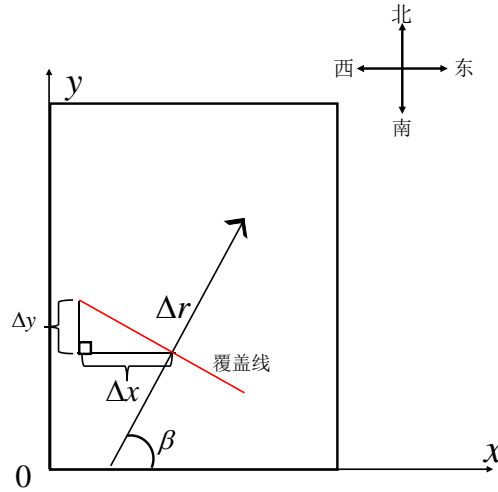


图25 网格化求解几何关系图

由于该题的海水深度不规律, 需要用网格化求解覆盖宽度, 设船在测线上某一位置的坐标为 (x, y) , 测线行驶角度为 β , 定义网格大小为 Δx , 则在多束波上一点的坐标为 (x_k, y_k) , 其中:

$$\begin{cases} x_k = x + k\Delta x \\ y_k = y + \frac{k\Delta x}{\tan \beta} \end{cases} \quad (59)$$

根据克里格插值法, 可得某一坐标的海水深度为 $D_{(x,y)}$, 设多波束开角为 $\theta = 120^\circ$,

当多束波上一点的坐标满足。

$$D_{(x_k, y_k)} - \frac{\sqrt{(k\Delta x)^2 + (k\Delta y)^2}}{\tan(\theta)} = 0 \quad (60)$$

即该点刚好落在海底面上，则船在该坐标的覆盖宽度 $W_{(x,y)}$ 为

$$W_{(x,y)} = \sqrt{(k\Delta x)^2 + (k\Delta y)^2} \quad (61)$$

5.4.2 模型的求解

➤ 测线最佳偏移角度求解：

根据上述测线布设多目标规划模型，我们计算测线偏移不同角度时单位海洋深度差来衡量测线布设与海洋等深线的契合度，计算结果如表 5：

表 5 单位海洋深度差数据表格

测线角度 $\beta(^{\circ})$	80	79	78	76	75
单位海洋深度差(m)	0.0059	0.0051	0.0048	0.0051	0.0052
测线角度 $\beta(^{\circ})$	74	73	72	71	70
单位海洋深度差(m)	0.0048	0.0053	0.00522	0.0053	0.0052

由表 5 可知，起始位置为(41,0)时，测线与 x 轴偏移角度为 74° 时，单位距离上海洋深度差最小，即与海洋等深线最接近。

➤ 最佳偏移角度下测线布设求解：

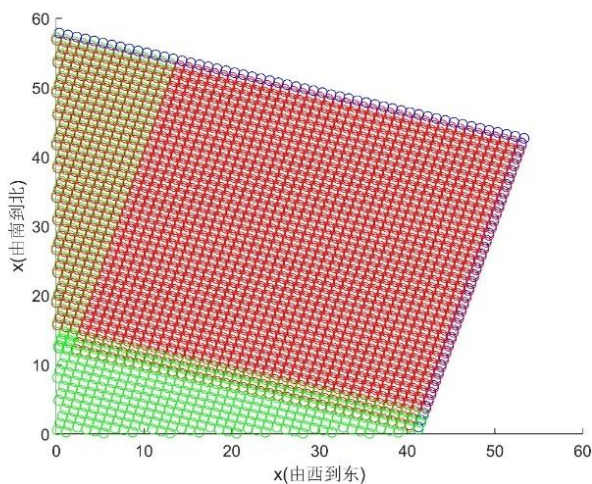


图26 问题四初始测线布设图

图 26 中蓝点为测线航迹，红点为覆盖宽度，绿点为漏测宽度，由图 26 可知，漏测面积大概为三角形面积。

➤ 测线之间的间距求解：

在得到最佳起始位置和偏移角度后，为使总测线长度最小，各个测线在满足重叠率的要求下，要使测线之间的间距最大。沿用问题三的求解模型，设定搜索步长为 $\Delta l = 5m$ ，使用遍历搜索算法求得下表结果。

表 6 测线间距结果

测线起点	41.00	119.02	197.04	269.87	342.69	410.31
与下一条测线的间距(m)	75	75	70	70	65	65
测线起点	477.93	4124.17	4264.62	4425.86
与下一条测线的间距(m)	65	120	125	130

由表 6 可知，当 x 轴上的测线起点离原点越远时，测线之间的间距越大，这是由于海水深度的增大，会使测线的覆盖宽度增加，为保证重叠率，需要使测线之间的间距更大。

将得到的测线间距带入网格化处理的模型中，可计算得到目标指标如表 7。

表 7 问题四指标计算结果

测线总长度	漏测海区百分比	重叠率超过 20%的长度
578194.4m	1.365%	127192.5m

由上表可得漏测海区百分比为 1.365%，重叠率超过 20%的长度为 127192.5m，重叠率超过 20%的长度占比较多，而漏测海区所占待测海域总面积的百分比较低。

6 模型的评价

6.1 模型的优点

- (1) 遍历求解: 遍历求解的思路相对直接简单, 不依赖于复杂的优化策略或数据结构, 易于理解和实现。同时遍历求解能够保证找到问题的解 (如果存在解), 并且不会漏解。
- (2) 网格法: 提供了一种可视化的方式来理解和分析问题。通过将问题离散化到网格上, 可以直观地观察问题在空间中的分布和变化。
- (3) 克里格插值: 能够产生平滑、连续的估计结果, 且对已知数据有很好的拟合能力。它可以精确地估计未知位置的属性值, 同时依赖于数据点之间的空间距离和变异性, 使得它在样本点均匀分布的情况下, 克里格差值能够保持空间一致性。
- (4) 先证后验: 对于测线覆盖率与等高线平行时效率最高结论, 本文先证明, 后通过具体数据进行验证, 符合科学与逻辑推理。

6.2 模型的缺点

- (1) 微元法: 在本问题第四问中, 使用微元法的计算不规则坡面覆盖面积过程较为复杂, 需要耗费大量时间和计算资源。
- (2) 遍历求解: 需要遍历整个搜索空间, 本题数据规模较大, 等待时间较长, 导致算法效率低下。

6.3 模型的推广

传统的海洋水深测量方法包括单波束测线或者声纳测深仪, 但它们存在精度有限、单点采样等问题。利用多波束测线问题可以克服这些限制, 能够多角度、高精度深度对海水情况实时测量并且快速反馈。将多波束测线问题推广到海水深度测量应用中, 可以提高测量精度、覆盖范围和实时性, 对海洋科学研究、海洋工程和海洋资源开发等方面具有重要意义。

6.4 模型的优化

实际情况中，海平面不可能水平。对于多波束测深系统研究时需要考虑测量船的摇晃^[4]。尽管所有的多波束测深配备姿态传感器，不会影响测深的数据精度和质量，但测船的摇晃会直接影响多波束测深的覆盖宽度，即宽深比 W/D 。不考虑船的横摇偏角 α 时，理想海底平坦时宽深比的公式为：

$$\frac{W}{D} = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (65)$$

W 是覆盖宽度， D 是海水深度， θ 是多波束换能器的开角。

但现实中顾及作业时的海况，即考虑测船的横摇偏角 α 时，则理想海底平坦时宽深比的改进式为：

$$\frac{W}{D} = 2 \tan\left(\frac{\theta}{2} - \omega\right) \quad (66)$$

ω 是测船作业时的横摇偏角。

7 参考文献

- [1] 黄廷祝, 成孝予. 线性代数与空间解析几何 (第3版). 北京: 高等教育出版社, 2008
- [2] 祝慧敏. 多波束测深系统水下地形测量关键技术与精度评估[J]. 经纬天地, 2022(02): 4-6.
- [3] 廖双斌. 典型岩溶山地土壤厚度的空间插值模型应用研究[D]. 昆明理工大学, 2015.
- [4] 高慎明, 王晓云. 广西某海底管道项目的测线布设方法与优化[C]. 2018.

附录

附录 2: 问题 1 代码

```
clc
clear
depth=zeros(1,9);
depth(1,5)=70;
cover_left=zeros(1,9);
cover_right=zeros(1,9);
cover_total=zeros(1,9);
overlap=zeros(1,9);
distance=[-800 -600 -400 -200 0 200 400 600 800];
alpha=1.5;

for i=1:9
    depth(i)=-(distance(i)-0)*tan(alpha/180*pi)+70;
end

for i=1:9
    cover_left(i)=depth(i)/sin( (30-alpha)/180*pi )*sin(60/180*pi);
    cover_right(i)=depth(i)/sin( (180-60-( 60+30-
alpha ))/180*pi )*sin(60/180*pi);
    cover_total(i)=cover_left(i)+cover_right(i);
end

for i=1:9
    if(i==1)
        overlap(i)=NaN;
    else
        overlap(i)=1- 200/cos(1.5/180*pi)/ (cover_right(i-1)+cover_left(i));
    end
end
```

附录 3: 问题 2 代码

```
clc
clear
cover_left=zeros(8,8);
cover_right=zeros(8,8);
cover_total=zeros(8,8);
betax=[0,45,90,135,180,225,270,315];
for j=1:8
    beta=betax(j);
    Slope_norm=[1,0,tan(88.5/180*pi)];
    plane_norm=[0,0,1];
```

```

if(beta==90 ||beta==270 )
    Line=[0,1,0];
else
    Line=[1,tan(beta/180*pi),0];
end

distance=[0,0.3,0.6,0.9,1.2,1.5,1.8,2.1]*1852;
record_x=zeros(1,8);
record_y=zeros(1,8);

for i=1:8
    record_x(i)=distance(i)*cos(beta/180*pi);
    record_y(i)=distance(i)*sin(beta/180*pi);
end
record_z=-
(Slope_norm(1).*record_x+Slope_norm(2).*record_y)/Slope_norm(3);
depth=120-record_z;
wide_direction=cross(Slope_norm,Line);
angle=asin( dot(wide_direction,plane_norm)/ ( norm(wide_direction)*
norm(plane_norm) ) )/pi*180;
alpha(j)=angle;
for i=1:8
    cover_left(j,i)=depth(i)/sin( (30-angle)/180*pi ) *sin(60/180*pi);
    cover_right(j,i)=depth(i)/sin( (180-60-( 60+30-
angle ))/180*pi ) *sin(60/180*pi);
    cover_total(j,i)=cover_left(j,i)+cover_right(j,i);
end

end

```

附录 4： 问题 3 代码

证明90度为效率最高：

```

clc
clear

depth0=120;
j=1;
for beta=0:180
    Slope_norm=[1,0,tan(88.5/180*pi)];
    plane_norm=[0,0,1];
    if(beta==90 ||beta==270 )
        Line=[0,1,0];

```

```

        Line_chuizhi=[1,0,0];
    else
        Line=[1,tan(beta/180*pi),0];
        Line_chuizhi=[1,tan( (beta-90) /180*pi),0];
    end

    distance=1852;
    record_x=zeros(1,8);
    record_y=zeros(1,8);

    record_x=distance*cos(beta/180*pi);
    record_y=distance*sin(beta/180*pi);
    record_x2=distance*cos((beta+180)/180*pi);
    record_y2=distance*sin((beta+180)/180*pi);

    record_z=-
(Slope_norm(1).*record_x+Slope_norm(2).*record_y)/Slope_norm(3);
    record_z2=-
(Slope_norm(1).*record_x2+Slope_norm(2).*record_y2)/Slope_norm(3);
    depth1=depth0-record_z;
    depth2=depth0-record_z2;
    wide_direction=cross(Slope_norm,Line);
    touying=cross(Slope_norm,Line_chuizhi);
    angle=asin( dot(wide_direction,plane_norm)/ ( norm(wide_direction)*
norm(plane_norm) ) )/pi*180;
    angle_chuizhi(j)=asin( dot(touying,plane_norm)/ ( norm(touying)*
norm(plane_norm) ) )/pi*180;
    alpha(j)=angle;

    cover_left2=depth2/sin( (30-angle)/180*pi )*sin(60/180*pi);
    cover_right2=depth2/sin( (180-60-( 60+30-
angle ))/180*pi )*sin(60/180*pi);
    cover_total_2=cover_left2+cover_right2;

    cover_left1=depth1/sin( (30-angle)/180*pi )*sin(60/180*pi);
    cover_right1=depth1/sin( (180-60-( 60+30-
angle ))/180*pi )*sin(60/180*pi);
    cover_total_1=cover_left1+cover_right1;

    S(j)=(cover_total_1+cover_total_2)/2/cos(angle_chuizhi(j)/180*pi);

```

```

j=j+1;
end

plot(0:180,S)
ylabel('测线位置'); xlabel('测线号')

```

垂直行驶时，测线位置：

```

clc
clear

```

```

dx=1;
alpha=1.5;
record_distance=[];
j=1;

```

```

for i=0:0.1:7408
    depth=-(i-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
    cover_left=depth/sin( (30-alpha)/180*pi )*sin(60/180*pi);
    if(cover_left>= i/cos(alpha/180*pi) )
        distance=i;
    else
        break
    end
end

```

```

end

```

```

record_distance(j)=distance;
j=j+1;
while( ~ (record_distance(j-1)==7408) )

```

```

    for i=record_distance(j-1):0.1:7408
        depth2=-(record_distance(j-1)-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
        depth1=-(i-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
        cover_left(j)=depth1/sin( (30-alpha)/180*pi )*sin(60/180*pi);
        cover_right_former(j)=depth2/sin( (180-60-( 60+30-
alpha ))/180*pi )*sin(60/180*pi);
        cover_right(j)=depth1/sin( (180-60-( 60+30-
alpha ))/180*pi )*sin(60/180*pi);
        overlap=1- (i-record_distance(j-1))/cos(alpha/180*pi)/
(cover_right_former(j)+cover_left(j));
        if(overlap<=0.2&&overlap>=0.1)

```

```

        record_distance(j)=i;
        re_overlap(j-1)=overlap;
        if( cover_right(j)>=7408-i)
            record_distance(j+1)=7408;
            break
        end

    elseif(overlap<0.1)
        break
    end
end

j=j+1;
end

rectangle('Position',[0,0,7408,3704],'Linewidth',3,'LineStyle','-','EdgeColor','b')
for j=1:34
    line([ record_distance(j), record_distance(j)],[ 0, 3704] )
end
ylabel('YÖá');xlabel('XÖá')
l=34*3704;

```

附录 5：模型检验代码

```

clc
clear
depth=zeros(3704+1,7408+1);
dx=1;
o=1;
alpha=1.5;
record_distance=[];
j=1;
p=1;
d_max=2;
    best_cover_right1=zeros(1,1);
        best_cover_left1=zeros(1,1);
        best_cover_right2= zeros(1,1);
        best_cover_left2=zeros(1,1);
        best_overlap=zeros(1,1);

    beta=input('ÊäÊë½Ç¶È(89-90)');
    for distance=200:0.1:800

```

```

        changmax=distance*sin(beta/180*pi);
        x0=distance*sin(beta/180*pi)*sin(beta/180*pi);
        y0=distance*sin(beta/180*pi)*cos(beta/180*pi);
        if(beta~=90)
            depth=-(x0-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
            [cover_right,cover_left,angle]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
        else
            depth=-(x0-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
            [cover_left,cover_right,angle]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
        end
        if(cover_left>=changmax)
            distance_max=distance;
        else
            break
        end
    end
    x_shang=(3704+tan((180-beta)/180*pi)*distance_max)/tan((180-
beta)/180*pi);
    y_shang=-distance*tan((180-beta)/180*pi);
    if(x_shang>=0)
        l=norm([x_shang,3704]-[distance_max,0]);
    else
        l=norm([0,y_shang]-[distance_max,0]);
    end
    delx=(distance_max-x_shang)/1000;
    re_position(p)=distance_max;
    p=p+1;
    for d=1:700
        j=1;
        cover_right1=zeros(1,1);
        cover_left1=zeros(1,1);
        cover_right2=zeros(1,1);
        cover_left2=zeros(1,1);
        overlap=zeros(1,1);
        record_x2=zeros(1,1);
        record_y2=zeros(1,1);
        for x1=x_shang:delx:distance_max
            if(x1>=7409)
                continue
            end

```

```

        y1=tan( (180-beta)/180*pi ) * x1 - distance_max * tan( (180-
beta)/180*pi );
        if(beta~=90)
            depth=-(x1-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
            [cover_right1(j),cover_left1(j),angle1]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
        else
            depth=-(x1-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
            [cover_left1(j),cover_right1(j),angle1]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
        end
        x2=x1+d*sin(beta/180*pi);
        y2=y1+d*cos(beta/180*pi);
        record_x2(j)=x2;
        record_y2(j)=y2;
        if(x2>=7409)
            continue
        end

        if(beta~=90)
            depth=-(x2-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
            [cover_right2(j),cover_left2(j),angle2]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
        else
            depth=-(x2-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
            [cover_left2(j),cover_right2(j),angle2]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
        end

        overlap(j)=1- d/cos(angle1/180*pi)/
(cover_right1(j)+cover_left2(j));
        j=j+1;
    end

    if( min(overlap)>0.1 && max(overlap)<0.2 && d>=d_max)
        d_max=d;
        best_cover_right1=cover_right1;
        best_cover_left1=cover_left1;
        best_cover_right2= cover_right2;
        best_cover_left2=cover_left2;
        best_overlap=overlap;
        best_x2=record_x2;
        best_y2=record_y2;
    end

```

```

end
end

re_distance(o)=d_max
re_position(p)=distance_max+d_max/sin(beta/180*pi);
l=l+norm([best_x2(1),best_y2(1)]-[best_x2(end),best_y2(end)]);
o=o+1;
p=p+1;
plot(best_x2,best_y2);
hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
while( 1 )
    x1=best_x2(1):(best_x2(end)-best_x2(1))/1000:best_x2(end);
    y1=best_y2(1):(best_y2(end)-best_y2(1))/1000:best_y2(end);
    n=length(x1);
    dx=0.1;
    up=re_distance(o-1);
    d_max=2;
    dp=0;
    if(re_distance(o-1)<=100)
        dx=0.1;
    end
    if(re_distance(o-1)<=100)
        dx=0.05;
    end

    for d=dp:dx:up
        j=1;
        cover_right1=zeros(1,1);
        cover_left1=zeros(1,1);
        cover_right2=zeros(1,1);
        cover_left2=zeros(1,1);
        overlap=zeros(1,1);
        record_x2=zeros(1,1);
        record_y2=zeros(1,1);

        for i=1:n

            if(x1(i)>=7409)
                continue
            end
            if(beta~=90)
                depth=-(x1(i)-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;

```



```

        [cover_right1(j),cover_left1(j),angle1]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
    else
        depth=-(x1(i)-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
        [cover_left1(j),cover_right1(j),angle1]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
    end
    x2=x1(i)+d*sin(beta/180*pi);
    y2=y1(i)+d*cos(beta/180*pi);
    record_x2(j)=x2;
    record_y2(j)=y2;
    if(x2>=7409)
        continue
    end
    if(beta~=90)
        depth=-(x2-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
        [cover_right2(j),cover_left2(j),angle2]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
    else
        depth=-(x2-3704)*tan(alpha/180*pi)+110;
        [cover_left2(j),cover_right2(j),angle2]=calculate_cover(90-
beta+270,depth);
    end

    overlap(j)=1- d/cos(angle1/180*pi)/
(cover_right1(j)+cover_left2(j));
    j=j+1;
end

if( min(overlap)>0.1 && max(overlap)<0.2 && d>=d_max)
    d_max=d;
    best_cover_right1=cover_right1;
    best_cover_left1=cover_left1;
    best_cover_right2= cover_right2;
    best_cover_left2=cover_left2;
    best_overlap=overlap;
    best_x2=record_x2;
    best_y2=record_y2;

end

```

end

plot(best_x2,best_y2,'b');

re_position(p)=re_position(p-1)+d_max/sin(beta/180*pi);

p=p+1;

re_distance(o)=d_max

l=l+norm([best_x2(1),best_y2(1)]-[best_x2(end),best_y2(end)]);

o=o+1;

ned= (7408-best_x2(1))* sin(beta/180*pi);

if(length(re_distance) >=ned)

break

end

end

calculate_cover.m :

function [cover_left,cover_right,angle] = calculate_cover(beta,depth)

Slope_norm=[1,0,tan(88.5/180*pi)];

plane_norm=[0,0,1];

if(beta==90 ||beta==270)

Line=[0,1,0];

else

Line=[1,tan(beta/180*pi),0];

end

wide_direction=cross(Slope_norm,Line);

angle=asin(dot(wide_direction,plane_norm)/ (norm(wide_direction)*
norm(plane_norm)))/pi*180;

cover_left=depth/sin((30-angle)/180*pi)*sin(60/180*pi);

cover_right=depth/sin((180-60-(60+30-

```
angle))/180*pi)*sin(60/180*pi);
end
```

附录 6：计算覆盖面积

calculate_depth.m :

```
function depth_x = calculate_depth(x,y)
    i=y;
    j=x;

    load data.mat

    if( mod(i,37.04)==0 && mod(j,37.04)==0 )
        depth_x=depth( (i/37.04)+1,(j/37.04)+1);
    else
        x=floor( i/37.04)+1;
        y=floor( j/37.04)+1;
        if(i==9260)
            zuoshang=depth(x-1,y);
            d_zuoshang= norm([zong(x-1),heng(y)]*1852-[i,j]);

            youshang=depth(x-1,y+1);
            d_youshang=norm([zong(x-1),heng(y+1)]*1852-[i,j]);
            zuoxia=depth(x,y);
            d_zuoxia=norm([zong(x),heng(y)]*1852-[i,j]);

            youxia=depth(x,y+1);
            d_youxia=norm([zong(x),heng(y+1)]*1852-[i,j]);

        elseif(j==7408)
            zuoshang=depth(x,y-1);
            d_zuoshang= norm([zong(x),heng(y-1)]*1852-[i,j]);

            youshang=depth(x,y);
            d_youshang=norm([zong(x),heng(y)]*1852-[i,j]);
            zuoxia=depth(x+1,y-1);
            d_zuoxia=norm([zong(x+1),heng(y-1)]*1852-[i,j]);

            youxia=depth(x+1,y);
            d_youxia=norm([zong(x+1),heng(y)]*1852-[i,j]);
```

```

else
    zuoshang=depth(x,y);
    d_zuoshang= norm([zong(x),heng(y)]*1852-[i,j]);

    youshang=depth(x,y+1);
    d_youshang=norm([zong(x),heng(y+1)]*1852-[i,j]);
    zuoxia=depth(x+1,y);
    d_zuoxia=norm([zong(x+1),heng(y)]*1852-[i,j]);

    youxia=depth(x+1,y+1);
    d_youxia=norm([zong(x+1),heng(y+1)]*1852-[i,j]);
end

```

```

depth_x=( 1/d_zuoshang*zuoshang+1/d_youshang*youshang+1/d_zuoxia*zuoxia
+1/d_youxia*youxia)/(1/d_zuoshang+1/d_youshang+1/d_zuoxia+1/d_youxia);
end

```

```

end

```

附录 7： 计算最大间距

```

clc
clear
g=1;
x_qidian=41;
y_qidian=0;
d_max=0;
up=100;
dp=60;

while(1)

    if(d_max>= (up-10) )
        up=up+20;
        dp=dp+20;
    end

```

```

for d=up:-5:dp

x=x_qidian;
y=y_qidian;
depth0=calculate_depth(x,y);
m=1;
zuobiao1(m,:)=[x,y,depth0];

m=m+1;
beta= ( 74 ) /180*pi;
jiaodu= (120) /180*pi ;
lujing=0;
depth_cha=0;

while(1)

dy=(50/4+(g-1)*87.5/4);
x=x+dy/tan(beta);
y=y+dy;

if(x<=5/4*y)
    x_zhong=x;
    y_zhong=x*4/5;
    break
end
if(y>=9261)
    break
end

depth=calculate_depth(x,y);
zuobiao1(m,:)=[x,y,depth];
shexian=zeros(1,4);
total_line=0;
total_un_line=0;
ce_x1=0;
ce_un_x1=0;
shexian(1,1:3)=zuobiao1(m,:);
k=1;

    x2=zuobiao1(m,1)+d*sin(beta);
        y2=zuobiao1(m,2)-d*cos(beta);

```

```

        if(x2>7409)
            continue
        end
        if(y2<0)
            continue
        end

        W_line1=0;
    while(1)

        dx=1;
        line_x=zuobiao1(m,1) + dx*k;
        line_y=zuobiao1(m,2) -dx*k/tan(beta);
        k=k+1;
        if(line_x < 0 )
            break
        end

        if(line_y >= 9260 ||line_y<=0)
            break
        end

        cha_z=sqrt( (dx*k)^2+ (dx*k/tan(beta))  ^2 )/tan(jiaodu/2);
        depth=calculate_depth(line_x,line_y);
        shexian(k,:)=[ line_x ,line_y, depth-cha_z ,depth];

        if( shexian(k,3)>=0 )
            d_depth=calculate_depth(shexian(k,1),shexian(k,2))-
            calculate_depth(shexian(k-1,1),shexian(k-1,2));
            W_line1=W_line1+sqrt( dx^2+(dx/tan(beta))^2  );

        end

        if( shexian(k,3)<0 )
            break
        end

        end

        %%%%%%%%%%%%%%%

        k=1;
        W_line2=0;
        x2=zuobiao1(m,1)+d*sin(beta);

```

```

        y2=zuobiao1(m,2)-d*cos(beta);
        shexian=zeros(1,4);
        depth=calculate_depth(x2,y2);
        shexian(1,1:3)=[x2,y2,depth];

while(1)

    dx=1;
    line_x=x2 - dx*k;
    line_y=y2 +dx*k/tan(beta);
    k=k+1;

    cha_z=sqrt( (dx*k)^2+ (dx*k/tan(beta))  ^2 )/tan(jiaodu/2);
    depth=calculate_depth(line_x,line_y);
    shexian(k,:)=[ line_x ,line_y, depth-cha_z ,depth];

    if( shexian(k,3)>=0 )
        d_depth=calculate_depth(shexian(k,1),shexian(k,2))-
calculate_depth(shexian(k-1,1),shexian(k-1,2));
        W_line2=W_line2+sqrt( dx^2+(dx/tan(beta))^2  );

    end

    if( shexian(k,3)<0 )
        break
    end
    end
    overlap1(m)=1-d/(W_line1+W_line2);

    %%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%

    m=m+1;

end

%%%%%%%%%%%%%%

dx=(50/4+(g-1)*87.5/4);
d2=  d/ tan(  beta-atan(5/4)  );
zuobiao2=zeros(1,3);
x=x_zhong+dx;
y=y_zhong-dx/tan(beta);
depth0=calculate_depth(x,y);
m=1;

```

```

zuobiao2(m,:)= [x,y,depth0];

while(1)

dx=(50/4+(g-1)*87.5/4);
x=x-dx;
y=y+dx/tan(beta);
if(x<=0)
    break
end
if(y>=9261)
    break
end
depth=calculate_depth(x,y);
zuobiao2(m,:)= [x,y,depth];

x2=zuobiao2(m,1)+d2*cos(beta);
y2=zuobiao2(m,2)+d2*sin(beta);
if(x2>7409)
    continue
end
if(y2<0)
    continue
end
shexian=zeros(1,4);
total_line=0;
total_un_line=0;
shexian(1,1:3)=zuobiao2(m,:);
k=1;

W_line3=0;

while(1)
    dy=1;
    line_x=zuobiao2(m,1) + dy*k/tan(beta);
    line_y=zuobiao2(m,2) +dy*k;
    k=k+1;
    if(line_x < 0 )
        break
    end

    if(line_y >= 9260 ||line_y<=0)
        break
    end
end

```



```

cha_z=sqrt( (dy*k)^2+ (dy*k/tan(beta) ) ^2 )/tan(jiaodu/2);
depth=calculate_depth(line_x,line_y);

shexian(k,:)=[ line_x ,line_y, depth-cha_z ,depth];
if( shexian(k,3)>=0 )
    d_depth=calculate_depth(shexian(k,1),shexian(k,2))-
calculate_depth(shexian(k-1,1),shexian(k-1,2));
    W_line3=W_line3+sqrt( dy^2+(dy/tan(beta))^2 );

end

if( shexian(k,3)<0 )
    break

end

end

k=1;
W_line4=0;
x2=zuobiao2(m,1)+d2*cos(beta);
y2=zuobiao2(m,2)+d2*sin(beta);
shexian=zeros(1,4);
depth=calculate_depth(x2,y2);
shexian(1,1:3)=[x2,y2,depth];

while(1)

    dy=1;
    line_x=x2 - dy*k/tan(beta);
    line_y=y2 -dy*k;
    k=k+1;
    if(line_x < 0 )
        break
    end

    if(line_y >= 9260 ||line_y<=0)
        break
    end

    cha_z=sqrt( (dy*k)^2+ (dy*k/tan(beta) ) ^2 )/tan(jiaodu/2);
    depth=calculate_depth(line_x,line_y);

    shexian(k,:)=[ line_x ,line_y, depth-cha_z ,depth];

```

```

    if( shexian(k,3)>=0 )
        d_depth=calculate_depth(shexian(k,1),shexian(k,2))-
calculate_depth(shexian(k-1,1),shexian(k-1,2));
        W_line4=W_line4+sqrt( dy^2+(dy/tan(beta))^2 );

    end

    if( shexian(k,3)<0 )
        break

    end

end

overlap2(m)=1-d/(W_line3+W_line4);

m=m+1;

end

if( min(overlap2)>=0 )
    d_max=d
    d_re(g)=d_max;
    overlap1_re(g,1:length(overlap1))=overlap1;
    overlap2_re(g,1:length(overlap2))=overlap2;
    x_qidian_re(g)=x_qidian+d_max/sin(beta);
    x_qidian=x_qidian+d_max/sin(beta);
    g=g+1;
    y_qidian=0;
    break
end

end

end

```