

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第十七届中国研究生

数学建模竞赛

学 校 深圳大学

参赛队号 20105900010

1. 瞿东彦

队员姓名 2. 柴一源

3. 黎永财

中国研究生创新实践系列大赛

“华为杯”第十七届中国研究生

数学建模竞赛

题 目 飞行器质心平衡供油策略优化研究

摘要：

飞行器运行过程中的质心变化对飞行器的控制有重要的影响。本文以优化理论为基础，研究了飞行器质心平衡供油策略。首先通过分析飞行器运行过程中由于姿态变化引起的油箱质心变化规律，考虑到由此导致的惯性坐标系与机体坐标系的不一致，引入 Jaccobi 转换矩阵，提出用于求解在飞行器坐标系下质心变化曲线的数值算法。其次，我们通过模拟退火算法求解含有约束的优化问题，其原理是通过赋予搜索过程一种时变且最终趋于零的概率突跳性逐次逼近最优目标。除此之外，我们提出了基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法，该算法具有局部优化性能并且在运行过程中精度不断提高，可以在短时间内取得较优的规划结果。我们通过对上述两种算法产生的方案综合分析，发现基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法在优化效果上更胜一筹。据此，制定了飞行器在多约束条件下的最佳供油方案，最终通过优化瞬时质心位置与目标质心位置的最大欧式距离选择最优的质心平衡供油策略。

针对问题一，通过分析飞行器在飞行过程中的仰俯角变化，结合每个油箱的载油量变化，分为 8 种情况讨论，分别给出计算每个油箱中心位置的方法。然后，给出飞行器质心计算公式及机体坐标系与惯性坐标系的转换方法，通过数值算法，得到该飞行器在执行任务过程中的质心变化曲线。

针对问题二，我们通过模拟退火算法和基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进型算法求解组合目标优化问题，给出了飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线和 4 个主油箱的总供油速度曲线，求得飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 0.0991 米，4 个主油箱的总供油量为 7.6004 立方米。

针对问题三，在问题二供油策略规划的基础上，考虑初始油量及任务结束时的剩余油量。首先令油箱加满油，通过油箱供油的瞬时质心变化计算飞行器的质心坐标，并逐渐逼近理想初始位置，此时油箱剩余油量即为满足约束的最优初始油量。其次，我们通过基于

贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进型算法求解，给出了飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线和 4 个主油箱的总供油速度曲线，求得飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 0.1059 米，4 个主油箱的总供油量为 8.0061 立方米。

针对问题四，在问题二供油策略规划的基础上，计算飞行器瞬时质心时考虑飞行器仰俯角随时间的变化。基于问题一中机体坐标系与惯性坐标系的转换分析，给出了飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线和 4 个主油箱的总供油速度曲线，求得飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 0.9953 米，4 个主油箱的总供油量为 8.0432 立方米。

对于飞行器质心平衡供油策略优化问题，本文建立了质心平衡的数学模型，并根据问题的特性，加入了特定的约束条件。四个问题均在较短时间内求得了最优解，符合质心平衡供油策略优化的稳定性与高效性的特点。算法具有较高的实用价值，针对复杂度较高和大规模的实际问题，模型求解还需要进一步研究。

关键字： 质心平衡 供油策略优化 模拟退火算法 基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进型算法～优化理论

目录

1. 问题重述	5
1.1 问题背景.....	5
1.2 需要解决的问题.....	6
2. 模型的假设与符号说明	9
2.1 模型的假设.....	9
2.2 符号说明.....	9
3. 问题一	10
3.1 问题描述与分析.....	10
3.2 模型建立.....	11
3.3 模型求解与分析.....	17
3.3.1 数值算法设计	17
3.3.2 问题一求解结果	19
4. 问题二	20
4.1 问题描述与分析.....	20
4.2 模型建立.....	22
4.3 模型求解与分析.....	23
4.3.1 模拟退火算法设计	23
4.3.2 基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法	26
4.3.3 问题二求解结果	27
5. 问题三	31
5.1 问题描述与分析.....	31
5.2 模型建立.....	31
5.3 模型求解与分析.....	32
5.3.1 算法设计	32
5.3.2 问题三求解结果	32
6. 问题四	36
6.1 问题描述与分析.....	36
6.2 模型建立.....	36

6.3 模型求解与分析.....	37
6.3.1 求解算法设计	37
6.3.2 问题四求解结果	38
7. 模型的评价	39
7.1 模型的优点.....	39
7.2 模型的缺点.....	39
7.3 模型的推广.....	40
参考文献.....	41

1. 问题重述

1.1 问题背景

某一类飞行器携带有多个油箱，在飞行过程中，通过若干个油箱的联合供油以满足飞行任务要求和发动机工作需求。在任务执行过程中，飞行器的质心变化对飞行器的控制有着重要的影响，各个油箱内油量的分布和供油策略将导致飞行器质心的变化，进而影响到对飞行器的控制。因此，制定各油箱的供油策略是这类飞行器控制的一项重要任务，这里，油箱的供油策略可用其向发动机或其它油箱供油的速度曲线来描述。

假设该类飞行器一共有 6 个油箱，各油箱供油示意图如图1 所示：

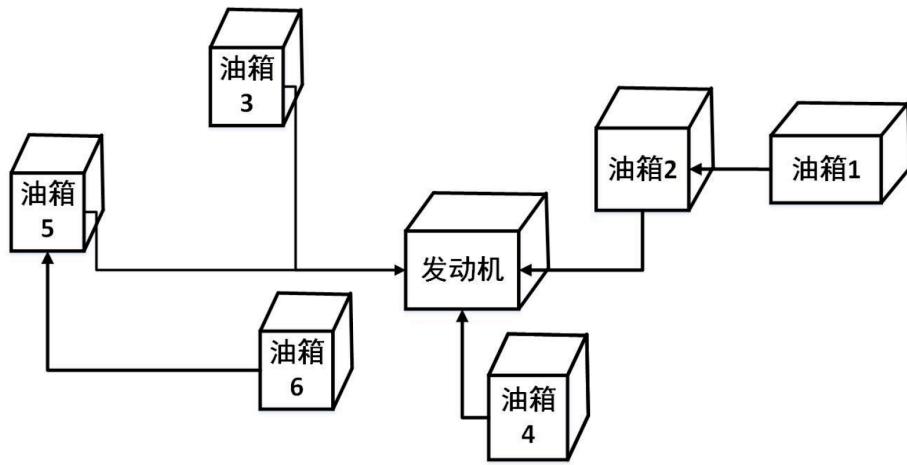


图 1 飞行器油箱供油示意图

飞行器的结构（如油箱的位置、形状、尺寸、供油关系、供油速度限制等影响着油箱的供油策略和飞行器的质心变化。为简化问题，对飞行器的结构和相关供油限制作出以下假设和要求：

1. 油箱均为长方体且固定在飞行器内部（如图1所示），设第 i 个油箱内部长、宽、高分别为 a_i, b_i 和 c_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ 。长、宽、高的三个方向与飞行器坐标系的 x, y, z 轴三个方向平行。
2. 在飞行器坐标系下（坐标系描述见附录），飞行器（不载油）质心为 $\vec{c}_0(0, 0, 0)$ ，第 i 个空油箱中心位置为 \vec{P}_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ 。飞行器（不载油）总重量为 M 。
3. 第 i 个油箱的供油速度上限为 U_i , ($U_i > 0$), $i = 1, 2, \dots, 6$ 。每个油箱一次供油的持续时间不少于 60 秒。
4. 主油箱 2、3、4、5 可直接向发动机供油，油箱 1 和油箱 6 作为备份油箱分别为油箱 2 和油箱 5 供油，不能直接向发动机供油。
5. 由于受到飞行器结构的限制，至多 2 个油箱可同时向发动机供油，至多 3 个油箱可同时供油。

6. 飞行器在执行任务过程中，各油箱联合供油的总量应至少满足发动机的对耗油量的需要（若某时刻供油量大于计划耗油量，多余的燃油可通过其它装置排出飞行器），发动机在每个时刻的耗油速度可用一条耗油速度曲线表示，图 2 给出了发动机执行某次任务时的计划耗油速度示意图：

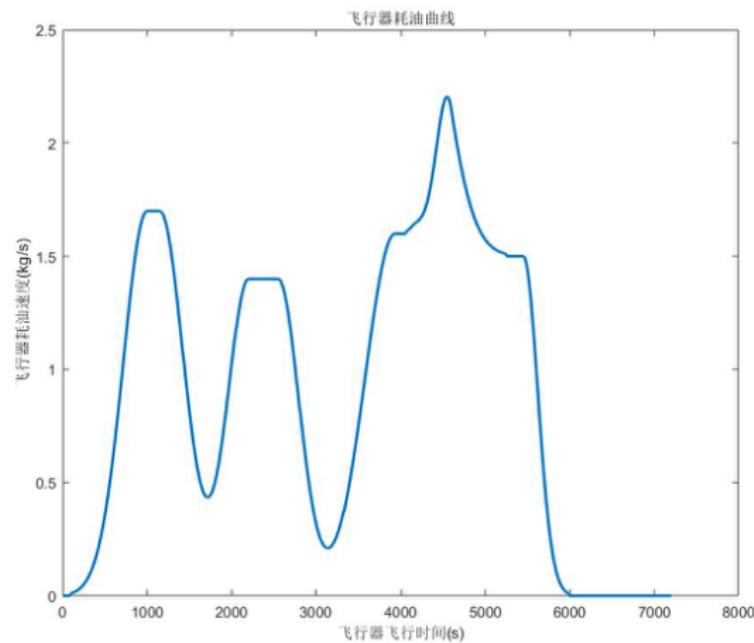


图 2 某次任务中发动机计划耗油速度曲线

7. 飞行器在飞行过程中可能发生姿态改变，主要是飞行航向上的上下俯仰或左右偏转。为简化问题，假设本题目中飞行器姿态的改变仅考虑平直飞与俯仰情况。飞行器的俯仰将导致各油箱相对地面的姿态发生倾斜，在重力作用下，油箱的燃油分布也随之发生变化，从而使得飞行器质心发生偏移。油箱姿态变化示意图如图 3 所示，左图为飞行器在地面时油箱的状态，右图虚线代表油箱姿态改变后燃油水平面。飞行器姿态变化的相关坐标系约定请参见附录。

1.2 需要解决的问题

附件 1 给出了飞行器的相关参数，附件 2-附件 5 给出了该类飞行器在执行某任务过程中飞行和控制的相关数据，请根据任务要求，建立数学模型，设计算法，并分析算法的有效性和复杂度，完成以下问题：

问题一 附件 2 给出了某次任务中飞行器的 6 个油箱的供油速度及飞行器在飞行过程中的俯仰角变化数据，每秒记录一组数据（下同）。请给出该飞行器在此次任务执行过程中的质心变化曲线，并将其质心在飞行器坐标系下的位置数据按时间（每秒一组）先后顺序存入附件 6 结果表“第一问结果”中。

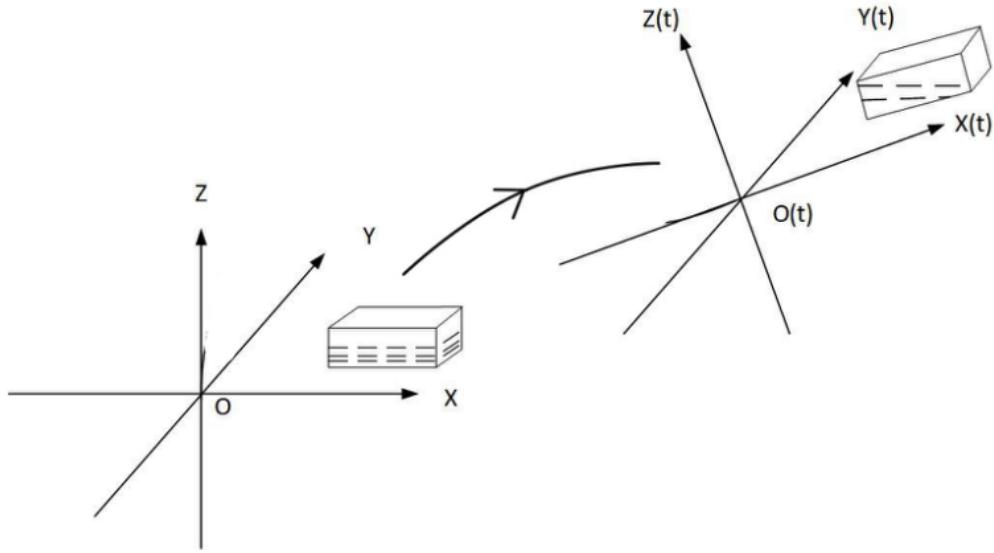


图 3 油箱姿态变化示意图

问题二 附件 3 给出了某次任务的飞行器计划耗油速度数据, 与飞行器在飞行器坐标系下的理想质心位置数据。根据任务需求, 在飞行器始终保持平飞(俯仰角为 0)的任务规划过程中, 请为飞行器制定该次任务满足条件(1)-(6)的 6 个油箱供油策略, 使得飞行器每一时刻的质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小, i.e,

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2$$

请给出飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线和 4 个主油箱的总供油速度曲线(时间间隔为 1s)、以及飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值和 4 个主油箱的总供油量, 并将 6 个油箱的供油速度数据按时间(每秒一组)先后顺序存入附件 6 结果表“第二问结果”中。

问题三 假定初始油量未定, 飞行器其他相关参数如附件 1 所示, 附件 4 给出了某次任务的飞行器计划耗油速度数据, 与飞行器在飞行器坐标系下的理想质心位置数据。在飞行器始终保持平飞(俯仰角为 0)的任务规划过程中, 请为飞行器制定该次任务满足条件(1)-(6)的 6 个油箱初始载油量及供油策略, 使得本次任务结束时 6 个油箱剩余燃油总量至少 $1m^3$, 并且飞行器每一时刻的质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小, i.e,

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2$$

请给出 6 个油箱的初始载油量、飞行器飞行过程中 6 个油箱的供油速度曲线和 4 个主油箱的总供油速度曲线(时间间隔为 1s)、以及飞行器质心与理想质心距离的最大值和 4 个主油箱的总供油量。请将 6 个油箱的初始油量存入附件 6 结果表“第三问结果”中的提示位置, 并将 6 个油箱的供油速度数据按时间(每秒一组)先后顺序存入附件 6 结果表“第三问结果”中。

问题四 在实际任务规划过程中，飞行器俯仰角随时间变化。附件 5 给出了飞行器俯仰角的变化数据和耗油速度数据。请为本次任务制定油箱供油策略，使得飞行器瞬时质心 $\vec{c}_1(t)$ 与飞行器(不载油)质心 $\vec{c}_0(t)$ 的最大距离达到最小，即

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_0(t)\|_2$$

请绘出飞行器飞行过程中 6 个油箱各自的供油速度曲线，再将 4 个主油箱的总供油速度曲线(时间间隔为 1s)与计划耗油速度曲线绘于一个图中，给出飞行器瞬时质心与飞行器(不载油)质心的最大距离偏差以及 4 个主油箱的总供油量，并将 6 个油箱的供油速度数据按时间(每秒一组)先后顺序存入附件 6 结果表“第四问结果”中。

2. 模型的假设与符号说明

2.1 模型的假设

为了便于飞行器质心平衡供油策略的优化问题研究，我们对题目中的条件提出以下合理假设。

1. 假设大地是平面的，即忽略地球自转和曲率。
2. 假设机体为钢体，略去旋转部件运动。
3. 假设飞行器在不考虑结构和控制系统情况下，可以按计划航线飞行。
4. 假设飞行器在每个时刻都知道上一个时刻的质心位置坐标。
5. 假设飞行器在飞行过程中不会遇见障碍物。
6. 假设油面始终是水平的，不会因为飞行器飞行产生抖动产生波动。

2.2 符号说明

符号	意义
a_i, b_i, c_i	第 i 个油箱的长、宽、高 (m)
v_i	第 i 个油箱的供应速度 (kg/s)
$\bar{v}(t)$	t 时刻发动机的耗油速度 (kg/s)
$m_i(t)$	第 i 个油箱在 t 时刻的载油质量 (kg)
$V_i(0)$	第 i 个油箱的初始载油量 (m^3)
$V_i(t)$	第 i 个油箱在 t 时刻的载油量 (m^3)
\vec{P}_{i0}	第 i 个空油箱的中心位置坐标 (m)
$\vec{P}_i(t)$	第 i 个油箱在 t 时刻的质心位置坐标 (m)
$\vec{c}_1(t)$	飞行器在 t 时刻的质心位置坐标 (m)
$\vec{c}_2(t)$	飞行器在 t 时刻的理想质心位置坐标 (m)
\vec{c}_0	飞行器（不载油）质心位置坐标 (m)
M	飞行器净质量 (kg/m^3)
ρ	燃料的密度

3. 问题一

3.1 问题描述与分析

问题 1 要求给出飞行器在执行任务过程中的质心变化曲线，即确定飞行器每个时刻 t 在机体坐标系下的位置坐标。在飞行器飞行过程中俯仰角有变化，会导致题目中已知惯性坐标系和机体坐标系的不一致，我们首先分析如下两个问题：

1. 惯性坐标系与机体坐标系之间的矩阵转换。

令 $O - xyz$ 表示惯性坐标系，以飞行器（不载油）的质心为原点 O ，飞行器纵向中心轴为 X 轴（飞行器在地面上纵向中心轴为水平方向），以飞行器前方为正向，重力方向的反方向为 Z 轴正向，通过右手法则确定 Y 轴。 $O(t) - x(t)y(t)z(t)$ 表示机体坐标系，在 t 时刻，以飞行器（不载油）质心位置为原点 $O(t)$ ，飞行器纵向中心轴为 $X(t)$ 轴，以飞行器前方为正向， $Y(t)$ 轴垂直于 $X(t)$ 轴所在的飞行器纵剖面，通过右手法则确定 $Z(t)$ 轴。基于题目假设，飞行器在执行任务中只有俯仰角度 $\theta(t)$ 发生变化，相当于绕 y 轴旋转，旋转如果是逆时针的，则旋转值为正。

假定惯性坐标系 $O - xyz$ 绕 y 轴旋转一定角度 $\theta(t)$ 得到机体坐标系 $O(t) - x(t)y(t)z(t)$ ，将两坐标系原点重合，即 $O = O(t)$ 。

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{bmatrix}$$

分别对应于相同的点 P 在坐标系 $O - xyz$ 和 $O(t) - x(t)y(t)z(t)$ 的坐标。

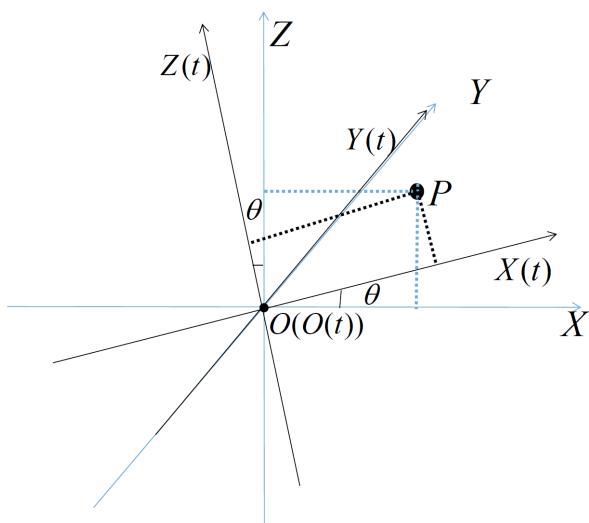


图 4 $O - xyz$ 绕 y 轴旋转 $\theta(t)$ 得到 $O(t) - x(t)y(t)z(t)$

如图4, 由几何关系可得

$$\begin{cases} p_x = p_x(t) \cos \theta(t) - p_z(t) \sin \theta(t), \\ p_y = p_y(t), \\ p_z = p_x(t) \sin \theta(t) + p_z(t) \cos \theta(t) \end{cases}$$

因此, 可以给出向量从矩阵 $O(t) - x(t)y(t)z(t)$ 转换至 $O - xyz$ 绕 y 轴旋转的矩阵 $\mathbf{R}_y(\theta(t))$, 表述为

$$\mathbf{R}_y(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

由此可得, 对于 $O(t)$ 下坐标转换 O , 有 $O(t) = \mathbf{R}_y(\theta(t))O$, 对于 $O(t)$ 下坐标转换 O , 有 $O = \mathbf{R}_y(\theta(t))^T O(t)$. 旋转矩阵不仅仅描述了一个坐标系的方向, 还描述了基于同一个原点的一个向量从一个坐标系到另一个坐标系的转换。因此有

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{R}_y(\theta(t))\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{R}_y(\theta(t))^T \mathbf{p}(t). \quad (2)$$

2. 质心坐标的计算。

质心坐标 (coordinates of the barycenter of a particle system) 是一种特殊坐标, 它是确定质点系重心位置的计算公式 [2]。一般地, 在点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, ..., $P_n(x_n, y_n, z_n)$ 上分别放置质量是 m_1, m_2, \dots, m_n 的 n 个质点, 它们的质心 $G(x, y, z)$ 的坐标为

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (3)$$

3.2 模型建立

由 (3) 式, 求解飞行器在飞行器坐标系下每个油箱的质心是求解飞行器质心坐标的重点。我们采用如下方法求解飞行器在飞行器坐标系下每个油箱的质心。记每个时刻 t 第 i 个油箱的位置坐标为 $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ 。因为飞行器在运行过程中只有仰俯角, 所以对于每个油箱的质心在 y 轴上的坐标 $y_i(t) \equiv y_{i0}$, 因此只需考虑计算每个油箱的质心在 x 轴和 z 轴上的坐标 $x_i(t)$ 和 $z_i(t)$, 记每个时刻 t 第 i 个油箱的位置坐标为 $(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, 这里只给出油箱的侧视图, 是一个二维平面。如图5所示, 设第 i 个油箱中心坐标为 (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) , 第 i 个油箱的长、宽、高为 a_i, b_i, c_i , A、C、E、F 的坐标分别为

$$\begin{aligned} A &= (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_i + 0.5c_{i0}), \\ C &= (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i), \\ E &= (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_{i0}), \\ F &= (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_i). \end{aligned}$$

我们这里只考虑仰角的情况, 对于俯角有相似的结论, 在此不做赘述。根据角度不同及油量的不同, 飞行器向上航行时, 分为以下 8 种情况讨论:

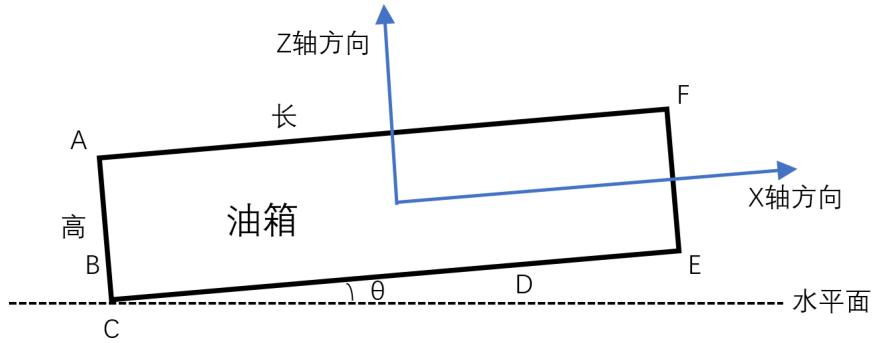


图 5 油箱侧视图与飞行器坐标系下坐标轴关系

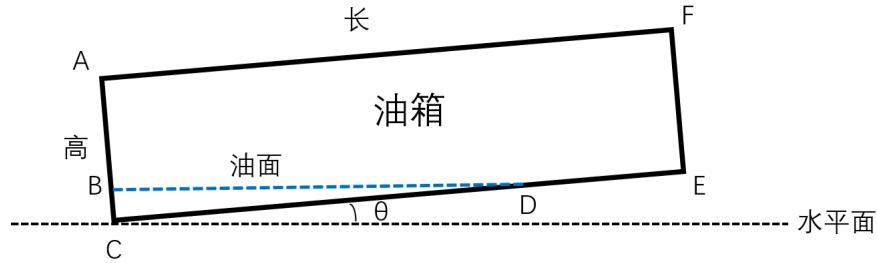


图 6 情况 1 油面示意图

情况 1: 油箱示意图如图6所示，只有油箱的 C 点被油淹没。

其中 AC 表示油箱的高，AF 表示油箱的长，BD 表示汽油达到平面，点 A、C、E、F 分别是油箱的四个顶点，点 B 和 D 分别表示油与 AC 和 CE 接触点， θ 是油箱与水平面的夹角，即是飞行器的仰角。后面油箱示意图类似，不再重复说明。

情况 1 是俯仰角比较小且油箱里的油也比较少的时候。设 $BC = h$, t 时刻油量为 $V_i(t)$ ，则根据几何关系有如下方程：

$$\frac{1}{2} \times h \times \frac{h}{\tan \theta} = \frac{V_i(t)}{b_i},$$

解得， $h = \sqrt{\frac{2V_i(t) \tan \theta}{b_i}}$ 。点 B、D 的三维坐标分别为

$$B = (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i + h), D = \left(x_{i0} - 0.5a_i + \frac{h}{\tan \theta}, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i \right).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, y_{i0}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3} \right).$$

情况 2: 如图7所示，油箱里的油淹没油箱的端点 C 和 E，且油面 D 点与油箱 E 点重合。

此时，油面高度 $BC = h = a_i \tan \theta$, 此时油量为 $V_i^{(1)}$, 根据几何关系下式成立：

$$\frac{1}{2} \times a_i^2 \tan \theta = \frac{V_i^{(1)}}{b_i}.$$

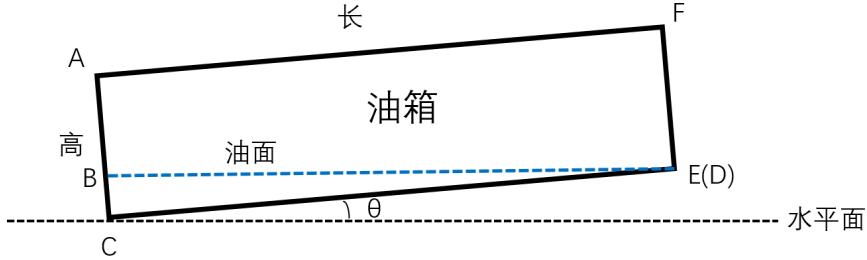


图 7 情况 2 油面示意图

此时油箱的油量为

$$V_i^{(1)} = (a_i^2 b_i \tan \theta) / 2. \quad (4)$$

点 B、D 的三维坐标分别为

$$B = (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i + a_i \tan \theta), D = (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_{i0}).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, y_{i0}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3} \right).$$

情况 3: 如图8所示, 油箱的 C、E 被油浸没。

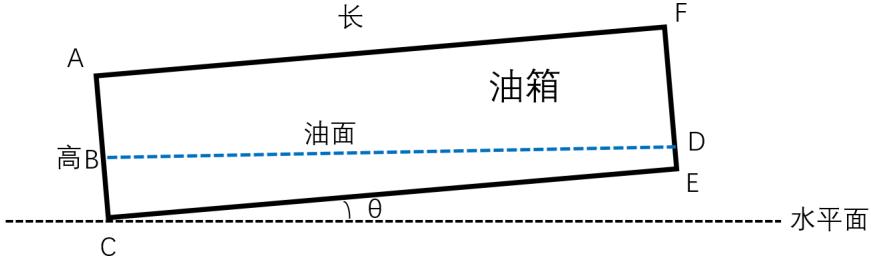


图 8 情况 3 油面示意图

设 DE 长度为 h, 则下式成立:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{a_i^2 b_i \tan \theta}{2}, \\ V_i(t) - V_1 = a_i b_i h. \end{cases}$$

解得: $h = (2V_i(t) - a_i^2 b_i \tan \theta) / (2a_i b_i)$ 。B、D 点的坐标分别为:

$$B = (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i + h + a_i \tan \theta), D = (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_{i0} + h).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_B + x_C + x_D + x_E}{4}, y_{i0}, \frac{z_B + z_C + z_D + z_E}{4} \right).$$

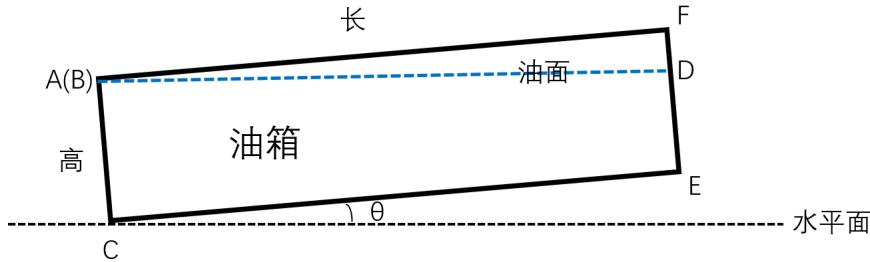


图 9 情况 4 油面示意图

情况 4: 如图9所示, 油面刚好没过 A 点, 此时 A、B 点重合, 油箱的 C、E 被油浸没。此时, 设 DF 的长度为 $h = (a_i b_i c_i - V_i^{(2)}) / (a_i b_i)$, 油箱的油量满足方程组:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \times a_i^2 \tan \theta = \frac{V}{b_i}, \\ V_i^{(2)} = a_i b_i c_i - V. \end{cases}$$

解得:

$$V_i^{(2)} = a_i b_i c_i - \frac{1}{2} \times a_i^2 b_i \tan \theta. \quad (5)$$

B、D 点的坐标分别为:

$$B = (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_{i0}), \quad D = (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_i - h).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_B + x_C + x_D + x_E}{4}, y_{i0}, \frac{z_B + z_C + z_D + z_E}{4} \right).$$

情况 5: 如图10所示, 油箱的 A、C、E 点都被油浸没。

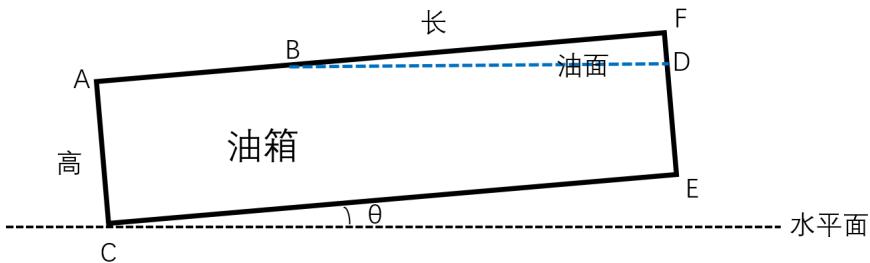


图 10 情况 5 油面示意图

此时, 设 $DF=h$, 由几何关系有如下方程:

$$\begin{cases} J_i(t) = a_i b_i c_i - V_i(t), \\ \frac{h^2}{2 \tan \theta} = \frac{J_i(t)}{b_i}. \end{cases}$$

解得: $h = \sqrt{\frac{2(a_i b_i c_i - V_i(t)) \tan \theta}{b_i}}$, B、D 坐标分别为:

$$B = \left(x_{i0} + 0.5a_i - \frac{h}{\tan \theta}, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_i \right), D = (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_i - h).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D + x_E}{5}, y_{i0}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D + z_E}{5} \right).$$

情况 6: 如图11所示, 油箱里的油浸没油箱的端点 C 和 A, 且油面 B 点与油箱 A 点重合。

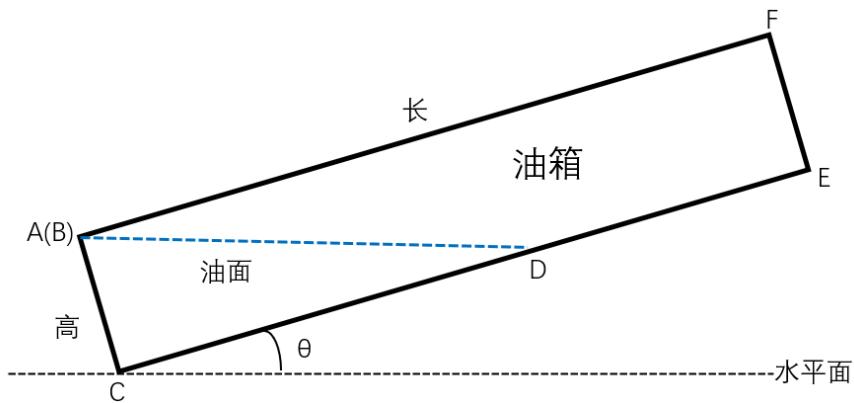


图 11 情况 6 油面示意图

此时, 油面高度 $BC = h = c_i$, 记此时刻油量为 $V_i^{(1')}$, 根据几何关系下式成立:

$$\frac{c_i^2}{2 \tan \theta} = \frac{V_i^{(1')}}{b_i}.$$

此时油箱的油量为

$$V_i^{(1')} = \frac{c_i^2 b_i}{2 \tan \theta}. \quad (6)$$

点 B、D 的三维坐标分别为

$$B = (x_{i0} - 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_i), D = (x_{i0} - 0.5a_i + c_i / \tan \theta, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, y_{i0}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3} \right).$$

情况 7: 如图12所示, 油箱的 A、C 被油浸没。

设 AB 长度为 h, 则下式成立:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{c_i^2 b_i}{2 \tan \theta}, \\ V_i(t) - V_1 = b_i h c_i. \end{cases}$$

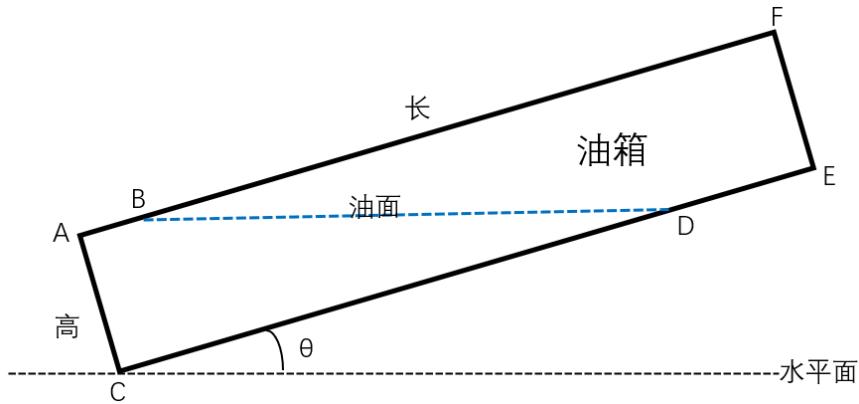


图 12 情况 7 油面示意图

解得: $h = (2V_i(t) \tan \theta - c_i^2 b_i) / (2c_i b_i \tan \theta)$, B、D 点的坐标分别为:

$$B = (x_{i0} - 0.5a_i + h, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_i), D = \left(x_{i0} - 0.5a_i + h + \frac{c_i}{\tan \theta}, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i\right).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, y_{i0}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

情况 8: 如图13所示, 油面刚好没过 E 点, 此时 D、E 点重合, 油箱的 A、C 被油淹没。

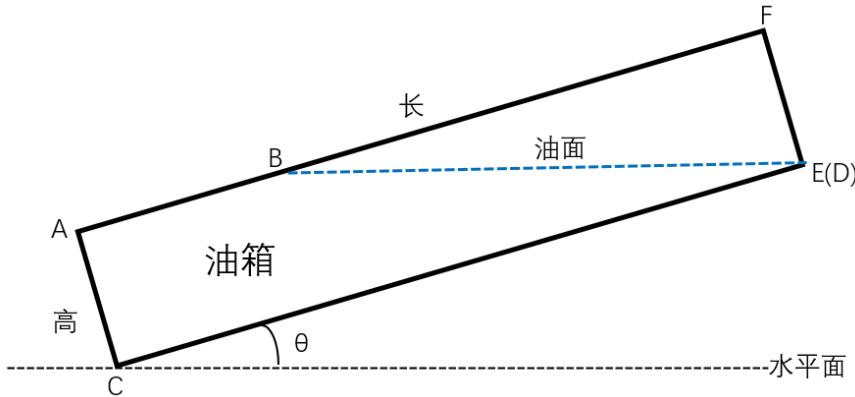


图 13 情况 8 油面示意图

此时, 设 AB 的长度为 $h = a_i - c_i / \tan \theta$, 油箱的油量满足方程组:

$$\begin{cases} \frac{c_i^2}{2 \tan \theta} = \frac{V}{b_i}, \\ V_i^{(2')} = a_i b_i c_i - V. \end{cases}$$

解得:

$$V_i^{(2')} = a_i b_i c_i - \frac{c_i^2 b_i}{2 \tan \theta}. \quad (7)$$

B、D 点的坐标分别为:

$$B = (x_{i0} + 0.5a_i - c_i / \tan \theta, y_{i0}, z_{i0} + 0.5c_{i0}), D = (x_{i0} + 0.5a_i, y_{i0}, z_{i0} - 0.5c_i).$$

此时油箱的质心坐标为

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, y_{i0}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right).$$

3.3 模型求解与分析

3.3.1 数值算法设计

对于问题一，我们采用数值算法，具体步骤如下：

Step 1: 计算飞行器飞行过程中机体坐标系下每个油箱的质心位置坐标。

表 1 6 个油箱长度 (x 轴) 与高度 (z 轴) 比值对应反正切值表

油箱编号	1	2	3	4	5	6
arctan(x/z)(度)	11.3099	26.5651	20.5560	35.2176	22.6199	11.7683

油箱 1 至油箱 6 长度 (x 轴) 与高度 (z 轴) 比值的对应反正切值如表1，飞行器俯仰角随时间变化曲线如图14所示。

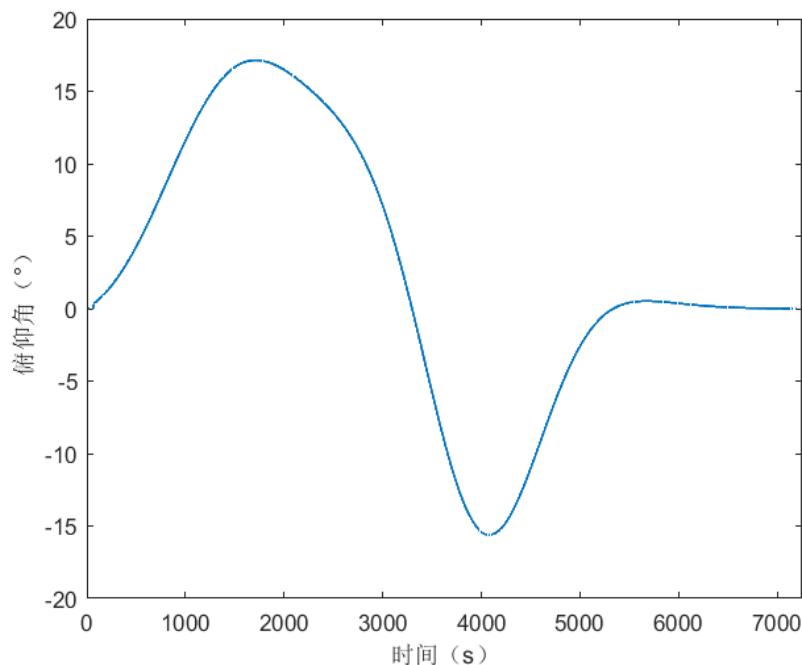


图 14 飞行器俯仰角随时间变化曲线

由表1, 对于油箱2至5, 在飞行器执行任务过程中不会出现A点比E点先被淹没的可能(均小于 20.556°), 则油面只可能出现情况1-5。 $V_i(t)$ 表示第*i*个油箱在*t*时刻的载油量, $V_i^{(1)}, V_i^{(2)}$ 取值于(4)和(5)式, 具体如下: ($i = 2, 3, 4, 5$)

$$\begin{cases} V_i(t) < V_i^{(1)}, & \text{情况 1,} \\ V_i(t) = V_i^{(1)}, & \text{情况 2,} \\ V_i^{(1)} < V_i(t) < V_i^{(2)}, & \text{情况 3,} \\ V_i(t) = V_i^{(2)}, & \text{情况 4,} \\ V_i^{(2)} < V_i(t) < V_{i0}, & \text{情况 5,} \end{cases} \quad (8)$$

而对于油箱1和6, 当飞行器的仰俯角高于 11.3099° 时候, 可能出现A点比E点先淹没的情况, 因此考虑情况1、5、6、7、8。 $V_i(t)$ 表示第*i*个油箱在*t*时刻的载油量, $V_i^{(1')}, V_i^{(2')}$ 取值于(6)和(7)式, 具体如下: ($i = 1, 6$)

$$\begin{cases} V_i(t) < V_i^{(1')}, & \text{情况 1,} \\ V_i(t) = V_i^{(1')}, & \text{情况 6,} \\ V_i^{(1')} < V_i(t) < V_i^{(2')}, & \text{情况 7,} \\ V_i(t) = V_i^{(2')}, & \text{情况 8,} \\ V_i^{(2')} < V_i(t) < V_{i0}, & \text{情况 5,} \end{cases} \quad (9)$$

Step 2: 将机体坐标系下每个油箱的质心位置坐标转化为惯性坐标系下每个油箱的质心位置坐标。

由(2)式, 对于惯性坐标系*O-xyz*下, 第*i*个油箱在*t*时刻的质心位置坐标为

$$\vec{P}'_i(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & 0 & \sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \vec{P}_i(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Step 3: 计算飞行器飞行过程中惯性坐标系下飞行器的质心位置坐标。

由题目可知, 两个坐标系均以飞行器不载油的质心为原点, *M*表示飞行器净质量。由(3)式, 对于惯性坐标系*O-xyz*下, 飞行器在*t*时刻的质心位置为

$$\vec{c}_1(t) = \left(\frac{\sum_{i=1}^6 m_i(t)x_i(t)}{\sum_{i=1}^6 m_i(t) + M}, \frac{\sum_{i=1}^6 m_i(t)y_i(t)}{\sum_{i=1}^6 m_i(t) + M}, \frac{\sum_{i=1}^6 m_i(t)z_i(t)}{\sum_{i=1}^6 m_i(t) + M} \right)^T. \quad (11)$$

这里 $x_i(t), y_i(t), z_i(t)$ 分别对应第*i*个油箱在*t*时刻在*x*轴、*y*轴和*z*轴的质心位置坐标, $m_i(t)$ 表示第*i*个油箱在*t*时刻的载油质量。

Step 4: 将惯性坐标系下飞行器的质心位置坐标转化为机体坐标系下飞行器的质心位置坐标。

由(2)式,对于机体坐标系 $O(t)-x(t)y(t)z(t)$ 下,飞行器在 t 时刻的质心位置坐标为

$$\vec{c}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & 0 & -\sin \theta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta(t) & 0 & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \vec{c}'_1(t) \quad (12)$$

3.3.2 问题一求解结果

根据以上建立的优化模型及数值算法,基于 Python 实现,我们得到飞行器在执行任务过程中质心变化曲线如图15所示,其质心在飞行器坐标系下位置数据置于附件 6 中。

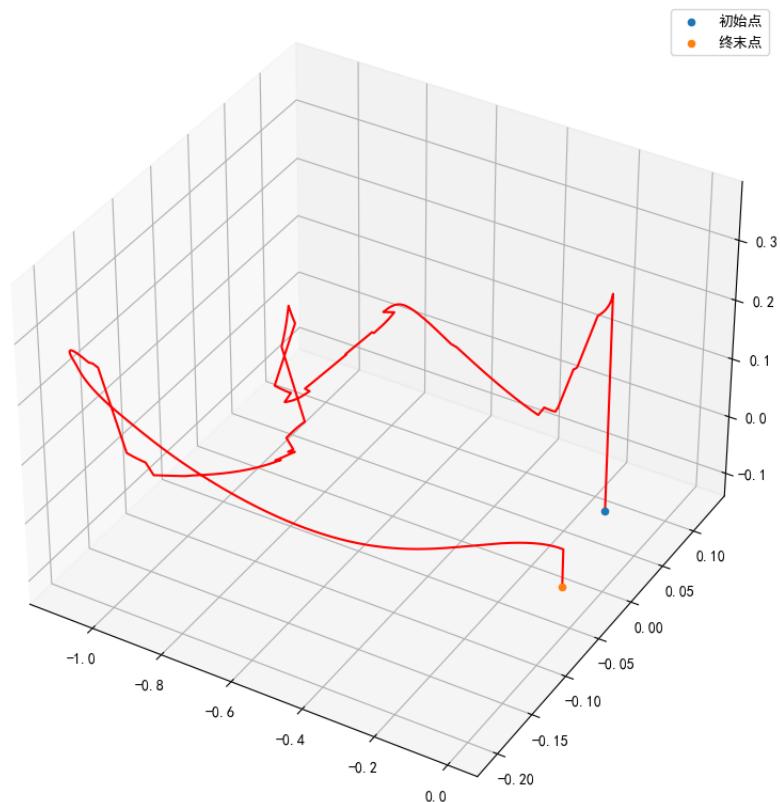


图 15 飞行器在执行任务过程中质心变化曲线

4. 问题二

4.1 问题描述与分析

问题二中只考虑飞行器始终保持平飞，因此惯性坐标系与机体坐标系重合，根据附件一中的飞行器相关参数，我们可以得到飞行器油箱的位置如图16所示。

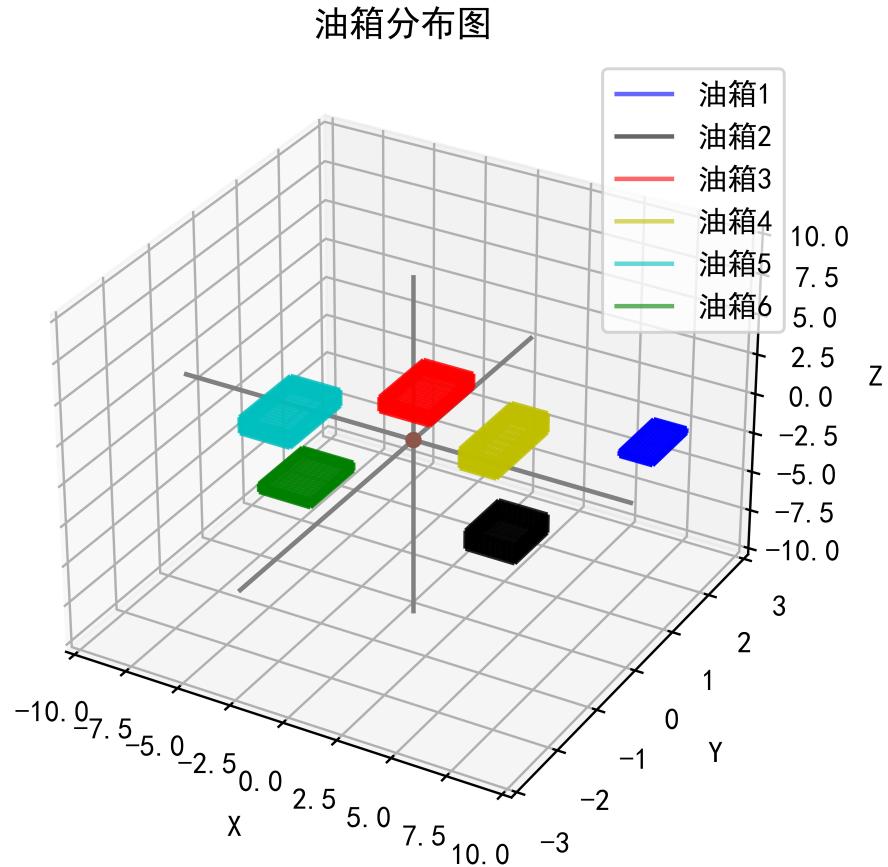


图 16 飞行器油箱位置示意图

由条件 3, 第 i 个油箱的供油速度上限为 U_i , $U_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 6$ 。设 v_i 为第 i 个油箱在 t 时刻的供应速度 (kg/s), 则有约束

$$\begin{cases} v_1(t) \leq 1.1, v_2(t) \leq 1.8, v_3(t) \leq 1.7, \\ v_4(t) \leq 1.5, v_5(t) \leq 1.6, v_6(t) \leq 1.1. \end{cases} \quad (13)$$

供油的持续时间不少于 60 秒, 满足: 若 $t \in [0, 60]$, $K_i(t) = 1$, 则 $K_i(t+j) = 1$, $0 \leq j \leq 60 - t$ 。若 $t \in (60, t_{end}]$, $K_i(t) = 1$, 且 $K_i(t+1) = 0$, 则 $K_i(t-60) = 1$ 。

我们令 $K_i(t)$ 表示第 i 个油箱是否供油的判断变量，则有

$$K_i(t) = \begin{cases} 1, & t \text{时刻第 } i \text{个油箱供油}, \\ 0, & t \text{时刻第 } i \text{个油箱不供油} \end{cases} \quad (14)$$

根据问题中的条件 4、5，主油箱 2、3、4、5 可直接向发动机供油，油箱 1 和油箱 6 作为备份油箱分别为油箱 2 和油箱 5 供油，不能直接向发动机供油。且由于受到飞行器结构的限制，至多 2 个油箱可同时向发动机供油，至多 3 个油箱可同时供油。此约束可以写为在时刻 t ，有

$$\begin{cases} 0 \leq \sum_{i=2}^5 K_i(t) \leq 2, \\ 0 \leq K_1(t) + K_6(t) \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

飞行器在执行任务过程中，各油箱联合供油的总量应至少满足发动机的对耗油量的需要（若某时刻供油量大于计划耗油量，多余的燃油可通过其它装置排出飞行器）且只有 4 个主油箱可直接向发动机供油，则有约束

$$\sum_{i=2}^5 K_i(t) v_i(t) \geq \bar{v}(t), \quad (16)$$

$\bar{v}(t)$ 表示 t 时刻发动机的耗油速度（已知）。并且飞行期间总供油量应满足

$$\sum_{i=2}^5 \sum_{t=1}^5 K_i(t) v_i(t) \leq \sum_{i=1}^6 m_i(0).$$

$m_i(t)$ 代表第 i 个油箱在 t 时刻的载油质量 (kg)，根据题目要求有

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1(t+1) = m_1(t) - K_1(t+1)v_1(t+1) \\ m_2(t+1) = m_2(t) + K_1(t+1)v_1(t+1) - K_2(t+1)v_2(t+1), \\ m_3(t+1) = m_3(t) - K_3(t+1)v_3(t+1), \\ m_4(t+1) = m_4(t) - K_4(t+1)v_4(t+1), \\ m_5(t+1) = m_5(t) + K_6(t+1)v_6(t+1) - K_5(t+1)v_5(t+1), \\ m_6(t+1) = m_6(t) - K_6(t+1)v_6(t+1). \end{array} \right. \quad (17)$$

根据附件一中信息，经简单计算，我们可以得到 6 个油箱的初始载油质量，如表 2 所示。此即为 $t = 0$ 时刻对应的 $m_i(0)$ 。

表 2 6 个油箱的初始载油质量（单位： kg ）

1 号油箱	2 号油箱	3 号油箱	4 号油箱	5 号油箱	6 号油箱
225	1275	1785	1615	2210	680

6 个油箱的初始载油量的初始载油量图 17 所示。

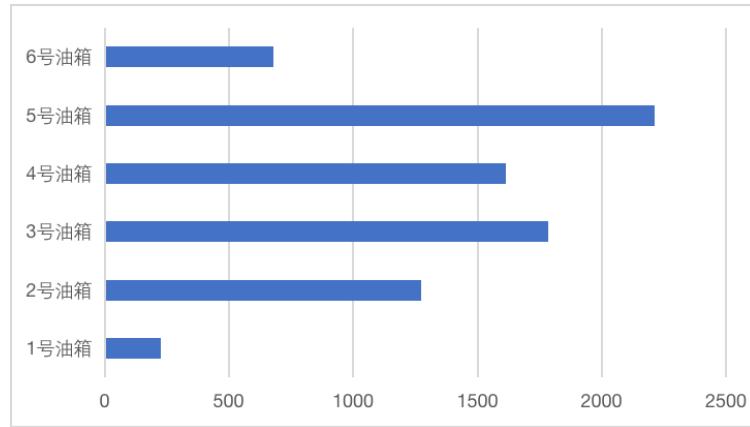


图 17 飞行器 6 个油箱的初始载油质量

4.2 模型建立

我们的目的是使得飞行器每一时刻的质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小, i.e,

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2$$

理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 已知, 图18为理想质心变化曲线。

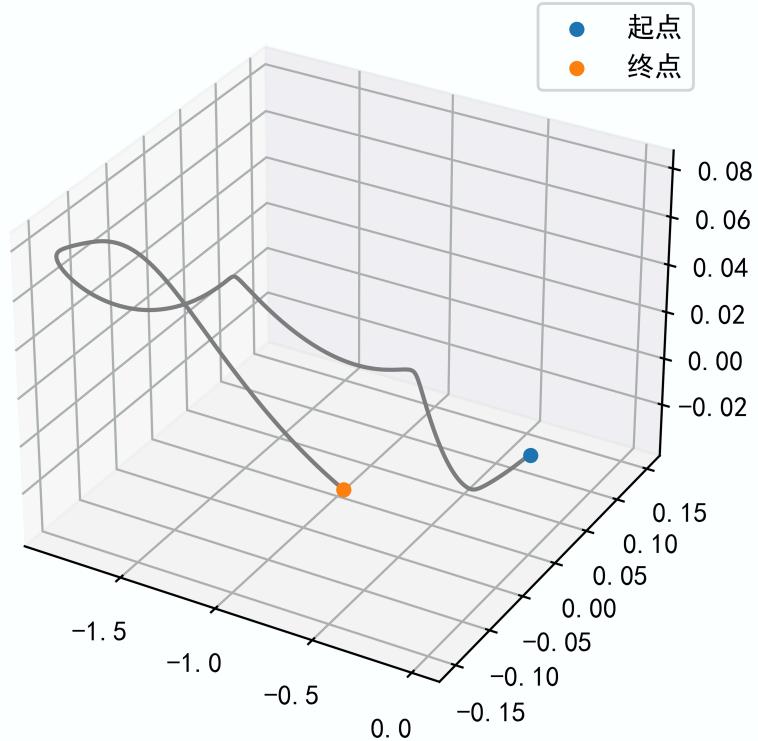


图 18 飞行器理想质心变化曲线

由于载油量的变化，第 i 个油箱在 t 时刻的质心位置坐标可以表示为

$$\vec{P}_i(t) = (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0} - \frac{c_i}{2} + \frac{m_i(t)}{a_i b_i \cdot \rho \cdot 2})^T = (x_{i0}, y_{i0}, z_i(t))^T, \quad (18)$$

$m_i(t)$ 表示第 i 个油箱在 t 时刻的载油质量， $\vec{P}_{i0}, a_i, b_i, c_i, \rho$ 已知。飞行器在 t 时刻的质心位置为

$$\vec{c}_1(t) = \left(\frac{\sum_{i=1}^6 m_i(t)x_{i0}}{\sum_{i=1}^6 m_i(t) + M}, \frac{\sum_{i=1}^6 m_i(t)y_{i0}}{\sum_{i=1}^6 m_i(t) + M}, \frac{\sum_{i=1}^6 m_i(t)z_i(t)}{\sum_{i=1}^6 m_i(t) + M} \right)^T. \quad (19)$$

M 为飞行器净质量。

由上述分析，问题二可以写作优化问题 (20)，使得目标方程最小化

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2, \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v_1(t) \leq 1.1, v_2(t) \leq 1.8, v_3(t) \leq 1.7, \\ v_4(t) \leq 1.5, v_5(t) \leq 1.6, v_6(t) \leq 1.1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \sum_{i=2}^5 K_i(t) \leq 2, \\ 0 \leq K_1(t) + K_6(t) \leq 1, \\ \sum_{i=2}^5 K_i(t)v_i(t) \geq \bar{v}(t), \\ \sum_{i=2}^5 \sum_{t=1}^5 K_i(t)v_i(t) \leq \sum_{i=1}^6 m_i(0). \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (20)$$

根据 (17), (18) 和 (19) 式，在每个时刻 t , $\vec{c}_1(t)$ 与每个油箱的供油速度 $v_i(t)$ 有关，因此问题 (20) 的目标函数的自变量可以看作为供油速度 $v_i(t)$ 和是否供油判断变量 $K_i(t)$ 。

图19给出了发动机耗油速度曲线：

4.3 模型求解与分析

问题的目标是最小化飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值，因此控制飞行器瞬时位置是解决问题的关键。根据 (15)，我们首先假设油箱 2-5 中有两个供油油箱，油箱 1 和 6 有一个供油油箱，则一共有 $C_4^2 C_2^1 = 12$ 种组合，且当 2-5 中仅有一个供油油箱或者油箱 1 和 6 均不供油，则一共分为 $C_4^2 C_2^1 + C_4^2 C_2^0 + C_4^1 C_2^1 + C_4^1 C_2^0 = 30$ 种组合。

由题目中的约束，供油的持续时间不少于 60 秒。我们不妨将 60 秒设为一个时间长度，每个油箱每次供油的时间均以 60 秒为单位。

对于问题二的求解，我们分别设计了模拟退火算法和基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法。

4.3.1 模拟退火算法设计

模拟退火算法是经典的拟物类自然计算方法，其核心思想是模拟金属热浴之后的缓慢降温（退火）达到能量最低态（即常温固态）的过程，以随机“跳阱”策略克服局部搜索法的缺陷，并搜索优化问题的全局最优解，可以有效用于求解组合优化问题 [6, 7]。

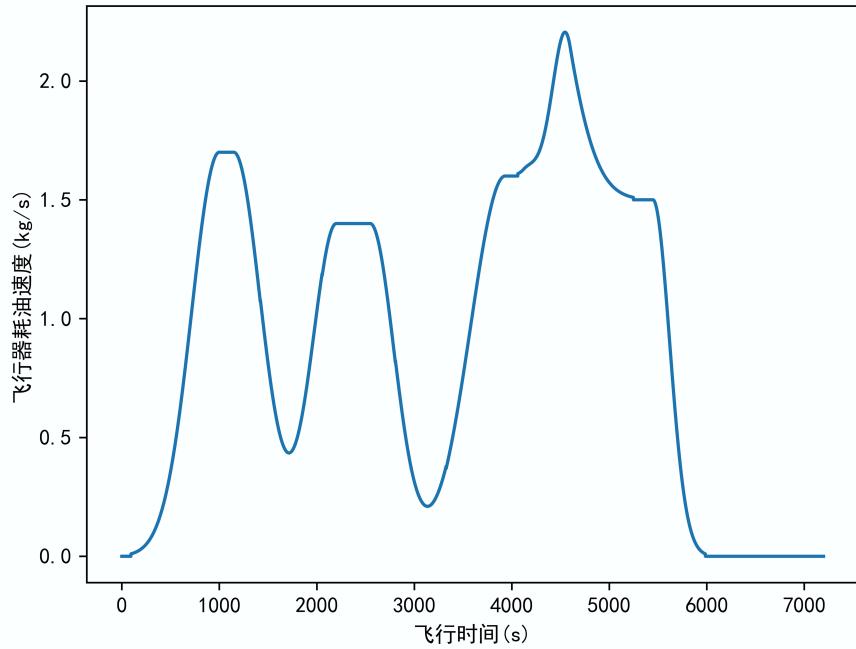


图 19 发动机耗油速度曲线

退火过程是由一组初始参数，即冷却进度表控制，它可以尽量使系统达到准平衡，以使算法在有限的时间内逼近最优解。其中包括：

1. 控制参数的初始值 T_0 : 冷却开始的温度。
2. 我们把连续的降温过程离散化成降温过程中的一系列温度点，选取衰减函数 $T_{k+1} = \alpha T_k$, $k = 1, 2, \dots$, 这里我们将 α 取值为 0.5。
3. 控制参数 T 的终值 T_f (停止准则)，这里即为直接向发电机供油的油箱瞬时耗油速度不小于发动机耗油速度。
4. Markov 链的长度 L_k : 任一温度 T 的迭代次数。

在这里，我们提出了改进的模拟退火算法，其主要步骤如下：

Step 1: 令控制参数的初始值为 $T = T_0$, 即开始退火的初始温度，随机产生一个初始解 x_0 ，并计算目标距离函数值 $E(x_i)$

Step 2: 令 T 等于冷却进度表中的下一个值 T_i

Step 3: 根据当前解 x_i 进行扰动，产生一个新解 x_j ，计算相应的目标函数值 $E(x_j)$ ，得到 $\Delta E = E(x_j) - E(x_i)$

Step 4: 若 $\Delta E < 0$ ，则接受新解 x_j ，作为新的当前解；若 $\Delta E > 0$ ，则新解 x_j 按概率 $\exp(-\Delta E/T_i)$ 的概率接受， T_i 为当前温度。

Step 5: 在温度 T_i 下，重复 L_k 次的扰动和接受过程，即执行 Step 3 和 Step 4。

Step 6: 判断 T 是否已达 T_f ，如果是，则算法终止；如果不是，则转到 Step 2 继续执行。

算法流程为：

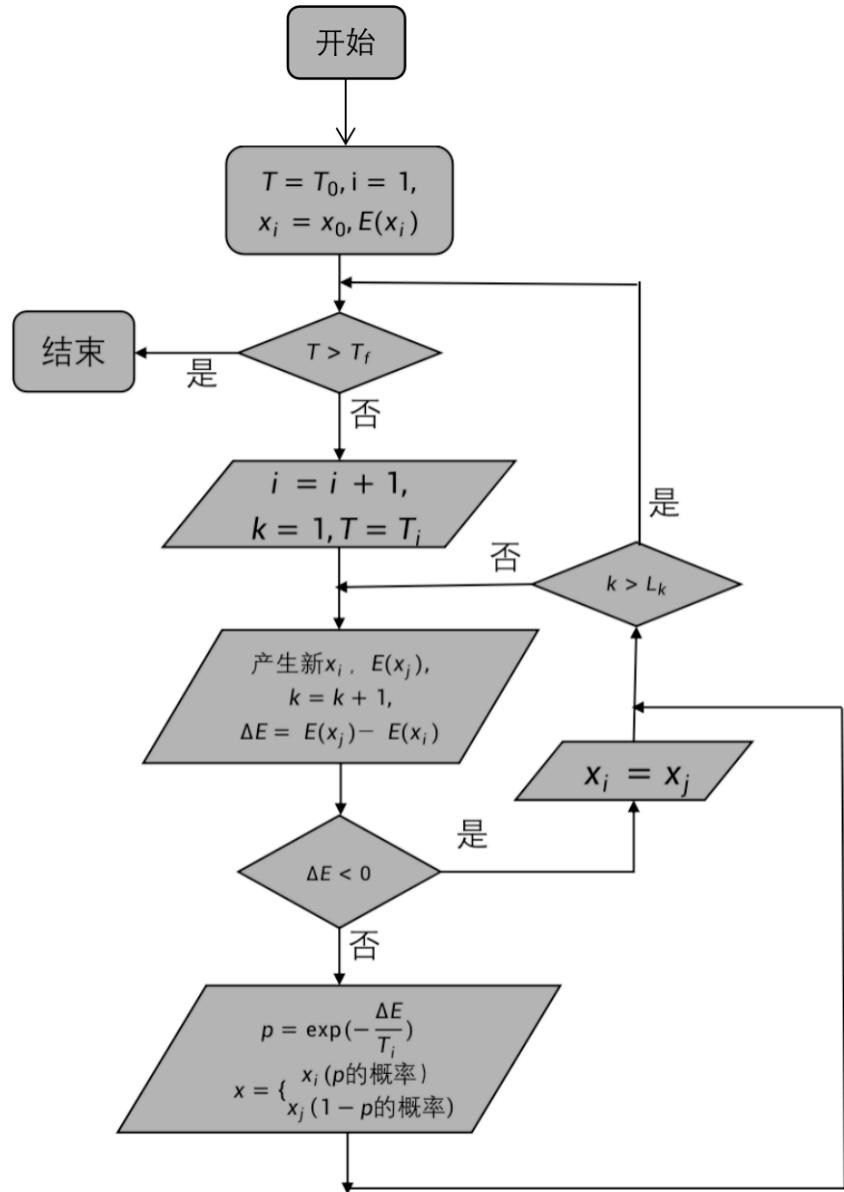


图 20 模拟退火算法流程图

模拟退火算法的应用很广泛，可以高效地求解组合优化问题，并且可以避免陷入局部极小值。然而模拟退火算法由于其参数设置，可能影响其全局搜索性能。初始温度高，可能需要花费大量的计算时间。除此之外，同一温度下的充分搜索也需要计算时间，循环次数增加必定带来计算开销的增大。为此，我们学习贪婪思想，结合网格搜索及交叉验证思想对以上模拟退火算法进行改进，提出如下算法。

4.3.2 基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法

贪婪算法可以更简单、更迅速地求解最优解问题。用贪婪法设计算法的特点是一步一步地进行，以当前情况为基础，根据某个优化测度作最优选择，它省去了为找最优解要穷尽所有可能而必须耗费的大量时间。采用自顶向下，以迭代的方法做出相继的贪心选择，每做一次贪心选择就将所求问题简化为一个规模更小的子问题，通过每一步贪心选择，可得到问题的一个最优解。网格搜索及交叉验证思想的改进算法的核心是应用随机数来进行计算机模拟，此方法可以对研究的系统进行随机观察抽样，通过对样本值的观察统计，求得所研究系统的参数 [8]。网格搜索法是将各个参数可能的取值进行排列组合，列出所有可能的组合结果生成“网格”。然后将各组合用于训练支持向量机，之后使用交叉验证对每一对参数对进行指标评估。在拟合函数尝试了所有的参数组合后，返回一个合适的分类器，自动调整至最佳参数组合。它实际上是指定参数值的一种穷举搜索方法 [9]。

在这里，我们提出了基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法，它可以有效求解优化问题 (20)，

首先，为了满足每个油箱一次供油的持续时间不少于 60 秒的约束，我们以 60 秒为一个阶段，在这 60 秒内选定固定的油箱，其过程中保证只有选定的油箱供油。

问题二主要分为两部分：

第一部分，确定供油的油箱：

1. 确定供油油箱的过程我们利用了贪心算法的思想。对于每个油箱，固定其他油箱的油量不变化，令这个油箱油量减少 0.0001 立方米的油量（若是 1 号或 6 号油箱，则其对应的供油油箱需要发生相应变化），选定这 60 秒中的最后一个理想质心作为目标点，计算此时质心的变化以及飞行器质心与目标的距离。
2. 这个距离可以看做是评价在这段过程中选择该油箱供油好坏的指标。距离越小，收益越高。2 到 5 号油箱为一组，1 和 6 号油箱为一组，从前者中挑选两个能使得收益最大的油箱，从后者中挑选一个使收益最大的油箱，作为组合，接下来的 60 秒中就只有这三个油箱可以供油。
3. 若挑选的油箱剩余油量不足，则选择下一个能使得收益最大的油箱。

第二部分，计算供油油箱各自的供油速度：

1. 对于确定的油箱，计算各自的供油速度。首先，对于从油箱 2 5 选出的两个油箱 p, q ，其供油速度之和不能少于计划耗油。我们在此利用网格搜索，将这个时刻的计划耗油分成 1000 份， p 取其中 i 份， q 取其中 $1000 - i$ 份。同时各自的速度要满足输油上限和剩余油量的约束。不断遍历 i ，计算在不同配比下的质心坐标和飞行器质心距离该时刻理想质心的距离。最后选择能使得距离最小的速度配比作为两个油箱各自的速度。
2. 对于从 1 号 6 号油箱中选出来的油箱 r ，将其上限速度分为 1000 份，从 1 份开始不断增加其速度，计算相应的质心以及飞行器质心距离当前时刻理想质心的距离，最后选

择能使得距离最小的速度作为油箱 r 的供油速度。因为这种油箱是给别的油箱供油，所以这个速度同时还要满足不能使得目标油箱油量超出上限的约束。

主要步骤如下：

Step 1: 记第 60 秒的理想质心位置为 $target$ 。对于油箱 1, 6, 分别只令其中一个油箱 r 供油 0.0001 个单位，此时第 r 个油箱的油量为 $tank[r] - 0.0001$ ，计算此时新的飞行器质心与理想质心的欧式距离 $d = dist(new, target)$ 。

Step 2: 将 (d, r) 加入表格 $list_r$ 中，此时 $list_r$ 中有两个组合。将 $list_r$ 中的两个距离 d 由小到大排序。

Step 3: 选取表格 $list_r$ 中的第一个 r ，判断油箱 r 中的剩余油量是否小于 $V/1000$ ，若小于，输出 $list_r$ 中的第二个 r ，若不小于，输出表格 $list_r$ 中的第一个 r 。

Step 4: 对于油箱 2、3、4、5，分别令其中一个油箱 p 向发动机供油 0.0001 个单位，此时所选油箱的油量为 $tank[p] - 0.0001$ ，计算此时飞行器质心与理想质心的距离 $d = dist(new, target)$ 。

Step 5: 将 (d, p) 加入表格 $list_p$ 中，此时 $list_p$ 中有四个组合。此将 $list_p$ 中的四个距离 d 由小到大排序。按照 d 的大小，选取当前序列中第一个和第二个油箱标记为 p 和 q 。

Step 6: 通过网格搜索供油速度 V_p, V_q 。

Step 7: 判段此时 p 油箱和 q 油箱的油量是否同时满足 $V_p + V_q \geq V$ ，且油箱 p 或 q 中的剩余油量大于于 $V/1000$ ，其中 V 为发动机计划耗油。若满足，则进入 Step 9。若不满足，则进入 Step 8。

Step 8: 更新 p, q 为表格 $list_p$ 中的第 i 个和第 j 个油箱，(i, j 为序列中次优的两个油箱)，返回 Step 6。

Step 9: 输出油箱 p ，油箱 q ，和油箱 r 。

图21为基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法流程图。

4.3.3 问题二求解结果

我们通过比较模拟退火算法与基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法的结果，发现本文提出的基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法的结果在运行过程中精度更高，并且可以在较短时间内获得更好的规划结果。具体求解结果如下：

飞行器飞行过程中 6 个油箱各自供油的速度曲线如下图22所示

飞行器飞行过程中 4 个主油箱总供油的速度曲线如下图23所示。

求得的飞行器瞬时质心与理想质心变化曲线如图24所示。求得的飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 **0.09919274257628276** 米。

4 个主油箱的总供油量为 **7.600407311594358** 立方米。

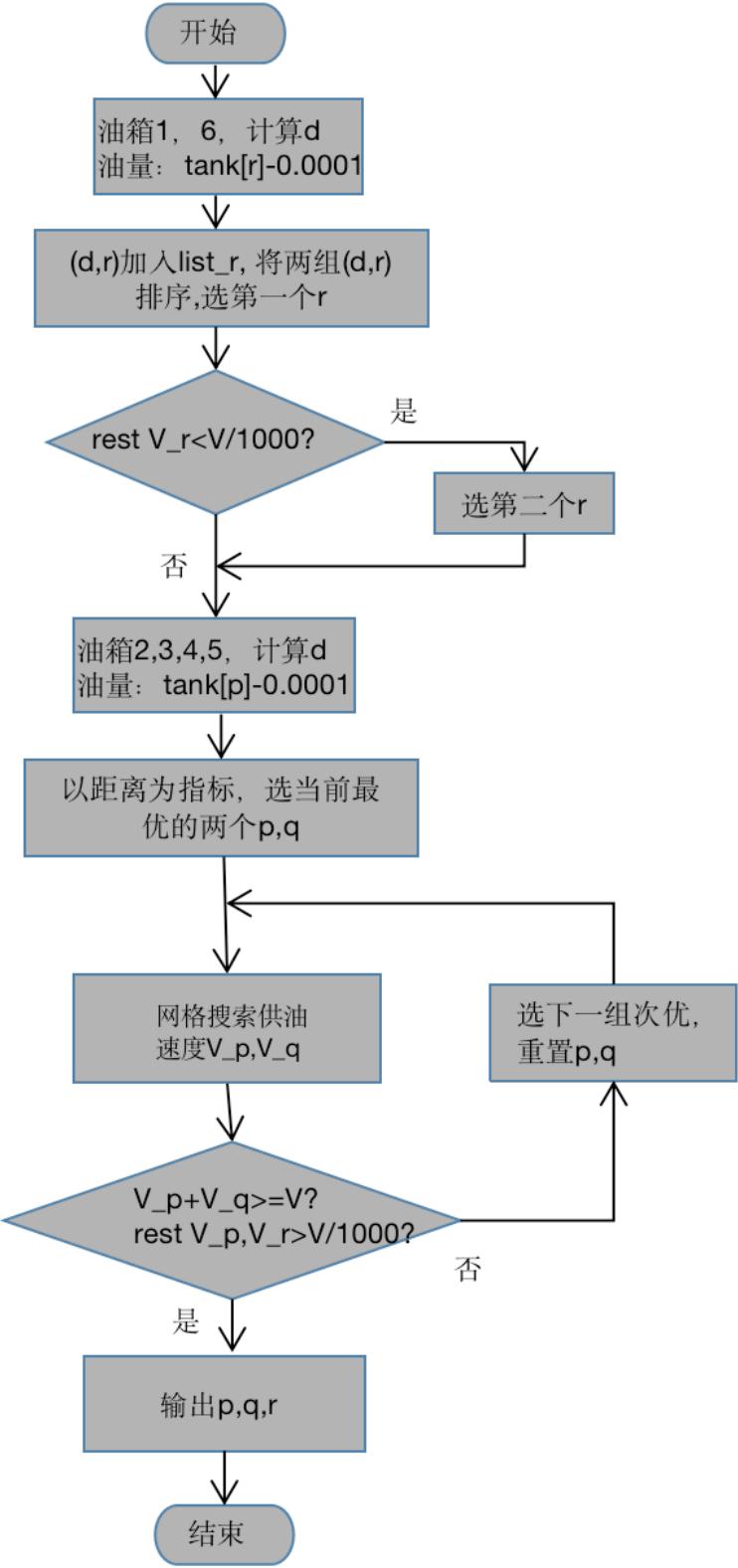
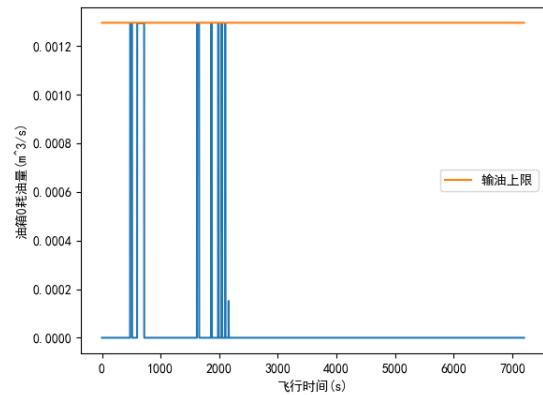
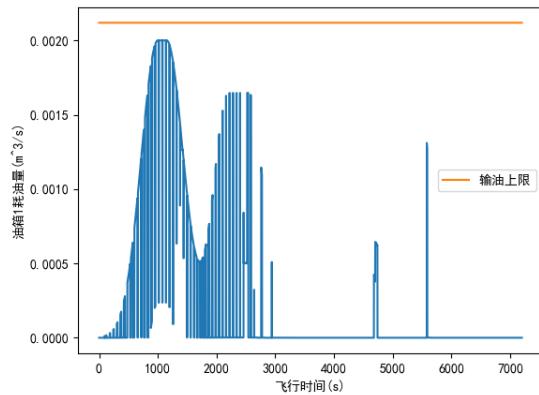


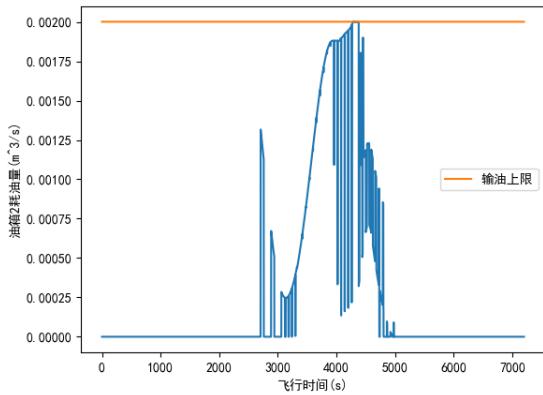
图 21 基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法流程图



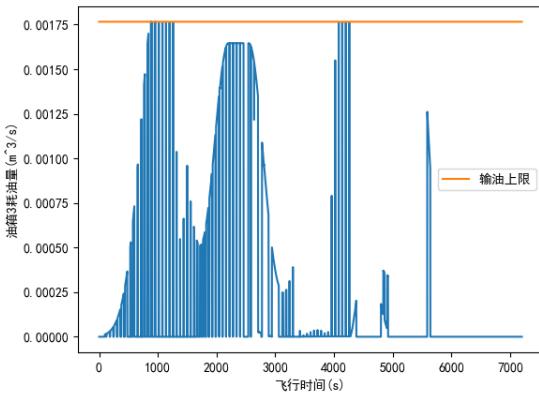
(a) 油箱 1



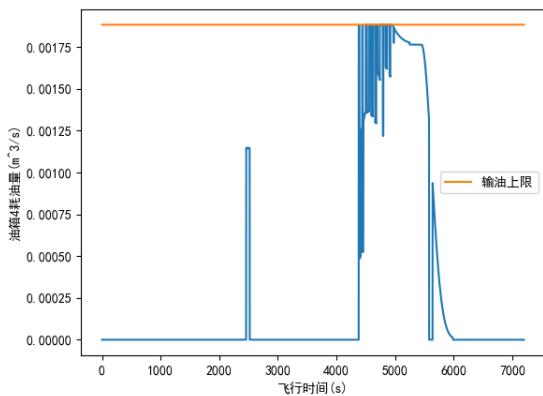
(b) 油箱 2



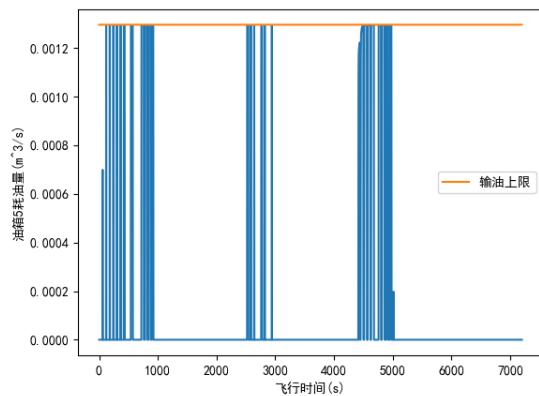
(c) 油箱 3



(d) 油箱 4



(e) 油箱 5



(f) 油箱 6

图 22 飞行器飞行过程中 6 个油箱各自供油的速度曲线

6 个油箱的供油速度数据置于附件 6 中。

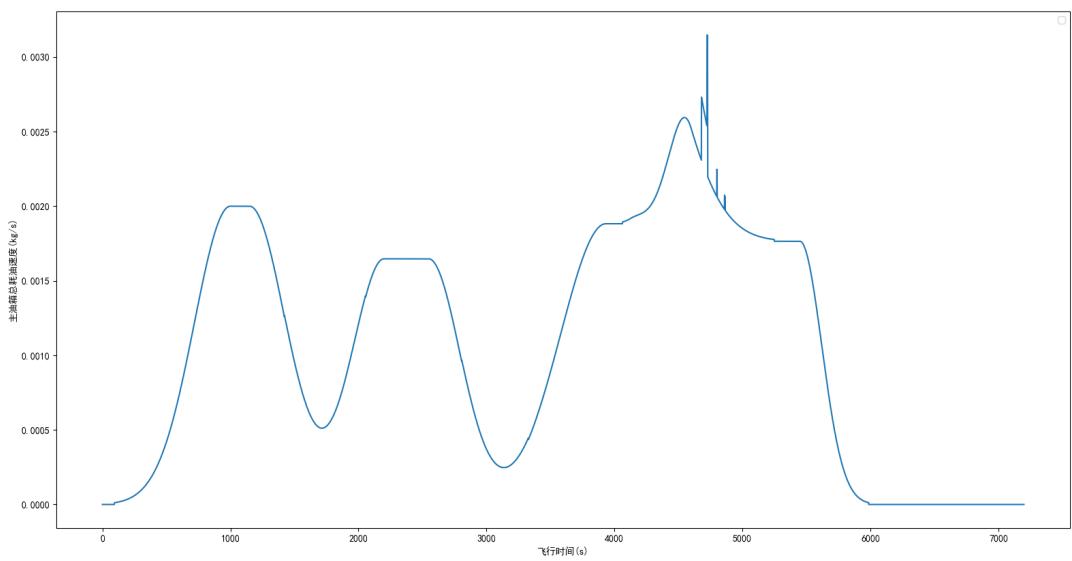


图 23 飞行器飞行过程中 4 个主油箱总供油速度曲线

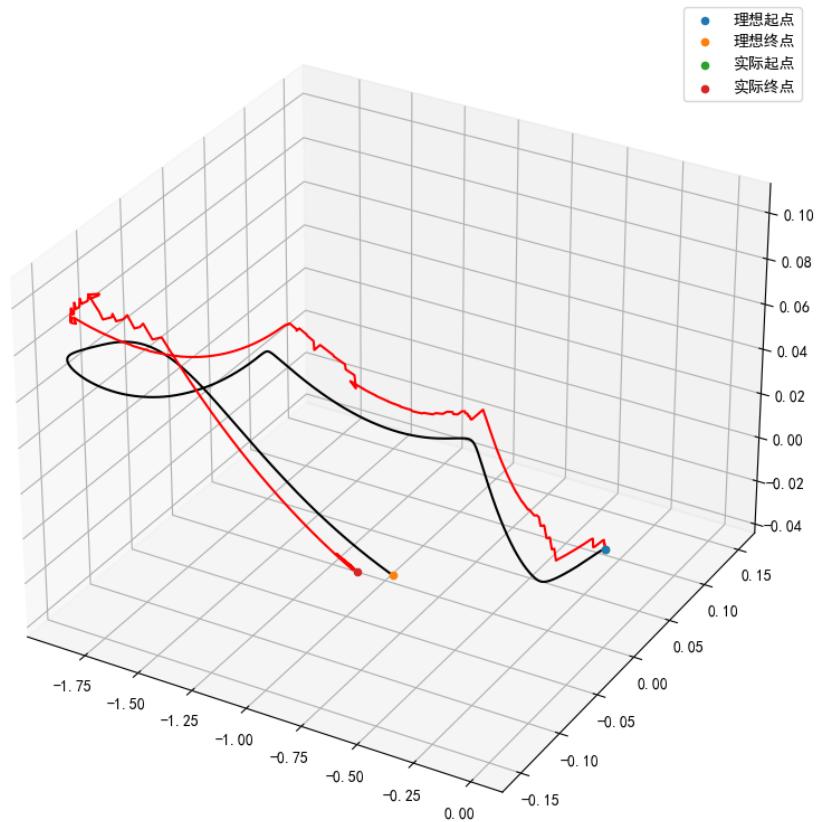


图 24 飞行器瞬时质心与理想质心变化曲线

5. 问题三

5.1 问题描述与分析

问题三是在问题二的基础上考虑每个油箱的初始油量未定且任务结束时剩余燃油总量至少为 $1m^3$, 实现飞行器每一时刻的质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与理想质心位置 $\vec{c}_2(t)$ 的欧氏距离的最大值达到最小。

根据 $m = \rho g$, 任务结束时剩余燃油总量至少为 $1m^3$, 则飞行期间总供油量应满足

$$\sum_{i=2}^5 \sum_{t=1} K_i(t) v_i(t) \leq \sum_{i=1} m_i(0) - 850.$$

其他条件同问题 2 中的分析。

5.2 模型建立

问题三可以写作优化问题 (21), 使得目标方程最小化

$$\begin{aligned} \min \quad & \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_2(t)\|_2, \\ \text{s.t.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v_1(t) \leq 1.1, v_2(t) \leq 1.8, v_3(t) \leq 1.7, \\ v_4(t) \leq 1.5, v_5(t) \leq 1.6, v_6(t) \leq 1.1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \sum_{i=2}^5 K_i(t) \leq 2, \\ 0 \leq K_1(t) + K_6(t) \leq 1, \end{array} \right. \\ \sum_{i=2}^5 \sum_{t=1} K_i(t) v_i(t) \leq \sum_{i=1} m_i(0) - 850, \\ \sum_{i=2}^5 K_i(t) v_i(t) \geq \bar{v}(t). \end{array} \right. \end{aligned} \quad (21)$$

图25给出了发动机耗油速度曲线:

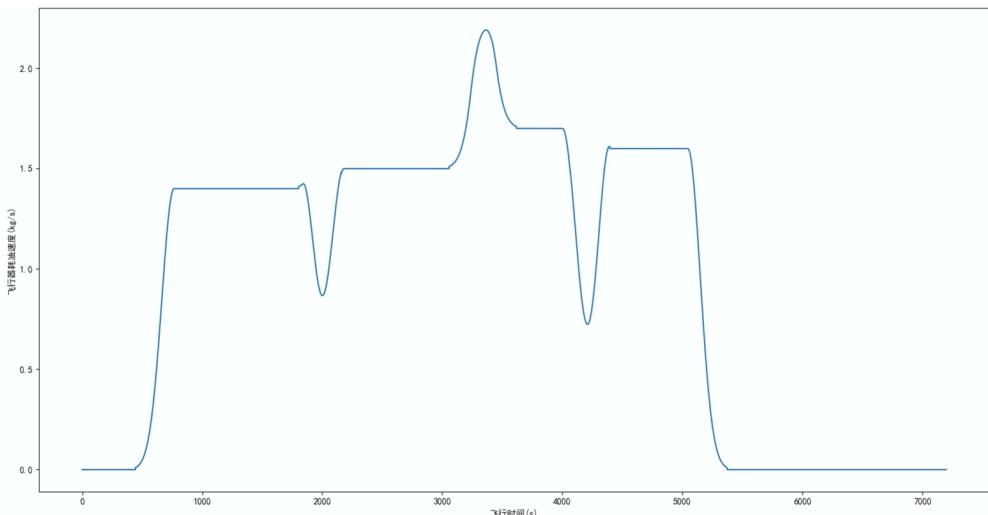


图 25 发动机耗油速度曲线

5.3 模型求解与分析

5.3.1 算法设计

本问题与问题二最大的不同在于初始油量的选择，若已知初始油量，则可以按照算法的过程对瞬时质心与理想质心的最大欧式距离进行优化。我们首先说明初始油量的选取。其主要思想如下：

1. 先令油箱全加满油，求得此时飞行器的质心。
2. 利用第二问的算法，目标恒设为问题3中理想质心的初始点，令主油箱每总供油速度为0.0001立方米每秒，不断迭代计算使得飞行器质心向理想质心的初始点靠拢。
3. 当飞行器质心与理想质心的初始点足够接近（本问题中我们认为距离小于0.001时为足够接近），停止迭代。此时各个油箱剩余的油量即为问题三中的初始油量。

具体步骤如下：

Step 1: 先令油箱全加满油，求得此时飞行器的质心。设目标恒设为问题三中理想质心的初始点。令主油箱每总供油速度为0.0001立方米每秒，计算瞬时飞行器质心坐标与理想质心的距离 $d = dist(start, target)$ 。

Step 2: 利用第二问的算法，不断迭代计算使得飞行器质心向理想质心的初始点靠拢。

Step 3: 判断 $d < 0.001$ 是否成立，若成立，停止迭代，进入 Step 4。若不成立，返回 Step 2。

Step 4: 判断此时六个油箱剩余燃油总量是否剩余大于等于1立方米，若是，进入 Step 5。若不是，则返回 Step 2。

Step 5: 输出此刻每个油箱的剩余油量，记为理想初始油量。

初始油量的选取流程图如图26所示：

在选取理想初始油量后，按照问题二中设计的基于贪婪思想、网格搜索及交叉验证思想的改进算法求解优化问题(21)。

5.3.2 问题三求解结果

6个油箱的初始载油量的初始载油量如下表3所示：

表3 6个油箱的初始载油量 (单位: m^3)

1号油箱	2号油箱	3号油箱	4号油箱	5号油箱	6号油箱
0.2098	1.8531	2.376	2.652	2.4131	1.2

飞行器飞行过程中4个主油箱总供油的速度曲线如下图27所示。

飞行器飞行过程中6个油箱各自供油的速度曲线如图28所示

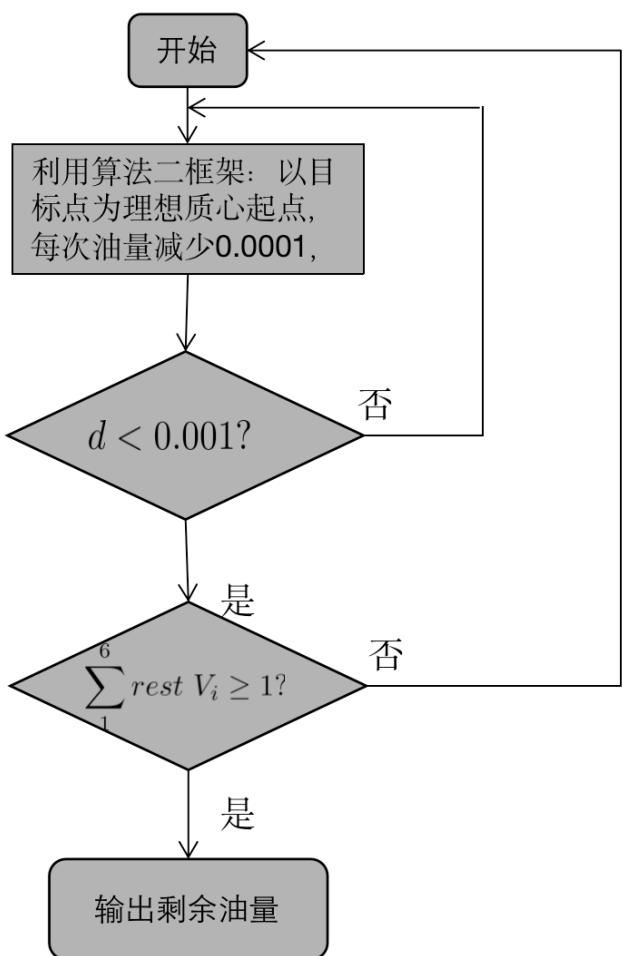


图 26 初始油量的选取流程图

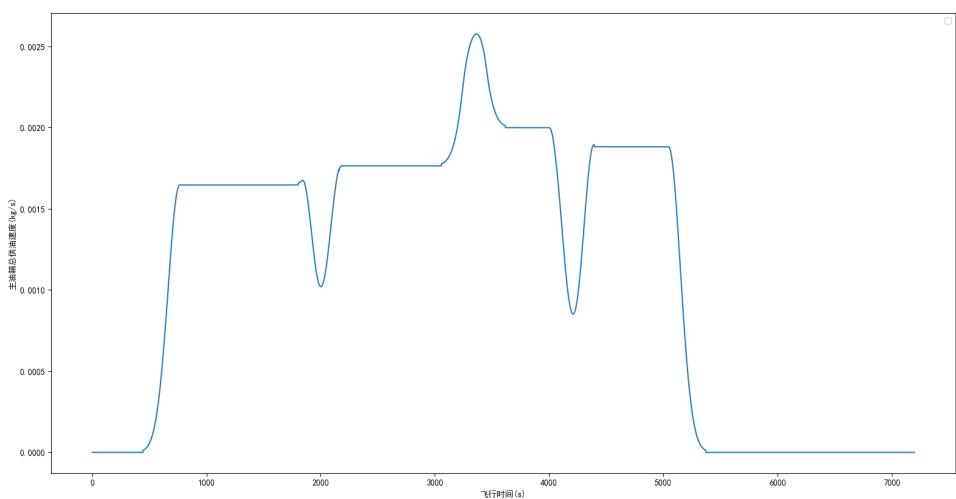
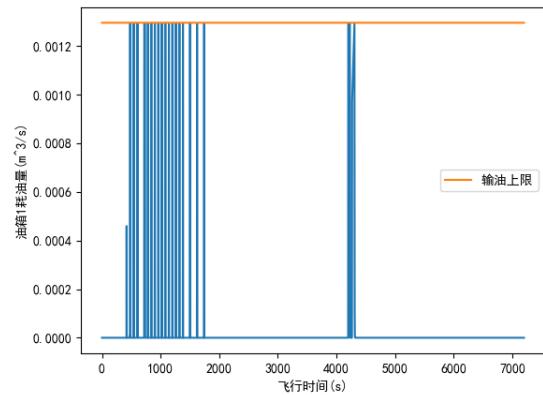
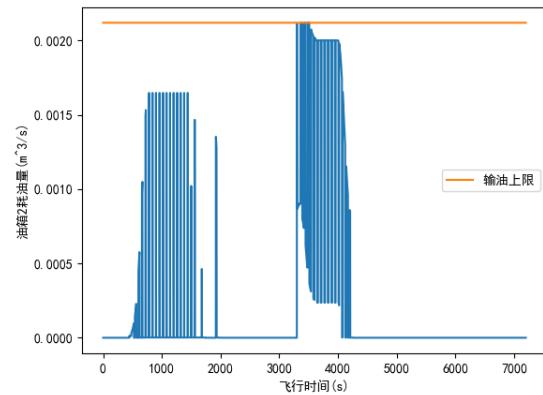


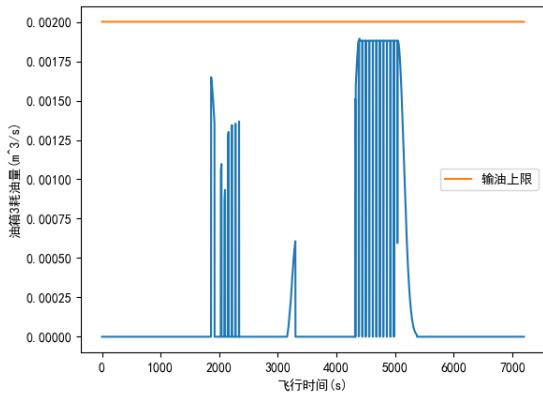
图 27 飞行器飞行过程中 4 个主油箱总供油速度曲线



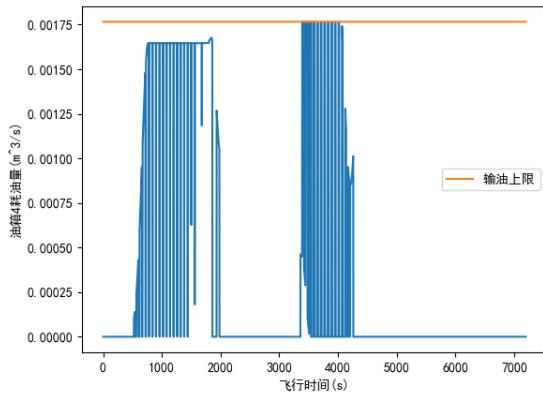
(a) 油箱 1



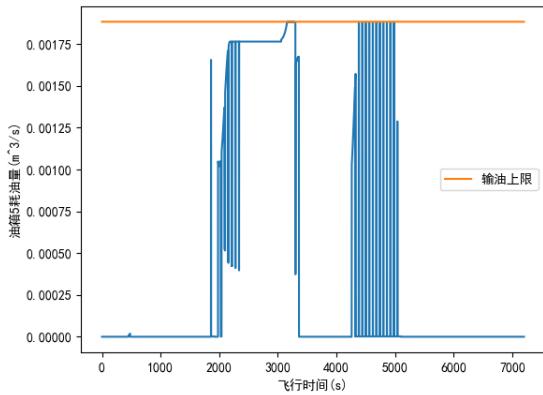
(b) 油箱 2



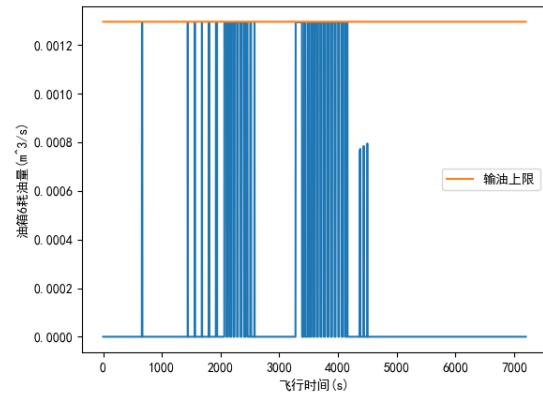
(c) 油箱 3



(d) 油箱 4



(e) 油箱 5



(f) 油箱 6

图 28 飞行器飞行过程中 6 个油箱各自供油的速度曲线

求得的飞行器瞬时质心与理想质心变化曲线如图29所示：

飞行器瞬时质心与理想质心距离的最大值为 **0.10587042346409105** 米。

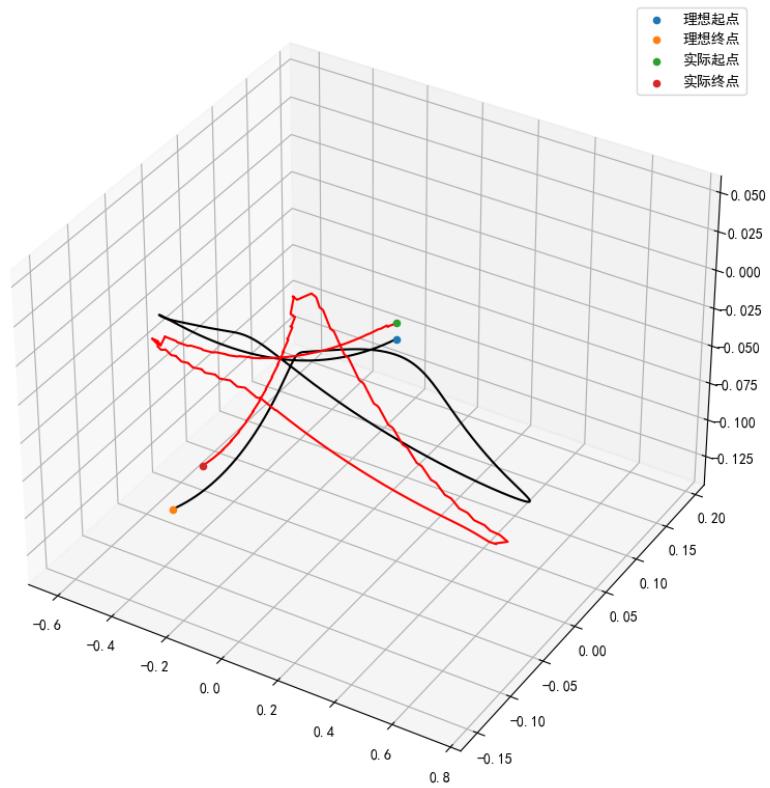


图 29 飞行器瞬时质心与理想质心变化曲线

4 个主油箱的总供油量为 **8.00608784550408** 平方米。

6 个油箱的供油速度数据置于附件 6 中。

6. 问题四

6.1 问题描述与分析

问题四是在问题二的基础上考虑飞行器俯仰角随时间变化，实现飞行器每一时刻的质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与飞行器(不载油)质心 $\vec{c}_0(t)$ 的最大距离达到最小。即

$$\min \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_0(t)\|_2$$

这里的问题在于飞行器俯仰角发生变化时，惯性坐标系与机体坐标系不重合，因此在建模过程中需要进行机体坐标系与惯性坐标系的转换，相关内容我们在问题1中已经分析过。

图30给出了飞行器耗油速度曲线。

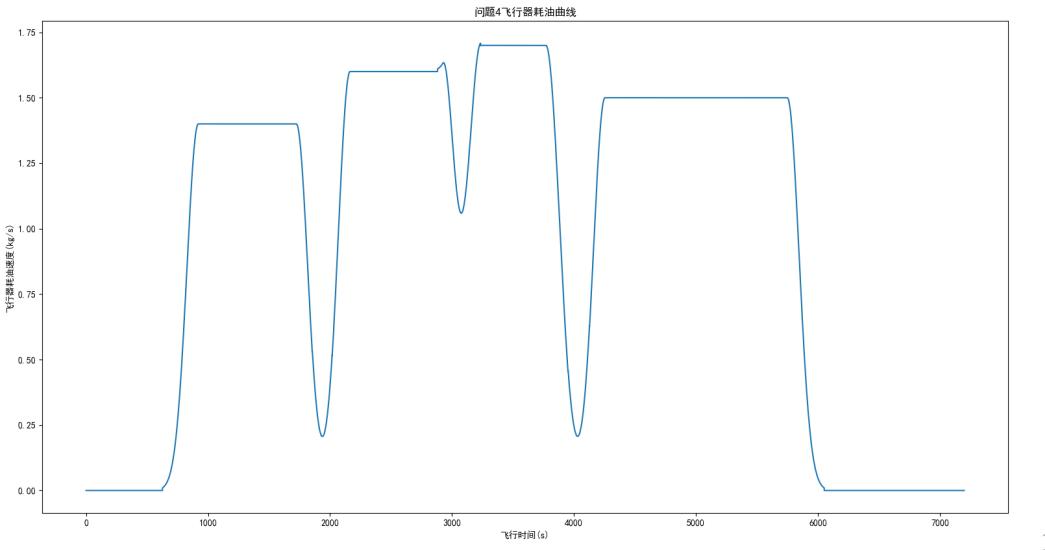


图 30 飞行器耗油速度曲线

6.2 模型建立

类似于问题二的分析，在机体坐标系下，问题四可以写作优化问题(22)，使得目标方程最小化

$$\begin{aligned} & \min \quad \max_t \|\vec{c}_1(t) - \vec{c}_0(t)\|_2, \\ \text{s.t. } & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} v_1(t) \leq 1.1, v_2(t) \leq 1.8, v_3(t) \leq 1.7, \\ v_4(t) \leq 1.5, v_5(t) \leq 1.6, v_6(t) \leq 1.1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \sum_{i=2}^5 K_i(t) \leq 2, \\ 0 \leq K_1(t) + K_6(t) \leq 1, \\ \sum_{i=2}^5 \sum_{t=1}^5 K_i(t) v_i(t) \leq \sum_{i=1}^5 m_i(0), \\ \sum_{i=2}^5 K_i(t) v_i(t) \geq \bar{v}(t). \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (22)$$

飞行器俯仰角随时间变化曲线如图31所示。

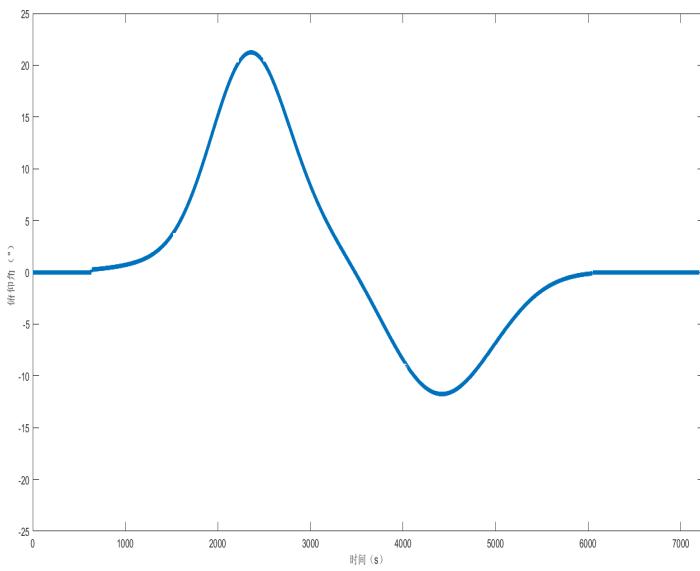


图 31 飞行器俯仰角随时间变化曲线

6.3 模型求解与分析

6.3.1 求解算法设计

由于问题的目标是最小化瞬时质心位置 $\vec{c}_1(t)$ 与飞行器(不载油)质心 $\vec{c}_0(t)(0,0,0)$ 的最大距离，因此在算法中每个瞬时时刻的距离判断只需考虑瞬时质心的坐标。在问题二供油策略规划的基础上，计算飞行器瞬时质心时考虑飞行器仰俯角随时间的变化。我们结合问题一与问题二中提出的迭代计算使得飞行器质心向理想质心的初始点靠拢，提出下列算法用于求解问题四，具体步骤如下：

Step 1: 对于油箱 1, 6, 分别只令其中一个油箱 r 供油 0.0001 个单位，此时第 r 个油箱的油量为 $tank[r] - 0.0001$ ，根据时刻仰俯角的变化，计算此时刻变化油箱在机体坐标系下的质心位置坐标。

Step 2: (1) 将机体坐标系下此油箱的质心位置坐标转化为惯性坐标系下的质心位置坐标。(2) 根据质心计算公式计算在此时刻惯性坐标系下飞行器的质心位置坐标。(3) 将惯性坐标系下飞行器的质心位置坐标转化为机体坐标系下飞行器的质心位置坐标，记新的质心位置为 new 。

Step 3: 计算机体坐标系下新的飞行器质心与空载质心在机体坐标系下的欧式距离 $d = dist(new, target)$ 。

Step 4: 将 (d, r) 加入表格 $list_r$ 中，此时 $list_r$ 中有两个组合。将 $list_r$ 中的两个距离 d 由小到大排序。

Step 5: 选取表格 $list_r$ 中的第一个 r , 判断油箱 r 中的剩余油量是否小于 $V/1000$, 若小于, 输出 $list_r$ 中的第二个 r , 若不小于, 输出表格 $list_r$ 中的第一个 r 。

Step 6: 对于油箱 2、3、4、5, 分别令其中一个油箱 p 向发动机供油 0.001 个单位, 此时所选油箱的油量为 $tank[p] - 0.0001$ 根据时刻仰俯角的变化, 计算此时刻变化油箱在机体坐标系下的质心位置坐标。

Step 7: (1) 将机体坐标系下此油箱的质心位置坐标转化为惯性坐标系下的质心位置坐标。(2) 根据质心计算公式计算在此时刻惯性坐标系下飞行器的质心位置坐标。(3) 将惯性坐标系下飞行器的质心位置坐标转化为机体坐标系下飞行器的质心位置坐标, 记新的质心位置为 new 。

Step 8: 计算此时飞行器质心与空载质心的距离 $d = dist(new, target)$ 。

Step 9: 将 (d, p) 加入表格 $list_p$ 中, 此时 $list_p$ 中有四个组合。此将 $list_p$ 中的四个距离 d 由小到大排序。按照 d 的大小, 选取当前序列中第一个和第二个油箱标记为 p 和 q 。

Step 10: 判段此时 p 油箱和 q 油箱的油量是否满足 $V_p + V_q \geq V$, 其中 V 为发动机计划耗油。若满足, 则进入下一步。若不满足, 则跳至 Step 12。

Step 11: 判断油箱 p 或 q 中的剩余油量是否小于 $V/1000$, 若不小于, 则跳至 Step 13。若小于, 进入下一步。

Step 12: 更新 p, q 为表格 $list_p$ 中的第 i 个和第 j 个油箱, (i, j 为序列中依次最小的两个油箱), 返回 Step 11。

Step 13: 输出油箱 p , 油箱 q , 和油箱 r 。

6.3.2 问题四求解结果

基于以上算法, 我们求得如下结果:

飞行器飞行过程中 6 个油箱各自供油的速度曲线如下图32所示

飞行器飞行过程中 4 个主油箱总供油的速度曲线与计划耗油速度曲线如下图33所示

飞行器瞬时质心与飞行器(不载油)质心最大距离偏差为 **0.9953789687** 米。

4 个主油箱的总供油量为 **8.043245684** 立方米。

6 个油箱的供油速度数据置于附件 6 中。

此方案不满足计划耗油的约束, 且飞行器瞬时质心与飞行器空载质心的最大距离偏差较大, 算法有待改进。

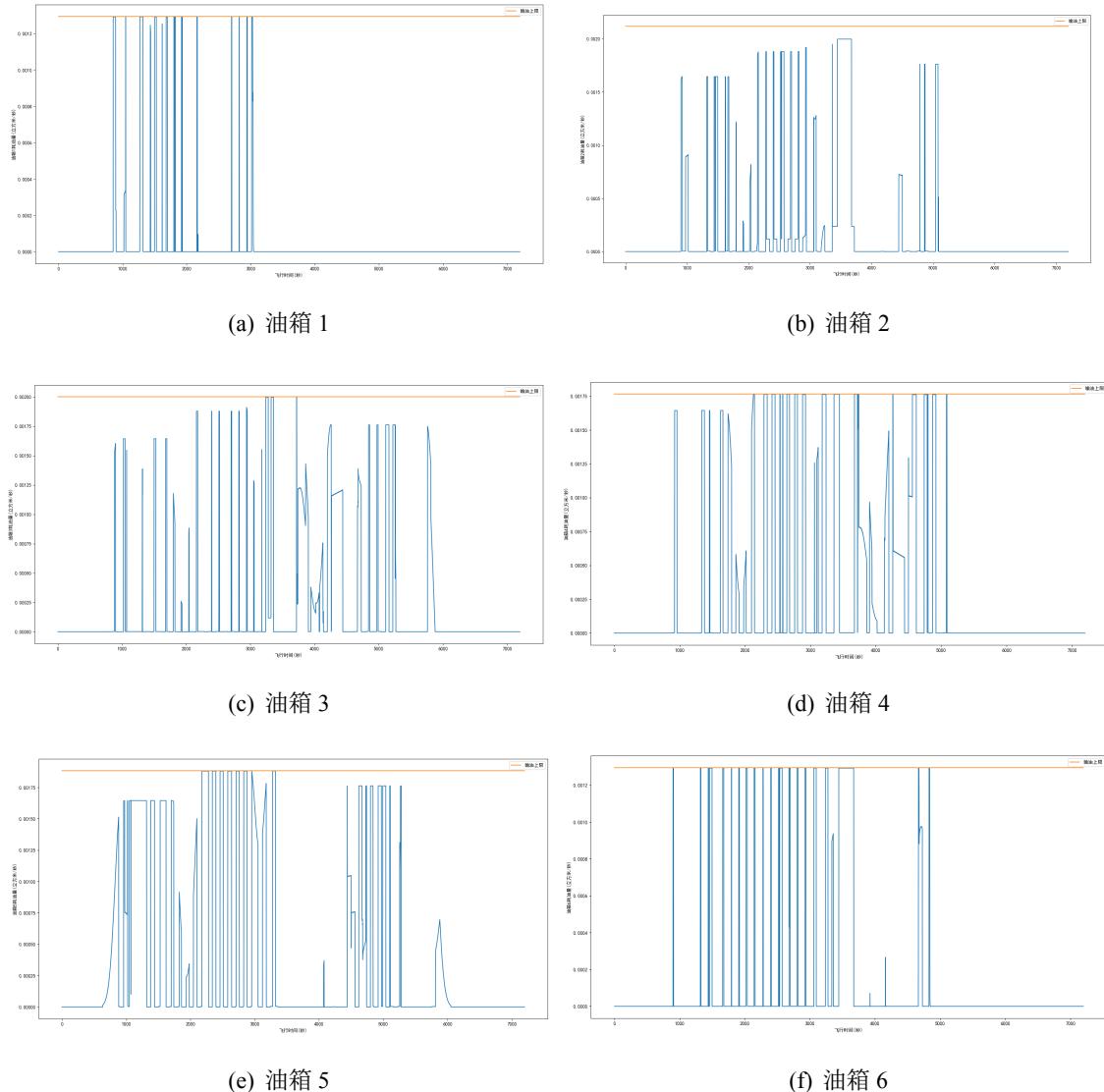


图 32 飞行器飞行过程中 6 个油箱各自供油的速度曲线

7. 模型的评价

7.1 模型的优点

1. 所建的模型较为全面地刻画出了问题的目标和约束，为模型的求解提供了基础。
2. 在模型的求解过程中，尽可能丰富地搜索了可行解，从而保证了解的最优性。
3. 对于约束复杂的飞行器质心平衡供油策略组合优化问题，采用了逐步优化策略，使得建模思路更清晰，求解更有效果。

7.2 模型的缺点

1. 在求解过程中，为了满足每个油箱一次供油的持续时间不少于 60 秒，我们以 60 秒为一个阶段，其过程中保证只有选定的油箱供油，持续时间以 60 秒为单位，这可能导致

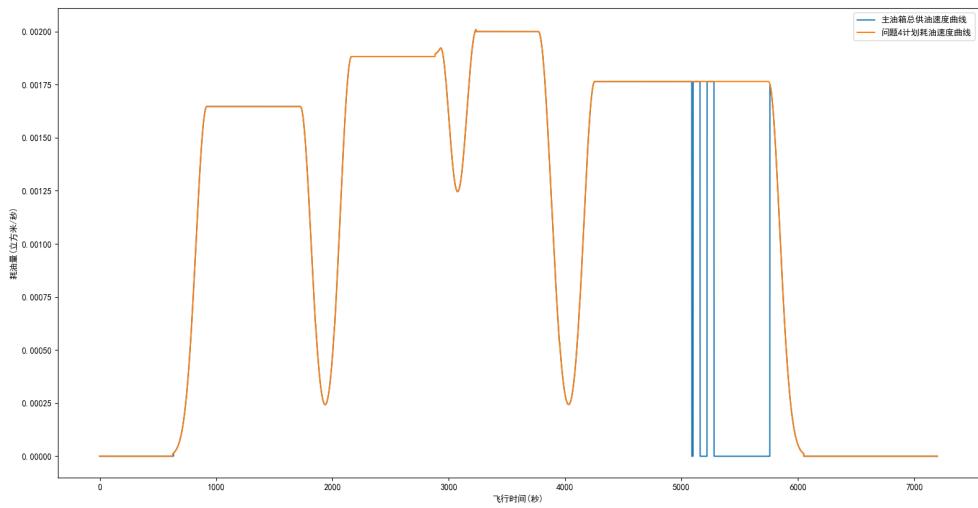


图 33 飞行器飞行过程中 4 个主油箱总供油速度曲线

- 结果有一定的误差。
2. 在问题四中，计算结果显示飞行器瞬时质心与飞行器空载质心的最大距离偏差较大，这可能是由于对俯仰角的考虑不够细致，算法有待改进。

7.3 模型的推广

我们提出的基于贪婪思想，网格搜索交叉验证思想的改进算法不仅可以应用于本文飞行器质心平衡供油策略优化研究，还可以应用到多个领域，例如机械运输，路径规划等。

参考文献

- [1] 无人机运动学控制中的坐标系，及惯性坐标系与机体坐标系之间的矩阵转换欧拉角.
https://blog.csdn.net/qq_35379989/article/details/102726614, 2019. 10.
- [2] 数学辞海编辑委员会. 数学辞海 · 第一卷: 中国科学技术出版社, 2002.08.
- [3] 张明朗, 袁维红. 建筑力学上: 中国水利水电出版社, 2015.07: 第 59 页.
- [4] 龙浩. 飞机综合燃油控制系统设计研究 [J]. 制造业自动化, 2011, 33(012):40-42,55.
- [5] R amos R H, Penin L F, Parigini C, et al. Flying qualitiesanalysis for reentry vehicles:methosology and application[R]. 2011, AIAA-2011-6344.
- [6] 康立山, 谢云, 尤矢勇. 非数值并行算法: 模拟退火算法 [M]. 科学出版社, 1994.
- [7] 周明, 孙树栋, 彭炎午. 基于遗传模拟退火算法的机器人路径规划 [J]. 航空学报, 1998(01):119-121.
- [8] 方再根. 计算机模拟和蒙特卡洛方法 [M]. 北京工业学院出版社, 1988.
- [9] 王健峰, 张磊, 陈国兴, 等. 基于改进的网格搜索法的 SVM 参数优化 [J]. 应用科技, 2012, 000(003):28-31.
- [10] 陈功, 徐明兴, 王文正, 等. 基于代理模型的升力式再入飞行器质心位置优化 [J]. 飞行力学, 2019, 37(01):69-73.
- [11] 杨自鹏, 刘敏, 张群, 等. 双子微纳飞行器质量特性测试及质心控制技术研究 [J]. 航天制造技术, 2019, 000(002):28-31,37.
- [12] 赵钧. 飞行器动平衡测试技术的实验研究 [D]. 哈尔滨工业大学, 2007.
- [13] 李锋, 白鹏, 石文, 李建华. 微型飞行器低雷诺数空气动力学. 力学进展, 2007, 37(2), 257-268.
- [14] 刘炜, 刘峰, 倪阳咏, 等. 航天复杂产品智能化装配技术应用研究 [J]. 宇航总体技术, 2018, 1(2): 33~36