

QFRM 中心案例 (一): SVIX 市场波动指数的设计、 实证和软件产品

王夕阳、刘依凡、钱天赐、宋馨雨、程刚、黄勉*

上海财经大学数量金融与风险管理中心

摘 要

波动率指数能够反映投资者对未来一段时间市场情绪和市场波动的预期,是金融市场重要的风险指标。近年来国内金融市场衍生品不断创新,各项政策推动了期权市场的蓬勃发展。投资者和投资机构对权威性的波动率指数有巨大需求。本项目基于实时期权合约数据,编制和发布金融市场波动指数,填补市场空缺,为投资者和投资机构提供权威的风险参考指标。编制方案基于方差互换原理并采用插值方法,有效避免了传统编制方法在特定时间出现大幅度震荡的问题。指数在日度与日内、历史回测与实时测试中表现优异,大部分时间内波动指数与原官方发布的中国波指走势基本一致,数值误差均在合理范围内。在特定时间内,原上交所发布的波动指数可能存在较大误差,本项目提出的新波动指数能够更为真实客观地反映市场情绪和市场波动。

关键字: 波动率指数、隐含波动率、方差互换、插值、误差上界

*项目负责人,上海财经大学统计与管理学院。邮箱: huang.mian@mail.shufe.edu.cn; 电话: 021-65901057。

1 案例目标

上海财经大学数量金融与风险管理中心（以下简称 QRFM 中心）在上海财经大学数据科学与统计研究院的支持下，基于 50ETF/300ETF 期权合约市场实时数据，参考并改进了由上海证券交易所发布的中国波动率指数 iVX 编制方案^[1]，设计了更为稳健的市场波动率指数，即 SUFE-QRFM Volatility Index（以下简称 SVIX）。SVIX 的提出旨在更加客观地反映交易者对未来 30 日的市场情绪和市场波动预期，为投资和管理机构提出更加准确权威的市場风险变化参考指标。

SVIX 指数的设计遵循以下五项指导原则：

- **科学性**：严格依据方差互换公式进行编制；
- **稳健性**：在 iVX 方案的基础上增加了异常值与空值处理，线性插值平滑等数据预处理，可防止短时间内指数由加挂合约等外部因素导致的大幅度震荡和指数失真；
- **可靠性**：SVIX 历史回测与 iVX 误差基本在 $\pm 5\%$ 以内，实时结果与 iVX 误差基本在 $\pm 1\%$ 以内，测试 6 个月内运行稳定、可靠；
- **简单性**：算法简单且计算效率高，避免了各种复杂的事后修正和人工干预；
- **开源性**：算法公开透明，依据公开实时数据，结果易于验证和复现。

2 案例背景

波动率指数（Volatility Index）基于指数期权隐含波动率计算得到，能够反映投资者对未来 30 天市场风险水平的预期。较高的指数往往预示着市场较大的风险，尤其当市场大幅下跌时会急剧升高，因此又被称为“恐慌指数”。波动率指数作为反映投资者情绪和市场波动的重要指标，能够提供及时的市場动向和风险指导。波动率指数至今经过了二十多年的发展与完善。1993 年，美国芝加哥期权交易所（CBOE）根据 Whaley(1993)^[2]提出的方法首次发布了波动率指数，即旧 VIX 指数，该指数以 S&P100 指数为标的资产，采用最接近平价期权的共八个看涨期权和看跌期权价格分别计算近月和次近月隐含波动率，并将隐含波动率进行加权得到旧 VIX 指数。2003 年，CBOE 修改编制规则，以 S&P500 指数作为标的资产，将八个平价期权扩展至所有价外期权，采用方差互换原理^[3]计算新 VIX 指数，该指数更加贴合市場情况，能够更准确地反映投资者对未来 30 日市場波动的预期。

国内期权市場起步较晚。2015 年 2 月 9 日，上证 50ETF 期权作为国内第一支场内期权正式推出，同年，上交所和中证指数公司推出我国第一个基于真实交易的中国波动率指数 iVX^[1]，该指数参考新 VIX 指数的编制方法，采用 50ETF 为标的资产，基于方差互换原理计算波动率。iVX 指数于 2016 年 11 月 28 日正式发布，于 2018 年 2 月 22 日以技术升级为由停止发布，该停发行为是为了抑制市場的自反馈，在一定程度上可视为对市場的保护。

随着国内金融市場逐渐规范化，期权市場参与者逐渐增多，交易趋于稳定。2019 年，市場大盘平均波动率约为 20%。经国务院同意，2019 年 11 月 8 日证监会正式启动扩大股票股指期货期权试点工作，批准上交所、深交所上市沪深 300ETF 期权，中金所上市沪深 300 股指期货期权，推动期权市場发展进程。与此同时，场内期权和场外期权市場蓬勃发展且不断完善，多个商品期

权已经上市并交易活跃。期权交易在我国经济金融活动中占有较为重要的位置，而基于期权合约设计的波动率指数作为一种客观的风险度量指标，能够帮助投资者和投资机构更准确地了解未来市场情绪和投资风险。

3 SVIX 指数设计方案

SVIX 指数主要依据方差互换计算原理得到（详见附录A）。指数设计在上交所原有规则的基础上增加了线性内插值规则以填补执行价，从而构造更加稳健的波动率指数（插值细节和相关实证分析详见附录B）。本项目分别基于 50ETF 和 300ETF 期权，计算和发布对应波动率指数：SVIX_50e 和 SVIX_300e。本产品提供历史日度收盘指数与日内高频指数（详见章节6）。指数编制方案具体如下。

3.1 指数名称和简写

指数名称：上财 QRFM 中心金融市场波动率指数

简称：上财 QRFM 波指

英文名称：SUFE-QRFM Volatility Index

英文简写：SVIX

3.2 符号含义

σ ：隐含波动率；

σ_1 ：近月波动率；

σ_2 ：次近月波动率；

T ：期权距离到期日的时间，单位为年。计算公式为：

$$T = \frac{\text{现在时间距离到期日当天下午 3 点的分钟数}}{365 \text{ 天的总分钟数}}$$

T_1 ：近月期权合约的到期时间；

T_2 ：次近月期权合约的到期时间；

T_7 ：以年为单位的一周：7/365；

T_{30} ：以年为单位的一月：30/365；

R ：无风险利率，以三年定期存款利率为基准；

K_i ：将真实合约按照执行价从小到大排列，第 i 个真实合约的执行价（ $i = 1, 2, \dots, n$ ）；

K_{ij} ：第 i 个真实合约和第 $i + 1$ 个真实合约之间插入的第 j 个虚拟合约的执行价；

K_l^* ：所有真实合约执行价 K_i 和虚拟合约执行价 K_{ij} 由小到大排列，记为 $K_l^* (l = 1, 2, \dots, N)$ ；

ΔK_l^* ：执行价 K_l^* 对应的执行价间隔，计算公式为：

$$\begin{aligned}\Delta K_1^* &= K_2^* - K_1^* \\ \Delta K_l^* &= \frac{K_{l+1}^* - K_{l-1}^*}{2} \quad l = 2, 3, \dots, N-1 \\ \Delta K_N^* &= K_N^* - K_{N-1}^*\end{aligned}$$

S_0 ：标的资产现价；

K_0 ：最接近远期指数水平 $S_0 e^{RT}$ 的执行价；

$P(K_i)$ ：执行价 K_i 对应的真实期权价格；

$P^*(K_l^*)$: 执行价 K_l^* 对应的插值后的期权价格, $P_{put}^*(K_l^*)$ 代表认沽期权价格, $P_{call}^*(K_l^*)$ 代表认购期权价格, 计算公式为:

$$P^*(K_l^*) = \begin{cases} P_{put}^*(K_l^*) & K_l^* < K_0 \\ P_{call}^*(K_l^*) & K_l^* > K_0 \\ \frac{P_{put}^*(K_l^*) + P_{call}^*(K_l^*)}{2} & K_l^* = K_0 \end{cases}$$

F : 由平价公式得到的远期指数水平。根据平价公式:

$$F = K_0 + e^{RT} [P_{call}^*(K_0) - P_{put}^*(K_0)]$$

3.3 方案细则

3.3.1 计算时间

日度数据由交易日收盘价计算得到。

日内数据由每隔 30 秒读取得到的实时交易数据计算得到。为避免由于收盘期间无挂单等原因导致的波动率计算结果不准确性及不稳定性, 本项目对高频波动率的计算时间进行以下设定:

$$9:30:08 - 11:29:38 \quad 13:00:08 - 14:56:38$$

3.3.2 期权价格读取规则

本项目采取上交所编制方案^[1]中设定的期权合约价格读取规则, 具体如下:

- 存在买卖报价和最新成交价, 若最新成交价处于买卖报价之间, 取最新成交价;
- 存在买卖报价和最新成交价, 若最新成交价处于买卖报价之外, 取买卖报价均值;
- 卖方报价不存在, 取买价与最新成交价的最大值;
- 买方报价不存在, 取卖价与最新成交价的最小值;
- 最新成交价不存在, 取买卖报价均值;
- 买卖报价均不存在, 取最新成交价。

真实期权合约执行价为 K_i , 每隔选定单位插入一张虚拟合约, 在第 i 张真实合约和第 $i+1$ 张真实合约之间进行线性插值, 第 j 个插值虚拟期权合约执行价记为 K_{ij} , 由线性插值计算得到的相应期权价格记为 $P^*(K_{ij})$ 。

3.3.3 插值处理

基于方差互换原理, 隐含波动率可采用上证 50ETF 或 300ETF 期权合约价格与执行价格计算得到。同时, 执行价格覆盖越充分, 波动率估计越准确, 然而, 在实际操作中, 我们仅能获取到较为离散的执行价。基于合理性和便于计算的原则 (详见附录B), SVIX 指数采用线性内

插值的方法以填补期权合约价格和执行价格，从而得到更加准确且稳健的波动率估计值。具体步骤如下：

- 读取真实期权合约共计 n 个，按照期权执行价格从小到大排列，得到按序排列的期权执行价格 K_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ，及其对应看涨期权价格 $P_{call}(K_i)$ 和看跌期权价格 $P_{put}(K_i)$ ；
- 在真实执行价 K_1 至 K_n 的范围内进行插值，执行价每间隔 0.01 插入一张虚拟合约，将第 i 个真实执行价 K_i 和第 $i+1$ 个真实执行价 K_{i+1} 之间插入的第 j 张虚拟合约执行价标记为 K_{ij} ，则

$$K_{ij} = K_i + 0.01 \cdot j \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, \dots, n_i, \quad n_i = \frac{K_{i+1} - K_i}{0.01} - 1;$$

- 采用线性插值方法填补虚拟合约执行价 K_{ij} 对应的期权价格，计算公式如下：

$$\begin{aligned} P_{call}^*(K_{ij}) &= \frac{K_{i+1} - K_{ij}}{K_{i+1} - K_i} \cdot P_{call}(K_i) + \frac{K_{ij} - K_i}{K_{i+1} - K_i} \cdot P_{call}(K_{i+1}) \\ P_{put}^*(K_{ij}) &= \frac{K_{i+1} - K_{ij}}{K_{i+1} - K_i} \cdot P_{put}(K_i) + \frac{K_{ij} - K_i}{K_{i+1} - K_i} \cdot P_{put}(K_{i+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

3.3.4 SVIX 指数计算

将真实合约执行价 K_i 与插入得到的虚拟合约执行价 K_{ij} 从小到大按序排列，执行价格标记为 K_l^* , $l = 1, 2, \dots, N$ ，其中 $N = n + \sum_{j=1}^{n-1} n_j$, n_j 为 K_i 与 K_{i+1} 之间的合约插值个数；期权价格标记为 $P^*(K_l^*)$ ，具体为：

$$P^*(K_l^*) = \begin{cases} P(K_i) & K_l^* = K_i \\ P^*(K_{ij}) & K_l^* = K_{ij} \end{cases} \quad (3)$$

即对真实合约采用真实期权交易价格，对虚拟合约采用基于线性插值方法(2)得到的虚拟价格。本项目参考 CBOE^[3] 和上交所规则^[1] 计算隐含波动率 σ ，公式如下：

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} e^{RT} P^*(K_l^*) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (4)$$

将近月波动率和次近月波动率分别标记为 σ_1 和 σ_2 。当近月合约到期时间大于等于一月时 ($T_1 \geq T_{30}$)，SVIX 取近月波动率 σ_1 乘以 100；当近月合约到期时间小于等于一周时 ($T_1 \leq T_7$)，SVIX 取远月波动率 σ_2 乘以 100；其余情况 SVIX 计算公式如下：

$$SVIX = 100 \times \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left[\frac{T_2 - T_{30}}{T_2 - T_1} \right] + T_2 \sigma_2^2 \left[\frac{T_{30} - T_1}{T_2 - T_1} \right] \right\} \times \frac{1}{T_{30}}} \quad (5)$$

4 SVIX 指数实证分析

由于上交所发布的 iVX 指数以 50ETF 为标，本项目的实证分析将同样采用 50ETF 期权数据，对 SVIX_50e 指数进行历史回测等深入分析。我们相信，SVIX_50e 指数编制方法的在实证数据中体现出的优异性及稳健性可以推广到使用相同方法编制的 SVIX_300e 指数，以及未来基于其他标的资产的波动指数。

4.1 日度指数历史回测

4.1.1 整体回测

本节进行日度整体回测比较。日度数据由 Wind 数据平台获取，包含 2016 年 12 月 5 日至 2018 年 2 月 14 日期间共 296 个交易日的 iVX 指数收盘价，以及期间内所有 50ETF 期权的合约类型、合约乘数、行权价格、上市日期、到期日、日收盘价等相关信息。采用 SVIX 编制方案 [(4)和(5)] 计算历史日度 SVIX_50e 指数，计算结果如图1所示。其中蓝色时间序列（实线）代表 SVIX_50e 指数，橙色时间序列（虚线）代表 iVX 指数。图1说明两个指数的数值及走势非常接近，在大部分交易日展现重合状态，在极少部分交易日存在一定范围内的较大偏差，整体历史回测表现较好。

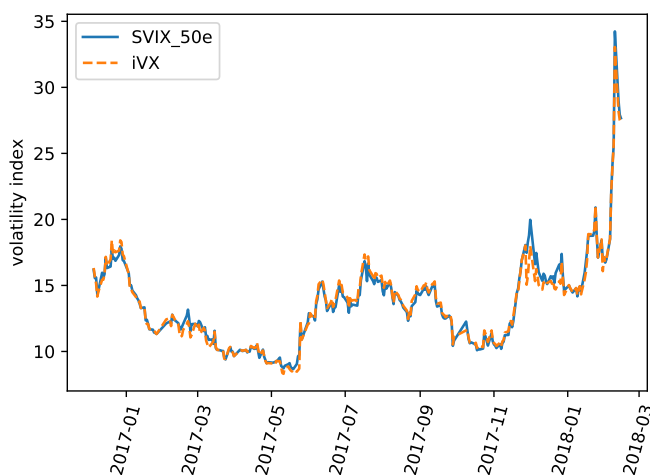


图 1: 2016 年 12 月 5 日至 2018 年 2 月 14 日期间日度 iVX 与 SVIX_50e 指数。

为进一步衡量两指数的具体偏差，我们计算 SVIX_50e 指数相对于 iVX 指数的相对误差，计算公式如下：

$$\text{相对误差} = \frac{\text{SVIX_50e} - \text{iVX}}{\text{iVX}} \times 100\%$$

日度相对误差线性图展现在图2中，相关统计量总结在表1中。

由表1可知，SVIX_50e 指数与 iVX 指数的相对误差绝对值在 0.00% - 16.46% 之间，平均值为 0.31%。此外，精度覆盖率为给定范围内的数据占总数据的百分比，而 SVIX_50e 指数与 iVX 指数的相对误差有 89.86% 在 $\pm 5\%$ 的范围，97.97% 在 $\pm 10\%$ 的范围内，99.32% 在 $\pm 15\%$ 的范围内。进一步观察图2，我们同样发现大部分交易日的波动率指数估计相对误差保持在 $\pm 5\%$ 以内，但在 2017 年年末（2017 年 11 月 28 日至 2017 年 12 月 25 日）集中出现了较大误差，而

最大估计误差 16.46% 出现在 2017 年 11 月 28 日。因此，我们在下一小节对该时间段进行局部回溯以探究产生误差的原因。

表 1: SVIX_50e 指数相较于 iVX 的日度相对误差统计量与精度覆盖率

相对误差统计量	平均相对误差	最小相对误差	最大相对误差
	0.31%	0.00%	16.46%
精度覆盖率	±5% 以内	±10% 以内	±15% 以内
	89.86%	97.97%	99.32%

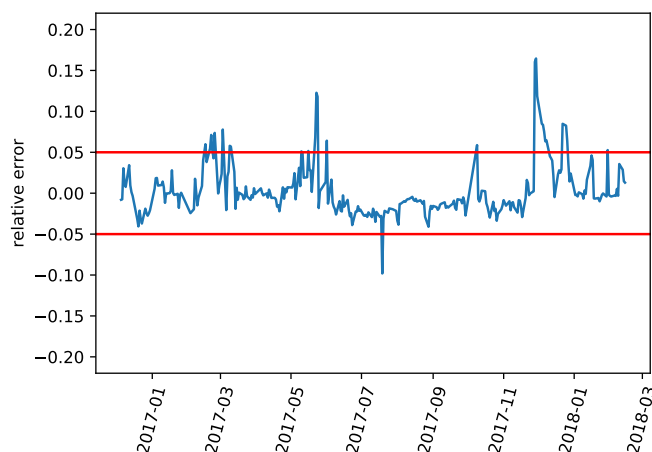


图 2: 2016 年 12 月 5 日至 2018 年 2 月 14 日期间 SVIX_50e 指数相较于 iVX 的日度相对误差。

4.1.2 局部回溯

本节进行日度局部回溯比较。在前一节中，我们发现除个别极端值外，连续出现较大误差的时间段集中在 2017 年 11 月 28 日至 2017 年 12 月 25 日。为探究该时间段内存在误差的具体原因，对其覆盖时间段 2017 年 11 月 20 日至 2018 年 1 月 5 日内的指数计算结果进行局部回溯。回溯结果展示在图3中。

从图中可以看到，2017 年 11 月 28 日（竖直虚线位置），两指数开始出现较大误差，该交易日也是整体回溯中最大误差（16.46%）出现的时间点。当日，iVX 指数出现大幅度下跌，而 SVIX_50e 指数只小幅度减少，导致 SVIX_50e 指数高于 iVX 指数，并在随后的一段时间内一直高于 iVX 指数，但两指数走势相同，并在一个月后几乎重合。

如前文所述，50ETF 波动率指数通常能够反映投资者的情绪变化以及对未来 30 日市场波动的预期。通过数据对比和对市场投资者的调查表明，2017 年 11 月 28 日，市场波动和投资者情绪并无明显变化，投资者亦无通过做空波动率获得大额收益。因此，iVX 指数的下跌与市场波动并无显著关联。事实上，2017 年 11 月 28 日是 50ETF 的分红除息日，期权合约价格与单位进行调整，加挂合约。iVX 指数的编制规则与计算公式只纳入标准合约，因此导致该交易日指数大幅度下跌。而 SVIX_50e 指数在原编制规则基础上进行了改进，采用线性插值方法填补

执行价，使得合约覆盖更充分，从而有效避免了加挂合约导致的指数变化，能够更为客观地反映市场波动和投资者情绪。

综上所述，SVIX_50e 指数在日度数据的历史回测上表现良好，除个别极端值和可解释的较大误差外，SVIX_50e 指数和 iVX 指数在数值上十分接近，走势几乎相同，误差保持在合理范围内，且能够有效修正加挂合约导致的指数跳跃，相较于 iVX 指数，SVIX 指数在加挂合约时期更具有参考价值。

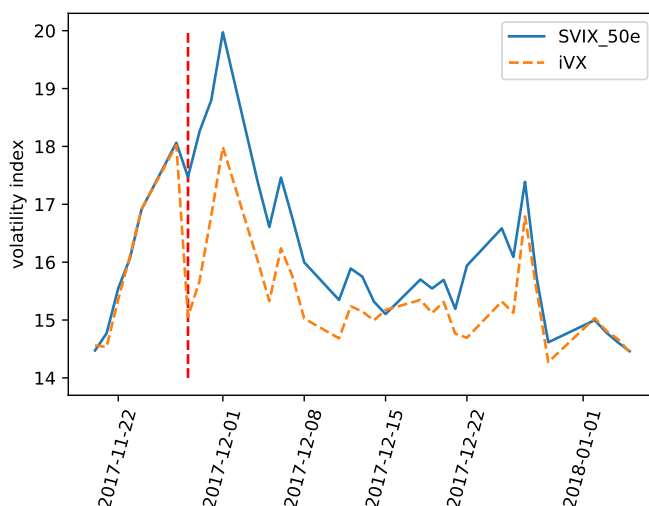


图 3: 2017 年 11 月 20 日至 2018 年 1 月 5 日期间日度 iVX 与 SVIX_50e 指数。

4.2 日内指数历史回测

本节进行日内回测比较。日内数据由聚宽平台获得，包含 2018 年 2 月 2 日以分钟为频率的日内 iVX 指数以及该交易日中的近月期权与远月期权相关信息。同样采用 SVIX 编制方案计算高频日内 SVIX_50e 指数，计算结果展示在图4中。

从图4中观察可得，在该交易日，SVIX_50e 指数和 iVX 指数数值大致相同，走势基本一致。值得注意的是，9:51 分 iVX 指数出现了不合理的大幅下跌，说明原公式的计算结果可能出现短时间内的震荡，而 SVIX_50e 指数计算方法显著修正了震荡问题，得到的走势图也更加合理。

除去 9:51 分产生的极端数据点，我们计算两指数日内回测相对误差。日内相对误差线性图展现在图5中，相关统计量总结在表2中。图5清晰地展示了日内回测误差的情况，大部分误差被控制在 $\pm 0.5\%$ 的范围内，全部误差被控制在 $\pm 1\%$ 以内。

SVIX_50e 指数日内历史回测效果较好，与 iVX 指数偏差保持在合理范围内，并在原指数的基础上修正了短时间内的震荡问题。回测结果表明，SVIX_50e 指数在高频数据中同样体现了自身优势，能够更加客观实时地反映市场波动及投资者情绪。

5 总结与展望

SVIX 指数在上证所编制发布的 iVX 指数规则基础上，插入虚拟合约，从而更加全面地覆盖期权执行价格，有效提高隐含波动率估计准确性。以 SVIX_50e 指数为例，本项目的实证研

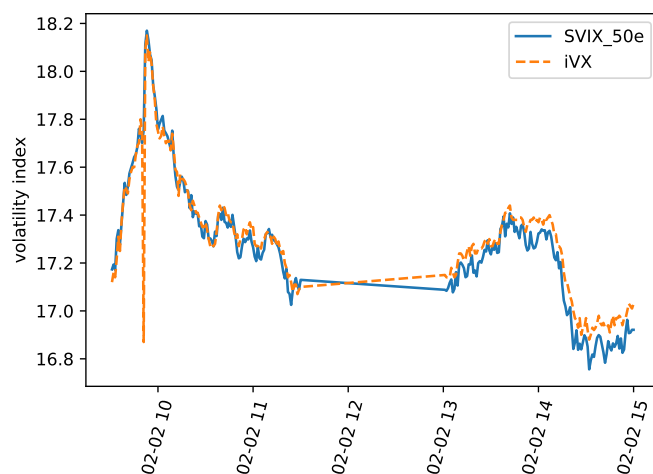


图 4: 2018 年 2 月 2 日 (11:30 至 13:30 期间闭市) 的日内每分钟 iVX 与 SVIX_50e 指数。

表 2: SVIX_50e 指数相较于 iVX 的日内相对误差统计量与精度覆盖率

相对误差统计量	平均相对误差	最小相对误差	最大相对误差
	-0.22%	0.00%	0.93%
精度覆盖率	±0.5% 以内	±0.75% 以内	±1% 以内
	81.17%	97.91%	100.00%

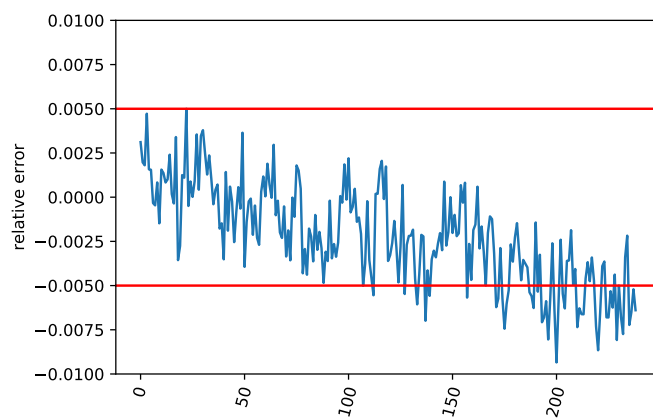


图 5: 2018 年 2 月 2 日 (11:30 至 13:30 期间闭市) 内 SVIX_50e 指数相较于 iVX 的日内相对误差。

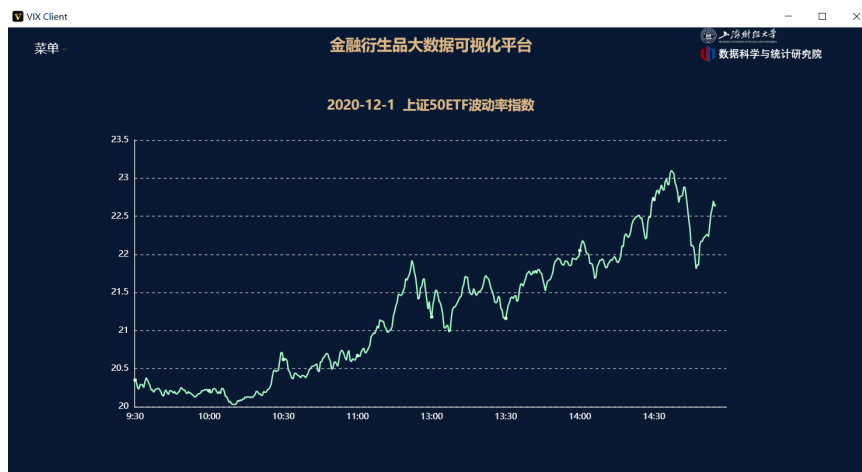
究表明，SVIX 指数的日度及日内回测效果表现良好。在整体回测中，SVIX_50e 指数与 iVX 指数数值十分接近，走势基本一致，相对误差控制在合理范围内。在局部回测中，SVIX_50e 指数能够修正由于加挂合约等因素导致的大幅度涨跌，继而在分红除息日等特殊日期能够更加客观地反映市场波动和投资者情绪。在日内回测中，SVIX_50e 指数同样能够有效避免短时间内的大幅度震荡，为投资者提供实时准确的市场风险参考指标。

本项目未来计划在插值方法与计算方法上进行改进，提高波动率估计准确性，进一步降低异常数据对波动率指数的影响，并对更加广泛的标的资产构建对应波动率指标。

6 软件产品描述

针对 SVIX 指数编制, QFRM 中心研究团队自主开发了相应的软件产品: VIXClient。VIX-Client 软件提供基于 50ETF 和 300ETF 的日度波动率和日内波动率指数。投资者可采用 VIX-Client 软件随时查看历史日度收盘指数和日内指数的行情, 作为市场风险的参考指标。在每个交易日内, 日内指数以 30 秒的频率实时更新, 并作时间序列图示, 如图6所示。

VIXClient 下载链接: ds.shufe.edu.cn/qfrm/producttool.html



(a)



(b)

图 6: VIXClient 软件界面展示。

A 方差互换原理

本节回顾计算期权隐含波动率中采用的方差互换原理。

假设股票价格 S_t 服从伊藤扩散过程，即：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

根据伊藤引理 (Ito's Lemma)，在风险中性测度下方差互换敲定价 K_{var} 有如下分解：

$$\begin{aligned} K_{var} &= E \left[\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \\ &= \frac{2}{T} E \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \right] \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \left[RT - \ln\left(\frac{S^*}{S_0}\right) - \frac{S_0 e^{RT} - S^*}{S^*} \right] \right. \\ &\quad \left. + e^{RT} \left[\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P_{put}(K) dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} P_{call}(K) dK \right] \right\} \end{aligned}$$

上述表达式第二项括号中为：

$$\int_0^{S^*} \frac{1}{K^2} P_{put}(K) dK + \int_{S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} P_{call}(K) dK \quad (6)$$

公式(6)中的 S^* 一般取远期指数水平。此关系式说明方差互换敲定价可用一系列虚值期权和平值期权的期权价格和执行价格复制得到。方差互换敲定价可用来衡量隐含波动率，因此，经典指数通常采用期权复制策略估计隐含波动率。

B 插值设计的理论与实证分析

B.1 误差上界

B.1.1 误差上界比较

根据方差互换原理，隐含波动率需由大量的期权合约执行价和期权价格复制得到。

在实际操作中，我们只能获得数量有限的期权合约，因此，若采用(4)中的数值积分方法估计方差互换的积分(6)会产生一定误差。根据中点法数值积分误差原理，在离散化范围内，由离散化引起的真实积分与数值积分的积分误差上界如下所示：

$$\left| \int_A^B \frac{1}{K^2} P(K) dK - \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} P(K_l^*) \right| \leq N \cdot \frac{(\Delta K^*)^3}{24} \max |g''(K)| \quad (7)$$

其中 ΔK^* 为插值后执行价的间隔距离，在 SVIX 指数的计算中恒为 0.01。执行价的函数 $g(K) = \frac{1}{K^2} P(K)$ ， K 在 $[A, B]$ 范围内取值， $A = K_1^* - \frac{\Delta K^*}{2}$ ， $B = K_N^* + \frac{\Delta K^*}{2}$ ， $P(K)$ 为真实期权价格，由于真实曲线不可得，可用理论模型（如 Black-Scholes 公式）进行估计。

SVIX 指数通过线性内插值 [(1)和(2)] 得到一系列期权执行价 K_l^* 和估计期权价格 $P^*(K_l^*)$, 以此估计 K_l^* 的真实期权价格 $P(K_l^*)$ 。由线性内插值引起的估计期权价格与真实期权价格的插值误差上界如下所示:

$$|P(K_l^*) - P^*(K_l^*)| \leq \frac{\left[\max_i(\Delta K_i)\right]^2}{8} \max |P_l''(K)| \quad (8)$$

其中 $\max_i(\Delta K_i)$ 为能够获取的真实期权合约执行价的最大价格, 通常为 0.1; $\max |P_l''(K)|$ 为插值范围 $[K_i, K_{i+1}]$ 内真实期权价格二阶导绝对值的最大值 ($K_i < K_l < K_{i+1}$), 可用理论模型进行估计。

SVIX 指数首先通过线性内插值得到一系列期权执行价和对应期权价格, 再用数值积分方法估计方差互换的积分式, 总的估计误差包括积分误差和插值误差两部分。根据三角不等式, 结合(7)和(8), 在取定的执行价范围 $[A, B]$ 内, 总的误差上界为:

$$\begin{aligned} & \left| \int_A^B \frac{1}{K^2} P(K) dK - \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} P^*(K_l^*) \right| \\ & \leq \left| \int_A^B \frac{1}{K^2} P(K) dK - \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} P(K_l^*) \right| + \left| \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} P(K_l^*) - \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} P^*(K_l^*) \right| \\ & \leq \left| \int_A^B \frac{1}{K^2} P(K) dK - \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} P(K_l^*) \right| + \sum_{l=1}^N \frac{\Delta K_l^*}{(K_l^*)^2} |P(K_l^*) - P^*(K_l^*)| \\ & \leq N \cdot \frac{(\Delta K^*)^3}{24} \max |g''(K)| + \frac{\Delta K^* \left[\max_i(\Delta K_i)\right]^2}{8} \cdot \sum_{l(K_l \neq K_i)} \frac{1}{(K_l^*)^2} \cdot \max |P''(K)| \end{aligned} \quad (9)$$

另一方面, 若按 iVX 指数公式计算, 即不进行插值只进行离散化, 指数的误差只由积分误差引起, 根据中点法数值积分误差原理, 得到误差上界如下:

$$\left| \int_a^b \frac{1}{K^2} P(K) dK - \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{(K_i)^2} P^*(K_i) \right| \leq n \cdot \frac{\left[\max_i(\Delta K_i)\right]^3}{24} \max |g''(K)| \quad (10)$$

其中, 执行价的函数 $g(K) = \frac{1}{K^2} P(K)$, K 在 $[a, b]$ 范围内取值, $a = K_1 - \frac{K_2 - K_1}{2}$, $b = K_n + \frac{K_n - K_{n-1}}{2}$, $P(K)$ 为真实期权价格。

对比公式(9)和(10), 插值前后误差上界的区别体现在 ΔK^* 和 ΔK_i , N 和 n 上。在 SVIX 的计算中, ΔK^* 取 0.01, 在近一年的实际交易中, ΔK_i 的最大值通常为 0.1, 因此 N 为 n 的 10 倍左右。显然, 插值处理使得合约覆盖更全面, 对积分误差有一个 10^2 的大幅修正。由(9)可知, 插值在大幅修正积分误差的同时, 也带来了真实价格与估计价格产生的插值误差, 因此, 我们需要将插值误差控制在合理范围内。

B.1.2 误差上界估计

上交所官方发布的波动率指数文件中指出, 当行权价覆盖不全时将通过 Black-Scholes 公式填补部分虚拟合约。因, 我们采用 Black-Scholes 模型作为期权价格的真实曲线, 从而估计误差

上界。Black-Scholes 公式下真实价格函数为：

$$P_{call}(K) = SN(d_1) - Ke^{-RT}N(d_2)$$

$$P_{put}(K) = -SN(-d_1) + Ke^{-RT}N(-d_2)$$

其中 $N(d)$ 为标准正态累积分布：

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

S 为标的现价， K 为执行价， R 为无风险利率， T 为到期时间， σ 为隐含波动率， d_1 、 d_2 如下：

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (R + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (R - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

期权价格函数的一阶导数如下：

$$\frac{\partial P_{call}(K)}{\partial K} = -e^{-RT}N(d_2)$$

$$\frac{\partial P_{put}(K)}{\partial K} = e^{-RT}N(-d_2)$$

期权价格函数的二阶导数如下：

$$\frac{\partial^2 P_{call}(K)}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 P_{put}(K)}{\partial K^2} = e^{-RT}N'(d_2) \frac{1}{K\sigma\sqrt{T}}$$

将看涨期权和看跌期权的价格函数统一记为 $P(K)$ ，一阶导记为 $P'(K)$ ，二阶导记为 $P''(K)$ ，则方差互换原理中的被积函数 $g(K)$ 为：

$$g(K) = \frac{1}{K^2}P(K)$$

$g(K)$ 的二阶导数 $g''(K)$ 为：

$$\frac{\partial^2 g(K)}{\partial K^2} = \frac{6}{K^4}P(K) - \frac{4}{K^3}P'(K) + \frac{1}{K^2}P''(K)$$

举例而言：取无风险利率 $R = 0.03$ ，到期时间 $T = 16/365$ ，标的价格 $S = 3.46$ ，隐含波动率 $\sigma = 0.2$ ；真实期权合约行权价 K_i 取 3.0 到 4.0，间隔为 0.1，合约数共 11 个，将上述数据代入 Black-Scholes 模型中得到 11 个真实期权合约价格。真实期权合约执行价和期权价格图像如7所示。针对虚拟合约，每隔 0.01 进行一次线性插值并获得合约价格。共计获得 101 个期权合约。

将上述所有数值代入公式(9)和(10)中可得，不插值时离散部分的积分误差上界为 1.29×10^{-4} ；插值后离散部分的积分误差上界为 1.18×10^{-6} ，插值误差上界为 1.20×10^{-4} ，总误差上界为 1.21×10^{-4} 。与预估一致，在积分误差上，插值效果提升了 10^2 ，插值后插值误差和积分

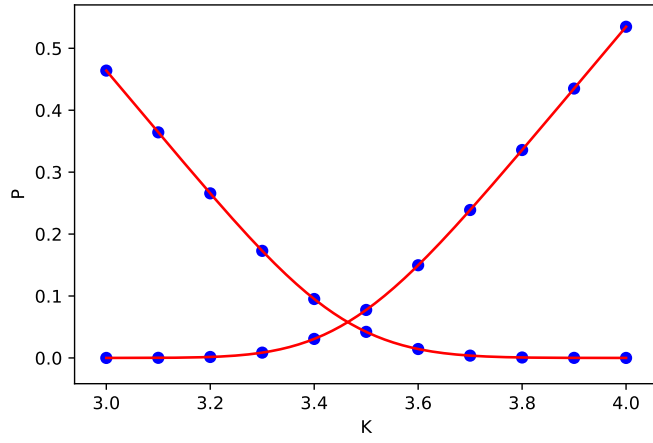


图 7: 由 Black-Scholes 公式计算得到的真实期权价格 P (纵轴) – 期权执行价 K (横轴)。

误差的上界总和小于插值前。根据(4)，方差互换离散近似的误差反映在隐含波动率的方差上应当再乘以系数 $\frac{2}{T}e^{RT}$ ，则插值前和插值后反应在隐含波动率平方的误差上界分别为 5.88×10^{-3} 和 5.54×10^{-3} 。

B.2 插值效果比较

B.2.1 期权价格曲线比较

此节对比线性插值和高次插值的效果。

采用 2020 年 9 月 18 日的次近月期权合约收盘数据进行探究。首先，真实合约行权价序列 K_i 、看涨期权收盘价格序列 $P_{call}(K_i)$ 、看跌期权收盘价格序列 $P_{put}(K_i)$ 的具体数值列于表3中，对应期权价格–期权执行价的散点图如图8所示。

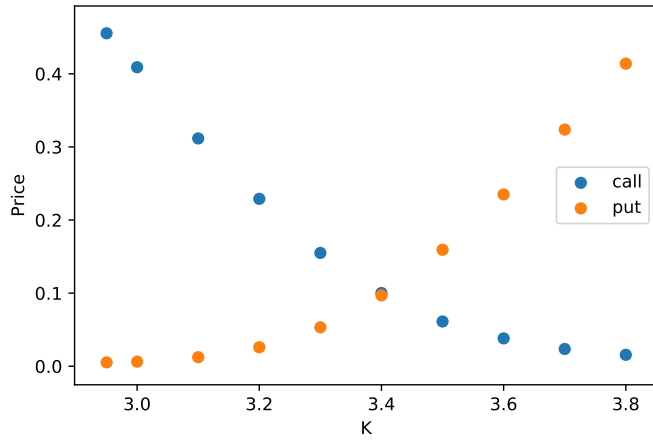


图 8: 2020 年 9 月 18 日次近月期权合约的真实期权价格 P (纵轴) – 期权执行价 K (横轴)。

根据插值设计规则扩充合约，在真实行权价范围内每隔 0.01 插入一张虚拟合约，虚拟行权价为：

$$K_{ij} = K_i + 0.01 \cdot j, \quad i = 1, 2, \dots, 9, \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

表 3: 2020 年 9 月 18 日次近月期权合约相关价格

K_i	$P_{call}(K_i)$	$P_{put}(K_i)$
2.95	0.4554	0.0053
3.00	0.4090	0.0063
3.10	0.3116	0.0124
3.20	0.2290	0.0260
3.30	0.1550	0.0532
3.40	0.1002	0.0969
3.50	0.0612	0.1593
3.60	0.0381	0.2350
3.70	0.0236	0.3237
3.80	0.0156	0.4139

将真实行权价 K_i 和虚拟行权价 K_{ij} 从小到大排列得到填补后的执行价 $\mathbf{K}^* = (K_1^*, \dots, K_{86}^*)$:

$$\mathbf{K}^* = [2.95, 2.96, \dots, 2.99, 3.00, 3.01, \dots, 3.79, 3.80]$$

期权合约个数从原有的 10 个扩充到 86 个。

为验证简便线性插值方法的实际效果，我们分别用线性插值（插值设计中的规则）、二阶样条插值、三阶样条插值、拉格朗日多项式插值对合约看涨期权价格和看跌期权价格进行计算，并绘制填补后的行权价序列与期权合约价格序列关系图，如图9所示。

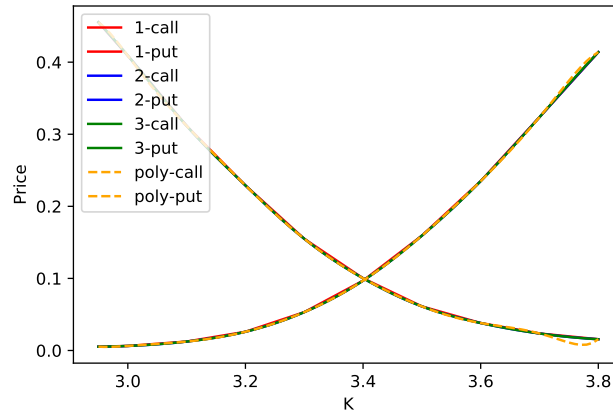


图 9: 2020 年 9 月 18 日次近月期权合约插值填补后的期权价格 P （纵轴）– 期权执行价 K 。

从图9中可以看到，拉格朗日多项式插值提高了拟合阶数，但在边界处反而表现不佳；线性插值、二次样条插值、三次样条插值的图像十分接近，几乎完全重合。因此，简便线性插值方法已能达到较理想的效果。

B.2.2 SVIX_50e 指数计算效果比较

上节的结果表明，二阶以内的插值已经能够得到较为理想的价格曲线。为了验证两种插值结果产生的误差对指数结果是否有显著影响，我们采用 2020 年 9 月 18 日的高频数据进行检验。分别使用线性插值和二阶样条插值的方法，计算对应波动率指数，如图10所示。

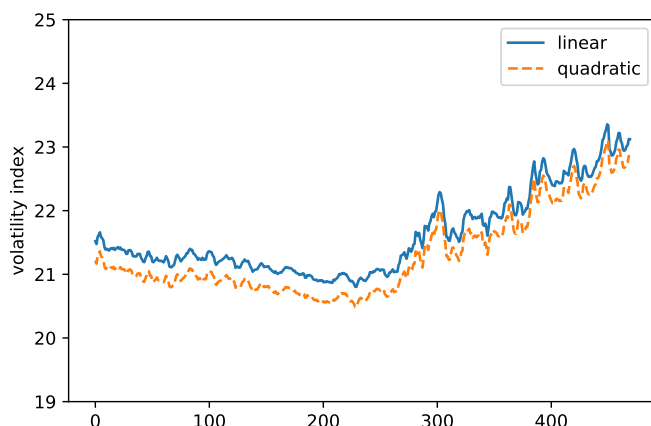


图 10: 2020 年 9 月 18 日的日内 SVIX 指数序列图：分别采用线性插值和二阶样条插值。

从图中能够看到，使用线性插值和二阶样条插值后计算的指数在趋势上几乎完全一致，但在数值上有一定的差别，该差别保持在 0.32(1.56%) 以内。由此可见，线性内插值可以在复杂度更小的情况下得到相对合理的计算结果。因此，本项目在 SVIX 指数的计算中选择线性内插值方法填补期权合约价格。

B.3 实证分析

B.3.1 插值前后历史日度整体回测分析

本节进行线性插值前后波动率指数的效果比较。

采用 2016 年 12 月 5 日至 2018 年 2 月 14 日的日度 iVX 指数，并将插值前后的 SVIX_50e 指数与其进行比较，如图11所示。此外，线性插值前后 SVIX_50e 指数与 iVX 指数的相对误差统计量列举在表4中。从图11上看到，插值后的 SVIX_50e 指数与上证所发布的 iVX 指数明显更加接近；从表4中看到，线性内插值显著提高了计算精度，将误差控制在更低范围内。

表 4: 插值前后 SVIX_50e 指数与 iVX 指数的相对误差

相对误差统计量	平均相对误差	最小相对误差	最大相对误差
插值前	-0.91%	0.01%	21.92%
插值后	0.31%	0.00%	16.46%
精度覆盖率	±5% 以内	±10% 以内	±15% 以内
插值前	69.59%	90.20%	95.61%
插值后	89.86%	97.97%	99.32%

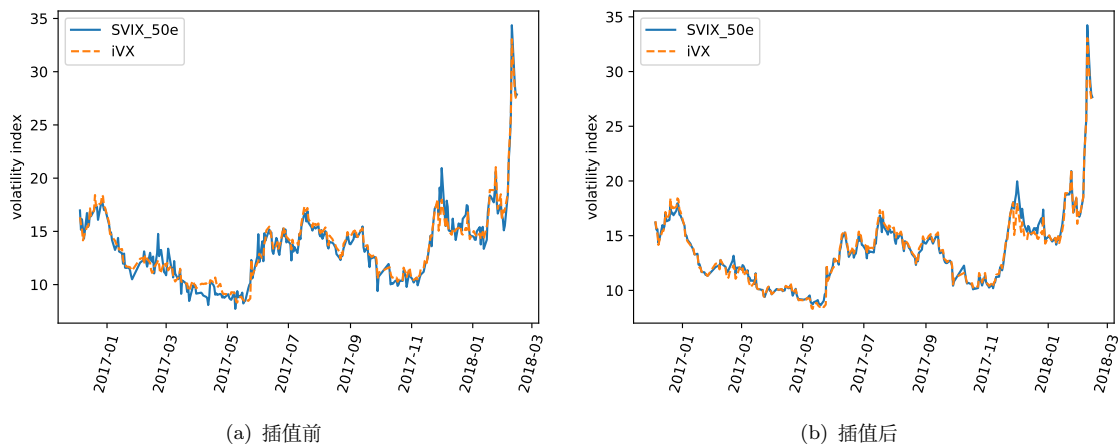


图 11: 2016 年 12 月 5 日至 2018 年 2 月 14 日的日度 iVX 指数与插值前后的 SVIX_50e 指数。

B.3.2 插值前后历史日度局部回测分析

本节针对正文中 2017 年 11 月 20 日至 2018 年 1 月 5 日产生相对误差较大的阶段进行局部回测，详见图12。

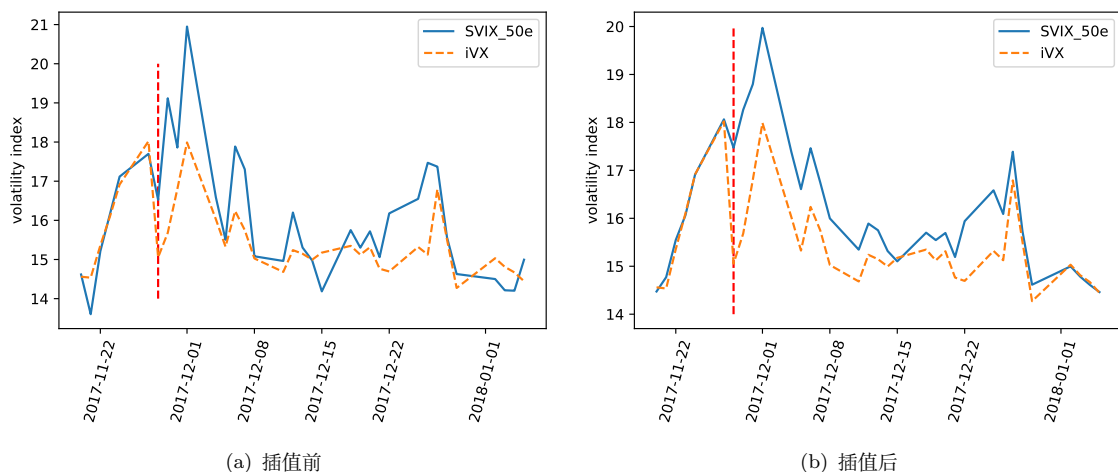


图 12: 局部回测指数效果比较

在 2017 年 11 月 28 日，iVX 指数由于期权合约加挂产生了不合理的大幅度下降，而插值前的 SVIX-50e 指数也产生了较大幅度下降，且在之后的一段时间运行并不稳定；另一方面，插值后的 SVIX_50e 指数修正该日指数大幅下降的问题，且在之后一段时间运行趋势总体与 iVX 指数保持一致，最终数值上也回归一致。

综上所述，线性内插值有效地提高了波动率指数计算结果的精确度和合理性。

参考文献

- [1]. 上海证券交易所 (2016). 上证 50ETF 波动率指数编制方案.
- [2]. Whaley, Robert E. (1993). Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue. *The Journal of Derivatives*, 19: 425–442.
- [3]. CBOE (2018). Cboe Volatility Index (VIX) Index Rules & Methodology.