

湖羊的空间利用率

摘要

湖羊是国家级绵阳保护品种。为了合理规划与充分利用湖羊养殖场的场地空间，避免资源浪费，本文根据湖羊养殖场的标准规格，建立数学模型，制定相应生产计划。达到减少湖羊养殖场羊栏闲置栏，为经营管理者保障效益。

对于问题一，经过计算发现种公羊可以进行 4 轮交配，前三轮的时间间隔为 20 天，第三轮与第四轮时间间隔为 40 天，分配比例分别是 1:14, 1:14, 1:14 和 1:7。假设种公羊数量为 x ，通过计算得到各个时期所需要的栏数:公羊共有 $\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil$ 栏，哺乳期母羊共有 $\left\lceil \frac{14x}{6} \right\rceil$ 栏，怀孕期母羊共有 $\left\lceil \frac{14x}{8} \right\rceil$ 栏，羔羊共有 $\left\lceil \frac{14 \times 2x}{14} \right\rceil$ 栏。通过观察各繁殖周期的时间轴，发现第一轮次与第二轮次育肥期和哺乳期重叠时期所需栏数最多，由此建立相关线性规划模型。(1) 解得种公羊数量为 8，基础母羊数量最小为 386，最大为 392。(2) 在第四轮次中，因为种公羊与基础母羊的配比可以在 1:6~1:7 之间上下浮动，所以年化出栏羊只数量范围是[1230,1249]。(3)通过罗列和配凑，计算出年化出栏羊只数量不低于 1500 时的标准羊栏的数量缺口为 26。

对于问题二，在基于问题一的基础上，主要从种公羊与基础母羊的配种时机和数量、羊栏的使用方案、年化出栏羊只数量三个方面来进行规划，建立具体生产计划。具体数据详见表 1~表 4。

对于问题三，考虑各种不确定因素的情况，首先确定最大天数和最小天数的可能性组合，确定养殖周期的轮数。因为受孕时间的不确定性以及孕期时间跨度为四天，将长度为 20 的交配期划分成 7 个方案，实现分娩时间不超过 7 天的孕期羊栏使用安排。为了提高羊栏的周转率，在羊栏使用量较大的育肥期实现羊栏 0 空置，约定一个育肥周期与一个母羊繁殖周期相等，或相差不超过 2 天。统计这段时间内羊栏的使用量，通过动态规划模型确定养殖场羊栏的数量，使得期望损失最小。

关键词：湖羊养殖，生产计划，年化出栏量，动态规划模型

一、 问题重述

1.1 问题背景

湖羊作为我国太湖平原重要家畜之一,具有四季发情、繁殖力高、性成熟早、生长发育快、泌乳量大、育羔能力强、适应性强、产独特的白色羔皮等优点。湖羊养殖场内一般设有若干羊栏,不同性别、大小、不同生长阶段对空间资源有不同的要求。为更好地利用起有限的空间资源,保障养殖场的效益,需要安排合理的生产计划,不同时期的湖羊需要安排不同的羊栏,通过控制羊只繁育期,达到尽可能减少羊栏闲置的目的,避免资源的浪费。

1.2 问题重述

由题:种公羊与基础母羊一般按不低于 1:50 的比例配置。种公羊和母羊在非交配期原则上不关在同一栏中。某湖羊养殖场设置标准羊栏,规格是:空怀休整期每栏基础母羊不超过 14 只;非交配期的种公羊每栏不超过 4 只;自然交配期每栏 1 只种公羊及不超过 14 只基础母羊;怀孕期每栏不超过 8 只待产母羊;分娩后的哺乳期,每栏不超过 6 只母羊及它们的羔羊;育肥期每栏不超过 14 只羔羊。原则上不同阶段的羊只能同栏。为保障效益,需要制定生产计划提高养殖场的空间利用率。以确保有足够多的羊栏,同时尽量减少羊栏闲置。

对于问题一,排除不确定因素的影响,在连续生产条件下,自然交配期 20 天,母羊都能受孕,孕期 149 天,每胎产羔 2 只,哺乳期 40 天,羔羊育肥期 210 天,母羊空怀休整期 20 天。

(1) 建立湖羊的数量关系以及羊栏数量关系的数学模型;

(2) 计算出养殖场种公羊与基础母羊的合理数量,估算年化出栏羊只数量的范围;

(3) 若该养殖场希望每年出栏不少于 1500 只羊,估算现有标准羊栏数量的缺口。

对于问题二,在问题一的基础上,得出种公羊与基础母羊的配种时机和数量、羊栏的使用方案、年化出栏羊只数量的生产计划。

对于问题三,在多重不确定因素的影响下,通过控制住变量,以此来建立的相关线性规划模型。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

不考虑不确定因素的影响以及种羊的淘汰更新。首先通过给定的生长周期 $T=229$ 天列出时间序列表。假设公羊数量为 x ，根据标准羊栏的规格建立湖羊的数量关系以及羊栏数量关系的数学模型。种公羊与基础母羊按不低于 1:50 的比例配置。方案一:按 1:14 的比例连续配置三轮，此时闲置栏数为 10。在此模型上进一步优化得到方案二:前三轮按照 1:14 的比例配制，第四轮按照 1:7 的比例配制，使其最大限度地利用 112 栏。根据该模型，计算出养殖场种公羊与基础母羊的合理数量，求出年化出栏羊只数量范围。利用罗列和配凑的方法，确定该养殖场年出栏不少于 1500 只羊的现有标准羊栏数量的缺口。

2.2 问题二的分析

在问题一的基础上，要求列出详细生产计划。已知问题一 4 个轮次中前三个轮次配比相同，即前三批生产计划相同。第四批配比在 1:6~1:7 之间存在可调整范围。要使得年化出栏羊只数量 $y = \frac{\text{基础母羊数量} \times 2}{229} \times 365$ 最大，则基础母羊数量要尽可能多。根据基础母羊周期 T ，公羊数量、母羊数量、配种时机等决策变量，求得 y 的大小。具体生产计划安排如表一。

2.3 问题三的分析

由于问题三每一个时间段均存在不确定因素，比如母羊通过自然交配受孕率为 85%，孕期会在 147-150 天内波动，羔羊平均死亡率 3%等。并且母羊交配期结束后 30 天识别出是否成功受孕，所以整个怀孕周期为 $20+30=50$ 天。分析各个时期羊栏的使用量，确定最大天数和最小天数的可能性组合。通过不同时期之间的交叉关系，在均匀分布的前提条件下，确定养殖周期的轮数。在此基础上，约定好每一个批次初始母羊数量，使得在确定怀孕后，进入下一个周期的母羊个数相同。通过分析，选出羊栏使用量最大的时期，即孕期。孕期之间的空缺应尽可能小，保证尽可能减少损失。因为孕期所需栏数大，一旦有空缺，即会造成大量损失。以小羊的育肥期覆盖整个母羊的繁殖期，计算这段时间内羊栏的使用量，通过无限规划模型确定羊栏的数量，使得期望损失最小。在 7 天的哺乳期内，将交配期进行适当的划分，分成 7 类。在三个轮次中，计算每天羊栏的使用

量。再利用线性规划模型，找寻最佳的羊栏数量。

三、 基本假设

1. 假设自然交配期约为 3 周。
2. 假设孕期约为个 5 月。
3. 假设每胎通常产羔 2 只。
4. 假设哺乳期约为 6 周。
5. 假设空怀休整期约为 3 周。
6. 假设问题一中种公羊数量为 x 。

四、 符号说明

序号	符号	含义
1	x	种公羊总数
2	y	年化出栏羊只数量
3	$\lfloor \quad \rfloor$	向下取整
4	$\lceil \quad \rceil$	向上取整
5	T	基础母羊生产周期
6	t	交配期天数
7	l	孕期天数
8	n	哺乳期天数
9	m	育肥期天数
10	r	空怀休整期天数
11	i	非交配期天数
12	M	总栏数
13	a	孕期系数
14	b	哺乳期系数
15	c	育肥期系数
16	X_i	第 i 天使用的栏数

17	W	损失总量
18	q	一天租用栏数的最大量

五、模型的建立与求解

5.1 问题一的模型的建立与求解

5.1.1 方案一模型的建立与求解

(一) 三轮交配模型的建立 (1:14)

首先, 不考虑未知影响因素和种羊的淘汰更新。通过计算得出基础母羊的生产周期 T 为 229 天, 公羊与基础母羊一般按不低于 1:50 的比例配置。标准栏中, 自然交配期每栏 1 只种公羊及不超过 14 只基础母羊。此标准下, 连续交配 3 次的比例是 1:42, 而连续交配 4 次的比例是 1:56, 不符合条件。即一只种公羊最多可以连续交配 3 次, 最大限度利用种公羊的资源优势。在连续生产的条件下, 交配期 $t=20$, 即每轮次之间有 20 天的时间差。

因为非交配期的种公羊每栏不超过 4 只, 哺乳期每栏不超过 6 只母羊及它们的羔羊, 怀孕期每栏不超过 8 待产母羊, 育肥期每栏不超过 14 只羔羊。

假设种公羊的数量共有 x 只, 则基础母羊共有 $14x$ 只, 羔羊共有 $14 \times 2x$ 只, 公羊共有 $\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil$ 栏, 哺乳期母羊共有 $\left\lceil \frac{14x}{6} \right\rceil$ 栏, 怀孕期母羊共有 $\left\lceil \frac{14x}{8} \right\rceil$ 栏, 羔羊共有 $\left\lceil \frac{14 \times 2x}{14} \right\rceil$ 栏。

在一个周期中, 需要耗费栏数最多的时期为哺乳期; 在一个轮次中, 需要耗费栏数最多的时期为哺乳期和育肥期重叠时间。当三个轮次同时进行, 在时间段重叠最多的地方, 即所需栏总数。

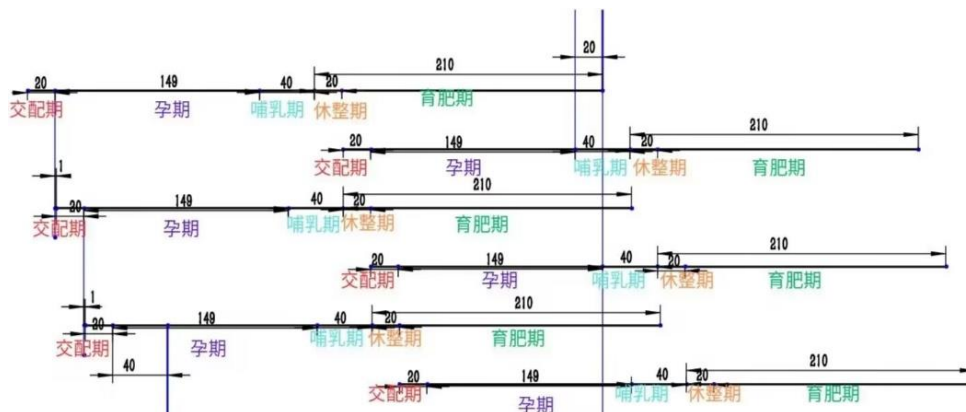


图 1 时间序列表

通过时间序列表发现，在第一轮次中，基础母羊的第二次哺乳期与第一次育肥期重叠，重叠时间为 21 天，此时第一次育肥期的小羊还未出栏，第二次哺乳期的小羊产生新的栏数需求；在第二轮次中，基础母羊的第二次哺乳期与第一轮次第一次育肥期也发生重叠，重叠时间为 1 天，与上述情况相同；在第三轮次中，不发生重叠。（如图 1）。第二轮次的重叠时间与第一轮次的重叠时间也存在一天的重叠，此时，第一轮次产生的最大需求量与第二轮次产生的最大需求量同时存在，即为所需总栏数。养殖场现有 112 个标准羊栏，需使得的所需总栏数不超过 112 栏。计算公式如下：

$$M_{\max} = a \cdot \left\lceil \frac{14x}{8} \right\rceil + b \cdot \left\lceil \frac{14x}{6} \right\rceil + c \cdot \left\lceil \frac{14 \times 2x}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil \leq 112 \quad (1)$$

（二）模型求解

问题一中，种公羊与基础母羊的自然交配期为 20 天。首先设每个轮次之间的时间差都为 20 天。此时一共存在两个哺乳期，三个育肥期，一个孕期，还包括一个种公羊的非交配期。此时所需要的总栏数具体计算公式如下：

$$2 \cdot \left\lceil \frac{14x}{6} \right\rceil + 3 \cdot \left\lceil \frac{14 \times 2x}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{14x}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil \leq 112 \quad (2)$$

解得

$$x \leq 8.84$$

当 $x=8$ 时，种公羊数量为 8，基础母羊数量为 112，羊羔数量为 224。带入公式(1)计算可得所需总栏数为 102 栏，剩余 10 栏。与现实实际情况相差较大，需要进行进一步优化。

（三）模型优化

由问题一， $t=20, l=149, n=40, r=20$ 。基础母羊的周期数 $T=t+l+n+r=229$ 天。三轮时间间隔为 40 天，总共耗费 $229 \times 3 + 40 = 727$ 天，小于两年时间（730 天）。

当每个轮次之间的时间间隔为 21 天时，此时一共存在 1 个哺乳期，2 个育肥期，1 个孕期，还包括一个种公羊的非交配期。此时所需要的总栏数具体计算公式如下：

$$2 \cdot \left\lceil \frac{14 \times 2x}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{14x}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{14x}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil \leq 112 \quad (3)$$

解得

$$x \leq 9.2689$$

当 $x=9$ 时，种公羊数量为 9，基础母羊数量为 126，羊羔数量为 252。带入公式（2）计算可得所需总栏数为 110 栏，剩余两栏。

三轮时间间隔为 42 天，总共耗费 $229 \times 3 + 42 = 729$ 天，恰好在两年时间内，较为合适。

我们在寻找更加优化的方案时发现，种公羊栏数为 3，可以放 12 只种公羊，而此时剩余 2 栏，此时再增添 1 只种公羊、7 只基础母羊，经过繁殖和育肥，可收获 14 只羔羊，恰好填满 1 栏，而剩余的 1 栏，留给 7 只基础母羊。10 只种公羊，140 只基础母羊此为最合理数量。

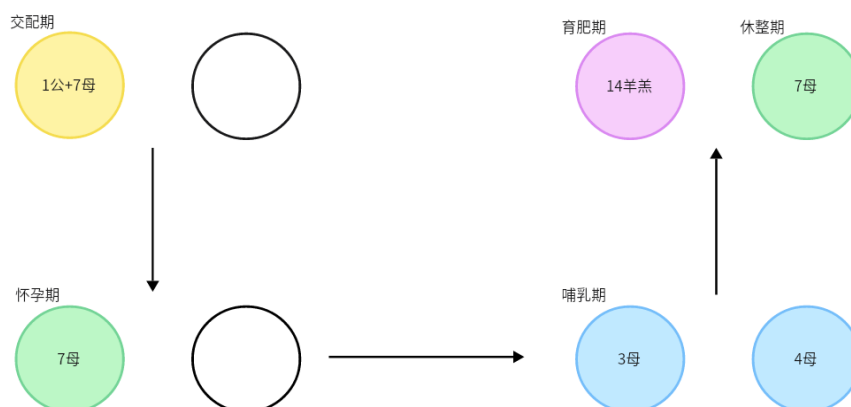


图 2 两栏分配

设年化出栏羊只数量为 y ，计算公式如下：

$$y = \left\lfloor \frac{14x \cdot 2 \cdot 3}{229} \cdot 365 \right\rfloor \quad (8 \leq x \leq 10) \quad (4)$$

$$\text{当 } x=8 \text{ 时, } y = \left\lfloor \frac{14 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 3}{229} \cdot 365 \right\rfloor = 1071$$

$$\text{当 } x=10 \text{ 时, } y = \left\lfloor \frac{14 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3}{229} \cdot 365 + 14 \right\rfloor = 1218$$

此时，年化出栏羊只数量的范围是 $1071 \leq y \leq 1218$ 。

5.1.2 方案二模型的建立与求解

(一) 四轮交配模型的建立

前三个轮次按照 1:14、1:14、1:14 的比例配置，第四轮按照 1:8 的比例配置。将第三轮与第四轮的时间间隔设置为 40 天，此时的时间序列列表如下：

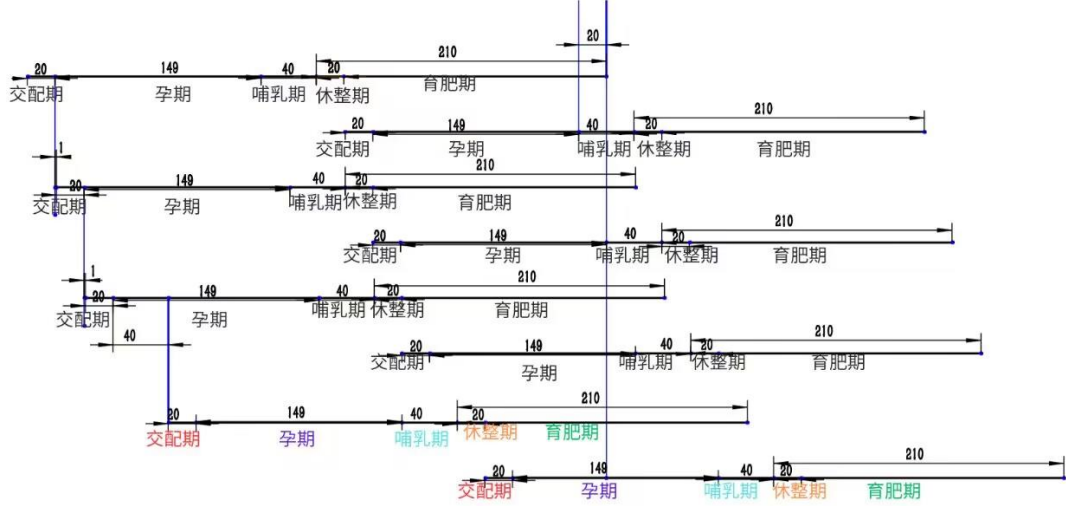


图 3 四轮时间序列表（新）

此时所需要的总栏数具体计算公式如下：

$$\left\lceil \frac{14x}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{(14x \times 3 + 8x) \times 2}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14x}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{8x}{8} \right\rceil \leq 112 \quad (5)$$

(二) 模型求解

通过画时间序列表，我们可以观察到此时所需栏数最多的时刻与三个轮次的情况相同，这时共存在 4 个育肥期，1 个哺乳期，3 个孕期以及 1 个公羊的非交配期。

由公式（5）解得

$$x \leq 7.47$$

当 $x=7$ 时，第四轮按照 1:8 的比例配置，则所需栏数为：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 7 \times 2}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{8 \times 7 \times 2}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 7}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{8 \times 7}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 7}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{7}{4} \right\rceil = 102 \quad (6)$$

102 栏小于 112 栏，会造成羊栏闲置。因此，对模型进行进一步优化。

(三) 模型优化

当 $x=8$ 时，第四轮按 1:8 的比例配置，则所需栏数为：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 2 \times 8}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{2 \times 8 \times 8}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{8 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 8}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 115 \quad (7)$$

当 $x=8$ 时，第四轮降为 1:7 的比例进行配置，则所需栏数为：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 8 \times 2}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{2 \times 7 \times 8}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{7 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 8}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 112 \quad (8)$$

恰好利用现有标准羊栏数，此时为最优解，即种公羊数为 8，基础母羊数为 392。年化出栏羊只数量为：

$$\left\lfloor \frac{(14 \times 8 \times 3 + 7 \times 8) \times 2}{299} \times 365 \right\rfloor = 1249 \quad (9)$$

即充分利用现有标准栏（112 栏）时，最大年化出栏羊只数量为 1249。为计算最小年化出栏羊只数量，我们将第四轮降为 1:6 的比例进行配置。计算结果如下：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 8 \times 2}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{2 \times 6 \times 8}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{6 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 8}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 110 \quad (10)$$

在 $x=8$ 时，将比例降为 1:6 此时又不符合最优解的条件。同时通过对比公式（9）（10）发现前三轮的基础母羊数为 336 保持不变，是由于第四轮的基础母羊数的变动导致所需总栏数的变动。

于是通过直接改变第四轮的基础母羊数来求最小年化出栏羊只数。在 1:6 的比例下求得第四轮基础母羊数为 48，将 48 直接改为 49，计算结果如下：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 8 \times 2}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{2 \times 49}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{49}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 8}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 111 \quad (11)$$

此时仍不满足最优解的条件，再将 49 改为 50，计算结果如下：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 8 \times 2}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{2 \times 50}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 8}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{50}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 8}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil = 112 \quad (12)$$

当第四轮基础母羊数为 50 时，满足最优解条件，此时年化出栏羊只数量最小，计算结果如下：

$$\left\lfloor \frac{(14 \times 8 \times 3 + 50) \times 2}{229} \times 365 \right\rfloor = 1230 \quad (13)$$

综上所述，当种公羊数量为 8，基础母羊数量为 392 时，年化出栏羊只数量

的波动范围是 $1230 \leq y \leq 1249$ 。

（四）求解标准羊栏数量缺口

要满足养殖场每年出栏不少于 1500 只羊，首先通过增加种公羊数量和改变第四轮的配比两种方式，计算出年化出栏羊只数量最接近 1500 只所需要的栏数。

当 $x=11$ 时，第四轮为 1:8 的比例配制，计算得到年化出栏羊只数量结果如下：

$$\left\lfloor \frac{(14 \times 11 \times 3 + 8 \times 10) \times 2}{229} \times 365 \right\rfloor = 1728 \quad (14)$$

此时相差 $1728 - 1500 = 228$ 只。数值相差较大，通过修改 x 的取值改变 y 。

当 $x=10$ 时，假设第四轮为 1:8 的比例配制，年化出栏羊只数量结果如下：

$$\left\lfloor \frac{(14 \times 10 \times 3 + 8 \times 10) \times 2}{229} \times 365 \right\rfloor = 1594 \quad (15)$$

当 $x=10$ 时，假设第四轮为 1:7 的比例配制，得到计算结果如下：

⋮

当 $x=10$ 时，假设第四轮为 1:5 的比例配制，得到计算结果如下：

$$\left\lfloor \frac{(14 \times 10 \times 3 + 5 \times 10) \times 2}{229} \times 365 \right\rfloor = 1498 \quad (17)$$

此时年化出栏羊只数量小于 1500，同上述方法，直接改变第四轮基础母羊数量，将 50 只改为 51 只，此时年化出栏羊只数量为 1502 只。经由计算发现，在此条件下，第四轮基础母羊数量最多可以增加到 56 只，此时年化出栏羊只数量为 1517。因为 $1517 > 1500$ ，此时所需要的栏数减去现有的栏数，即为缺口栏数。具体计算公式如下：

$$3 \times \left\lceil \frac{14 \times 10 \times 2}{14} \right\rceil + \left\lceil \frac{2 \times 5 \times 10}{14} \right\rceil + 2 \times \left\lceil \frac{14 \times 10}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{5 \times 10}{8} \right\rceil + \left\lceil \frac{14 \times 10}{6} \right\rceil + \left\lceil \frac{10}{4} \right\rceil = 138 \quad (18)$$

$$138 - 112 = 26 \text{ (栏)}$$

综上所述，标准羊栏数量的缺口为 26。

四轮交配流程如下图所示：

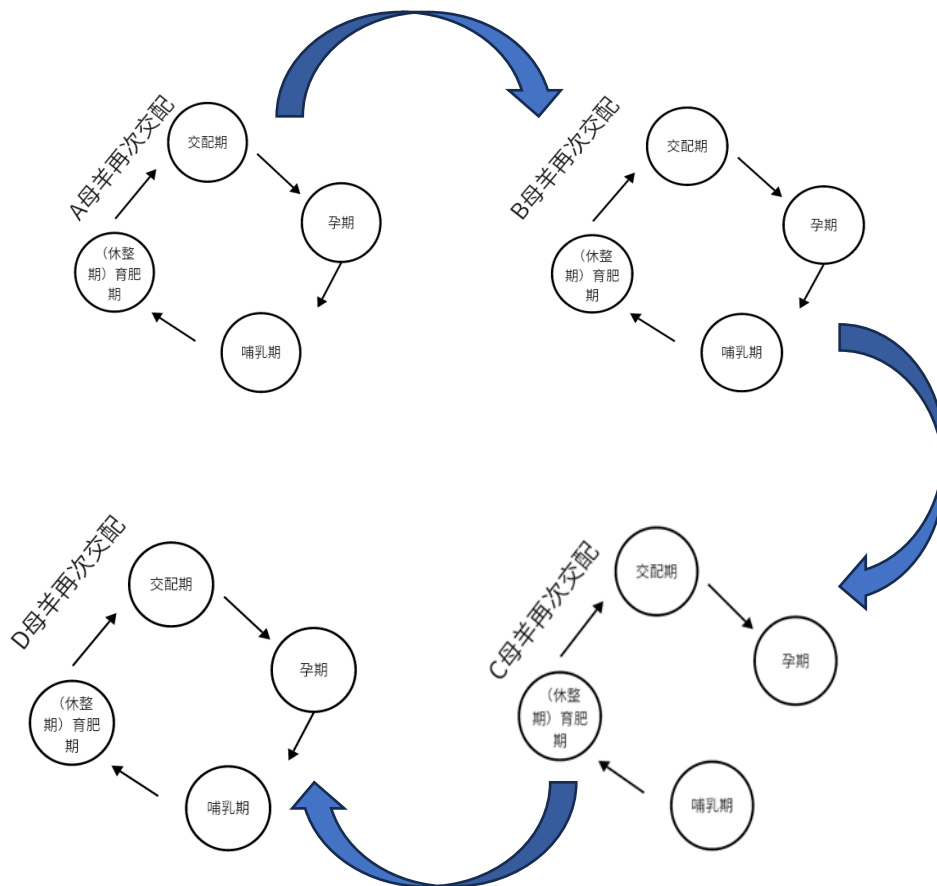


图 4 四轮交配流程图

综上，根据问题一，首先分析得出湖羊实行两年三胎制，画出时间序列表。通过观察发现时间重叠时刻所耗费栏数最多。确保重叠时刻所消耗的所有栏数少于现有标准羊栏数 112 栏。假设种公羊数量为 x ，计算各个时期所需要的栏数，通过栏数的累计以此建立数学模型。经过计算发现第一次三轮不是最优解，将轮次调整为 4 轮，比例设为 1:14, 1:14, 1:14 和 1:7，得到最优解。计算出最终结果:公羊数量为 8，基础母羊数量为 392 时，恰好可以分配 112 栏。年化出栏羊只数量的波动范围是 ，标准羊栏数量缺口为 26。

5.2 问题二的模型的建立与求解

5.2.1 模型的建立

在问题一的基础上安排的生产计划。首先对 112 个羊栏和不同轮次的母羊分别进行编号，羊栏的编号记为 1~112，四个轮次的母羊编号分别记为 A, B, C, D 。由问题一可知，具体生产计划应将 112 栏完全利用，且需要按照 1:14、1:14、1:14 和 1:7 的分配原则进行分配。从种公羊与基础母羊的配种时机和数量、羊栏的使用方案、年化出栏羊只数量三个方面安排具体的生产计划，计算出最大年化出栏

羊只数应为 1249。

5. 2. 2 模型的求解

在问题一的基础上，当时间间隔为 21 天时，年化出栏羊只数量最大为 1249，具体生产计划如下：

表 1 生产计划安排表

	公羊	母羊 A	母羊 B	母羊 C	母羊 D	小羊羔
1-21	8	112	112	112	56	0
22-41	8	112	112	112	56	0
41-60	8	112	112	112	56	0
61-80	8	112	112	112	56	0
81-169	8	112	112	112	56	0
170-189	8	112	112	112	56	224
190-209	8	112	112	112	56	448
210-229	8	112	112	112	56	672
230-249	8	112	112	112	56	672
250-269	8	112	112	112	56	784
270-289	8	112	112	112	56	784
290-309	8	112	112	112	56	784
310-398	8	112	112	112	56	784
399-418	8	112	112	112	56	1120
419-438	8	112	112	112	56	1249

表 2 同一时期所需总栏数

	公羊栏数	母羊 A 栏数	母羊 B 栏数	母羊 C 栏数	母羊 D 栏数	小羊羔栏数	总栏数
1-21	2	8	8	8	4	0	30
22-40	2	14	8	8	4	0	36
41-60	2	14	14	8	4	0	42
61-80	2	14	14	14	4	0	48
81-169	2	14	14	14	7	0	51
170-189	2	19	14	14	7	0	56
190-209	2	19	19	14	7	0	61
210-229	2	8	19	19	7	16	71
230-249	2	8	8	19	10	32	79
250-269	2	14	8	8	10	48	90
270-289	2	14	14	8	4	56	98
290-309	2	14	14	14	4	56	104
310-398	2	14	14	14	7	56	107
399-418	2	19	14	14	7	56	112
419-438	2	19	19	14	7	40	101

5. 3 问题三的模型的建立与求解

5.3.1 模型的建立

母羊自然交配受孕成功概率为 85%，且在这 20 天中，是否受孕成功无法判断，交配期结束后 30 天才可判断是否成功受孕。因此，孕期总时长=20+30=50 天。则可考虑第一轮未成功受孕的母羊进入下一轮，在下一轮同步分配，恰好两轮间隔时间为 50 天。设第一轮有 s 只母羊，成功交配的有 $85\%s$ ，剩下的 $15\%s$ 进入下一轮，和第二轮的母羊同步分配给这一轮的公羊。假设第一轮有 100 只母羊，成功交配的有 85 只，第二轮成功交配 100 只。

自然交配的 20 天中，受孕母羊的受孕时间并不确定，且孕期在 147 到 150 天内活动。在实际情况中，孕期的范围在 147 到 169 天，孕期最长间隔时间为 $150-147+1=4$ 天，又因为允许分娩日期不超过 7 天的哺乳期母羊和它的小羔羊同栏。因此，第一轮和第二轮自然交配之间最多可相差 3 天，自然交配期为 20 天，

时间间隔天数等于 3 天的情况有 $\left\lceil \frac{20}{3} \right\rceil = 7$ 种情形。

情形一:1-3 天所占总栏数

表 3 1-3 天所占总栏数

休整期	交配期+孕期	孕期	哺乳期	育肥期
$\left\lceil \frac{s}{14} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{s}{14} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{s \cdot 85\%}{8} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{s \cdot 85\%}{6} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{s \cdot 85\% \cdot 2.2 \cdot (1-3\%)}{14} \right\rceil$

经过计算发现，同一时期，育肥期所占栏数最多，因此考虑育肥期能不能将一只母羊的繁殖周期全部覆盖或者相等，即小羊羔出栏的第二天，同一批母羊的哺乳期全部结束，下一批小羊羔刚好进入这一批结束小羊羔的栏中，按照连续的情况，小羊一直处于育肥期，若可以实现，则具体计算公式如下：

$$210 + (40 - n) \times 2 = n + r + l \quad (19)$$

其中， $r \in [18, 20]$, $l \in [147, 153]$ ，经计算可得

$$39 \leq n \leq 41.7$$

这个哺乳期的范围是在 (35,45) 这个范围内，说明方案一可行。不妨约定 $35 \leq n \leq 40$ ，反过来求 l 的范围是 $135 \leq l \leq 167$ 。事实上，孕期的范围是 147~169 天，不在此范围内的仅仅只有 2 个情况。一个是 $l=168$ ，一个是 $l=169$ ，这两种情况只存在第 7 个方案下，即 19~20 天。

前 6 个方案完全符合生产计划，因此只需要考虑调整第七个方案即可。

因为小羊是整数，不妨设 $s=100$ ，则成功孕育 85 只小羊，此时为 8 只公羊，将母羊分为 7 批，每一批按 1:14 的比例，前 6 批每轮 12 只母羊，第七批为 13 只母羊，因为 $\lceil 14 \times 85\% \rceil = 12$ 只，因此约定每次成功的母羊数恰好为 12 只。在第 7 个情况下，有两只公羊无法分配，当 $l=168$ 、 $l=169$ 时，会出现母羊繁殖周期大于小羊羔的育肥期，这种情形至多维持两天，可以考虑小羊的育肥期空缺 1~2 天。

如果 $l=168$ ，小羊的育肥期空缺 1 天， $l=169$ 天，小羊育肥期空缺 2 天，若两种情形都没有出现，不用考虑小羊育肥期的空缺。

设第 i 天有 α_i 只羊栏被占，养殖场羊栏数量为 M ，目标函数如下：

$$M_{\min} = \left\{ \sum (M - \partial_i) \cdot \alpha + \sum 3 \times (\partial_i - M) \cdot \beta \right\} \quad (\alpha + \beta = 1)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, M \geq \partial_i \\ 0, M < \partial_i \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} 0, M \geq \partial_i \\ 1, M < \partial_i \end{cases}$$

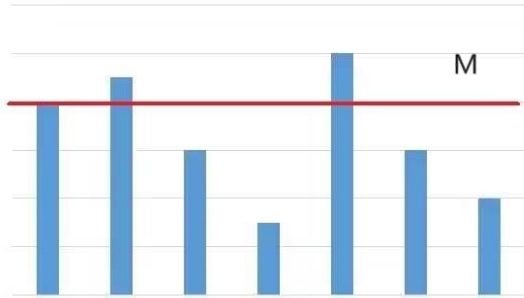


图 5 养殖场羊栏数量 M

六、模型的评价与推广

6.1 模型的评价

由于本题考虑不确定问题影响与以往经验，我们通过研究羊栏与羊生产几个时期的关系，建立了可靠的生产计划预案集模型。并根据计算出的范围，做出了出了普适性的预案集，尽可能地将损失降到最小，并且可解决类似多种问题。

但由于时间有限，考虑的影响因素较少且具有局限性处理实际问题时可能存在一些误差。

6.2 模型的推广

论文给出出栏羊数预案集，清晰明了、能广泛使用，具有一定推广意义。

参考文献

- [1]顾钱娟. 高职数学建模的教学方法与策略研究[J]. 科技视界, 2022(03):138-139.
- [2]孟军, 白钰莹, 张战国, 张誉蓉. 数学建模竞赛对大学生创新能力的影响[J]. 科技管理研究, 2021, 41(22):205-212.
- [3]潘洋. 湖羊规模化养殖模式、生长发育与繁殖性能的研究[D]. 西北农林科技大学, 2018.
- [4]屠炳江, 陈金丽. 规模化湖羊场建设规划与羊舍设计[J]. 浙江畜牧兽医, 2021, 46(06):29-30.
- [5]王伟. 湖羊种质资源的保护及开发利用[D]. 苏州大学, 2007.
- [6]席斌, 高雅琴, 李维红. 我国湖羊的发展现状及前景[J]. 畜牧兽医杂志, 2007(05):37+41.
- [7]张琳娜. 改进遗传算法在计算机数学建模中的应用研究[J]. 电子设计工程, 2021, 29(19):31-34.