一、名词解释

1. 位温：气压为 p，温度为 T 的干气块，干绝热膨胀或压缩到 1000hPa 时所具有的温度。 $\theta=T(1000/p)^{R/Cp}$，如果干绝热，位温守恒（ $\partial\theta/\partial t=0$）。

2. 尺度分析法：依据表征某类大气运动系统各变量的特征值来估计大气运动方程中各项量级的大小，判别各个因子的相对重要性，然后舍去次要因子而保留主要因子，使得物理特征突出，从而达到简化方程的一种方法。

3. 梯度风：水平科氏力、惯性离心力和水平气压梯度力三力达到平衡，此时空气微团运动称为梯度风，表达式为： $\frac{V^2}{r_T}=-fV-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$。

4. 地转风：对于中纬度天气尺度的扰动，水平科氏力与水平气压梯度力接近平衡，这时空气微团作直线运动，称为地转风，表达式为： $\vec{V}_g=-\frac{1}{f\rho}\nabla p\times\vec{k}$。

地转风：在自由大气中，因气压场是平直的，空气仅受水平气压梯度力和水平地转偏向力的作用，当二力相等的空气运动称之为地转风。

5. 惯性风：当气压水平分布均匀时，科氏力、惯性离心力相平衡时的空气流动。表达式为： $V_i=-fR_T$。

6. 斜压大气：大气密度的空间分布依赖于气压 (p)和温度 (T)的大气，即： $\rho=\rho(p,T)$。实际大气都是斜压大气，和正压大气不同，斜压大气中等压面、等比容面（或等密度面）和等温面是彼此相交的。

7. 环流：流体中任取一闭合曲线 L，曲线上每一点的速度大小和方向是不一样的，如果对各点的流体速度在曲线 L 方向上的分量作线积分，则此积分定义为速度环流，简称环流。

8. 埃克曼螺线：行星边界层内的风场是水平气压梯度力、科氏力和粘性摩擦力三着之间的平衡结果。若以 u 为横坐标， v 为纵坐标，给出各个高度上风矢量，并投影在同一个平面内，则风矢量的端点迹线为一螺旋。称为埃克曼螺线。

9. 梯度风高度： 当 $z_H=\pi/\gamma$，$\gamma=(2k/f)^{1/2}$ 时，行星边界层风向第一次与地转风重合， 但是风速比地转风稍大，在此高度之上风速在地转风速率附近摆动，则此高度可视为行星边界层顶，也表示埃克曼厚度。

$$De \equiv \pi/\gamma = \left(\frac{2K}{f}\right)^{1/2}\pi$$

梯度风高度：当 $z_H=\pi/\gamma$ 时，边界层的风与地转风平行，但比地转风稍大，通常把这一高度视为行星边界层的顶部，也称为埃克曼厚度。

10. Ekman 泵：在大气边界层中，大尺度大气运动主要是气压梯度力、科氏力和摩擦力三力的平衡。在这三力的平衡下，大气质点的运动不再象自由大气那样沿着等压线流动，其流线与等压线成一交角并从高压流向低压。这样，在低压的地方，大气质量有辐合，其上空的大气就会上升，并将边界层大气挤到自由大气中；而在高压的地方，大气质量有辐散，其上空的大气就下沉，进而就将自由大气的质量吸入边界层。这种由于摩擦效应产生的边界层顶的上升或下沉运动，俗称为 Ekman 泵。

11. 微扰法（小扰动法） ：大气运动方程组是非线性的，直接求解非常困难。因此，通常采用微扰法（小扰动法）将方程组线性化，讨论简单的波动（线性波）问题。

12. 上下游效应：是指大范围的上、下游系统环流变化的联系。上游某地区的长波系统发生变化某种显著的变化之后，接着以相当快的速度（通常比系统本身的移速甚至比平均西风风速都要快的速度）影响下游系统发生变化，这就是上游效应。上游效应： $C_g>C>0$，上游扰动的能量先于扰动本身到达下游，在下游产生新的扰动，或加强下游原有扰动的影响。

13. 滤波：根据波动形为的物理机制而采用一定的假设条件，以消除气象意义不大的波动（称为 噪音 ”）而保留有气象意义波动的方法。

14. 重力外波：是指处于大气上下边界的空气，受到垂直扰动后，偏离平衡位置以后，在重力作用下产生的波动，发生在边界面上，离扰动边界越远，波动越不显著。快波，天气学意义不重要。

15. 重力内波： 是指在大气内部， 由于层结作用和大气内部的不连续面上， 受到重力扰动， 偏离平衡位置，在重力下产生的波动。重力内波与中，小尺度天气系统关系密切。

16. 频率方程：波速 c（或频率 $\omega=kc$）一般是基本气流 $\vec{u}$，波数 k（或波长 L）及其他参数（如 g, H, f, β）的函数，即 $c=c(u, k, g, h, f, \beta, \cdots)$ 称为波速方程或频率方程（频率与波数之间的关系式）。

(二)简答题

1. 什么叫二级环流 ？什么是旋转减弱 ？

答：二级环流：也称为次级环流，是由行星边界层的湍流摩擦效应产生的穿越行星大气边界层和自由大气环流的垂直环流圈，它是叠加在一级环流或称主要环流（自由大气中不计湍流摩擦的准地转涡旋环流）之上并受这一主环流系统物理约束的环流。

旋转减弱：自由大气在埃克曼泵的作用下，若无外部能量的供给，其涡度会随时间发生衰减，这种衰减就称为旋转减弱。

2. 什么是力管及其力管效应？

答：由等压面和等比容面相交的所构成的管子，即力管。力管的表达式为： $-\oint \alpha\, dp$ 。力管可以产生新的环流或使原有的环流加强或者减弱的动力作用， 这就是力管效应。 在某平面上单位面积内力管数目愈多，表示大气的斜压性愈强。在等压面上的等温线愈密集（温度梯度越大） ，反映着铅直面内单位面积所含的力管数愈多，斜压性愈强，反之，在等压面上的等温线越稀疏，斜压性就愈弱。

3. 群速度与相速度有何区别 ？何时二者一致 ？

答：相速度为载波移到的速度，即群波中具有相同位相点的移到速度。相速 C 的表达式为 $c=\frac{\omega}{K}$ 。而群速是指波包移动的速度，即群波中具有相同振幅点的移动速度，表示波列（波群）能量传播的速度。群速的表达式为： $c_g=\frac{d\omega}{dk}$ 。

可见，当波速 c 与波长 k 无关时， $c_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{d(ck)}{dk}=c+k\frac{dc}{dk}=c$

4. 什么是罗斯贝波，它是怎样产生的？

答：罗斯贝波是在准水平的大尺度运动中，由于 β 效应维持绝对涡度守恒而形成的波动。它的传播速度与声波和重力波相比要慢很多， 故为涡旋性慢波， 同时由于它的水平尺度与地球半径相当， 又称为行星波 （大气长波）。罗斯贝波是水平横波，单向波，慢波，对大尺度天气变化过程有重要意义。

5. 给出群速与波速的关系？什么是非频散波和频散波？大气波动中哪些是非频散波？哪些频散波？

$$C_g=\frac{d\omega}{dk}=C-k\frac{dC}{dk}$$

由上式可以看出，群速与相速大小的差值与 k 和 $\frac{dC}{dk}$ 有关， $\frac{dC}{dk}$ 表示相速随波长的变化率。

非频散波：频率（ ω）或波速（ C） 与波数（ k）或者波长（ L）无关，则 Cg=C，波能与波动一起移动，称波动没有发生频散或为非频散波，如声波、重力外波；反之，若频率与波数有关，则 Cg≠C，称为频数波，如重力波、惯性—重力波、长波。

6. 给出涡度的定义及其表达式？涡度与环流的关系？

答：速度场的旋度为涡度，即为： $\nabla_3\times\vec{V}_3$ ，涡度与速度环流 C 的关系为： $C=\iint_\sigma(\nabla_3\times\vec{V}_3)_n \cdot d\sigma$ ，可见，沿闭合回线 L 的速度环流是和涡度紧密相互联系的。对上式取面积 σ 趋于 0 的极限后，

$\lim\limits_{\delta\sigma\to 0}\frac{\delta C}{\delta\sigma}=(\nabla_3\times\vec{V})_n$ ，所以，涡度在法方向的分量就等于单位面积上的环流，因此可以认为涡度是对流体转动的微观度量。涡度是点的坐标和时间的函数，它在直角坐标系中的投影为：

$$\nabla_3\times\vec{V}_3=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})\vec{k}$$

$$=\xi\vec{i}+\eta\vec{j}+\zeta\vec{k},\quad(\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})$$

铅直方向的涡度为： $\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$

7. 叙述基别尔数（ ε）、罗斯贝数（ R_0）的表达式及其物理意义。

基别尔数为局地惯性力与水平科氏力的尺度之比，即： $\varepsilon \equiv \dfrac{\partial u/\partial t}{fv} \sim \dfrac{U/\tau}{f_0 U} = \dfrac{1}{f_0\tau}$，其大小反映运动变化过程的快慢程度。即 ε的量级表示运动地转平衡近似程度。 $\varepsilon = 1/f_0\tau$，当 $\varepsilon \ll 1$，$\partial u/\partial t$ 相对于 fv 可以略去。

R_0 为罗斯贝（ Rossby）数，表示水平惯性力与科氏力的尺度之比，即： $R0 \equiv \dfrac{V\cdot\nabla u}{fv} \sim \dfrac{U^2/L}{f_0 U} = \dfrac{U}{f_0 L}$，表示大气运动的准地转程度，当 $R_0 \ll 1$，水平惯性力相对于科氏力可以略去；反之当 $R_0 \gg 1$，科氏力相对于水平惯性力可以略去。大尺度运动中， $R_0 \ll 1$，科氏力是不能忽略的；小尺度运动中， $R_0 \gg 1$，科氏力可以忽略不计。

8. 声波和重力外波、重力内波的滤波条件是什么？

排除声波的条件：

(1) 大气是不可压缩的； (2) 大气是非弹性的或是包辛内斯克 Boussinesq 近似的；(3) 大气是水平无辐散的；(4) 大气是静力平衡的； (5) 大气是准地转的。

排除重力外波的条件：

(1) 假定大气上、下边界是刚体（固壁）边界，即上、下边界条件是齐次的； (2) 假定大气是水平无辐散的；(3) 假定大气是地转运动的； (4) 假定大气作纯水平运动。

大尺度运动，可采用下列条件滤除重力内波：

(1) 假定大气是中性层结； (2) 假定大气是水平无辐散的； (3) 假定大气是准地转运动； (4) 假定大气只作水平运动，或垂直运动状态与 z 或 p 无关。

三、证明题

1. 利用静力平衡方程（ $\delta p=-\rho g\delta z$）和状态方程（ $p=\rho RT$），证明均质大气高度 H（$H=RT/g$）是等温大气中气压和密度减小到其 e/1 的高度。

（$p_H=p_0e^{-1}$ 和 $\rho_H=\rho_0e^{-1}$）

设等温大气温度为 T_0 由状态方程，得到： $p=\rho RT_0$

由静力平衡方程： $\delta p=-\rho g\delta z$

消去 ρ，得到： $\delta p=-\dfrac{p}{RT_0}g\delta z$

对上式两端从地面（ $z=0$, $p=p_0$）到高度 z（p=p）进行垂直积分，则有：

$$\delta p=-\frac{p}{RT_0}g\delta z \Rightarrow \frac{1}{p}\delta p=-\frac{g}{RT_0}\delta z$$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p}\delta\ln p=-\frac{g}{RT_0}\int_{z_0}^{z}\delta z$$

$$\Rightarrow p=p_0e^{-(\frac{g}{RT_0})z}$$

所以在 $z=H=RT/g$ 高度上，有： $p_H=p_0e^{-1}$，利用状态方程，得到：

$\rho_H=\rho_0e^{-1}$

均质大气高度 H 确实为等温大气中气压和密度减小到其 e/1 的高度！

2. 利用一维正压罗斯贝波的相速公式 $c=\bar{u}-\frac{\beta}{k^2}$，导出其群速 Cg 的表达式，并与相速相比较。

$$\left.\begin{array}{l} c=\frac{\omega}{k}\Rightarrow\omega=ck \\ c=\bar{u}-\frac{\beta}{k^2} \end{array}\right\}\Rightarrow\omega=k\bar{u}-\frac{\beta}{k}$$

$$\Rightarrow\frac{d\omega}{dk}=\bar{u}+\frac{\beta}{k^2}=\bar{u}-\frac{\beta}{k^2}+2\frac{\beta}{k^2}$$

$$\Rightarrow c_g=c+\frac{2\beta}{k^2}$$

$$\because\frac{2\beta}{k^2}>0\quad\therefore c_g>c$$

故正压罗斯贝波的群速 Cg 大于相速 C。

3. 证明干绝热条件下位温守恒（$c_p\frac{d\ln\theta}{dt}=0$）

由热力学方程：$c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=\dot{Q}\quad(\alpha=\frac{1}{\rho})$

对状态方程（$p\alpha=RT$）求全导数，则：

$$p\alpha=RT\Rightarrow\alpha\frac{dp}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=R\frac{dT}{dt}\Rightarrow p\frac{d\alpha}{dt}=R\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}$$

$$\therefore c_v\frac{dT}{dt}+p\frac{d\alpha}{dt}=\dot{Q}\Rightarrow c_v\frac{dT}{dt}+R\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}=\dot{Q}$$

$$\Rightarrow(c_v+R)\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}=\dot{Q}\Rightarrow c_p\frac{dT}{dt}-\alpha\frac{dp}{dt}=\dot{Q}$$

所以对于理想气体，干绝热条件下（$\dot{Q}=0$），

$$c_p\frac{dT}{dt}-a\frac{dp}{dt}=0\Rightarrow c_p\frac{dT}{dt}-\frac{RT}{p}\frac{dp}{dt}=0$$

$$\Rightarrow\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dt}-\frac{R}{p}\frac{dp}{dt}=0\Rightarrow c_p\frac{d\ln T}{dt}-R\frac{d\ln p}{dt}=0$$

$C_p=C_v+R$，C_v为干空气定容比热，C_p为干空气定压比热，$\alpha=1/\rho$为比容。

对位温方程 $\theta=T(\frac{1000}{p})^{R/C_p}$ 取对数微分，则有：

$$d\ln\theta=d\ln T-\frac{R}{C_p}d\ln p\Rightarrow C_p d\ln\theta=C_p d\ln T-Rd\ln p$$

$$C_p d\ln\theta=0$$

4、有下列方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial hu}{\partial x}=0$$

假设大气基本状态是静止的，即 $u=u',v=v',h=H_0+h'$，试求：

（1）将上述方程组线性化

（2）求出该方程组所含波动的频率方程

（3）分别求出该波动的相速与群速

（4）分析该波动的性质

答：（1）线性化后的方程组为：

$$\frac{\partial u'}{\partial t}=-g\frac{\partial h'}{\partial x} \qquad (a)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t}+H_0\frac{\partial u'}{\partial x}=0 \qquad (b)$$

（2） $\frac{\partial}{\partial t}(b)-H_0\frac{\partial}{\partial x}(a)$: $\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}-gH_0\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}=0$ (c)

设 h' 的形式解为： $h'=h_0 e^{i(kx-\omega t)}$

$$\frac{\partial h'}{\partial t}=-i\omega h',\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial t^2}=-\omega^2 h'$$

代入（c）式， $\frac{\partial h'}{\partial x}=ikh',\quad \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2}=-k^2 h'$

$$-\omega^2+gH_0k^2=0$$

可得频率方程为： $\omega=\pm\sqrt{gH_0}k$

$$c=\frac{\omega}{k}=\pm\sqrt{gH_0}$$

（3） $c_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\pm\sqrt{gH_0}$

（4） C=Cg，该波动为非频散波。双向传播， $\sqrt{gH_0}$ 为浅水波重力外波波速。

四、判断和选择

1. 水平气压梯度力 —当气压梯度存在时，作用于单位质量空气上的力，称为气压梯度力。 气压梯度力可分为垂直气压梯度力和水平气压梯度力两种。水平气压梯度力使空气从高压区流向低压区，是大气水平运动的原动力。

2. 水平气压梯度是指垂直于 等压线 方向，单位距离内气压的改变量， 是即有方向又有大小的矢量。 水平气压梯度的方向是从 高压 指向 低压，单位距离内水平气压梯度愈大，等压线愈 密。

3. 水平地转偏向力 和 惯性离心力 是假想的力， 只改变气流的方向， 不改变物体运动的速度。 水平气压梯度力 和 摩擦力 是实力，即改变气流的方向，也改变速度的大小。

4. 在北半球，风是顺着等压线吹的。背风而立，低压在 左 手边，高压在 右 手边；南半球 相反。

5. 旋衡运动可以是气旋式的，也可以是反气旋式的。

6. 实际大气中，低压区中的梯度风比高压区中的风速 大。梯度风遵守 地转风 的风压定律。

7. 风随高度有变化是因为水平方向上 温度分布不均 产生的。热成风受 温度梯度 和 气层厚度 的影响。随高度的增加，只要 温度场 不变， 热成风 的大小和方向就不变。

8. 埃克曼层空气质点的流动，主要受到 气压梯度力 、科里奥利力 和 湍流粘性力（摩擦力） 的作用。

9. 在北半球对流层中， 温度分布总是 北冷南暖 ，因而无论低层吹什么风， 随高度的增加都逐渐转为 西风。

10. 位势涡度守恒的条件是 无摩擦 和 干绝热。

11. 大气中有哪几类基本波动 声波 、重力波（重力内波，重力外波） 、惯性（内）波 和 长波（罗斯贝波） 。

12. 对大尺度运动，因为地转风的水平散度为 零，所以实际风的水平散度等于 地转偏差 的散度。

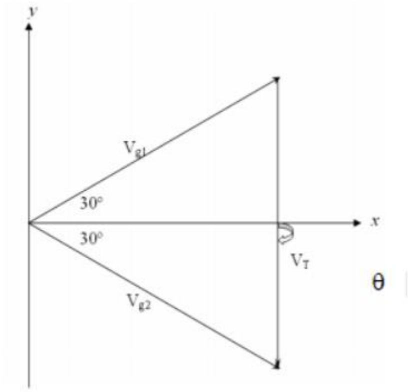
13. 中纬度地区大尺度运动具有准定常、准水平、准地转、准静力平衡和准无辐散的特点。

14. 地转偏向力：指由于地球的自转而使地表上运动的物体发生方向偏转的力。它包括水平和垂直两个分力。地转偏向力是使运动空气发生偏转的力，它总是与空气运动方向垂直。在北半球，它使风向右偏；它的大小与风速和纬度成正比， 在赤道为零， 随纬度而增大， 在两极达最大。 地转偏向力只能改变风的方向，而不能改变风的速度。

15. 惯性离心力：离心力是指空气作曲线运动时，受到一个离开曲率中心而沿曲率半径向外的作用力。这是空气为了保持惯性方向运动而产生的，所以称为惯性离心力。它的方向与空气运动方向垂直。在一般情况下，空气运动路径的曲率半径很大，惯性离心力远小于地转偏向力；但在空气运动速度很大而曲率半径很小时，如龙卷风、台风，离心力很大，甚至超过地转偏向力。

五、计算题

1. 南京上空 700hPa 处地转风（ Vg1 ）的风向与 x 轴为 30o 角，500hPa 地转风（ Vg2 ）的风向与 x 轴为 -30o 角，风速均为 20m/s（如图），求 700－500hPa 气压层之间平均温度梯度（热成风 V_T ）的大小与风向。



700hPa 地转风地转风 V_{g1} 与 x 轴为 30o 角，500hPa 地转风 V_{g2} 与 x 轴为 -30o 角，则 700－500hPa 之间的热成风（ V_T）分量表示为：

$$\begin{cases} u_g = u_{g2} - u_{g1} = \vec{V}_{g2}\cos(-30^0) - \vec{V}_{g1}\cos(30^0) \\ v_g = v_{g2} - v_{g1} = \vec{V}_{g2}\sin(-30^0) - \vec{V}_{g1}\sin(30^0) \end{cases}$$

把 $V_{g1}= V_{g2}$=20m/s 代入上式，得到：

u_T＝0，v_T＝-20m/s。V_T＝20m/s，其与 x 轴的夹角为：

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{v_T}{u_T} = -90^0$$

也可以直接通过图解。

因为把 $V_{g1}=V_{g2}$，并且 V_{g1} 与 V_{g2} 的夹角为 60o 角，所以 V_{g1}、V_{g2} 和 V_T 构成一个多边三角形， 于是 V_T=20m/s，图中 $\theta = -90^0$。

沿经圈由 57.5oN 到 52.5oN 气压升高 1%，如果温度等于 7℃，求地转风。

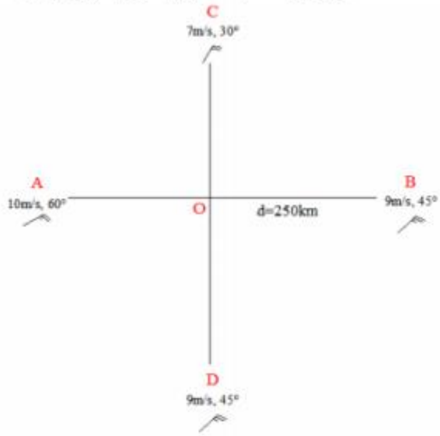
把状态方程代入地转风公式，再取差分近似，则：

$$u_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow u_g = -\frac{RT}{fp}\frac{\partial p}{\partial y} \approx -\frac{RT}{2\Omega\sin\varphi}\frac{\partial p}{p}\frac{1}{\Delta y} = -\frac{RT}{2\Omega\sin\varphi}\frac{\partial p}{p}\frac{1}{a\Delta\varphi}$$

取 $R=287m^2s^{-2}K^{-1}$， T=280K ，$\Omega=7.29\times10^{-5}$rad s^{-1}，？p/p=0.01 ，$a=6.37\times10^6$m φ=(47.5o+42.5o)/2=45o，？φ=42.5o-47.5o=-5o=5/180*3.1415926=0.087rad

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{RT}{2\Omega\sin\varphi}\frac{\partial p}{p}\frac{1}{a\Delta\varphi} \\ &= -\frac{287\times280}{2\times7.29\times10^{-5}\times\sin(45/180\times3.1415926)}\times\frac{0.01}{6.37\times10^{-6}\times(-5/180\times3.1415926)} \\ &\approx 14m/s \end{aligned}$$

2. 已知四个点的风速和风向（见图），利用差分法求四个点中心 O 的铅直涡度，四点距 O 的距离均为 250km。（提示：已知风速 V 和风向角 β度，计算 u 和 v 公式为：u=-V*cos(π/2- β)，v =-V*cos(β))



解答：

u_A=-10*cos30°=-8.66 m/s；v_A=-10*sin30°=-5.0 m/s

u_B=-9*cos45°=-6.36 m/s；v_B=-9*sin30°=-6.36 m/s

u_C=-7*cos60°=-3.5 m/s；v_C=-7*sin60°=-6.06 m/s

u_D=-9*cos45°=-6.36 m/s；v_D=-9*sin60°=-6.36 m/s

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \zeta \approx \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{v_B - v_A}{2d} - \frac{u_C - u_D}{2d}$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{2d}(v_B - v_A + u_D - u_C)$$

$$\zeta = \frac{1}{5\times10^5}(-6.36 + 5 - 6.36 + 3.5) = -0.84\times10^{-5}\,s^{-1}$$

3. 在 30°N 处有一气块向北移动，假定绝对涡度守恒。如果初始时刻的相对涡度为 $5\times10^{-5}s^{-1}$，求其达到 45°N 的相对涡度是多少？（提示：$\Omega=7.29\times10^{-5}s^{-1}$）。

解答：设初始时刻 t_1 和终止时刻 t_2 的地转涡度、相对涡度分别为 f_1, ζ_1 和 f_2, ζ_2。即 $\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0 \Rightarrow f_1+\zeta_1=f_2+\zeta_2$

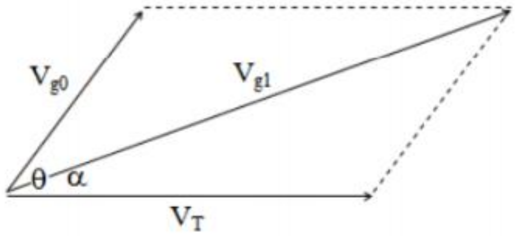
$\therefore$ f_2= $\zeta_1+f_1-f_2$= $\zeta_1+2\Omega(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)$

把各物理量的数值代入上式，则有

f_2= $5\times10^{-5}+2\times7.29\times10^{-5}$ (sin30o-sin45o)

$=5\times10^{-5}+2\times7.29\times10^{-5}$ (0.5-0.707) $\approx2.0\times10^{-5}$ (s^{-1})

4. 700-600hPa 之间的平均温度向南每 100km 增加 2℃，如果 700hPa 在 45°N 处的地转风为 15m/s 的西南风，求 600hPa 的地转风速度和风向？（$f\approx10^{-4}/s$）



$$\vec{V}_{g1}=\vec{V}_{g0}+\vec{V}_T \Rightarrow \begin{cases} u_{g1}=u_{g0}+u_T \\ v_{g1}=v_{g0}+v_T \end{cases}$$

$$u_T=-\frac{R}{f}\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\left(\frac{\partial T_m}{\partial y}\right),\quad v_T=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_{g1}=u_{g0}+u_T=\left|\vec{V}_{g0}\right|\cos\theta-\frac{R}{f}\ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\left(\frac{\partial T_m}{\partial y}\right) \\ v_{g1}=v_{g0}=\left|\vec{V}_{g0}\right|\sin\theta \end{cases}$$

$$\left|\vec{V}_{g0}\right|\sin\theta\ \left|\vec{V}_{g0}\right|=15(m/s),\ \theta=45^\circ$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial y}=\frac{\Delta T_m}{\Delta y}=-2\times10^{-5}(℃/m)$$

$$p_0=700,\ p_1=600,\ R=287\ J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}$$

$$u_{g0}=15\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx10.6(m/s)$$

$$u_T=-\frac{287}{1\times10^{-4}}\times\ln\left(\frac{700}{600}\right)\times-2\times10^{-5}\approx8.8(m/s)$$

$$u_{g1}=u_{g0}+u_T\approx19.4(m/s)$$

$$v_{g1}=v_{g0}=15\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx10.6(m/s)$$

$$\left|V_{g1}\right|=\sqrt{u_{g1}+v_{g1}}\approx22.1(m/s)$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\left(\frac{v_{g1}}{u_{g1}}\right)=\mathrm{arctg}\left(\frac{10.6}{19.4}\right)\approx28.6^\circ$$

5. 设 60°N 处有一气柱，初始时相对涡度 $\zeta=0$，从地面一直伸展到固定 10km 高的对流层顶，如果该气柱移动到 45°N 处越过一高度为 2.5km 的山丘障碍，问当越过山顶时，它的绝对涡度和相对涡度各为多少？（提示：假设大气为均质不可压流体，且作绝热、无摩擦运动，气柱的位势涡度守恒。）

解答：$\dfrac{\zeta+f}{h}=\text{const}\Rightarrow\dfrac{\zeta_0+f_0}{h_0}=\dfrac{\zeta_1+f_1}{h_1}$

$$f_0 = 2\Omega\sin 60 \left[2\times 7.292\times 10^{-5}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \right] 1.26\times 10^{-4}(s^{-1})$$

$$f_1 = 2\Omega\sin 45 \left[2\times 7.292\times 10^{-5}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \right] 1.03\times 10^{-4}(s^{-1})$$

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_0 + f_0}{h_0} h_1 - f_1 \left[\frac{f_0}{10}\times(10-2.5) - f_1 \approx 0.84\times 10^{-4}(s^{-1}) \right.$$

6. 沿经圈由 57.5oN 到 52.5oN 气压升高 2%，如果温度等于 17℃，求地转风。

（提示：a=6.37×106m , R=287m2 s-2 K-1, sin(55o)=0.819）

把状态方程代入地转风公式，则：

$$u_g = -\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow u_g = -\frac{RT}{fp}\frac{\partial p}{\partial y} \approx -\frac{RT}{2\Omega\sin\varphi}\frac{\partial p}{p}\frac{1}{\Delta y} = -\frac{RT}{2\Omega\sin\varphi}\frac{\partial p}{p}\frac{1}{a\Delta\varphi}$$

取 T=290K，?p/p=0.02，φ=(57.5o+52.5o)/2=55o，

?φ=52.5o-57.5o=-5o=5/180*3.1415926=0.087rad 。

再取差分近似，得到：

$$u_g = -\frac{RT}{2\Omega\sin\varphi}\frac{\partial p}{p}\frac{1}{a\Delta\varphi}$$

$$= -\frac{287\times 290}{2\times 7.29\times 10^{-5}\times\sin(55/180\times 3.1415926)}$$

$$\times\frac{0.02}{6.37\times 10^{-6}\times(-5/180\times 3.1415926)}$$

$$\approx 25m/s$$