微分方程反问题简介（一）

引例：预测新冠病毒的传播规律 2019-CoV_data_20200203.xlsx

1、选择适当的微分方程描述病毒传播的动力学过程

SIR (SARS)、SIER(天花)……

S-易感者；I-感病者；R-康复者；E-暴露者

新冠病毒有新的特点：潜伏期较长；无症状暴露者具有感染性

Yu Chen, Jin Cheng, Yu Jiang and Keji Liu https://arxiv.org/abs/2002.00418

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta\Big(I(t) - J(t) - G(t)\Big), \\ \dfrac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \gamma \displaystyle\int_0^t h_1(t-\tau_1, t')\beta\Big(I(t') - J(t') - G(t')\Big)\mathrm{d}t', \\ \dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \ell\Big(I(t) - J(t) - G(t)\Big) - \displaystyle\int_0^t h_2(t-\tau_1', t')G(t')\mathrm{d}t', \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \kappa \displaystyle\int_0^t h_3(t-\tau_1-\tau_2, t')\beta\Big(I(t') - J(t') - G(t')\Big)\mathrm{d}t'. \end{cases}$$

- $I(t)$: accumulated number of infected people at time t;
- $J(t)$: accumulated number of diagnosed people at time t;
- $G(t)$: currently isolated people who are infected but still in latent period at time t;
- $R(t)$: accumulated number of cured people at time t.

$$\beta、\gamma、l、k \xrightarrow{\text{微分方程模型}} I, J, G, R$$

参数　　　　　　　　　　　　数据

正问题：由确定的参数确定微分方程的解

反问题：由解的信息(数据)确定未知的参数

2、提出确定未知参数的优化方法

$$\min_{\theta} \|J(\theta;t) - J_{Obs.}\|_2,$$

$$\min_{\kappa} \|R(\theta,\kappa;t) - R_{Obs.}\|_2.$$

3、应用适当的算法求解

涉及解微分方程、解优化问题

微分方程反问题 = 微分方程建模 + 反演算法

- （偏）微分方程数值解
- 正则化方法
- 优化算法：最速下降法、共轭梯度法等

微分方程数值解

一、典型的偏微分方程介绍

1. 椭圆型方程: 在研究有热源稳定状态下的热传导，有固定外力作用下薄膜的平衡问题时，都会遇到Poisson方程

Poisson方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) \qquad (x,y)\in D$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Laplace 方程

2. 抛物型方程

热传导方程:在研究热传导过程、气体扩散现象、电磁场的传播等问题中以及在统计物理、概率论和重子力学中，经常遇到抛物型方程。这类方程中最简单、最典型的是热传导方程。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad t > 0, \qquad 0 < x < L$$

其中a是常数。

它表示长度为L的细杆内，物体温度分布的规律

3．双曲型方程

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad t > 0, \qquad 0 < x < L$$

（波的传播、物体的振动）

它表示长度为L的弦振动的规律。

二、定解问题

决定方程唯一解所必须给定的初始条件和边界条件叫做定解条件. 定解条件由实际问题提出.

- 抛物型方程边界条件的提法应为物体在端点的温度分布为已知，即边界条件

$$\begin{cases} u(0,t)=\varphi(t) \\ u(L,t)=\psi(t) \end{cases} \qquad t\geq 0$$

- 双曲型方程初始条件表示弦在两端振动规律为已知：

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 \le x \le L$$

- Poisson方程反应稳定状态的情况，与时间无关，所以不需要提初始条件。边界条件的提法为：

$$u(x,y)\big|_s = \varphi(x,y)$$

- 其中$\varphi(x, y)$为已知边界，s是区域D的边界。

- 本章主要针对几个典型的微分方程介绍常用的差分方法和有限元方法。
- 这些方法基本思想是：
  - 把一个连续问题离散化
  - 通过各种手法化成有限形式的线性方程组
  - 然后求其解。

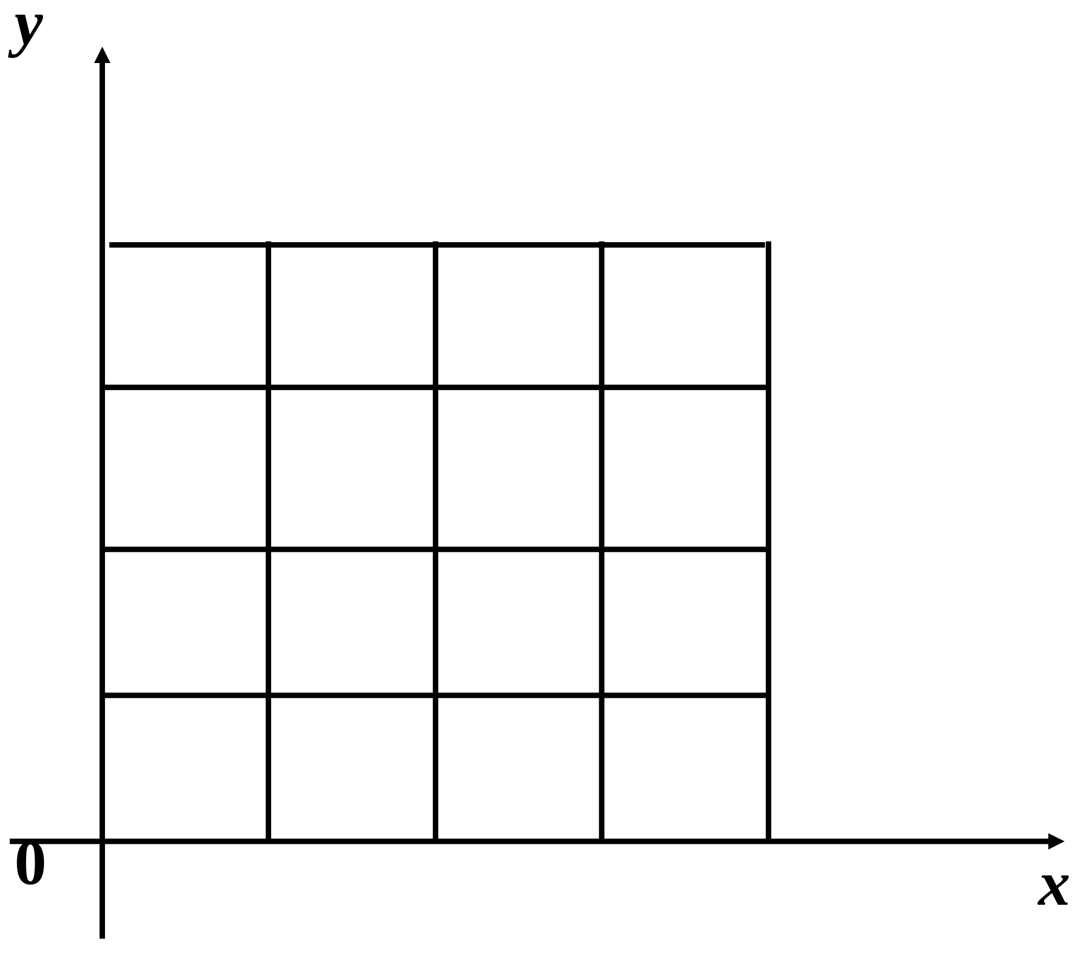
三、差分法简介

◆计算机只能作有限次的加、减、乘、除运算，它既不能求导数，更不能解偏微分方程

◆如果想在计算机上求得微分方程数值解，它的主要做法是

- ◆把偏微分方程中所有的偏导数分别用差商代替
- ◆从而得到一个代数方程组——差分方程组
- ◆然后对差分方程求解，并以所求的解作为偏微分方程数值解

因此需要对区域进行剖分，用网格点来代替连续区域，所以差分法亦称“网格法”。

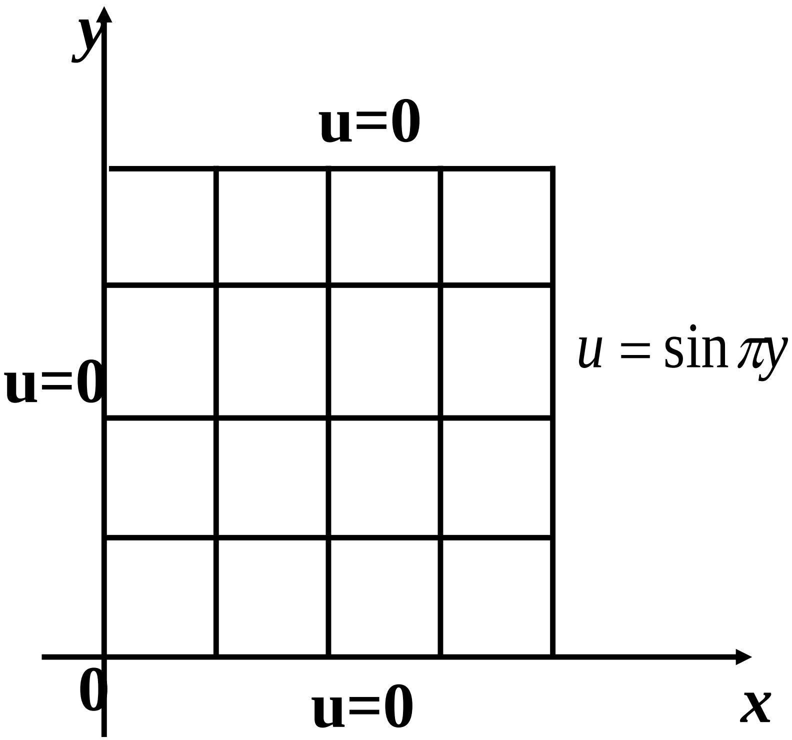


把整体分割成若干个单元来处理问题的方法在数学上称为“离散化方法”。

在结点上采用离散化方法（数值微分、数值积分、泰勒展开等）将微分方程的初边值问题化成关于离散变量的相应问题，这个相应问题的解就是方程在点x_i上的数值解$f(x)$，或在点（x_i, t_i）上的数值解$U(x_i, t_i)$。

一般来说，不同的离散化导致不同的方法。

例：取一边长为1的正方形均匀薄板，上下侧面绝热，四周保持恒温，求板内各点的稳定温定分布。



$$
\begin{cases}
\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\
u\big|_{x=0} = u\big|_{y=0} = u\big|_{y=1} = 0 \\
u\big|_{x=1} = \sin \pi y \\
(\Omega : 0 < x < 1, 0 < y < 1)
\end{cases}
$$

Laplace 方程第一边值问题

记 $(x_i, y_k) = (ih, kh), \qquad u(x_i, y_k) = y(i,k)$

u在这些点满足方程

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} \approx \frac{u(i-1,k) - 2u(i,k) + u(i+1,k)}{h^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} \approx \frac{u(i,k+1) - 2u(i,k) + u(i,k-1)}{h^2}$$

得到$u\,(i,k)$的近似$u_{i,k}$，所满足的线性代数方程组：

$$\frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,k}+u_{i-1,k}+u_{i,k+1}+u_{i,k-1}-4u_{ik}\right)=0$$

其中 $u_{0k}=u_{i0}=u_{i4}=0\quad (k,i=1,2,3)$

$$u_{4;\,k}=\sin k\pi/4=\begin{cases}0.707 & k=1\\ 1 & k=2\\ 0.707 & k=3\end{cases}$$

用迭代法来解方程组

$$u_{ik}=\frac{1}{4}\left(u_{i+1;k}+u_{i-1;k}+u_{i;k+1}+u_{i;k-1}\right)$$

简单迭代法

$$u_{ik}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1;k}^{(n)} + u_{i-1;k}^{(n)} + u_{i,k+1}^{(n)} + u_{i;k-1}^{(n)}\right)$$

高斯—赛德尔迭代法

$$u_{ik}^{(n+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,k}^{(n+1)} + u_{i,k-1}^{(n+1)} + u_{i+1,k}^{(n)} + u_{i,k+1}^{(n)}\right)$$

0	0	0	0	0	k=4
0	0	0.354	0	0.707	k=3
0	0.25	0	0.75	1	k=2
0	0	0.354	0	0.707	k=1
0	0	0	0	0	k=0
i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	

0	0	0	0	0
0	0.151	0.354	0.453	0.707
0	0.25	0.427	0.75	1
0	0.151	0.354	0.453	0.707
0	0	0	0	0

$u(0)$

0	0	0	0	0	k=4
0	0.151	0.258	0.453	0.707	k=3
0	0.182	0.427	0.583	1	k=2
0	0.151	0.258	0.453	0.707	k=1
0	0	0	0	0	k=0
i=0	*i*=1	*i*=2	*i*=3	*i*=4	

0	0	0	0	0	k=4
0	0.134	0.243	0.381	0.707	k=3
0	0.182	0.386	0.573	1	k=2
0	0.151	0.258	0.453	0.707	k=1
0	0	0	0	0	k=0
i=0	i=1	i=2	i=3	i=4	

用差分法解偏微分方程需要考虑三个问题:

1．选用网格，将微分方程离散化为差分方程。

2． 当网格步长$h\to 0$时差分方程的准确解是否收敛于微分方程的解?

3．如何解相应的代数方程组?

椭圆型方程的差分解法

椭圆型方程最简单的典型问题就是拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

泊松方程

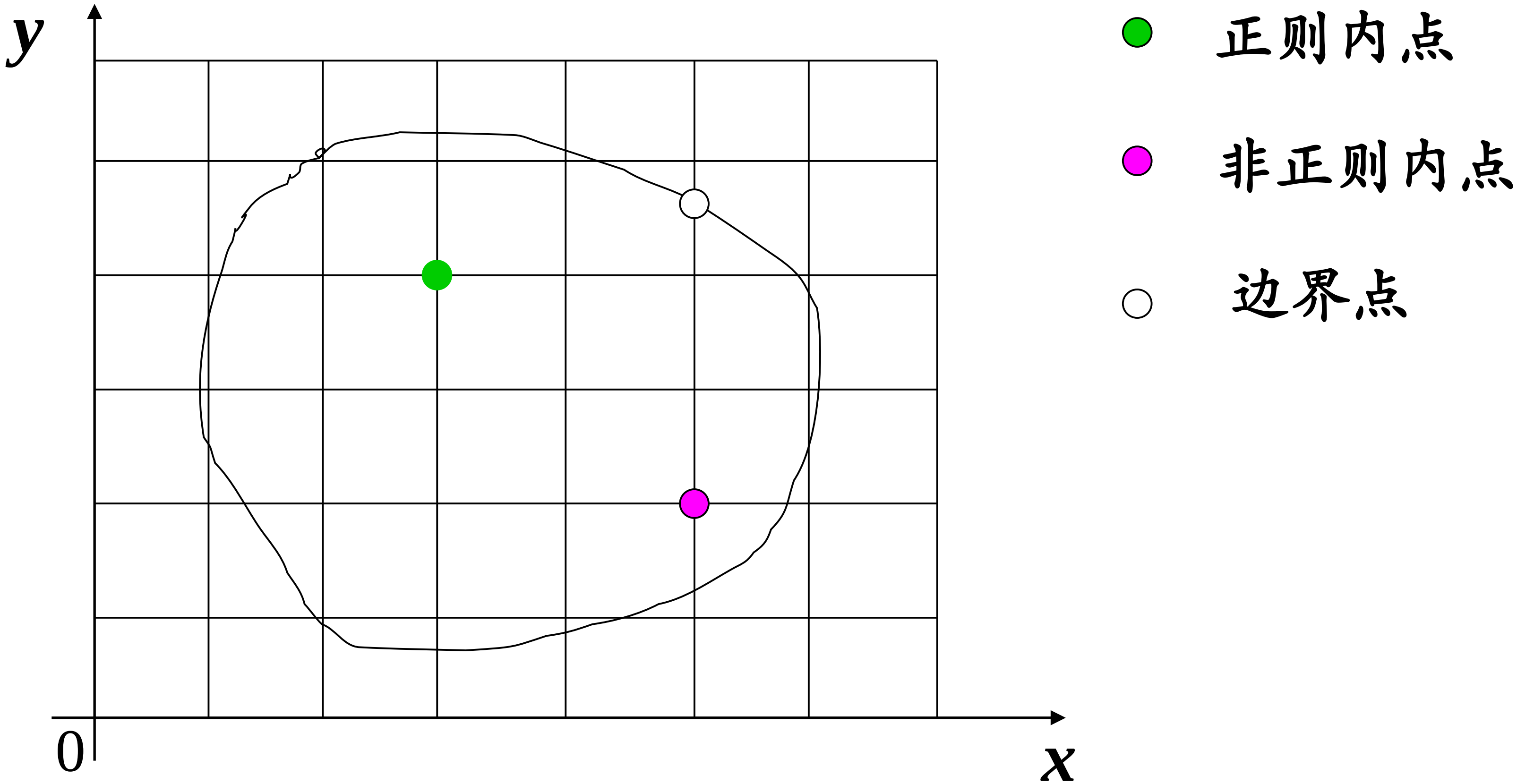
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

考虑泊松方程第一边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

(一) 矩形网格

设Ω为xy平面上一有界区域，$\partial\Omega$为其边界，是分段光滑曲线。



（二）五点差分格式

现在假设（***i***，***k***）为正则内点。沿着***x***，***y***轴方向分别用二阶中心差商代替$\boldsymbol{u}_{xx}$，$\boldsymbol{u}_{yy}$，则得

$$\Delta_h u_{ik} = \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{h_2^2} = f_{ik}$$

若以$\boldsymbol{u}_h$，$\boldsymbol{f}_h$表示网函数，记

$$u_h(x_i, y_k) = u_{ik},\ f_h(x_i, y_k) = f_{ik} = f(x_i, y_k)$$

则差分方程可简写成：

$$\Delta_h u_h = f_h$$

利用***Taylor***展式

$$u_{i+1,k} = u_{ik} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ik} + \frac{h_1^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} + \frac{h_1^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ik}$$

$$+ \frac{h_1^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ik} + \frac{h_1^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{ik} + \frac{h_1^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{(\overline{i,k})}$$

$$(i,k) \le (\overline{i,k}) \le (i+1,k)$$

$$u_{i-1,k} = u_{ik} - h_1\left(\frac{\partial u}{\partial x^2}\right)_{ik} + \frac{h_1^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} - \frac{h_1^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ik}$$

$$+ \frac{h_1^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ik} - \frac{h_1^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_{ik} + \frac{h_1^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{(\overline{i,k'})}$$

$$(i-1,k) \le (\overline{i,k'}) \le (i,k)$$

$$u_{i,k+1} = u_{ik} + h_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} + \frac{h_2^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} + \frac{h_2^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{ik}$$

$$+ \frac{h_2^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ik} + \frac{h_2^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)_{ik} + \frac{h_2^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(\underline{i,k})}$$

$$(i,k) \le (\underline{i,k}) \le (i,k+1)$$

$$u_{i,k-1} = u_{ik} - h_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} + \frac{h_2^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik} - \frac{h_2^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{ik}$$

$$+ \frac{h_2^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ik} - \frac{h_2^5}{5!}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial y^5}\right)_{ik} + \frac{h_2^6}{6!}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{(\underline{i,k'})}$$

$$(i,k-1) \le (\underline{i,k'}) \le (i,k)$$

这四个式子两两相加便有：

$$\frac{u_{i+1,k}-2u_{ik}+u_{i-1,k}}{h_1^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik}+\frac{h_1^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ik}+\frac{h_1^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_{ik}+O(h_1^6)$$

$$\frac{u_{i,k+1}-2u_{ik}+u_{i,k-1}}{h_2^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ik}+\frac{h_2^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ik}+\frac{h_2^4}{360}\left(\frac{\partial^6 u}{\partial y^6}\right)_{ik}+O(h_2^6)$$

于是可得差分方程的截断误差

$$\begin{aligned}R_{ik}(u)&=\Delta u(x_i,y_k)-\Delta_h u(x_i,y_k)\\&=-\frac{1}{12}\left(h_1^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+h_2^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{i,k}+O(h^4)\\&=O(h^2)\end{aligned}$$

（三）边值条件的处理

以第一边值条件 $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y)$ 为例

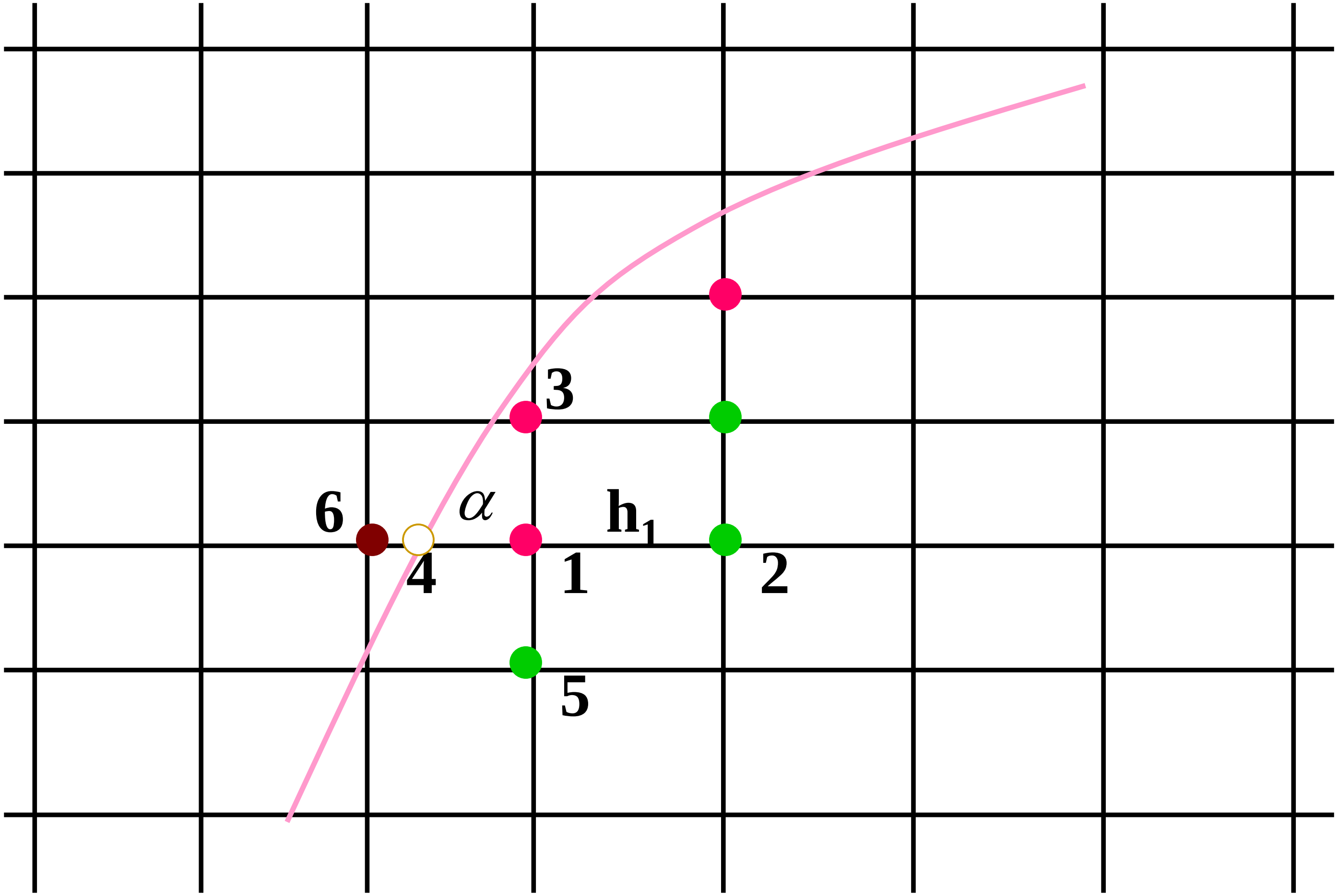
Ω_h^* ：非正则内点集合　　$\partial\Omega_h$：边界点集合

（1）直接转移法

对（x_i, y_k）$\in \Omega_h^*$ ，用边界上距离这点最近的点的值作为（x_i, y_k）的值，即

$$u_{ik} = \varphi(\bar{x}_i, \bar{y}_k)$$

（2）线性插值法



则***u***在这些点上的值有近似关系：

$$\frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_4} = \frac{h_1}{\alpha}$$

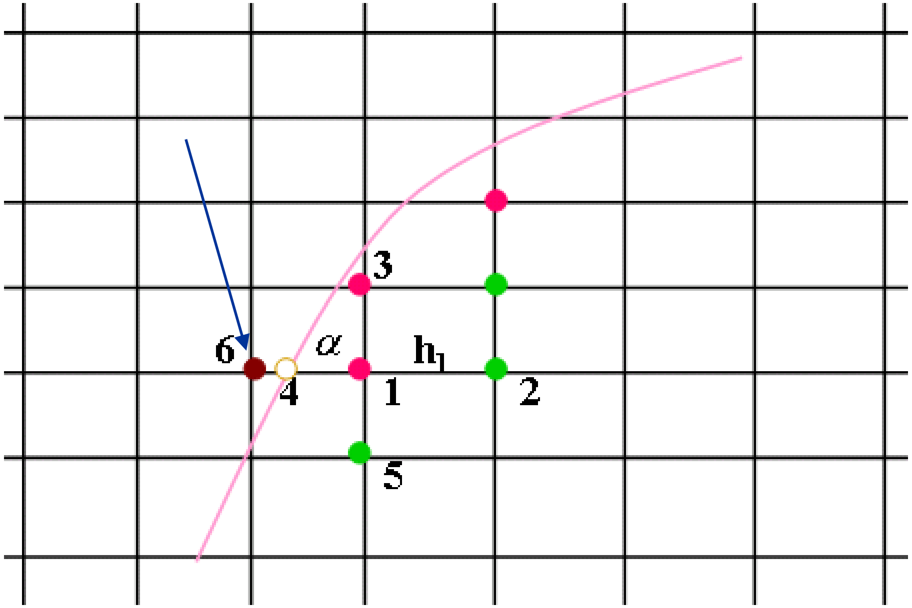
$$u_1 = \frac{\alpha u_2 + h_1 u_4}{h_1 + \alpha}$$

（3）列不等距差分方程

$$\frac{1}{\bar{\alpha}}\left(\frac{u_2-u_1}{h_1}-\frac{u_1-u_4}{\alpha}\right)+\frac{1}{h_2^2}(u_3-2u_1+u_5)=f_1$$

$$\bar{\alpha}=\frac{1}{2}(h_1+\alpha)$$

f_1为f在1点的值。



抛物型方程的差分解法

抛物型方程是指如下形式的方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z)$$

很多实际的物理问题都可以用这类方程描述：

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

现以热传导方程为例，介绍抛物型方程的有限差分格式。

设热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1)$$

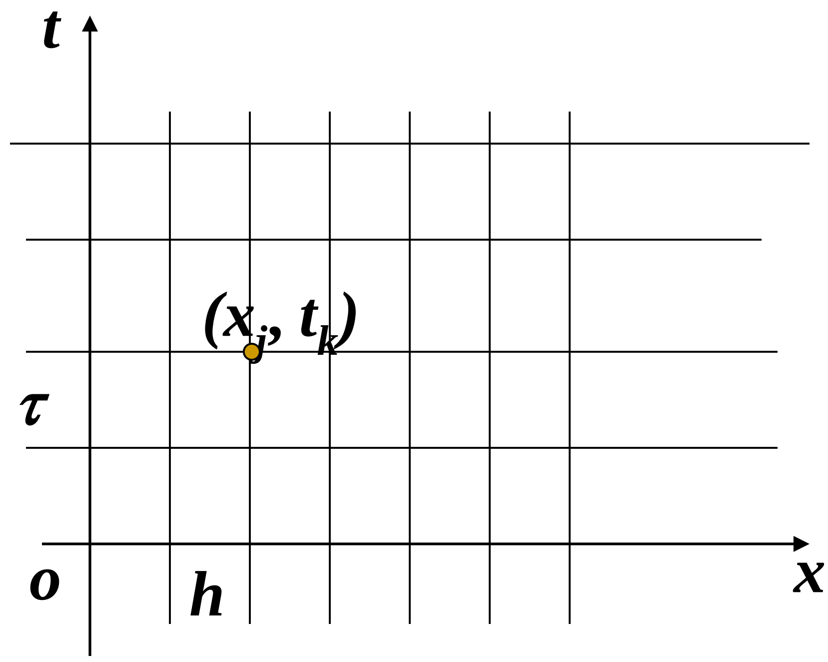
定解条件

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \phi(x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

求（1）满足（2）的解。

矩形网格

用两组平行直线族$x_j = jh$, $t_k = k\tau$ ($j = 0, \pm1, \ldots$, $k = 0$，$\pm1, \ldots$)构成的矩形网覆盖了xt平面，网格点（x_j, t_k）称为结点，简记为（j, k），h、τ为常数，分别称为空间步长及时间步长，



或称h为沿x方向的步长，称τ为沿t方向的步长，，

N为正整数。在$t = 0$上的结点称为边界结点，其余所有属于

$$c\{-\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$$

内的结点称为内部结点。

古典差分格式

于平面区域 $G=\{(x,t)|0<x<1,\ 0<t\le T\}$ 上考虑传导方程：

$$DU=\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \quad a\text{为正常数} \tag{3}$$

$$\begin{cases} u(x,0)=\phi(x) & 0<x<1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0 & 0<t\le T \end{cases} \tag{4}$$

于结点（j, k）处偏导数与差商之间有如下近似的关系：

$$\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^k + o(\tau)$$

$$\frac{u(x_{j+1} + t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j-1}, t_k)}{h^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^k + o(h^2)$$

利用上述表达式得到 LU 在 (j, k) 处的关系式：

$$\frac{u(x_j, t_{k+1}) - u(x_j, t_k)}{\tau} - a\frac{u(x_{j+1} + t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_{j-1}, t_k)}{h^2}$$

$$= [\Delta U]_j^k + o(\tau + h^2) \qquad (5)$$

令 $f_j^k \equiv f(x_j, t_k)$ ，u_j^k 视为 $u(x_j, t_k)$ 的近似值。

则有：

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} - a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = f_j^k \qquad (6)$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

差分方程（6）称为解热传导方程（3）的古典显格式，它所用到的结点如下图：

$*$

$* \quad * \quad *$

（j, k）

将（6）写成便于计算的格式：

$$u_j^{k+1}=u_j^k+r\left(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k\right)+\tau\ f_j^k \qquad （7）$$

$r=a\tau/h^2$ 称为网比，利用（7）及初边值条件（4）在网格上的值

$$\begin{cases}u_j^0=\phi_j\equiv\phi(x_j)\\u_0^k=u_N^k=0\end{cases} \qquad （8）$$

即可算出$k=1,2,\ldots$，各层上的值 u_j^k 。

截断误差阶为 $0(\tau+h^2)$。

为了提高截断误差的阶，可以利用中心差商：

$$\frac{u(x_j,t_{k+1})-u(x_j,t_{k-1})}{2\tau}=\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^k+o(\tau^2)$$

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^{k-1}}{2\tau}-a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}=f_j^k \qquad (9)$$

$$j=1,2,\ldots,N-1;\quad k=0,1,2,\ldots$$

得到 Richardson 格式，其结点图为：

*

*　　*　　*

（j,k）

*

截断误差阶为$o(\tau^2+h^2)$，较古典显格式高。

将（9）式改写成适于计算的形式：

$$u_j^{k+1}=2r\left(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k\right)+u_j^{k-1}+2\tau\ f_j^k \qquad (10)$$

$$j=1,2,\ldots,N-1;\quad k=1,2,\ldots$$

$r=a\tau/h^2$ 称为网比，（10）式中出现了三层网格上的值，

故需要事先求得第$k-1$层的值u_j^{k-1} 和第k层的值 u_j^k ，

才能逐层计算。

如果利用向后差商

$$\frac{u(x_j,t_k)-u(x_j,t_{k-1})}{\tau}=\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_j^k+o(\tau)$$

$$\frac{u_j^k-u_j^{k-1}}{\tau}-a\frac{u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k}{h^2}=f_j^k \qquad (11)$$

$$j=1,2,\ldots,N-1;\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$u_j^k-r\left(u_{j+1}^k-2u_j^k+u_{j-1}^k\right)=u_j^{k-1}+\tau f_j^k \qquad (12)$$

$$j=1,2,\ldots,N-1;\quad k=0,1,2,\ldots$$

古典隐格式，其结点图为：

（j,k）

*　　*　　*

*

截断误差为$o(\tau+h^2)$，与古典显格式相同。

六点对称格式

对于方程（3）式，在$\left(j,k+\frac{1}{2}\right)$点列方程，$\frac{\partial u}{\partial t}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

取该点的中心差商，从而

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_j^{k+1/2}=\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}+o(\tau^2)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^{k+1/2}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j+1/2}^{k+1/2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-1/2}^{k+1/2}}{h}+o(h^2)$$

$$=\frac{1}{h}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1/2}-u_j^{k+1/2}}{h}-\frac{u_j^{k+1/2}-u_{j-1}^{k+1/2}}{h}\right]+o(h^2)$$

$$u_{j+1}^{k+1/2}=\frac{1}{2}\left(u_{j+1}^{k+1}+u_{j+1}^{k}\right) \qquad u_{j}^{k+1/2}=\frac{1}{2}\left(u_{j}^{k+1}+u_{j}^{k}\right)$$

$$f_{j}^{k+1/2}=\frac{1}{2}\left(f_{j}^{k+1}+f_{j}^{k}\right)$$

将以上各式代入（3）式得到差分方程：

$$\frac{u_{j}^{k+1}-u_{j}^{k}}{\tau}=\frac{a}{h^{2}}\left[u_{j+1}^{k+1/2}-2u_{j}^{k+1/2}+u_{j-1}^{k+1/2}\right]+f_{j}^{k+1/2}$$

$$=\frac{a}{h^{2}}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}+u_{j+1}^{k}}{2}-2\frac{u_{j}^{k+1}+u_{j}^{k}}{2}+\frac{u_{j-1}^{k+1}+u_{j-1}^{k}}{2}\right]+f_{j}^{k+1/2}$$

$$u_j^{k+1} - u_j^k = \frac{a\tau}{2h^2}\left[u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1} + u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k\right] + f_j^{k+1/2}$$

整理, 得

$$-\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1} + (1+r)u_j^{k+1} - \frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}$$

$$= \frac{r}{2}u_{j+1}^k + (1-r)u_j^k + \frac{r}{2}u_{j-1}^k + f_j^{k+1/2} \qquad (13)$$

此即六点对称格式，也称为Crank-Nicolson格式，所用结点图为:

$$\begin{array}{cccl} * & * & * & k+1 \\ * & * & * & k \\ j+1 & j & j-1 & \end{array}$$

稳定性

（1）当步长无限缩小时，差分方程的解是否逼近于微分方程的解？（收敛性）

（2）计算过程中产生的误差在以后的计算中是无限增加，还是可以控制？（稳定性）

稳定性问题是研究抛物型差分方程的一个中心课题！

考察 Richardson 格式的稳定性。

用 e_j^k 表示计算 u_j^{k-1} 所产生的误差，如果右端 f_j^k 无误差存在，

则 e_j^k 满足：

$$e_j^{k+1}=2r\left(e_{j+1}^k-2e_j^k+e_{j-1}^k\right)+e_j^{k-1}$$

取 $r=\dfrac{1}{2}$ $\qquad e_j^{k+1}=e_{j+1}^k-2e_j^k+e_{j-1}^k+e_j^{k-1}$ （14）

假设k - 1层之前无误差存在。即 $e_j^{k-1}=0$，而在第k层产生了误差。$e_{j_0}^k=\varepsilon$，这一层其它点也无误差，而且在计算过程中不再产生新的误差，利用（14）式算出误差ε的传播如下表：

$r = ½$ 时 Richardson 格式的误差传播

j	j_0-4	j_0-3	j_0-2	j_0-1	j_0	j_0+1	j_0+2	j_0+3	j_0+4
k					ε				
				ε	-2ε	ε			
			ε	-4ε	7ε	4ε	ε		
		ε	-6ε	17ε	-24ε	17ε	-6ε	ε	
	ε	-8ε	31ε	-68ε	89ε	-68ε	31ε	-8ε	ε
	-10ε	49ε	-144ε	277ε	-388ε	277ε	-144ε	49ε	-10ε
	71ε	-260ε	641ε	-109ε	1311ε	-109ε	641ε	-260ε	71ε

如果选用 $r = ½$ 时的古典显格式，误差方程为：

$$e_j^{k+1} = \frac{1}{2}\left(e_{j+1}^k + e_{j-1}^k\right)$$

$r \leqslant 1/2$　时古典显格式的误差传播

j	j_0-4	j_0-3	j_0-2	j_0-1	j_0	j_0+1	j_0+2	j_0+3	j_0+4
k					ε				
				0.5ε	0	0.5ε			
			0.25ε	0	0.5ε	0	$0.25\ \varepsilon$		
		0.125ε	0	$0.\ 375\varepsilon$	0	$0.375\ \varepsilon$	0	$0.125\ \varepsilon$	
	0.0625ε	0	0.25ε	0	0.375ε	0	0.25ε	0	0.0625ε

稳定性概念：

差分格式关于初值稳定的实际含义是：如果其解在某一层存在误差，则由它引起的以后各层上的误差不超过原始误差的M倍（M为与τ无关的常数）。

因此，在稳定的条件下，只要初始误差足够小，

以后各层的误差也能足够小。

以上构造的几种差分格式中，

古典显格式：$r\le 1/2$时稳定

古典隐格式：绝对稳定

Richardson格式：绝对不稳定

六点对称格式：绝对稳定。

双曲型方程的差分解法

一阶线性双曲型方程最简单的形式为

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

当给定初始条件

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad -\infty < x < +\infty$$

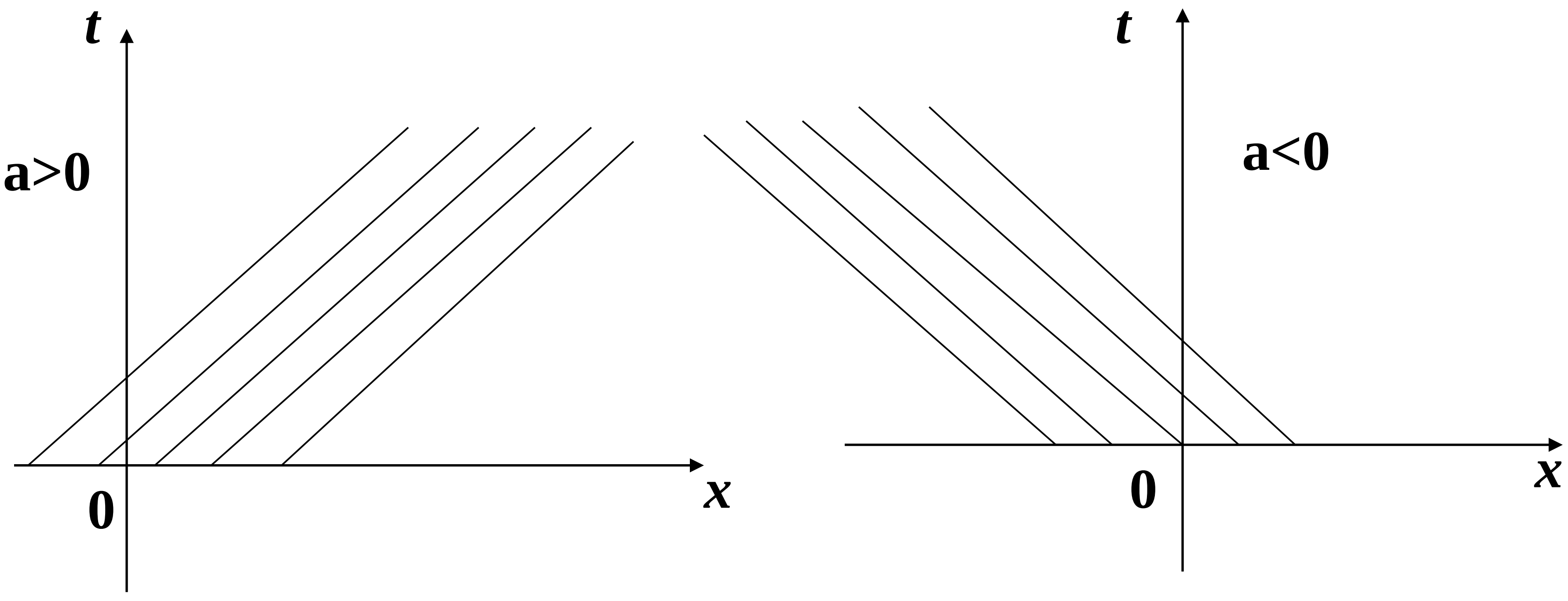
以后，容易验证，双曲型方程**(8.4.1)**的解为：

$$u(x,t) = \varphi(x - at) \qquad t > 0,\ \ -\infty < x < +\infty$$

也就是说，在平面 $x\,t$ 上，沿着

$$x - at = k \qquad (k\text{ 是常数})$$

这样的直线，u 的值保持不变。这种直线叫做特征线。



这是个单向的传播波，$a>0$时，波形$\varphi(x)$沿x轴方向传播，为右传播波，$a<0$时，为左传播波，在传播过程中，波形均不发生变化。

在物理上常见的双曲型偏微分方程最简单模型是波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

其中 $a > 0$，如果引进变量

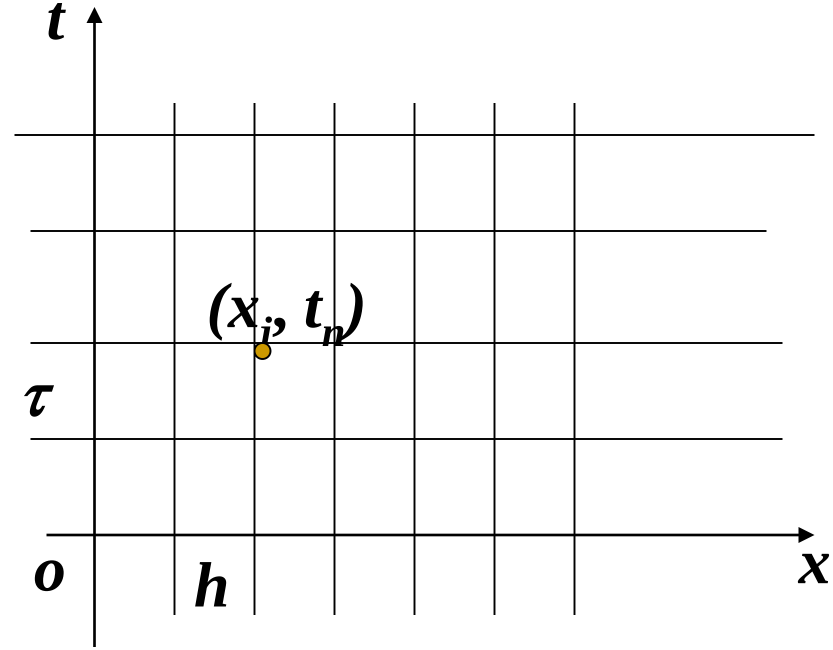
$$U = \frac{\partial u}{\partial t},\ W = a\frac{\partial u}{\partial x}$$

则得到与波动方程等价的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = a\dfrac{\partial W}{\partial x} \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} = a\dfrac{\partial U}{\partial x} \end{cases}$$

矩形网格

用两组平行直线族$x_j = jh$, $t_n = n\tau$ ($j = 0, \pm 1, \ldots$, $n = 0$，1,2 …)构成的矩形网覆盖了xt平面，网格点（x_j, t_n）称为结点，简记为（j, n），h、τ为常数，分别称为空间步长及时间步长，



或称h为沿x方向的步长，称τ为沿t方向的步长，，

N为正整数。在$t = 0$上的结点称为边界结点，其余所有属于

$$c\{-\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$$

内的结点称为内部结点。

一阶双曲方程的差分法

a）迎风格式

$u_t(x_j, t_n)$用向前差商代替，u_x（x_j, t_n）用向前或向后差商代替，得

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{h}=0$$

或

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+a\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{h}=0$$

令$r = \tau / h$，得

$$u_j^{n+1} = u_j^n - ar(u_{j+1}^n - u_j^n) \qquad (1)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - ar(u_j^n - u_{j-1}^n) \qquad (2)$$

截断误差均为 $o(\tau + h)$

节点分布图：

```
                 *
        *        *        *
              （j, n）
```

稳定性的讨论：

令 $u_j^n = v^n e^{ik\,jh}$

代入（1）得传播因子

$$G(\tau,k) = 1 - ar(e^{ikh} - 1)$$
$$= 1 + ar(1-\cos kh) - iar\sin kh$$

$$|G(\tau,k)|^2 = [1 + ar(1-\cos kh)]^2 + a^2 r^2 \sin^2 kh$$
$$= \left[1 + 2ar\sin^2\frac{kh}{2}\right]^2 + 4a^2 r^2 \sin^2\frac{kh}{2}\cos^2\frac{kh}{2}$$
$$= 1 + 4ar(1+ar)\sin^2\frac{kh}{2}$$

当a>0时，恒有$\left|G(\tau,k)\right|^2 > 1$，格式（8.4.7）不稳定 ；

当a<0且$ar \le 1$时，$\left|G(\tau,k)\right|^2 \le 1$，格式（8.4.7）稳定。

格式（2）在a <0时不稳定，在a >0且$ar \le 1$时稳定。

将迎风格式写为统一形式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - r\left[\frac{a+|a|}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{a-|a|}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n)\right] \tag{3}$$

稳定性条件为：$|a|r \le 1$

b) Lax-Friedrichs格式

$$\frac{u_j^{n+1}-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)}{\tau}+\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2h}=0 \qquad (4)$$

该格式构造于1954年，用到 $u_j^n \approx \frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)$

的技巧，截断误差为 ： $o\left(\frac{h^2}{\tau}\right)+o(\tau+h^2)$

节点分布图：

        *

*   *   *

（j, n）

传播因子

$$G(\tau,k)=\cos kh - iar\sin kh$$

$$\left|G(\tau,k)\right|^2=\cos^2 kh + a^2r^2\sin^2 kh = 1-(1-a^2r^2)\sin^2 kh$$

当 $|a|r\le 1$ 时，$|G(\tau,k)|\le 1$，即格式（**4**）在 $|a|r\le 1$ 时稳定。

c）Lax-Wendroff格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{a}{2}r(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)+\frac{a^2}{2}r^2(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

截断误差为 $o(\tau^2+h^2)$ 节点分布图：

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ * & * & * \\ & (j,n) & \end{array}$$

传播因子

$$G(\tau,k)=1-2a^2r^2\sin^2\frac{kh}{2}-iar\sin kh$$

$$|G(\tau,k)|^2=1-4a^2r^2(1-a^2r^2)\sin^4\frac{kh}{2}$$

当 $|a|r\le 1$ 时有 $|G|\le 1$，即格式在 $|a|r\le 1$ 条件下稳定。

d）古典隐式格式

u_t用向后差商代替，u_x用中心差商代替得

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

截断误差为：$o(\tau + h^2)$

传播因子： $G(\tau,k) = \dfrac{1 - ari\sin kh}{1 + a^2 r^2 \sin^2 kh}$

$$\left|G(\tau,k)\right|^2 = \frac{1}{1 + a^2 r^2 \sin^2 kh}$$

对任意的网格比，均有 $\left|G \le 1\right|$，故古典隐格式绝对稳定。

e）Grank-Nicholson格式

在（ $x_j, t_{n-\frac{1}{2}}$ ）处展开，由 $u_j^{n-\frac{1}{2}} \approx (u_j^n + u_j^{n-1})/2$

及中心差商以式而得到：

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + \frac{a}{2}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}\right) = 0$$

截断误差为 ： $o(\tau^2 + h^2)$

绝对稳定

二阶双曲型方程的差分格式

直接构造方程$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$的差分格式

$\boldsymbol{u_{tt}}$, $\boldsymbol{u_{xx}}$均用中心差商代替之，得

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

$$u_j^{n+1} = 2(1 - a^2 r^2) u_j^n + a^2 r^2 (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - u_j^{n-1}$$

其中网格比：$\lambda = \dfrac{\tau}{h}$　　截断误差　$o(\tau^2 + h^2)$

作业一 请用合适的数值方法求解下列问题：

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^t a(s)u(x,t-s)\mathrm{d}s = f(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Sigma_T, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

$$f(x,t) = (0.05t^5 + t^3 + 3.5t^2 + 1)\sin x,$$

$$a(t) = t, \quad u_0(x) = sinx, \quad Q_T = (0,\pi) \times (0,1)$$