



南京信息工程大学

Nanjing University of Information Science & Technology

微分方程建模与求解方法



目 录

- 一、微分方程建模概要
- 二、微分方程建模示例
- 三、微分方程的稳定性模型
- 四、代表性微分方程赛题分析
- 五、作业布置

历年涉及微分方程建模的赛题

1996A 最优捕鱼策略

微分方程、优化

2003A SARS的传播

微分方程、差分方程

2005A 长江水质的评价和预测

数据处理、扩散方程

2007A 人口问题

微分方程、数据处理、优

化

2008B 高等教育学费标准探讨

微分方程、统计分析

2009A 制动器试验台的控制方法分析

微分、差分

2011A 城市表层土壤重金属污染

微分方程、偏微分

2013A 车道被占用对城市道路通行能力的影响

交通流问题

2014A 嫦娥三号软着陆轨道设计与控制策略

微分方程的控制

2018A 高温作业专用服装设计

微分方程、反问题、差分

一、微分方程建模概要

当我们描述实际对象的某些特性随时间（空间）而演变的过程、分析它的变化规律、预测它的未来形态、研究它的控制手段时。通常要建立对象的动态模型。

在许多实际问题中，当直接导出变量之间的函数关系较为困难，但导出包含未知函数的导数或微分的关系式较为容易时，可用建立**微分方程模型**的方法来研究该问题。

1、微分方程建模的对象

涉及“改变”、“变化”、“增加”、“减少”、“衰变”、“边际”、“速度”、“运动”、“追赶”、“逃跑”等词语的确定性连续问题。

2、微分方程建模的基本手段

微元法 等

3、微分方程建模的基本规则

(1) 寻找改变量 一般说来微分方程问题都遵循这样的文字等式

变化率（微商）=单位增加量--单位减少量
等式通常是利用已有的原则或定律。

(2) 对问题中的特征进行数学刻画

- (3) 用微元法建立微分方程;
- (4) 确定微分方程的定解条件 (初边值条件) ;
- (5) 求解或讨论方程 (数值解或定性理论) ;
- (6) 模型和结果的讨论与分析 。

二、微分方程建模示例

我们来建立如下的一些问题的模型：

1、人口预报模型

2、传染病模型

3、捕食模型

4、火箭发射问题

5、扩散模型

6、交通流问题

■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

建模示例一 人口预报模型

——Malthus模型与Logistic模型

为了保持自然资源的合理开发与利用，人类必须保持并控制生态平衡，甚至必须控制人类自身的增长。

这里针对单种群增长模型，简略分析一下这方面的问题。一般复杂生态系统的分析可以通过一些简单模型的复合来研究，大家若有兴趣可以根据生态系统的特征自行建立相应的模型。

种群的数量本应取离散值，但由于种群数量一般较大，可将种群数量看作连续变量，甚至允许它为可微变量，由此引起的误差将是十分微小的，讨论其变化率，建立微分方程模型！

离散化为连续，方便研究



背景

世界人口增长概况

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口(亿)	5	10	20	30	40	50	60

中国人口增长概况

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	1995
人口(亿)	3	4.7	6	7	10.1	11.3	12

研究人口变化规律

控制人口过快增长

模型一：指数增长模型(Malthus模型)



常用的计算公式

今年人口 x_0 , 年增长率 r

k 年后人口

$$x_k = x_0 (1 + r)^k$$

马尔萨斯 (1788--1834) 提出的指数增长模型 (1798)

$x(t)$ ~ 时刻 t 人口

r ~ 人口(相对)增长率(常数)

$$x(t + \Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

$$x(t) = x_0 e^{rt}$$

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 (e^r)^t$$

$$\approx x_0 (1+r)^t$$

随着时间增加人口按指数规律无限增长!

模型检验

比较历年的人口统计资料，可发现人口增长的实际情况与马尔萨斯模型的预报结果基本相符，例如，1961年世界人口数为30.6（即 3.06×10^9 ），人口增长率约为2%，人口数大约每35年增加一倍。检查1700年至1961的260年人口实际数量，发现两者几乎完全一致，且按马氏模型计算，人口数量每34.6年增加一倍，两者也几乎相同。

模型预测

假如人口数真能保持每34.6年增加一倍，那么人口数将以几何级数的方式增长。例如，到2510年，人口达 2×10^{14} 个，即使海洋全部变成陆地，每人也只有9.3平方英尺的活动范围，而到2670年，人口达 36×10^{15} 个，只好一个人站在另一人的肩上排成二层了。故马尔萨斯模型是不完善的。

Malthus模型实际上只有在群体总数不太大时才合理，到总数增大时，生物群体的各成员之间由于有限的生存空间，有限的自然资源及食物等原因，就可能发生生存竞争等现象。

所以Malthus模型假设的人口净增长率不可能始终保持常数，它应当与人口数量有关。



指数增长模型的应用及局限性



- 与19世纪以前欧洲一些地区人口统计数据吻合
- 适用于19世纪后迁往加拿大的欧洲移民后代
- 可用于短期人口增长预测
- 不符合19世纪后多数地区人口增长规律
- 不能预测较长期的人口增长过程

19世纪后人口数据 \Rightarrow 人口增长率 r 不是常数(逐渐下降)

模型2 Logistic模型

人口净增长率应当与人口数量有关，即： $r=r(N)$

从而有： $\frac{dN}{dt} = r(N)N$ (*)

为了得出一个有实际意义的模型，我们不妨采用一下工程师原则。工程师们在建立实际问题的数学模型时，总是采用尽可能简单的方法。

$r(N)$ 是未知函数，但根据实际背景，它无法用拟合方法来求。

$r(N)$ 最简单的形式是常数，此时得到的就是马尔萨斯模型。对马尔萨斯模型的最简单的改进就是引进一次项（竞争项）



模型2 Logistic模型

人口净增长率应当与人口数量有关，即： $r=r(N)$

从而有：
$$\frac{dN}{dt} = r(N)N \quad (*)$$

对马尔萨斯模型引入一次项（竞争项），令 $r(N)=r-aN$

此时得到微分方程：

$$\frac{dN}{dt} = (r - aN)N \quad \text{或} \quad \frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})N \quad (**)$$

(**) 被称为Logistic模型或生物总数增长的统计筹算律，是由荷兰数学生物学家弗赫斯特（Verhulst）首先提出的。一次项系数是负的，因为当种群数量很大时，会对自身增大产生抑制性，故一次项又被称为竞争项。

(**) 可改写成：

$$\frac{dN}{dt} = k(K - N)N \quad (***)$$

模型2 Logistic模型

$$\frac{dN}{dt} = k(K - N)N$$

该式还有另一解释，由于空间和资源都是有限的，不可能供养无限增长的种群个体，当种群数量过多时，由于人均资源占有率的下降及环境恶化、疾病增多等原因，出生率将降低而死亡率却会提高。设环境能供养的种群数量的上界为 K （近似地将 K 看成常数）， N 表示当前的种群数量， $K-N$ 恰为环境还能供养的种群数量，该式指出，种群增长率与两者的乘积成正比，正好符合统计规律，得到了实验结果的支持，这就是该式也被称为统计筹算律的原因。

求解——分离变量：

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = kK dt$$

两边积分并整理得：

$$N = \frac{K}{1 + Ce^{-kKt}}$$

$$N = \frac{K}{1 + Ce^{-kKt}}$$

令 $N(0)=N_0$ ，求得：

$$C = \frac{K - N_0}{N_0}$$

故 (3.9) 的满足初始条件 $N(0)=N_0$ 的解为：

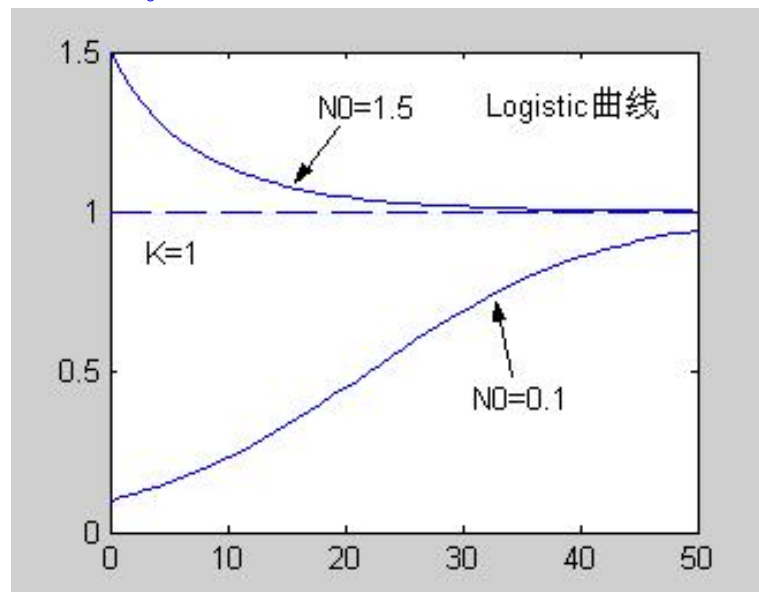
易见：

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-kKt}}$$

$$N(0)=N_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K$$

$N(t)$ 的图形请看右图

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$



模型的参数估计

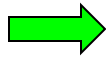


用指数增长模型或阻滞增长模型作人口预报，必须先估计模型参数 r 或 r, K

- 利用统计数据用最小二乘法作拟合

例：美国人口数据（单位~百万）

1790	1800	1810	1820	1830	1950	1960	1970	1980
3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	150.7	179.3	204.0	226.5



$$r=0.2072, K=464$$

- 专家估计



模型检验(1)



用模型预报1990年美国人口，与实际数据比较

$$x(1990) = x(1980) + \Delta x = x(1980) + rx(1980)[1 - x(1980)/x_m]$$

$$\Rightarrow x(1990) = 250.5$$

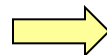
实际为251.4 (百万)

模型应用——人口预报

用美国1790~1990年人口数据重新估计参数



$$r=0.2083, N=457.6$$



$$N(2000)=275.0$$

$$N(2010)=297.9$$

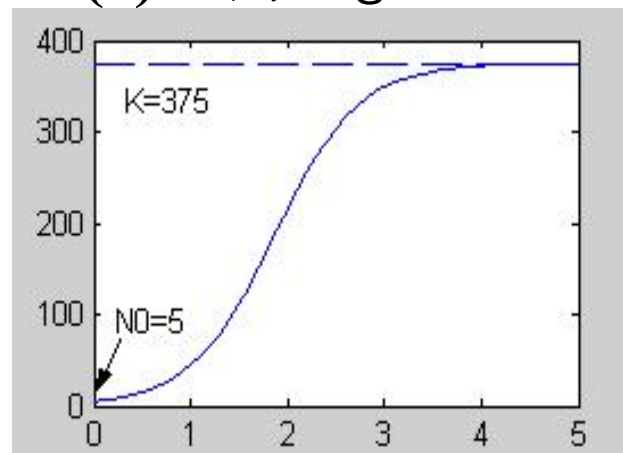
Logistic模型在经济领域中的应用 (如耐用消费品的售量)

模型检验(2)

用Logistic模型来描述种群增长的规律效果如何呢？1945年克朗皮克（Crombic）做了一个人工饲养小谷虫的实验，数学生物学家高斯（E·F·Gauss）也做了一个原生物草履虫实验，实验结果都和Logistic曲线十分吻合。

大量实验资料表明用Logistic模型来描述种群的增长，效果还是相当不错的。例如，高斯把5只草履虫放进一个盛有 0.5cm^3 营养液的小试管，他发现，开始时草履虫以每天230.9%的速率增长，此后增长速度不断减慢，到第五天达到最大量375个，实验数据与 $r=2.309$ ， $a=0.006157$ ， $N(0)=5$ 的Logistic曲线：

$$N(t) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}} \text{ 几乎完全吻合。}$$



Malthus模型和Logistic模型的总结

- Malthus模型和Logistic模型均为对微分方程(*)所作的模拟近似方程。前一模型假设了种群增长率 r 为一常数，（ r 被称为该种群的内禀增长率）。后一模型则假设环境只能供养一定数量的种群，从而引入了一个竞争项。
- 用模拟近似法建立微分方程来研究实际问题时必须对求得的解进行检验，看其是否与实际情况相符或基本相符。相符性越好则模拟得越好，否则就得找出不相符的主要原因，对模型进行修改。

Malthus模型与Logistic模型虽然都是为了研究种群数量的增长情况而建立的，但它们也可用来研究其他实际问题，只要这些实际问题的数学模型有相同的微分方程即可。

建模示例二：传染病模型

传染病动力学，又称流行病动力学，是对传染病进行定量研究的一种重要方法。它是根据种群出生、死亡、迁移的特征，疾病发生、传播的规律，以及与之有关的生物、社会、环境等因素，建立能反映传染病动力学特性的数学模型。通过对模型动力学性态的定性、定量分析，来解释疾病的流行规律，预测其时空演化规律和发展趋势，分析疾病流行的原因和影响它的关键因素，寻找对其预防 and 控制的（最优）策略，为防制决策提供理论基础和数量依据。

与传统的统计方法相比，动力学方法能更好地从疾病的传播机理角度解释其流行规律，能揭示流行过程中的一些局部或全局性态，使所建立的理论 with 防治策略更加可靠和符合实际。

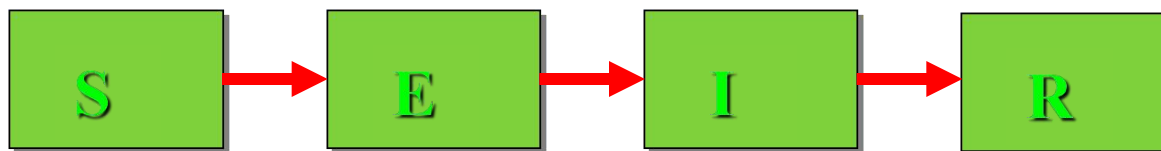
■ 传染病动力学研究的主要用途

1. 流行病学理论研究：通过建立疾病流行过程中各因素之间定量作用关系的数学模型，以阐明疾病流行过程及流行规律。
2. 疫情预测：通过建立数学模型，可以预测疾病的时（空）演化规律。
3. 估计参数：通过数学模型可以获取某些关键参数。
4. 设计、评估控制措施：通过引入控制变量，或者改变某些参数的取值，来达到理想的疾病控制效果。
5. 可用于计算机病毒传播、网络舆情/谣言传播等的研究。

仓室建模法

□ 仓室建模法Compartmental Models

1. 根据实际需要将人群分为**被动免疫新生儿M**(the passively-immune class)、**易感者S**(the Susceptible class)、**潜伏者E**(the Exposed class)、**感染者I**(the Infective class)、**恢复者/移除者R**(the Removed class)、**隔离者Q**(the Quarantined class)等多个流行病学意义上不同状态的仓室。
2. 根据疾病传播、种群出生、死亡等实际规律建立转移图：



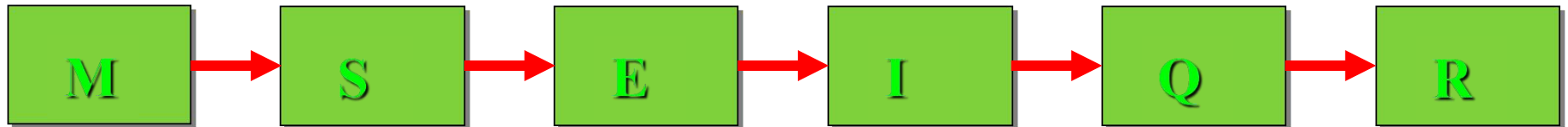
3. 根据转移图建立动力学模型。

仓室建模法

- 无治愈/愈后带终身免疫力: SI, SEI, SIR, SEIR, MSEIR, SIQR, ...
- 愈后带暂时免疫力: SIS, SEIS, SIRS, SEIRS, MSEIRS, SIQRS, ...

根据病原类型来区分疾病:

- 由**病毒**传播的疾病, 如流感、麻疹、水痘,
通常病人康复后对该病毒具有一定免疫力
- 由**细菌**传播的疾病, 如脑炎、淋病、肺结核等,
通常病人康复后对疾病不具有免疫力



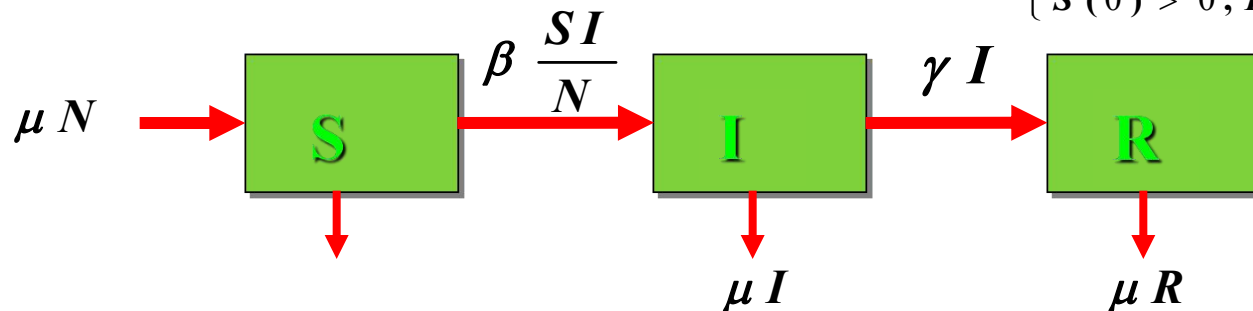
经典SIR模型

基本假设:

1. 出生率 = 死亡率; 新生儿均为易感者;
2. 无迁移;
3. 标准型发生率;
4. 疾病为非致命性疾病.

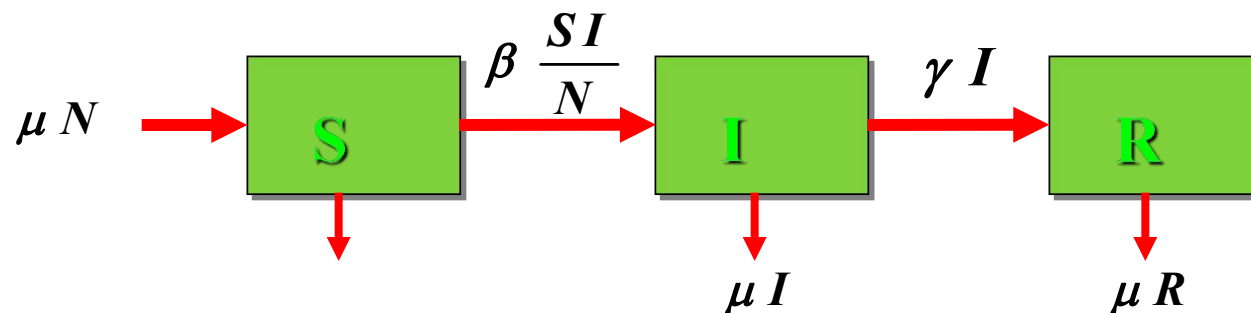
根据转移图建立微分方程模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \\ N = S + I + R \\ S(0) > 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0 \end{cases}$$



SIR模型

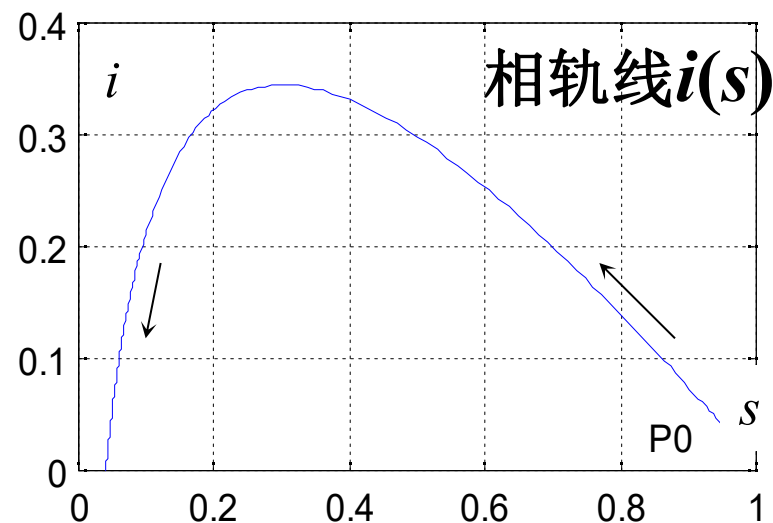
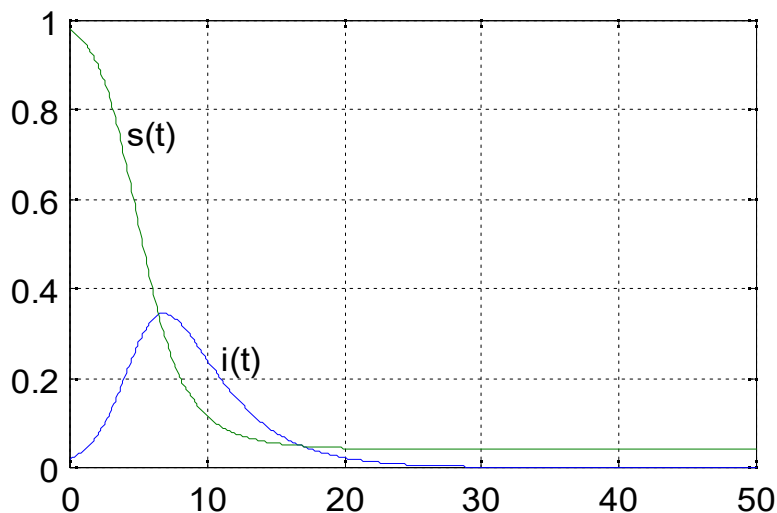
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta \frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \\ N = S + I + R \\ S(0) > 0, I(0) \geq 0, R(0) \geq 0 \end{cases}$$



SIR模型的数值解

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i, i(0) = i_0 \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si, s(0) = s_0 \end{cases}$$

设 $\lambda=1, \mu=0.3, i_0=0.02, s_0=0.98$, 用
MATLAB计算作图 $i(t), s(t)$ 及 $i(s)$



$i(t)$ 从初值增长到最大; $t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$.

$s(t)$ 单调减; $t \rightarrow \infty, s \rightarrow 0.04$.

SIR模型的相轨线分析

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去 dt
 $\sigma = \lambda / \mu$

\longrightarrow

$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i \Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

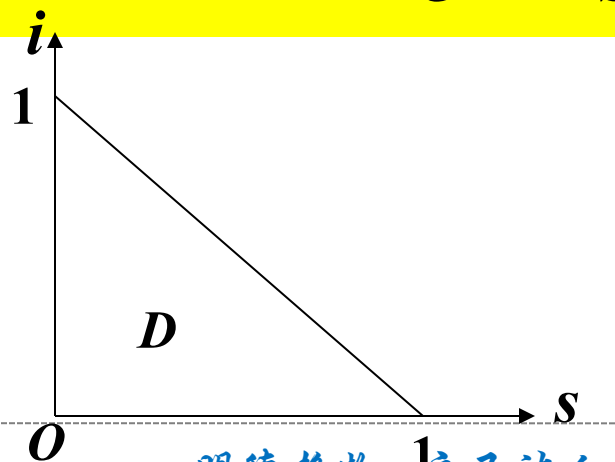
相轨线 \Downarrow

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

在 D 内作相轨线 $i(s)$
的图形, 进行分析



相轨线 $i(s)$ 及其分析

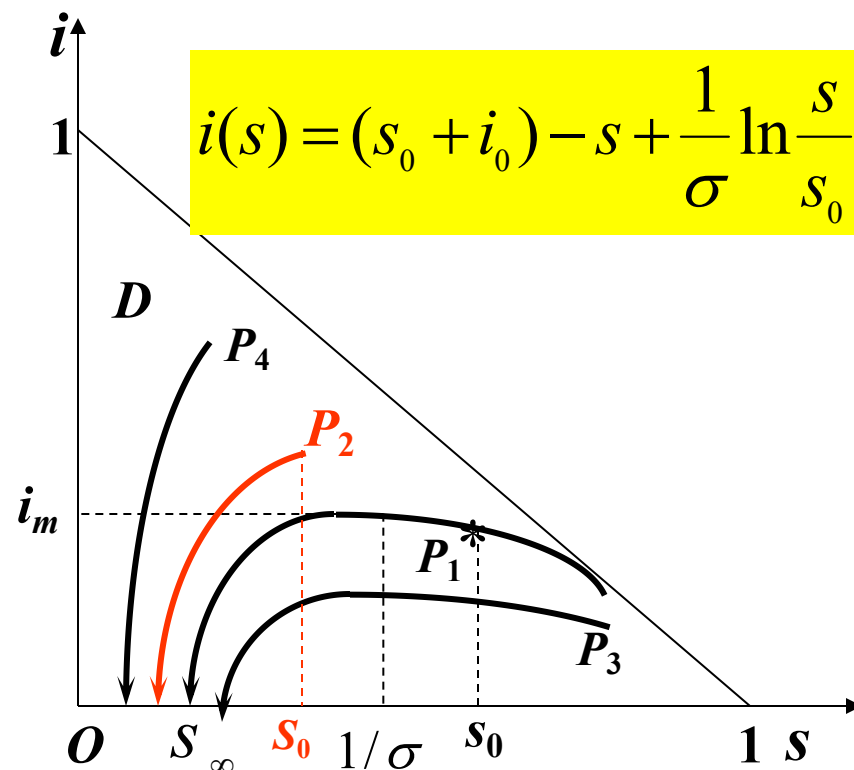
SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i \Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$s(t)$ 单调减 \rightarrow 相轨线的方向

$$s = 1/\sigma, i = i_m \quad t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$$

$$s_\infty \text{ 满足 } s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$



$P_1: s_0 > 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 先升后降至 0

$P_2: s_0 < 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 单调降至 0

\Rightarrow 传染病蔓延

\Rightarrow 传染病不蔓延

$1/\sigma \sim$
阈值

预防传染病蔓延的手段

SIR模型

传染病不蔓延的条件—— $s_0 < 1/\sigma$

• 提高阈值 $1/\sigma$ \Rightarrow 降低 $\sigma (= \lambda/\mu)$ \Rightarrow $\lambda \downarrow, \mu \uparrow$

λ (日接触率) $\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平 \uparrow

μ (日治愈率) $\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平 \uparrow

• 降低 s_0 \Rightarrow 提高 r_0 \Rightarrow 群体免疫



$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

σ 的估计

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0 \quad \text{忽略 } i_0 \Rightarrow$$

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}$$

预防传染病蔓延的手段



- 降低日接触率 λ
 - 提高日治愈率 μ
 - 提高移出比例 r_0
- 以最终未感染比例 s_∞ 和病人比例最大值 i_m 为度量指标。

λ	μ	$1/\sigma$	s_0	i_0	s_∞	i_m
1	0.3	0.3	0.98	0.02	0.0398	0.3449
0.6	0.3	0.5	0.98	0.02	0.1965	0.1635
0.5	0.5	1.0	0.98	0.02	0.8122	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.98	0.02	0.9172	0.0200
1	0.3	0.3	0.70	0.02	0.0840	0.1685
0.6	0.3	0.5	0.70	0.02	0.3056	0.0518
0.5	0.5	1.0	0.70	0.02	0.6528	0.0200
0.4	0.5	1.25	0.70	0.02	0.6755	0.0200

$\lambda \downarrow, \mu \uparrow$

$s_\infty \uparrow, i_m \downarrow$

$s_0 \downarrow (r_0 \uparrow)$

$s_\infty \uparrow, i_m \downarrow$

被传染人数的估计

SIR模型

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

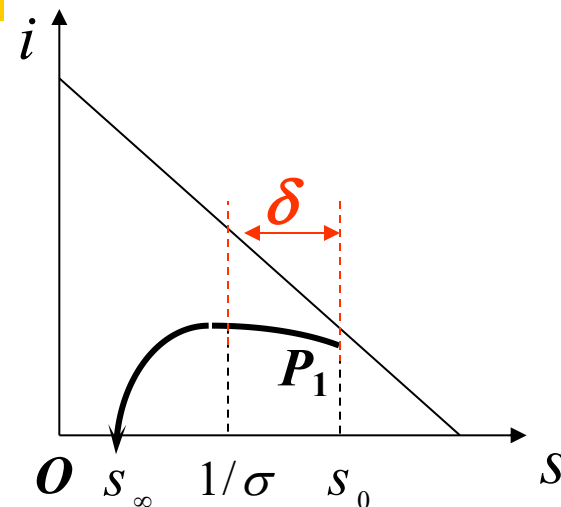
$$i_0 \cong 0, s_0 \cong 1$$

$$x + \frac{1}{\sigma} \ln(1 - \frac{x}{s_0}) \approx 0$$

$$x(1 - \frac{1}{s_0 \sigma} - \frac{x}{2s_0^2 \sigma}) \approx 0$$

$$x \ll s_0$$

$$x \approx 2s_0 \sigma (s_0 - \frac{1}{\sigma})$$



$$s_0 - 1/\sigma = \delta$$

$$\delta \text{ 小, } s_0 \sigma \approx 1$$

$$x \approx 2\delta$$

提高阈值 $1/\sigma$

降低被传染人数比例 x

建模真题

SARS的传播

——2003年全国大学生数学建模竞赛A题

艾滋病疗法的评价及疗效的预测

——2006年全国大学生数学建模竞赛B题

Trade-offs in the fight against HIV/AIDS

—— 2006年ICM Problem C

Eradicating Ebola

——2015年MCM Problem A

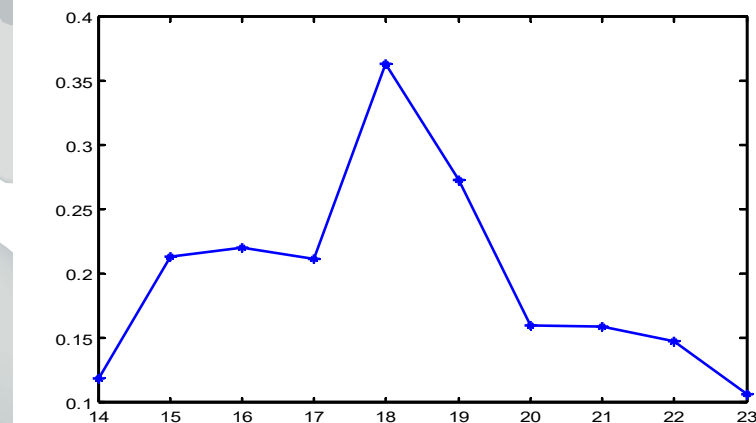
建模示例三：捕食模型

意大利生物学家Ancona曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究,他从第一次世界大战期间,地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量百分比的资料中,发现**鲨鱼**等的比例有明显增加(见下表),而供其捕食的**食用鱼**的百分比却明显下降.显然战争使捕鱼量下降,食用鱼增加,鲨鱼等也随之增加,但为何鲨鱼的比例大幅增加呢?

他无法解释这个现象,于是求助于著名的意大利数学家V. Volterra,希望建立一个**食饵—捕食**系统的数学模型,定量地回答这个问题.

捕获鱼中鲨鱼等食肉鱼的比例

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7



1. 基本假设:

(1) 食饵由于捕食者的存在使增长率降低, 假设降低的程度与捕食者数量成正比;

(2) 捕食者由于食饵为它提供食物的作用使其死亡率降低或使之增长, 假定增长的程度与食饵数量成正比。

3. 模型(一) 不考虑人工捕获

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - ey) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + fx) \end{cases}$$

2. 符号说明:

x ——食饵在 t 时刻的数量;

y ——捕食者在 t 时刻的数量;

a ——食饵独立生存时的增长率;

b ——捕食者独立生存时的死亡率;

e ——捕食者掠取食饵的能力;

f ——食饵对捕食者的供养能力.

K ——捕获能力系数.

该模型反映了在没有人工捕获的自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系, 没有考虑食饵和捕食者自身的阻滞作用, 是最简单的模型.

4. 模型(一) 求解

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - ey) \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + fx) \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x(a - ey)}{y(-b + fx)}$$
$$\Rightarrow \left(f - \frac{b}{x}\right)dx = \left(\frac{a}{y} - e\right)dy$$
$$\Rightarrow \frac{x^b}{e^{fx}} \cdot \frac{y^a}{e^{ey}} = c$$

利用微分方程的**相关理论**，知原方程组的解是周期解，设周期为 **T** ，则为了解释问题中的数据，需计算 **x** 、 **y** 的平均值：

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{Tf} \int_0^T \left(\frac{y'}{y} + b \right) dt \\ &= \frac{b}{f} + \frac{1}{Tf} (\ln y(T) - \ln y(0)) = \frac{b}{f} \end{aligned} \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{e}$$

5. 模型(二) 考虑人工捕捞

K——捕获能力系数.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - ey) - Kx \\ \frac{dy}{dt} = y(-b + fx) - Ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[(a - K) - ey] \\ \frac{dy}{dt} = y[-(b + K) + fx] \end{cases}$$

类似可计算 x 、 y 的平均值:

$$\bar{x} = \frac{b + K}{f}$$

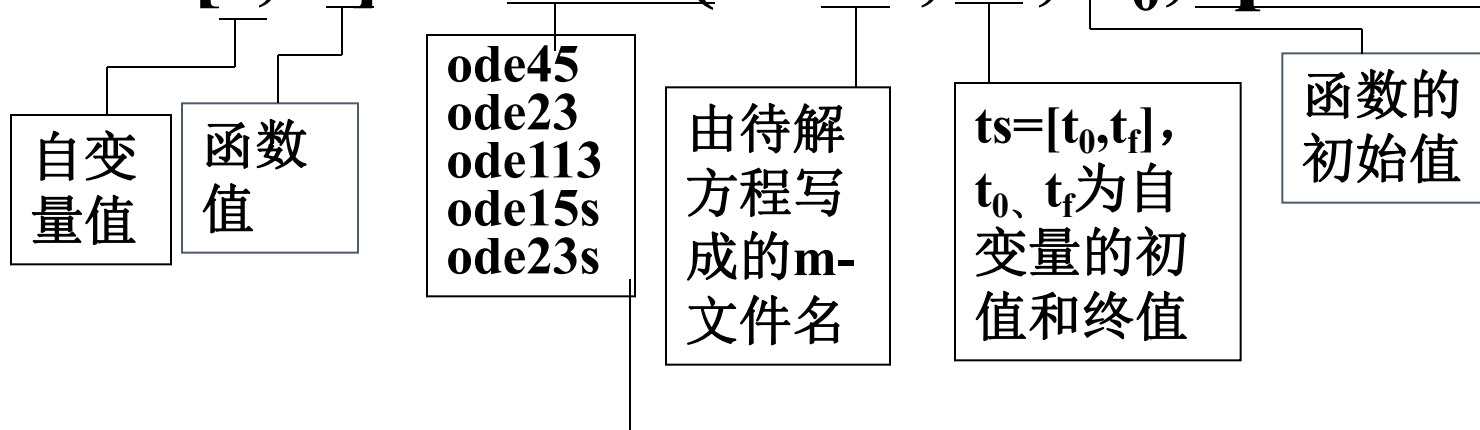
$$\bar{y} = \frac{a - K}{e}$$

结论: 增加捕捞后捕食者平均值降低, 而饵料(食用鱼)平均值增加; 进一步捕捞能力系数下降也导致捕食者(鲨鱼等)数量上升。——“涸泽而鱼”除外

推广: 解释杀虫剂的反效果——杀虫剂在杀死害虫的同时也杀死其天敌益虫, 这将导致害虫量的增加。

用Matlab软件求常微分方程的数值解

[t, x]=solver('fun', ts, x₀,options)



ode23: 组合的2/3阶龙格-库塔-芬尔格算法
ode45: 运用组合的4/5阶龙格-库塔-芬尔格算法

用于设定误差限(缺省时设定相对误差 10^{-3} , 绝对误差 10^{-6}),命令为:

options=odeset('reltol',rt,'abstol',at),
rt, at: 分别为设定的相对误差和绝对误差.

help ode45/23....

6. 模型检验

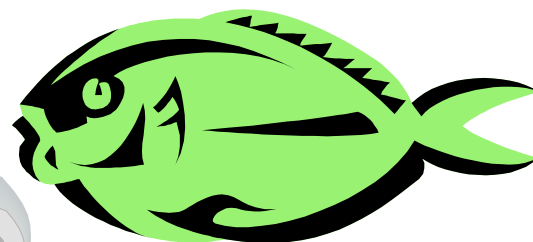
针对一组具体的数据用 Matlab 软件进行计算.

设食饵和捕食者的初始数量分别为 $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

对于数据 $a = 1, e = 0.1, b = 0.5, f = 0.02, x_0 = 25, y_0 = 2$,

t 的终值经试验后确定为 15, 即模型为:

$$\begin{cases} x' = x(1 - 0.1y) \\ y' = y(-0.5 + 0.02x) \\ x(0) = 25, y(0) = 2 \end{cases}$$



首先, 建立m-文件shier.m如下:

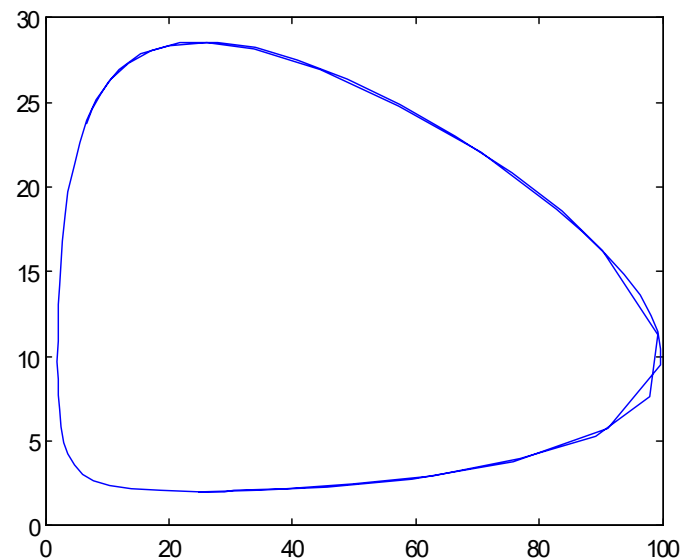
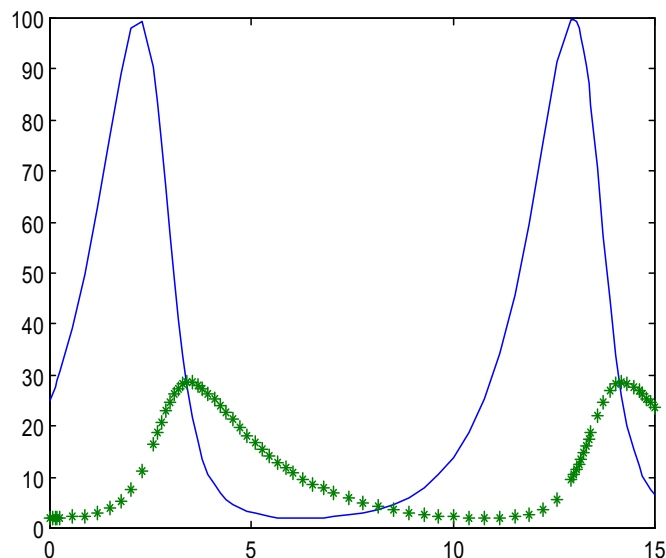
```
function dx=shier(t,x)
dx=zeros(2,1);
dx(1)=x(1)*(1-0.1*x(2));
dx(2)=x(2)*(-0.5+0.02*x(1));
```

其次, 建立主程序shark.m如下:

```
[t,x]=ode45('shier',[0 15],[25 2]);
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'*')
plot(x(:,1),x(:,2))
```

求解结果：

数值解如下图： $x(t)$ 为实线， $y(t)$ 为“*”线。相图 (x, y) 为：



由上两图知： $x(t)$ 与 $y(t)$ 都是周期函数

模型（二） 考虑人工捕获

设表示捕获能力的系数为 K ，相当于食饵的自然增长率由 a 降为 $a-K$ ，捕食者的自然死亡率由 b 增为 $b+K$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1[(r_1 - e) - \lambda_1 x_2] \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2[-(r_2 + e) + \lambda_2 x_1] \end{cases}$$

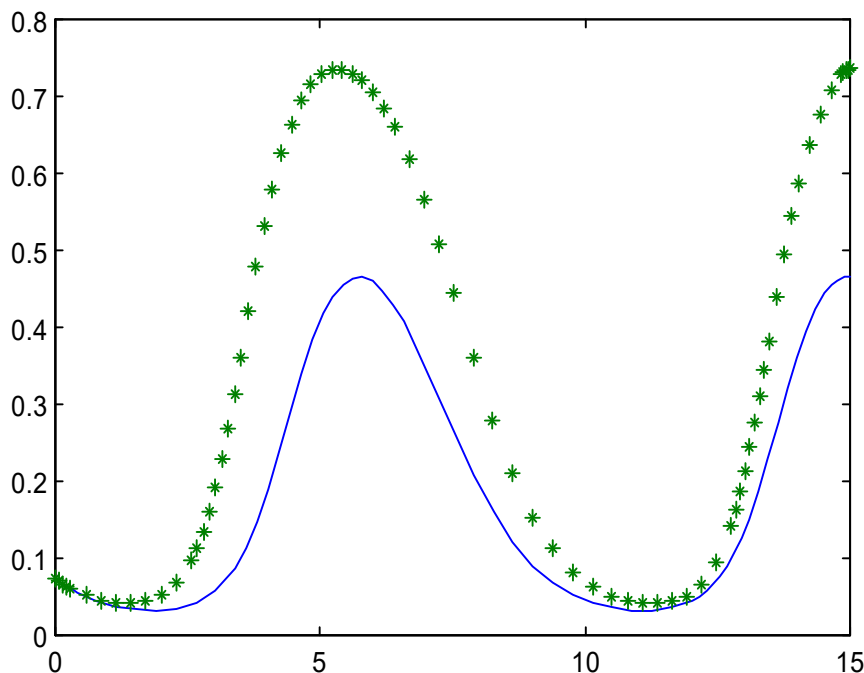
仍取 $a = 1, e = 0.1, b = 0.5, f = 0.02, x(0) = 25, y(0) = 2$

设战前捕获能力系数 $K=0.3$ ，战争中降为 $K=0.1$ ，则战前与战争中的模型分别为：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(0.7 - 0.1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-0.8 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1(0.9 - 0.1x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2(-0.6 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

模型求解:

- 1、分别用m-文件shier1.m和shier2.m定义上述两个方程
- 2、建立主程序shark1.m, 求解两个方程, 并画出两种情况下鲨鱼数在鱼类总数中所占比例 $y(t)/[y(t)+y(t)]$



实线为战前的鲨鱼比例, “*” 线为战争中的鲨鱼比例

结论: 战争中鲨鱼的比例比战前高!

三、微分方程稳定性模型



- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势——平衡状态是否稳定。
- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性。

3.1 捕鱼业的持续收获



背景

- 再生资源（渔业、林业等）与非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题及分析

- 在**捕捞量稳定**的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。
- 如果使捕捞量等于自然增长量，**渔场鱼量将保持不变**，则捕捞量稳定。

产量模型

$x(t) \sim$ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 Logistic 规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$r \sim$ 固有增长率, $N \sim$ 最大鱼量

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

$$h(x) = Ex, E \sim \text{捕捞强度}$$

建模

$$\text{记 } F(x) = f(x) - h(x)$$

捕捞情况下
渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right) - Ex$$

- 不需要求解 $x(t)$, 只需知道 $x(t)$ 稳定的条件

一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$$\dot{x} = F(x) \quad (1) \quad \text{一阶非线性（自治）方程}$$

$F(x)=0$ 的根 x_0 ~微分方程的平衡点

$$\dot{x}\Big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$$

设 $x(t)$ 是方程的解，若从 x_0 某邻域的任一初值出发，都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ ，称 x_0 是方程(1)的稳定平衡点

不求 $x(t)$ ，判断 x_0 稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程

$$\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ 稳定(对(2), (1))}$$

$$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ 不稳定(对(2), (1))}$$

产量模型

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{N}\right) - Ex$$

$$F(x) = 0$$

平衡点

$$x_0 = N\left(1 - \frac{E}{r}\right), \quad x_1 = 0$$

稳定性判断

$$F'(x_0) = E - r, \quad F'(x_1) = r - E$$

$$E < r \Rightarrow F'(x_0) < 0, F'(x_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 稳定}, x_1 \text{ 不稳定}$$

$$E > r \Rightarrow F'(x_0) > 0, F'(x_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ 不稳定}, x_1 \text{ 稳定}$$

E ~捕捞强度

r ~固有增长率

x_0 稳定, 可得到稳定产量

x_1 稳定, 渔场干枯

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，
控制捕捞强度使产量最大

图解法

$$F(x) = f(x) - h(x)$$

$$f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N}\right)$$

$$h(x) = Ex$$

$$F(x) = 0 \Rightarrow f \text{ 与 } h \text{ 交点 } P$$

$$E < r \Rightarrow x_0 \text{ 稳定}$$

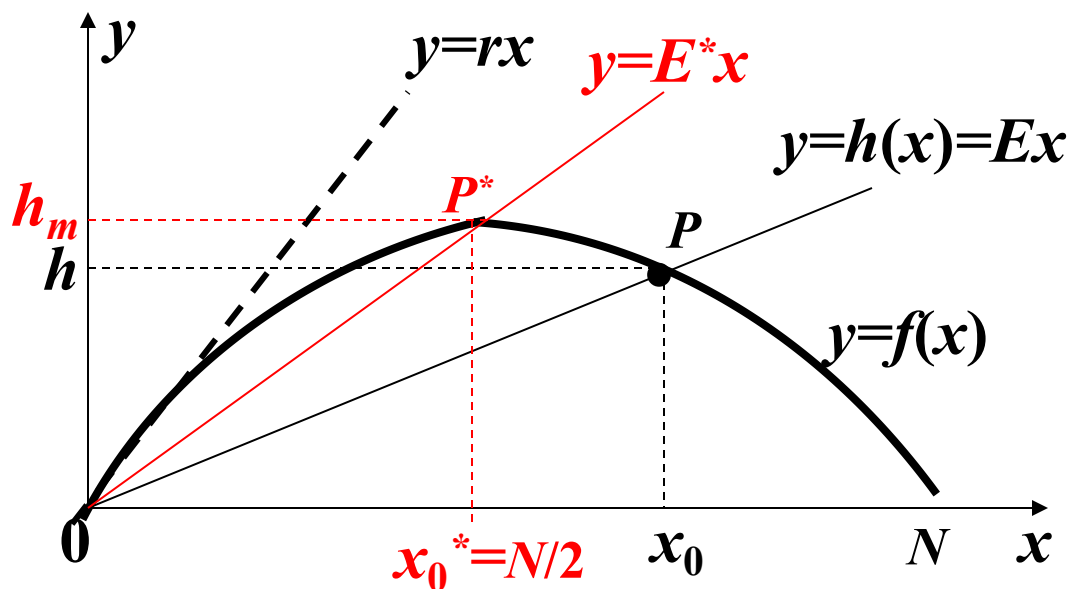
P 的横坐标 x_0 ~ 平衡点

P 的纵坐标 h ~ 产量

产量最大

$$P^* (x_0^* = N/2, h_m = rN/4) \quad E^* = h_m / x_0^* = r/2$$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半



效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大。

假设

- 鱼销售价格 p
- 单位捕捞强度费用 c

收入 $T = ph(x) = pEx$ 支出 $S = cE$

单位时间利润

$$R = T - S = pEx - cE$$

稳定平衡点 $x_0 = N(1 - E/r)$ \Downarrow

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE \left(1 - \frac{E}{r}\right) - cE$$

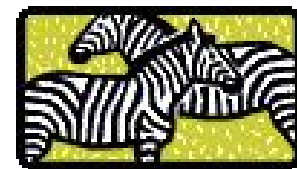
求 E 使 $R(E)$ 最大

$$\Rightarrow E_R = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{c}{pN}\right) < E^* = \frac{r}{2}$$

渔场
鱼量

$$x_R = N \left(1 - \frac{E_R}{r}\right) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p} \quad h_R = \frac{rN}{4} \left(1 - \frac{c^2}{p^2 N^2}\right)$$

3.2 种群的相互竞争



- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从Logistic规律；

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于 N_2)是甲(相对于 N_1)的 σ_1 倍。

$$\sigma_1 > 1$$



对甲增长的阻滞作用，乙大于甲



乙的竞争力强

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

模型分析

$t \rightarrow \infty$ 时 $x_1(t), x_2(t)$ 的趋向 (平衡点及其稳定性)

(二阶)非线性 (自治)方程 $\dot{x}_1(t) = f(x_1, x_2)$ 的平衡点及其稳定性
 $\dot{x}_2(t) = g(x_1, x_2)$

平衡点 $P_0(x_1^0, x_2^0) \sim$ 代数方程 $\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0 \\ g(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$ 的根

若从 P_0 某邻域的任一初值出发, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_1^0$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = x_2^0$, 称 P_0 是微分方程的 **稳定平衡点**

判断 $P_0(x_1^0, x_2^0)$ 稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2(t) &= g(x_1, x_2) \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \\ \dot{x}_2(t) &= g_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + g_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \quad (2)\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix} \Big|_{P_0}$$

$$p > 0 \text{ 且 } q > 0$$

平衡点 P_0 稳定(对2,1)

$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(f_{x_1} + g_{x_2}) \Big|_{P_0} \\ q = \det A \end{cases}$$

$$p < 0 \text{ 或 } q < 0$$

平衡点 P_0 不稳定(对2,1)

模型

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) = 0 \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) = 0 \end{cases}$$

平衡点: $P_1(N_1, 0), P_2(0, N_2),$

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right), P_4(0, 0)$$

仅当 $\sigma_1, \sigma_2 < 1$ 或 $\sigma_1, \sigma_2 > 1$ 时, P_3 才有意义

平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) \equiv r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \\ g(x_1, x_2) \equiv r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2x_1}{N_1} - \frac{\sigma_1 x_2}{N_2} \right) & -\frac{r_1 \sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\frac{r_2 \sigma_2 x_2}{N_1} & r_2 \left(1 - \frac{\sigma_2 x_1}{N_1} - \frac{2x_2}{N_2} \right) \end{bmatrix}$$

$$p = -(f_{x1} + g_{x2}) \Big|_{p_i}, \quad q = \det A \Big|_{p_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

平衡点 P_i 稳定条件: $p > 0$ 且 $q > 0$

线性常系数 微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax + by \\ \dot{y}(t) &= cx + dy\end{aligned}$$

的平衡点及其稳定性

平衡点 $P_0(x_0, y_0) = (0, 0)$ ~ 代数方程 $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ 的根

若从 P_0 某邻域的任一初值出发, 都有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$,

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0$, 称 P_0 是微分方程的 **稳定平衡点**

记系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$

特征根

$$\lambda_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) / 2$$

$$\begin{cases} \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \\ p = -(a + d) \\ q = \det A \end{cases}$$

线性常系数
微分方程组

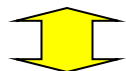
$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax + by \\ \dot{y}(t) &= cx + dy\end{aligned}$$

的平衡点及其稳定性

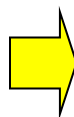
平衡点 $P_0(0,0)$ 特征根 $\lambda_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$

微分方程一般解形式 $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2}$ 为负数或有负实部

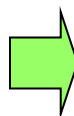


$p > 0$ 且 $q > 0$



平衡点 $P_0(0,0)$ 稳定

$p < 0$ 或 $q < 0$



平衡点 $P_0(0,0)$ 不稳定

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1, 0)$	$r_1 - r_2(1 - \sigma_2)$	$-r_1 r_2(1 - \sigma_2)$	$\sigma_2 > 1$, $\sigma_1 < 1$
$p_2(0, N_2)$	$-r_1(1 - \sigma_1) + r_2$	$-r_1 r_2(1 - \sigma_1)$	$\sigma_1 > 1$, $\sigma_2 < 1$
$p_3\left(\frac{N_1(1 - \sigma_1)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}, \frac{N_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1 - \sigma_1) + r_2(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\frac{r_1 r_2(1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2)}{1 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\sigma_1 < 1$, $\sigma_2 < 1$
$p_4(0, 0)$	$-(r_1 + r_2)$	$r_1 r_2$	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

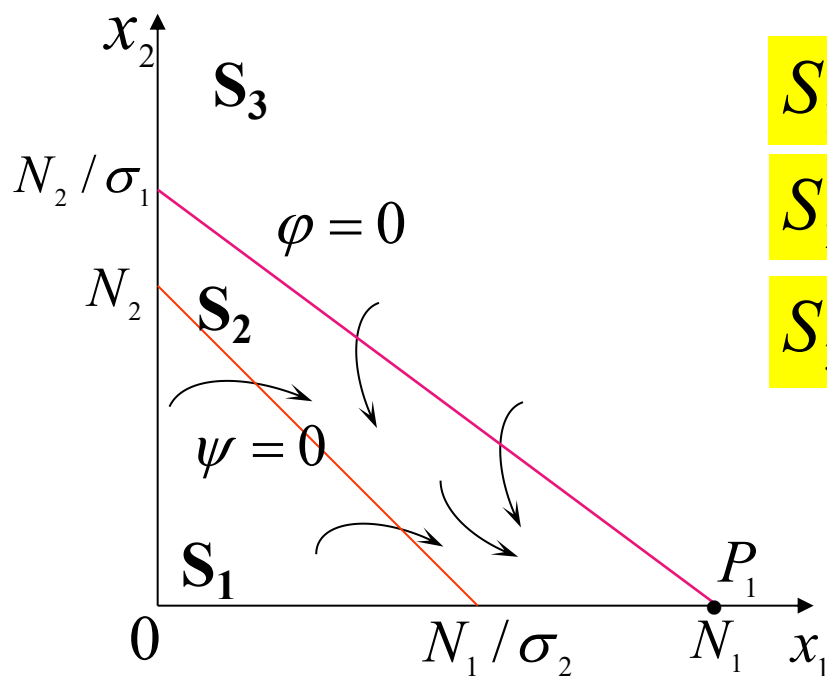
P_3 是两种群共存的平衡点

P_1 稳定的条件 $\sigma_1 < 1$?

平衡点稳定性的相轨线分析

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) & \varphi(x_1, x_2) &= 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \\ \dot{x}_2(t) &= r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) & \psi(x_1, x_2) &= 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\end{aligned}$$

(1) $\sigma_2 > 1$, $\sigma_1 < 1$



$$S_1 : \varphi > 0, \psi > 0$$

$$S_1 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$$

$$t \uparrow \rightarrow x_1, x_2 \uparrow$$

$$S_2 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$$

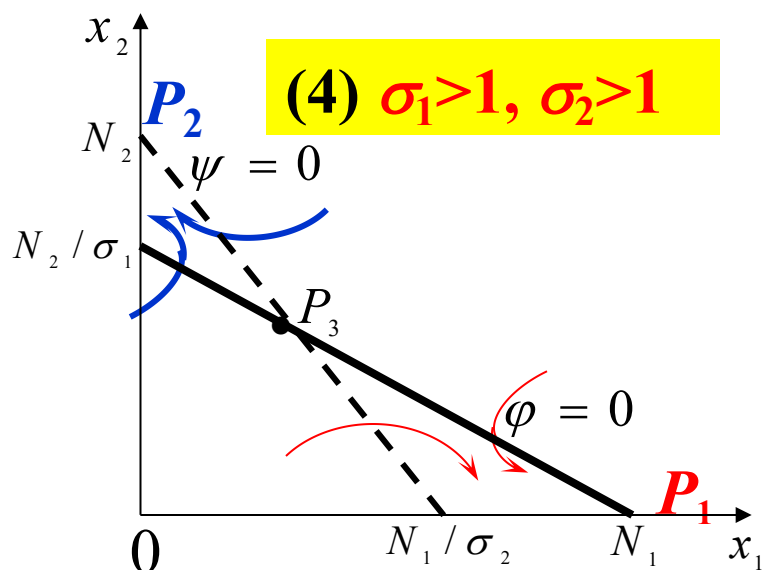
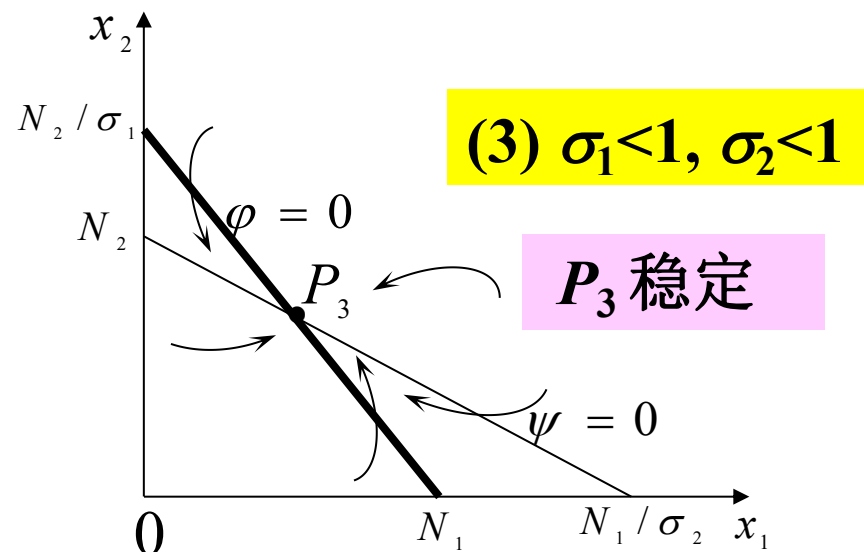
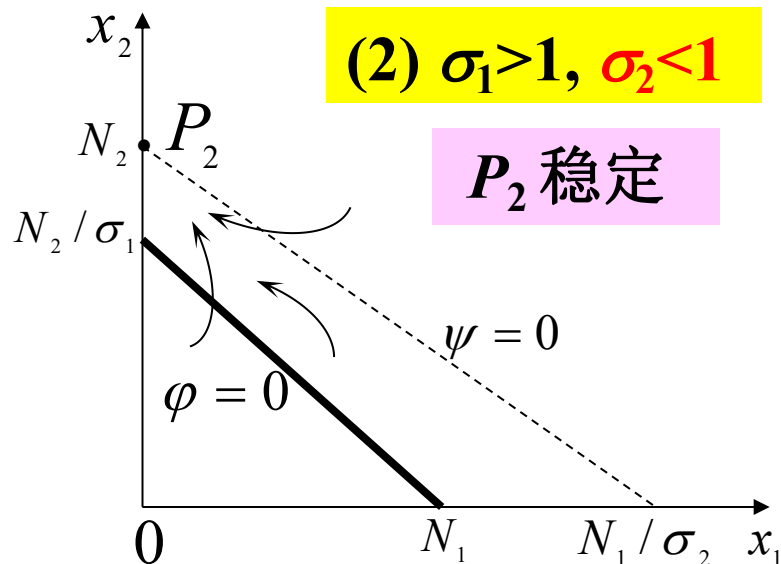
$$t \uparrow \rightarrow x_1 \uparrow, x_2 \downarrow$$

$$S_3 : \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0$$

$$t \uparrow \rightarrow x_1, x_2 \downarrow$$

从任意点出发($t=0$)的相轨线都趋向 $P_1(N_1, 0)$ ($t \rightarrow \infty$)

$P_1(N_1, 0)$ 是稳定平衡点



有相轨线趋向 P_1
有相轨线趋向 P_2

P_1, P_2 都不
(局部)稳定

P_1 稳定的条件: 直接法 $\sigma_2 > 1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1 < 1$

P_1 全局稳定

结果解释

• P_1 稳定的条件: $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1$

对于消耗甲的资源而言,
乙(相对于 N_2)是甲(相对
于 N_1)的 σ_1 倍。

$$\sigma_1 < 1$$



对甲增长的阻滞
作用, 乙小于甲
 \Rightarrow 乙的竞争力弱

$\sigma_2 > 1 \Rightarrow$ 甲的竞争力强

甲达到最大容量, 乙灭绝

• P_2 稳定的条件: $\sigma_1 > 1, \sigma_2 < 1$

• P_3 稳定的条件: $\sigma_1 < 1, \sigma_2 < 1$

通常 $\sigma_1 \approx 1/\sigma_2$, P_3 稳定条件不满足

3.3 种群的相互依存

甲乙两种群的相互依存有三种形式



- 1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。
- 2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。
- 3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。



模型假设

- 甲可以独自生存，数量变化服从Logistic规律；甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。
- 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从Logistic规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

乙为甲提供食物
是甲消耗的 σ_1 倍

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

甲为乙提供食物
是乙消耗的 σ_2 倍

种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1, 0)$	$r_1 - r_2(\sigma_2 - 1)$	$-r_1 r_2(\sigma_2 - 1)$	$\sigma_2 < 1, \sigma_1 \sigma_2 < 1$
$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1 r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1,$ $\sigma_1 \sigma_2 < 1$
$P_3(0, 0)$	$-r_1 + r_2$	$-r_1 r_2$	不稳定

P_2 是甲乙相互依存而共生的平衡点

平衡点 P_2 稳定性的相轨线

$$P_2 \left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2} \right)$$

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) = r_1 x_1 \varphi(x_1, x_2) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right) = r_2 x_2 \psi(x_1, x_2)$$

$$\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1 \sigma_2 < 1$$

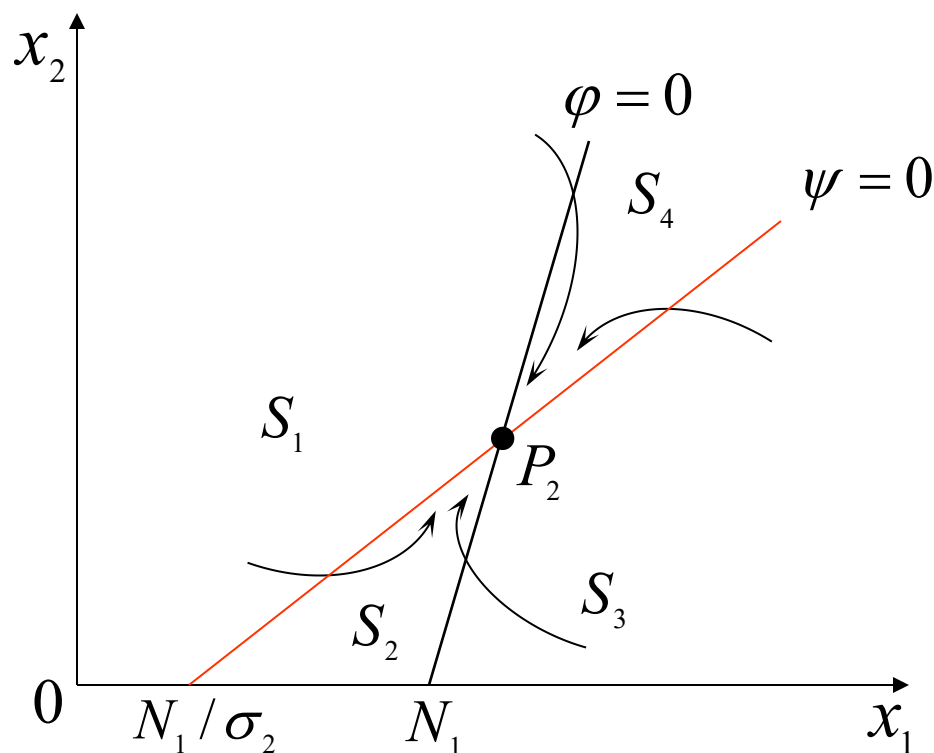
$$S_1 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0;$$

$$S_2 : \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0;$$

$$S_3 : \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 > 0;$$

$$S_4 : \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0.$$

P_2 稳定



结果 解释

甲可以独自生存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

乙不能独立生存

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$P_2 \left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2}, \frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2} \right)$$

P_2 稳定条件:
 $\sigma_1 < 1, \sigma_2 > 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$

$\sigma_2 > 1$ ~ 甲必须为乙提供足够的食物——
甲为乙提供的食物是乙消耗的 σ_2 倍

$\sigma_1\sigma_2 < 1$ ~ $\sigma_2 > 1$ 前提下 P_2 存在的必要条件

$\sigma_1 < 1$ ~ $\sigma_2 > 1, \sigma_1\sigma_2 < 1$ 的需要, 且 σ_1 必须足够小, 才能在 $\sigma_2 > 1$ 条件下使 $\sigma_1\sigma_2 < 1$ 成立

3.4 种群的弱肉强食 (食饵-捕食者模型)



- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。
- **模型的历史背景**——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

食饵-捕食者模型(Volterra)

食饵（甲）数量 $x(t)$, 捕食者（乙）数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率 r

$$\dot{x} = rx$$

乙使甲的增长率减小,
减小量与 y 成正比

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率 d

$$\dot{y} = -dy$$

甲使乙的死亡率减小,
减小量与 x 成正比

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$$

a ~ 捕食者掠取食饵能力 b ~ 食饵供养捕食者能力

方程(1),(2) 无解析解

Volterra模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy$$

稳定性分析

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy$$

平衡点

$$P(d/b, r/a), P'(0,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} r - ay & -ax \\ by & -d + bx \end{bmatrix}$$

$$A|_P = \begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p=0, q>0$
 P : 临界状态

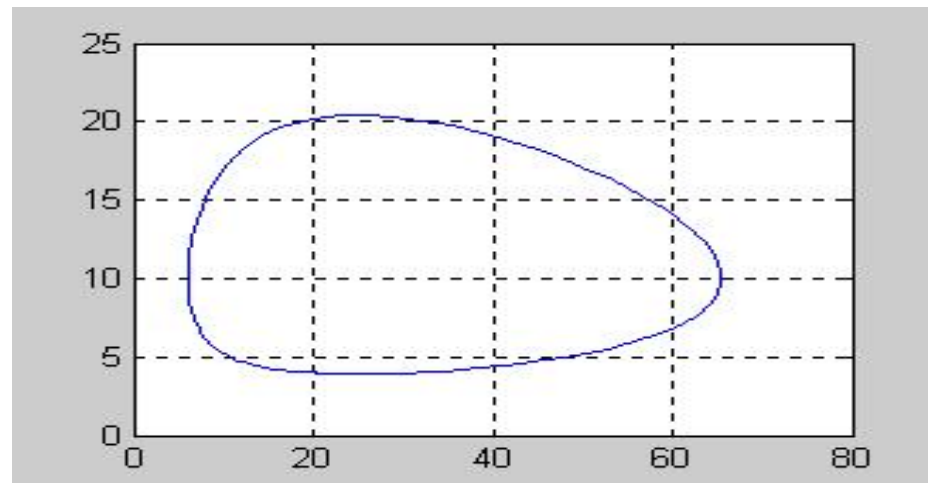
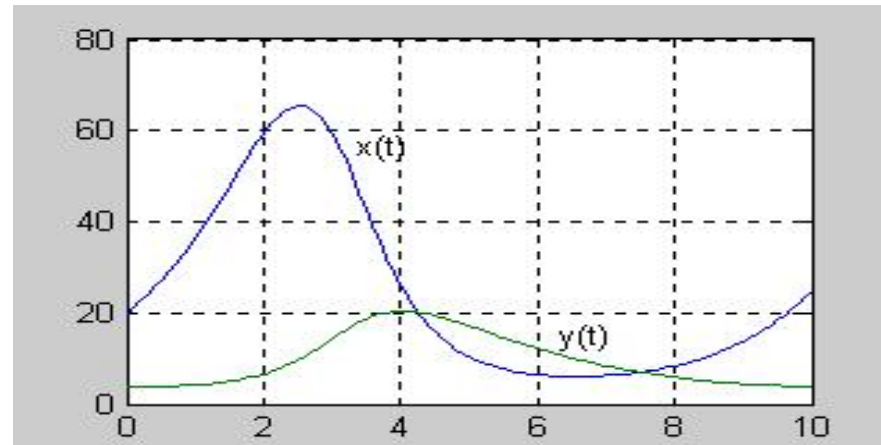
$$A|_{P'} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

$q<0$
 P' 不稳定

P 点稳定性不能用近似线性方程分析

用数学软件MATLAB求微分方程数值解

t	$x(t)$	$y(t)$
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
...
5.1000	9.6162	16.7235
5.2000	9.0173	16.2064
...
9.5000	18.4750	4.0447
9.6000	19.6136	3.9968
9.7000	20.8311	3.9587



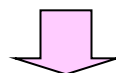
$x \sim y$ 平面上的相轨线

食饵-捕食者模型(Volterra)



$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \quad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

计算结果（数值，图形）



观察，猜测

$x(t), y(t)$ 是周期函数，相图 (x, y) 是封闭曲线

$x(t), y(t)$ 的周期约为9.6

$$x_{\max} \approx 65.5, x_{\min} \approx 6, y_{\max} \approx 20.5, y_{\min} \approx 3.9$$

用数值积分可算出 $x(t), y(t)$ 一周期的平均值：

$x(t)$ 的平均值约为25, $y(t)$ 的平均值约为10。

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (r - ay)x \\ \dot{y}(t) &= (-d + bx)y \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{消去 } dt} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x(r - ay)}{y(-d + bx)}$$

$$\Rightarrow \frac{-d + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

$$\Rightarrow -d \ln x + bx = r \ln y - ay + c_1$$

$$\Rightarrow (x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

取指数

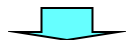
c 由初始条件确定

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$



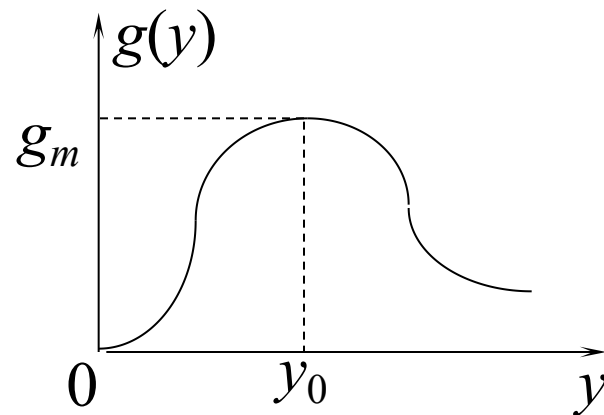
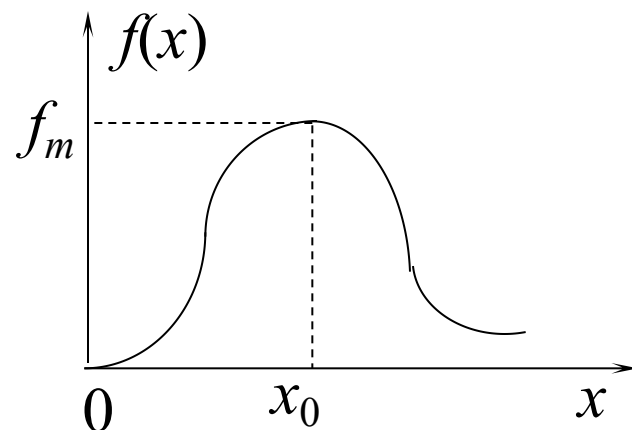
$$f(x)$$



$$g(y)$$

相轨线

$$f(x)g(y) = c$$



在相平面上讨论相轨线的图形

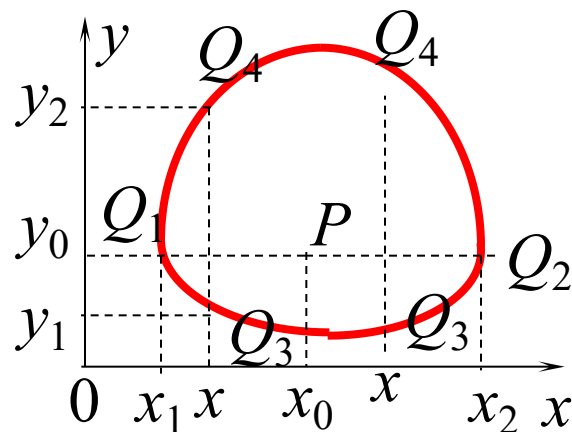
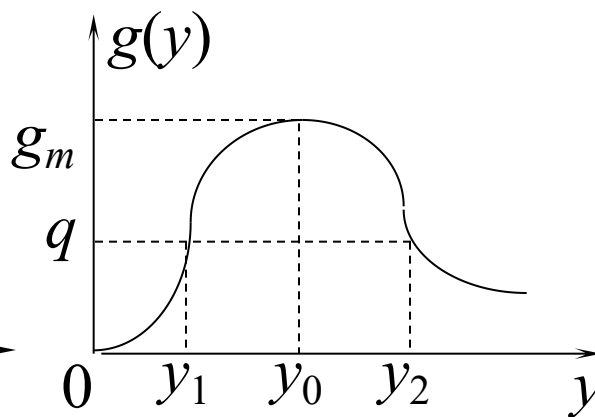
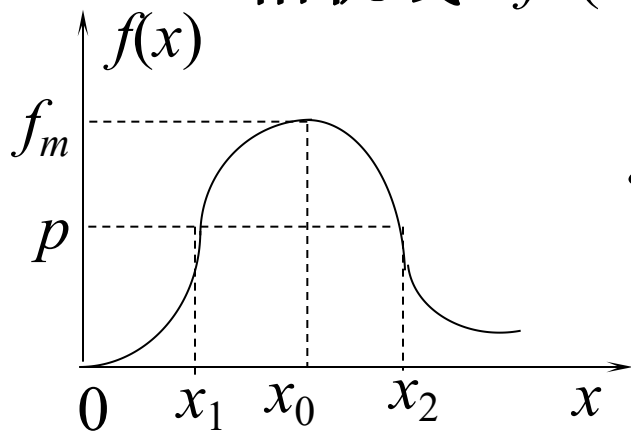
$$f(0) = f(\infty) = 0, \quad f(x_0) = f_m, \quad x_0 = d/b$$

$$g(0) = g(\infty) = 0, \quad g(y_0) = g_m, \quad y_0 = r/a$$

$c > f_m g_m$ 时无相轨线

以下设 $c \leq f_m g_m$

相轨线 $f(x)g(y) = c$



$c = f_m g_m \Rightarrow x = x_0, y = y_0 \Rightarrow$ 相轨线退化为 P 点 $P \sim$ 中心

$c < f_m g_m \Rightarrow$ 设 $c = pg_m$ 令 $y = y_0 \Rightarrow g(y) = g_m, f(x) = p < f_m$

\Rightarrow 存在 $x_1 < x_0 < x_2$, 使 $f(x_1) = f(x_2) = p \Rightarrow Q_1(x_1, y_0), Q_2(x_2, y_0)$

考察 $x \in [x_1, x_2]$ $f(x)g(y) = pg_m, f(x) > p, g(y) = q < g_m$

\Rightarrow 存在 $y_1 < y_0 < y_2$, 使 $g(y_1) = g(y_2) = q \Rightarrow Q_3(x, y_1), Q_4(x, y_2)$

x 是 $[x_1, x_2]$ 内任意点 \Rightarrow 相轨线是封闭曲线族

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 $\Leftrightarrow x(t), y(t)$ 是周期函数(周期记 T)

求 $x(t), y(t)$ 在一周期的平均值 \bar{x}, \bar{y}

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{b} \left(\frac{\dot{y}}{y} + d \right) dt$$

$$= \frac{1}{T} \left(\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{b} + \frac{dT}{b} \right)$$

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

$$x(t) = \frac{1}{b} \left(\frac{\dot{y}}{y} + d \right)$$

$$\Rightarrow \bar{x} = d/b$$

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\bar{y} = r/a$$

轨线
中心

$$P(x_0, y_0): x_0 = d/b, y_0 = r/a$$

$$\Rightarrow \bar{x} = x_0, \bar{y} = y_0$$

模型解释

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

初值 $P_0(x'_0, y'_0)$

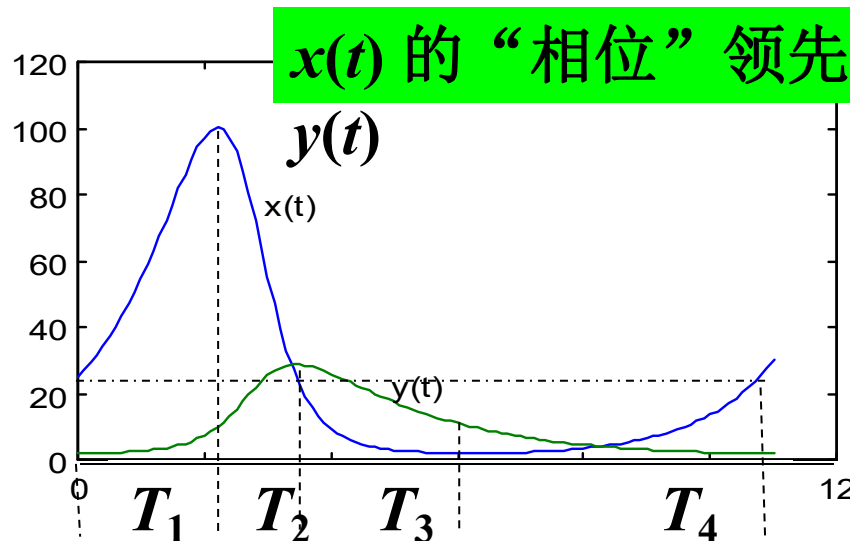
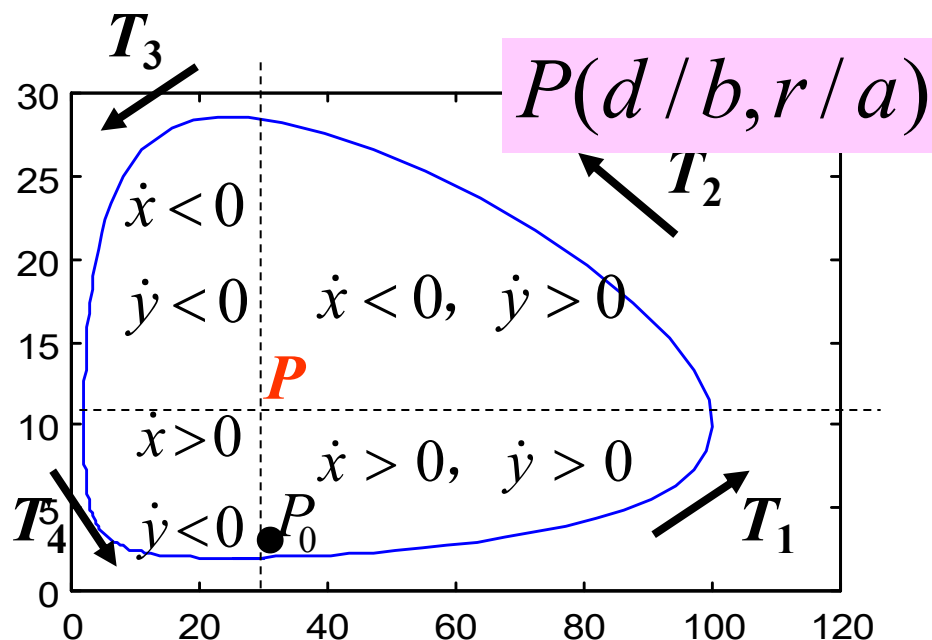
相轨线的方向

$T_1 : x(t) \uparrow y(t) \uparrow$

$T_2 : x(t) \downarrow y(t) \uparrow$

$T_3 : x(t) \downarrow y(t) \downarrow$

$T_4 : x(t) \uparrow y(t) \downarrow$



模型解释

捕食者
数量 $\bar{y} = \frac{r}{a}$

$r \sim$ 食饵增长率

$a \sim$ 捕食者掠取食饵能力

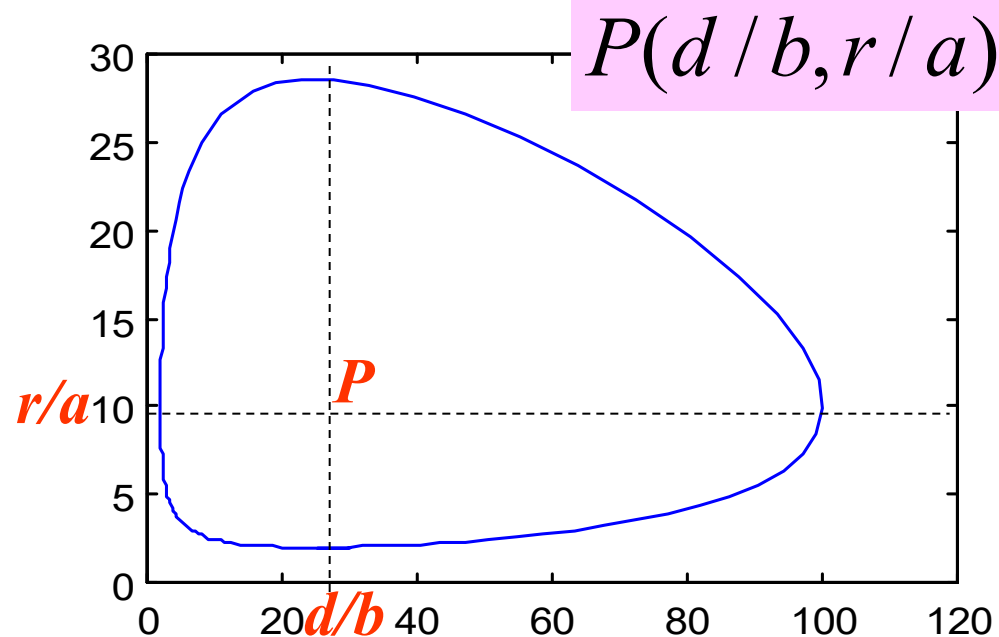
捕食者数量与 r 成正比，与 a 成反比

食饵
数量 $\bar{x} = \frac{d}{b}$

$d \sim$ 捕食者死亡率

$b \sim$ 食饵供养捕食者能力

食饵数量与 d 成正比，与 b 成反比



模型解释

一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？



自然环境

$$P(\bar{x}, \bar{y}) \quad \bar{x} = d/b, \bar{y} = r/a$$

捕捞

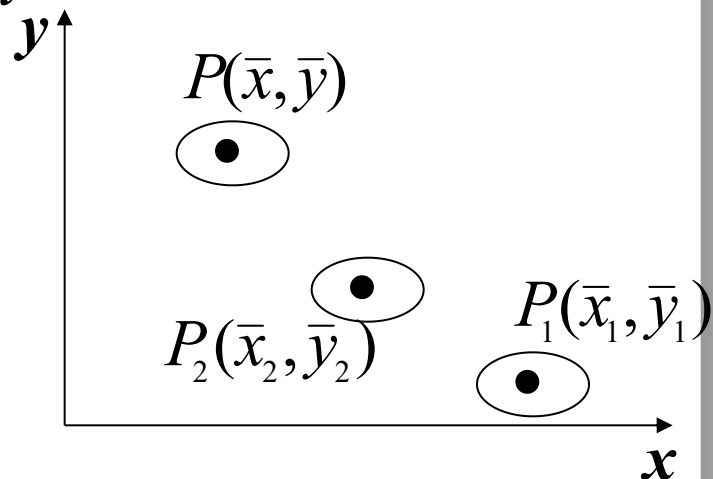
$$r \rightarrow r - \varepsilon_1, d \rightarrow d + \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 > \bar{x}, \bar{y}_1 < \bar{y} \quad P \rightarrow P_1$$

战时捕捞

$$r \rightarrow r - \varepsilon_2, d \rightarrow d + \varepsilon_2, \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_2 < \bar{x}_1, \bar{y}_2 > \bar{y}_1 \quad P_1 \rightarrow P_2$$



食饵(鱼)减少，
捕食者(鲨鱼)增加

$P \rightarrow P_1$ 还表明：对害虫(食饵)—益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂，会使害虫增加，益虫减少。

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

多数食饵—捕食者系统观察不到周期震荡，
而是趋向某个平衡状态，即存在稳定平衡点

Volterra模型 $\dot{x}(t) = (r - ay)x \quad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$

→
改写 $\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} \right)$

加Logistic项 ↓

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

有稳定平衡点

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定——一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。
- 自然界存在的周期性平衡生态系统是结构稳定的，即偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原状。

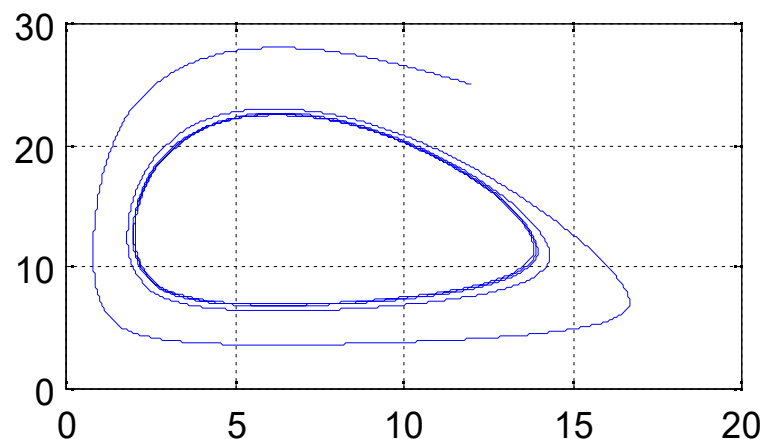
$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{1 + w x_1} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{1 + w x_1} \right)$$

$$r_1=1, N_1=20, \sigma_1=0.1, \\ w=0.2, r_2=0.5, \sigma_2=0.18$$

相轨线趋向极限环



结构稳定



两种群模型的几种形式



相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

相互依存

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

四、代表性微分方程赛题分析

96A 最优捕鱼策略

为了保护人类赖以生存的自然环境, 可再生资源 (如渔业、林业资源) 的开发必须适度. 一种合理、简化的策略是, 在实现可持续收获的前提下, 追求最大产量或最佳效益.

考虑对某种鱼 (鲢鱼) 的最优捕捞策略:

假设这种鱼分 4 个年龄组, 称 1 龄鱼, \dots , 4 龄鱼. 各年龄组每条鱼的平均重量分别为 5.07, 11.55, 17.86, 22.99(克), 各年龄组鱼的自然死亡率均为 0.8(1/年), 这种鱼为季节性集中产卵繁殖, 平均每条 4 龄鱼的产卵量为 1.109×10^5 (个), 3 龄鱼的产卵量为这个数的一半, 2 龄鱼和 1 龄鱼不产卵, 产卵和孵化期为每年的最后 4 个月, 卵孵化并成活为 1 龄鱼, 成活率 (1 龄鱼条数与产卵总量 n 之比) 为 $1.22 \times 10^{11} / (1.22 \times 10^{11} + n)$.

渔业管理部门规定, 每年只允许在产卵孵化期前的 8 个月内进行捕捞作业. 如果每年投入的捕捞能力 (如渔船数、下网次数等) 固定不变, 这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比, 比例系数不妨称捕捞强度系数. 通常使用 13mm 网眼的拉网, 这种网只能捕捞 3 龄鱼和 4 龄鱼, 其两个捕捞强度系数之比为 0.42 : 1. 渔业上称这种方式为固定努力量捕捞.

1) 建立数学模型分析如何实现可持续捕获 (即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群条数不变), 并且在此前提下得到最高的年收获量 (捕捞总重量).

2) 某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务 5 年, 合同要求 5 年后鱼群的生产能力不能受到太大破坏. 已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为: 122, 29.7, 10.1, $3.29(\times 10^9)$ 条, 如果仍用固定努力量的捕捞方式, 该公司应采取怎样的策略才能使总收获量最高.

03A

SARS 的 传 播

SARS (Severe Acute Respiratory Syndrome, 严重急性呼吸道综合症, 俗称: 非典型肺炎) 是 21 世纪第一个在世界范围内传播的传染病。SARS 的爆发和蔓延给我国的经济发展和人民生活带来了很大影响, 我们从中得到了许多重要的经验和教训, 认识到定量地研究传染病的传播规律、为预测和控制传染病蔓延创造条件的重要性。请你们对 SARS 的传播建立数学模型, 具体要求如下:

- (1) 对附件 1 所提供的一个早期的模型, 评价其合理性和实用性。
- (2) 建立你们自己的模型, 说明为什么优于附件 1 中的模型; 特别要说明怎样才能建立一个真正能够预测以及能为预防和控制提供可靠、足够的信息的模型, 这样做的困难在哪里? 对于卫生部门所采取的措施做出评论, 如: 提前或延后 5 天采取严格的隔离措施, 对疫情传播所造成的影响做出估计。附件 2 提供的数据供参考。
- (3) 收集 SARS 对经济某个方面影响的数据, 建立相应的数学模型并进行预测。附件 3 提供的数据供参考。
- (4) 给当地报刊写一篇通俗短文, 说明建立传染病数学模型的重要性。

水是人类赖以生存的资源，保护水资源就是保护我们自己，对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重。专家们呼吁：“以人为本，建设文明和谐社会，改善人与自然环境，减少污染。”

长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关政府部门和专家们的高度重视。2004年10月，由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团，从长江上游宜宾到下游上海，对沿线21个重点城市做了实地考察，揭示了一幅长江污染的真实画面，其污染程度让人触目惊心。为此，专家们提出“若不及时拯救，长江生态10年内将濒临崩溃”（附件1），并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤（附件2）。

附件3给出了长江沿线17个观测站（地区）近两年多主要水质指标的检测数据，以及干流上7个观测站近一年多的基本数据（站点距离、水流量和水流速）。通常认为一个观测站（地区）的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水。一般说来，江河自身对污染物都有一定的自然净化能力，即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使水中污染物的浓度降低。反映江河自然净化能力的指标称为降解系数。事实上，长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的，根据检测可知，主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于0.1~0.5之间，比如可以考虑取0.2（单位：1/天）。附件4是“1995~2004年长江流域水质报告”给出的主要统计数据。下面的附表是国标(GB3838-2002)给出的《地表水环境质量标准》中4个主要项目标准限值，其中I、II、III类为可饮用水。

请你们研究下列问题：

- (1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况。
- (2) 研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区？
- (3) 假如不采取更有效的治理措施，依照过去10年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来10年的情况。
- (4) 根据你的预测分析，如果未来10年内每年都要求长江干流的IV类和V类水的比例控制在20%以内，且没有劣V类水，那么每年需要处理多少污水？
- (5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见。

07A

中国人口增长预测

中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。

近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长。2007 年初发布的《国家人口发展战略研究报告》(附录 1) 还做出了进一步的分析。

关于中国人口问题已有多方面的研究，并积累了大量数据资料。附录 2 就是从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。

试从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考附录 2 中的相关数据（也可以搜索相关文献和补充新的数据），建立中国人口增长的数学模型，并由此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别要指出你们模型中的优点与不足之处。

附录 1 《国家人口发展战略研究报告》

附录 2 人口数据（《中国人口统计年鉴》中的部分数据）及其说明

五、作业布置

备选作业一：

全面放开生育政策对人口数量、结构等的影响

请在2007年建模国赛A题所介绍的中国的实际情况和人口增长的特点的基础上，参考相关数据（可以搜索相关文献和补充新的数据）和文献，建立全面放开人口生育新政策下中国人口发展的数学模型，以对中国人口的发展趋势进行预测，着重考虑该政策的实施对我国人口数量、结构等方面的影响；特别要指出你们模型中的优缺点及与已有文献的不同之处。

注：请在建模过程中用到微分方程模型；

若全国数据不宜完整收集，可参照部分省市的数据。

作业要求

文件名及邮件主题格式：“校赛队号-队员姓名-完成日期-标题”，例如“A88-韩双-徐晨光-王弢-160712-数据处理算法”

按参赛论文格式写，摘要尽可能详细，排版规范；
2-3天后提交；

接收邮箱：wubing790831@126.com（仅供此次接收作业用）

谢谢大家！

