Exercice 1 : Méthode d'Euler et équation de diffusion .... [⋆]

Introduction On s'intéresse ici à une barre métallique cylindrique dont la surface latérale est calorifugée. Les deux extrémités gauche et droite de la barre sont en contact avec de la glace fondante de température $T_g = 0\,°\mathrm{C}$, qui joue le rôle de thermostat. L'objectif de cet exercice est de résoudre numériquement l'équation de la diffusion thermique dans cette situation simple. On appelle désormais $L = 1\,\mathrm{m}$ la longueur de la barre. On rappelle que l'équation de diffusion thermique s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},}$$

où κ désigne la diffusivité thermique. On considérera un matériau de diffusivité $\kappa = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$.

Nous allons dans la suite déterminer la température $T(x,t)$, en tout point x de la barre, et à tout instant t de l'expérience. Pour cela, nous allons découper la barre en tronçons de longueur $\mathrm{d}x = 1\,\mathrm{cm}$. L'étude sera menée sur une durée de $\Delta t = 30\,\mathrm{min}$, avec un pas temporel de $\mathrm{d}t = 0{,}4\,\mathrm{s}$. La fonction $T(x,t)$ sera donc approximée par un tableau `T[i,j]` de telle sorte que :

$$\boxed{\texttt{T[i,j]} = T(x = jdx, t = idt).}$$

Autrement dit, chaque ligne `i` du tableau correspond à l'instant $t = i\mathrm{d}t$ de l'expérience (la ligne `i=0` correspondant à l'instant initial), et chaque colonne `j` du tableau représente la position $x = j\mathrm{d}x$ (la colonne `j=0` correspondant au bord gauche).

Le tableau utilisé est de type `numpy.array`. On aura de plus besoin du module `matplotlib.pyplot` pour effectuer les représentations graphiques du champ de température. On importe pour cela les modules suivants.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Initialisation

1) On nommera désormais les variables entières `Nt` et `Nx` correspondant respectivement au nombre de lignes et de colonnes du tableau `T`.
   Compléter les lignes suivantes pour définir `Nx` et `Nt` sur Python, et créer le tableau `T` en le remplissant de zéros pour l'instant. Créer également les tableaux `x` et `t` correspondant respectivement aux positions x et aux instants t pour lesquels la température est évaluée.

```python
dx = 1e-2
dt = 4e-1
L  = 1
Deltat = 30*60
```

Solution

```python
Nx = int(L/dx) + 1
Nt = int(Deltat/dt) + 1

T = np.zeros((Nt,Nx))

x = np.array([j*dx for j in range(Nx)])
t = np.array([i*dt for i in range(Nt)])
```

2) On suppose que le profil de température initial a pour expression

$$T(x, t = 0) = T_0 \sin(2\pi x/L),$$

avec $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$. Remplir la première ligne du tableau `T` pour spécifier les conditions initiales de l'expérience.

Solution

```
T0 = 20
T[0,:] = T0*np.sin(2*np.pi*x/L)
```

3) Compléter le code suivant pour tracer l'évolution de la température initiale au sein de la barre.

```
plt.close()
plt.figure()
plt.grid()
plt.xlabel("x (m)")
plt.ylabel("T (°C)")
plt.title("Profil de température initial")
```

Solution

```
plt.plot(x,T[0,:])
plt.show()
```

4) Remplir le tableau `T` de manière à imposer, à tout instant, les conditions aux limites aux deux extrémités de la barre, $T(x = 0, t) = 0$ et $T(x = L, t) = 0$.

Solution

```
        for i in range (1,Nt): # l'instant initial a déjà été traité
          T[i,0]  = 0
          T[i,-1] = 0
```

Discrétisation de l'équation de diffusion Il s'agit donc désormais de résoudre l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

5) En utilisant l'approximation de la dérivée, exprimer $\frac{\partial T}{\partial t}(t = i\mathrm{d}t, x = j\mathrm{d}x)$ en fonction des éléments de matrice `T[i,j]` et `T[i+1,j]`.

Solution

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t}(t = i\mathrm{d}t, x = j\mathrm{d}x) \simeq \frac{\texttt{T[i+1,j]} - \texttt{T[i,j]}}{\mathrm{d}t}}$$

6) Soit une fonction f. En écrivant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour $f(x+\mathrm{d}x)$ et $f(x-\mathrm{d}x)$, démontrer que :

$$f''(x) \simeq \frac{f(x + \mathrm{d}x) + f(x - \mathrm{d}x) - 2f(x)}{\mathrm{d}x^2}.$$

Solution

Les développements de Taylor à l'ordre 2 de $f(x+\mathrm{d}x)$ et $f(x-\mathrm{d}x)$ sont respectivement :

$$f(x+\mathrm{d}x) \simeq f(x) + f'(x)\mathrm{d}x + \frac{f''(x)}{2}\mathrm{d}x^2$$

et

$$f(x-\mathrm{d}x) \simeq f(x) - f'(x)\mathrm{d}x + \frac{f''(x)}{2}\mathrm{d}x^2.$$

En sommant ces deux expressions, on obtient :

$$f(x+\mathrm{d}x) + f(x-\mathrm{d}x) \simeq 2f(x) + f''(x)\mathrm{d}x^2.$$

En isolant $f''(x)$, on obtient bien la relation souhaitée.

7) En déduire l'approximation de la grandeur $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t = i\mathrm{d}t, x = j\mathrm{d}x)$ en fonction des éléments de matrice `T[i,j]`, `T[i,j+1]` et `T[i,j-1]`.

Solution

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t = i\mathrm{d}t, x = j\mathrm{d}x) \simeq \frac{\texttt{T[i,j+1]} + \texttt{T[i,j-1]} - 2\texttt{T[i,j]}}{\mathrm{d}x^2}.}$$

8) En déduire que la résolution de l'équation de diffusion thermique dans la barre se ramène au schéma numérique :

$$\boxed{\texttt{T[i+1,j]} = \texttt{T[i,j]} + \frac{\kappa\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}\left(\texttt{T[i,j+1]} + \texttt{T[i,j-1]} - 2\texttt{T[i,j]}\right).}$$

Résolution On peut montrer qu'un tel schéma numérique converge si

$$\frac{\kappa\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2} < \frac{1}{2}.$$

Avec les valeurs de dx et de dt choisies, cette condition est respectée pour la valeur choisie de la diffusivité thermique $\kappa = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$.

9) Implémenter ce schéma numérique en réalisant une boucle sur `i` et éventuellement sur `j` pour remplir le tableau `T` dans son intégralité.

Solution

```python
kappa = 1e-4
for i in range(0,Nt-1): # on remplit à l'indice i+1
  for j in range(1,Nx-1): # les conditions aux limites sont déjà fixées
    T[i+1,j]=T[i,j]+kappa*dt/(dx**2)*(T[i,j+1]+T[i,j-1]-2*T[i,j])
```

10) On souhaite tracer le profil de température aux différents instants définis dans la liste ci-dessous. Compléter le code ci-dessous de sorte à tracer sur un même graphique légendé l'évolution du profil de température dans le temps.

```python
plt.close()
plt.figure()
plt.grid()
plt.xlabel("x (m)")
plt.ylabel("T (°C)")
plt.title("Profil de température dans la barre à différents instants")

instants = [0,1,3,6,9,12,15,30] # instants choisis en minutes
```

Solution

```python
for t in instants: # tracé du profil du température aux instants choisis
  i = int(t*60/dt)
  plt.plot(x,T[i,:],label="t = "+str(t)+" min")

plt.legend()
plt.show()
```