```
In [1]: # подключение необходимых зависимостей

        import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt

        from IPython.display import display, Markdown
        print = lambda x: display(Markdown(x))
```

Лабораторная работа №1

Численные методы одномерной безусловной оптимизации. Методы дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи.

Выполнил студент группы ИДБ-18-09 Полс А.Д.

Цель работы

Изучение методов безусловной одномерной оптимизации, применение их на практическом примере.Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

Порядок выполнения работы

1. Найти аналитическое решение задачи: $min_{x \in [a,b]} f(x)$
2. Исследовать их сходимость и провести сравнение по числу вычисленийфункции для достижения заданной точности

Вариант №19

Целевая функция: $f(x) = x + \frac{2}{x}$

```
In [2]: def f(x: float) -> float:
            return x + 2 / x
```

Начальный интервал неопределённости: $X_{init} = [a, b] = [1, 2]$

```
In [3]: a, b = initial_approximation = [1, 2]
```

Точность $\varepsilon = 0.05$

In [4]:
```
accuracy = 0.05
```

Аналитическое решение:

Необходимое условие существования экстремума функции в точке x_0: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = 0$

Достаточное условие экстремума функции в точке x_0:
$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x_0) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x_0) = a \neq 0 & \left[\begin{array}{ll} a > 0 & x_0 \leftarrow local\ min \\ a < 0 & x_0 \leftarrow local\ max \end{array}\right. \end{cases}$$

Аналитическое решение для целевой функции:

Найдём первую производную целевой функции: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + \frac{2}{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{2}{x}) = 1 - \frac{2}{x^2}$

Решим уравнение: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = 0$

$1 - \frac{2}{x^2} = 0$
$x = \pm\sqrt{2} \cong \pm 1.41421$

На начальном интервале неопределённости существует экстремум в точке $\sqrt{2} \cong 1.41421 \in [1, 2]$

Найдём вторую производную целевой функции:
$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \frac{2}{x^2}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{2}{x^2}) = 0 - (-\frac{4}{x^3}) = \frac{4}{x^3}$

Определим знак второй производной целевой функции в точке $x_0 = \sqrt{2} \cong 1.41421$

$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(\sqrt{2}) = \frac{4}{\sqrt{2}^3} = 2 > 0$

Вторая производная целевой функции больше нуля. Из этого делаем вывод, что функция $f(x) = x + \frac{2}{x}$ в точке $x_0 = \sqrt{2} \cong 1.41421 \in [1, 2]$ достигает своего локального минимума.

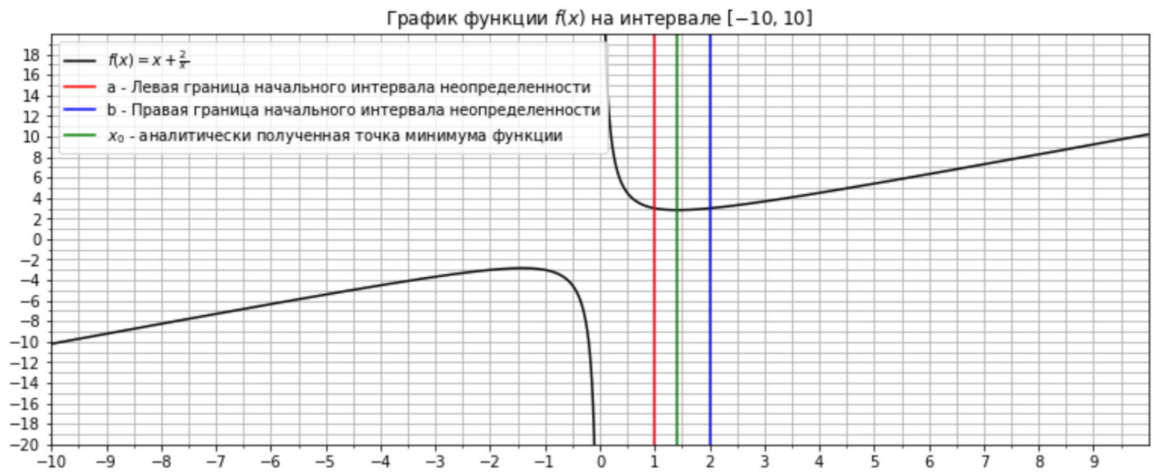
In [5]:
```
# значение точного решения
x_exact = np.sqrt(2)
```

In [6]:

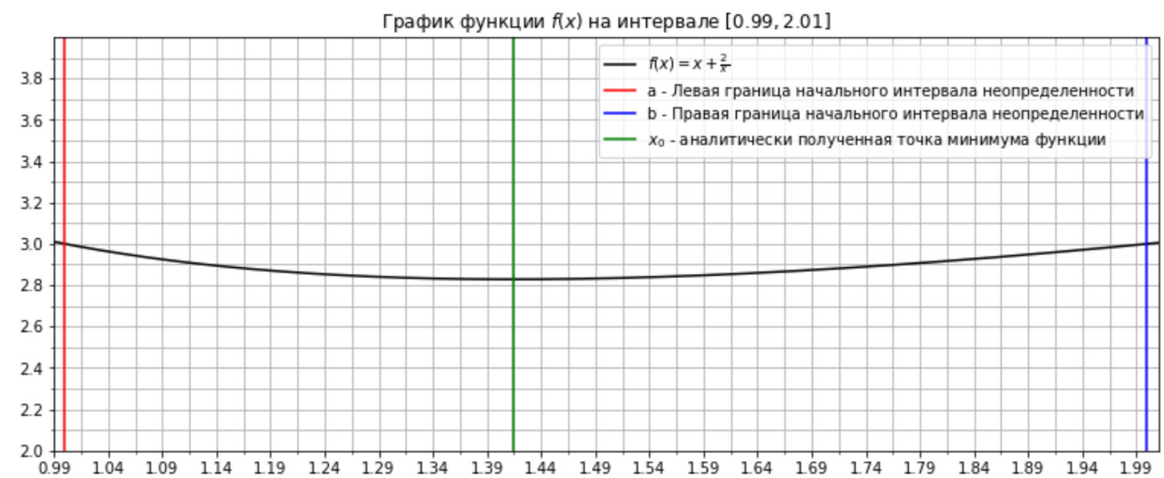
```
def build_plot(xlim, ylim, ticks, small_ticks):

    x_min, x_max = xlim
    y_min, y_max = ylim
    x_tick, y_tick = ticks
    x_small_tick, y_small_tick = small_ticks

    fig, ax = plt.subplots(figsize=[13, 5])

    # вычисляем x и y
    xs_raw = np.linspace(x_min, x_max, 30_000)
    xs = np.ma.masked_where(abs(xs_raw) <= 0.001, xs_raw) # отключаем в
ычисления для x -> 0, т.к. f(x1) -> oo при x1-> 0
    ys = f(xs)

    #
    ax.plot(xs, ys, label=r'$f(x)=x+\frac{2}{x}$', color='black')
    ax.set_xlim(xlim)
    ax.set_ylim(ylim)

    # устанавливаем сетку
    major_xticks = np.arange(x_min, x_max, x_tick)
    minor_xticks = np.arange(x_min, x_max, x_small_tick)
    major_yticks = np.arange(y_min, y_max, y_tick)
    minor_yticks = np.arange(y_min, y_max, y_small_tick)

    ax.set_xticks(major_xticks)
    ax.set_xticks(minor_xticks, minor=True)
    ax.set_yticks(major_yticks)
    ax.set_yticks(minor_yticks, minor=True)

    ax.grid(which='both')


    # устанавливаем название графика
    ax.set_title(f'График функции $f(x)$ на интервале $[{x_min}, {x_ma
x}]$')

    return ax
```

Построим график функции

In [7]:
```
ax = build_plot(xlim=(-10, 10),
                ylim=(-20, 20),
                ticks=(1, 2),
                small_ticks=(0.5, 1))

ax.axvline(a, color='red', label='a - Левая граница начального интервал
а неопределенности')
ax.axvline(b, color='blue', label='b - Правая граница начального интерв
ала неопределенности')
ax.axvline(x_exact, color='green', label='$x_0$ - аналитически полученн
ая точка минимума функции')

ax.legend();
```



```
In [8]: ax = build_plot(xlim=(a-0.01, b+0.01),
                        ylim=(2, 4),
                        ticks=(0.05, 0.2),
                        small_ticks=(0.025, 0.1))

        ax.axvline(a, color='red', label='a - Левая граница начального интервал
        а неопределенности')
        ax.axvline(b, color='blue', label='b - Правая граница начального интерв
        ала неопределенности')
        ax.axvline(x_exact, color='green', label='$x_0$ - аналитически полученн
        ая точка минимума функции')

        ax.legend();
```



Метод дихотомии:

```
In [9]: def dichotomy_method(function, initial_approximation, accuracy, offset=
        0.01):
            a, b = initial_approximation
            iterations_amount = 0


            while accuracy < abs(b - a):
                y = (a + b - offset) / 2
                z = (a + b + offset) / 2

                if function(y) <= function(z):
                    b = z
                else:
                    a = y

                iterations_amount += 2

            return a, b, iterations_amount
```

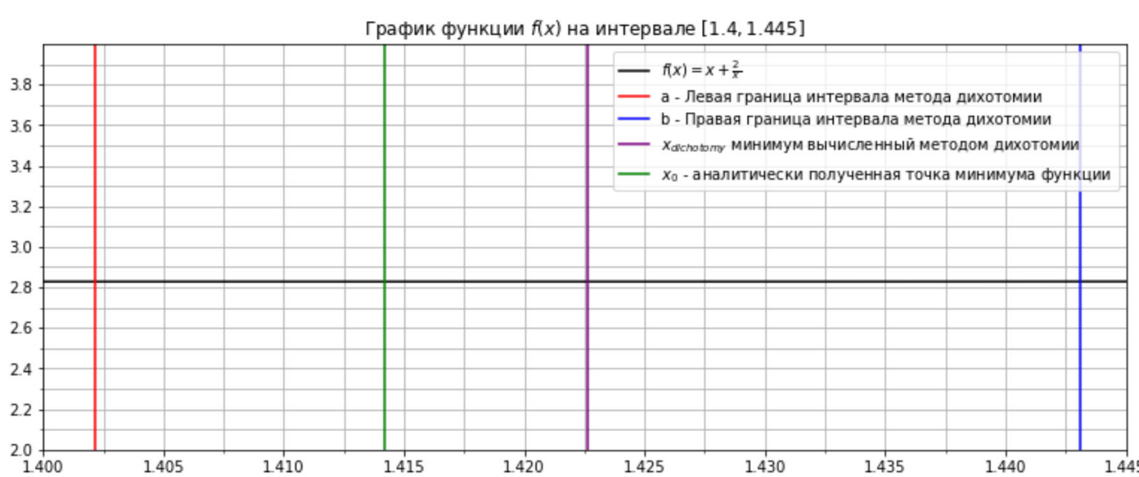
In [10]:

```
left_bound, right_bound, it_amount = dichotomy_method(f, initial_approx
imation, accuracy)

dichotomy_solution = (left_bound + right_bound) /2

dichotomy_convergence = lambda x: 1 / 2 ** (x/2)

print(f"## Решение методом дихотомии:\nКонечный интервал: $x_{{dichotom
y}} \in ({round(left_bound, 5)}; {round(right_bound, 5)})$\nПриближенно
е решение: $x^*=\\frac{{{round(left_bound, 5)}+{round(right_bound,
5)}}}{{{2}}}={dichotomy_solution}$ было найдено за {it_amount} вызовов
функций")
print(f"Сходимость метода за ${it_amount}$ вычислений функций: ${dichot
omy_convergence(it_amount)}$")

ax = build_plot(xlim=(1.4, 1.445),
                ylim=(2, 4),
                ticks=(0.005, 0.2),
                small_ticks=(0.0025, 0.1))

ax.axvline(left_bound, color='red', label='a - Левая граница интервала
метода дихотомии')
ax.axvline(right_bound, color='blue', label='b - Правая граница интерва
ла метода дихотомии')
ax.axvline(dichotomy_solution, color='purple', label='$x_{dichotomy}$ м
инимум вычисленный методом дихотомии')
ax.axvline(x_exact, color='green', label='$x_0$ - аналитически полученн
ая точка минимума функции')

ax.legend();
```

Решение методом дихотомии:

Конечный интервал: $x_{dichotomy} \in (1.40219; 1.44312)$ Приближенное решение: $x^*=\frac{1.40219+1.44312}{2}=1.42265625$ было найдено за 10 вызовов функций

Сходимость метода за 10 вычислений функций: 0.03125



Метод золотого сечения:

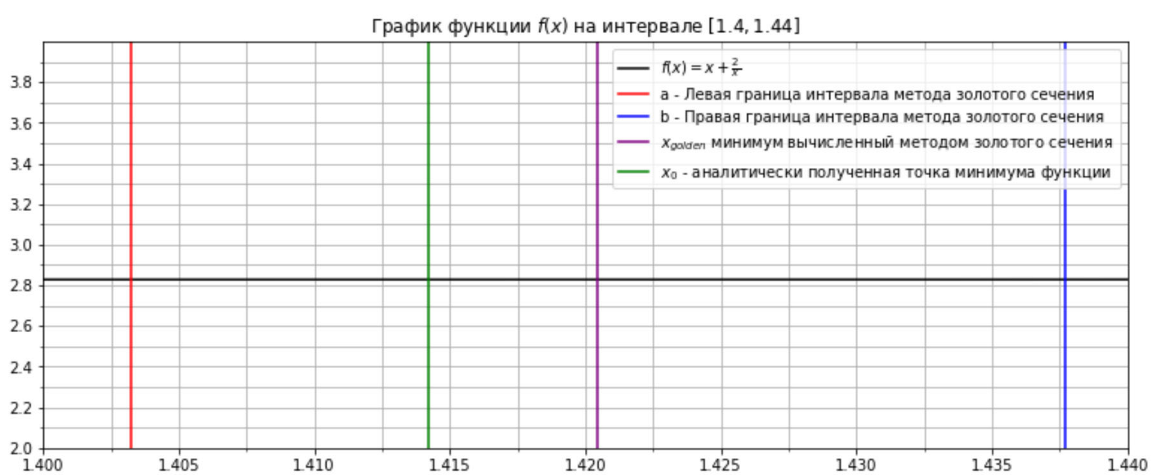
In [11]:
```
def golden_ration(function, initial_approximation, epsilon):
    a, b = initial_approximation
    iterations_amount = 1
    golden_ratio =  (3 - np.sqrt(5)) / 2

    delta = abs(b - a)

    y = a + golden_ratio * (b - a)
    z = a + b - y

    fy = function(y)
    fz = function(z)

    while abs(b - a) > epsilon:
        if fy <= fz:
            b = z
            z = y
            fz = fy

            y = a + b - y
            fy = function(y)
        else:
            a = y
            y = z
            fy = fz

            z = a + b - z
            fz = function(z)

        iterations_amount += 1


    return a, b, iterations_amount
```

In [12]:
```
left_bound, right_bound, it_amount = golden_ration(f, initial_approximation, accuracy)

golden_solution = (left_bound + right_bound) / 2

golden_convergence = lambda x: 0.618 ** (x - 1)

print(f"## Решение методом золотого сечения:\nКонечный интервал: $x_{{golden}} \in ({round(left_bound, 5)}; {round(right_bound, 5)})$\nПриближенное решение: $x^*=\\frac{{{round(left_bound, 5)}+{round(right_bound, 5)}}}{{{2}}}={golden_solution}$ было найдено за {it_amount} шагов")
print(f"Сходимость метода за ${it_amount}$ вычислений функций: ${round(golden_convergence(it_amount), 5)}$")

ax = build_plot(xlim=(1.4, 1.44),
                ylim=(2, 4),
                ticks=(0.005, 0.2),
                small_ticks=(0.0025, 0.1))

ax.axvline(left_bound, color='red', label='a - Левая граница интервала метода золотого сечения')
ax.axvline(right_bound, color='blue', label='b - Правая граница интервала метода золотого сечения')
ax.axvline(golden_solution, color='purple', label='$x_{golden}$ минимум вычисленный методом золотого сечения')
ax.axvline(x_exact, color='green', label='$x_0$ - аналитически полученная точка минимума функции')

ax.legend();
```

Решение методом золотого сечения:

Конечный интервал: $x_{golden} \in (1.40325; 1.43769)$ Приближенное решение: $x^* = \frac{1.40325+1.43769}{2} = 1.420473174376629$ было найдено за 8 шагов

Сходимость метода за 8 вычислений функций: 0.03443



Метод фибоначчи

In [13]:

```
def fibonacci(function, initial_approximation, epsilon, constant=0.02
5):
    a = [initial_approximation[0]]
    b = [initial_approximation[1]]

    iterations_amount = 1
    fibonacci_values = [1, 1]

    while fibonacci_values[-1] <= abs(b[-1] - a[-1]) / epsilon:
        fibonacci_values.append(fibonacci_values[-1] + fibonacci_values
[-2])

    n = len(fibonacci_values) - 1

    Lambda = [a[-1] + fibonacci_values[n - iterations_amount - 1] * (b
[-1] - a[-1]) / fibonacci_values[n - iterations_amount + 1]]
    Mu = a[-1] + fibonacci_values[n - iterations_amount] * (b[-1] - a[-
1]) / fibonacci_values[n - iterations_amount + 1]

    f_of_Lambda = function(Lambda[-1])
    f_of_Mu = function(Mu)
    function_calls_amount = 2

    while iterations_amount != n - 2:
        if f_of_Lambda > f_of_Mu:
            a.append(Lambda[iterations_amount - 1])
            Lambda.append(Mu)
            Mu = a[-1] + fibonacci_values[n - iterations_amount - 1] *
(b[-1] - a[-1]) / fibonacci_values[n - iterations_amount]
            f_of_Mu = function(Mu)
        else:
            b.append(Mu)
            Mu = Lambda[-1]
            Lambda.append(a[-1] + fibonacci_values[n - iterations_amoun
t - 2] * (b[-1] - a[-1]) / fibonacci_values[n - iterations_amount])
            f_of_Lambda = function(Lambda[-1])

        iterations_amount += 1
        function_calls_amount += 1

    Mu = Lambda[-2] + constant
    f_of_Lambda = function(Lambda[-2])
    f_of_Mu = function(Mu)
    function_calls_amount += 2

    if f_of_Lambda < f_of_Mu:
        a[-1] = a[-2]
        b[-1] = Lambda[-2]
    else:
        a[-1] = Lambda[-2]
        b[-1] = b[-2]


    return a[-1], b[-1], function_calls_amount
```

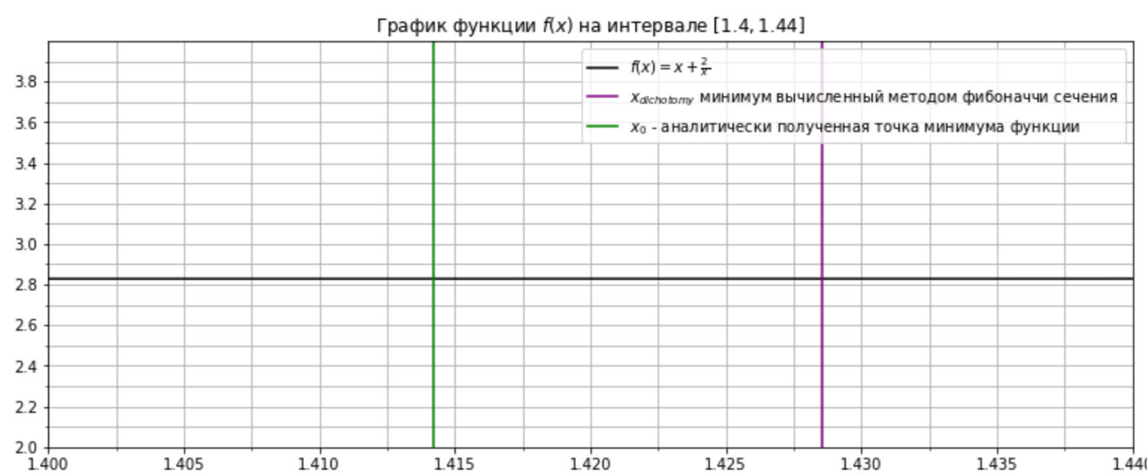
In [14]:

```python
left_bound, right_bound, it_amount = fibonacci(f, initial_approximation, accuracy)

fibonacci_solution = (left_bound + right_bound) / 2

def fib(x):
    return 1 if (x <= 2) else fib(x-1) + fib(x-2)

fibonacci_convergence = lambda x: 1 / fib(x)

print(f"## Решение методом золотого сечения:\nКонечный интервал: $x_{{fib}} \in ({round(left_bound, 5)}; {round(right_bound, 5)})$\nПриближенное решение: $x^*=\\frac{{{round(left_bound, 5)}+{round(right_bound, 5)}}}{{{2}}}={golden_solution}$ было найдено за {it_amount} вызовов функций")
print(f"Сходимость метода за ${it_amount}$ вычислений функций: ${round(fibonacci_convergence(it_amount), 5)}$")

ax = build_plot(xlim=(1.4, 1.44),
                ylim=(2, 4),
                ticks=(0.005, 0.2),
                small_ticks=(0.0025, 0.1))

ax.axvline(fibonacci_solution, color='purple', label='$x_{dichotomy}$ минимум вычисленный методом фибоначчи сечения')
ax.axvline(x_exact, color='green', label='$x_0$ - аналитически полученная точка минимума функции')

ax.legend();
```

Решение методом золотого сечения:

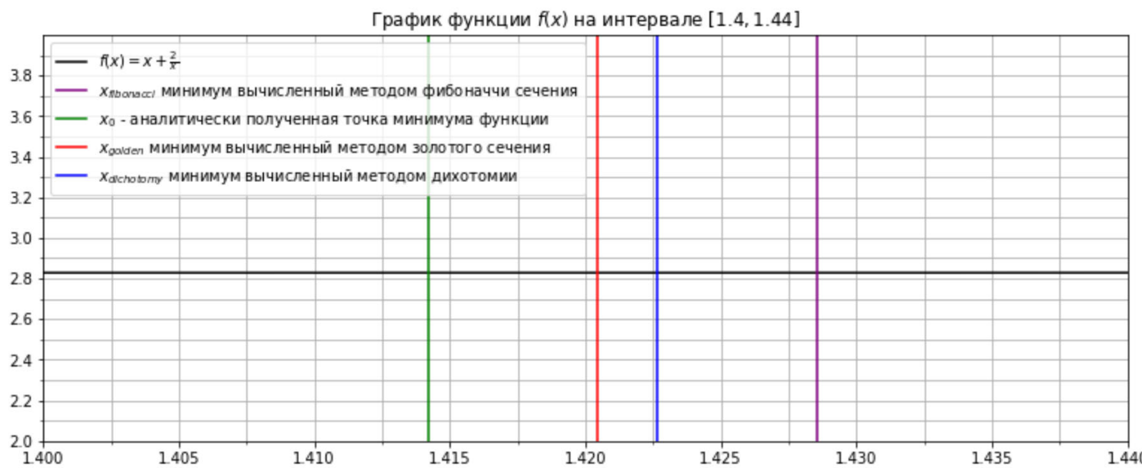
Конечный интервал: $x_{fib} \in (1.2381; 1.61905)$ Приближенное решение: $x^* = \frac{1.2381+1.61905}{2} = 1.420473174376629$ было найдено за 8 вызовов функций

Сходимость метода за 8 вычислений функций: 0.04762



```python
In [15]: ax = build_plot(xlim=(1.4, 1.44),
                         ylim=(2, 4),
                         ticks=(0.005, 0.2),
                         small_ticks=(0.0025, 0.1))

         ax.axvline(fibonacci_solution, color='purple', label='$x_{fibonacci}$ минимум вычисленный методом фибоначчи сечения')
         ax.axvline(x_exact, color='green', label='$x_0$ - аналитически полученная точка минимума функции')
         ax.axvline(golden_solution, color='red', label='$x_{golden}$ минимум вычисленный методом золотого сечения')
         ax.axvline(dichotomy_solution, color='blue', label='$x_{dichotomy}$ минимум вычисленный методом дихотомии')
         ax.legend();

         print('## Решения:')
```

Решения:



Вывод:

1. Для целевой функции количество вычислений функции:
    - Для метода дихотомии: 10
    - Для метода золотого сечения: 8
    - Для метода фибоначчи: 8
2. Для целевой функции следующие скорости сходимости:
    - Для метода дихотомии: 0.03125 - самое быстрое схождение
    - Для метода золотого сечения: 0.03443
    - Для метода фибоначчи: 0.04762 - самое медленное схождение