

## Лабораторная работа № 3

### Метод штрафных функций

#### Цель работы

Ознакомиться с методами штрафных функций при решении задач нелинейного программирования. Изучить типы штрафных и барьерных функций, их особенности, способы и области применения, влияние штрафных функций на сходимость алгоритмов, зависимость точности решения задачи нелинейного программирования от величины коэффициента штрафа.

#### Методические указания

С помощью методов штрафных функций и барьеров (их еще называют *методы внешней и внутренней штрафной точки*) задача нелинейного программирования решается путём исследования *последовательности задач* без ограничений. Вследствие того, что методы штрафных функций и барьеров не оперируют ограничениями в явном виде, они оказываются эффективными в вычислительном отношении для задач нелинейного программирования.

Методы штрафных функций и барьеров аппроксимируют исходную задачу нелинейного программирования последовательностью связанных с ней задач без ограничений, каждая из которых может быть решена с помощью имеющихся алгоритмов оптимизации.

В методе штрафных функций исходную задачу

$$\min f(\bar{x})$$

при ограничениях

$$h_j(\bar{x}) = 0, \quad j = \overline{1, m};$$

$$q_j(\bar{x}) \leq 0, \quad j = \overline{1, k},$$

сводят к задаче без ограничений

$$\min Q(x) = \min \left\{ f(\bar{x}) + r_0 \left[ \sum_{j=1}^m r_j \Phi_j(h_j(\bar{x})) + \sum_{l=1}^k r_l S_l(q_l(\bar{x})) \right] \right\}.$$

где  $\Phi(\cdot)$ ,  $S(\cdot)$  – функции штрафа, которые накладываются при нарушении ограничений. Обычно функция штрафа выбирается такой, чтобы штраф был равен нулю, если ограничение выполняется, и больше нуля, если нарушено.

**Барьерные функции** отличаются от штрафных тем, что в допустимой области они всегда не равны нулю и, кроме того, резко возрастают, стремясь к бесконечности, при приближении к границе допустимой области. В отличие от штрафных барьерные функции требуют специальной адаптации алгоритмов оптимизации, так как при случайном нарушении ограничений в

процессе поиска может произойти переполнение разрядной сетки.

**Стратегия выбора коэффициентов штрафа.** Эффективность применения метода штрафных функций существенно зависит от выбора функции штрафа и правильно подобранной стратегии корректировки коэффициентов штрафа  $r_j$ . Как правило, алгоритм подбора коэффициентов штрафа заключается в следующем. На начальном этапе фиксируем точку  $\bar{x}_0$ , а также начальные значения коэффициентов штрафа и находим минимум функции  $Q(x)$  в точке  $\bar{x}_1$ . Далее проверяем величину штрафа: если штраф больше заданной точности  $\varepsilon$ , то изменяем величину штрафа (для штрафных функций коэффициенты штрафа увеличиваются, а для барьерных функций – уменьшаются) и повторяем поиск из точки  $\bar{x}_1$ . Так продолжаем до тех пор, пока величина штрафа не станет меньше  $\varepsilon$ .

### Порядок выполнения работы

№	Вид работы	Баллы
1.	Применяя методы поиска минимума 0-го порядка, реализовать программу для решения задачи нелинейного программирования с использованием <b>метода штрафных функций</b> .	45
2.	Исследовать сходимость <b>метода штрафных функций</b> в зависимости от <ul style="list-style-type: none"> <li>– выбора штрафных функций,</li> <li>– начальной величины коэффициента штрафа,</li> <li>– стратегии изменения коэффициента штрафа,</li> <li>– начальной точки,</li> <li>– задаваемой точности <math>\varepsilon</math>.</li> </ul> Сформулировать выводы.	
3*	Применяя методы поиска минимума 0-го порядка, реализовать программу для решения задачи нелинейного программирования с ограничением типа неравенства с использованием <b>метода барьерных функций</b> .	54
4*	Исследовать сходимость <b>метода барьерных функций</b> в зависимости от <ul style="list-style-type: none"> <li>– выбора барьерных функций,</li> <li>– начальной величины коэффициента штрафа,</li> <li>– стратегии изменения коэффициента штрафа,</li> <li>– начального приближения,</li> <li>– задаваемой точности <math>\varepsilon</math>.</li> </ul> Сформулировать выводы.	

\*) Выполняется по желанию студентов

## Варианты заданий

1.  $f(x, y) = 5(x - y)^2 + (x - 2)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $x + y \leq 1$   
б)  $x = -y$
2.  $f(x, y) = 10(y - x)^2 + y^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $x + y \geq 1$   
б)  $x = 2 - y$
3.  $f(x, y) = (x - y)^2 + 10(x + 5)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $x + y \geq 0$   
б)  $x = 1 - y$
4.  $f(x, y) = 2(x - y)^2 + 14(y - 3)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $y - x \geq -1$   
б)  $x = -y$
5.  $f(x, y) = 4(y - x)^2 + 3(x - 1)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $x + y \leq -1$   
б)  $y = x + 1$
6.  $f(x, y) = 7(x - y)^2 + (y - 6)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $y - x \geq 2$   
б)  $x = -y$
7.  $f(x, y) = (x + y)^2 + 4y^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:  
а)  $x + y \geq 5$

б)  $y = x + 2$

8.  $f(x, y) = 5(x + y)^2 + (x - 2)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:

а)  $x + y \geq 1$

б)  $x = y$

9.  $f(x, y) = 4(x + y)^2 + x^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:

а)  $y - x \geq 5$

б)  $x = 2 - y$

10.  $f(x, y) = (x + y)^2 + 10(y - 2)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:

а)  $y \leq x$

б)  $y = x - 1$

11.  $f(x, y) = 10(x + y)^2 + (y + 2)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:

а)  $y - x \geq 1$

б)  $x = y$

12.  $f(x, y) = 8(x + y)^2 + (x + 2)^2 \rightarrow \min$   
при ограничении:

а)  $x + y \geq 5$

б)  $x = y$

## Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- титульный лист;
- цель работы;
- задание;
- таблицы с результатами проведенных исследований, где должны быть отражены используемая штрафная / барьерная функция, начальная величина коэффициента штрафа, стратегия изменения коэффициента штрафа, начальное приближение  $\bar{x}_0$ , задаваемая точность, количество

итераций, число вычислений целевой функции, найденная точка и значение функции в ней.

- выводы об эффективности метода штрафных функций, рекомендации о выборе функций штрафа и стратегии выбора коэффициентов штрафа с указанием преимуществ и недостатков.

В отчет необходимо включить текст разработанной программы поиска, результаты ее тестирования.