专题 2 一元函数微分学

第一部分 内容概要

一、导数与微分的基本概念

1．导数

(1) 导数的定义

①函数在一点处的导数

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，

也可记为 $y'(x_0)$，$y'\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$．

若记 $x=x_0+\Delta x$，$f'(x_0)$ 也可表示为 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$．

若极限不存在，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

②函数在一点处的左、右导数

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数：

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右导数：

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

注：分段函数在分段点处的导数常常需要利用左、右导数的定义来计算.

③函数的导函数

如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点均可导，则称该函数在 (a,b) 内可导；若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处分别具有右导数 $f'_+(a)$ 和左导数 $f'_-(b)$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导.

(2) 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 表示

曲线 $y=f(x)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线 M_0T 的斜率，即 $\tan\alpha=f'(x_0)$，其中 α 为切

线 M_0T 的倾斜角（如图 1）.

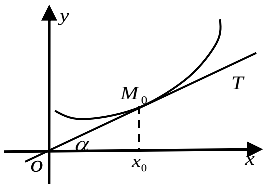

图1

(3) 可导与连续的关系

若 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 点 $x=x_0$ 处一定连续，反之不然.

2．微分

(1) 微分的定义

若函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$，可以表示成

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 $o(\Delta x)$ 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶的无穷小，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，称 $A\Delta x$ 为 Δy 的线性主部，又称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

(2) 可微与可导的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x 可微 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x).$$

(3) 微分的计算

(4) 一阶微分形式不变性

对于可微函数 $f(u)$, 不论 u 是自变量还是中间变量, 总有 $\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$ 成立.

(5) 微分在近似计算中的应用

计算增量 Δy 的近似公式：$\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)(x-x_0)$，

计算函数值 $f(x)$ 的近似公式： $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，

其中 $x=x_0+\Delta x$， $\Delta x=x-x_0$.

二、基本求导公式与求导法则

1．基本求导公式

(1) $(c)'=0$ 　(c 为常数)；　　(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ 　(μ 为实数)；

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$；　　(4) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(5) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$；　　(6) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；　　(8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$；　　(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；　　(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$；　　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$；

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；　　(16) $(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2．求导法则

(1) 四则运算法则：

若函数$u(x),v(x)$在点x处可导，则

① $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

② $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

③ $[c\cdot u(x)]'=c\cdot u'(x)$　(c为常数)；

④ $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$　$(v(x)\neq 0)$；

⑤ $\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$　$(v(x)\neq 0)$.

(2) 复合函数求导法则（链式法则）

设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果$\varphi(x)$在x处可导，$f(u)$在对应点u处可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在x处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \text{ 或 } y'_x=f'_u(u)\varphi'_x(x).$$

(3) 反函数求导法则

设$y=f(x)$在点x的某邻域内单调连续，在点x处可导，$f'(x)\neq 0$，则其反函数$x=\varphi(y)$在点x所对应的y处可导，并且有

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

(4) 隐函数求导法则

若$y=f(x)$是由方程$F(x,y)=0$确定的可微函数，方程两边对x求导$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,f(x))=0$，然后解出$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，此方法即为隐函数求导法.

注：对数求导法、幂指函数的求导（e 抬起、对数求导法）

(5) 参数式函数求导法则

设$\varphi(t)$，$\psi(t)$均可导，且$\varphi(t)\neq 0$，由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的一阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

三、高阶导数

1．高阶导数的定义

若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍可导，则称 $f'(x)$ 的导数 $(f'(x))'$ 称为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记为 $f''(x)$ 或 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

函数 $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$，即

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

2．常见高阶导数公式

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a\ (a>0,a\neq 1)$，$(e^x)^{(n)}=e^x$；

(2) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$，　$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(kx+\dfrac{n\pi}{2})$；

(3) $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$，$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(kx+\dfrac{n\pi}{2})$；

(4) $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$，$(x^n)^{(n)}=n!$；

(5) $(\dfrac{1}{x})^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$；　　(6) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$；

(7) $(\dfrac{1}{x+a})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+a)^{n+1}}$；　(8) $(\dfrac{1}{b-x})^{(n)}=\dfrac{n!}{(b-x)^{n+1}}$；

(9) $(\dfrac{1}{ax+b})^{(n)}=(-1)^n\dfrac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$.

3．高阶导数的求法

(1) 直接法

根据定义依次计算各阶导数，分析规律，归纳出 n 阶导数.

(2) 间接法

利用已知高阶导数公式，通过四则运算，变量代换的方法，求出 n 阶导数.

(3) 莱布尼兹公式

若 $u(x),v(x)$ 均 n 阶可导，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)}\qquad 其中\ u^{(0)}=u,\ v^{(0)}=v.$$

(4) 隐函数的二阶导数

(5) 参数式函数的二阶导数

四、微分中值定理及洛必达法则

1．微分中值定理

(1) 罗尔定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：① $[a,b]$ 上连续；② (a,b) 内可导；③ $f(a)=f(b)$，则

$\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：① $[a,b]$ 上连续； ② (a,b) 内可导,

则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(3) 柯西中值定理

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足：① $[a,b]$ 上连续； ② (a,b) 内可导,

则 $\exists \xi \in (a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

2．泰勒中值定理

若 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $n+1$ 阶的导数，则 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \quad (1)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{（}\xi\text{ 介于 }x_0\text{ 与 }x\text{ 之间）}. \quad (2)$$

公式(1)称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 的表达式(2)称为拉格朗日型余项.

当 $f^{(n+1)}(x)$ 为有界函数时，

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n] \quad (x\to x_0) \quad (3)$$

表达式(3)称为皮亚诺余项.

当 $x_0=0$ 时的泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$

称为麦克劳林公式.

3．常用麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n), \quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}), \quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}), \quad x\in(-\infty,+\infty);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}), \quad x\in(-1,1];$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n), \quad x\in(-1,1);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), \quad x\in(-1,1).$$

4．洛必达法则

$\dfrac{\text{“0”}}{0}$，$\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ 型未定式

如果 (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$；

(2) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 某个邻域内（点 x_0 可除外）可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或 ∞）.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

注：上述定理对于 $x\to\infty$ 时的 $\dfrac{\text{“0”}}{0}$ 型未定式同样适用, 对于 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的 $\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ 型未定式也有相应的法则.

“$0\cdot\infty$”，“$\infty-\infty$”，“∞^0”，“0^0”，“1^∞”型等未定式可利用代数变换或取对数的方法，将它们化为 $\dfrac{\text{“0”}}{0}$ 或 $\dfrac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty}$ 型未定式来计算.

五、利用导数研究函数性态

1．单调性（与一阶导函数的符号有关）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则有

(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增加；

(2) 若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少.

2．极值（极值点可能出现在：驻点和不可导的点处）

(1) 满足 $f'(x)=0$ 的点 x 称为函数 $f(x)$ 的驻点.

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$，即点 x_0 为驻点.

(3) 极值第一充分条件

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$．若在该邻域内：

当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

当 $x<x_0$ 或 $x>x_0$ 时，$f'(x)$ 不改变符号，则 $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值.

(4) 极值第二充分条件设函数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内二阶可导, 且 $f'(x_0)=0$, 而 $f''(x_0)\neq 0$, 则当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极小值. 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

3．最值（最值点可能出现在极值点和端点处，从而可能出现在驻点、不可导的点、端点处）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 的驻点或使 $f'(x)$ 不存在的点, 则 $f(a)$，$f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)$ 中最大(小)者即为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大(小)值.

4．曲线的凹凸性及拐点

(1) 定义

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1, x_2，恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的；如果恒有 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸的.

曲线上，使得凹凸性发生变化的点称为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) 凹凸性（与二阶导函数的符号有关）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凹的，若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的.

(3) 拐点（曲线上的点，可能出现在二阶导数值为零、二阶不可导的点处）

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内二阶可导，且 $f''(x_0)=0$（或不存在），若在该邻域内：

$f''(x)$ 在 x_0 点的左右两侧异号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

$f''(x)$ 在 x_0 点的左右两侧同号, 则 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

5．渐近线（水平、垂直、斜）

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $x=x_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=y_0$，则 $y=y_0$ 是函数 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k\neq 0, \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则 $y=kx+b$ 是函数 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

6．弧微分和曲率

(1) 若曲线 $y=f(x)$ 可微，则弧微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 二阶可导，则曲率 $K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

若曲线 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则曲率 $K=\frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}$.

(3) 曲率半径 $\rho=\frac{1}{K}$.

第二部分 典型例题

1. 利用导数的定义计算极限

例 1 已知函数 $y = f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3x+2}{x-2}=2$，试证：$f(x)$ 在 $x=2$ 处可导.

【 $f'(2)=5$ 】

例 2 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，且 $f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(e^x-1\right)-f(x)}{x^2}$.

【1】

例 3 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)\left(1+\left|\sin x\right|\right)$，要使 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导，则必有（ ）.

(A) $f'(0)=0$　(B) $f(0)=0$　(C) $f(0)+f'(0)=0$　(D) $f(0)-f'(0)=0$

【B】

例 4 已知 $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)+f\left(\dfrac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)\right]$.

【$\dfrac{f'(0)}{2}$】

例 5 当 $x\to 0$ 时，$F\left(x\right)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)f'\left(t\right)dt$ 的导数与 x^2 为等价无穷小，求 $f'(0)$.

【$\dfrac{1}{2}$】

例 6 设 $g(x)$ 满足 $g'(x)+g(x)\sin x=\cos x$，且 $g(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g'\left(x\right)-1}{x}=$ ________.

【0】

2. 分段函数的性质（连续性、可导性及导函数连续性）

例 7 设 $f(x)=\begin{cases} ax^2+b\sin x+c, & x\le 0 \\ \ln(1+x), & x>0 \end{cases}$，试问 a,b,c 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处一阶导数连续，但二阶导数不存在？

【 $a\ne\frac{1}{2}, b=1, c=0$ 】

例 8 $f(x)=(x^2+3x+2)\left|x^3-x\right|$ 有几个不可导的点？

【 2 】

例 9 函数 $y=x\left[x\right]$ 在 $(-2,2)$ 上的不可导点为 ____________

【 $-1,0,1$ 】

例 10 设 $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$ ，求 $f(x)$，并讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

【 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2, & x>1\\ \dfrac{1}{2}\left(a+b+1\right) & x=1\\ ax+b, & x<1\end{cases}$ 】

【当 $a+b=1$ 时，处处连续；】【当 $a=2,b=-1$ 时，处处可导】

3. 洛必达法则（结合变限积分、广义积分、含参量等）

例 11 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x^5}\int_0^x\sin\left(tx\right)^2dt=$ ________.

【 $\dfrac{2}{3}$ 】

例 12 $\lim\limits_{x\to0}\int_0^x\dfrac{1}{x^3}\left(e^{-t^2}-1\right)dt=$ ________.

【 $-\dfrac{1}{3}$ 】

例 13 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^k}=c(\neq0)$，则 $k=$ _____, $c=$ _____.

【 $3,\dfrac{1}{3}$ 】

例 14 设 $f(x)$ 有连续导数， $f(0)=0$ ， $f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\,dt}{x^2\int_0^{x} f(t)\,dt}$.

【1】

4. 导数与微分的计算

(1) 复合函数的链式法则（含基本求导公式、四则运算法则）

例 15 $y=\arctan x^2+e^x\tan x$，则 $y'=$____________.

【 $y'=\dfrac{2x}{1+x^4}+e^x\sec^2 x+e^x\tan x=\dfrac{2x}{1+x^4}+e^x(\sec^2 x+\tan x)$ 】

例 16 设 f,φ 可导， $y=f\left(\arctan x+\varphi(\tan x)\right)$, 则 $y'=$____________.

【 $y'=f'\left(\arctan x+\varphi(\tan x)\right)\left[\dfrac{1}{1+x^2}+\varphi'(\tan x)\sec^2 x\right]$ 】

例 17 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，则 $f'(100)=$______.

【100!】

例 18 已知 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(x^2\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=$________.

【 $\dfrac{1}{2x}$ 】

(2) 隐函数的求导（含对数求导法、幂指函数的求导）

例 19 设由 $x^y = y^x$ 确定 $y = y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【$\dfrac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)}$】

例 20 设 $e^{-y} + x(y-x) = 1 + x$ 确定 $y = y(x)$，求 $y''(0)$.

【-3】

例 21 设 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f' \neq 1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

【$\dfrac{f''(y) - [1 - f'(y)]^2}{x^2[1 - f'(y)]^3}$】

(3) 参数方程求导（含极坐标方程）

例 22 设参数方程$\begin{cases} x=\cos t^2 \\ y=t\cos t^2-\int_1^{t^2}\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\mathrm{d}u \end{cases}$确定 $y=y(x)$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.

【$-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$】

例 23 若函数的参数方程为$\begin{cases} x=te^t \\ e^t+e^y=2 \end{cases}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______________，

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$__________________________.

【$\dfrac{1}{(t+1)\left(e^t-2\right)},\dfrac{2-2e^t-te^t}{(t+1)^3e^t\left(e^t-2\right)^2}$】

例 24 若 $y=y(x)$ 由$\begin{cases} x+t(1-t)=0 \\ te^y+y+1=0 \end{cases}$确定，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

【$\dfrac{2}{e^2}-\dfrac{2}{e}$】

例 25 已知心脏线 $\rho=a\left(1+\cos\theta\right)$ 与 $\rho=a\left(1-\cos\theta\right)$，试证：它们在交点处的切线垂直.

(4) 高阶导数、莱布尼兹公式

例 26 设 $y=\ln\left(1-x^2\right)$，求 $y^{(n)}$.

【$(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x+1)^n}+\frac{1}{(x-1)^n}\right]$】

例 27 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$，试求 $f''(2)$.

【-32】

例 28 设 $f\left(x\right)=\left(x^{2}-3x+2\right)^{n}\cos\dfrac{\pi x^{2}}{16}$，求 $f^{(n)}\left(2\right)$.

【$\dfrac{\sqrt{2}}{2}n!$】

5. 导数的几何意义（结合定积分的应用）

例 29 过 $\left(2,3\right)$ 作曲线 $y=x^{2}$ 的切线，求该曲线和切线围成图形的面积.

【$\dfrac{2}{3}$】

例 30　设函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处可微，且满足方程

$2f(2+x)+f(2-x)=3+2x+o\left(x\right)$，这里 $o\left(x\right)$ 表示 x 高阶无穷小（当 $x\to 0$ 时），

试求微分 $\mathrm{d}f(x)\big|_{x=2}$，并求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(2，f\left(2\right)\right)$ 处的切线方程.

.

【 $\mathrm{d}f\left(x\right)\big|_{x=2}=2\mathrm{d}x, 2x-y=3$ 】

例 31 过抛物线 $y=x^2$ 上一点 $\left(a,a^2\right)$ 作切线，问 a 为何值时所作的切线与抛物线

$y=-x^2+4x-1$ 所围成的平面图形面积最小.

【 $a=1$ 】

6. 利用导数研究函数性态（含方程求根、不等式）

(1) 单调性

例 32 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $f'(x)$ 单调上升，求证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升.

例 33 已知 $a_n=\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\sqrt{n}\ln n$，试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，并证明：当 $n\geq 9$ 时，$\{a_n\}$ 单调减少.

(3) 极值与最值

例 34 求一个次数最低的多项式 $P(x)$，使得它在 $x=1$ 时取极大值 2，且 $(2,0)$ 是曲线 $y=P(x)$ 的拐点.

【 $p(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 】

例 35 设 a 为正常数，使得 $x^2 \le e^{ax}$ 对一切正数 x 成立，求常数 a 的最小值.

【$\dfrac{2}{e}$】

例 36 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x\left[f'(x)\right]^2=1-e^{-x}$，若 $x_0\ne 0$，$f'(x_0)=0$，则（　　）.

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

(B) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【C】

(3) 凹凸性与拐点（结合定积分的应用）

例 37 设 $y=\dfrac{1}{1+x^2}\left(x\ge 0\right)$ 的拐点的横坐标为 $x=a$，若

$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le a,0\le y\le \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$，试求常数 a 的值，并求区域 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3},V=\dfrac{\pi^2}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\pi$】

(4) 渐近线、作图

例 38 已知曲线 $y=\dfrac{x^2}{2\left(1-x\right)}$，1) 求单调区间与极值；2) 求凹凸区间；3) 求渐近线；4) 画出曲线简图.

(5) 方程求根

例 39 设 $g(x)=(x-11)(x-12)(x-13)(x-14)$，试证：$g'(x)=0$ 在 $(11,14)$ 内恰有三个实根.

例 40 设 k 为常数，方程 $kx-\frac{1}{x}+1=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恰有一根，求 k 的取值范围.

【$k=-\frac{1}{4}$ 或 $k\geq 0$】

例 41 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)f''(x)\geq 0$，且在 $[a,b]$ 的任何子区间上 $f(x)$ 不恒为 0，试证：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 内至多有一个零点.

(5) 不等式

例 42 设 $f\left(x\right)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，单调减少，$0<a<b$，求证：$a\int_0^b f(x)\mathrm{d}x\le b\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$.

例 43 已知 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，单调增加，求证：

$$\int_a^b (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{3}(b-a)^2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 中值定理（结合零点、介值、积分中值定理）

例 44 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上二阶可导，$f\left(0\right)=0$，$f\left(1\right)=1$，求证：存在 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得

$$\xi f''\left(\xi\right)+f'\left(\xi\right)=1.$$

例 45 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $g'(x) \neq 0$，

证明：存在点 $c \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

例 46 设 $h(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，$h(0)=h(2a)$，证明：至少 $\exists \xi \in [0,a]$，使 $h(\xi)=h(\xi+a)$.

例 47 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$\forall x \in (a,b)$，有

$f'(x)g(x)-f(x)g'(x) \neq 0$，证明：若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点，则 $g(x)$ 至少存在一个介于这两个零点之间的零点.

例 48 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且有 $f(a)=a,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)-\xi+1$.

例 49 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，求证：(1) $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；

(2) $\exists\eta(\neq\xi)\in(a,b)$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

例 50 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足等式 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，求证：

$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $\int_0^{\xi} f(x)\mathrm{d}x=0$.

例 51 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足等式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)e^x\mathrm{d}x=0$，求证：

$f(x)$ 在 (a,b) 内至少存在两个零点.

8. 泰勒中值定理

例 52 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小，则 $c=$____，$k=$____.

【$\frac{8}{3},3$】

例 53 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内有连续的二阶导数，且有

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{3}，则 f''(0)=\_\_\_\_\_\_.$$

【 4 】

例 54 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0), f'(0), f''(0)$，均不为 0，证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

例 55 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=0$，$f'(b)=0$，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\left|f''(\xi)\right|\ge 4\dfrac{\left|f(b)-f(a)\right|}{(b-a)^2}$.

9. 抽象函数性质的讨论（判断命题真伪，举反例）

例 56 判断下列命题是否成立？若判断成立，给出证明；若判断不成立，举一反例，证明命题不成立.

命题 1：若函数 $f(x),g(x)$，在 $x=a$ 处皆不连续，$a\in R$，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处不连续；

命题 2：若函数 $f(x),g(x)$，在 $x=a$ 处皆连续，但不可导，则 $f(x)+g(x)$ 在 $x=a$ 处不可导.

例 57 判断下一命题是否成立？若判断成立，给出证明；若判断不成立，举一反例，作出说明.

命题：若函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(0\right)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(2x\right)-f\left(x\right)}{x}=a$，$a\in R$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处

可导，且 $f'\left(0\right)=a$.

例 58 判断下一命题是否成立？若判断成立，给出证明；若判断不成立，举一反例，作出说明.

命题：若函数 $f\left(x\right)$ 满足 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(2x\right)-f\left(x\right)}{x}=a$，$a\in R$，则 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$

处可导，且 $f'\left(0\right)=a$.

第三部分 强化训练

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x-2}=4$，试证：$f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，并求 $f'(2)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f''(0)=$ ____________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

4. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{(x-1)}5^{n(x-1)}+ax+b}{5^{n(x-1)}+1}$，$a,b$ 为常数，$f(x)$ 处处可导，则 $a=$____________，$b=$____________.

5. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^6}\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t=$_______ .

6. $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\dfrac{1}{x^5}\left(e^{-(tx)^2}-1\right)\mathrm{d}t=$_______ ______________.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sqrt{x}}}{x^k}=c(\neq 0)$，则 $k=$________，$c=$________.

8. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$，试求 $f'(2)$，$f''(2)$.

9. $f(x)=(1+x+x^2)e^{\sin x}$，$f''(0)=$______

10. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x-\int_1^{y+x}e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$ 确定，则 $y'(0)=$ __________________

$y''(0)=$ __________________.

11. $y=\cos^2 x$，则 $y^{(n)}=$ __________________________.

12. 设 $P(x)=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^m)^n$，其中 m,n 为正整数，$P(1)=$ _______________.

13. 过 $(0,0)$ 作曲线 $y=-\ln x$ 的切线 L，求该切线、曲线 $y=-\ln x$ 与 x 轴所围的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

14. 已知 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，单调增加，$n\in N$，求证：

$$\int_a^b\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\frac{1}{n+1}\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

15. 讨论方程 $x-\frac{\pi}{2}\sin x=k$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内实根个数与参数 k 的取值之间的关系.

【参考答案】

1. 5；　2. $-\frac{1}{3}$；　3. $x=0$ 间断；　4. $a=1,b=0$；　5. $\frac{2}{3}$；　6. $-\frac{1}{3}$；

7. $k=\frac{1}{2},c=-1$；　8. $0,-32$；　9. 5；　10. $e^{-1},2e^2$；　11. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

12. $\left(-1\right)^n m^n n!$；13. $\frac{e}{2},\frac{\pi e^2}{6}$；14. 略；

15. 提示：构造辅助函数 $f(x)=x-\frac{\pi}{2}\sin x-k$，当 $k\ge 0$ 无实根，

当 $\arccos\frac{2}{\pi}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}<k<0$ 两个实根，当 $k=\arccos\frac{2}{\pi}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$ 唯一实根，

当 $k<\arccos\frac{2}{\pi}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-1}$ 无实根.