文章编号:1671-1513(2009)06-0075-04

# Logistic模型的参数估计及人口预测

王学保， 蔡果兰
(中央民族大学 理学院，北京 100081)

**摘 要**：用数值微分和线性拟合化技术对Logistics模型进行了参数估计，由此检验了2005～2007年中国总人口数的误差情况，其中2007年用相关参考文献的等差参数估算方法所得结果的相对误差为5.58%，而本文参数估算所得结果的相对误差为0.114‰，预测取得了理想的效果.

**关键词**：Logistic模型；人口预测；参数估计；数值微分；线性拟合
**中图分类号**：O22 **文献标识码**：A

## 1 背景简介

人口问题是影响中国发展的重要因素，准确预测出未来人口的发展趋势对国家的整体发展规划有重要的指导意义，考虑到种内对资源的竞争，可以假设人口增长率 $r$ 是人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$，即不同密度的人口有不同的净增长率. Logistic假设 $r(x)$ 是 $x(t)$ 的减函数，且是 $x$ 的线性函数 $r(x)=r-sx$，$s>0$，这里的 $r$ 相当于 $x(t=0)$ 时的增长率 $r(x)<r$，即人口不受环境和资源限制的固有(内禀)增长率，显然实际增长率，为了明确参数 $s$ 的物理意义，引入最大人口容量 $x_m$，即自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量. 则当 $x=x_m$ 时，人口的增长率为零，即 $0=r-sx_m$；$s=r/x_m$，在Logistic的线性假设下，有以下的Logistic模型[1]

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{x}{x_m}\right)x,\ x(0)=x_0. \tag{1}$$

Logistic模型是1938年Verhulst-Pearl在修正非密度方程时提出的，他认为实际增长率不是内禀增长率，而是在一定的环境中种群的增长总存在一个上限，当种群的数量逐渐向着上限上升时实际增长率就要逐渐地减少，因而也被称为Verhulst-Pearl方程[2].

用变量分离法求得方程(2)的解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}\text{可简化为}x=\frac{x_m}{1+ae^{bt}}. \tag{2}$$

设初始人口 $x_0<x_m$，由解(2)得当 $t\to\infty$，$x\to x_m$，对(1)求导得 $x''=(1-2x/x_m)$，经过分析可知人口增长率的极值点是 $x=x_m/2$，即当 $x=x_m/2$ 时人口增长率最大，前一半为快速增长期，后一半为慢速增长期. 解曲线有三个显著特征：一是单调递增性；二是增长有限性；三是形状为S形.

从公式(2)可以看出要想预测出人口数量，需求出参数 $x_m$，$r$ 或 $a$，$b$，文献[3]对人口增长过程利用曲线拟合，使点到模型的垂直距离的平方和(即残差平方和)是最小值，即达到最佳拟合，采用最小二乘法求

$$E(x_m,r)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_m}{1+(x_m/x_0-1)e^{-rt}}-y_i\right)^2$$

的最小值，通过求 $\partial E/\partial x_m$，$\partial E/\partial r$ 并令两者为零，利用Matlab软件进行处理可以估算 $x_m$，$r$ 的值，文献[4-6]对解进行去倒数处理得到 $1/x=1/x_m-$

收稿日期：2009-01-16
基金项目：中央民族大学青年教师基金资助项目(cun A08).
作者简介：王学保(1977—)，男，黑龙江讷河人，硕士研究生，研究方向为微分方程.

万方数据

$(1/x_0-1/x_m)e^{-r\tau}$,利用等长度时间 $t_0,t_1,t_2=2t_1$ 所对应的三个人口数量 $x_0,x_1,x_2$,利用时间的等差性求得相关参数

$$r=\ln\frac{(x_1-x_0)x_2}{(x_2-x_1)x_0},$$

$$x_m=\frac{x_0(1+e^{r\tau})}{(1+x_0x_1)e^{r\tau}}(\tau=t_1-t_0=t_2-t_1).$$

本文利用数值微分并对函数采用线性拟合化的技术来估算相关参数.

## 2 预备知识

下面是本文参数估计所需的理论知识和相关MATLAB软件应用.

1) 数值微分:根据函数在一些离散点的函数值,推算它在某点的导数或高阶导数的近似值的方法.通常用差商代替微商,或者用一个能够近似代替该函数的较简单的可微函数(如多项式或样条函数等)的相应导数作为能求导数的近似值.一些常用的数值微分公式(如两点公式、三点公式等)就是在等距步长情形下用插值多项式的导数作为近似值的.

2) 由导数的定义可得精度为 $O(h)$ 的向前差分和向后差分公式:

$$f'(x)\cong\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$f'(x)\cong\frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

为了提高精度引入精度为 $O(h^2)$ 的中心差商公式.

**定理**[7] (精度为 $O(h^2)$ 的中心差商公式)设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有三阶连续导数,且 $x-h,x,x+h\in[a,b]$,则有

$$f'(x)\cong\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},\tag{3}$$

且存在 $\xi=\xi(x)\in(a,b)$,使得

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+R_c(f,h),\tag{4}$$

其中 $h(h>0)$ 是绝对值较小的增量,$R_c(f,c)$ 为公式(4)的截断误差,公式(3)右端称中心差商,公式(4)称为中心差商公式.

如果将数值求导空间 $[a,b]$ 进行 $n$ 等分,步长 $h=\frac{b-a}{n}$,当函数 $y=f(x)$ 在分点上用离散数值表示为 $(x_k,y_k)$,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 时,可以得到函数在分点的导数值为 $f'(x_k)\cong\frac{y(x_{k+1}-x_{k-1})}{2h}$,$k=1,2,\cdots,n-1$,对于端点 $x_0$,$x_n$,有

$$f'(x_0)\cong\frac{y(x_1)-y(x_0)}{h},$$

$$f'(x_n)\cong\frac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{h},$$

误差为 $O(h)$,为了提高精度利用二次差值函数得到精度为 $O(h^2)$ 的三点公式,即在 $x_0,x_k,x_n$ 处的求导公式

$$f'(x_0)\cong\frac{-3y(x_0)+4y(x_1)-y(x_2)}{2h}$$

$$f'(x_k)\cong\frac{f(x_k+h)-f(x_k-h)}{2h}\ (k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$f'(x_n)\cong\frac{y(x_{n-2})-4y(x_{n-1})+3y(x_n)}{2h}.$$

本文就是用三点公式作为数值微分公式来进行数值微分计算的.

3) 多项式拟合及MATLAB应用.

一组数据 $(x_i,y_i)$,$i=1,\cdots,n$ 用最小二乘法作曲线拟合时,若选取一组 $r_1(x),\cdots,r_m(x)$ 为 $1,x,x^2,\cdots,x^m(m<n)$,则拟合曲线为多项式 $y=a_1x^m+\cdots+a_mx+a_{m+1}$ 对于指数型曲线拟合前需作变量代换,化为系数参数的线性函数.

而最小二乘法拟合的多项式拟合有现成的MATLAB程序格式 $a=\mathrm{polyfit}(x,y,m)$,其中参数 $x,y$ 为要拟合的数据,是数据自定义的数组,$m$ 为拟合多项式的次数.求多项式在 $x$ 处的值的命令为 $y=\mathrm{polyval}(a,x)$.在本文中主要使用一次线性拟合.

## 3 模型的参数估计

由Logistic模型的解(3)中可知只要对参数 $x_m,a,b$ 进行估计即可,主要方法和步骤如下:

1) 首先先求 $x_m$,对(2)式变形得到

$$\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{x}=r-\frac{r}{x_m}x,\tag{5}$$

万方数据

令$\frac{dx/dt}{x}=r_k$为年增长率，根据人口数据利用第二部分的数值微分方法算出方程左端即增长率 $r_k$，然后对 $r_k$ 进行线性拟合可以求得 $r_k=cx+d$，对照(5)式我们可得 $x_m=|d/c|$.

2) 求参数 $a,b$，将 $x_m$ 的值代入(3)式并变形为 $\frac{x_m}{x_0}-1=ae^{bt}\left(a=\frac{x_m}{x_0}-1, b=-r\right)$，两端取对数得 $\ln\left(\frac{x_m}{x}-1\right)=\ln a+bt$，令 $Y=\ln\left(\frac{x_m}{x_0}-1\right)$，$B=\ln a$，$A=b$，则较为繁琐的指数形式的解就可变换为线性函数 $Y=At+B$，利用 MATLAB 软件可以拟合出 $A$、$B$ 的值，从而求出 $a=e^B$，$b=A$ 的值，进而确定出人口模型解的具体形式.

## 4 Logistic人口模型对中国人口的预测

从图 1 中可以看出 1987～2003 年中国人口的变化情况，出生率呈线性递减的趋势，而死亡率几乎保持在同一水平线上，从而导致人口的自然增长率也呈线性递减趋势. 恰好满足 Logistic 线性假设，因此可以运用 Logistic 模型进行较长时间的预测.

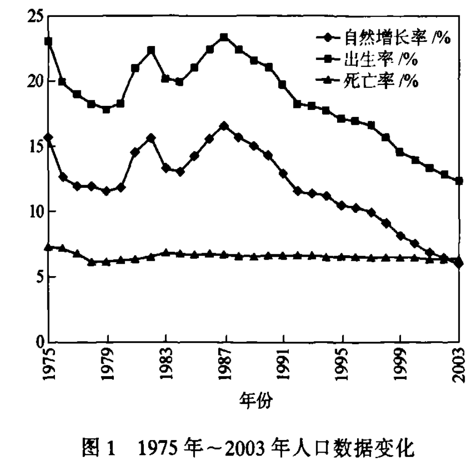


图 1　1975 年～2003 年人口数据变化

1) 根据 1987～2003 年人口数据(见表 1)，运用第三部分的数值微分得到年增长率的值，然后利用 MATLAB 软件线性拟合为如下直线方程 $r_k=cx+d(c=-4.9999\times10^5, d=7.0740)$，估算 $x_m=141\,480$ 万人.

2) 把所求的 $x_m$ 代入(2)采用第三部分的线性变换并拟合一步，估算 $a=0.295$，$b=0.0713$ 从而求出人口预测解的具体形式，

$$x=\frac{141\,480}{1+0.2951e^{-0.0713(t-t_0)}},$$

表 1　1987～2003 年中国人口数据(万人)

| 年份 | 总人口 | 年份 | 总人口 |
|---|---|---|---|
| 1987 | 109 300 | 1996 | 122 389 |
| 1988 | 111 026 | 1997 | 123 626 |
| 1989 | 112 704 | 1998 | 124 761 |
| 1990 | 114 333 | 1999 | 125 786 |
| 1991 | 115 823 | 2000 | 126 743 |
| 1992 | 117 171 | 2001 | 127 627 |
| 1993 | 118 517 | 2002 | 128 453 |
| 1994 | 119 850 | 2003 | 129 227 |
| 1995 | 121 121 | | |

通过 MATLAB 软件进行拟合可以直观地看到数值的变化情况(见图 2).

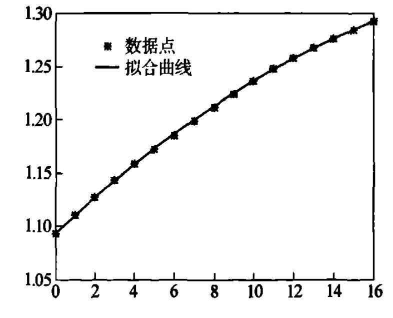


图 2　1987～2003 年数据点与拟合曲线

3) 模型检测：我们用 2005～2007 年的中国人口进行检验，详见表 2.

从表 2 知利用数值微分与线性拟合化技术对参数进行的估计，其解对人口的预测精度要比以前的方法好很多.

4) 预测结果：从表 3 的预测结果来看，在未来的 20 年内中国的人口总数不会超过 14 亿，由于人口数量均高于人口容量的一半，属于慢速增长期即我国现在处在人口增长缓慢阶段，但人口增长率仍然为正值.

万方数据

表 2 2005～2007 年的人口预测值与实际统计值(单位:万人)的误差

| 年份 | 实际统计量 | 文献[5-7]等差参数估算 | | 数值微分和线性参数估算 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 预测人口量 | 相对误差/% | 预测人口量 | 相对误差/‰ |
| 2005 | 130 756 | 136 405 | 4.32 | 130 777 | 0.160 |
| 2006 | 131 448 | 137 954 | 4.95 | 131 461 | 0.100 |
| 2007 | 132 104 | 139 505 | 5.58 | 132 104 | 0.114 |

表 3 未来 20 年的人口预测值(单位,万人)

| 年份 | 总人口 | 年份 | 总人口 | 年份 | 总人口 | 年份 | 总人口 | 年份 | 总人口 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 132 709 | 2012 | 134 781 | 2016 | 136 382 | 2020 | 137 612 | 2024 | 138 551 |
| 2009 | 133 277 | 2013 | 135 221 | 2017 | 136 721 | 2021 | 137 871 | 2025 | 138 749 |
| 2010 | 133 811 | 2014 | 135 634 | 2018 | 137 038 | 2022 | 138 113 | 2026 | 138 833 |
| 2011 | 134 311 | 2015 | 136 020 | 2019 | 137 335 | 2023 | 138 340 | 2027 | 139 105 |

由此可知若人口数据充分时,利用数值微分和线性拟合化技术来估算相关参数,可以更加有效预测未来的人口数量,从而对国家的整体发展规划具有重要的指导意义.

**参考文献:**


[1] 林振山. 种群动力学[M]. 北京:科学出版社,2006.

[2] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京:科学出版社,1985.

[3] 李秋红,何先平. 数学模型在人口增长中的应用[J]. 太原师范学报,2008,7(2):55-56.

[4] 邵晓峰,张克新. 黄冈市人口增长模型的研究[J]. 数学的实践与认识,2008,38(13):97-101.

[5] 李振福. 长春市城市人口的 Logistic 模型预测[J]. 吉林师范大学学报,2003(1):16-19、34.

[6] 李华中. Logistic 模型在人口预测中的应用[J]. 江苏石油化工学院学报,1998,10(2):32-34.

[7] 任玉杰. 数值分析及其 MATLAB 实现[M]. 北京:高等教育出版社,2007.


# PARAMETER EVALUATION OF LOGISTIC MODEL AND POPULATION PREDICTION


WANG Xue-bao, CAI Guo-lan

(*Department of Mathematics*, *Central University for Nationality*, *Beijing* 100081, *China*)



**Abstract**: In this paper, parameters of the logistic model are evaluated by numerical differentiation and linearity simulation. The result shows that the forecasting consequence of this method was more effective than traditional methods of referenced literature by checking population of china from 2005 to 2007, in which the relative error of 2007 is 0.114‰ compared with 5.58% of interrelating literature.



**Key words**: logistic model; population prediction; parameter evaluation; numerical differentiation; linearity simulation


(责任编辑:王 宽)

万方数据