

文章编号: 1004-4965 (2005) 06-0628-06

## 关于集合 Kalman 滤波的理论和方法的发展

刘成思, 薛纪善

(中国气象科学研究院数值预报研究中心, 北京 100081)

**摘 要:** 随着同化方法的不断的发展, 一种新的资料同化方法——集合 Kalman 滤波正在兴起。简单地回顾了同化方法的发展, 探讨了集合 Kalman 滤波的特点。同时, 还介绍了集合 Kalman 滤波发展的过程以及指出目前所面临的问题和未来的发展趋势。

**关 键 词:** 同化; Kalman 滤波; 集合 Kalman 滤波

**中图分类号:** P468.0

**文献标识码:** A

## 1 引 言

近几十年来, 在大气海洋的科学研究中, 随着卫星、雷达等各种非常规资料迅速增加和模式的模拟能力加强, 作为“把各种时空上不规则的零散分布的观测融合到基于物理规律的模式当中”<sup>[1]</sup>的同化技术, 在大气海洋的研究中扮演着越来越重要的角色。

从同化所包含的内容和功能来看, 资料分析和为数值预报产生一个准确协调的初值自始至终占据着最重要的位置。从这个角度说, 同化的来源可以追溯到 1922 年 L. F. Richardson 所做的人类首次的天气数值预报的“主观分析”中。随着计算机诞生后, “主观分析”发展到了客观分析。在“同化”一词在数值预报广泛使用之前, 客观分析的方法已经经历了多项式拟合<sup>[2]</sup>到逐步订正法<sup>[3]</sup>最优插值<sup>[4]</sup>发展。六十年代以后, 随着卫星资料等非常规资料的出现, 开始考虑在客观分析中引入非常规资料尤其是卫星资料的问题。当时有一些学者把这个引入过程叫做“同化”<sup>[5, 6]</sup>。随着同化的理论和技术的发展, 其内容已经超出了原先的单纯客观分析的范围。Daley 指出<sup>[7]</sup>, 一个同化循环的内容应该包括质量控制、客观分析、初始化和为下一次同化的背景场所做的短期预报。同化的功能也不单单是为数值预报构造初值, 在观测系统的评估、资料分析、在目标性观测研究等方面也有着广泛应用。

1980 年代以后, 先进的变分同化发展起来。它对分析场进行全局调整, 使分析与观测以及某种背景场的总偏差达到最小, 这种方法为与模式变量存在复杂关系的观测要素的使用打开道路, 同时使预报模式直接介入了分析过程。变分方法加上遥感资料的使用被普遍认为是 1990 年代数值预报质量持续提高的关键因素, 变分同化方法也因此成为二十世纪末各国同化方法发展的一个主流。但变分同化方法存在一些根本的缺陷, 特别是它依赖于切线性伴随模式的后向积分, 而发展完整物理过程的数值预

收稿日期: 2005-02-17; 修订日期: 2005-03-28

基金项目: 国家“十五”重点科技攻关项目《中国气象数值预报系统技术创新研究》(2001BA607B02);

国家自然科学基金重点项目《中国强降水天气数值预报的研究》(40233036) 联合资助

作者简介: 刘成思 (1980 - ), 男, 广西梧州人, 博士研究生, 从事资料同化工作。E-mail: csliu@mail.iap.ac.cn

报模式的切线性伴随模式是十分困难，甚至在理论上可能根本是不存在的。

早在四维变分同化方法之前，基于 Kalman 滤波理论的顺序（sequential）同化方法已经被提出来。与变分同化方法寻求整个同化时段的最优解不同，顺序方法只着眼于求解单个观测时刻的最优分析值。Kalman 滤波在给出这一时刻的最优分析值的同时也给出了分析误差的分布，这是变分方法所不具备的。Kalman 滤波方法后来又扩展到非线性模式，因此原则上讲，可以比依赖于切线性及其伴随模式后向积分的变分同化方法更方便地应用到真实的大气模式中。但由于其计算量难以承受，很长时期顺序方法没有被认为是一种有业务应用前景的资料同化方法。1990 年代中期后集合预报的思路与 Kalman 滤波的研究结合起来，发展到现在称为集合 Kalman 滤波的新的同化方法。这种新的同化方法继承了 Kalman 滤波的上述长处，但又避免了至少在目前还不能承受的大量计算，因而具有业务应用潜力。集合 Kalman 滤波已成为当前资料同化领域一个新的研究热点。本文将对集合 Kalman 滤波的研究现状作一综述，特别是分析了目前存在的不足与当前研究的重点。

## 2 集合 Kalman 滤波的优点

集合 Kalman 滤波是基于随机动力预测理论发展而来的，该理论是最初在 1969 年由 Epstein<sup>[8]</sup>引入了地球科学里面。但一直到 1994 年才由海洋学者 Geir Evensen 把集合 Kalman 滤波真正地应用和推广到同化领域中。Evensen 指出，集合 Kalman 滤波是一个用蒙特卡罗的短期集合预报方法来估计预报误差协方差的四维同化方法<sup>[9]</sup>。它的主要思路是：首先，根据背景场和观测值的特征误差分布来对背景场和观测值加以一系列的扰动，并用这些加上不同扰动的背景场和观测场进行分析，得到一组分析值。然后用这组分析值的差异作为分析误差的统计样本来进行分析误差协方差的估计。对这组分析值作一个短期预报后，又可以得到一组预报值。同样，把这组预报值的差异作为背景误差的统计样本来进行背景误差协方差的估计。其计算流程如图 1。

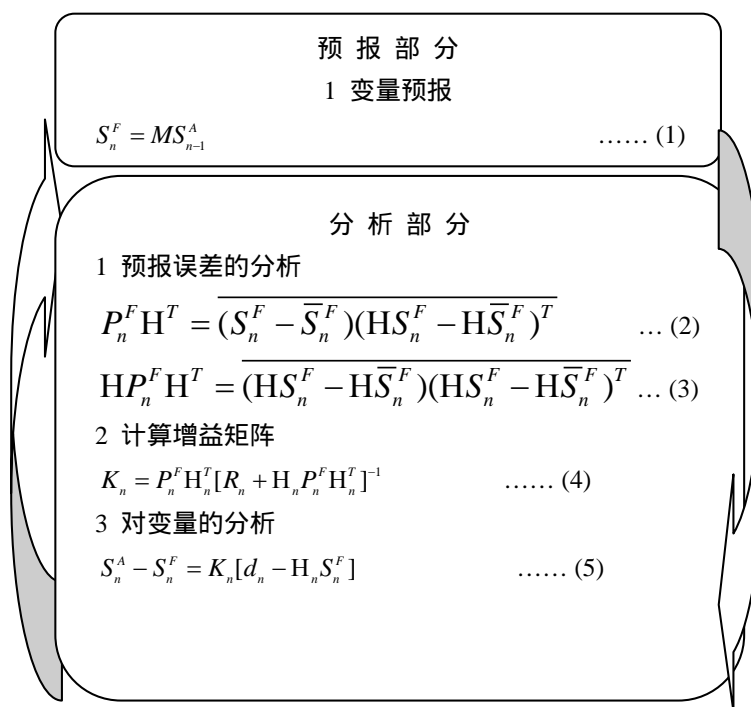


图 1 集合 Kalman 滤波的计算流程

$S$  表示加上扰动的模式状态变量的集合,  $M$  表示模式,  $P^F$  表示预报场的误差协方差,  $P^A$  表示分析场的误差协方差,  $K$  表示增益矩阵,  $H$  表示观测算子,  $R$  表示观测的误差协方差,  $d$  表示加上扰动的观测量的集合, 上标  $F$  和  $A$  分别表示预报和分析, 下标  $n$  表示时刻。上划线表示数学期望。

与一般的同化方法比起来, 集合 Kalman 滤波有以下的优点:

(1) 用集合的思想解决了在 Kalman 滤波和变分中的实际应用中背景误差协方差矩阵的估计和预报困难的问题。

在 Kalman 滤波中, 由于要对误差协方差矩阵传播, 即每次分析预报循环要对分析误差协方差矩阵进行一次切线性模式和伴随模式积分, 而分析误差协方差矩阵一般约为  $10^7 \times 10^7$ , 这就意味对误差协方差矩阵的传播必须耗费巨大的计算开销, 这至少在目前是难以承受的。而目前包括变分在内的同化技术, 通常假设背景场误差为各向同性、均匀且不随时间变化的。但是, 这样的假设, 一方面就使得同化中的权重没有及时得到更新; 另一方面, 在资料的不连续区, 特别是中小尺度, 误差的非均匀性和各向同性会很强, 不适宜再采用各向同性和均匀的假设。

而集合 Kalman 滤波采用了集合预报的方法, 把误差的统计量隐含在一组预报变量中进行预报, 然后根据该组预报值的差异进行统计, 得到新的误差协方差, 这样既解决了背景场误差的统计特征随着天气形势而演变 (flow dependent) 的问题, 又在当前计算条件下是可以实现的。

(2) 集合思想的引入, 解决了 Kalman 滤波应用在非线性系统的近似问题。

在 Kalman 滤波中, 要应用在非线性系统里面, 必须要作切线性处理, 即扩展 Kalman 滤波。但是, 随着考虑的物理过程越多, 以及在不稳定的天气形势下, 非线性作用将很强, 而切线性模式只是非线性模式的一阶近似, 无法去很好的描述非线性系统。但如果考虑更高阶的近似, “闭合”问题又很突出<sup>[10]</sup>。集合思想引入后, 就很好的解决了这个问题。它把误差统计的预报隐含在一组加上扰动的模式变量的集合预报中后, 误差统计的发展和模式变量一起, 随着非线性模式发展, 而不存在切线性近似。

(3) 在集合 Kalman 滤波中, 避免了使用伴随模式。

对于 4D-VAR 而言, 在求目标函数的时候要用到伴随模式, 而在 Kalman 滤波里面, 在预报误差协方差时也要用到伴随模式。但是, 编伴随码是对程序员而言是一件繁重的任务, 而且对于复杂模式而言其伴随模式理论上还有很多问题尚待解决。此外伴随模式总是和其模式相对应, 模式变动使得其伴随模式也必须相应的重新编写。开发以及维护伴随模式对于开发四维变分系统来说是一个难点。在集合 Kalman 滤波里面, 由于省略了 Kalman 滤波里面专门对误差协方差作预报的步骤, 也就回避了里面伴随模式的使用。

(4) 集合 Kalman 滤波可以有效地实现计算的并行化。

并行计算是目前解决大规模科学计算的最有效方法。但是, 对于一个计算模型的并行化, 很大程度受到各进程之间数据交换的制约, 各进程交换数据量越大, 并行效率越低。要最大地发挥并行计算的优势, 就要求其计算模型的各个进程计算尽可能地相互独立。而集合 Kalman 滤波和集合预报一样, 除了误差统计外, 它的集合成员在预报和分析中都是相互独立的, 这就意味着很容易实现其计算的并行化, 从而可以实现大规模的运算。

### 3 集合 Kalman 滤波存在的问题

集合 Kalman 滤波确实继承了 Kalman 滤波优点, 并且克服 Kalman 滤波一些缺点和局限。但正如所有的方法都会有自身的缺点一样, 集合 Kalman 滤波也存在一些尚待解决的问题, 其中有限集合数是集合 Kalman 滤波存在的本质性问题。由于有限集合数, 在集合 Kalman 滤波产生两个问题, 一个是求解过程中背景场误差协方差矩阵或等价的矩阵的不满秩问题, 一个是在不断同化循环中的滤波发散

问题。此外,在实际应用中,集合 Kalman 滤波还存在变量平衡、对复杂的非线性观测算子的应用、对高密度的观测资料的同化等一系列需要解决的问题。

### 3.1 不满秩问题

不满秩问题是由于有限集合数使得在求解增益矩阵中出现的。在集合 Kalman 滤波求增益矩阵中,必须对  $[R_n + H_n P_n^F H_n^T]$  求逆,但是  $R_n$  和  $H_n P_n^F H_n^T$  都是从  $N$  个样本(即集合成员)统计出来的,这也就意味着  $[R_n + H_n P_n^F H_n^T]$  的秩小于或等于  $N$ 。但是,  $[R_n + H_n P_n^F H_n^T]$  是一个  $m \times m$  维的矩阵,一般来说,集合成员数  $N$  远远少于观测维数  $m$ ,从而使得  $[R_n + H_n P_n^F H_n^T]$  是一个不满秩矩阵。而对于一个不满秩矩阵,数学上是不存在逆矩阵的。如果集合成员  $N$  和观测维数  $m$  相差不是太大时,可以用特征值分解来近似地求出  $[R_n + H_n P_n^F H_n^T]$  的逆。但两者维数相差很大的时候,将无法求得一个合理的增益矩阵。

### 3.2 滤波发散问题

在集合 Kalman 滤波实际应用中,滤波发散表现为:在不断的同化循环中,分析场将越来越向背景场靠近,最终完全排斥观测资料<sup>[11]</sup>。由于有限的集合数导致无法正确估计分析点和远处观测相关,使得本应接近零的相关不为零,从而高估了远离分析点观测的相关。这意味排斥了对分析起到重要作用的分析点附近的观测。此外,在观测上加扰动也会引起滤波发散<sup>[12]</sup>。

### 3.3 不平衡问题

早期解决由于有限集合数的引起问题一般采用“截断”方法<sup>[13]</sup>,即只同化分析点附近的观测。但是这样又会和 OI 一样,产生局地化问题,而局地化的后果就是当分析场作为初始场进行积分时,产生虚假的动力学不平衡,如风场与位势高度场严重偏离应有的准平衡关系,没有气象意义、过大的风场散度等<sup>[14]</sup>。目前一般采用了“Schur 乘积算子”<sup>[15]</sup>来对方差矩阵进行订正,但同样能产生轻微的不平衡<sup>[16]</sup>。

### 3.4 对复杂的非线性观测算子的应用

集合 Kalman 滤波虽然也可以和 4DVAR 一样使用非线性观测算子,但是由于其算法是在高斯型的概率密度函数的假设上,所以对于非高斯型的观测还需要做更多研究<sup>[17]</sup>。

### 3.5 对高密度的观测资料的同化

对于日益增多的非常规资料 4DVAR 有着较好的同化能力,这一点已经在 ECMWF 等业务化的 4D-VAR 中得到了证明。传统的集合 Kalman 滤波是在观测空间上分析,随着卫星和雷达的非常规资料不断的增加,观测空间的维数也会不断增加。这样,一方面会增加集合 Kalman 滤波的计算量,另一方面在不可能增加太多的集合数的情况下,不满秩问题也会因观测资料的增加而加剧。

## 4 集合 Kalman 滤波的发展趋势

从目前集合 Kalman 滤波研究和应用来看,未来将集中在以下几个方面发展:

(1) 与变分方法结合。应该说,集合 Kalman 滤波和变分各有自身的优缺点,Lorenc<sup>[17]</sup>曾详细比较了四维变分和集合 Kalman 滤波后,指出变分和集合 Kalman 滤波的结合将是未来数值预报同化方法发展的主流。目前美国 NCEP 已经开展了结合变分方法和 EnKF 的优点改进资料同化技术的研究<sup>[18]</sup>。

(2) 业务化的实现。虽然集合 Kalman 滤波在研究领域已经取得了可喜的成果,但要实现业务化,必须解决包括并行计算在内的一系列技术性问题。目前尚无国家实现了集合 Kalman 滤波完全业务化,但是加拿大已经开始把集合 Kalman 滤波提到业务化的日程上来<sup>[19]</sup>,并可能在近年内实现业务运行。

(3) 与集合预报结合。能在理论上和技术上很好地和集合预报结合是集合 Kalman 滤波的一个突出的优点。ECMWF 在 2000 年时就提出在未来五年里要研究能把集合预报和同化系统耦合起来的同化方

法,其主要思路就是集合 Kalman 滤波<sup>[20]</sup>。美国 NOAA 气候诊断中心(CDC)也正在研究集合预报和同化系统耦合技术<sup>[21]</sup>。

(4) 利用集合 Kalman 滤波来进行目标性观测。目前寻找目标观测区的研究基本都建立在特定的预报误差对模式初值的敏感区研究的基础上,这主要得益于近年来同化方法的发展,使得人们可以对误差协方差进行较好的估计。而可以提供随天气系统演变的误差协方差的集合 Kalman 滤波无疑是一个很好的研究工具。这几年,国际上已经陆续开展了这方面的研究<sup>[22, 23]</sup>。

尽管集合 Kalman 滤波同化方法发展的时间还较短,但从目前的研究情况来看,这种方法确实具有很多独有的优点和巨大的潜力。近年来,国际上对集合 Kalman 滤波的研究急速增加,并且已经取得很多可喜的研究成果,随着研究的深入,有望能和变分方法一样,成为同化方法的发展主流。

致 谢: 本文在完成过程中,朱国富博士给予了很好的修改意见,在此表示衷心的感谢。

## 参 考 文 献:

- [1] Panel on model-assimilated Data sets (D.R. Johnson, J.T. Bates, G.P. Brasseur, M.Ghil, A.Hollingsworth, R.L.Jenne, K.Miyakoda, E. Rasmusson, E.S.Sarachik, and T.T.Warner).1991:Four-Dimensional Model Assimilation of Data: A Strategy for the Earth System Sciences, National Academy Press, Washington, D.C.,78 pp
- [2] PANOFKY H. Objective weather-map analysis[J]. J Appl Meteor, 1949, **6**:386-392.
- [3] CRESSMAN. An operational objective analysis system[J]. Mon Wea Rev, 1959, **87**(10): 367-374.
- [4] GANDIN L. Objective analysis of meteorological fields (Leningrad: Gridromet). English translation(Jerusalem: Israel Problem for Scientific Translation), 1965.
- [5] JONES, ROBERT W. On Improving Initial Data for Numerical Forecasts of Hurricane Trajectories by the Steering Method [J]. Journal of Applied Meteorology, 1964, **3**(3): 277-284.
- [6] NAGLE, ROLAND E, CLARK, et al. Formulation and testing of a program for the objective assembly of meteorological satellite cloud observations[J]. Monthly Weather Review, 1967, **95**(4): 171-187.
- [7] DALEY. Atmospheric data analysis, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [8] EPSTEIN E S. Stochastic dynamic prediction[J]. Tellus Ser A. 1969, **21**(4): 739-759.
- [9] GEIR EVENSEN. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics[J]. J Geophys Res, 1994, **99**(10): 143-162.
- [10] 高山红, 吴增茂. Kalman 滤波在气象数据同化中的发展与应用[J]. 地球科学进展, 2000, **5**(4): 571-575.
- [11] HMAILL T M. Ensemble-Based Data Assimilation, Workshop on Predictability ECMWF, 2002.8.83-105.
- [12] WHITAKER J S, HAMILL T M. Ensemble Data Assimilation without perturbed observations[J]. Mon Wea Rev, **130**(7): 1913-1924.
- [13] HOUTEKAMER P L, MITCHELL H L. Data assimilation using an ensemble Kalman filter technique[J]. Mon Wea Rev, 1998, **126**(3): 796-811.
- [14] MITCHELL H L, HOUTEKAMER P L, PELLERIN G. Ensemble size, and model-error representation in an Ensemble Kalman Filter[J]. Mon Wea Rev, 2002, **130**(11): 2791-2808.
- [15] MITCHELL H L, HOUTEKAMER P L. An adaptive ensemble Kalman filter[J]. Mon Wea Rev, 2000, **128**(2): 426-433.
- [16] HOUTEKAMER P L, HERSHEL L, MITCHELL. A Sequential Ensemble Kalman Filter for Atmospheric Data Assimilation[J]. Mon Wea Rev, 2001, **129**(1): 123-137.
- [17] LORENC A. (Met Office). Relative merits of 4DVar and Ensemble methods. ECMWF Seminar on Recent developments in data assimilation for atmosphere and ocean, 8 to 12 September 2003.
- [18] DERBER J. (NOAA). Flow dependent Jb in a grid-point 3D-Var Ensemble data assimilation. Seminar on Recent developments in data assimilation for atmosphere and ocean. 8 to 12 September 2003.
- [19] KALNAY E. Atmospheric modeling, data assimilation and predictability. Cambridge university press, 2003. 181.

- [20] HAMILL T M, MULLEN S L, SNYDER C, et al. Baumhefner D. P. Ensemble forecasting in the short to medium range: Report from a workshop[J]. Bull Amer Meteor Soc, 2000, **81**(11): 2653–2664.
- [21] NOAA-CIRES Climate Diagnostics Center. CDC's 2001 Science Review[D].
- [22] HAMILL T M, SNYDER C. Using improved background error covariances from an ensemble Kalman filter for adaptive observations[J]. Monthly Weather Review, 2002, **130**(6): 1552–1572.
- [23] BISHOP C H, ETHERTON B J, MAJUMDAR S J. Adaptive sampling with the ensemble transform Kalman filter. Part I: Theoretical aspects[J]. Monthly Weather Review, 2001, **129**(3): 420–436.

## THE ENSEMBLE KALMAN FILTER THEORY AND METHOD DEVELOPMENT

LIU Cheng-si,     XUE Ji-shan

(Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Nowadays, data assimilation has played an important role in research of atmosphere and ocean. Four dimension variation may be considered a better data assimilation method. But with data assimilation method developing, a new data assimilation method—ensemble Kalman filter is becoming popular. As a sequential data assimilation method, ensemble Kalman filter is similar to Kalman filter that has been presented by Kalman in 1960 but hard to apply to atmospheric data assimilation in operation for large calculating cost. Ensemble method makes Kalman filter available and has made a great progress in past ten years.

After review development of data assimilation and ensemble Kalman filter, the virtue of ensemble Kalman filter is discussed. Getting a flow-dependent background error covariance may be a most attractive character of ensemble Kalman filter.

Also, the problem of ensemble Kalman filter applied is discussed in this paper. Since we can just use finite ensemble in ensemble Kalman filter, simple error is unavoidable and will bring some severe problems, for instance, filter divergence.

At the end, the future of ensemble Kalman filter is expected. Although no operational center has yet implemented ensemble Kalman filter, Canada has plan to do so. Besides, hybrid variation and four dimension variation may be mainstream of numeric weather prediction.

**Key words:** assimilation; Kalman filter; ensemble Kalman filter