IMO 2009; B1 EX15

Problem: Let n be a positive integer and let $a_1, \ldots, a_k$ $(k \geq 2)$ be distinct integers in the set $\{1, \ldots, n\}$ such that

$$n \mid a_i(a_{i+1} - 1) \quad \text{for } i = 1, \ldots, k-1.$$

Prove that

$$n \nmid a_k(a_1 - 1).$$

设 n 是一个正整数,$n > 1$，$a_0, \ldots, a_k$ $(k \geq 1)$ 是集合 $\{1, \ldots, n\}$ 中的互不相同的整数，满足 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$，其中 $i = 0, \ldots, k-1$。证明：$n \nmid a_k(a_0 - 1)$。

Lean New Proof

Lean New Proof:

避免 $i, i+1$ 范围混乱令 $t = i + 1$，$i = 0, \ldots, k-1; t = 1, \ldots, k$,

1. 根据条件 $n \mid a_i(a_t - 1)$，$i = 0, \ldots, k-1, t = i+1$ 我们有：$n \mid a_0(a_1 - 1)$ 因此令 $(n, a_0) = p, q = \frac{n}{p}$ 亦为整数, 则有 $n = pq$, 并且 $p \mid a_0, q \mid a_1 - 1$. 故 $(q, a_1) = 1$.

2. 由 $q \mid a_1 - 1$, 可得 $q \mid a_2 - 1$, 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $t = 1, \ldots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$。因此对于任意的 $i = 1, \ldots, k$，都有 $q \mid a_i - 1$。特别的, 因为 $q \mid a_0$，所以 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$。

3. 反之, 若结论不成立, 则 $n \mid a_k(a_0 - 1)$, 与 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$ 相减可得 $n \mid (a_k - a_0)$. 矛盾总上述, $n \nmid a_k(a_0 - 1)$.

Lean New Proof

Lean New Proof: 1. 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$，$i = 0, \ldots, k-1$ 我们有：$n \mid a_0(a_1 - 1)$ 因此令 $(n, a_0) = p, q = \frac{n}{p}$ 亦为整数, 则有 $n = pq$, 并且 $p \mid a_0, q \mid a_1 - 1$. 故 $(q, a_1) = 1$.

2. 由 $q \mid a_1 - 1$, 可得 $q \mid a_2 - 1$, 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $i = 1, \ldots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$。因此对于任意的 $i = 1, \ldots, k$，都有 $q \mid a_i - 1$。特别的, 因为 $q \mid a_0$，所以 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$。

3. 反之, 若结论不成立, 则 $n \mid a_k(a_0 - 1)$, 与 $n = pq \mid a_0(a_k - 1)$ 相减可得 $n \mid (a_k - a_0)$. 矛盾总上述, $n \nmid a_k(a_0 - 1)$.

Lean New Proof

Lean New Proof:

1. 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$，我们有：$n \mid a_1(a_2 - 1)$ 因此令 $(n, a_1) = p, q = \frac{n}{p}$ 亦为整数, 则有 $n = pq$, 并且 $p \mid a_1, q \mid a_2 - 1$. 故 $(q, a_2) = 1$.

2. 由 $q \mid a_2 - 1$, 可得 $q \mid a_3 - 1$, 通过归纳法, 我们可以证明对于所有 $i = 2, \ldots, k$, 都有 $q \mid a_i - 1$。因此对于任意的 $i = 2, \ldots, k$，都有 $q \mid a_i - 1$。特别的, 因为 $q \mid a_1$，所以 $n = pq \mid a_1(a_k - 1)$。

3. 反之, 若结论不成立, 则 $n \mid a_k(a_1 - 1)$, 与 $n = pq \mid a_1(a_k - 1)$ 相减可得 $n \mid (a_k - a_1)$. 矛盾总上述, $n \nmid a_k(a_1 - 1)$.

Proof

Proof:

反证法: 假设 $n \mid a_k(a_1-1)$。令 $n=pq$，其中 p 和 q 是互质正整数。

步骤 1：分析整除条件。根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1}-1)$，我们有：$p \mid a_i$ 且 $q \mid a_{i+1}-1$，其中 $i=1,\ldots,k-1$。由于 $q \mid a_2-1$，可得 $\gcd(q,a_2)=1$，因此 $q \mid a_3-1$。通过归纳法，我们有：$q \mid a_i-1$，对于所有 $i=2,\ldots,k$。

步骤 2：对 a_1 的推论。由 $p \mid a_1$ 和 $q \mid a_1-1$，可得 $\gcd(p,q)=1$。因此：$p \mid a_k$ 且 $q \mid a_k-1$。

步骤 3：矛盾。整数 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 是互不相同的，并且位于集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 中。然而，条件 $p \mid a_i$ 和 $q \mid a_i-1$ 表明，在该范围内至多只有一个整数 a_i 同时满足这两个条件。这与假设 $k \geq 2$ 矛盾。

因此，我们的假设 $n \mid a_k(a_1-1)$ 是错误的。由此可得：$n \nmid a_k(a_1-1)$。

Lean Proof lemma

Lean Proof:

下面是使用 Lean 证明的代码片段:

1. 根据条件 $n \mid a_i(a_{i+1}-1)$，我们有：$p \mid a_i$ 且 $q \mid a_{i+1}-1$，其中 $i=1,\ldots,k-1$。

2. 通过归纳法，我们可以证明对于所有 $i=2,\ldots,k$，都有 $q \mid a_i-1$。

3. 由 $p \mid a_1$ 和 $q \mid a_1-1$，可得 $\gcd(p,q)=1$

4. $p \mid a_k$ 且 $q \mid a_k-1$

5. 条件 $p \mid a_i$ 和 $q \mid a_i-1$ 表明，在该范围内至多只有一个整数 a_i 同时满足这两个条件. 即 $p \mid a_1, q \mid a_1-1$ 或 $p \mid a_k, q \mid a_k-1$