费氏人口预测模型的求解及应用研究

裘书服[1]，胡炳清[2]，李秀珍[3]
（1. 杭州师范学院，杭州 310036；2. 中国环境科学研究院，北京 100012；3. 国家知识产权局专利局，北京 100083）

摘 要：人口预测是制定区域规划的基础，也是研究人口的增长对区域复合生态经济系统的影响和作用的前提。本文应用费尔哈斯模型建立区域人口预测模型，提出了求解费氏模型参数的三种方法，重点论述了最小二乘法及其应用。通过比较研究，本文提出的求解费氏模型参数的最小二乘法具有实际应用意义。

关键词：费氏模型；人口预测；参数；最小二乘法

中图分类号：C923 文献标识码：A 文章编号：1001-006X（2006）03-0054-03

The Solution and Application Research of Verhulst Model in Population Forecast/Qiu Shufu (Hangzhou Teachers College, Hangzhou 310036), Hu Bingqing (Chinese Research Academy of Environment Science, Beijing 100012), Li Xiuzhen (State Intellectual Property Office of the People's Republic of China, Beijing 100083)

Abstract: As the base for designing the regional plan, the populations forecast is also the precondition on the research of the population growth's effect to the regional compound ecological system. The article models the regional populations forecast by using the model of verhulst, then provides three methods of the parametric solution, in which the method of least square algorithm is mainly discussed. By comparing with others, the method of least square algorithm the article discussed, which is used in the solution to the model of verhulst's parameters, is of great significance in practical application.

Key words: verhulst model; population forecast; parameter; least square algorithm

人口规划是城市规划、环境规划等各种规划的基础，而人口预测是人口规划的重要组成部分和前提条件。在人口预测模型中，最为常见和熟悉的是自然增长率模型。自然增长率模型是马尔萨斯模型的自然指数一阶展开式，马氏模型认为人口的增长速率与人口数成正比。由于人口的增长速率是人口数的一次项，马氏模型预测结果呈现“几何级数”增长的现象，尤其在较长未来时间的预测中，会产生“人口爆炸”的结论，费尔哈斯模型正是在这种情况下提出的。

1 Verhulst Model（费尔哈斯模型）

费氏模型是在马尔萨斯（Malthusian）模型基础上的修正，增加了一个二次项：生长和发展的增长受制于环境约束：

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}=aP(t)-b[P(t)]^2$$

$$\text{或 } P'(t)=\lambda P(t)[M-P(t)] \tag{1}$$

式中：$P(t)$ 为预测年 t 人口数；a，b（λ）分别为一次、二次的常系数；M 为区域人口上限，$M=a/b$。

$P(t_0)=P_0$ 时的费氏模型的解析解为：

$$P(t)=\frac{M}{1+(\frac{M}{P_0}-1)\cdot e^{-\lambda M(t-t_0)}} \tag{2}$$

2 参数 a 和 b 的确定

要应用费氏模型进行人口预测，首先必须确定常系数 a、b。确定费氏模型（式2）的参数 a、b 的方法有微分方程求解法、直接求解法和最小二乘法3种。

（1）微分方程求解法

微分方程求解法就是利用至少3 a的历史数据通过微分的方法计算式（1）左端的导数，并将两组导数和人口数代入式（1），从而得到二元一次方程组，最终获得参数 a、b。

如3a的人口数据分别为 P_0、P_1 和 P_2，对应的时间分别为 T_0、T_1 和 T_2，则 P_1 和 P_2 的导数可由式（3）获得：

$$P_1'=\frac{P_1-P_0}{T_1-T_0}$$

$$P_2'=\frac{P_2-P_0}{T_2-T_0}\text{ 或 }P_2'=\frac{P_2-P_1}{T_2-T_1} \tag{3}$$

将 P_1 和 P_1' 以及 P_2 和 P_2' 分别代入式1，得到

收稿日期：2005-12-05

基金项目：国家“九五”科技攻关项目“生态环境质量评估技术与典型地区研究”（96-911-08-04）。

作者简介：裘书服（1963-），男，浙江省嵊州人，讲师，主要从事人口、环境生态、旅游等方面研究。

二元一次方程组，解该方程即可获得参数 a 和 b，参数 a 和 b 的计算为：

$$a = \frac{P_1' \cdot P_2^2 - P_2' \cdot P_1^2}{P_1 \cdot P_2 \cdot (P_2 - P_1)}$$

$$b = \frac{P_1' \cdot P_2 - P_2' \cdot P_1}{P_1 \cdot P_2 \cdot (P_2 - P_1)} \qquad (4)$$

本方法因选择的历史数据不同而获得的参数大小不同，甚至会出现截然相反的正负值。因此，选择 3a 的人口数据是关键。

(2) 直接求解法

直接求解法就是利用 3a 的历史人口数据直接代入式（2）中，得到二元方程组，通过解方程组获得参数 a 和 b。

如 3a 的人口数据分别为 P_0、P_1 和 P_2，对应的时间分别为 T_0、T_1 和 T_2，令

$$\triangle T_1 = T_1 - T_0$$

$$\triangle T_2 = T_2 - T_0$$

$$X = e^{-a}$$

则将 P_0 和 P_1 代入式（2），并经转换得到参数 b 的计算为：

$$b = \frac{a(P_0 - P_1 \cdot X^{\triangle T_1})}{P_0 \cdot P_1(1 - X^{\triangle T_1})} \qquad (5)$$

同样，将 P_0 和 P_2 代入式（2），并经转换得到参数 b 的计算为：

$$b = \frac{a(P_0 - P_2 \cdot X^{\triangle T_2})}{P_0 \cdot P_2(1 - X^{\triangle T_2})} \qquad (6)$$

联合式（5）和式（6），并经变换得到式（7），令右端常数等于 P，即

$$\frac{1 - X^{\triangle T_1}}{1 - X^{\triangle T_2}} = \frac{P_2(P_0 - P_1)}{P_1(P_0 - P_2)} = P \qquad (7)$$

式（7）经整理后变为：

$$P \cdot X^{\triangle T_2} - X^{\triangle T_1} - P + 1 = 0 \qquad (8)$$

确定参数 a、b 的关键就是求解上述的一元多次方程。根据上面的设置，$X \in (0, 1)$，则

$$a = -\ln X$$

$$b = \frac{a(P_0 - P_1 \cdot X^{\triangle T_1})}{P_0 P_1(1 - X^{\triangle T_1})} = \frac{a(P_0 - P_2 \cdot X^{\triangle T_2})}{P_0 P_2(1 - X^{\triangle T_2})}$$

本方法由于求解一元多次方程式（8）有一定的难度，需要应用试探法或其它方法专门编程获得 X 值，故计算方法相对繁杂。同样也存在选择 3a 历史数据的问题。

(3) 最小二乘法

最小二乘法就是利用历史数据拟合参数使估计的误差最小化。由于式（2）为非线性解，利用历史数据来拟合常数项 a 和 b 方法如下。

首先把式（2）作一变换，即

$$P(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \frac{a - bP_0}{aP_0} \cdot e^{-a(t-t_0)}}$$

令 $c = \frac{a - bP_0}{aP_0}, d = \frac{b}{a}, c + d = \frac{1}{P_0}, T = t - t_0$

其次对 $P(t)$ 进行倒数处理，即

$$\frac{1}{P(t)} = d + c \cdot e^{-aT}$$

右端第二项 $e^{-a(t-t_0)}$ 无法利用线性回归方法，因而还必须进行线性化，我们知道 e^{-x} 的级数展开，即

$$\Theta e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots(-\infty < X < +\infty)$$

$$\therefore \frac{1}{P(t)} = d + c - acT + \frac{a^2 c}{2!}T^2 - \frac{a^3 c}{3!}T^3 + \frac{a^4 c}{4!}T^4 + \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{P(t)} - \frac{1}{P_0} = -acT + \frac{a^2 c}{2!}T^2 - \frac{a^3 c}{3!}T^3 + \frac{a^4 c}{4!}T^4 + \cdots$$

令 $b_n = (-1)^n \frac{a^n c}{n!}; \triangle P(t) = \frac{1}{P(t)} - \frac{1}{P_0}$

$$\therefore \triangle P(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i T^i$$

由上式可知，b_i 是 a 和 c 的函数，当 $i = 1$ 时，无法确定 a 和 c；当 $i = 2$ 时，可以唯一确定 a 和 c；当 $i > 2$ 时，a 和 c 也难以确定，并且 b_i 将是相互关联。因此，取二阶展开作为线性回归方程，即

$$\triangle P(t) = b_1 T + b_2 T^2 \qquad (9)$$

由式（9）可知：

$$a = \frac{-2b_2}{b_1}; c = \frac{b_1^2}{2b_2}; b = -ac + \frac{a}{p_0} = b_1 - \frac{2b_2}{b_1 p_0} \qquad (10)$$

本方法经上述一系列的转换和变换，式（9）可以直接用统计分析工具得到 b_1 和 b_2，进而获得费氏模型的参数 a、b。并且本方法利用了全部的历史数据，能够较好地反映人口的增长变化过程及趋势。

3　示范区总人口数预测

根据费氏模型最小二乘法，利用成都市“温、郫、都”示范区的 1990 ~ 1999 年的人口数，以

1990年为基准年，应用式（9）进行回归计算，二次回归结果为：

$$Y = -1.085\,685\,72\times 10^{-8}X + 2.268\,45\times 10^{-10}X^2 \quad (11)$$

式中：$Y = 1/P_t - 1/P_{1990}$；$X = t - 1990$。

统计回归技术参数如下：

相关系数 $R = 0.998\,187\,585$；F 检验值 $F = 962.938\,4$（$\alpha < 0.01$）。

回归系数如下：

$b_1 = -1.085\,685\,72\times 10^{-8}$；

$b_2 = 2.268\,45\times 10^{-10}$。

费氏模型常数如下：

$a = 0.039\,720\,187$；

$b = 2.156\,16\times 10^{-8}$。

由式（11）或费氏模型可以获得示范区总人口的回归结果，计算结果见表1。

表1 示范区总人口费氏模型回归结果

年份	总人口数/万人	费氏模型		对数模型	
		回归人口数/万人	相对误差 %	回归人口数/万人	相对误差 %
1990	122.907 2	122.907 2	0.00	122.972 1	0.05
1992	125.712 0	126.132 7	0.33	125.987 4	0.22
1994	129.345 0	129.228 3	-0.09	128.999 5	-0.27
1996	132.243 5	132.161 9	-0.06	132.008 7	-0.18
1998	135.142 7	134.900 8	-0.18	135.014 9	-0.09
2000		137.412 1		138.018 0	
2005		142.488 8		145.512 8	
2010		145.513 2		152.988 9	

根据费氏模型可以得到示范区的人口总数的上限 M 为184.2万人，距离上限5万人（即179.2万人）的时间为2063年，距离上限2万人（即182.2万人）的时间为2087年，距离上限1万人（即183.2万人）的时间为2104年。

另外，我们用对数模型对示范区的总人口进行统计分析，预测方程为：

$$Y = 30\,016\,527.503\,4 * \ln X - 226\,772\,517.336\,4 \quad (12)$$

式中：Y为示范区年末总人口数（人）；X为预测年份的绝对公元年份。

预测结果见表1。

4 讨 论

在本项目研究中，人口预测模型除了采用费氏模型外，还采用了对数模型、指数模型和多项式模型。以示范区总人口预测来看，费氏模型2005年的预测值为142.5万人，对数模型为145.5万人，2010年费氏模型为145.5万人，对数模型为153万人。费氏模型1999年至2010年的平均人口增长率为6.04‰，对数模型为10.41‰，从历史资料来看，1998年至1999年的增长率低于10.41‰外，其余年份均高于这一增长速度。从平均相对误差来看，费氏模型为0.147%，对数模型为0.19%。若将费氏模型获得的常数 a、b 代入费氏模型的解析方程中，2005年片区总人口预测值为144.5万人，2010年为150.3万人，与对数模型的预测结果更加接近，其平均相对误差为0.14%。但从远期预测来看，对数模型为增长率逐年缓慢下降而总人数持续增长的模型，没有上限值。总之，预测结果与成都市“温、郫、都”国家级生态示范区建设规划（修订本）提出的2010年全区人口总数控制在153万人基本一致。

综上所述，本文提出的求解费氏模型参数的最小二乘法具有操作性强、充分利用历史资料的特点，获得的人口预测模型具有较好的预测效果。

【参 考 文 献】

[1] 姚 俐，江成顺，刘广彦．动态人口模型分岔问题与数值计算［J］．信息工程大学学报，2003，4（2）：93-96．

[2] 宇永仁．数学模型的合理控制［J］．沈阳航空工业学院学报，2004，21（3）；90-91．

[3] 方亚玲．对人口模型的研究［J］．山西煤炭管理干部学院学报，2000（2）：41-44．

[4] 郝新生．关于偏微分方程人口模型中死亡率的确定［J］．山西农业大学学报，2000，20（1）：88-90．

[5] 邓聚龙．灰色预测与决策［M］．武汉：华中理工大学出版社，1992．

[6] 翁秉仁．人口增长模型［EB/OL］．http：//episte.math.ntu.edu.tw．

［责任编辑：胡建伟］